



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA

RECOVERABLE AIR CARGO SCHEDULING

STEFFAN WIDEMANN GUTIÉRREZ

Tesis para optar al grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Profesores Supervisores:
GUSTAVO ANGULO
FELIPE DELGADO

Santiago de Chile, Septiembre 2021

© MMXXI, STEFFAN WIDEMANN GUTIÉRREZ



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA

RECOVERABLE AIR CARGO SCHEDULING

STEFFAN WIDEMANN GUTIÉRREZ

Miembros del Comité:

GUSTAVO ANGULO

FELIPE DELGADO

MATHIAS KLAPP

DIEGO MORÁN

RODRIGO ESCOBAR

Tesis para optar al grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Santiago de Chile, Septiembre 2021

A mi familia y amigos.

AGRADECIMIENTOS

Primero, quiero agradecer a mi familia por ser un apoyo incondicional durante mis estudios y a lo largo de toda mi vida. A mi madre, Nancy, por guiarme y ayudarme a siempre llegar más lejos. A mi padre, Edgardo, por su alegría y estar siempre ahí cuando lo necesito. A mi hermana, Cassandra, por ser mi confidente y ejemplo a seguir. No habría podido hacerlo sin ustedes.

A continuación, quiero agradecer a mis profesores, Gustavo Angulo y Felipe Delgado, por su increíble disposición y conocimientos con los que me han apoyado desde hace más de dos años. Trabajar con ustedes ha sido un agrado, además de ser una parte clave en mi desarrollo profesional y permitirme tener experiencias invaluableles.

Finalmente, quiero agradecer a mis amigos que han estado conmigo durante esta etapa universitaria. Su compañía y los gratos momentos que pasamos juntos hicieron de este periodo de mi vida algo increíble.

ÍNDICE GENERAL

AGRADECIMIENTOS	IV
Índice de figuras	VIII
Índice de tablas	X
RESUMEN	XI
ABSTRACT	XII
Capítulo 1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Contexto	1
1.1.1. Caracterización de la industria de transporte aéreo de carga	1
1.1.2. Creación de itinerarios para transporte aéreo	8
1.2. Motivación	10
1.3. Objetivos	10
1.4. Estructura	11
Capítulo 2. MARCO TEÓRICO	12
2.1. Diseño de Itinerarios para Transporte Aéreo de Pasajeros	12
2.2. Diseño de Itinerarios para Transporte Aéreo de Carga	14
2.3. Optimización bajo incertidumbre	17
2.4. Descomposición de Benders	19
2.5. Aporte a la Literatura	22
Capítulo 3. METODOLOGÍA	23
3.1. Red espacio-tiempo	23
3.2. Notación	24
3.3. Modelo Determinístico	26
3.3.1. Formulación	27
3.4. Modelo Estocástico Recuperativo	33

3.4.1.	Notación	33
3.4.2.	Formulación	34
3.4.3.	Descomposición de Benders	43
3.5.	<i>Sizebounding</i>	48
3.5.1.	Validez de la cota Q_{sb}	51
3.6.	Relación de Orden	53
3.6.1.	Casos en que no hay similitud	54
3.6.2.	Reglas para la Relación de Orden	56
3.6.3.	Vecindad respecto a 1 vuelos: 1-fv	58
3.7.	Cortes QT	63
3.7.1.	Costo de Transformación	64
3.7.2.	Validez de la cota	65
3.7.3.	Cortes QT proactivos 1-fv	70
3.7.4.	Cortes QT globales 1-fv	71
3.7.5.	Cortes QT globales n -fv	71
3.8.	Algoritmos de resolución	71
3.8.1.	Descomposición básica	71
3.8.2.	Descomposición con cortes QT	72
Capítulo 4.	RESULTADOS	74
4.1.	Parámetros Utilizados	74
4.1.1.	Flota	74
4.1.2.	Aeropuertos	74
4.1.3.	Costos operacionales	75
4.1.4.	Tipo de carga	76
4.1.5.	Ingresos por carga	76
4.2.	Generación de Instancias	77
4.3.	Resultados	78
4.3.1.	Modelos Utilizados	78
4.3.2.	Medidas de Desempeño	79

4.3.3.	Desempeño Naive vs DEF	79
4.3.4.	Comparación entre itinerarios generados instancia d2s20	80
4.3.5.	Rendimiento del modelo DEF ante el aumento de horizonte de planificación	84
4.3.6.	Desempeño descomposición L-shaped	86
4.3.7.	Efecto del sizebounding	87
4.3.8.	Desempeño descomposición con cortes QT	89
4.3.9.	Reducción del gap de optimalidad	91
4.3.10.	Desempeño <i>outsample</i> de las soluciones	93
4.3.11.	Comparación con múltiples semillas	95
Capítulo 5.	CONCLUSIONES	97
	REFERENCIAS	99
	Apéndice	104
A.	Formulaciones Adicionales	105
A.1.	Modelo Determinístico de Ruteo de Aviones (D-AR)	105
A.2.	Modelo Estocástico de Ruteo de Aviones (S-AR)	106
A.3.	Restricciones para cota de <i>sizebounding</i>	107
A.4.	Cortes QT globales 1-fv	108
A.5.	Cortes QT globales n -fv	110
B.	Consideraciones Adicionales	112
B.1.	Costo de Transformación no puede incluir re-timings	112

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1	Costos para una aerolínea de carga.	3
1.2	Carga disponible en horas antes del despegue.	5
1.3	Crecimiento de la industria.	6
1.4	Recuperación de la industria de carga versus la de pasajeros.	7
1.5	Etapas de creación de itinerarios cargueros.	9
3.1	Elementos en la red espacio-tiempo.	26
3.2	Intercambio completo de itinerarios.	27
3.3	Intercambio parcial de itinerarios.	28
3.4	Estructura de los problemas D-ACS.	29
3.5	Estructura de los problemas R-ACS.	35
3.6	Ejemplo de re-timing.	39
3.7	Itinerarios similares.	53
3.8	Cambio en el orden de algún despegue genera estructuras distintas.	55
3.9	Cambiar un vuelo de día en uno nocturno genera estructuras distintas.	56
3.10	Vuelos nocturnos transformados en vuelos de día generan estructuras distintas.	57
3.11	Vuelos similares en una solución dada.	59
3.12	Casos especiales para 1-fv.	62
4.1	Itinerario Naive d2s20.	81
4.2	Itinerario DEF d2s20.	82

4.3	Itinerario <i>outsample</i> Naive d2s20.	83
4.4	Itinerario <i>outsample</i> DEF d2s20.	84
4.5	Efectos del <i>sizebounding</i> en gap y valor Overall de la solución con d2. . . .	88
4.6	Efectos del <i>sizebounding</i> en gap y valor Overall de la solución con d5. . . .	88
4.7	Desempeño insample y Overall de las descomposiciones en instancias con 2 días.	93
4.8	Desempeño insample y Overall de las descomposiciones en instancias con 3 días.	93
4.9	Desempeño insample y Overall de las descomposiciones en instancias con 4 días.	94
4.10	Desempeño insample y Overall de las descomposiciones en instancias con 5 días.	94
4.11	Diagrama de caja soluciones d2s30.	95
4.12	Diagrama de caja soluciones d5s30.	96
B.1	Costos de transformación no pueden considerar re-timings.	112

ÍNDICE DE TABLAS

4.1	Aeropuertos considerados.	75
4.2	Costos operacionales.	75
4.3	Parámetros de la carga generada.	76
4.4	Ingreso por unidad de peso y distancia.	77
4.5	Comparación Naive vs DEF instancia para 2 días.	79
4.6	Alcance DEF con 3 horas.	85
4.7	Detalles L-shaped.	86
4.8	Detalles L-shaped vs L-shaped_sb vs QTb_p d3s30.	89
4.9	Detalles L-shaped vs L-shaped_sb vs QTb_p d4s30.	90
4.10	Cota lagrangiana L-shaped vs L-shaped_sb vs QTb_p d3s30.	92
4.11	Cota lagrangiana L-shaped vs L-shaped_sb vs QTb_p d4s30.	92

RESUMEN

Las aerolíneas de carga planifican sus itinerarios de vuelo considerando niveles de demanda de carga a transportar conocidos, sin embargo, es común que existan diferencias entre la cantidad de carga estimada y la que efectivamente se presenta para ser trasladada. Los planificadores suelen remediar esto mediante correcciones manuales y subóptimas a los itinerarios creados, por lo que existe la necesidad de desarrollar modelos de planificación que consideren la incertidumbre en la demanda.

En esta tesis se propone el problema de *Recoverable Air Cargo Scheduling (R-ACS)*, un modelo de programación estocástica de dos etapas de flujo *multi-commodity* con acciones de recuperación. La idea es crear itinerarios para aerolíneas cargueras que sean eficientes de modificar según las necesidades de cada posible escenario de la demanda, maximizando el valor esperado de la planificación.

El modelo es descompuesto en dos etapas y resuelto mediante un algoritmo tipo Descomposición de Benders. Adicionalmente, se presentan métodos exactos y propiedades para fortalecer la descomposición, planteando distintos esquemas de resolución.

Finalmente, se evalúa el desempeño del R-ACS con su alternativa determinística que considera el valor esperado de los parámetros, y se comparan los distintos esquemas de descomposición planteados. Para los casos estudiados las planificaciones del modelo recuperativo pueden resultar en mejoras de hasta un 2.4% respecto a su alternativa determinística, que corresponde ganancias de aproximadamente USD\$13500, y se concluye la superioridad del esquema de descomposición mejorado frente a los enfoques clásicos disponibles en la literatura.

Palabras Claves: ruteo de aviones, transporte de carga aérea, programación estocástica de dos etapas, modelos recuperables.

ABSTRACT

Cargo airlines plan their flight schedules considering known levels of demands, however, it is common for there to be differences between the amount of cargo estimated and the amount that actually shows up to be transported. Planners often remedy this by manual and suboptimal corrections to the created schedules, so there is a need to develop planning models that consider the uncertainty in demand.

This thesis proposes the Recoverable Air Cargo Scheduling (R-ACS) problem, a two-stage stochastic optimization model based on multi-commodity flow with recovery actions. The idea is to create itineraries for air cargo airlines that are efficient to modify according to the needs of each possible demand scenario, maximizing the expected value of the schedule.

The model is decomposed into two stages and solved using a Benders Decomposition type algorithm. Additionally, exact methods and properties to strengthen the decomposition are presented, proposing different resolution schemes.

Finally, the performance of the R-ACS is evaluated with its deterministic alternative, and the different decomposition schemes are compared. For the cases studied, the recuperative model schedules can result in improvements of up to 2.4% with respect to its deterministic alternative, which corresponds to gains of approximately USD\$13500, and the superiority of the improved decomposition scheme over the classical approaches available in the literature is concluded.

Keywords: aircraft routing, schedule design, two-stage stochastic programming, recoverable problem.

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo se introduce al lector al contexto de la industria de transporte de carga aérea, planteando sus principales características y dificultades. Posteriormente, se presenta la motivación y objetivos de la investigación realizada, y finalmente se establece la estructura de esta tesis.

1.1. Contexto

A continuación se presentan las características generales de la industria, y posteriormente el proceso de planificación de itinerarios cargueros.

1.1.1. Caracterización de la industria de transporte aéreo de carga

El transporte aéreo de carga cumple un rol fundamental al momento de conectar los distintos mercados del mundo. Dado que los aviones son el método de transporte más rápido y seguro existente (Directorate-General for Mobility and Transport, European Commission, 2020), es crucial para el envío de bienes sensibles al tiempo o de gran valor. A pesar de que sólo traslada cerca del 1% de la carga mundial en cuanto a tamaño, el transporte aéreo permite el desplazamiento de un tercio del valor trasladado, correspondiente a 6.7 trillones de dólares para el año 2019 (IATA, 2020). El traslado de carga aérea puede realizarse en aviones de pasajeros utilizando el espacio disponible después de guardar el equipaje (espacio *belly*), o en aviones dedicados exclusivamente al transporte de carga (*freighters*). Sin embargo, por las dimensiones, peso o restricciones particulares de la carga, no toda se puede transportar en aviones de pasajeros. Tomando como ejemplo a LATAM, que se dedica tanto al transporte de pasajeros como de carga, los ingresos obtenidos gracias al envío de bienes representaron el 10.2% de sus ingresos totales en el 2019, y trasladó aproximadamente un 35% de su carga usando sus 9 *freighters* en el 2018 (LATAM, 2018, 2019).

La industria aérea contempla tanto el transporte de pasajeros como el de carga. Aunque este trabajo está enfocado exclusivamente en el segundo, es útil presentar ambos para entender el envío de carga en base a las similitudes y diferencias con respecto al traslado de pasajeros.

Desde el punto de vista de las aerolíneas, ambas industrias están caracterizadas por el alto nivel de competencia, los altos costos de adquisición y mantenimiento de flota, gastos operacionales influenciados tanto por el precio del combustible como los costos de tripulación e impuestos, los bajos márgenes de ganancias y la complejidad de las decisiones de largo, mediano y corto plazo a las que se ven enfrentadas. La Figura 1.1 muestra los costos de operación en vuelo en los que incurre una aerolínea de carga tipo en Estados Unidos para el año 2019 (US Bureau Of Transportation Statistics, 2020). Adicionalmente, la existencia de factores que no se pueden predecir con completa certeza como las condiciones climáticas, desperfectos técnicos en la flota o dificultad para estimar la demanda agrega otro nivel de dificultad a las planificaciones que se deben realizar. Respecto a este último punto, se define la tasa de *show up* como la llegada real de reservas respecto a las reservas realizadas: en el caso de pasajeros es binaria ya que cada viajero puede presentarse o no, mientras que para la carga es continua ya que el cliente puede presentarse con la cantidad de carga pactada, con una cantidad mayor, menor o simplemente no presentarse (un *no-show*).

Algunas diferencias claves entre el traslado de pasajeros y el de carga se dan por el tipo de demanda con la que operan. Para el caso de los viajeros, se espera que la mayoría de las personas eventualmente retorne a su punto origen, lo que suele generar una demanda simétrica o balanceada. Por otro lado, dentro de los productos que envían las aerolíneas de carga se encuentran elementos perecibles como alimentos y vegetales, productos farmacéuticos, elementos de gran tamaño, mercancía de alto valor, materiales peligrosos, carga postal y de mensajería: al trasladar variados ítems correspondientes a diferentes mercados de distintos países, las aerolíneas se ven enfrentadas a desiguales niveles y perfiles de demanda entre cada OD (par de aeropuertos Origen-Destino), con sus correspondientes

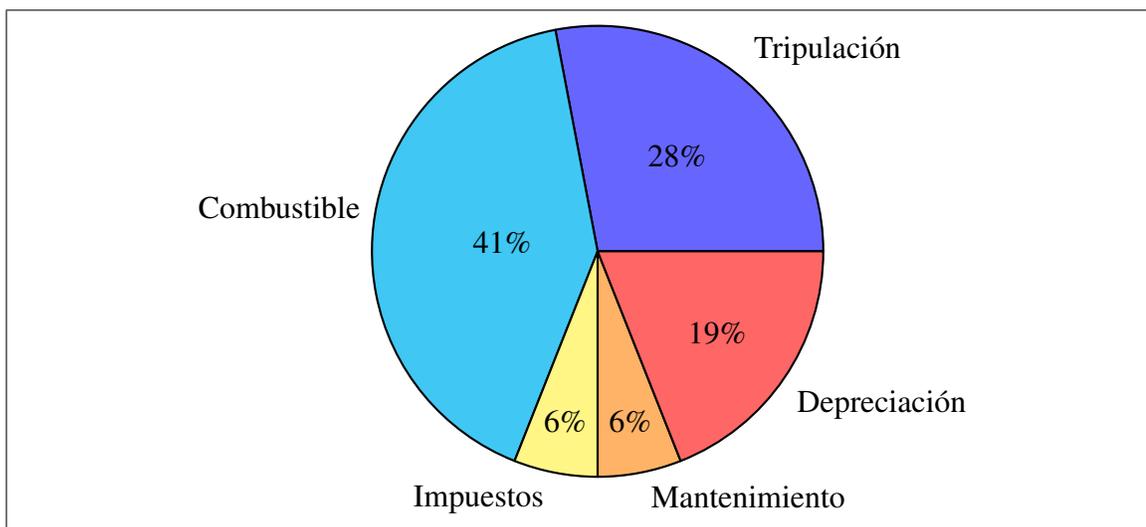


Figura 1.1. Costos para una aerolínea de carga. Fuente: US Bureau Of Transportation Statistics (2020).

tarifas y estacionalidades. A diferencia de la simetría de los pasajeros, la carga presenta una marcada direccionalidad ya que tras ser enviada ésta no regresará. Por ejemplo las importaciones hacia Chile suelen ser de carácter tecnológico y de mercancía de alto valor, mientras que las exportaciones están dominadas por elementos perecibles como salmón, flores y frutas. Kasilingam (1997) presenta una comparación entre el *Revenue Management* en el transporte de pasajeros y de carga, notando que el segundo presenta complejidades adicionales debido al comportamiento de la reserva de carga, y destaca también que debido a los bajos márgenes de ganancia en el transporte de pasajeros, la capacidad de proveer ingresos adicionales mediante el traslado de carga es crucial en la industria aérea.

Otra diferencia relevante es que para el caso de pasajeros, la aerolínea crea *a priori* itinerario base (relativamente simétrico por lo explicado previamente) y los pasajeros eligen en base a esta oferta vuelo(s) para comprar pasajes. Se entiende por itinerario una serie de vuelos a horas específicas y los aviones que los realizarán. Por su parte, las aerolíneas de carga deben decidir además del itinerario de vuelo, la ruta a seguir de cada pedido. Un pedido corresponde a un ítem de carga que la aerolínea puede transportar y le aporta un determinado ingreso en caso de hacerlo. Lo anterior permite una mayor flexibilidad de parte de la aerolínea al permitir enviar los ítems por diferentes rutas alternativas. Sin

embargo, al planificar el ruteo de la carga se requiere tomar en cuenta restricciones de peso y volumen disponible en cada vuelo que se pretenda hacer. A diferencia de la mayor estabilidad y simetría de los itinerarios para pasajeros, la planificación de los aviones de carga puede variar drásticamente entre una planificación y otra dependiendo de la demanda a la que se enfrenta.

Estimar la demanda para el traslado aéreo de carga es sumamente complejo debido a la alta incertidumbre presente en esta industria, causada por:

- (1) Pedidos de gran tamaño y realizados por una cantidad limitada de clientes: los principales actores en la cadena de suministro de carga aérea son los exportadores (*shippers*) que requieren enviar productos, agentes de carga (*freight forwarders*) que administran y coordinan los envíos de diversos exportadores, y las aerolíneas que finalmente realizan el traslado. Como se mencionó previamente, el transporte aéreo mueve un pequeño porcentaje de la carga global, y la existencia de agentes que consolidan la demanda disminuyen aún más la cantidad de clientes que observa la aerolínea y aumentan el tamaño de los elementos a transportar. (Moussawi-Haidar, 2014; Popescu, Keskinocak, Johnson, LaDue, y Kasilingam, 2006).
- (2) Poca anticipación con que se realizan los pedidos: a diferencia del caso de pasajeros, en que la mayoría de los usuarios realiza su reserva con semanas o incluso meses de adelanto, gran parte de la demanda de carga se genera con poca anticipación respecto a la fecha del vuelo, en promedio no más de 30 días previos. Un gran porcentaje de las solicitudes se realizan en las últimas 48 horas antes del despegue como se observa en la Figura 1.2, y éstas suelen pagar las mayores tarifas a las aerolíneas. Esto ocurre ya que el traslado aéreo se requiere cuando los envíos son urgentes, perecibles o de gran valor individual. (Becker y Dill, 2007; Sandhu y Klabjan, 2006; Brandt y Nickel, 2019).

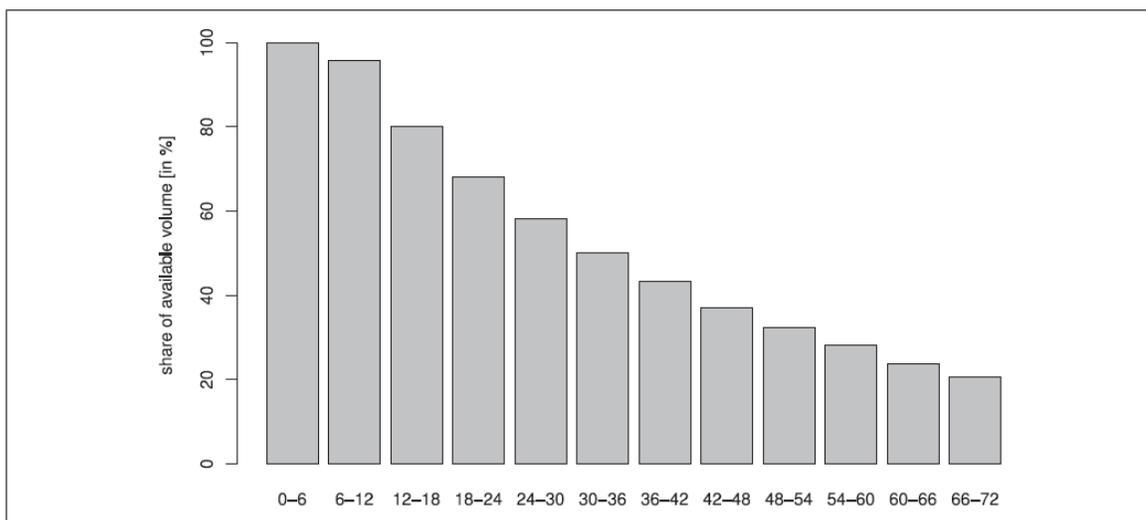


Figura 1.2. Carga disponible en horas antes del despegue. Más del 60% de los ítems llega durante las 48 horas previas al vuelo. Fuente: Brandt y Nickel (2019).

- (3) Variación en la tasa de *show up*: para el momento en que los clientes deben entregar su carga, es común que el peso y tamaño con que se presenten difieran de la cantidad acordada (Huang y Lu, 2015; Levin, Nediak, y Topaloglu, 2012; Amaruchkul, Cooper, y Gupta, 2007). Esta situación es común ya que en muchos casos no existen multas para los clientes por no presentarse con la cantidad acordada de carga ni los *no-shows*, ni para las aerolíneas por no transportar la totalidad del pedido del cliente. Esto ocurre ya que el sistema de reserva de carga se basa en la confianza entre la aerolínea y los clientes: los incentivos del cliente para tener un *show up* del 100% y de la aerolínea de mantener un buen nivel de servicio se explican por la necesidad de mantener buenas relaciones para negocios futuros (Wada, Delgado, y Pagnoncelli, 2017; Feng, Li, y Shen, 2015; Moussawi-Haidar, 2014).

Debido a las diferencias entre la carga acordada con la que se realiza la planificación y la que realmente se presenta para ser transportada, las aerolíneas deben modificar sus itinerarios diariamente, proceso que suele ser realizado a mano y en base a la experiencia

de los planificadores, cambiando el itinerario tanto de la carga como de los aviones de la flota, incluso llegando a agregar o eliminar vuelos previamente planificados (Derigs y Friederichs, 2013).

Durante el año 2019 las aerolíneas de carga obtuvieron ganancias correspondientes a 102.4 billones de dólares, una disminución de 9 billones respecto al año anterior, que coincide con la disminución de volumen transportado. Como se observa en la Figura 1.3, el indicador de carga transportada *Cargo Tonne Kilometres* (CTK) bajó por primera vez desde el año 2012, reflejando la reducción del mercado a nivel mundial. En este desafiante contexto, las aerolíneas se ven en la necesidad de maximizar la eficiencia de sus servicios de transporte de carga (IATA, 2020).

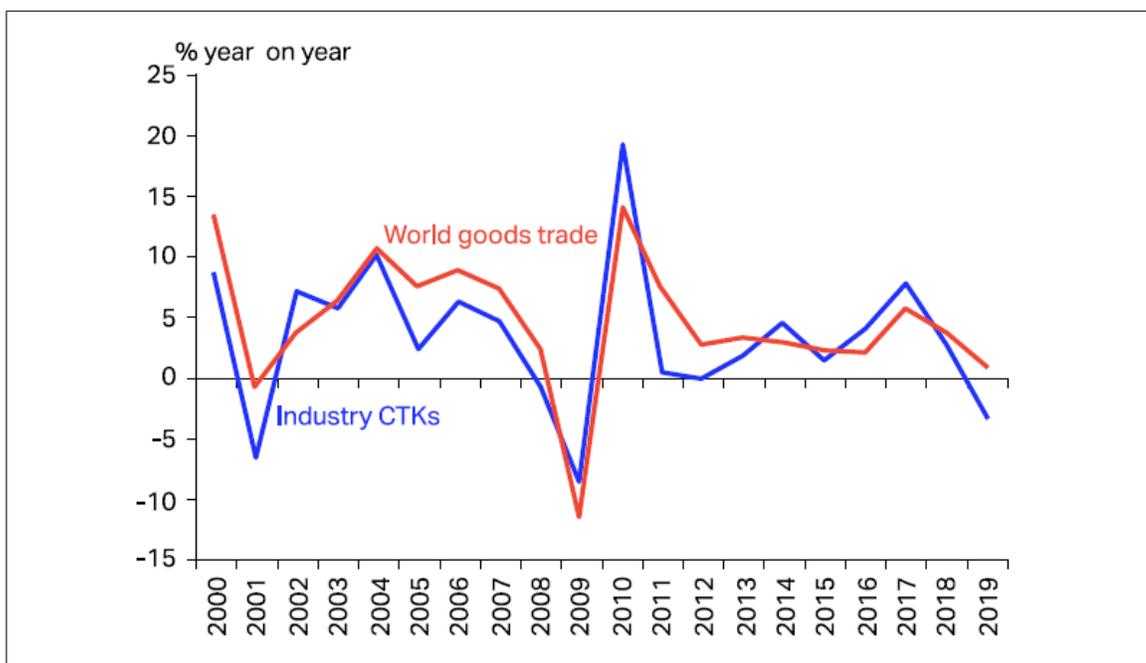


Figura 1.3. Crecimiento de la industria de transporte aéreo de carga versus el transporte de carga en general. El transporte aéreo se redujo en un 3.2%, mientras que el transporte global desaceleró su crecimiento de 3.7% en 2018 a 0.9% en 2019, su peor desempeño desde el 2009. Fuente: IATA (2020).

El año 2020 estuvo marcado por el inicio de la pandemia mundial COVID-19. Las restricciones de traslado a nivel global afectaron significativamente a las aerolíneas, con pérdidas operacionales que llegaron a superar el 70% de sus ingresos. En este contexto, el transporte aéreo de carga ha jugado un rol clave tanto en mantener económicamente a flote a las aerolíneas, pasando de representar entre el 10% y 15% de sus ingresos a más de 35% en el año 2020, como en mantener las cadenas de suministro globales en movimiento, incluyendo el transporte de vacunas, mascarillas, equipamiento médico, entre otros. Para fines del 2020 la industria de carga aérea ya presenta niveles de demanda superiores a los del año 2019 como se observa en la Figura 1.4, y se proyecta que durante el 2021 mantendrá su importancia representando el 30% del total de los ingresos de las aerolíneas (IATA, 2021).

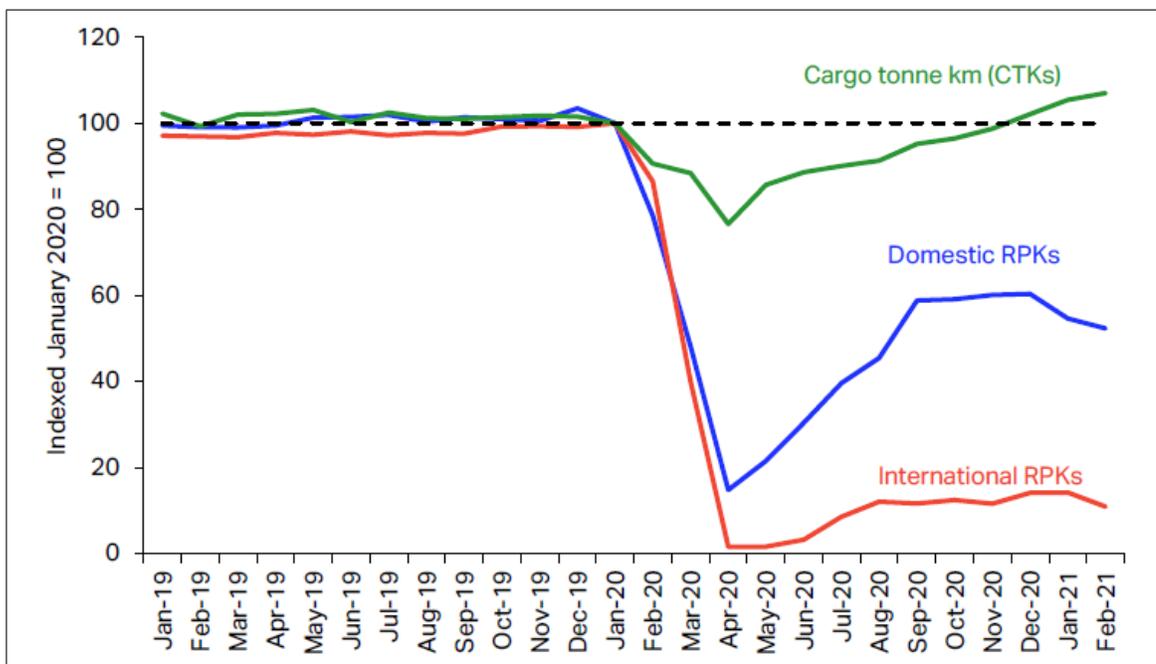


Figura 1.4. Recuperación de la industria de carga versus la de pasajeros. Se presentan CTK y su equivalente para pasajeros RPK (*Revenue Passenger Kilometres*, número de pasajeros que pagan multiplicado por la distancia recorrida). Indexado con el valor de Enero 2020 como 100. Fuente: IATA (2021).

1.1.2. Creación de itinerarios para transporte aéreo

La planificación que debe realizar una aerolínea, ya sea de pasajeros, de carga o mixta, incluye decisiones de carácter estratégico de largo plazo como la planificación de flota, y de mediano plazo como la selección de rutas aéreas a operar y la elaboración de itinerarios de viaje. Dichas decisiones corresponden a la selección de modelos de aviones a adquirir o dar de baja y en qué cantidad, seleccionar entre cuáles aeropuertos realizar viajes con la flota previamente definida, y finalmente establecer un calendario especificando los vuelos a realizar y el avión que lo operará. Este trabajo se centra en la tercera decisión, en la que históricamente la investigación de operaciones ha tenido un rol fundamental para abordar los desafíos de creación de itinerarios. Debido a la alta complejidad y escala de realizar esta planificación, se suele descomponer en los siguientes sub-problemas (Belobaba, Odoni, y Barnhart, 2009):

- (1) Diseño de itinerario: consiste en seleccionar los pares OD en los que se operará y definir que tramos de vuelos se realizarán, en base a estudios previos de la demanda potencial. Cada tramo de vuelo está definido por su aeropuerto de origen, hora de despegue, aeropuerto de destino y hora de aterrizaje. Para las aerolíneas de pasajeros se suele asociar también un plan de frecuencia que define en el mediano plazo en cuáles días se realizan los vuelos.
- (2) Asignación de Flota: para el traslado de pasajeros corresponde en encontrar una asignación de tipos de aviones a un itinerario de vuelos a realizar fijo y previamente definido, buscando maximizar las ganancias (o equivalentemente minimizar los costos) y respetando tanto la composición como el flujo de la flota existente. Sin embargo, una diferencia fundamental en el contexto de transporte de carga es que no existe un itinerario de vuelos predefinidos a satisfacer al no estar condicionado a la estabilidad que requieren los vuelos de pasajeros. Esto significa que aun teniendo definido entre qué pares de aeropuertos se realizarán viajes para transportar carga, es necesario elegir qué potencial vuelo se realizará o no, agregando otro grado de libertad y dificultad al problema.

- (3) **Ruteo de Aviones:** es asignar a cada tramo de vuelo definido a operar un avión *específico* (matrícula o número de cola del avión) de manera consistente con la asignación de flota, asegurándose de que cada vuelo seleccionado sea operado y que cada avión realice una secuencia de viajes factibles. Se puede extender para considerar restricciones de mantenimiento, límite de horas de vuelo u otras condiciones particulares.
- (4) **Asignación de Tripulación:** consiste en obtener la asignación de pilotos y auxiliares de vuelo a los vuelos programados que minimiza el costo. Se realiza respetando regulaciones laborales entre vuelos realizados y descansos programados.
- (5) **Ruteo de Carga:** en base a un ruteo de aviones existentes se asigna una secuencia de vuelos a realizar a cada elemento a transportar entre las fechas acordadas con el cliente. Debe considerar restricciones de capacidad tipo *knapsack* (problema de la mochila) para el peso y volumen de la carga.

Debido al gran tamaño y complejidad de las decisiones, los sub-problemas anteriormente mencionados suelen resolverse de forma independiente y secuencial, en que el resultado de una etapa es la información de entrada para la siguiente. La Figura 1.5 presenta un esquema de construcción de itinerarios cargueros secuencial iterativo, en que los primeros cuatro problemas se resuelven y luego se evalúa el itinerario generado al resolver el problema de ruteo de carga: si éste no tiene un resultado satisfactorio se iteran las etapas previas.

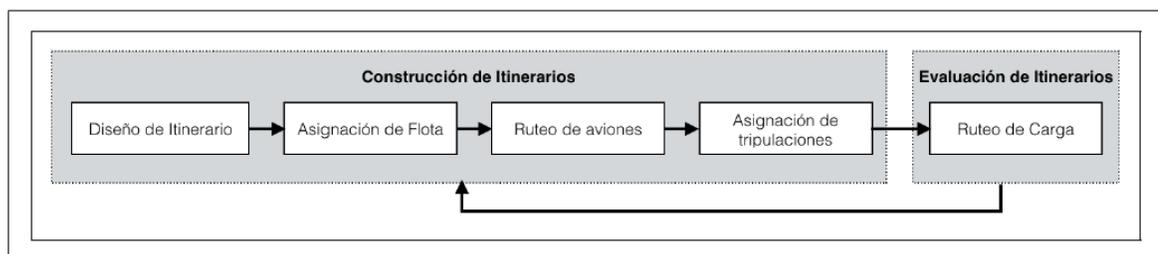


Figura 1.5. Etapas de creación de itinerarios cargueros. Fuente: Derigs y Friederichs (2013).

1.2. Motivación

La operación eficiente de las aerolíneas de carga depende de su planificación inicial y su capacidad de realizar correcciones apropiadas en base a las situaciones a las que se ve enfrentada, en particular a los distintos posibles escenarios para la demanda. La modificación que se realiza actualmente a los ruteos, tanto de carga como de aviones, al ser manual y reactiva a la incertidumbre, posiblemente genere soluciones sub-óptimas, por lo que es relevante estudiar posibles métodos de planificación que incorporen tales condiciones, con el fin de maximizar la eficiencia operacional.

1.3. Objetivos

El objetivo principal de este trabajo consiste en responder la pregunta: ¿Implementar un modelo de optimización estocástica recuperable de dos etapas, que considera la incertidumbre de la demanda y determina políticas para cada escenario posible, genera planificaciones con mejor desempeño que los itinerarios creados mediante modelos determinísticos tradicionales? Se entiende por recuperable un modelo de optimización de dos etapas en que, en base a una solución inicial de primera etapa, las decisiones de segunda etapa pueden modificar o recuperar la solución inicial para adaptarse a la incertidumbre.

Los objetivos específicos son:

- (1) Formular un modelo estocástico recuperable de dos etapas para el ruteo de aviones y el ruteo de la carga.
- (2) Determinar si existen casos en que utilizar dicho modelo sea más beneficioso que los generados mediante métodos tradicionales.
- (3) Implementar técnicas de descomposición para permitir al modelo abordar instancias con múltiples posibles escenarios para los elementos aleatorios.
- (4) Evaluar el desempeño del modelo en una serie de instancias generadas, observando tanto el desempeño computacional como la calidad de la solución obtenida.

1.4. Estructura

Esta tesis está organizada de la siguiente manera: el capítulo 2 presenta los principales trabajos relevantes respecto a la planificación de carga aérea, la literatura relevante respecto a los métodos de resolución que se han implementado previamente, y se introduce al lector al concepto de optimización estocástica en dos etapas, ya que es la metodología implementada en el presente trabajo.

En el capítulo 3 se presenta la notación utilizada en los modelos realizados y se plantea la formulación del problema tanto en su forma determinística como estocástica. Para la formulación estocástica se explica el método de descomposición utilizado para su escalamiento en cuanto a la cantidad de posibles escenarios considerados, junto a las mejoras implementadas a dicha separación: *sizebounding* y cortes QT.

En el capítulo 4 se detalla la forma en que se generan las instancias y se analizan los resultados tras su resolución, observando tanto la calidad de la solución obtenida como el desempeño computacional logrado.

Finalmente, en el capítulo 5 se concluye este trabajo y se presentan las posibles líneas de investigación.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se presentan las publicaciones más relevantes para el presente estudio. Aunque este trabajo se enfoca exclusivamente en el transporte de carga, se presentan algunas investigaciones aplicadas al transporte de pasajeros para dar más contexto en la Sección 2.1. A continuación, en la Sección 2.2 se introduce al lector al problema de Creación de Itinerarios de Carga Aérea, que considera los problemas de Asignación de Flota, problema de Ruteo de Aviones y el problema de Ruteo de Carga mencionados en el capítulo anterior. Posteriormente, en la Sección 2.3 se presenta la literatura relacionada con la optimización bajo incertidumbre, con particular atención en la modelación dos etapas. A continuación, en la Sección 2.4 se presenta un método de descomposición que suele aplicarse en la resolución de problemas con formulaciones de dos o más etapas. Finalmente, en la Sección 2.5 se presentan los aportes a la literatura de este trabajo.

2.1. Diseño de Itinerarios para Transporte Aéreo de Pasajeros

Tal como se señaló en la Sección 1.1, debido al tamaño de los problemas de planificación resulta muy difícil resolver integradamente los sub-problemas asociados a la creación itinerarios de transporte aéreo, por lo que los primeros intentos de resolución utilizan un enfoque de resolución incremental. Sin embargo, a pesar de utilizar esta división los problemas individuales pueden ser desafiantes: un caso importante es el trabajo de Hane y cols. (1995), en que proponen el modelo básico utilizado para el problema de asignación de flota utilizando un itinerario de vuelos existente, para el cual plantea un problema de optimización con variables enteras-mixtas (*mixed-integer problema* o MIP) con restricciones de flujo *multi-commodity* y restricciones de cobertura para los arcos de vuelo predefinidos a ser operados. Observan que al ser un problema degenerado junto a tener una gran cantidad de variables binarias, llegar a soluciones óptimas es complejo y requiere de altos tiempos de cómputo.

Separar las etapas del proceso de planificación tiene la desventaja de que, a pesar de poder resolver a optimalidad los sub-problemas locales, no se certifica que se llegue al óptimo global del problema completo. Debido a los bajos márgenes de operacionales que caracterizan a la industria, esta posible ganancia en eficiencia puede ser sumamente relevante, por pequeña que sea. Considerando esto, y gracias a los avances en capacidad de procesamiento y técnicas de optimización, los métodos de resolución han cambiado su enfoque con el fin de resolver simultáneamente más de una etapa. Algunos trabajos que consideran este enfoque son los de Pita, Barnhart, y Antunes (2013) y Sherali, Bae, y Haouari (2013).

Con el fin de resolver problemas que consideran la incertidumbre que puede afectar al transporte de pasajeros, se suele utilizar uno de los dos paradigmas principales: aplicar optimización reactiva ante dichas posibles perturbaciones, o crear itinerarios que proactivamente puedan absorber las disrupciones o faciliten el trabajo de recuperación necesario. Para el enfoque reactivo Clausen, Larsen, Larsen, y Rezanova (2010) hacen un a revisión de las metodologías existentes para manejar las perturbaciones una vez que estas ya afectaron a la planificación utilizada, mientras que dentro de los trabajos proactivos destacan la planificación robusta para minimizar el tiempo de espera de los pasajeros de Lan, Clarke, y Barnhart (2006), y la optimización robusta recuperable para reducir fácilmente el efecto de las disrupciones y costo de recuperación de Froyland, Maher, y Wu (2014). El enfoque proactivo será el utilizado en el presente trabajo, y resulta de particular interés la formulación de Froyland y cols. (2014), aunque sólo la aplican para planificaciones de un único día.

La planificación de itinerarios bajo incertidumbre es un área ampliamente estudiada para el transporte de pasajeros, sin embargo, no se puede decir lo mismo del transporte aéreo de carga (Delgado y Mora, 2021). La explicación de esto es que estas industrias se ven afectadas por distintos tipos de disrupciones, por lo que los métodos no son fácilmente aplicables de una industria a otra. Hay dos diferencias fundamentales entre el transporte de pasajeros y de carga. En primer lugar, para el caso de pasajeros la principal causa de

incertidumbre está relacionada con fallas mecánicas o imprevistos climáticos, mientras que para el caso de carga la incertidumbre es inherente a la demanda. En segundo lugar, los métodos de recuperación de itinerarios de pasajeros deben considerar los retrasos y tiempos de espera de los clientes, mientras que para la carga esto no es relevante con tal de que esta llegue a su destino en el plazo acordado. Por lo tanto, la posibilidad de re-rutear o transbordar carga da más flexibilidad a las modificaciones que se le pueden hacer a itinerarios de carga.

En la Sección 2.3 se abordan en más detalle los métodos optimización bajo incertidumbre más utilizados.

2.2. Diseño de Itinerarios para Transporte Aéreo de Carga

Marsten y Muller (1980) realizan uno de los primeros trabajos respecto a la planificación de flota y asignación de flota para una aerolínea de carga, planteando un MIP *single-commodity* sobre una red con un *hub* central. Los dos problemas abordados son en primer lugar diseñar la red, definida como el conjunto de pares OD entre los que se transportará la carga, y en segundo lugar resolver el problema de selección y asignación de flota para evaluar el diseño anteriormente mencionado.

Lin y Chen (2003) plantean un modelo de optimización *multi-commodity* utilizando el espacio *belly* de aviones de pasajeros para trasladar la carga, con sus asociadas restricciones de capacidad y estructurales de los itinerarios. Consideran una red capacitada, en que los nodos son aeropuertos y los arcos contemplan costos y límites para el transporte, y entre las decisiones del modelo están la selección de aeropuertos para satisfacer la demanda y en cuáles de ellos realizar transferencias.

Yan, Chen, y Chen (2006) proponen un modelo que aborda de forma simultánea la selección de aeropuertos, asignación de flota y ruteo de aviones para crear itinerarios de carga integrales para un horizonte de planificación de 7 días. Formulan un MIP de complejidad *NP-hard* consistente en un problema de flujo *multicommodity*, superponiendo

múltiples redes: una para cada avión de la flota y para cada ítem de carga a transportar. Para resolver el problema de crear un itinerario desde cero y obtener la asignación y ruteo de aviones proponen una heurística consistente en limitar la cantidad de paradas intermedias que puede realizar cada elemento a transportar, desde cero (sólo vuelos directos) hasta total libertad (realizando todas las paradas intermedias necesarias). Sin embargo, su formulación no considera la posibilidad de que la carga realice transbordos entre aviones. Este modelo es posteriormente extendido por Tang, Yan, y Chen (2008) quienes integran vuelos de aviones cargueros y de pasajeros, considerando el espacio *belly* de los segundos. Utilizan una relajación lagrangeana en conjunto con un método de subgradiente para implementar una serie de heurísticas de resolución.

Derigs, Friederichs, y Schäfer (2009) desarrollan un modelo integrado para la planificación de la red de aviones de carga considerando simultáneamente la selección de vuelos, planificación de rotación de los aviones y el ruteo de la carga. Utilizan un enfoque incremental para mejorar los itinerarios mediante la selección de vuelos a partir de una lista de vuelos obligatorios y opcionales. Derigs y Friederichs (2013) continúan este análisis, pero se enfocan en refinar y adaptar un itinerario existente en vez de crearlo desde cero, con el fin de abordar de instancias de tamaños más realistas. Notamos que usan un itinerario existente sólo con el fin de acelerar la resolución del problema, pero no utilizan un enfoque recuperable para crear una planificación que posteriormente sea modificable.

Feng y cols. (2015) realizan una revisión al estado del arte de la investigación operativa aplicada al transporte de carga aérea, mencionando publicaciones que abordan desde las estrategias industriales hasta la forma de cargar los contenedores. Para abordar la incertidumbre de la demanda se suelen plantear problemas de *revenue management* modelados como problemas de programación estocástica de dos etapas para decidir si se aceptan o no las solicitudes de transporte, sin embargo, ninguno de los estudios presentados hasta ese momento se contempla incorporar la incertidumbre al momento de planificar los itinerarios de los vuelos ni la posibilidad de reaccionar ante variaciones en la demanda.

Yildiz y Savelsbergh (2019) desarrollan modelos de optimización *multi-commodity* para envíos *express* de un operador logístico en China, que consideran simultáneamente el transporte terrestre y aéreo, con capacidad propia en aviones de carga y capacidad comprada en espacio *belly* de aviones de pasajeros. Consideran dos patrones de demanda, el primero consiste en un bajo volumen de carga a ser transportada entre una gran cantidad de ciudades, y el segundo representa un alto volumen de carga a ser trasladado entre un número reducido de ciudades. En base a sus experimentos concluyen que resulta eficiente comprar espacio en aviones de pasajeros para transportar la demanda del primer tipo, mientras enfocan sus aviones de carga propios en atender las pocas ciudades que presentan altas demandas.

Delgado, Trincado, y Pagnoncelli (2019) proponen un modelo estocástico multietapa para asignar carga al espacio *belly* de vuelos de pasajeros, en que la incertidumbre está determinada por la capacidad de cada vuelo que queda libre después de que se ingresa el equipaje a los aviones. La incertidumbre es modelada como un árbol de escenarios, y se utilizan restricciones probabilísticas para exigir que la solución transporte la carga con alta probabilidad. Este trabajo considera una red de vuelos de pasajeros previamente definida, por lo que no se considera la posibilidad de modificar los itinerarios existentes.

Delgado, Sirhan, Katscher, y Larrain (2020) son los primeros en considerar recuperación de itinerarios para aviones cargueros, y proponen el *Air Cargo Schedule Recovery Problem* (ACSRP): un modelo de programación entera para modificar los vuelos de un itinerario existente con el fin de adaptarse a cambios de último minuto en la demanda. Posteriormente, Delgado y Mora (2021) plantean un problema que consiste en modificar un itinerario existente frente a interrupciones de último minuto, modelado como un problema de *Pickup and Delivery* con ventanas de tiempo para aviones cargueros, y considera simultáneamente el re-diseño de itinerarios, ruteo de aviones y de carga, utilizando una matheurística para obtener rápidamente soluciones de calidad. Notamos que estos trabajos no utilizan un enfoque proactivo en la creación de un itinerario, sino que usan uno reactivo al recuperar una planificación existente afectada por alguna perturbación.

2.3. Optimización bajo incertidumbre

En la optimización determinista se asume que se conocen con exactitud todos los parámetros del problema, mientras que la optimización estocástica relaja este supuesto, considerando ahora variables aleatorias con distribución que puede ser o no conocida. La incertidumbre suele asociarse a sistemas en que la información sólo se hace conocida en el futuro, después de cuando se debe tomar alguna o todas las decisiones del problema. Esta metodología fue presentada en el trabajo pionero de Dantzig (1955), y desde entonces ha sido ampliamente extendida y aplicada en diversas áreas, tal como detallan Li y Grossmann (2021).

La aleatoriedad se puede presentar de diversas maneras, y por eso mismo existen distintas formas de abordarla. Una forma clásica es considerar la representación de la incertidumbre como un conjunto de posibles escenarios, y utilizar una Formulación de Dos Etapas en que se hace una distinción entre las decisiones que se deben tomar sin tener información completa (llamadas decisiones de primera etapa, x) y las que se toman cuando se realiza uno de los posibles escenarios (llamadas decisiones de segunda etapa, y). Se busca optimizar el costo de las decisiones de primera etapa y el valor esperado de las decisiones de segunda etapa, condicionadas a las realizadas en la primera (Birge y Louveaux, 2011).

La formulación para un problema de dos etapas que minimiza el costo de primera etapa más el costo esperado de segunda etapa es:

$$\min \quad c^T x + \mathbb{E}[Q(x, \xi)] \quad (2.1)$$

$$\text{s.a } Ax \geq b \quad (2.2)$$

$$x \in X, \quad (2.3)$$

donde $Q(x, \xi)$ es el valor óptimo del problema de segunda etapa:

$$Q(x, \xi) = \min q^T y \quad (2.4)$$

$$\text{s.a } Wy \geq h - Tx \quad (2.5)$$

$$y \in Y \quad (2.6)$$

y $\xi := (q, h, T, W)$ denota los parámetros del problema de segunda etapa, que pueden ser parcial o completamente aleatorios. Es relevante destacar que el valor de segunda etapa es costoso de calcular, ya que para cada posible realización de las variables aleatorias y vector de solución de primera etapa es necesario resolver el problema de segunda etapa, que puede ser un MIP según el tipo de decisiones consideradas.

Adicionalmente, otras formas de abordar la incertidumbre propuestas en la literatura incluyen:

- Optimización multi-etapa: extensión de la formulación anterior, en que se considera que la información se puede revelar en múltiples ocasiones. Pereira y Pinto (1991) presentan un trabajo de planificación de energía usando esta metodología.
- Optimización robusta: cuando es necesario obtener una solución que sea factible o tenga un buen desempeño en todo posible escenario, o cuando no se tiene información respecto a las probabilidades de cada realización. Este enfoque ha sido utilizado en el diseño de redes de transporte terrestre cuando hay incertidumbre en demandas y tiempos de viaje, tal como se presenta en el trabajo de Ordonez y Zhao (2004).
- Optimización robusta recuperable: una solución es robusta recuperable si, sin necesariamente ser factible para todo escenario, puede ser modificada mediante acciones limitadas para hacerla factible (recuperada) en cualquier escenario. Álvarez Miranda, Fernández, y Ljubić (2015) plantean un problema de *facility location* en que se realiza una selección inicial de instalaciones tal que sea barata de recuperar en todo escenario, ya sea mediante la re-asignación de clientes a instalaciones originales o mediante la apertura de nuevas instalaciones.

- Restricciones probabilísticas: utilizada cuando es necesario que algunas condiciones se cumplan para un cierto nivel de confianza. Aggarwal y Singh (2015) plantean un modelo multiobjetivo de selección de proveedores para una cadena de valor, con restricciones probabilísticas para asegurar un bajo nivel de riesgo a pesar de la incertidumbre en la capacidad de los proveedores, demanda de los clientes y tiempos de entrega.

Con el fin de abordar la aleatoriedad que afecta la planificación de itinerarios para aviones de carga y considerando que en la industria es común que los tomadores de decisiones realicen modificaciones manuales a sus itinerarios originales, en este trabajo se utilizará modelamiento de dos etapas y optimización recuperable para buscar crear mejores planificaciones que sean eficientemente modificables según cada realización de la demanda. Debido a que el tamaño de estas formulaciones crece en forma proporcional a la cantidad de escenarios considerados resulta muy difícil poder resolverlos directamente, aun para instancias pequeñas, por lo que suele ser necesario utilizar técnicas de descomposición para abordarlos.

2.4. Descomposición de Benders

La Descomposición de Benders (Benders, 1962) es un método de separación para resolver problemas de optimización lineal que presentan estructura de bloques en su matriz de restricciones, es decir, problemas en que hay conjuntos de variables relativamente independientes entre ellos excepto por algunas restricciones que las relacionan. La descomposición consiste en dividir el problema original en uno maestro y uno o más subproblemas satélites, que se resuelven de forma iterativa hasta llegar al óptimo del problema original. La solución obtenida en cada iteración del problema maestro se utiliza como parámetros para los subproblemas, los que tras ser resueltos se utilizan para generar planos de corte para el problema maestro. En el contexto de problemas estocásticos de dos etapas es natural realizar este tipo de descomposición, ya que la formulación con variables de primera

y segunda etapa presentan la estructura idónea para separar por bloques de escenarios la matriz del problema.

Este método de descomposición es utilizado ampliamente para resolver problemas de gran tamaño y/o combinatoriales (Rahmaniani, Crainic, Gendreau, y Rei, 2017). Sin embargo, alcanzar la convergencia puede requerir un alto costo computacional en instancias complejas. Ante esto Boland, Fischetti, Monaci, y Savelsbergh (2016) proponen una heurística que modifica y resuelve iterativamente el problema maestro para obtener una secuencia de soluciones factibles que van mejorando. De esta forma, se guía la descomposición de Benders al priorizar soluciones de alta calidad pero no necesariamente óptimas.

Laporte y Louveaux (1993) analizan el caso de problemas que se pueden separar en dos etapas, en que las variables del maestro x son binarias y la de los subproblemas y son enteras mixtas. Para ello, los autores proponen el *Integer L-Shaped Method*: dicho método es una extensión a la descomposición de Benders básica, en que se aplican cortes de factibilidad para eliminar vectores binarios infactibles y cortes de optimalidad puntuales (corte exacto para la solución del maestro pero redundante para cualquier otro). Dado que este método es la base para los modelos propuestos en este trabajo, se presenta a continuación una versión abreviada del algoritmo:

En base a la formulación de dos etapas presentada anteriormente, se define el siguiente como el *problema actual*:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \{0,1\}^n} \quad & c^T x + \theta \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$D_k x \geq d_k, \quad k = 1, \dots, s \tag{2.8}$$

$$E_k x + \theta \geq e_k, \quad k = 1, \dots, t \tag{2.9}$$

$$\theta \geq L \tag{2.10}$$

Las restricciones (2.8), llamadas cortes de factibilidad, modelan las restricciones para asegurar factibilidad de segunda etapa que actualmente no necesariamente se satisfacen al haber separado las restricciones (2.5). La variable θ , junto a las restricciones (2.9) llamadas cortes de optimalidad, se usa como un estimador de $\mathbb{E}[Q(x, \xi)]$. Dado que originalmente se empieza sin ningún corte de factibilidad ni optimalidad, se suele agregar la restricción (2.10) para acotar inicialmente el valor de θ .

El algoritmo abreviado es :

- (1) Resuelva el problema actual, sea $(\hat{x}, \hat{\theta})$ la solución incumbente.
- (2) Si \hat{x} hace infactible algún problema de segunda etapa para algún escenario, agregar el siguiente corte de factibilidad para eliminarlo:

$$\Delta(x, \hat{x}) := \sum_{i \in Sr(\hat{x})} (1 - x_i) + \sum_{i \notin Sr(\hat{x})} x_i \geq 1$$

con $Sr(\hat{x}) := \{i : \hat{x}_i = 1\}$, y vuelva a (1). Notamos que esta desigualdad es violada por \hat{x} , pero satisfecha por todo $x \in \{0, 1\}^n$ con $x \neq \hat{x}$.

- (3) Si \hat{x} es tal que todos los escenarios son factibles, calcular $\mathbb{E}[Q(x, \xi)]$.
- (4) Si $\hat{\theta} < \mathbb{E}[Q(x, \xi)]$, eliminar $(\hat{x}, \hat{\theta})$ con el siguiente corte de optimalidad:

$$\theta \geq -(\mathbb{E}[Q(x, \xi)] - L) \Delta(x, \hat{x}) + \mathbb{E}[Q(x, \xi)]$$

y vuelva a (1).

Notamos que el corte de optimalidad es local, ya que para $\Delta(x, \hat{x}) = 0$ se obtiene $\theta \geq \mathbb{E}[Q(x, \xi)]$, para $\Delta(x, \hat{x}) = 1$ se recupera $\theta \geq L$ y para $\Delta(x, \hat{x}) \geq 2$ no se agrega información adicional, ya que se acota por un valor menor a L .

Angulo, Ahmed, y Dey (2016) proponen una estructura de cortes alternados entre subproblemas enteros y sus relajaciones lineales para reducir el tiempo de calcular el valor exacto de toda posible solución de primera etapa, y presentan un marco de referencia para generar cortes de optimalidad utilizando información de las soluciones ya evaluadas hasta ese momento.

2.5. Aporte a la Literatura

La principal contribución de esta tesis es plantear un esquema de creación de itinerarios para aviones de carga que incorporen proactivamente la incertidumbre en la demanda, lo que no ha sido abordado en la literatura existente y es fundamentalmente distinto a los trabajos planteados anteriormente. Específicamente:

- (1) Se formula un modelo basado en programación estocástica de dos etapas para generar proactivamente itinerarios de vuelos recuperables para aviones de carga.
- (2) Se resuelven de forma integrada los problemas de diseño de itinerario, asignación de flota, ruteo de aviones y ruteo de carga para cada posible escenario de demanda.
- (3) Debido a la complejidad de este tipo de formulaciones integradas, se exploran técnicas para mejorar la escalabilidad del modelo.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

En este capítulo se define el problema de *Recoverable Air Cargo Scheduling* (R-ACS), junto a sus formulaciones e implementaciones. En 3.1 se introduce al lector al concepto de red espacio-tiempo utilizado para modelar los itinerarios de los vuelos. En la sección 3.2 se indica la notación utilizada, consistente en conjuntos y parámetros necesarios para la formulación. En 3.3 se presenta la formulación base del modelo asumiendo comportamiento determinístico de la carga. En la sección 3.4 se propone la formulación estocástica considerando incertidumbre en la carga a transportar, presentando tanto la formulación determinística equivalente como la descomposición alternativa. En 3.5 se introduce el concepto de *sizebounding* propuesto para mejorar la descomposición previamente mencionada. En la sección 3.6 se introduce al concepto de Relación de Orden para comparar itinerarios creados. En 3.7 se proponen los Cortes QT, que consisten en cotas válidas para generar cortes rápidos para la descomposición. Finalmente, en la sección 3.8 se presentan los algoritmos de resolución implementados.

3.1. Red espacio-tiempo

Para representar la componente temporal de los itinerarios, se suele modelar la red de vuelos como una red de espacio-tiempo (Belobaba y cols., 2009), que corresponde a un grafo dirigido con los siguientes elementos:

- Nodos: un nodo i está definido por el par $(time_i, air_i)$, que indican simultáneamente un momento específico y un aeropuerto, de acuerdo a su posición en el eje horizontal y vertical respectivamente. De esta forma, dos nodos que están a la misma altura corresponden al mismo lugar, pero al estar separados horizontalmente indican dos momentos distintos. Para simplificar la notación, se utilizará la representación concatenada $air_i time_i$.
- Arcos de vuelo: representan un vuelo y unen dos nodos asociados a distintos aeropuertos. La hora del nodo de salida corresponde a la hora del despegue del

vuelo, y el tiempo entre el nodo de llegada y el de salida corresponde al tiempo de vuelo más el tiempo de *turnaround*, definido como el tiempo que tardan las actividades necesarias para que el avión esté listo para su próxima salida (carga y descarga, rotación de tripulación, etc). Esto significa que la hora del nodo de llegada corresponde a la hora en que el avión está disponible para realizar un nuevo viaje.

- Arcos terrestres: representan aviones que permanecen en tierra entre las horas de los nodos asociados al arco.

3.2. Notación

En esta sección se presentan los conjuntos y parámetros utilizados en los modelos matemáticos desarrollados en esta investigación. Para facilitar la comprensión, se presentan a continuación los parámetros sin incertidumbre, la cual es luego incorporada en la Sección 3.4.

Conjuntos

- N : conjunto de nodos de la red espacio-tiempo.
- N_b, N_e : conjuntos con los nodos de la primera y la última hora del horizonte de planificación de cada aeropuerto.
- $N_{int} = N \setminus (N_b \cup N_e)$: conjunto de nodos intermedios.
- A_f : conjunto de arcos de vuelo, que conectan nodos de aeropuertos distintos.
- A_g : conjunto de arcos terrestres, que conectan nodos del mismo aeropuerto en periodos consecutivos.
- $A = A_f \cup A_g$: conjunto de arcos de la red espacio-tiempo.
- C : conjunto de ítems de carga a ser transportados.
- K : conjunto de tipos de aviones.

Parámetros

- $weight^c$: peso del ítem $c \in C$ [kg].
- vol^c : volumen del ítem $c \in C$ [m^3].
- o^c : nodo origen del ítem $c \in C$. Se asume que la carga está disponible al comienzo del día en que aparece.
- d^c : nodo destino del ítem $c \in C$. Se asume que la carga debe entregarse al final del día indicado.
- $mand^c$: 1 si es obligatorio transportar el ítem c ; 0 si es opcional.
- inc^c : ingreso por transportar el ítem $c \in C$ hasta su destino final [USD].
- n^k : número de aviones tipo $k \in K$.
- nav_i^k : número de aviones tipo $k \in K$ disponibles en el nodo $i \in N_b$ al comienzo del horizonte de planificación.
- $av_i^{k,m}$: 1 si el m -ésimo avión tipo $k \in K$ está disponible en el nodo $i \in N_b$ al comienzo del horizonte de planificación; 0 en otro caso (e.o.c. desde ahora).
- air_cap^k : capacidad en peso de un avión tipo $k \in K$ [kg].
- air_vol^k : capacidad en volumen de un avión tipo $k \in K$ [m^3].
- cc_{ij}^k : costo de tripulación para un avión tipo $k \in K$ en el arco de vuelo $ij \in A_f$ [USD].
- cf_{ij}^k : costo fijo incurrido por el vuelo de un avión tipo $k \in K$ desde i hasta j , con $ij \in A_f$ [USD].
- cv_{ij}^k : costo variable incurrido por unidad de peso de carga transportada por un avión tipo $k \in K$ en un vuelo desde i a j con $ij \in A_f$ [USD/kg].
- ch_{ij} : costo de almacenamiento por unidad de peso de carga almacenada en arco terrestre $ij \in A_g$ [USD/kg].
- $\delta^+(i) = \{i'j' \in A : i' = i\}$: conjunto de arcos que salen del nodo $i \in N$.
- $\delta^-(j) = \{i'j' \in A : j' = j\}$: conjunto de arcos que entran al nodo $j \in N$.
- air_i : aeropuerto correspondiente al nodo $i \in N$.
- $time_i$: hora correspondiente al nodo $i \in N$.

La Figura 3.1 muestra algunos de los elementos anteriores aplicados a la red espacio-tiempo.

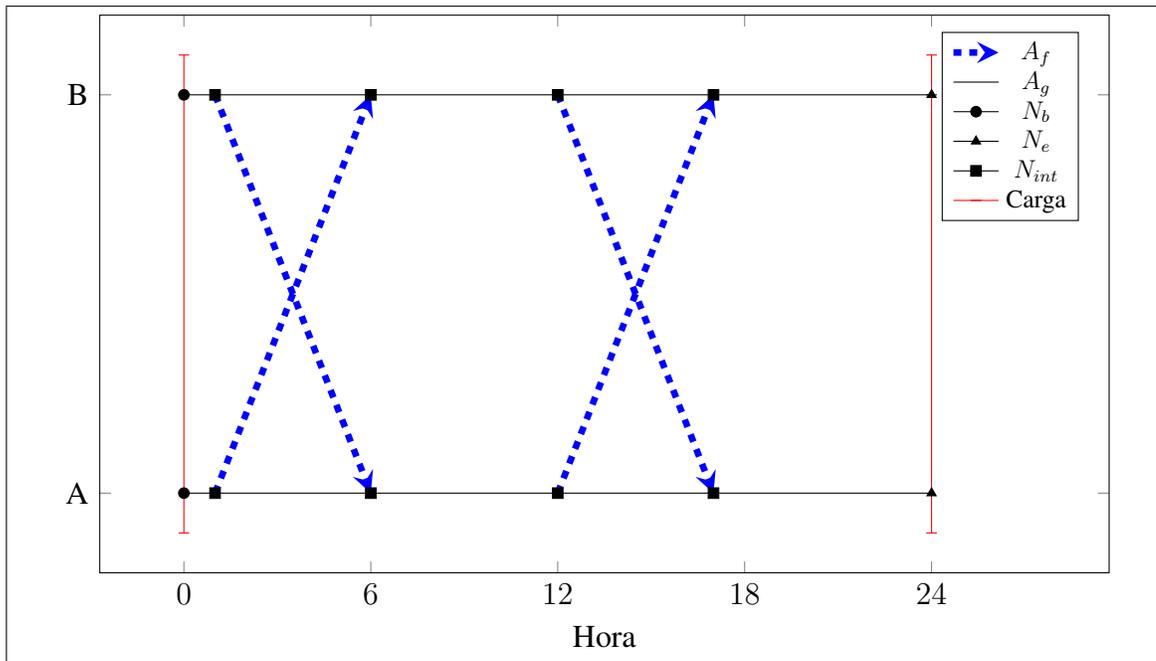


Figura 3.1. Elementos en la red espacio-tiempo. Se muestran los posibles vuelos desde el aeropuerto A al aeropuerto B y viceversa, que pueden salir a las 01:00 y/o a las 12:00. La línea vertical a las 00:00 representa el momento en que todos los ítems de carga se hacen disponible para transportar, y la línea de las 24:00 señala el momento en que deben llegar a su destino. Para planificaciones con múltiples días cada ítem de carga puede aparecer al de comienzo de cualquier día y debe ser entregado al fin de algún otro día que no lo anteceda, según lo especificado por sus nodo de origen y destino.

3.3. Modelo Determinístico

El modelo determinístico corresponde un modelo de optimización lineal para la creación de un itinerario para los aviones de carga considerando que la información es completamente conocida, es decir, se sabe con exactitud el peso, volumen e ingreso asociado a cada ítem de carga. A este problema lo denominaremos *Deterministic Air Cargo Scheduling* (D-ACS).

3.3.1. Formulación

La formulación más directa del problema de optimización, en que se utilizan variables individuales para representar el itinerario específico de cada avión, genera problemas de simetría al considerar múltiples aviones del mismo tipo. Dichas dificultades se generan porque dada una solución, intercambiar los itinerarios de dos aviones del mismo tipo que parten en el mismo aeropuerto genera exactamente el mismo valor objetivo, como se muestra en la Figura 3.2. Aún más, cada vez que dos o más aviones del mismo tipo están en el mismo nodo y posteriormente se separan, se puede intercambiar el resto del itinerario de cada uno y nuevamente se tiene una solución con el mismo valor pero técnicamente distinta. Lo anterior no requiere que comiencen en el mismo aeropuerto, ya que sólo intercambian los vuelos desde el nodo en que están juntos en adelante, como se muestra en la Figura 3.3.

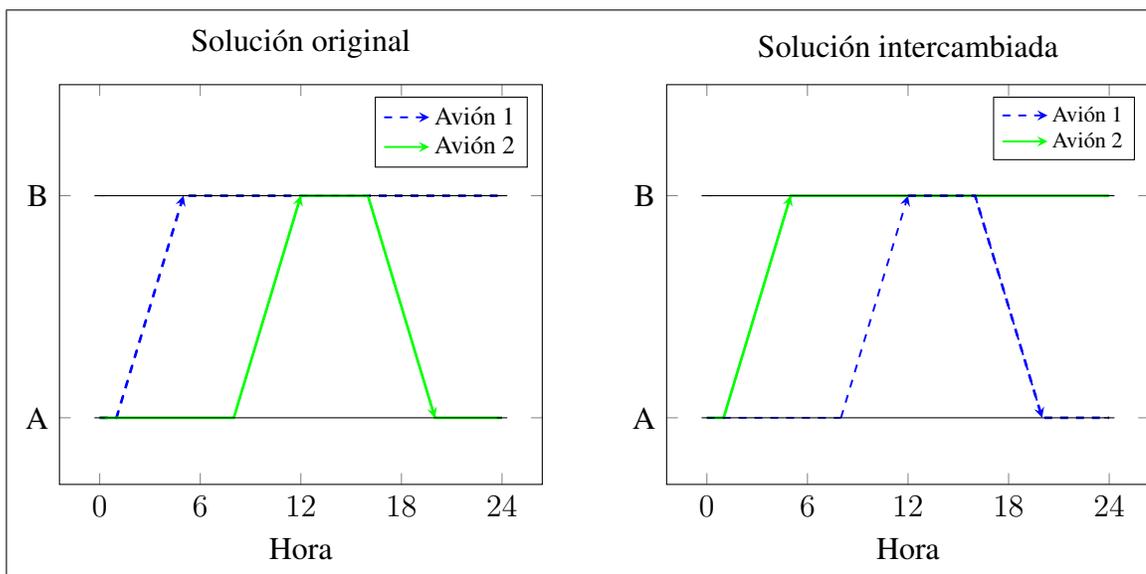


Figura 3.2. Intercambio completo de itinerarios. Se muestra en la izquierda una planificación en que dos aviones del mismo tipo parten en el aeropuerto A, el primero realiza el vuelo $A1 \rightarrow B5$ y el segundo los vuelos $A8 \rightarrow B12$ y $B16 \rightarrow A20$. Intercambiar los itinerarios, como se muestra en la derecha, resulta en una solución distinta pero completamente equivalente en su valor, al incurrir en los mismos costos y permitir el mismo transporte de carga.

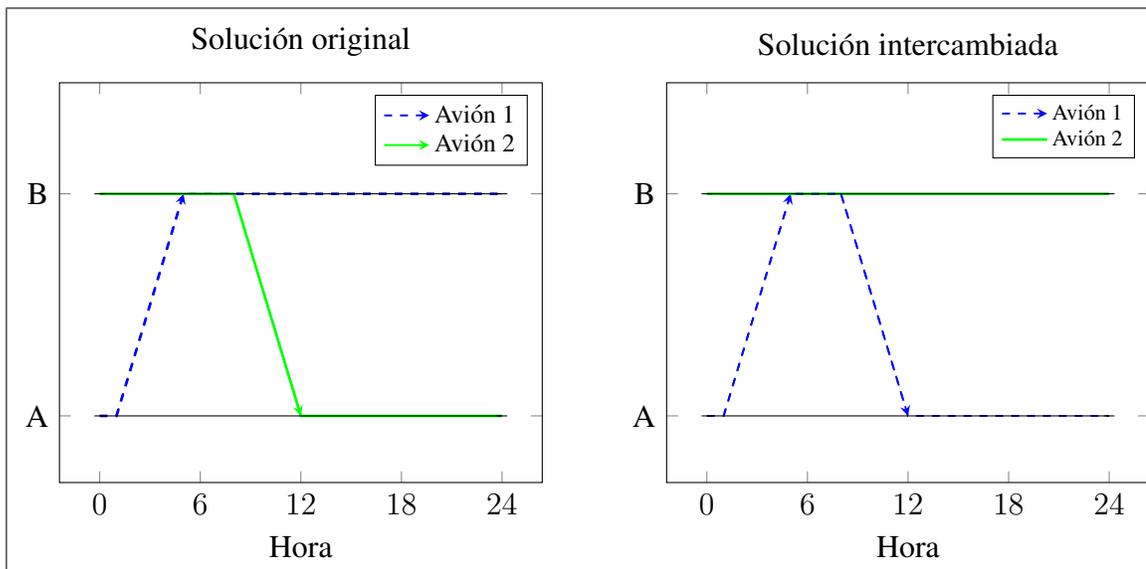


Figura 3.3. Intercambio parcial de itinerarios. Sea una instancia en que el primer avión realiza el vuelo $A1 \rightarrow B5$ y el segundo el vuelo $B8 \rightarrow A12$. Los aviones están juntos en el nodo $B8$, donde pueden intercambiar el resto de sus itinerarios: ahora el avión 1 realiza también el vuelo $B8 \rightarrow A12$ y el avión 2 se queda en B . Intercambiar el resto de los vuelos del itinerario resulta en una solución distinta pero completamente equivalente en su valor, al incurrir en los mismos costos y permitir el mismo transporte de carga.

Dado que lo anterior afecta de forma negativa la exploración del árbol de Branch & Bound utilizado por los *solvers* comerciales para resolver los MIPs, ya que la simetría obliga a explorar exhaustivamente los nodos del árbol sin poder acotar tempranamente, se utiliza una formulación secuencial: las restricciones de capacidad que modelan la relación entre el flujo de aviones y de carga sólo requieren la capacidad del avión que realiza cada vuelo y por ende basta con conocer el tipo al que pertenece, no el avión específico, lo que permite separar de forma secuencial la Asignación de Flota y Ruteo de Carga como primer problema, y el Ruteo de Aviones como segundo problema que utiliza la solución de la asignación como *input*. Esta separación tiene la ventaja de ser más rápida de resolver (aun cuando se tengan que resolver dos problemas, ya que el segundo es sólo de factibilidad) sin afectar la solución óptima, ya que los costos y capacidades dependen del tipo de avión

asignado a cada vuelo, no el avión específico. La Figura 3.4 muestra la estructura de los problemas con la formulación secuencial.

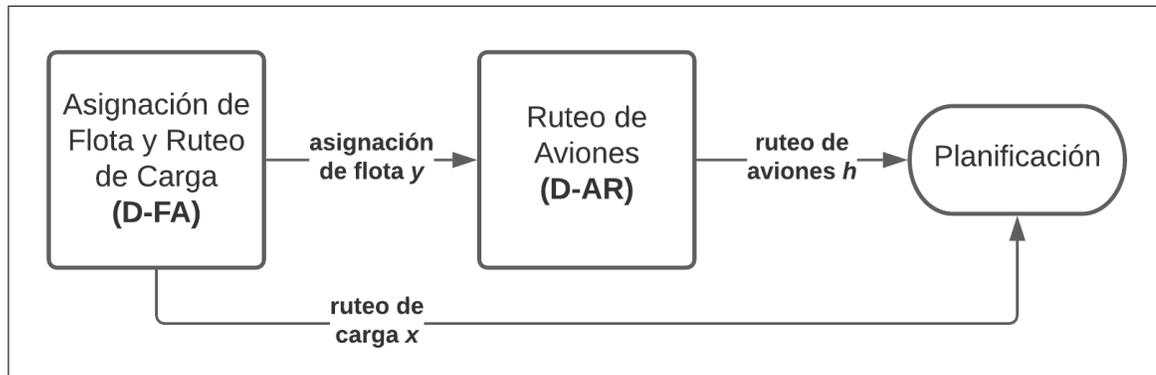


Figura 3.4. Estructura de los problemas D-ACS: consiste en realizar la Asignación de Flota y el Ruteo de Carga simultáneamente en el primer modelo, para posteriormente desglosar la asignación de flota en un Ruteo de Aviones individual. Los ruteos de aviones y de carga constituyen la planificación final.

3.3.1.1. Asignación de Flota y Ruteo de Carga

El primer problema consiste en definir el número de aviones de cada tipo asignados a cada arco de la red espacio-tiempo, y para los ítems de carga que se eligen transportar, definir su ruta a seguir. Dado que se trabaja sobre todos los potenciales vuelos y se permite no asignarles vuelos a todos, se resuelve también el problema de diseño de itinerario de forma implícita.

Variables

- $y_{ij}^k \in \mathbb{Z}_+$ número de aviones tipo $k \in K$ asignados al arco $ij \in A$
- $x_{ij}^c = 1$ si el arco $ij \in A$ se usa para transportar el ítem de carga $c \in C$, 0 e.o.c.
- $w_{ij}^{c,k} = 1$ si el ítem $c \in C$ es transportado en el arco de vuelo $ij \in A_f$ por un avión tipo $k \in K$; 0 e.o.c.
- $q^c = 1$ si el ítem $c \in C$ es transportado; 0 e.o.c.

Ganancia por Transporte de Carga

Se define la Ganancia por Transporte de Carga (*Cargo Routing Profit*, CRP) como la suma de los ingresos por toda la carga transportada, menos los costos de tripulación, fijos y variables de vuelo y los costos de almacenamiento en tierra:

$$\begin{aligned}
 CRP(y, x, w, q) := & \sum_{c \in C} inc^c q^c \\
 & - \sum_{ij \in A_f} \sum_{k \in K} \left((cc_{ij}^k + cf_{ij}^k) y_{ij}^k + \sum_{c \in C} cv_{ij}^k \cdot weight^c \cdot w_{ij}^{c,k} \right) \\
 & - \sum_{ij \in A_g} \sum_{c \in C} ch_{ij} \cdot weight^c \cdot x_{ij}^c .
 \end{aligned}$$

Se propone el siguiente modelo Determinístico de Asignación de Flota y Ruteo de Carga (D-FA) :

$$\max_{y,x,w,q} CRP(y, x, w, q) \quad (\text{D-FA.OF})$$

$$\text{s.a } \sum_{k \in K} y_{ij}^k \leq 1 \quad ij \in A_f \quad (\text{D-FA.1})$$

$$\sum_{ij \in \delta^+(i)} y_{ij}^k = nav_i^k \quad k \in K, i \in N_b \quad (\text{D-FA.2})$$

$$\sum_{ji \in \delta^+(j)} y_{ji}^k - \sum_{ij \in \delta^-(j)} y_{ij}^k = 0 \quad k \in K, j \in N_{int} \quad (\text{D-FA.3})$$

$$\sum_{ji \in \delta^+(j)} x_{ji}^c - \sum_{ij \in \delta^-(j)} x_{ij}^c = \begin{cases} q^c, j = o^c \\ -q^c, j = d^c \\ 0, \text{ e.o.c.} \end{cases} \quad c \in C, j \in N \quad (\text{D-FA.4})$$

$$\sum_{c \in C} weight^c x_{ij}^c \leq \sum_{k \in K} air_cap^k y_{ij}^k \quad ij \in A_f \quad (\text{D-FA.5})$$

$$\sum_{c \in C} vol^c x_{ij}^c \leq \sum_{k \in K} air_vol^k y_{ij}^k \quad ij \in A_f \quad (\text{D-FA.6})$$

$$x_{ij}^c \leq \sum_{k \in K} y_{ij}^k \quad c \in C, ij \in A_f \quad (\text{D-FA.7})$$

$$x_{ij}^c + y_{ij}^k \leq w_{ij}^{c,k} + 1 \quad c \in C, k \in K, ij \in A_f \quad (\text{D-FA.8})$$

$$q^c \geq mand^c \quad c \in C \quad (\text{D-FA.9})$$

$$y_{ij}^k \in \mathbb{Z}_+ \quad k \in K, ij \in A \quad (\text{D-FA.10})$$

$$x_{ij}^c \in \{0, 1\} \quad c \in C, ij \in A \quad (\text{D-FA.11})$$

$$q^c \in \{0, 1\} \quad c \in C \quad (\text{D-FA.12})$$

$$w_{ij}^{c,k} \in \{0, 1\} \quad c \in C, k \in K, ij \in A. \quad (\text{D-FA.13})$$

La función objetivo (D-FA.OF) a maximizar es el *Cargo Routing Profit*.

Cada arco de vuelo es asignado a lo más a un avión independiente del tipo (D-FA.1), y es relevante notar que esta restricción junto a (D-FA.10) implica $y_{ij}^k \in \{0, 1\} \forall ij \in A_f$. Todos los aviones disponibles al comienzo avanzan en la red espacio-temporal (D-FA.2)

y para cada tipo de avión su flujo se conserva en todos los nodos (D-FA.3). Se conserva el flujo de la carga en caso de que se decida transportarla (D-FA.4), la cual sólo puede ser transportada entre aeropuertos si se le ha asignado un vuelo, sujeto a restricciones de peso (D-FA.5) y volumen (D-FA.6). Se agrega (D-FA.7) para fortalecer la formulación de las restricciones tipo *knapsack* previas de peso y volumen. La restricción (D-FA.8) modela la linealización de la multiplicación de variables $w_{ij}^{c,k} = x_{ij}^c y_{ij}^k$: es importante notar que la estructura de costos hace innecesario agregar las restricciones $w_{ij}^{c,k} \leq y_{ij}^k$ y $w_{ij}^{c,k} \leq x_{ij}^c$. Se exige que la carga obligatoria sea transportada (D-FA.9). Las naturalezas de las variables son (D-FA.10)-(D-FA.13). Es relevante notar también que las restricciones de integralidad de q y w pueden ser relajadas como $q, w \in [0, 1]$ ya que están expresadas en función de las variables x, y y el parámetro binario $mand$, como se ve en (D-FA.4), (D-FA.8) y (D-FA.9).

3.3.1.2. Ruteo de Aviones

De acuerdo al esquema secuencial de resolución, tras obtener la asignación de flota y ruteo de carga óptimos, es necesario resolver el segundo problema: desglosar la asignación de flota en itinerarios individuales factibles para cada avión. Dicho problema, que llamaremos problema Determinístico de Ruteo de Aviones (D-AR), es un problema de factibilidad cuya formulación se encuentra en el Anexo A.1.

3.4. Modelo Estocástico Recuperativo

El modelo de optimización estocástico recuperativo consiste en extender el D-ACS para incorporar la incertidumbre en la carga, es decir, considerar distintos escenarios posibles que pueden ocurrir, en que cada ítem de carga puede tener distintos pesos, volúmenes e ingreso por transportarlo. Recordando que el D-ACS consiste en el D-FA (la asignación de flota y ruteo de carga) y D-AR (ruteo de aviones), notamos que la componente estocástica corresponde a la carga transportada en el D-FA. Considerando un esquema de dos etapas como se mencionó en el capítulo anterior, se agregan ahora decisiones de primera etapa (aquí y ahora, antes de que se revele la información) y decisiones de segunda etapa (después de que se revele la información) para descomponer el D-FA. La decisión de primera etapa corresponde a un itinerario para los aviones de carga, y la de segunda etapa es el ruteo de la carga revelada para cada posible realización. Adicionalmente se incorporan las acciones recuperativas, que corresponden a modificaciones de segunda etapa para la solución creada en la primera. Esto corresponde a resolver el problema de *Recoverable Air Cargo Scheduling* (R-ACS).

3.4.1. Notación

Los parámetros utilizados son similares a los modelos determinísticos, pero extendidos para considerar el comportamiento estocástico de la carga a transportar y los costos de acciones recuperativas que se pueden tomar. Se agregan:

Conjuntos

- S : conjunto de posibles escenarios a realizarse. Sus elementos son $s \in S$.
- C : se redefine ahora como el conjunto de todos los ítems de carga a ser transportados que pueden existir entre todos los escenarios. Sus elementos son $c \in C$.

Parámetros

- Los parámetros asociados a la carga del modelo determinístico son ahora extendidos para considerar los posibles escenarios, por ejemplo $weight^{c,s}$ consiste en el peso del ítem $c \in C$ en el escenario $s \in S$. Análogo para $vol^{c,s}$, $mand^{c,s}$ y $inc^{c,s}$.
- $ex^{c,s}$: 1 si el ítem $c \in C$ existe en el escenario $s \in S$, 0 e.o.c. (un *no-show*).
- $sc_{ij}^{k,s}$: costo de tripulación con corta anticipación para un avión tipo $k \in K$ en el arco de vuelo $ij \in A_f$ [USD]. Ahora cc se interpreta como el costo de tripulación planificada con larga anticipación, con $sc_{ij}^{k,s} > cc_{ij}^k, \forall s \in S$ bajo el supuesto de que agregar un vuelo nuevo con poca anticipación incurre en costos de tripulación mayores a los planificados con anterioridad.
- tv : costo de reprogramar un vuelo [USD/h]. Por construcción es un valor tal que el costo de cambiar la hora de despegue de un vuelo es menor al que se incurre al asignar una tripulación con corta anticipación.
- p^s : probabilidad del escenario $s \in S$.

3.4.2. Formulación

A continuación se presenta la formulación del problema en dos etapas. Tras resolverlo, para cada escenario se separa la asignación de flota en itinerarios individuales, que junto al ruteo de carga constituye la planificación de dicho escenario. La Figura 3.5 representa la relación de los problemas.

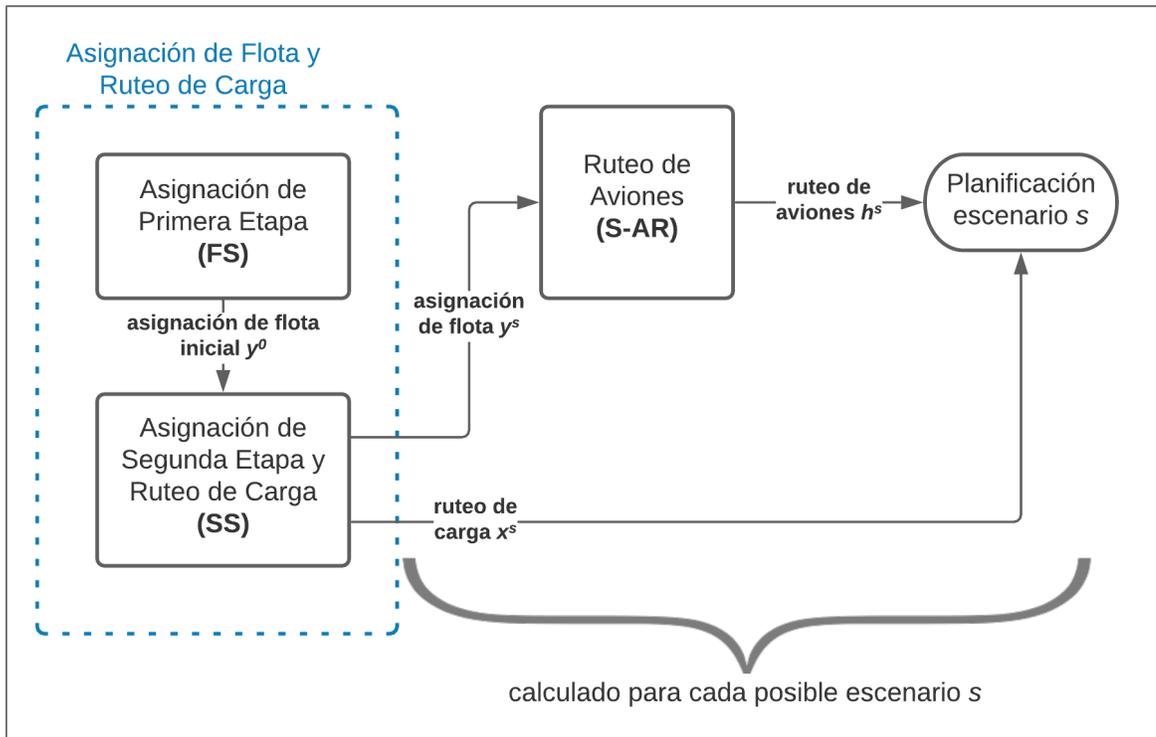


Figura 3.5. Estructura de los problemas R-ACS: la Asignación de Flota y el Ruteo de Carga se resuelve ahora mediante los problemas de primera y segunda etapa. Para cada escenario, la planificación estará dada por el Ruteo de Aviones obtenido de desglosar la asignación previa junto con el respectivo ruteo de carga.

3.4.2.1. Primera Etapa: Asignación de Flota

En la primera etapa se realiza la asignación de flota (la decisión de aquí y ahora), escogiendo los arcos de vuelo a operar y el tipo de avión que lo hará. Esto se traduce en asignar la cantidad de aviones a operar para cada arco de la red espacio-tiempo, lo que resuelve también el problema de diseño de itinerario de forma implícita.

Variables

- $y_{ij}^{k,0} \in \mathbb{Z}_+$ número de aviones tipo k asignados al arco $ij \in A$ en la primera etapa

Costo de Primera Etapa

Se define el Costo de Primera Etapa (*First Stage Cost*, FSC) como el costo de tripulación con larga anticipación para la asignación de flota considerada:

$$FSC(y^0) := \sum_{ij \in A_f} \sum_{k \in K} cc_{ij}^k y_{ij}^{k,0}. \quad (\text{FSC})$$

Restricciones de primera etapa

Análogas a las restricciones (D-FA.1)-(D-FA.3):

$$\sum_{k \in K} y_{ij}^{k,0} \leq 1 \quad ij \in A_f \quad (\text{FS.1})$$

$$\sum_{ij \in \delta^+(i)} y_{ij}^{k,0} = nav_i^k \quad k \in K, i \in N_b \quad (\text{FS.2})$$

$$\sum_{ij \in \delta^-(j)} y_{ij}^{k,0} - \sum_{ji \in \delta^+(j)} y_{ji}^{k,0} = 0 \quad k \in K, j \in N_{int} \quad (\text{FS.3})$$

$$y_{ij}^{k,0} \in \mathbb{Z}_+ \quad k \in K, ij \in A. \quad (\text{FS.4})$$

La interpretación de las restricciones es idéntica a sus equivalentes en el D-FA.

3.4.2.2. Segunda Etapa: Recuperación de Asignación de Flota y Ruteo de Carga

En la segunda etapa, para cada escenario, se realizan acciones de recuperación necesarias para modificar una asignación de flota de primera etapa y realizar el ruteo de carga. Las variables z_+ y z_- son acciones de recuperación que modifican el itinerario generado en la primera etapa y lo adapta para ser óptimo en cada escenario.

Variables

Para cada escenario $s \in S$, las variables de segunda etapa son:

- $y_{ij}^{k,s}$ = número de aviones tipo $k \in K$ asignados al arco $ij \in A$ en el itinerario final.
- $x_{ij}^{c,s} = 1$ si el arco $ij \in A$ se usa para transportar la carga $c \in C$; 0 e.o.c.

- $w_{ij}^{c,k,s} = 1$ si el ítem $c \in C$ es transportado en el arco de vuelo $ij \in A_f$ por un avión tipo k ; 0 e.o.c.
- $q^{c,s} = 1$ si el ítem $c \in C$ es transportado; 0 e.o.c.
- $z_{ij,+}^{k,s} =$ número de vuelos agregados al itinerario inicial en el arco $ij \in A$ operados por aviones tipo $k \in K$.
- $z_{ij,-}^{k,s} =$ número de vuelos descartados del itinerario inicial en el arco $ij \in A$ operados por aviones tipo $k \in K$.

Es importante notar que se habla de vuelos agregados o descartados del itinerario inicial para simplificar el nombre de la variable, pero en estricto rigor las variables z_+ y z_- corresponden a modificaciones al itinerario al agregar o retirar aviones de cada arco de la red espacio-tiempo, que contempla tanto arcos de vuelo como terrestres: para arcos de vuelo $ij \in A_f$, z_+ representa vuelos agregados y z_- representa vuelos descartados, mientras que para arcos terrestres $ij \in A_g$, z_+ representa aviones que ahora están en tierra y z_- representa aviones que ya no están en tierra.

Ganancia de Segunda Etapa

Para cada escenario $s \in S$, se define la Ganancia de Segunda Etapa (*Second Stage Profit*, SSP) como la suma de los ingresos por toda la carga transportada, menos los costos fijos y variables de vuelo además de los costos de almacenamiento en tierra, asociados al itinerario que finalmente se ejecuta. Es relevante notar que el SSP depende únicamente del itinerario final creado, no de las acciones de recuperación realizadas para crearlo.

$$\begin{aligned}
SSP(y^s, x^s, w^s, q^s) := & \sum_{c \in C} inc^{c,s} q^{c,s} & (SSP) \\
& - \sum_{ij \in A_f} \sum_{k \in K} cf_{ij}^k y_{ij}^{k,s} \\
& - \sum_{ij \in A_f} \sum_{k \in K} \sum_{c \in C} cv_{ij}^k \cdot weight^{c,s} \cdot w_{ij}^{c,k,s} \\
& - \sum_{ij \in A_g} \sum_{c \in C} ch_{ij} \cdot weight^{c,s} \cdot x_{ij}^{c,s}.
\end{aligned}$$

Costo por Acciones de Recuperación

Las acciones de recuperación son modificaciones a la asignación de flota de primera etapa, y pueden ocurrir tanto por agregar más vuelos (variables z_+) o por retirarlos (variables z_-) de cualquier arco. Asignar aviones en la segunda etapa a un arco de vuelo incurre en costos por tener que asignarle una tripulación con poca anticipación (parámetros sc). Se considera que quitar vuelos asignados en la primera etapa no deshace los costos de tripulación de largo plazo, ya que estos son pagados en la decisión de primera etapa. Es relevante notar que sólo se incurre en costos operacionales del vuelo (costos fijos cf y costos variables cv) para los vuelos que efectivamente son realizados, asociados a la asignación final (variables y^s) por lo que están considerados en SSP.

Para cada escenario $s \in S$, se define el Costo por Acciones de Recuperación (*Recovery Actions Cost*, RAC) como los costos de asignar tripulaciones con poca anticipación a los vuelos nuevos agregados:

$$RAC(z_+^s) := \sum_{ij \in A_f} \sum_{k \in K} sc_{ij}^{k,s} z_{ij,+}^{k,s}. \quad (RAC)$$

Re-timing

Esta situación ocurre cuando un tipo de avión tiene un vuelo planificado en la primera etapa, pero en la segunda etapa se reemplaza el vuelo por otro entre el mismo par origen-destino pero a una hora distinta. Si las horas de salidas del vuelo descartado y el agregado

son lo suficientemente cercanas, es decir no difiriendo en más de un límite máximo de ϵ horas, se puede interpretar como que se realiza el vuelo original pero con una ligera modificación o re-timing a la hora de salida, lo que conlleva una penalización menor a la que se incurriría al agregar un vuelo completamente distinto. En este caso, se deshacen los costos de recuperación y se reemplazan por un costo (menor) asociado a cambiar la hora de salida. La situación anterior se ejemplifica en la Figura 3.6.

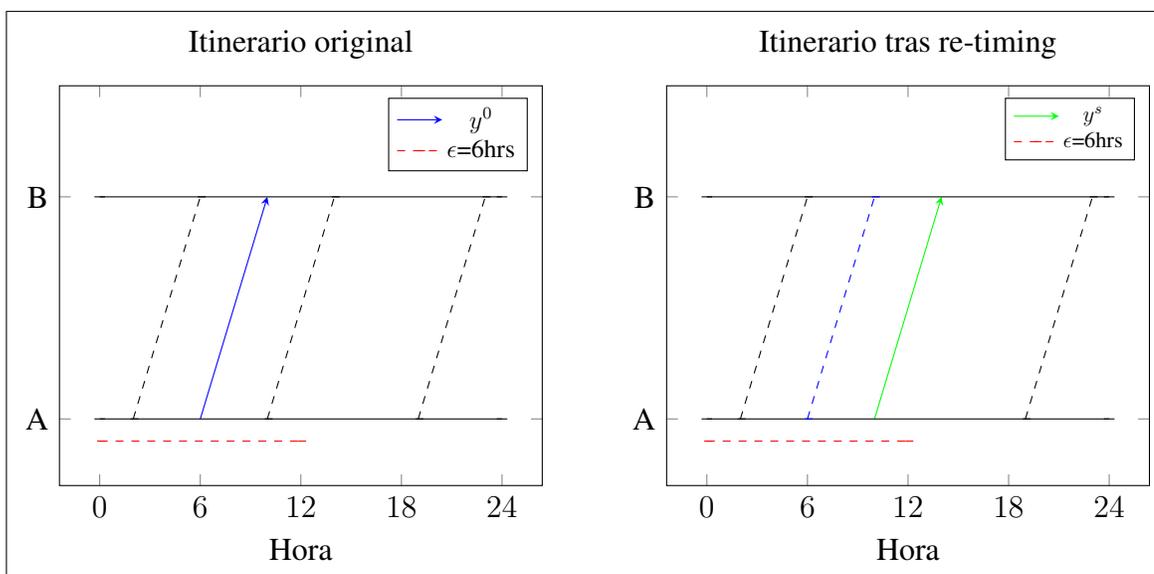


Figura 3.6. Ejemplo de re-timing. Considerando un límite ϵ de 6 horas y una solución de primera etapa que consiste en el vuelo de las 06:00, reemplazarlo en algún escenario s por el de las 02:00 o el de las 10:00 es un re-timing al estar lo suficientemente cerca. Por otro lado, si se reemplaza por el de las 19:00 sería un vuelo completamente nuevo.

Los re-timings requieren definir el límite máximo ϵ de horas en que el horario de despegue de un vuelo puede ser modificado antes de ser considerado como uno completamente nuevo. Para ello se define el *timegap* entre dos vuelos como la diferencia entre sus horas de despegue:

$$timegap(ij, i'j') = |time_i - time_{i'}|.$$

Se define la vecindad vuelos ϵ -horas cercanos a un vuelo específico ij :

$$V^\epsilon(ij) = \{i'j' \in A_f : ij \neq i'j' \wedge air_i = air_{i'} \wedge air_j = air_{j'} \wedge timegap(ij, i'j') \leq \epsilon\}.$$

Para cada escenario $s \in S$, se agregan las siguientes variables:

- $r_{ij,i'j'}^{k,s} = 1$ si hay un re-timing para un avión tipo k desde un vuelo $ij \in A_f$ a un vuelo $i'j' \in V^\epsilon(ij)$; 0 e.o.c.

Las restricciones que modelan los re-timings son:

$$\sum_{i'j' \in V^\epsilon(ij)} r_{ij,i'j'}^{k,s} \leq y_{ij}^{k,0} \quad k \in K, ij \in A_f \quad (\text{RT.1})$$

$$\sum_{i'j' \in V^\epsilon(ij)} r_{ij,i'j'}^{k,s} \leq z_{ij,-}^{k,s} \quad k \in K, ij \in A_f \quad (\text{RT.2})$$

$$\sum_{ij \in V^\epsilon(i'j')} r_{ij,i'j'}^{k,s} \leq z_{i'j',+}^{k,s} \quad k \in K, i'j' \in A_f \quad (\text{RT.3})$$

$$y_{ij}^{k,0} + z_{ij,-}^{k,s} + z_{i'j',+}^{k,s} \leq 2 + r_{ij,i'j'}^{k,s} \quad k \in K, ij \in A_f, i'j' \in V^\epsilon(ij) \quad (\text{RT.4})$$

$$r_{ij,i'j'}^{k,s} \in \{0, 1\} \quad k \in K, ij \in A_f, i'j' \in V^\epsilon(ij). \quad (\text{RT.5})$$

Un re-timing puede ocurrir sólo si el vuelo original existe (RT.1), el vuelo original se descarta (RT.2) y el vuelo reprogramado se agrega (RT.3), todo al mismo tiempo (RT.4). Naturaleza de las variables (RT.5). Es relevante notar que las restricciones de integralidad de r pueden ser relajadas como $r \in [0, 1]$. Con la formulación lista, se define el Costo de Re-timing (*Re-timing Cost*, RC) como la penalización de tv por cada hora de reprogramación en el primer término, y la eliminación del costo de vuelo nuevo en el segundo término. Dicho costo se debe eliminar ya que está considerado en el RAC, que considera sólo las variables de vuelos agregados z_+ .

$$RC(r^s) = \sum_{ij \in A_f} \sum_{i'j' \neq ij} \sum_{k \in K} (tv \cdot timegap(ij, i'j') - sc_{i'j'}^{k,s}) r_{ij,i'j'}^{k,s}. \quad (\text{RC})$$

Se cumple que

$$RC(r^s) \leq 0$$

ya que $tv \cdot \text{timegap}(ij, i'j') < sc_{i'j'}^{k,s}$ por construcción, y que

$$0 \leq RAC(z_+^s) + RC(r^s) \leq RAC(z_+^s)$$

ya que los re-timings pueden reducir el Costo por Acciones de Recuperación pero no hacerlo negativo.

Valor de segunda etapa

El valor de una solución de segunda etapa es la ganancia de segunda etapa menos los costos por acciones de recuperación y acciones de re-timing:

$$SSP(y^s, x^s, w^s, q^s) - RAC(z_+^s) - RC(r^s).$$

Restricciones para un escenario s de segunda etapa

$$y_{ij}^{k,s} = y_{ij}^{k,0} + z_{ij,+}^{k,s} - z_{ij,-}^{k,s} \quad k \in K, ij \in A \quad (\text{SS.1})$$

$$\sum_{k \in K} y_{ij}^{k,s} \leq 1 \quad ij \in A_f \quad (\text{SS.2})$$

$$\sum_{ij \in \delta^+(i)} y_{ij}^{k,s} = \text{nav}_i^k \quad k \in K, i \in N_b \quad (\text{SS.3})$$

$$\sum_{ji \in \delta^+(j)} y_{ji}^{k,s} - \sum_{ij \in \delta^-(j)} y_{ij}^{k,s} = 0 \quad k \in K, j \in N_{int} \quad (\text{SS.4})$$

$$\sum_{ji \in \delta^+(j)} x_{ji}^{c,s} - \sum_{ij \in \delta^-(j)} x_{ij}^{c,s} = \begin{cases} q^{c,s}, j = o^c \\ -q^{c,s}, j = d^c \\ 0, \text{e.o.c.} \end{cases} \quad j \in N, c \in C \quad (\text{SS.5})$$

$$\sum_{c \in C} \text{weight}^{c,s} x_{ij}^{c,s} \leq \sum_{k \in K} \text{air_cap}^k y_{ij}^{k,s} \quad ij \in A_f \quad (\text{SS.6})$$

$$\sum_{c \in C} \text{vol}^{c,s} x_{ij}^{c,s} \leq \sum_{k \in K} \text{air_vol}^k y_{ij}^{k,s} \quad ij \in A_f \quad (\text{SS.7})$$

$$x_{ij}^{c,s} \leq \sum_{k \in K} y_{ij}^{k,s} \quad c \in C, ij \in A_f \quad (\text{SS.8})$$

$$x_{ij}^{c,s} + y_{ij}^{k,s} \leq w_{ij}^{c,k,s} + 1 \quad k \in K, c \in C, ij \in A_f \quad (\text{SS.9})$$

$$q^{c,s} \geq \text{mand}^{c,s} \quad c \in C \quad (\text{SS.10})$$

$$q^{c,s} \leq \text{ex}^{c,s} \quad c \in C \quad (\text{SS.11})$$

$$z_{ij,-}^{k,s} \leq y_{ij}^{k,0} \quad k \in K, ij \in A_f \quad (\text{SS.12})$$

$$z_{ij,+}^{k,s} \leq 1 - y_{ij}^{k,0} \quad k \in K, ij \in A_f \quad (\text{SS.13})$$

$$x_{ij}^{c,s} \in \{0, 1\} \quad c \in C, ij \in A \quad (\text{SS.14})$$

$$q^{c,s} \in \{0, 1\} \quad c \in C \quad (\text{SS.15})$$

$$w_{ij}^{c,k,s} \in \{0, 1\} \quad c \in C, k \in K, ij \in A_f \quad (\text{SS.16})$$

$$y_{ij}^{k,s}, z_{ij,+}^{k,s}, z_{ij,-}^{k,s} \in \mathbb{Z}_+ \quad k \in K, ij \in A \quad (\text{SS.17})$$

(RT.1) – (RT.5).

La asignación final es la de primera etapa más las acciones de recuperación (SS.1). Las restricciones (SS.2)-(SS.10) son análogas a sus equivalentes del modelo determinístico (D-FA.1)-(D-FA.9), pero ahora aplicadas a un escenario s . La carga sólo puede ser

transportada si existe en ese escenario (SS.11). Cada vuelo puede ser descartado sólo si estaba previamente asignado en la primera etapa (SS.12), y sólo puede ser agregado en la segunda etapa si no estaba previamente asignado en la primera etapa (SS.13). Naturaleza de las variables (SS.14)- (SS.17). Es relevante notar también que las restricciones de integralidad de q y w pueden ser relajadas como $q, w \in [0, 1]$, mientras que (SS.2) junto a la naturaleza de las acciones de recuperación implican $z_+, z_- \in \{0, 1\}$ para los arcos de vuelo. Restricciones de re-timing (RT.1)-(RT.5).

3.4.2.3. Formulación Determinística Equivalente

Combinando las restricciones de primera etapa (FS.1)-(FS.4), de segunda etapa (SS.1)-(SS.17), y de re-timing (RT.1)-(RT.5), se plantea la formulación determinística equivalente del Recoverable Fleet Assignment Problem:

$$\begin{aligned} \max \quad & -FSC(y^0) + \sum_{s \in S} p^s (SSP(y^s, x^s, w^s, q^s) - RAC(z_+^s) - RC(r^s)) \quad (\text{DEF}) \\ \text{s.a} \quad & (\text{FS.1})-(\text{FS.4}) \\ & (\text{SS.1})-(\text{SS.17}), (\text{RT.1})-(\text{RT.5}) \quad s \in S. \end{aligned}$$

3.4.2.4. Ruteo de Aviones para múltiples escenarios

Análogo al D-AR, tras obtener la asignación de flota y ruteo de carga óptimo para cada escenario, es necesario desglosar la asignación de flota en itinerarios individuales factibles. Dicho problema, que llamaremos problema Estocástico de Ruteo de Aviones (S-AR), se encuentra formulado en el Anexo A.2.

3.4.3. Descomposición de Benders

A medida que aumenta el horizonte de planificación y la cantidad de escenarios considerados se hace complejo resolver el modelo DEF, tal como se observa en la sección

de resultados 4.3, por lo que se propone la siguiente descomposición basada en el *integer L-shaped method*.

3.4.3.1. Problema de Primera Etapa

Se conservan las variables y restricciones de primera etapa, y se agrega una variable θ utilizada para estimar el valor de segunda etapa de la solución de primera etapa. Dicha variable se debe acotar con una constante U . Se propone el siguiente modelo para el problema de Primera Etapa (FS):

$$\begin{aligned} \max \quad & -FSC(y^0) + \theta \\ \text{s.a} \quad & \text{(FS.1)-(FS.4)} \\ & \theta \leq U. \end{aligned}$$

3.4.3.2. Problema de Segunda Etapa

Dada una solución de primera etapa y^0 , utilizada como ahora como un parámetro, para todo escenario $s \in S$ se debe calcular su valor de segunda etapa correspondiente $Q(y^0, s)$. Para el escenario s , se propone el siguiente modelo para el problema de Segunda Etapa:

$$\begin{aligned} Q(y^0, s) = \max \quad & SSP(q^s, y^s, x^s, w^s) - RAC(z_+^s) - RC(r^s) \\ \text{s.a} \quad & \text{(SS.1) - (SS.17)} \\ & \text{(RT.1) - (RT.5)}. \end{aligned}$$

Finalmente, consideramos el valor de segunda etapa $Q(y^0)$ como la esperanza de los valores de segunda etapa de cada escenario:

$$Q(y^0) = \sum_{s \in S} p^s Q(y^0, s).$$

3.4.3.3. Cota superior U

Se proponen dos métodos para calcular la cota U :

- (1) **Big-M:** La forma más sencilla es notar que para cada escenario s , la función objetivo del problema de segunda etapa para ese escenario está acotada por sus componentes positivos, en este caso el SSP. De la misma forma, el SSP está acotado por sus componentes positivos, que son los ingresos por transportar cada carga. Por lo tanto, se calcula el ingreso total posible de transportar cada ítem c sin incurrir ningún costo para cada escenario s y se toma el máximo entre ellos:

$$U := \max_{s \in S} \sum_{c \in C} inc^{c,s}.$$

- (2) **Resolver problema relajado:** Para lograr un valor más acotado es posible resolver la formulación simplificada y relajada de DEF: las mismas restricciones pero relajando las de integralidad, se maximiza el valor esperado segunda etapa:

$$U = \max_{s \in S} p^s (SSP(q^s, y^s, x^s, w^s) - RAC(z^s) - RC(r^s))$$

s.a (FS.1)-(FS.3)

(SS.1)-(SS.12)

$s \in S$

$$0 \leq x_{ij}^{c,s} \leq 1$$

$s \in S, c \in C, ij \in A$

$$0 \leq q^{c,s} \leq 1$$

$s \in S, c \in C$

$$0 \leq w_{ij}^{c,k,s} \leq 1$$

$s \in S, c \in C, ij \in A_f$

$$y_{ij}^{k,s} \in \mathbb{R}_+$$

$s \in S \cup \{0\}, k \in K, ij \in A$

$$z_{ij,+}^{k,s}, z_{ij,-}^{k,s} \in \mathbb{R}_+$$

$s \in S, k \in K, ij \in A_g$

$$0 \leq z_{ij,+}^{k,s}, z_{ij,-}^{k,s} \leq 1$$

$s \in S, k \in K, ij \in A_f.$

Esta cota es válida porque al resolver un problema relajado encontramos un valor que es más alto que cualquier solución factible para el problema real de la

segunda etapa, y es más ajustado que la alternativa Big-M. A pesar de ser un LP de gran tamaño, no es necesario resolverlo a optimalidad ya que sólo se requiere una cota.

3.4.3.4. Cortes de Laporte y Louveaux

Se implementó el clásico corte de optimalidad, tal como se presenta en el trabajo original de Laporte y Louveaux. Para ello, se observa que aunque las variables de la primera etapa $y_{ij}^{k,0}$ son enteras y no binarias:

- (1) Basta con considerar las variables asociadas a los arcos de vuelo para identificar completamente una solución de primera etapa: sabiendo la cantidad inicial de aviones de cada tipo en cada nodo inicial junto a la información de qué tipo de avión se usa para operar cada vuelo elegido es posible recrear completamente la solución de primera etapa, ya que respetan las restricciones de conservación de flujo (FS.2)-(FS.3).
- (2) Dado que cada vuelo puede ser operado como máximo por una aeronave (FS.1), se cumple que las variables mencionadas en el punto anterior $y_{ij}^{k,0} \in \{0, 1\} \quad \forall ij \in A_f, \forall k \in K$.

Los dos puntos anteriores indican que se pueden utilizar las variables binarias de arcos de vuelo para implementar el corte de optimalidad. Sea $(\hat{y}, \hat{\theta})$ una solución de primera etapa, con $\hat{y} = \{\hat{y}_{ij}^{k,0} : \forall ij \in A_f, \forall k \in K\}$, y $Q(\hat{y}) = \sum_{s \in S} p^s Q(\hat{y}, s)$. Si $\hat{\theta} > Q(\hat{y})$ se aplica el siguiente corte de optimalidad al problema de primera etapa:

$$\theta \leq (U - Q(\hat{y})) \left(\sum_{(ij,k) \in S_r(\hat{y})} (1 - y_{ij}^{k,0}) + \sum_{(ij,k) \notin S_r(\hat{y})} y_{ij}^{k,0} \right) + Q(\hat{y}),$$

con $S_r(\hat{y}) := \{(ij, k) : ij \in A_f, k \in K, \hat{y}_{ij}^{k,0} = 1\}$ el conjunto de índices en que el vector binario de primera etapa tiene valor 1.

Notamos que para este problema no se necesitan cortes de factibilidad, ya que las restricciones de primera etapa siempre crean un itinerario inicial factible, mientras que en la segunda etapa las acciones de recuperación permiten modificar cualquier itinerario para crear uno nuevo factible.

3.5. *Sizebounding*

La formulación base de la descomposición presenta dos debilidades evidentes. En primer lugar, la primera etapa al no incorporar información de la segunda etapa, sólo se enfoca en minimizar costos FSC, lo que puede llevar a asignaciones que no sean buenas para el ruteo de carga necesario en la segunda etapa. En segundo lugar, tener un estimador del valor de segunda etapa θ demasiado alto empeora la cota superior del problema de primera etapa y con ello el *gap* de optimalidad reportado.

Para abordar ambas situaciones se plantea la idea de sobreestimar en la primera etapa el valor de segunda etapa que tendrá la asignación inicial considerada. Para ello en la primera etapa se define una cota $\theta \leq Q_{sb}(y^0)$ para toda asignación y^0 . Para que la cota sea válida se debe satisfacer que la cota sea mayor o igual al valor real de segunda etapa $Q(y^0) \leq Q_{sb}(y^0)$. El cálculo de $Q_{sb}(y^0)$ debe ser simple de realizar para poder efectuarlo en cada iteración de la primera etapa. En base a lo anterior, se define el *sizebounding* como el acotamiento basándose en el peso: entre todos los escenarios de segunda etapa $s \in S$ se escoge el más conveniente (el que permite el mayor valor de $Q_{sb}(y^0)$) y se calcula el ruteo de carga y acciones de recuperación para dicho escenario. Elegir uno de los escenarios requiere manejar los pesos de los ítems de carga como variables, por lo que se realizan los ajustes correspondientes a la formulación:

VARIABLES PARA EL *sizebounding*:

- f_{ij}^c : peso del ítem de carga $c \in C$ transportada en el arco $ij \in A$
- g_{ij}^c : volumen de carga $c \in C$ transportada en el arco $ij \in A$
- $\gamma^s = 1$ si el escenario $s \in S$ es elegido para acotar θ , 0 e.o.c.
- sel_weight^c : peso de la carga $c \in C$ en el escenario elegido
- $y_{sb}, z_{sb+}, z_{sb-}, r_{sb}$: iguales a las variables de segunda etapa, pero para un único escenario de acotamiento (en vez de $\forall s \in S$)

Análogo a la ganancia de segunda etapa, se define la ganancia de *sizebounding*. Dado que no se consideran múltiples escenarios ni se maneja información del tipo de avión

que transporta la carga, ya que las variables f_{ij}^c no están indexados por s ni por k , para cada ítem c se elige el mejor ingreso por kilogramo de entre todos los escenarios ($\max_{s \in S} \left\{ \frac{inc^{c,s}}{weight^{c,s}} \right\}$) y se elige el menor costo variable por kilogramo ($\min_{k \in K} \{cv_{ij}^k\}$). Dicha sobreestimación de ingreso por kilogramo y subestimación de costo variable es optimista respecto al valor real de segunda etapa, ya que asume una ganancia mayor o igual a las posibles en cualquier escenario y por lo tanto mayor o igual a la ganancia esperada:

$$\begin{aligned}
SSP_sb(y_sb, f) := & \sum_{c \in C} \max_{s \in S} \left\{ \frac{inc^{c,s}}{weight^{c,s}} \right\} \sum_{j \in \delta^+(o^c)} f_{o^c j}^c \\
& - \sum_{ij \in A_f} \sum_{k \in K} c f_{ij}^k y_sb_{ij}^k \\
& - \sum_{ij \in A_f} \sum_{c \in C} \min_{k \in K} \{cv_{ij}^k\} f_{ij}^c \\
& - \sum_{ij \in A_g} \sum_{c \in C} ch_{ij} f_{ij}^c.
\end{aligned}$$

Similarmente a los costos por acciones de recuperación de segunda etapa, se define los costos por acciones de recuperación de *sizebounding*. Se considera $\min_{s \in S} \{sc_{i'j'}^{k,s}\}$ ya que subestima el costo:

$$RAC_sb(z_sb_+) := \sum_{ij \in A_f} \sum_{k \in K} \min_{s \in S} \{sc_{i'j'}^{k,s}\} z_sb_{ij,+}^k.$$

De forma análoga a los costos de re-timing de segunda etapa, se define los costos de re-timing de *sizebounding*. Se considera $\min_{s \in S} \{sc_{i'j'}^{k,s}\}$ ya que subestima el costo:

$$RC_sb(r_sb) = \sum_{ij \in A_f} \sum_{i'j' \neq ij} \sum_{k \in K} (tv \cdot timegap(ij, i'j') - \min_{s \in S} \{sc_{i'j'}^{k,s}\}) r_sb_{ij,i'j'}^k.$$

Las restricciones para modelar la cota de *sizebounding* $Q_sb(y^0)$ son análogas a las de cualquier escenario de segunda etapa s , con la diferencia de que se requiere elegir uno de los escenarios para determinar el tamaño de la carga para el valor de la cota. Dado que

las restricciones (sb.1)-(sb.4) y (sb.11)-(sb.17) son análogas a las del modelo de segunda etapa, a continuación se presentan las restricciones especiales para el *sizebounding*, mientras que la formulación completa se encuentra en el Anexo A.3:

$$Q_sb(y^0) = SSP_sb(y_sb, f) - RAC_sb(z_sb_+) - RC_sb(r_sb) \quad (\text{sb.Q})$$

$$(\text{sb.1}) - (\text{sb.4})$$

$$\sum_{ji \in \delta^+(j)} f_{ji}^c - \sum_{ij \in \delta^-(j)} f_{ij}^c \begin{cases} \leq sel_weight^c, j = o^c, mand^{c,0} = 0 \\ \geq -sel_weight^c, j = d^c, mand^{c,0} = 0 \\ = sel_weight^c, j = o^c, mand^{c,0} = 1 \\ = -sel_weight^c, j = d^c, mand^{c,0} = 1 \\ = 0, \text{e.o.c.} \end{cases} \quad j \in N, c \in C \quad (\text{sb.5})$$

$$\sum_{c \in C} f_{ij}^c \leq \sum_{k \in K} air_cap^k y_sb_{ij}^k \quad ij \in A_f \quad (\text{sb.6})$$

$$\sum_{c \in C} g_{ij}^c \leq \sum_{k \in K} air_vol^k y_sb_{ij}^k \quad ij \in A_f \quad (\text{sb.7})$$

$$g_{ij}^c \max_{s \in S} \left\{ \frac{weight^{c,s}}{vol^{c,s}} \right\} = f_{ij}^c \quad c \in C \quad (\text{sb.8})$$

$$sel_weight^c = \sum_{s \in S} weight^{c,s} \gamma_s \quad c \in C \quad (\text{sb.9})$$

$$\sum_{s \in S} \gamma_s = 1 \quad (\text{sb.10})$$

$$(\text{sb.11}) - (\text{sb.17})$$

Formulación del problema de Primera Etapa acotado mediante *sizebounding* (FS-sb):

$$\max \quad -FSC(y) + \theta$$

$$\text{s.a} \quad (\text{FS.1})-(\text{FS.4})$$

$$(\text{sb.Q})$$

$$(\text{sb.1})-(\text{sb.17})$$

$$(\text{RT.1}) - (\text{RT.5})$$

$$\theta \leq U$$

$$\theta \leq Q_sb(y^0)$$

3.5.1. Validez de la cota Q_{sb}

PROPIEDAD 3.1 (Sobreestimación de valor). *Sea y^0 cualquier posible solución de primera etapa e \bar{y} alguna solución factible de $Q(y^0, s)$. Debido a la sobreestimación de ganancias en SSP_{sb} y subestimación de costos en SSP_{sb} , RAC_{sb} y RC_{sb} , se cumple que la solución factible \bar{y} tiene un valor objetivo no mayor que al evaluarla en su equivalente de *sizebounding* (transformando las variables x^s y w^s en sus equivalentes f de *sizebounding*):*

$$SSP_{sb}(\bar{y}, f) - RAC_{sb}(z_{sb+}) - RC_{sb}(r_{sb}) \geq SSP(q^s, \bar{y}, x^s, w^s) - RAC(z) - RC(r)$$

donde las variables adicionales complementan a y^0 e \bar{y} en los problemas respectivos.

PROPIEDAD 3.2 (Mayor espacio de soluciones). *Sea $Q_{sb}(y^0 | \gamma_s = 1)$ el valor de *sizebounding* para la solución inicial y^0 condicionado a la elección del escenario s . Sea y^0 cualquier posible solución de primera etapa. Debido a la relajación que permite llevar flujo parcial de carga cuando ésta no es obligatoria en (sb.5) y que la subestimación de volumen de la carga (sb.8) facilita el cumplimiento de la restricción (sb.7), se cumple que para cualquier escenario s elegido, el espacio factible del problema real está contenido en el espacio factible del *sizebounding*, por lo tanto:*

$$Q_{sb}(y^0 | \gamma_s = 1) \geq Q(y^0, s) \quad \forall s \in S$$

Teorema 3.1 (Validez de la cota Q_{sb}). *Para cualquier posible solución de primera etapa y^0 se cumple que $Q_{sb}(y^0)$ acota superiormente su valor de segunda etapa $Q(y^0)$.*

DEMOSTRACIÓN. Para cualquier solución de primera etapa y^0 , sea s' el escenario elegido para acotar en el *sizebounding*, por lo que $\gamma_{s'} = 1$. Debido a la estructura de maximización del problema se cumple que el escenario escogido s' es mejor o igual que cualquier otro escenario posible:

$$Q_{sb}(y^0) = Q_{sb}(y^0 | \gamma_{s'} = 1) \geq Q_{sb}(y^0 | \gamma_s = 1) \quad \forall s \in S \setminus \{s'\}.$$

Lo anterior junto a la Sobreestimación de Valor y al Mayor espacio de soluciones (Propiedades 3.1 y 3.2) implican que el valor de *sizebounding* es mayor o igual a cualquier valor de segunda etapa para cualquier escenario:

$$Q_{sb}(y^0) \geq Q(y^0, s) \quad \forall s \in S.$$

Dado que el valor de segunda etapa es el promedio ponderado del valor de segunda etapa para cada escenario, se satisface:

$$Q_{sb}(y^0) \geq Q(y^0).$$

Por lo que el *sizebounding* genera cotas válidas para el estimador del valor de segunda etapa θ . □

3.6. Relación de Orden

En esta sección se introduce la idea de Relación de Orden, que consiste en una forma de evaluar si dos soluciones son similares respecto a la capacidad de transportar los mismos ítems de carga. Esta capacidad depende de los órdenes relativos entre las horas de despegues de los vuelos, sus horas de llegadas y las horas en que cada ítem de carga está disponible para ser transportado o debe ser entregado, sin importar la hora exacta en que ocurren los vuelos. Esto se ejemplifica en la Figura 3.7: sea y_1^0 una solución de primera etapa, e y_2^0 otra solución que considera la misma cantidad de vuelos para cada par OD, aunque a horas distintas.

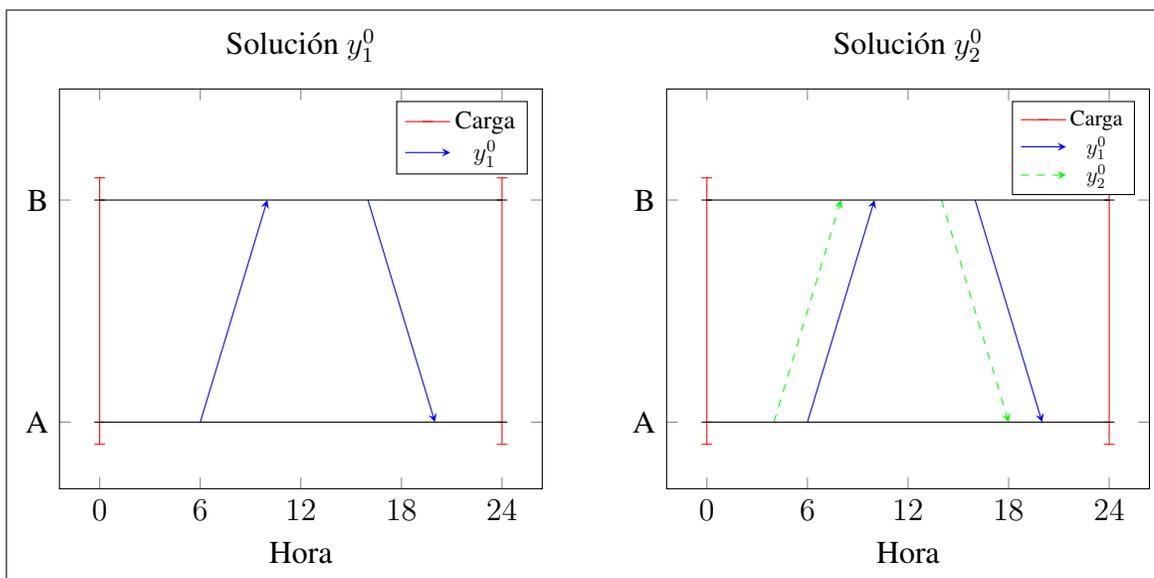


Figura 3.7. Itinerarios similares.

Las soluciones son distintas ya que corresponden a vectores distintos, pero tienen algunas similitudes relevantes:

- (1) Ambas soluciones consideran los mismos vuelos en cuanto a su par OD, aunque tienen distintas horas de despegue.

- (2) Para cada vuelo, el conjunto de carga disponible para transportar es la misma. Por ejemplo, la carga disponible a las 06:00 para el vuelo $A6 \rightarrow B12$ en y_1^0 es exactamente la que está disponible a las 05:00 para el vuelo $A4 \rightarrow B10$ en y_2^0 .

Los itinerarios anteriores son similares en el sentido de que mantener una relación de orden de los vuelos permite el mismo flujo general de carga para cada par OD, aunque no ocurran exactamente a la misma hora: los flujos posibles para la carga son $A \rightarrow B$, $B \rightarrow A$ y $A \rightarrow B \rightarrow A$, independiente de la hora de los vuelos. Aunque técnicamente en los problemas de segunda etapa las acciones de recuperación pueden generar itinerarios finales distintos y con ello valores distintos, es razonable esperar que $Q(y_1^0)$ tenga un valor similar a $Q(y_2^0)$ si y_1^0 es similar a y_2^0 . Esta idea de similitud entre soluciones de primera etapa y entre sus valores de segunda etapa es utilizada en la sección 3.7.

3.6.1. Casos en que no hay similitud

En este apartado se muestran algunos casos en los cuales itinerarios y_2, y_3 son o no similares a un itinerario de referencia y_1 según las interacciones de los vuelos, y con base en ellos se formalizarán las reglas en la siguiente sección. Se habla de vuelos nocturnos para referirse a los vuelos que despegan cierto día y aterrizan en el siguiente, y vuelos de día son los que despegan y aterrizan en el mismo día.

En la Figura 3.8 se observa que para cada aeropuerto, no se puede hacer un cambio que altere el orden entre salidas (ya que el despegue de un vuelo condiciona a todos los otros despegues posteriores, porque modifica el conjunto de carga disponible que podrían transportar), o altere el orden entre salidas y llegadas (ya que los despegues están condicionados a las llegadas al aeropuerto y salidas desde él que lo anteceden, porque definen el conjunto de carga disponible para éste despegue). Dado que intercambiar las horas de llegadas de vuelos a un aeropuerto no condicionan de forma distinta la carga disponible para la próxima salida, mantienen estructuras similares.

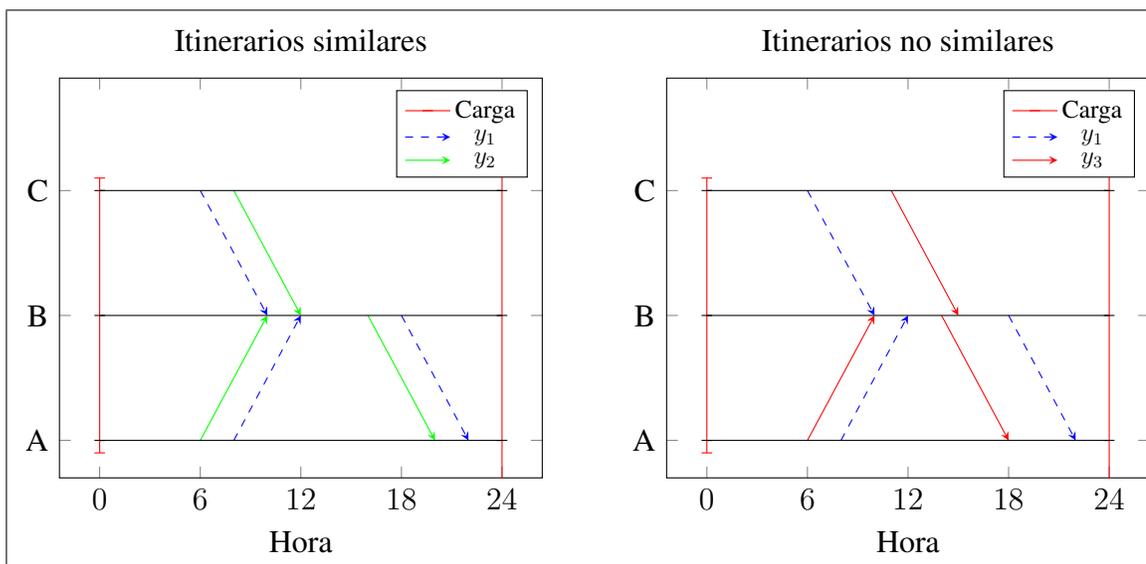


Figura 3.8. Cambio en el orden de algún despegue genera estructuras distintas. Para y_1 los flujos de carga posibles son $A \rightarrow B$, $A \rightarrow B \rightarrow A$, $C \rightarrow B$, $C \rightarrow B \rightarrow A$. y_2 permite esos mismos flujos de carga, a pesar de que para todo OD, sus vuelos despeguen a distinta hora que los de y_1 . Esto no se cumple para y_3 ya que el flujo $C \rightarrow B \rightarrow A$ es imposible.

La Figura 3.9 representa que los vuelos de día no pueden convertirse en nocturnos: la hora de un vuelo puede ser cambiada libremente dentro de un día siempre y cuando permanezca dentro de dicho día, es decir mientras no sea convertida en un vuelo nocturno. Convertirse en un vuelo nocturno implica que ahora la salida ocurre en el día previo o la llegada en el día siguiente: en el primer caso se modificaría la carga disponible a transportar, y en el segundo caso ya no se podría entregar la carga que debía llegar al final del día original.

Análogamente, la Figura 3.10 representa que los vuelos nocturnos no pueden convertirse en vuelos de día: la hora de un vuelo nocturno puede ser modificada libremente siempre que la salida y la llegada permanezcan en su día correspondiente. En caso contrario, adelantar la salida de un vuelo podría permitir que se entregue carga en el día previo, y atrasarlo permitiría transportar carga disponible desde el día siguiente.

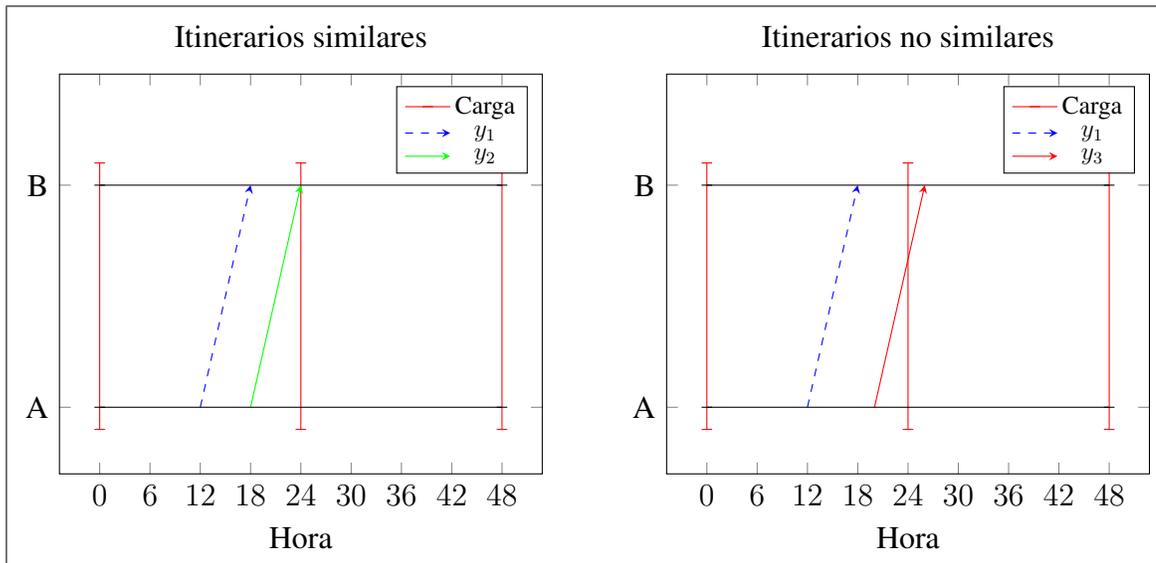


Figura 3.9. Cambiar un vuelo de día en uno nocturno genera estructuras distintas. y_2 es similar a y_1 ya que la carga transportada alcanza a ser entregada al final del día original. Esto no ocurre en y_3 ya que llega después del momento de entrega de carga, por lo que no es similar.

3.6.2. Reglas para la Relación de Orden

De los casos anteriores se desprende que dos itinerarios son similares si los vuelos que los componen cumplen ciertas condiciones respecto al orden relativo entre los vuelos y las horas en que se hace disponible y se debe entregar la carga. Respetar estas relaciones, que se definirán como Relación de Orden, permite un flujo similar de carga y con ello valores similares de segunda etapa.

Dos soluciones y_1, y_2 cumplen la Relación de Orden si satisfacen las siguientes 4 condiciones simultáneamente:

- (1) Para cada par OD, en cada día está planificada la misma cantidad de vuelos en ambas soluciones.
- (2) Para cada par OD, en cada noche está planificada la misma cantidad de vuelos en ambas soluciones.

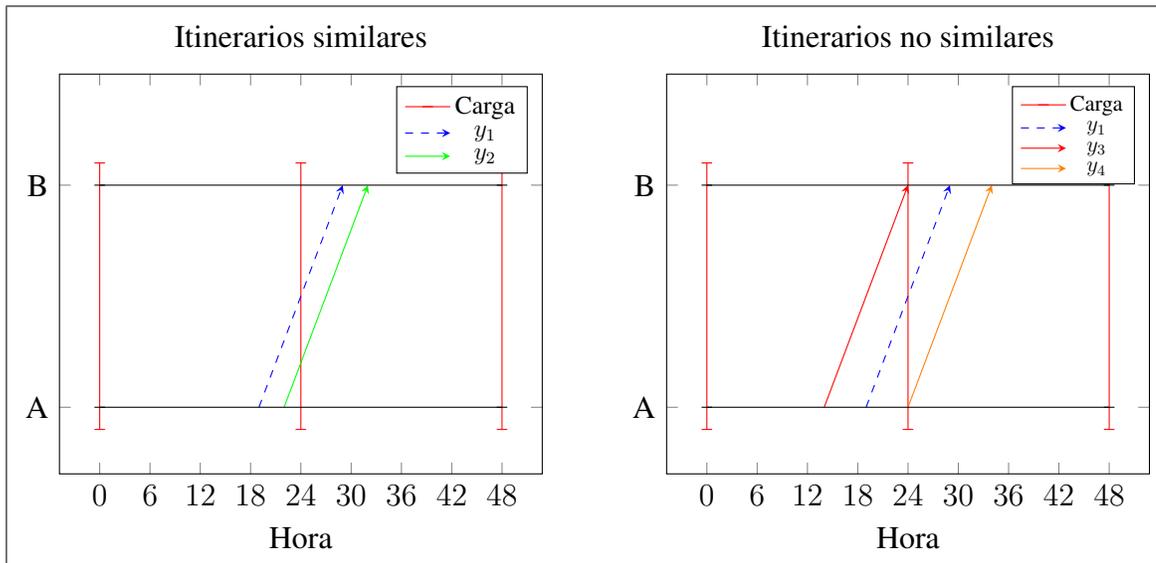


Figura 3.10. Vuelos nocturnos transformados en vuelos de día generan estructuras distintas. y_2 es similar a y_1 ya que la carga a transportar es la disponible al comienzo del primer día y se puede entregar la que debe llegar al final del segundo. En y_3 se puede entregar al final del día previo y en y_4 se puede transportar carga disponible en el día siguiente, por lo que no son similares a y_1 .

Si y_1, y_2 satisfacen las condiciones (1) y (2) significa que son numéricamente similares en cada día y noche, por lo que es posible comparar para cada OD el i -ésimo vuelo de cada solución.

- (3) Para cada par OD, para el i -ésimo vuelo observado, el número de vuelos que llegan al aeropuerto de origen desde algún tercer aeropuerto antes del despegue del observado debe ser igual en ambas soluciones.

En caso contrario: si para y_1 hay m_1 llegadas previas al vuelo i -ésimo y para y_2 hay m_2 llegadas previas, asumiendo $m_2 < m_1$ sin pérdida de generalidad, significa que hay $m_1 - m_2$ vuelos que deben llegar **después** del i -ésimo vuelo, dado que ambos tienen la misma cantidad de vuelos por OD.

- (4) Para cada par OD, para el i -ésimo vuelo observado, el número de vuelos que salen del aeropuerto de origen hacia algún otro aeropuerto antes del despegue del observado debe ser igual en ambas soluciones.

En caso contrario: análogo al anterior, ahora hay $m_1 - m_2$ vuelos que salen después del i -ésimo.

Estas condiciones aseguran que para cada vuelo, el conjunto de carga disponible a transportar es la misma: satisfacer (3) indica que toda la carga que debe llegar antes de la salida del vuelo efectivamente lo hace, y satisfacer (4) indica que no hay cambios en los despegues previos que condicionan su carga disponible para transportar.

3.6.3. Vecindad respecto a 1 vuelos: 1-fv

El concepto de Relación de Orden es simple de verificar entre cualquier par de soluciones existentes, pero su amplitud puede ser inconveniente al momento de implementarlo en un problema de optimización. Dada una solución de primera etapa particular y :

- Crear mediante un algoritmo todas las otras soluciones que satisfacen la Relación de Orden con respecto a y resulta no trivial.
- Modelar en un problema de optimización las soluciones que satisfacen la Relación de Orden con respecto a y es complejo, ya que requeriría modelar las reglas anteriores para cualquier posible par de soluciones de primera etapa.

Dado lo anterior, se propone acotar la idea de Relación de Orden para las soluciones que difieren en a lo más 1 vuelo, definiendo la Vecindad de 1 Vuelo (*1-Flight Vicinity*, 1-fv) de un itinerario y como los itinerarios y' tales que satisfacen la Relación de Orden con respecto a y y difieren en tan sólo la hora de salida de 1 vuelo.

Crear dicha vecindad requiere crear para cada vuelo operado, un itinerario nuevo en que dicho vuelo se reemplaza por otro similar respetando la Relación de Orden. En la Figura 3.11 se observa cómo para un determinado \bar{y} , para un vuelo $\bar{i}\bar{j}$ operado por un avión tipo \bar{k} , el conjunto de vuelos similares, denotado $S(\bar{i}\bar{j})$, depende de las interacciones con otros vuelos y la disponibilidad/entrega de carga.

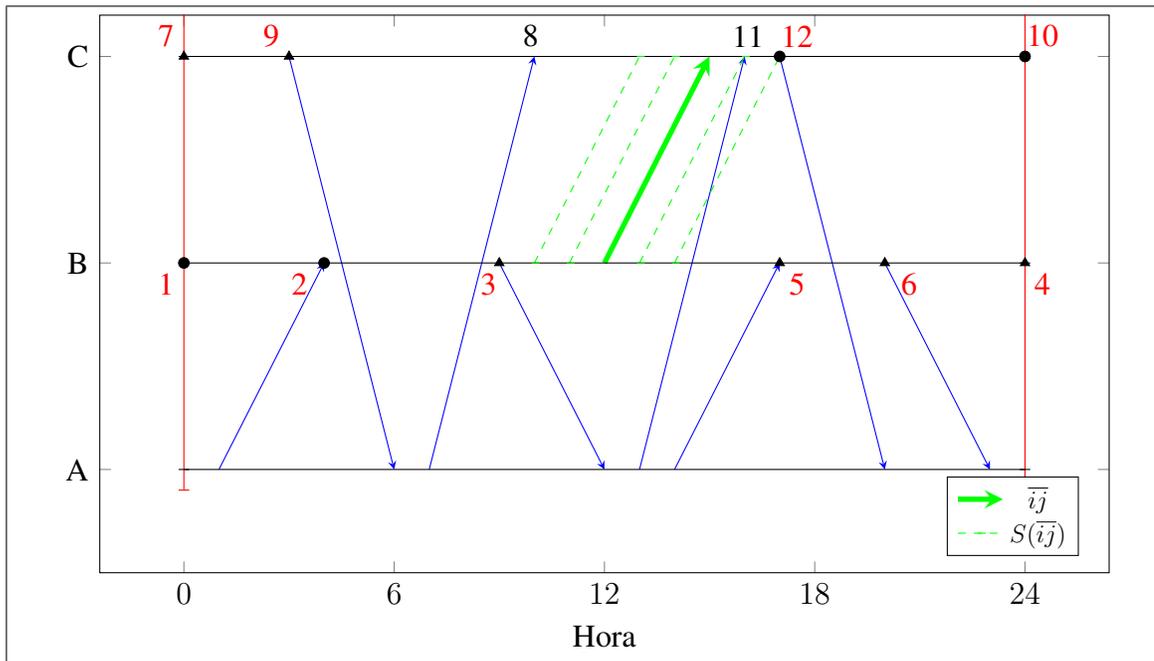


Figura 3.11. Vuelos similares en una solución dada. Para el vuelo observado $\bar{ij} = B12 \rightarrow C15$, su conjunto de vuelos similares $S(\bar{ij})$ está limitado por la carga y el resto del itinerario. Círculos indican nodos límites incluyentes y triángulos nodos límites excluyentes. Los números en los nodos corresponden a las posibles interacciones definidas por la Relación de Orden.

Cambiar la hora de salida de un vuelo respetando la Relación de Orden requiere observar lo que ocurre tanto en el aeropuerto de salida y de llegada de dicho vuelo, tanto antes del despegue como después del aterrizaje. Los nodos que acotan $S(\bar{ij})$ están definidos por las siguientes interacciones, cuyos números corresponden a los representados en la Figura 3.11:

- Cotas Inferiores para la Salida:
 - (1) Carga disponible antes de la salida de \bar{ij} . Esto es porque la hora de salida no puede adelantarse hasta ser menor a la hora en que aparece carga en el sistema, o ya no sería de transportar la carta que aparece al comienzo de ese día.

- (2) Llegadas al aeropuerto de origen de \overline{ij} antes de su salida. La hora de salida no puede adelantarse hasta menor que la hora de llegada de algún otro vuelo existente, ya que en la planificación original la llegada del vuelo previo en llegar condicionaba el conjunto de carga que el vuelo \overline{ij} podía transportar. Se puede permitir que ocurran a la misma hora, por lo que no es un nodo excluyente.
- (3) Salidas desde el aeropuerto de origen de \overline{ij} antes de su salida (excluyente). Similarmente al caso anterior, la hora de salida no puede adelantarse hasta ser menor ni igual a la hora de salida de otro vuelo existente, ya que en la planificación original la carga que es transportada en el vuelo previo condiciona la que el vuelo \overline{ij} puede llevar. En este caso el nodo se excluye, ya que permitir que salgan a la misma hora no asegura la condicionalidad de vuelos del itinerario original.
- Cotas Superiores para la Salida:
 - (4) Carga disponible tras la salida de \overline{ij} . No afecta en los vuelos de día, ya que es dominada por (10), pero es relevante para los vuelos nocturnos.
 - (5) Llegadas al aeropuerto de origen de \overline{ij} después su salida (excluyente).
 - (6) Salidas desde el aeropuerto de origen de \overline{ij} después su salida (excluyente).
 - Cotas Inferiores para la Llegada:
 - (7) Carga a entregar antes de la llegada de \overline{ij} . No afecta en los vuelos de día, ya que es dominada por (1), pero es relevante para los vuelos nocturnos.
 - (8) Llegadas al aeropuerto de destino de \overline{ij} antes de su llegada. Estas interacciones no afecta el flujo de carga, por lo que no son consideradas.
 - (9) Salidas desde el aeropuerto de destino de \overline{ij} antes de su llegada (excluyente).
 - Cotas Inferiores para la Llegada:
 - (10) Carga a entregar tras la llegada de \overline{ij} .
 - (11) Llegadas al aeropuerto de destino de \overline{ij} tras su llegada. Estas interacciones no afecta el flujo de carga, por lo que no son consideradas.
 - (12) Salidas desde el aeropuerto de destino de \overline{ij} tras su llegada.

Para \bar{y} y el vuelo observado \bar{ij} operado por un avión tipo \bar{k} , se define el conjunto de vuelos similares $S(\bar{ij})$ como los vuelos no operados en \bar{y} que podrían reemplazar a \bar{ij} manteniendo la Relación de Orden:

$$S(\bar{ij}) := \{ij \in A_f : \sum_{k \in K} \bar{y}_{ij}^{k,0} = 0 \wedge air_i = air_{\bar{i}} \wedge air_j = air_{\bar{j}} \wedge \\ \max(cota_inf_salida) \leq time_i \leq \min(cota_sup_salida) \wedge \\ \max(cota_inf_llegada) \leq time_j \leq \min(cota_sup_llegada)\}$$

con las siguientes cotas definidas en base a las 12 posibles interacciones mencionadas anteriormente:

$$cota_inf_salida := \{time_cargo : time_cargo \leq time_{\bar{i}}\} \quad (1)$$

$$\cup \left\{ time_j : ij \neq \bar{ij} \in A_f \wedge \sum_{k \in K} \bar{y}_{ij}^{k,0} = 1 \wedge air_j = air_{\bar{i}} \wedge time_j \leq time_{\bar{i}} \right\} \quad (2)$$

$$\cup \left\{ time_i + 1 : ij \neq \bar{ij} \in A_f \wedge \sum_{k \in K} \bar{y}_{ij}^{k,0} = 1 \wedge air_i = air_{\bar{i}} \wedge time_i < time_{\bar{i}} \right\} \quad (3)$$

$$cota_sup_salida := \{time_cargo - 1 : time_cargo \geq time_{\bar{i}}\} \quad (4)$$

$$\cup \left\{ time_j - 1 : ij \neq \bar{ij} \in A_f \wedge \sum_{k \in K} \bar{y}_{ij}^{k,0} = 1 \wedge air_j = air_{\bar{i}} \wedge time_j > time_{\bar{i}} \right\} \quad (5)$$

$$\cup \left\{ time_i - 1 : ij \neq \bar{ij} \in A_f \wedge \sum_{k \in K} \bar{y}_{ij}^{k,0} = 1 \wedge air_i = air_{\bar{i}} \wedge time_i > time_{\bar{i}} \right\} \quad (6)$$

$$cota_inf_llegada := \{time_cargo + 1 : time_cargo \leq time_{\bar{j}}\} \quad (7)$$

$$\cup \left\{ time_i + 1 : ij \neq \bar{ij} \in A_f \wedge \sum_{k \in K} \bar{y}_{ij}^{k,0} = 1 \wedge air_i = air_{\bar{j}} \wedge time_i < time_{\bar{i}} \right\} \quad (9)$$

$$cota_sup_llegada := \{time_carga : time_carga \geq time_{\bar{j}}\} \quad (10)$$

$$\cup \left\{ time_i : ij \neq \bar{ij} \in A_f \wedge \sum_{k \in K} \bar{y}_{ij}^{k,0} = 1 \wedge air_i = air_{\bar{j}} \wedge time_i \geq time_{\bar{i}} \right\} \quad (12)$$

3.6.3.1. Casos Especiales

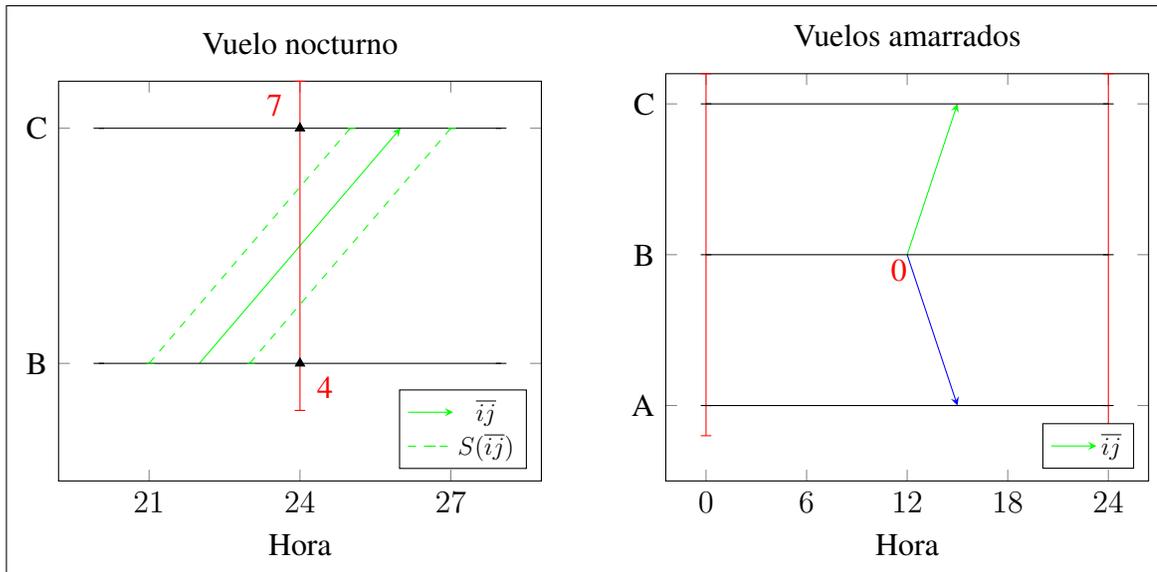


Figura 3.12. Casos especiales para 1-fv.

- Vuelos Nocturnos: son los únicos casos en que las interacciones (4) y (7) son relevantes, y son excluyentes para que los vuelos similares sean vuelos nocturnos también.
- Vuelos Amarrados: si existe otro vuelo que sale del mismo nodo que \bar{ij} entonces el vuelo observado no puede ser adelantado ni retrasado, ya que en el primer caso se condiciona al otro vuelo y en el segundo caso el otro condiciona al vuelo reemplazado, por lo que, $S(\bar{ij}) = \emptyset$.

3.7. Cortes QT

Como se observa en la Sección 2.4, algoritmo del *Integer L-shaped Method* requiere resolver iterativamente el MIP de primera etapa, resolver los $|S|$ MIPs de segunda etapa y aplicar un corte de optimalidad local en caso de que todos ellos sean factibles, o aplicar uno de factibilidad en caso contrario. Dado que para una solución de primera etapa no se conoce su valor de segunda etapa y que los cortes de optimalidad que acotan la variable θ son locales, resolver a optimalidad requeriría en primer lugar computar toda posible solución de primera etapa, y en segundo lugar resolver los $|S|$ MIPs para obtener su valor de segunda etapa. Dado que en la práctica eso no es factible para problemas complejos como el actualmente abordado, se propone una forma de acotar el valor de segunda etapa mediante una aproximación fácil de calcular.

Sea y_1^0 una nueva solución de primera etapa con valor de segunda etapa $Q(y_1^0)$ no calculado aún. Sea \mathbb{Y}^0 el conjunto de soluciones previamente visitadas, tal que para todo elemento $y_2^0 \in \mathbb{Y}^0$ se conoce su valor de segunda etapa $Q(y_2^0)$. Se busca establecer una relación entre $Q(y_1^0)$ y $Q(y_2^0)$.

Definimos $T(y_2^0, y_1^0, s) \geq 0$ como el Costo de Transformación de la solución de primera etapa y_2^0 a otra solución y_1^0 mediante acciones de recuperación para el escenario s , y $T(y_2^0, y_1^0)$ su valor esperado sobre todo posible escenario. Se cumple que

$$Q(y_2^0, s) \geq -T(y_2^0, y_1^0, s) + Q(y_1^0, s) \quad \forall y_2^0 \in \mathbb{Y}^0, \forall s \in S$$

porque una solución factible para el problema de segunda etapa de y_2^0 para el escenario s , es decir $Q(y_2^0, s)$, es transformarla en y_1^0 , ya que cualquier vuelo existente se puede eliminar y cualquier vuelo inexistente se puede agregar en la segunda etapa. Reordenando se obtiene

$$Q(y_1^0, s) \leq T(y_2^0, y_1^0, s) + Q(y_2^0, s) \quad \forall y_2^0 \in \mathbb{Y}^0, \forall s \in S.$$

Calculando el valor esperado se obtiene

$$Q(y_1^0) \leq T(y_2^0, y_1^0) + Q(y_2^0) \quad \forall y_2^0 \in \mathbb{Y}^0$$

y en particular

$$Q(y_1^0) \leq \min_{y_2^0 \in \mathbb{Y}^0} \{T(y_2^0, y_1^0) + Q(y_2^0)\}.$$

Con $Q(y_2^0)$ conocido y $T(y_2^0, y_1^0)$ fácil de calcular, se define $QTb(y_1^0)$ como la cota QT para y_1^0 :

$$QTb(y_1^0) = \min_{y_2^0 \in \mathbb{Y}^0} \{T(y_2^0, y_1^0) + Q(y_2^0)\}$$

Es importante destacar que este corte es válido para cualquier $y_1^0, y_2^0 \in \mathbb{Y}^0$. Sin embargo, que las soluciones sean similares, por ejemplo 1-fv, es conveniente para reducir el costo de transformación y con ello obtener cotas mejores.

3.7.1. Costo de Transformación

Para las soluciones y_2^0, y_1^0 , se define el Costo de Transformación como el costo esperado de agregar, en cada escenario, todos los vuelos de y_1^0 que no están presentes en y_2^0 . Recordamos al que planificar un vuelo con poca anticipación se incurre en un costo de tripulación (sc) mayor que al que se incurre al hacerlo en la primera etapa con alta anticipación (lc), por lo que el costo se define como:

$$T(y_2^0, y_1^0) := \sum_{s \in S} p^s T(y_2^0, y_1^0, s) = \sum_{s \in S} p^s \sum_{k \in K} \sum_{ij \in A_f: y_{2,ij}^{k,0} = 0 \wedge y_{1,ij}^{k,0} = 1} sc_{ij}^{k,s}$$

La transformación también debe descartar todos los vuelos presentes en y_2^0 que no existen en y_1^0 , pero al eliminarlos no se incurre en ningún costo en la segunda etapa dado que el costo de tripulación es un costo considerado en $FSC(y_2^0)$ en la primera etapa.

Es relevante notar que a diferencia de un problema de segunda etapa, el costo de transformación para un corte QT no puede considerar re-timings, como se explica en el Anexo B.1.

3.7.2. Validez de la cota

PROPIEDAD 3.3 (Sub-optimalidad). Sea $\phi_1^{s*} := (y_1^{s*}, x_1^{s*}, w_1^{s*}, q_1^{s*})$ la planificación óptima final de $Q(y_1^0, s)$ excluyendo las variables de acciones de recuperación z_+^s, z_-^s, r^s , y ϕ_2^{s*} la planificación óptima final de $Q(y_2^0, s)$ excluyendo las variables de acciones de recuperación z_+^s, z_-^s, r^s . Notamos que se puede construir cualquier planificación final aplicando acciones de recuperación independiente del itinerario de primera etapa. Además, la ganancia de segunda etapa SSP es independiente de las acciones de recuperación utilizadas y por tanto depende únicamente de la planificación final:

$$Q(y^0, s) = SSP(\phi^s := (q^s, y^s, x^s, w^s)) - RAC(z_+^s) - RC(r^s)$$

Por lo tanto, se cumple que para el problema $Q(y_2^0, s)$, ϕ_1^{s*} es una planificación factible, y por definición de optimalidad su valor es menor o igual al de la solución óptima. Usando la notación $Q(y_2^0) \Big|_{\phi_1^{s*}}$ para representar el valor $Q(y_2^0)$ forzando que se escoja la planificación final ϕ_1^{s*} , mediante las acciones de recuperación necesarias:

$$Q(y_2^0, s) \geq Q(y_2^0, s) \Big|_{\phi_1^{s*}}$$

Es relevante notar que dado y_2^0 y habiendo fijado la planificación final factible ϕ_1^{s*} , las acciones de recuperación para transformar y_2^0 en y_1^{s*} quedan fijas, y las denotamos como $z_+^{s*}, z_-^{s*}, r^{s*} : y_2^0 \rightarrow y_1^{s*}$.

Desglosando la función objetivo de $Q(y_2^0) \Big|_{\phi_1^{s*}}$:

$$Q(y_2^0, s) \geq SSP(\phi_1^{s*}) - RAC(z_+^{s*} : y_2^0 \rightarrow y_1^{s*}) - RC(r^{s*} : y_2^0 \rightarrow y_1^{s*})$$

se obtiene la desigualdad de sub-optimalidad expresada en función del itinerario inicial y_2^0 y cualquier posible planificación final ϕ_1^{s*} , que es el óptimo de algún otro itinerario inicial y_1^0 .

PROPIEDAD 3.4 (Relación RAC-T). Teniendo fijos el itinerario inicial y_2^0 y final y_1^{s*} , el Costo por Acciones de Recuperación es exactamente el Costo de Transformación, con $z_+^{s*} :$

$y_2^0 \rightarrow y_1^{s^*}$ las acciones de recuperaciones necesarias para realizar dicha transformación:

$$RAC(z_+^{s^*} : y_2^0 \rightarrow y_1^{s^*}) = T(y_2^0, y_1^{s^*})$$

PROPIEDAD 3.5 (Desigualdad triangular). *El Costo de Transformación entre dos itinerarios es menor o igual al costo de agregar un itinerario intermedio y realizar dos transformaciones:*

$$T(y^1, y^2) \leq T(y^1, y^3) + T(y^3, y^2)$$

PROPIEDAD 3.6 (Relación RAC-RC). *Por construcción, permitir re-timings reduce el Costo por Acciones de Recuperación:*

$$RAC(z_+^{s^*} : y^1 \rightarrow y^2) \geq RAC(z_+^{s^*} : y^1 \rightarrow y^2) + RC(r^{s^*} : y^1 \rightarrow y^2) \geq 0$$

PROPIEDAD 3.7 (Simetría en RC). *El Costo de Re-timing es simétrico:*

$$RC(r^{s^*} : y^1 \rightarrow y^2) = RC(r^{s^*} : y^2 \rightarrow y^1)$$

Teorema 3.2 (Costo con transformación intermedia). *Agregar una transformación intermedia, con sólo el Costo por Acciones de Recuperación sin considerar Re-timings, no es menos costoso que hacer la transformación directa. Es decir, la transformación $y^1 \rightarrow y^2$ es más barata que realizando una transformación intermedia $y^1 \rightarrow y^3 \rightarrow y^2$, con y^3 cualquier otra solución:*

$$RAC(z_+^{s^*} : y^1 \rightarrow y^2) + RC(r^{s^*} : y^1 \rightarrow y^2) \leq RAC(z_+^{s^*} : y^1 \rightarrow y^3) + \\ RAC(z_+^{s^*} : y^3 \rightarrow y^2) + RC(r^{s^*} : y^3 \rightarrow y^2)$$

DEMOSTRACIÓN. Se puede analizar cada término de la desigualdad para cada posible vuelo $ij \in A_f$, dado que dicho vuelo puede estar presente o no en cada solución. Para el lado izquierdo de la desigualdad se cumple

$$RAC(z_{+,ij}^{s^*} : y_{ij}^1 \rightarrow y_{ij}^2) + RC(r_{ij}^{s^*} : y_{ij}^1 \rightarrow y_{ij}^2) \in [0, \max_{k \in K} \{sc_{ij}^{k,s}\}]$$

porque en el mejor caso no hay que agregar el vuelo por lo que no hay costo por acción de recuperación (costo 0), en el peor caso se agrega como un vuelo nuevo para algún tipo

de avión k (costo $\in \{sc_{ij}^{1,s}, \dots, sc_{ij}^{|K|,s}\}$), o puede ser un re-timing (costo entre los dos anteriores). Lo mismo se aplica para los elementos del lado derecho, con

$$RAC(z_{+,ij}^{s*} : y_{ij}^3 \rightarrow y_{ij}^2) + RC(r_{ij}^{s*} : y_{ij}^3 \rightarrow y_{ij}^2) \in [0, \max_{k \in K} \{sc_{ij}^{k,s}\}]$$

$$RAC(z_{+,ij}^{s*} : y_{ij}^1 \rightarrow y_{ij}^3) \in [0, \max_{k \in K} \{sc_{ij}^{k,s}\}]$$

Habiendo demostrado que existe una forma de comparar la desigualdad para cada arco de vuelo $ij \in A_f$ ¹, a continuación se demostrará que la siguiente desigualdad se satisface para cualquier $ij \in A_f$:

$$RAC(y_{ij}^1 \rightarrow y_{ij}^2) + RC(y_{ij}^1 \rightarrow y_{ij}^2) \leq RAC(y_{ij}^1 \rightarrow y_{ij}^3) + RAC(y_{ij}^3 \rightarrow y_{ij}^2) + RC(y_{ij}^3 \rightarrow y_{ij}^2) \quad (3.1)$$

Para cada arco de vuelo $ij \in A_f$ los casos posibles son:

- $y_{ij}^3 = y_{ij}^1$:

Aplicándolo en (3.1):

$$\begin{aligned} RAC(y_{ij}^1 \rightarrow y_{ij}^2) + RC(y_{ij}^1 \rightarrow y_{ij}^2) &\leq \\ RAC(y_{ij}^1 \rightarrow y_{ij}^1) + RAC(y_{ij}^1 \rightarrow y_{ij}^2) + RC(y_{ij}^1 \rightarrow y_{ij}^2) & \end{aligned}$$

Dado que $y_{ij}^3 = y_{ij}^1$, el vuelo existe en ambas soluciones, o no existe en ninguna.

En ambos casos no hay acciones de recuperación a realizar, por lo que

$RAC(y_{ij}^1 \rightarrow y_{ij}^1) = 0$ y se satisface trivialmente con igualdad.

- $y_{ij}^3 = y_{ij}^2$:

Aplicándolo en (3.1):

$$\begin{aligned} RAC(y_{ij}^1 \rightarrow y_{ij}^2) + RC(y_{ij}^1 \rightarrow y_{ij}^2) &\leq \\ RAC(y_{ij}^1 \rightarrow y_{ij}^2) + RAC(y_{ij}^2 \rightarrow y_{ij}^2) + RC(y_{ij}^2 \rightarrow y_{ij}^2) & \end{aligned}$$

Análogo al caso anterior, $RAC(y_{ij}^2 \rightarrow y_{ij}^2) = RC(y_{ij}^2 \rightarrow y_{ij}^2) = 0$:

$$RAC(y_{ij}^1 \rightarrow y_{ij}^2) + RC(y_{ij}^1 \rightarrow y_{ij}^2) \leq RAC(y_{ij}^1 \rightarrow y_{ij}^2)$$

¹Esto no es trivial para el costo de re-timing, ya que la variable $r_{ij,i'j'}^{k,s}$ depende de dos arcos $ij \in A_f$ y $i'j' \in V(ij)$, por lo que es necesario demostrar que se puede acotar en función de ij únicamente, independiente de $i'j'$.

Como $RC(y_{ij}^1 \rightarrow y_{ij}^2) \leq 0$ por construcción de RC, la desigualdad se satisface.

- $y_{ij}^3 \neq y_{ij}^1$ y $y_{ij}^3 \neq y_{ij}^2$, por lo tanto $y_{ij}^1 = y_{ij}^2$ ya que son variables binarias:

Aplicándolo en (3.1):

$$RAC(y_{ij}^2 \rightarrow y_{ij}^2) + RC(y_{ij}^2 \rightarrow y_{ij}^2) \leq \\ RAC(y_{ij}^2 \rightarrow y_{ij}^3) + RAC(y_{ij}^3 \rightarrow y_{ij}^2) + RC(y_{ij}^3 \rightarrow y_{ij}^2)$$

Dado que $RAC(y_{ij}^2 \rightarrow y_{ij}^2) = RC(y_{ij}^2 \rightarrow y_{ij}^2) = 0$

$$0 \leq RAC(y_{ij}^2 \rightarrow y_{ij}^3) + RAC(y_{ij}^3 \rightarrow y_{ij}^2) + RC(y_{ij}^3 \rightarrow y_{ij}^2)$$

Es relevante notar que

$$(1) RAC(y_{ij}^2 \rightarrow y_{ij}^3) \geq 0$$

$$(2) \text{ Por construcción: } RAC(y_{ij}^3 \rightarrow y_{ij}^2) + RC(y_{ij}^3 \rightarrow y_{ij}^2) \geq 0$$

Satisfaciendo la desigualdad.

Dado que la desigualdad se cumple para cada $ij \in A_f$, se cumple también en general. \square

Teorema 3.3 (Validez de la cota QT). *Sea y_1^0 una solución de primera etapa con valor de segunda etapa $Q(y_1^0)$ desconocido. Sea $y_2^0 \in \mathbb{Y}^0$ cualquiera de las soluciones previamente visitadas, con valor de segunda etapa $Q(y_2^0)$ previamente calculado. Se cumple que:*

$$Q(y_1^0) \leq \min_{y_2^0 \in \mathbb{Y}^0} \{T(y_2^0, y_1^0) + Q(y_2^0)\}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea ϕ_1^{s*} la planificación óptima final de $Q(y_1^0, s)$. Para el problema $Q(y_2^0)$, aplicando Sub-optimalidad (Propiedad 3.3) con el itinerario factible y_1^{s*} se tiene:

$$Q(y_2^0) \geq SSP(\phi_1^{s*}) - RAC(z_+^{s*} : y_2^0 \rightarrow y_1^{s*}) - RC(r^{s*} : y_2^0 \rightarrow y_1^{s*}) \quad \forall y_2^0 \in \mathbb{Y}^0 \quad (3.2)$$

Aplicando el Costo por transformación intermedia (Teorema 3.2) con y_1^0 como itinerario intermedio, los dos términos de la derecha de 3.2 cumplen:

$$-RAC(z_+^{s*} : y_2^0 \rightarrow y_1^{s*}) - RC(r^{s*} : y_2^0 \rightarrow y_1^{s*}) \geq \\ -RAC(z_+^{s*} : y_2^0 \rightarrow y_1^0) - RAC(z_+^{s*} : y_1^0 \rightarrow y_1^{s*}) - RC(r^{s*} : y_1^0 \rightarrow y_1^{s*})$$

Aplicándolo a (3.2):

$$Q(y_2^0) \geq SSP(\phi_1^{s*}) - RAC(z_+^{s*} : y_2^0 \rightarrow y_1^0) - \\ RAC(z_+^{s*} : y_1^0 \rightarrow y_1^{s*}) - RC(r^{s*} : y_1^0 \rightarrow y_1^{s*}) \quad \forall y_2^0 \in \mathbb{Y}^0$$

Reordenando los términos:

$$Q(y_2^0) + RAC(z_+^{s*} : y_2^0 \rightarrow y_1^0) \geq \\ SSP(\phi_1^{s*}) - RAC(z_+^{s*} : y_1^0 \rightarrow y_1^{s*}) - RC(r^{s*} : y_1^0 \rightarrow y_1^{s*}) \quad \forall y_2^0 \in \mathbb{Y}^0$$

Por definición los términos del lado derecho son el valor óptimo de $Q(y_1^0)$:

$$Q(y_2^0) + RAC(z_+^{s*} : y_2^0 \rightarrow y_1^0) \geq Q(y_1^0) \quad \forall y_2^0 \in \mathbb{Y}^0$$

Por lo tanto se satisface

$$Q(y_1^0) \leq \min_{y_2^0 \in \mathbb{Y}^0} \{T(y_2^0, y_1^0) + Q(y_2^0)\}$$

□

3.7.3. Cortes QT proactivos 1-fv

Los cortes QT son reactivos ya que requieren haber encontrado una solución de primera etapa y antes de acotar su valor de segunda etapa. Usando la idea de vecindad, se pueden aplicar cortes proactivamente para cada solución heurística y' en la vecindad 1-fv de y , sin requerir ser visitadas en una iteración del problema de primera etapa. Sea \hat{y} una solución de primera etapa con $Q(\hat{y})$ conocido. Para cada vuelo \bar{ij} operado por un avión tipo \bar{k} es posible crear heurísticamente las soluciones de su vecindad de un vuelo 1-fv y acotar su valor de segunda etapa proactivamente mediante cortes QT.

Para cada solución heurística y' generada en la vecindad 1-fv de \hat{y} , una cota QT válida es:

$$Q(y') \leq T(\hat{y}, y') + Q(\hat{y})$$

En este caso particular el costo de transformación consiste en el costo de agregar un vuelo \hat{ij} similar a \bar{ij} con poca anticipación. Dado que el costo de un vuelo depende únicamente del tipo de avión, origen y destino, el costo de agregar cualquier $\hat{ij} \in S(\bar{ij})$ es exactamente el costo de agregar el vuelo \bar{ij} , ya que al ser similares tienen el mismo origen y destino:

$$T(\hat{y}, y') = \sum_{s \in S} p^s s c_{\bar{ij}}^{\bar{k}, s}$$

Se define la cota QT para este caso como:

$$QTb(y') = T(\hat{y}, y') + Q(\hat{y})$$

Este es el caso particular del corte QT en que $\mathbb{Y}^0 = \{\hat{y}\}$, haciéndolo más directo que un corte QT básico al no tener que revisar todas las soluciones previamente visitadas. Con ello, para cada solución heurística generada y' se puede aplicar el siguiente corte de Laporte y Louveaux:

$$\theta \leq (U - QTb(y')) \left(\sum_{h \in Sr(y')} (1 - y_h) + \sum_{h \notin Sr(y')} y_h \right) + QTb(y')$$

con $Sr(y') := \{(ij, k) : ij \in A_f, k \in K, \hat{y}_{ij}^{k,0} = 1\}$ el soporte del vector y' .

3.7.4. Cortes QT globales 1-fv

Similar a los cortes proactivos, los cortes globales buscan acotar todas las soluciones en la vecindad 1-fv de alguna solución de referencia agregando restricciones que modelan la vecindad en vez de crear las soluciones. En el Anexo A.4 se plantean las restricciones y variables adicionales para modelar los cortes propuestos.

3.7.5. Cortes QT globales n -fv

La idea anterior de cortes para una vecindad 1-fv se puede expandir para considerar n -fv, es decir, considerar n vecindades simultáneamente. En el Anexo A.5 se plantean las restricciones y variables adicionales para modelar los cortes propuestos.

3.8. Algoritmos de resolución

A continuación se presentan los algoritmos de resolución implementados, con la forma clásica de descomposición y con los distintos cortes QT propuestos.

3.8.1. Descomposición básica

La fórmula básica del algoritmo es análoga a la propuesta originalmente por Laporte y Louveaux mencionada en la Sección 2.4.

- (1) Sea $(\hat{y}, \hat{\theta})$ la solución incumbente obtenida de resolver el problema de primera etapa.
- (2) SI $Q(\hat{y})$ ya ha sido calculado, FIN.
En caso contrario seguir a (3).
- (3) Resolver $Q(\hat{y})$ y almacenarlo.
- (4) SI $\hat{\theta} > Q(\hat{y})$ aplicar el corte de optimalidad de Laporte y Louveaux con $Q(\hat{y})$ e ir a (1).
En caso contrario, FIN.

3.8.2. Descomposición con cortes QT

Al algoritmo anterior se le agregan los cortes QT en dos oportunidades por iteración, antes y después de computar el valor de segunda etapa. En el primer caso, se calcula un corte QT reactivo con el fin de evitar calcular $Q(\hat{y})$. En el segundo caso, después de calcular el valor de segunda etapa si éste no se puede acotar mediante el corte reactivo, se aplican cortes proactivos o globales con el fin de acotar soluciones similares a la visitada. Se presentan a continuación los algoritmos con:

- Cortes reactivos
- Cortes reactivos y cortes proactivos 1-fv
- Cortes reactivos y cortes globales 1-fv
- Cortes reactivos y cortes globales n -fv

Dado que los algoritmos comparten una estructura principal similar y sólo difieren en cuales cortes adicionales agregar, se presentan todos juntos en un único algoritmo cuyo paso (6) varía según el algoritmo empleado.

- (1) Sea $(\hat{y}, \hat{\theta})$ la solución incumbente obtenida de resolver el problema de primera etapa.
- (2) SI $Q(\hat{y})$ ya ha sido calculado, FIN.
En caso contrario seguir a (3).
- (3) Calcular el corte reactivo $QTb(\hat{y})$.
- (4) SI $QTb(\hat{y})$ es menor a un valor previo o no existen valores previos, almacenar $QTb(\hat{y})$.
- (5) SI $\hat{\theta} > QTb(\hat{y})$ aplicar el corte de optimalidad de Laporte y Louveaux con $QTb(\hat{y})$ e ir a (1).
En caso contrario seguir a (6).
- (6) Ya que $QTb(\hat{y})$ no corta la solución actual, resolver $Q(\hat{y})$ y almacenarlo.
- (7) Realizar uno de los siguientes según el método elegido:
 - No hacer nada si se desea utilizar sólo los cortes reactivos.

- Aplicar cortes proactivos globales 1-fv respecto a \hat{y} y $Q(\hat{y})$.
 - Aplicar cortes proactivos globales n -fv respecto a \hat{y} y $Q(\hat{y})$.
 - Generar los vuelos y' en la vecindad 1-fv de \hat{y} y para cada uno de ellos aplicar cortes proactivos con $Q(\hat{y})$.
- (8) SI $\hat{\theta} > Q(\hat{y})$ aplicar el corte de optimalidad de Laporte y Louveaux con $Q(\hat{y})$ e ir a (1).
- En caso contrario, FIN.

CAPÍTULO 4. EXPERIMENTOS Y RESULTADOS

En este capítulo se detallan los experimentos computacionales generados y los resultados de su resolución. En la sección 4.1 se presentan al lector los valores de los parámetros utilizados y las formas en que se obtuvieron. En la sección 4.2 se detalla la forma en que se generaron las instancias que fueron resueltas. En 4.3 se presentan y comentan los resultados de las pruebas realizadas.

4.1. Parámetros Utilizados

Para generar instancias realistas se generaron parámetros basados en datos reales. En particular, se utilizaron datos de LATAM Cargo como referencia para simular condiciones de operación similares.

4.1.1. Flota

Los tipos de aviones considerados en las instancias corresponden al modelo Boeing 767-300F, popular en aerolíneas como LATAM Cargo (LATAM, 2019). Este tipo de avión tiene una capacidad máxima de 52700 kgs de peso y 438 m³ de volumen, y una velocidad de crucero correspondiente a 851 km/h según reporta el fabricante (Boeing Commercial Airplanes, 2014).

4.1.2. Aeropuertos

La Tabla 4.1 indica los posibles aeropuertos considerados en las instancias junto a su código IATA, ciudad y país de ubicación:

Tabla 4.1. Aeropuertos considerados.

Código IATA	Nombre Aeropuerto	Ciudad	País
SCL	Aeropuerto Internacional Arturo Merino Benítez	Santiago	Chile
VCP	Aeropuerto Internacional de Viracopos	São Paulo	Brasil
MIA	Aeropuerto Internacional Miami	Miami	EEUU
UIO	Aeropuerto Internacional Mariscal Sucre	Quito	Ecuador

El tiempo de viaje entre los aeropuertos se definió como la distancia euclidiana bi-dimensional dividida por la velocidad crucero de la flota considerada, más un tiempo de manejo de carga y *turn-around* constante.

4.1.3. Costos operacionales

La Tabla 4.2 indica los costos operacionales por hora para cada tipo de avión, según la información disponible en el Form 41 del Informe financieros de compañías aéreas (US Bureau Of Transportation Statistics, 2020). Notamos que al considerar múltiples aeropuertos, los tiempos de vuelo dependen del par origen-destino, por ello los costos están normalizados por hora y luego se calculan para cada vuelo. cf/h corresponde al costo fijo por hora de vuelo, cv/h es el costo variable por hora por unidad de peso de carga, lc/h es el costo por hora de tripulación cuando se asignan con alta anticipación (es decir en la primera etapa) y finalmente sc/h el costo por hora de tripulación cuando se asignan con poca anticipación (en la segunda etapa). Para las instancias generadas se considera que los costos de almacenamiento no son relevantes para el ruteo de carga ($ch = 0$), aunque la formulación del problema permite modificar el parámetro en caso de que sea necesario.

Tabla 4.2. Costos operacionales.

cf/h [USD/h]	cv/h [USD/(h*kg)]	lc/h [USD/h]	sc/h [USD/h]
5720	0.08	2179	4358

4.1.4. Tipo de carga

La Tabla 4.3 indica los tipos de cargas considerados junto a los parámetros para la distribución de sus dimensiones según (Boonekamp, 2013). Se consideran dos tipos de ítems de carga para incorporar la asimetría entre los tipos de exportaciones por país: la carga Tipo 1 corresponde a elementos agrícolas como flores y semillas, y la carga Tipo 2 que representa elementos tecnológicos de menor peso y tamaño pero transportados a tarifas más altas que los de Tipo 1. Se reportan las medias y desviaciones estándar para los pesos y la proporción entre volumen/peso, esto último se suele hacer para manejar la dependencia que existe entre las variables aleatorias de peso y volumen. Tal como plantea Boonekamp (2013), se utiliza una distribución Log-Normal para generar el peso y volumen/peso de cada elemento de carga generado.

Tabla 4.3. Parámetros de la carga generada.

Tipo	Peso μ [kg]	Peso σ [kg]	Vol/Peso μ [m ³ /kg]	Vol/Peso σ [m ³ /kg]	Descripción
1	1500	1000	0.006	0.00338	Agricultural
2	1000	800	0.006	0.00338	Tecnología

4.1.5. Ingresos por carga

Se utilizan los valores reportados por LATAM Chile (2019) para calcular los ingresos para cada ítem de carga. Tal como establece el tarifario, el valor asociado a cada elemento a transportar se calcula basándose en el tipo de carga al que corresponde, el peso que tiene y la distancia entre el aeropuerto de origen y el de destino. Tal como se calculan las tarifas en la realidad, se utiliza un costo por unidad de peso y distancia, que está determinado por el peso del elemento a enviar: menor a 45 kg, entre 45 kg y 100 kg, entre 100 kg y 300 kg, y finalmente mayores a 300 kg. La Tabla 4.4 muestra los valores usados para calcular los ingresos asociados a las cargas:

Tabla 4.4. Ingreso por unidad de peso y distancia.

Tipo	Ingreso [USD/(km · kg)]			
	≤ 45kg	≤ 100kg	≤ 300kg	> 300kg
1	0.0010	0.0008	0.0006	0.0005
2	0.0014	0.0012	0.0009	0.0008

De las Tablas 4.3 y 4.4 se observa que la carga de tipo agrícola suele ser de mayor tamaño pero tiene menores ingresos asociados.

4.2. Generación de Instancias

Se definen las instancias a resolver como la configuración de aeropuertos, flota y carga utilizada, junto al horizonte de planificación y la cantidad de escenarios considerados.

Se utiliza la siguiente nomenclatura: La cantidad de aeropuertos definidos (denotado por A) determina el tamaño de la red. La flota depende de los tipos de aviones (indicado por K) y la cantidad de aviones existentes (señalado por F). Finalmente, la cantidad de ítems de carga que se generarán por cada día de planificación (denotado C) representa la demanda a la que se enfrenta el sistema. De esta forma, una configuración A4K1F2C30 indica la existencia de 4 aeropuertos, 1 tipo de avión, 2 aviones en la flota y que se generan 30 ítems por día de planificación. Para dicha configuración, especificar d2s30 indica una instancia con horizonte de planificación de 2 días y 30 escenarios generados. Notamos que al considerar 2 días y C30, la planificación completa considera $2 \times 30 = 60$ elementos de carga repartidos a lo largo de todo el horizonte, no que se generen exactamente 30 cada día.

Es relevante notar la diferencia en el tamaño del problema al modificar la configuración versus modificar la instancia: variar la cantidad de días tiene un efecto lineal en el tamaño

de la red al extenderla, mientras que aumentar la cantidad de aeropuertos aumenta de forma multiplicativa la cantidad de arcos de la red.

4.3. Resultados

En esta sección se presentan los resultados obtenidos al utilizar los modelos previamente propuestos distintas instancias. El código fue implementado en Python 3.7 y los MIPs fueron resueltos con Gurobi 8.1.1 con un tiempo límite de 3 horas por instancia. Todos los resultados reportados corresponden a instancias con base en una configuración A4K1F2C30.

4.3.1. Modelos Utilizados

Para simplificar la notación, los modelos reportados en esta sección son los siguientes:

- Naive: corresponde un modelo determinístico que busca representar los métodos tradicionales de creación de itinerarios para aviones de carga mediante la resolución del caso promedio. Es decir, resolver el modelo Naive para una instancia con múltiples escenarios es equivalente a considerar el valor esperado de los parámetros y resolverlo, obteniendo una planificación única que no considera acciones de recuperación.
- DEF: formulación determinística equivalente del R-ACS, tal como se plantea en la Sección 3.4.2.3.
- L-shaped: descomposición básica del R-ACS basada en el *integer L-shaped method*, tal como se presenta en la Sección 3.4.3. Recordamos que esta descomposición sólo aplica los cortes clásicos de optimalidad.
- L-shaped.sb: descomposición del R-ACS con el *sizebounding* propuesto en la Sección 3.5.
- QTb_p: descomposición del R-ACS con *sizebounding* y los cortes QT propuestos en la Sección 3.7. Se implementan tanto los cortes reactivos como proactivos.

4.3.2. Medidas de Desempeño

Para comparar las soluciones obtenidas, se testea el desempeño del itinerario de primera etapa generado en otros 50 escenarios i.i.d. distintos a la muestra usada en el modelo (llamados escenarios *outsample* e *insample* respectivamente): sea y^0 el itinerario, se define $Q_{\text{OUT}}(y^0)$ como el valor esperado de la solución en los 50 escenarios *outsample*. Se define el valor real de la solución como su desempeño de segunda etapa *outsample* menos su costo de primera etapa:

$$\text{Overall}(y^0) := -FSC(y^0) + Q_{\text{OUT}}(y^0)$$

4.3.3. Desempeño Naive vs DEF

Se define la Mejora por Acciones de Recuperación (MAR) como la diferencia porcentual entre los valores reales de las soluciones que no consideran acciones de recuperaciones (Naive) y las que sí lo hacen (DEF):

$$\text{MAR} := \left(\frac{\text{Overall}_{\text{DEF}}}{\text{Overall}_{\text{Naive}}} - 1 \right) * 100$$

Tabla 4.5. Comparación Naive vs DEF instancia para 2 días.

S	Naive					DEF					MAR
	Gap	FSC	θ	Q_{OUT}	Overall	Gap	FSC	θ	Q_{OUT}	Overall	
s10	0.84%	126,382	707,905	729,635	603,254	0.92%	111,129	678,786	714,416	603,287	0.01%
s20	0.44%	119,845	769,466	709,750	589,905	1.38%	111,129	747,022	714,532	603,404	2.29%
s30	0.97%	119,845	754,320	709,581	589,736	2.20%	126,382	744,557	730,408	604,026	2.42%

Cabe destacar que dos soluciones con el mismo costo de primera etapa no corresponden necesariamente a soluciones idénticas. Por ejemplo, dos itinerarios que consideran un único vuelo para el mismo par OD tiene siempre el mismo costo, independiente de la hora o día de salida de este, y por ello con distinto valor de segunda etapa.

De la Tabla 4.5 se observa que para 10 escenarios ambos métodos son inexactos al momento de estimar el valor de segunda (θ) etapa respecto al valor real (Q_{OUT}), y tienen un desempeño real similar. Sin embargo, al aumentar a 20 o 30 escenarios utilizados, el modelo DEF mejora su estimación del valor de segunda etapa, lo que no ocurre en el Naive, y consecuentemente crea itinerarios con mejor desempeño, con itinerarios cuyo valor real es 2% mejor al Naive que se traducen en aproximadamente USD\$13500 de ganancia. Este comportamiento es el esperado, ya que al aumentar la información usada el modelo DEF crea itinerarios de primera etapa preparados para adaptarse a las posibles realizaciones de la demanda, mientras que el modelo Naive sigue creando su itinerario basándose en un único caso promedio. Esta instancia muestra que efectivamente existen casos en que resulta beneficioso utilizar una formulación que considera acciones recuperativas. Finalmente, notamos que el modelo Naive resuelve con un gap de optimalidad menor a 1% mientras que el DEF alcanza hasta un 2.2% de gap, lo que se explica porque el primero siempre resuelve un único escenario promedio, mientras que el otro resuelve 10, 20 y 30 escenarios, con su correspondiente aumento de tamaño del modelo y dificultad.

4.3.4. Comparación entre itinerarios generados instancia d2s20

En esta sección se analizan los itinerarios creados tanto por el modelo Naive y DEF, y las modificaciones que se le aplican a este último, con el fin de explicar la diferencia de desempeño entre la formulación que resuelve el caso promedio y la que incorpora la incertidumbre.

4.3.4.1. Comparación itinerario original

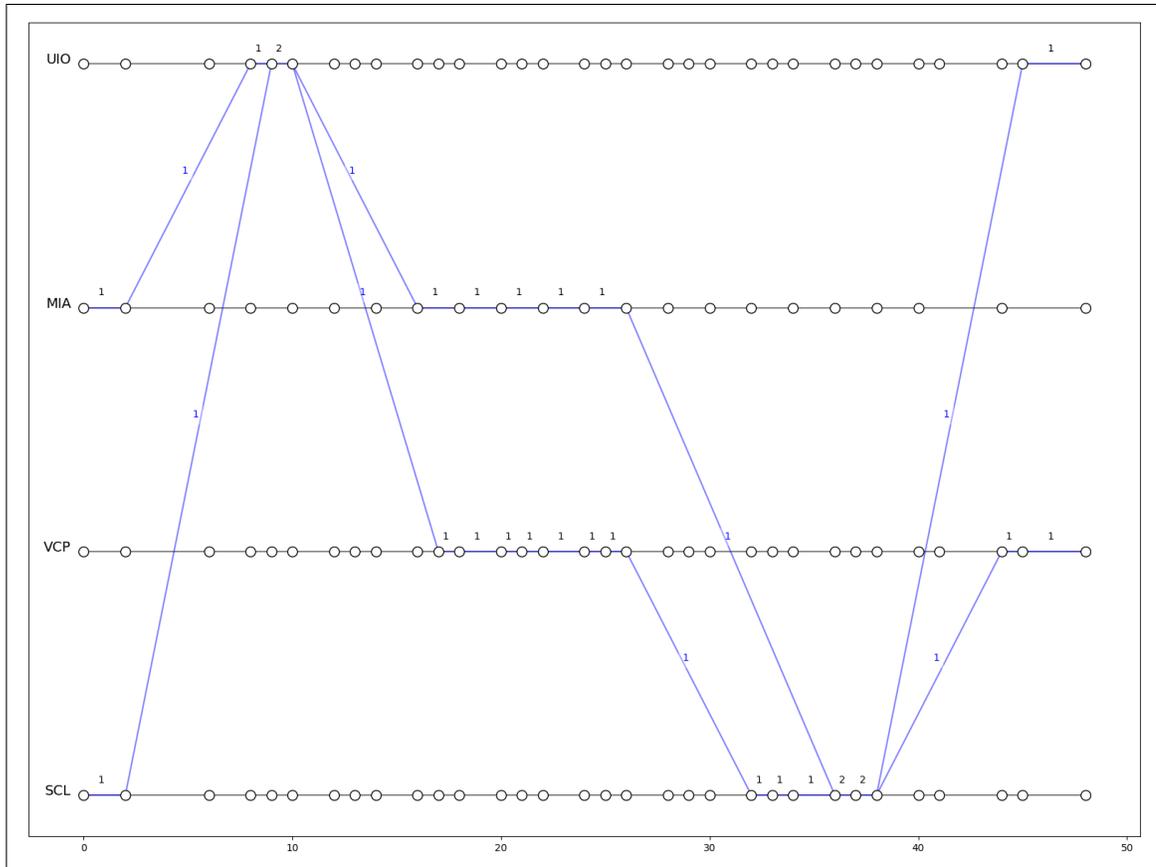


Figura 4.1. Itinerario Naive d2s20. El eje vertical indica el código IATA de cada aeropuerto, y el eje horizontal señala las horas.

Las Figuras 4.1 y 4.2 muestran los itinerarios generados por el modelo Naive y DEF respectivamente. Al compararlas notamos que la planificación obtenida por el modelo Naive y el modelo DEF son iguales excepto por dos vuelos durante el segundo día: el modelo Naive planifica los vuelos MIA28→SCL36 y SCL38→UIO44, mientras que el modelo DEF planifica MIA30→UIO36 y UIO38→VCP44.

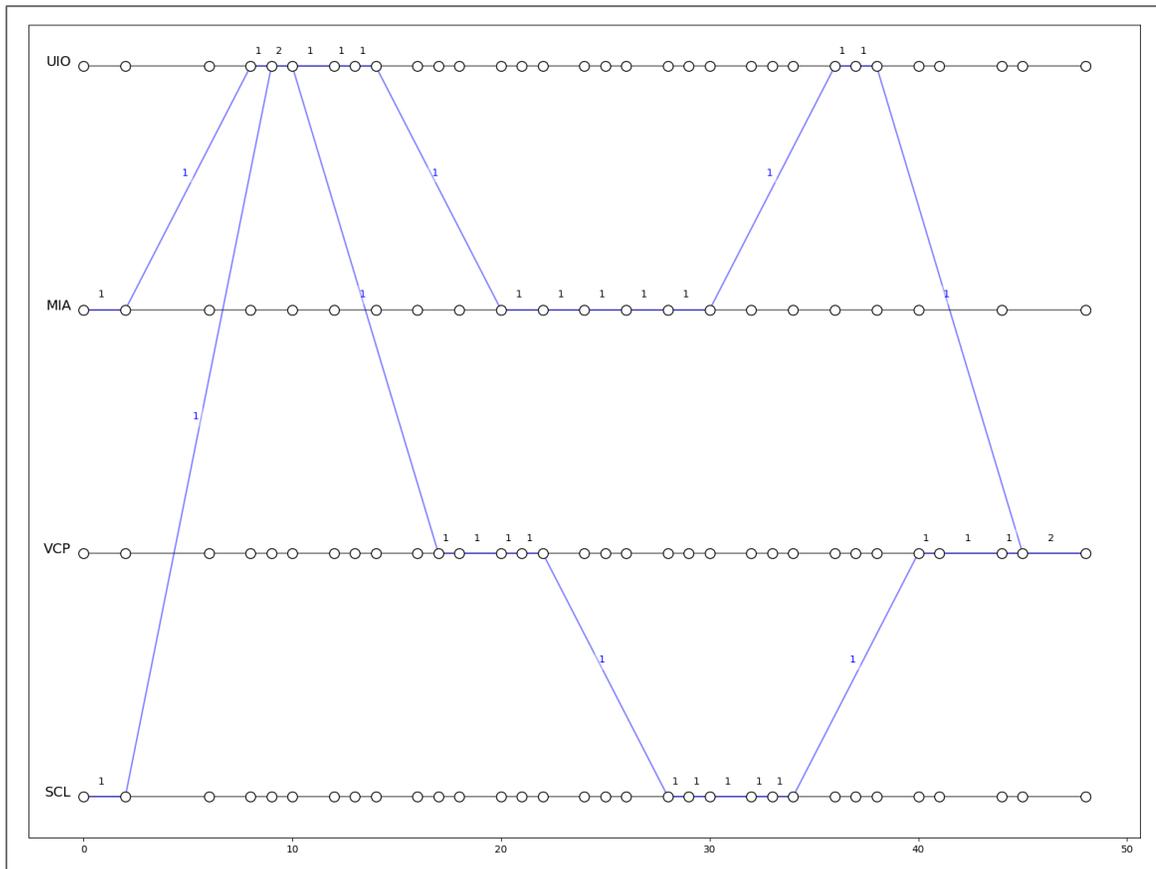


Figura 4.2. Itinerario DEF d2s20

4.3.4.2. Comparación dispersión itinerarios *outsample*

En esta sección, se crea un gráfico de dispersión para los itinerarios sobre todos los escenarios *outsample*. Es decir, se representan con líneas verdes los itinerarios superpuestos finales obtenidos para cada uno de los 50 escenarios *outsample* para calcular Q_{OUT} . El grosor de un arco es proporcional a la cantidad de escenarios en que se realiza dicho vuelo.

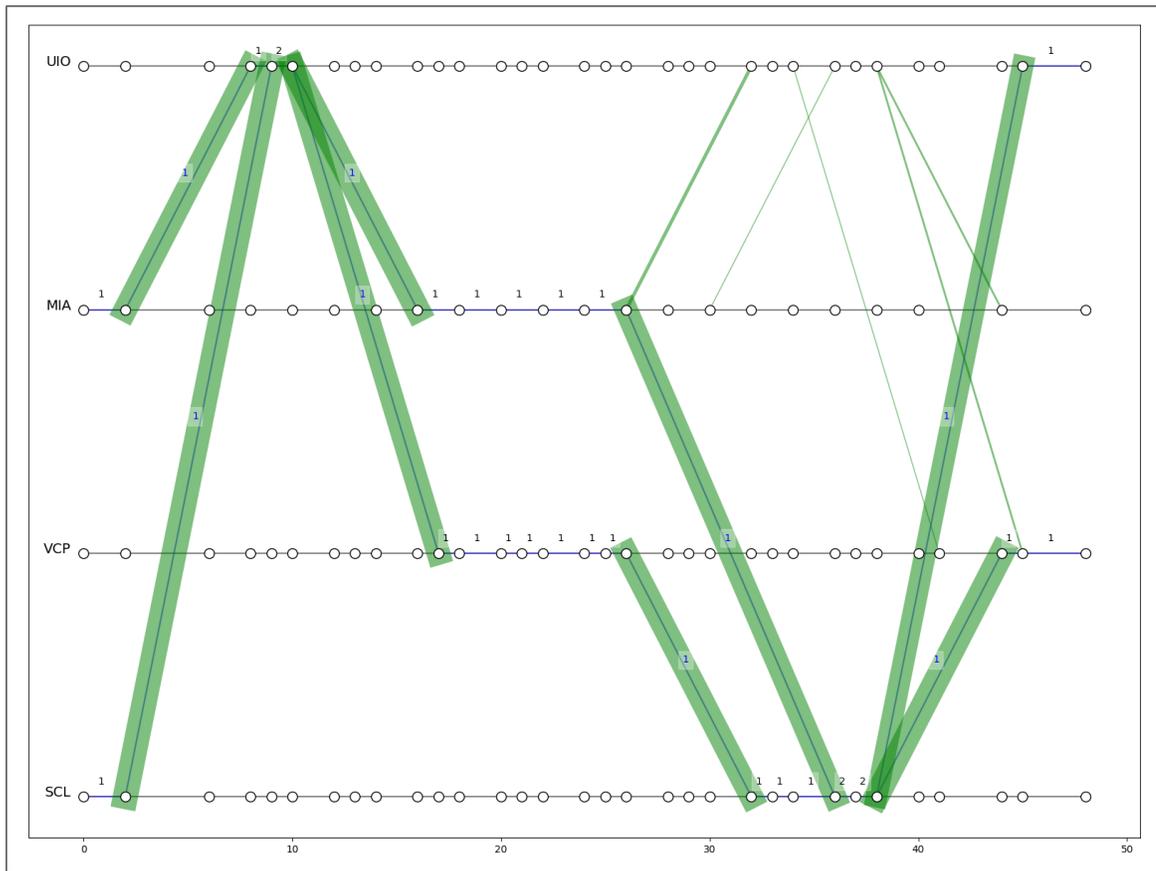


Figura 4.3. Itinerarios *outsample* Naive d2s20

En la Figura 4.3 se ve que no hay mucha dispersión, es decir aparecen pocas líneas nuevas que representan nuevos vuelos respecto a la planificación original. Esto indica que dado el itinerario original generado por el modelo Naive, no es conveniente realizar muchos cambios para adaptarse a la demanda. El caso contrario se da para el modelo DEF, como se observa en la Figura 4.4: el mayor nivel de dispersión indica que el itinerario creado fue modificado en más escenarios para adaptarse a las variaciones de demandas. Esto significa que el modelo se comporta de la forma esperada y crea itinerarios que facilitan la toma de acciones de recuperación, y dicha flexibilidad permite obtener un mejor desempeño *overall*. La estabilidad de los itinerarios del modelo Naive no indican que sean

buenas soluciones, al contrario, la baja dispersión indica una incapacidad para beneficiarse de los posibles cambios en la demanda, ya que modificar el itinerario resultaría más costoso que las potenciales ganancias.

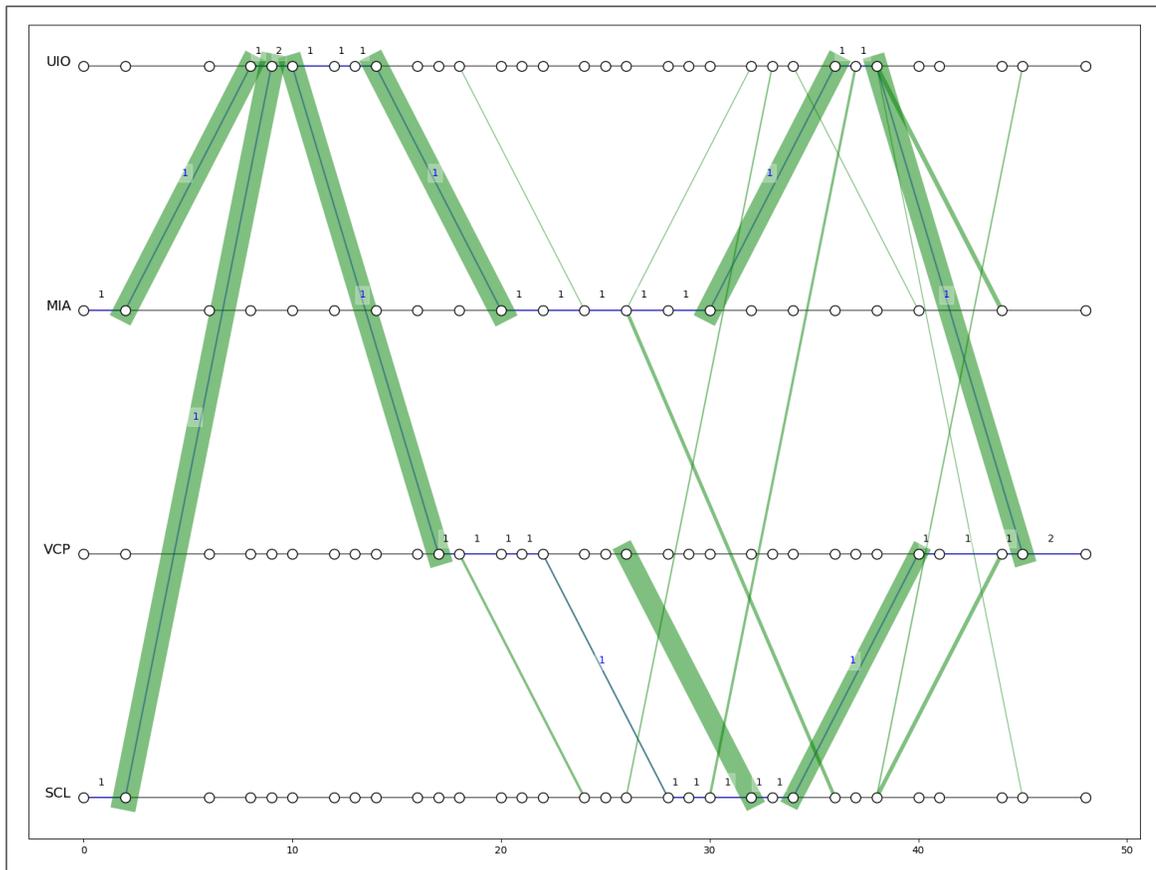


Figura 4.4. Itinerarios *outsample* DEF d2s20

4.3.5. Rendimiento del modelo DEF ante el aumento de horizonte de planificación

Habiendo comprobado que la formulación DEF es ventajosa respecto a resolver el caso promedio, la Tabla 4.6 muestra los resultados del modelo DEF al aumentar el horizonte de planificación.

Tabla 4.6. Alcance DEF con 3 horas.

Instancia	Incumbente	Cota	Gap
s10	1.5004e+05	1.5105e+05	0.67%
d1 s20	1.4125e+05	1.4258e+05	0.94%
s30	1.4682e+05	1.4814e+05	0.89%
s10	5.6765e+05	5.7287e+05	0.91%
d2 s20	6.3589e+05	6.4468e+05	1.38%
s30	6.1817e+05	6.3174e+05	2.19%
s10	1.3052e+06	1.3176e+06	0.94%
d3 s20	1.3346e+06	1.3476e+06	0.97%
s30	-	1.3993e+07	-%
s10	8.7585e+05	9.0865e+05	3.74%
d4 s20	-	1.8554e+07	-%
s30	-	1.8610e+07	-%
s10	-	1.2827e+06	-%
d5 s20	-	2.5190e+07	-%
s30	-	2.5167e+07	-%

De la Tabla 4.6 se puede observar que al aumentar el horizonte de planificación, con 3 o 4 días el modelo sólo alcanza a resolver considerando 20 y 10 escenarios respectivamente. Más aún, para 5 o más días la formulación es incapaz de encontrar soluciones independientemente de la cantidad de escenarios considerados. Esto es de esperar, debido al aumento multiplicativo del tamaño de la red respecto a la cantidad de días, lo que junto al aumento de restricciones y variables de segunda etapa de forma proporcional a la cantidad de escenarios considerados resulta en un modelo que no se puede resolver de forma tradicional.

4.3.6. Desempeño descomposición L-shaped

Como el modelo DEF no puede ser resuelto dentro del límite de tiempo de 3 horas para horizontes de planificación mayores a 3 días con 20 escenarios, se hace necesario recurrir a esquemas de descomposición para resolver el problema. La Tabla 4.7 muestra los detalles de resolución de la descomposición básica L-shaped: se reporta el valor del incumbente alcanzado, cota superior y gap de optimalidad. La columna Cortes indica la cantidad de cortes de optimalidad de Laporte y Louveaux aplicados, y se señala entre paréntesis el tiempo promedio utilizado en calcular cada corte.

Tabla 4.7. Detalles L-shaped.

Instancia	Incumbente	Cota	Gap	Cortes (Tiempo promedio)	
s10	1.5004e+05	1.5004e+05	0.00%	625 (0.41s)	
d1	s20	1.4146e+05	1.4146e+05	0.00%	625 (0.81s)
	s30	1.4687e+05	1.4687e+05	0.00%	625 (1.30s)
s10	5.4940e+05	1.6074e+06	192.58%	1904 (5.66s)	
d2	s20	5.9225e+05	2.2166e+06	274.28%	937 (11.53s)
	s30	5.7029e+05	2.2166e+06	288.69%	619 (17.45s)
s10	1.2147e+06	2.8243e+06	132.49%	422 (25.62s)	
d3	s20	1.2299e+06	2.8449e+06	131.30%	227 (47.72s)
	s30	1.1997e+06	2.8449e+06	137.13%	155 (69.68s)
s10	7.4520e+05	2.7813e+06	273.23%	67 (162.01s)	
d4	s20	7.6272e+05	2.7813e+06	264.66%	13 (876.96s)
	s30	7.8726e+05	2.8148e+06	257.55%	11 (1315.28s)
s10	1.0781e+06	3.5813e+06	232.17%	57 (190.76s)	
d5	s20	1.0832e+06	3.5813e+06	230.63%	14 (891.32s)
	s30	1.0905e+06	3.5813e+06	228.41%	10 (1522.66s)

Se observa que para todas las instancias la descomposición es capaz de encontrar soluciones factibles. Sin embargo, a menos de que la cantidad de días y escenarios sean lo

suficientemente pequeñas para poder resolver a optimalidad, la descomposición reporta gaps de optimalidad altos. Esto se puede explicar por la localidad de los cortes aplicados, ya que para toda posible solución de primera etapa y^0 , a menos de que se haya calculado su valor de etapa $Q(y^0)$, su estimador (θ) está acotado por la cota U calculada al comienzo, lo que claramente no es suficiente.

Se observa también que el gap no se explica únicamente por la cota superior sobreestimada, sino que el valor de las soluciones alcanzadas también es subóptimo: esto se puede comprobar al comparar los incumbentes obtenidos por L-shaped y por DEF de la Tabla 4.6 para instancias con 2 días, que el DEF alcanza a resolver a optimalidad.

Es relevante destacar el costo computacional que requiere calcular cada corte entero: al aumentar la cantidad de escenarios el tiempo que requiere resolver el MIP de cada satélite de segunda etapa aumenta de forma proporcional, pero al considerar un horizonte con más días crece de forma considerable al agrandarse el tamaño del problema: número de nodos y arcos en la red, cantidad de carga a transportar, etc.

Tras comprobar este comportamiento, resulta evidente la necesidad de aplicar técnicas más sofisticadas para abordar el problema.

4.3.7. Efecto del sizebounding

A continuación se presenta el efecto de agregar *sizebounding* a la descomposición básica, comparando tanto el gap reportado como el desempeño real de la solución considerando 2 y 5 días en el horizonte de planificación:

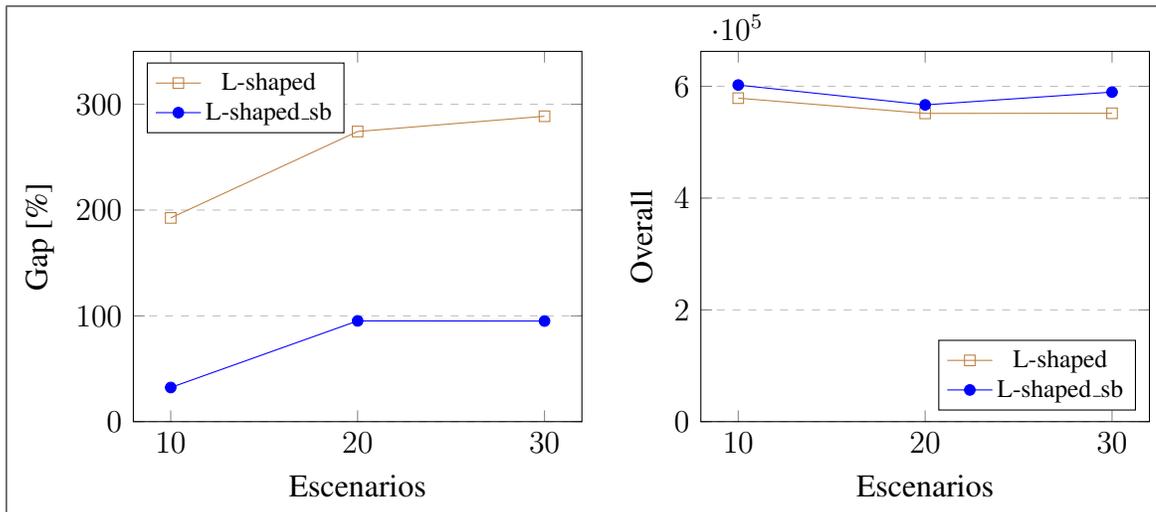


Figura 4.5. Efectos del *sizebounding* en gap y valor Overall de la solución con d2.

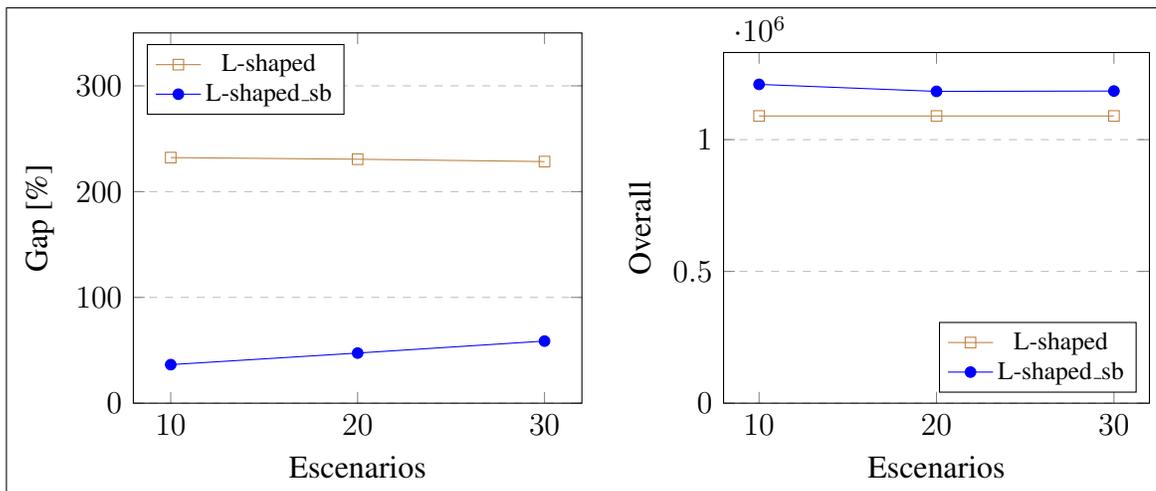


Figura 4.6. Efectos del *sizebounding* en gap y valor Overall de la solución con d5.

A partir de las Figuras 4.5 y 4.6 se observa que para instancias con horizontes cortos o largos de planificación, la descomposición con *sizebounding* es superior a la básica. Esto se explica por dos motivos:

- (1) Acotar el valor de θ , al probar en la primera etapa el desempeño del itinerario usando un escenario optimista, disminuye significativamente el gap reportado sin la necesidad de agregar todos los posibles cortes enteros.
- (2) La dependencia entre θ y el itinerario creado hace que al momento de resolver se busquen planificaciones con un buen desempeño para transportar la carga, a diferencia de la descomposición básica que al tener θ independiente, priorizaba crear itinerarios de bajo costo para disminuir el costo de la función objetivo.

4.3.8. Desempeño descomposición con cortes QT

Para estudiar el efecto *insample*, vale decir la creación del itinerario considerando los escenarios especificados para la instancia y sin considerar su valor *outsample*, de los distintos métodos de descomposición utilizados, se presenta a continuación el detalle de las soluciones obtenidas. Las Tablas 4.8 y 4.9 presentan los resultados para instancias con 3 y 4 días de planificación respectivamente. Se reporta el valor del incumbente alcanzado, cota superior, gap de optimalidad. La columna Cortes indica la cantidad de cortes de optimalidad de Laporte y Louveaux aplicados, mientras que las columnas QTbr y QTbp señalan la cantidad de cortes QT reactivos y proactivos aplicados respectivamente. Adicionalmente, se indica entre paréntesis el tiempo utilizado en calcular los cortes de cada tipo.

Tabla 4.8. Detalles L-shaped vs L-shaped_sb vs QTb_p d3s30.

Método	Incumbente (e+06)	Cota (e+06)	Gap	Cortes (t)	QTbr (t)	QTbp (t)
L-shaped	1.1997	2.8449	137.13%	155 (10800s)		
L-shaped_sb	1.3168	1.7480	32.74%	94 (2782s)		
QTb_p	1.3168	1.6560	25.76%	317 (9432s)	1975 (49.80s)	1619 (0.01s)

En la Tabla 4.8 se observa que el agregar cortes QT mejora el gap de optimalidad reportado, ya que disminuye el valor de la cota sin afectar el valor del incumbente.

Tabla 4.9. Detalles L-shaped vs L-shaped_sb vs QTb_p d4s30.

Método	Incumbente (e+05)	Cota (e+06)	Gap	Cortes (t)	QTbr (t)	QTbp (t)
L-shaped	7.8726	2.8148	257.55%	11 (10800s)		
L-shaped_sb	8.6409	1.4520	68.05%	79 (7735s)		
QTb_p	9.1978	1.4339	55.90%	67 (9220s)	414 (5.73s)	712 (0.03s)

En la Tabla 4.9, con un horizonte de planificación mayor a la anterior, se observa que incorporar los cortes QT no sólo disminuyen el valor de la cota superior, sino que mejoran el valor del incumbente alcanzado. Este comportamiento se puede explicar porque el acotar prontamente el valor de segunda etapa de una solución puede afectar la forma en que se exploran las soluciones, y con ello obtener mejores resultados dentro de un tiempo de resolución límite.

Adicionalmente, se observa que para ambos horizontes de planificación los cortes enteros requieren un tiempo de cálculo que es órdenes de magnitud mayor que el utilizado por los cortes QT. La instancia con más días es más difícil de resolver tanto en su primera etapa como en su segunda, lo que se traduce en iteraciones más largas y por ende en menos cortes aplicados, con un efecto directo en la cota superior calculada y el gap de optimalidad reportado.

Finalmente, es de notar que independiente del horizonte de planificación utilizado, las diferentes forma en cada método de descomposición utiliza el tiempo disponible de resolución, que corresponde a 3 horas o 10800 segundos. La descomposición básica tiene un problema de primera etapa sencillo, ya que sólo consiste en restricciones de flujo, mientras que el resolver el problema de segunda etapa para toda solución visitada es complejo: se observa que se utiliza todo el tiempo disponible en resolver los MIPs de segunda etapa. Para la descomposición con *sizebounding*, el calcular un escenario optimista para acotar θ y guiar la creación del itinerario aumenta la dificultad del problema de primera etapa: cada iteración del primer problema se hace más difícil de calcular, lo que reduce el tiempo

dedicado a calcular los cortes enteros. Para la descomposición con cortes QT, acotar reactivamente los valores de segunda etapa evita desperdiciar tiempo en itinerarios con mal desempeño mientras que acotar reactivamente en el problema de primera etapa cambia la forma en que se buscan itinerarios, permitiendo más tiempo para calcular el valor de segunda etapa de las que tienen un mejor desempeño.

4.3.9. Reducción del gap de optimalidad

Una de las principales debilidades de este esquema de descomposición es que, dado que se está resolviendo un problema lineal entero de dos etapas, los cortes de optimalidad que modelan el valor de segunda etapa son locales. Esto significa que el valor de la cota superior es difícil de disminuir sin recurrir a calcular el valor de segunda etapa de todas las soluciones posibles. Aunque el uso del *sizebounding* y de los cortes QT ayudan en esa dirección no eliminan el problema completamente, por lo que se reportan altos gaps de optimalidad aún cuando se encuentran soluciones con un alto valor incumbente y buen desempeño *outsample*.

Con el fin de disminuir esta cota se intentó implementar un esquema de cortes alternados como el planteado por Angulo y cols. (2016) y agregar cortes lagrangianos, pero no se obtuvieron mejoras. Se optó por calcular una cota lagrangiana en base el modelo DEF usando multiplicadores iguales a cero, mediante la relajación de las restricciones (SS.1) que relacionan las variables de primera y segunda etapa, que en la práctica corresponde a resolver el problema de primera etapa y todos los problemas de segunda etapa de forma independiente. En las siguientes tablas se muestra una comparación entre las cotas superiores reportadas por gurobi (columna Cota) y la calculada usando la relajación lagrangiana (columna Cota LAG), junto a sus gaps de optimalidad respectivos, aplicadas a instancias con 3 y 4 días.

Tabla 4.10. Cota lagrangiana L-shaped vs L-shaped_sb vs QTb_p d3s30.

Método	Incumbente (e+06)	Cota (e+06)	Gap	Cota LAG (e+06)	Gap LAG
L-shaped	1.1997	2.8449	137.13%	1.5240	27.03%
L-shaped_sb	1.3168	1.7480	32.74%	1.5240	15.74%
QTb_p	1.3168	1.6560	25.76%	1.5240	15.74%

Tabla 4.11. Cota lagrangiana L-shaped vs L-shaped_sb vs QTb_p d4s30.

Método	Incumbente (e+05)	Cota (e+06)	Gap	Cota LAG (e+06)	Gap LAG
L-shaped	7.8726	2.8148	257.55%	1.1766	49.46%
L-shaped_sb	8.6409	1.4520	68.05%	1.1766	36.18%
QTb_p	9.1978	1.4339	55.90%	1.1766	27.93%

De las Tablas 4.10 y 4.11 se observa que independiente del horizonte de planificación considerado, se puede disminuir notablemente el gap de optimalidad reportado. Esto se ve ejemplificado en la Tabla 4.11, donde el gap para la descomposición con cortes QT disminuye de 55.90% a 27.93%. El usar un vector de ceros como multiplicadores lagrangianos en vez de iterar sobre ellos para obtener los óptimos simplifica el cálculo de la cota, a pesar de no obtener el valor más ajustado posible. Es decir, las soluciones obtenidas pueden estar aún más cerca del óptimo que lo que reporta el gap lagrangiano, aunque no se tenga forma de certificarlo.

Es relevante notar que para esta implementación, el cálculo de la cota lagrangiana y su gap es posterior a la resolución del problema. En teoría se podría calcular antes de la resolución y agregar como una restricción adicional que acota el valor de la función objetivo, pero los resultados computacionales muestran que esto tiene un efecto negativo ya que es incompatible al funcionamiento del *sizebounding*.

4.3.10. Desempeño *outsample* de las soluciones

A continuación se presenta una comparación para múltiples instancias entre el valor del incumbente obtenido, correspondiente al valor de la solución creada usando escenarios *insample*, versus el valor Overall de las soluciones, que considera el desempeño *outsample*.

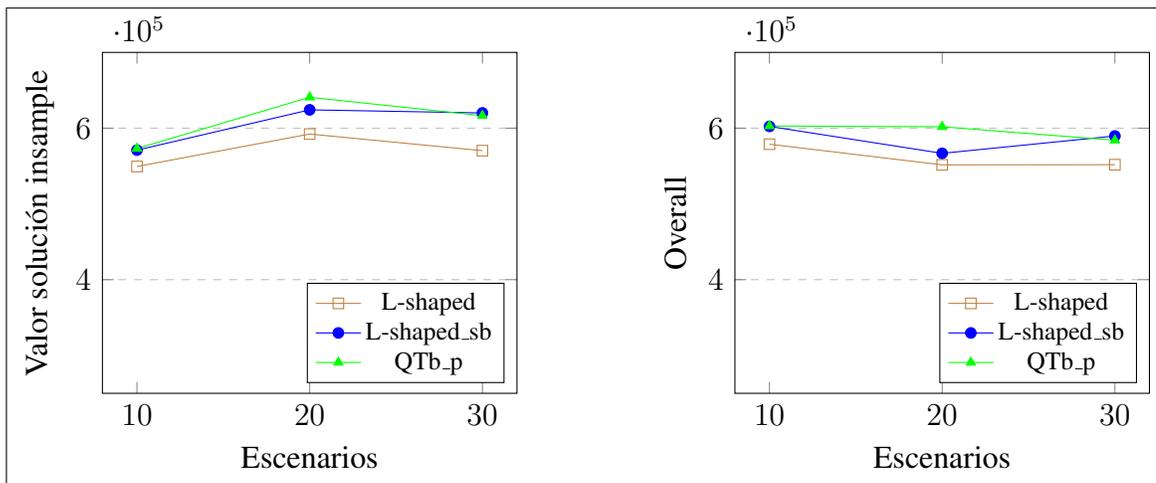


Figura 4.7. Desempeño insample y Overall de las descomposiciones en instancias con 2 días.

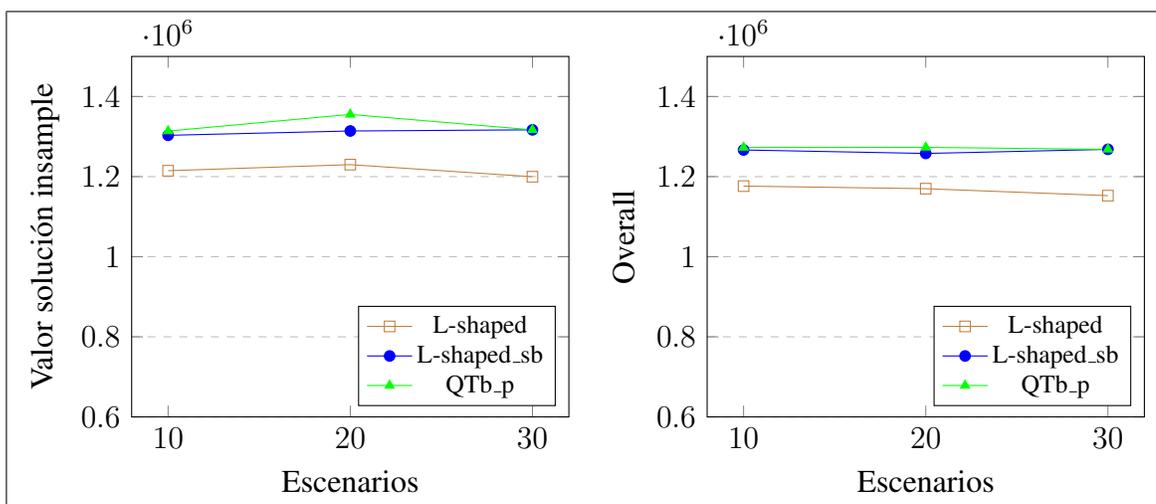


Figura 4.8. Desempeño insample y Overall de las descomposiciones en instancias con 3 días.

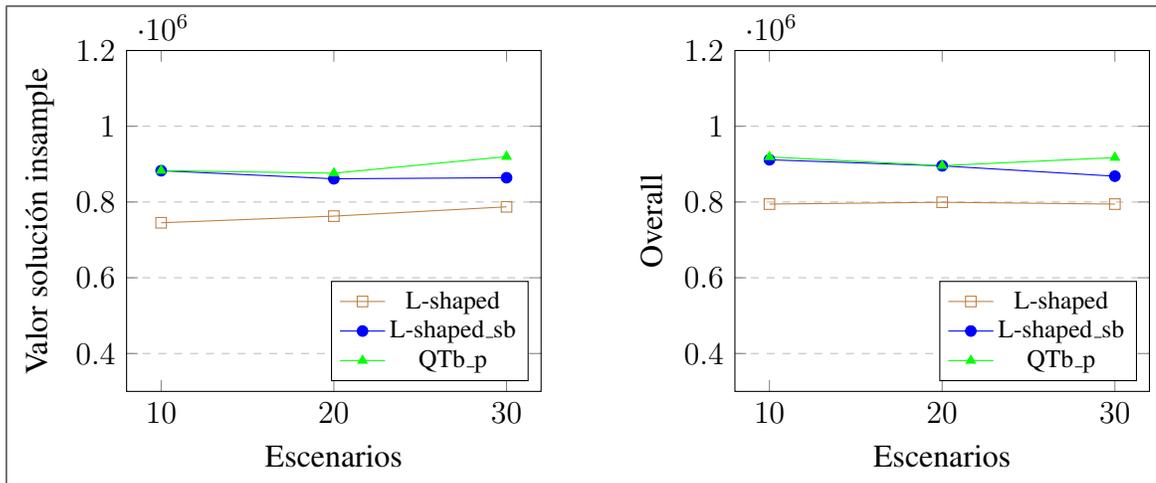


Figura 4.9. Desempeño insample y Overall de las descomposiciones en instancias con 4 días.

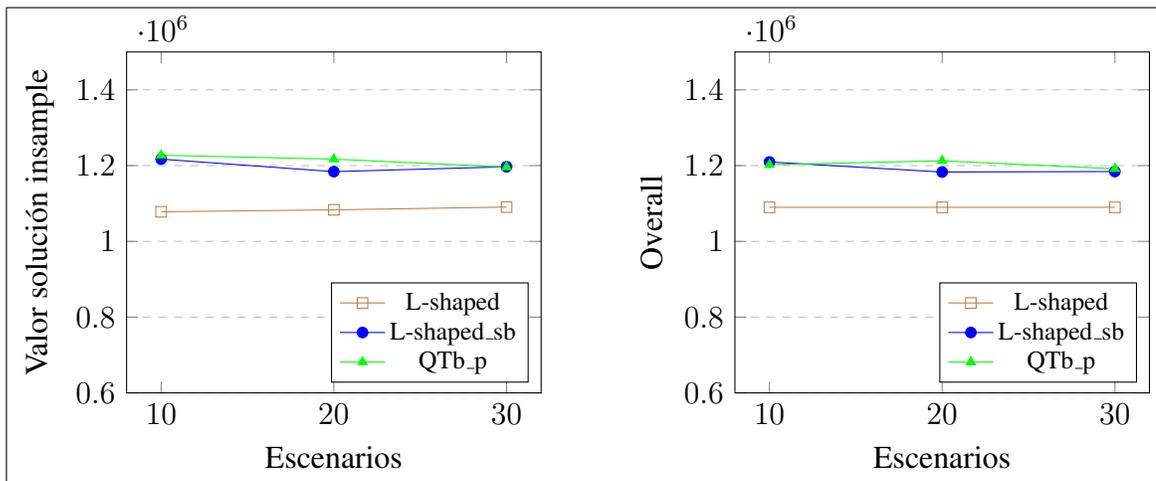


Figura 4.10. Desempeño insample y Overall de las descomposiciones en instancias con 5 días.

De las Figuras 4.7, 4.8, 4.9 y 4.10 se observa que para todo horizonte de planificación considerado, el valor *insample* es un buen estimador del valor Overall que considera escenarios *outsample*. Adicionalmente, se puede ver que la descomposición con cortes QT siempre obtiene resultados ligeramente mejores que la descomposición que sólo tiene *sizebounding*, y ambos son considerablemente mejores que la descomposición básica.

4.3.11. Comparación con múltiples semillas

Con el fin de verificar que el comportamiento de los distintos métodos es independiente de la semilla aleatoria usada para generar los escenarios de demanda, se resolvió una instancia con 30 escenarios *insample* para un horizonte de planificación corto (2 días) y otro largo (5 días), cada una replicada con 30 semillas aleatorias distintas para el comportamiento de la demanda. A continuación presentan los diagramas de cajas para valor Overall con 50 escenarios *outsample* de los 3 métodos de descomposición utilizados:

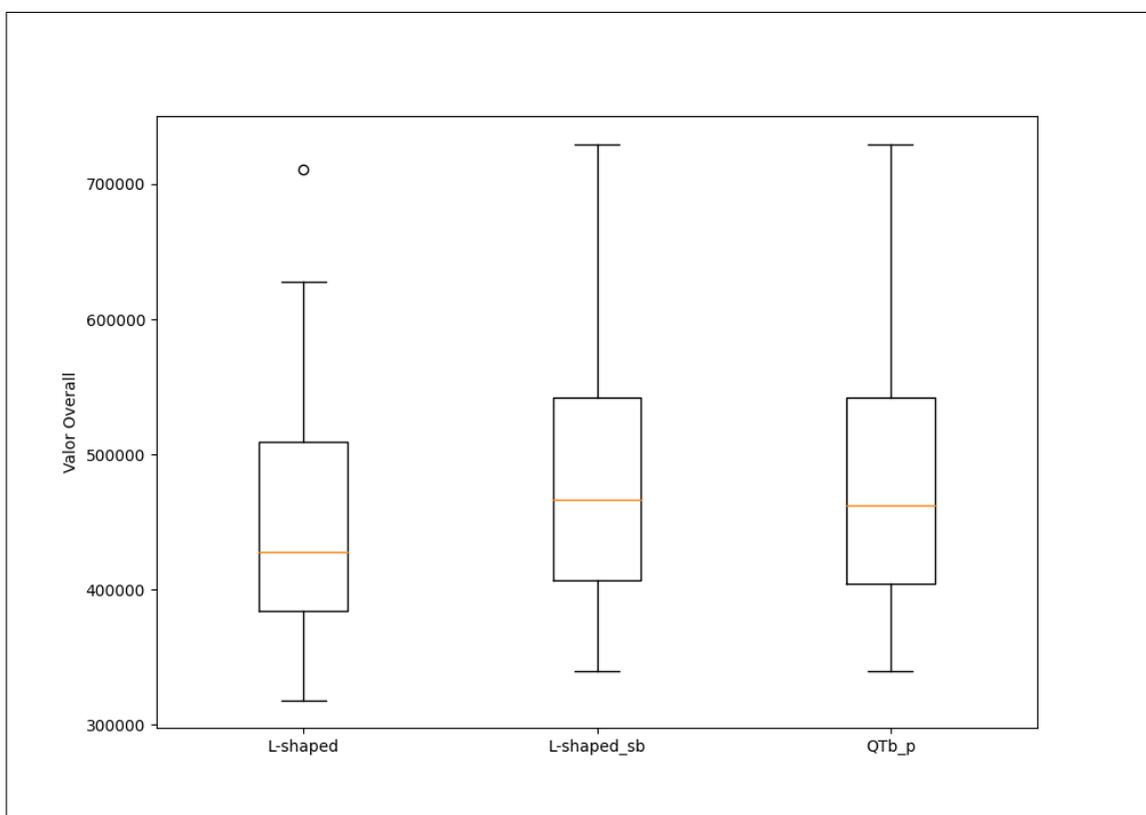


Figura 4.11. Diagrama de caja soluciones d2s30.

En la Figura 4.11 se observa que en promedio, para instancias con horizontes de planificación cortos utilizar la descomposición con *sizebounding* de soluciones de mayor valor que la descomposición básica. Sin embargo, agregar cortes QT no parece tener un efecto significativo en mejorar el resultado obtenido.

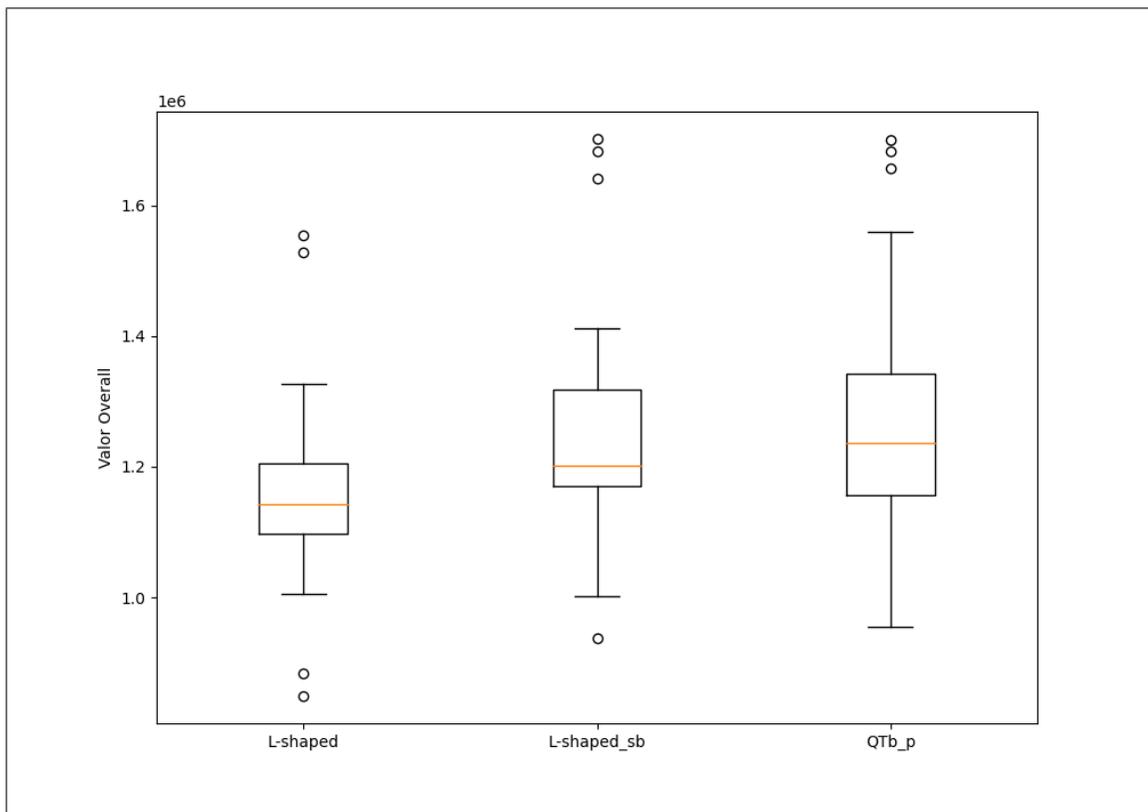


Figura 4.12. Diagrama de caja soluciones d5s30.

La Figura 4.12 muestra que para horizontes de planificación más largos el *sizebounding* sigue dominando a la descomposición básica, y el agregar cortes QT mejora el valor promedio y los cuartiles. Esto es razonable, ya que al aumentar el horizonte de planificación el costo de calcular el valor de segunda etapa se hace mayor, por lo que resulta beneficioso acotar mediante cortes QT.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se introduce y formula el problema *Recoverable Air Cargo Scheduling* (R-ACS), un modelo estocástico recuperable de dos etapas de flujo multi-commodity para el ruteo de aviones y ruteo de carga, que es novedoso al planificar proactivamente un itinerario recuperable. El modelo es descompuesto y resuelto mediante un algoritmo tipo Descomposición de Benders. Adicionalmente, se proponen el *sizebounding* y cortes QT como extensiones para fortalecer la descomposición.

Respecto al objetivo principal de este trabajo, se concluye que implementar un modelo de optimización estocástica recuperable de dos etapas, que considera la incertidumbre de la demanda y determina políticas para cada escenario posible, efectivamente genera planificaciones con mejor desempeño que los itinerarios creados mediante modelos determinísticos tradicionales.

Al comparar el desempeño de la formulación DEF del R-ACS versus un modelo que resuelve el caso promedio, se concluye que existen casos en que utilizar modelos que incorporan la incertidumbre generan itinerarios que tienen un mejor desempeño que los obtenidos mediante métodos tradicionales. Específicamente, en los casos estudiados es posible obtener mejoras de hasta un 2.4% en el valor total de la planificación, que corresponde ganancias de aproximadamente USD\$13500.

Se observa que la formulación DEF del R-ACS no es escalable para instancias con más de 3 días en su horizonte de planificación, por lo que se propone un esquema de descomposición básico, y se establecen propiedades y cortes para realizar extensiones al esquema de separación inicial:

- (1) Descomposición básica.
- (2) Descomposición con *sizebounding*.
- (3) Descomposición con *sizebounding* y cortes QT.

Se concluye que para cualquier instancia el uso de *sizebounding* domina la descomposición original, y que para horizontes de planificación cortos el uso de cortes QT no resulta particularmente beneficioso. Sin embargo, para generar itinerarios que consideran más días el uso de cortes QT mejora el desempeño de las soluciones obtenidas.

Un beneficio asociado a los cortes QT es que no son exclusivos a este problema en particular: cualquiera que presente una estructura similar, es decir una formulación recuperable de dos etapas con un valor de segunda etapa difícil de calcular, se puede beneficiar de su implementación.

Finalmente, como trabajo futuro queda propuesto el desarrollo de métodos exactos o heurísticas para disminuir la cota superior al momento de resolver y con ello el gap de optimalidad reportado. Implementar un modelo multietapa o un esquema de horizonte rodante serviría para aproximarse más a la realidad, en que cada día se pueden realizar ajustes para los días restantes del horizonte de planificación. También se propone utilizar un esquema de múltiples redes de espacio-tiempo para modelar las restricciones de vuelos que pueda presentar cada tipo de flota.

REFERENCIAS

- Aggarwal, R., y Singh, S. P. (2015). Chance constraint-based multi-objective stochastic model for supplier selection. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 79, 1707-1719.
- Amaruchkul, K., Cooper, W. L., y Gupta, D. (2007). Single-leg air-cargo revenue management. *Transportation Science*, 41(4), 457-469.
- Angulo, G., Ahmed, S., y Dey, S. S. (2016). Improving the Integer L-Shaped Method. *INFORMS Journal on Computing*, 28(3), 483-499.
- Becker, B., y Dill, N. (2007). Managing the complexity of air cargo revenue management. *Journal of Revenue and Pricing Management*, 6, 175-187.
- Belobaba, P., Odoni, A., y Barnhart, C. (2009). *The global airline industry*. John Wiley & Sons.
- Benders, J. F. (1962). Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. *Numerische Mathematik*, 4. doi: 10.1007/BF01386316
- Birge, J. R., y Louveaux, F. (2011). *Introduction to stochastic programming*. Heidelberg, Germany: Springer Science & Business Media.
- Boeing Commercial Airplanes. (2014). *Boeing 767-300 Freighter*.
- Boland, N., Fischetti, M., Monaci, M., y Savelsbergh, M. (2016). Proximity benders: a decomposition heuristic for stochastic programs. *Journal of Heuristics*, 22.
- Boonekamp, T. (2013). *Air cargo revenue management* (Tesis de Magíster). Vrije Universiteit Amsterdam.

Brandt, F., y Nickel, S. (2019). The air cargo load planning problem - a consolidated problem definition and literature review on related problems. *European Journal of Operational Research*, 275.

Clausen, J., Larsen, A., Larsen, J., y Rezanova, N. J. (2010). Disruption management in the airline industry—concepts, models and methods. *Computers & Operations Research*, 37(5), 809-821. (Disruption Management)

Dantzig, G. B. (1955). Linear programming under uncertainty. *Management Science*, 1, 197-206.

Delgado, F., y Mora, J. (2021). A matheuristic approach to the air-cargo recovery problem under demand disruption. *Journal of air transport management*, 90, 101939.

Delgado, F., Sirhan, C., Katscher, M., y Larrain, H. (2020). Recovering from demand disruptions on an air cargo network. *Journal of Air Transport Management*, 85, 101799.

Delgado, F., Trincado, R., y Pagnoncelli, B. K. (2019). A multistage stochastic programming model for the network air cargo allocation under capacity uncertainty. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 131, 292-307.

Derigs, U., y Friederichs, S. (2013). Air cargo scheduling: Integrated models and solution procedures. *OR Spectrum*, 35.

Derigs, U., Friederichs, S., y Schäfer, S. (2009). A new approach for air cargo network planning. *Transportation Science*, 43(3), 370–380.

Directorate-General for Mobility and Transport, European Commission. (2020). *EU transport in figures: statistical pocketbook 2020*. Publications Office.

Feng, B., Li, Y., y Shen, Z. (2015). Air cargo operations: Literature review and comparison with practices. *Transportation Research Part C-emerging Technologies*, 56, 263-280.

Froyland, G., Maher, S. J., y Wu, C.-L. (2014). The recoverable robust tail assignment problem. *Transportation Science*, 48(3), 351-372.

Hane, C. A., Barnhart, C., Johnson, E. L., Marsten, R. E., Nemhauser, G. L., y Sigismondi, G. (1995). The fleet assignment problem: Solving a large-scale integer program. *Math. Program.*, 70(2), 211–232.

Huang, K., y Lu, H. (2015). A linear programming-based method for the network revenue management problem of air cargo. *Transportation Research Procedia*, 7, 459-473. (21st International Symposium on Transportation and Traffic Theory Kobe, Japan, 5-7 August, 2015)

IATA. (2020). Annual review 2020.

IATA. (2021). Outlook for the global airline industry.

Kasilingam, R. (1997). Air cargo revenue management: Characteristics and complexities. *European Journal of Operational Research*, 96(1), 36-44.

Lan, S., Clarke, J.-P., y Barnhart, C. (2006). Planning for robust airline operations: Optimizing aircraft routings and flight departure times to minimize passenger disruptions. *Transportation Science*, 40(1), 15-28.

Laporte, G., y Louveaux, F. V. (1993). The integer l-shaped method for stochastic integer programs with complete recourse. *Operations Research Letters*, 13(3), 133-142.

LATAM. (2018). Integrated annual report 2018.

LATAM. (2019). Integrated annual report 2019.

LATAM Chile. (2019). Tarifario LATAM Chile 2019.

Levin, Y., Nediak, M., y Topaloglu, H. (2012). Cargo capacity management with allotments and spot market demand. *Operations Research*, 60(2), 351-365.

Li, C., y Grossmann, I. E. (2021). A review of stochastic programming methods for optimization of process systems under uncertainty. *Frontiers in Chemical Engineering*, 2, 34.

Lin, C.-c., y Chen, Y.-C. (2003). The integration of taiwanese and chinese air networks for direct air cargo services. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 37, 629-647.

Marsten, R. E., y Muller, M. R. (1980). A mixed-integer programming approach to air cargo fleet planning. *Management Science*, 26(11), 1096-1107.

Moussawi-Haidar, L. (2014). Optimal solution for a cargo revenue management problem with allotment and spot arrivals. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 72, 173-191.

Ordonez, F., y Zhao, J. (2004). Robust capacity expansion of transit networks.

Pereira, M. V. F., y Pinto, L. M. V. G. (1991). Multi-stage stochastic optimization applied to energy planning. *Mathematical Programming*, 52, 359-375.

Pita, J. P., Barnhart, C., y Antunes, A. P. (2013). Integrated flight scheduling and fleet assignment under airport congestion. *Transportation Science*, 47(4), 477-492.

Popescu, A., Keskinocak, P., Johnson, E., LaDue, M., y Kasilingam, R. (2006). Estimating air-cargo overbooking based on a discrete show-up-rate distribution. *INFORMS Journal on Applied Analytics*, 36(3), 248-258.

Rahmaniani, R., Crainic, T. G., Gendreau, M., y Rei, W. (2017). The benders decomposition algorithm: A literature review. *European Journal of Operational*

Research, 259(3), 801-817.

Sandhu, R., y Klabjan, D. (2006). Fleeting with passenger and cargo origin-destination booking control. *Transportation Science*, 40(4), 517-528.

Sherali, H., Bae, K.-H., y Haouari, M. (2013). An integrated approach for airline flight selection and timing, fleet assignment, and aircraft routing. *Transportation Science*, 47, 455-476.

Tang, C.-H., Yan, S., y Chen, Y.-H. (2008). An integrated model and solution algorithms for passenger, cargo, and combi flight scheduling. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 44(6), 1004-1024.

US Bureau Of Transportation Statistics. (2020). Descargado de https://www.transtats.bts.gov/Tables.asp?QO_VQ=EGI (Visitado: 12-06-2020)

Wada, M., Delgado, F., y Pagnoncelli, B. K. (2017). A risk averse approach to the capacity allocation problem in the airline cargo industry. *Journal of the Operational Research Society*, 68(6), 643-651.

Yan, S., Chen, S.-C., y Chen, C.-H. (2006). Air cargo fleet routing and timetable setting with multiple on-time demands. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 42(5), 409-430.

Yildiz, B., y Savelsbergh, M. (2019). Optimizing package express operations in china. *Optimization Online*, 6799.

Álvarez Miranda, E., Fernández, E., y Ljubić, I. (2015). The recoverable robust facility location problem. *Transportation Research Part B: Methodological*, 79, 93-120.

APÉNDICE

A. FORMULACIONES ADICIONALES

A.1. Modelo Determinístico de Ruteo de Aviones (D-AR)

Parámetros adicionales

La asignación de flota óptima resultante del D-FA se usa como parámetro:

- $y_{ij}^k \in \mathbb{Z}_+$ número de aviones tipo k asignados al arco $ij \in A$

Variables

- $h_{ij}^{k,m} = 1$ si el m -ésimo avión tipo k es asignado al arco $ij \in A$; 0 e.o.c.

Se propone el siguiente modelo Determinístico de Ruteo de Aviones (D-AR) :

$$\max_h \quad 0 \quad \text{(D-AR.OF)}$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{m=1}^{n^k} h_{ij}^{k,m} = y_{ij}^k \quad k \in K, ij \in A \quad \text{(D-AR.1)}$$

$$\sum_{ij \in \delta^+(i)} h_{ij}^{k,m} = av_i^{k,m} \quad k \in K, m \in [n^k], i \in N_b \quad \text{(D-AR.2)}$$

$$\sum_{ij \in \delta^-(j)} h_{ij}^{k,m} - \sum_{ji \in \delta^+(j)} h_{ji}^{k,m} = 0 \quad k \in K, m \in [n^k], j \in N_{int} \quad \text{(D-AR.3)}$$

$$h_{ij}^{k,m} \in \{0, 1\} \quad k \in K, m \in [n^k], ij \in A \quad \text{(D-AR.4)}$$

La función objetivo (D-AR.OF) es irrelevante, ya que el problema busca sólo encontrar una solución factible, la cual existe por construcción.

Cada arco de la red debe tener tantos aviones asignados como los planificados en la asignación de flota óptima del problema previo (D-AR.1). Cada avión debe salir específicamente del nodo en que parte (D-AR.2), conservando su flujo (D-AR.3). Las variables son de naturaleza binaria (D-AR.4).

La solución de este problema es el itinerario específico para cada avión. Usando este itinerario y las variables de ruteo de carga x del modelo anterior, la asignación de carga para cada avión es directa.

A.2. Modelo Estocástico de Ruteo de Aviones (S-AR)

Parámetros adicionales

La asignación de flota óptima del problema anterior se usa como parámetro:

- $y_{ij}^{k,s} \in \mathbb{Z}_+$ número de aviones tipo k asignados al arco $ij \in A$ en el escenario $s \in S$

Variables

- $h_{ij}^{k,m,s} = 1$ si el m -ésimo avión tipo k es asignado al arco $ij \in A$ en el escenario $s \in S$; 0 e.o.c.

Se propone el siguiente modelo Estocástico de Ruteo de Aviones (S-AR) :

$$\max_h 0 \quad (\text{S-AR.OF})$$

$$\text{s.a } \sum_{m=1}^{n^k} h_{ij}^{k,m,s} = y_{ij}^{k,s} \quad k \in K, ij \in A, s \in S \quad (\text{S-AR.1})$$

$$\sum_{ij \in \delta^+(i)} h_{ij}^{k,m,s} = av_i^{k,m} \quad k \in K, m \in [n^k], i \in N_b, s \in S \quad (\text{S-AR.2})$$

$$\sum_{ij \in \delta^-(j)} h_{ij}^{k,m,s} - \sum_{ji \in \delta^+(j)} h_{ji}^{k,m,s} = 0 \quad k \in K, m \in [n^k], j \in N_{int}, s \in S \quad (\text{S-AR.3})$$

$$h_{ij}^{k,m,s} \in \{0, 1\} \quad k \in K, m \in [n^k], ij \in A, s \in S \quad (\text{S-AR.4})$$

La función objetivo y las restricciones son análogas a su contraparte determinística (D-AR.OF), (D-AR.1)-(D-AR.4) pero extendido a un escenario s .

A.3. Restricciones para cota de *sizebounding*

$$Q_sb(\mathbf{y}^0) = SSP_sb(y_sb, f) - RAC_sb(z_sb_+) - RC_sb(r_sb) \quad (\text{sb.Q})$$

$$\sum_{k \in K} y_sb_{ij}^k \leq 1 \quad ij \in A_f \quad (\text{sb.1})$$

$$y_sb_{ij}^k = y_{ij}^{k,0} + z_sb_{ij,+}^k - z_sb_{ij,-}^k \quad k \in K, ij \in A \quad (\text{sb.2})$$

$$\sum_{j \in \delta^+(i)} y_sb_{ij}^k = av_i^k \quad k \in K, i \in N_b \quad (\text{sb.3})$$

$$\sum_{ji \in \delta^+(j)} y_sb_{ji}^k - \sum_{ij \in \delta^-(j)} y_sb_{ij}^k = 0 \quad k \in K, j \in N_{int} \quad (\text{sb.4})$$

$$\sum_{ji \in \delta^+(j)} f_{ji}^c - \sum_{ij \in \delta^-(j)} f_{ij}^c \begin{cases} \geq sel_weight^c, j = o^c, mand^{c,0} = 0 \\ \leq -sel_weight^c, j = d^c, mand^{c,0} = 0 \\ = sel_weight^c, j = o^c, mand^{c,0} = 1 \\ = -sel_weight^c, j = d^c, mand^{c,0} = 1 \\ = 0, \text{ow} \end{cases} \quad j \in N, c \in C \quad (\text{sb.5})$$

$$\sum_{c \in C} f_{ij}^c \leq \sum_{k \in K} air_cap^k y_sb_{ij}^k \quad ij \in A_f \quad (\text{sb.6})$$

$$\sum_{c \in C} g_{ij}^c \leq \sum_{k \in K} air_vol^k y_sb_{ij}^k \quad ij \in A_f \quad (\text{sb.7})$$

$$g_{ij}^c \max_{s \in S} \left\{ \frac{weight^{c,s}}{vol^{c,s}} \right\} = f_{ij}^c \quad c \in C \quad (\text{sb.8})$$

$$sel_weight^c = \sum_{s \in S} weight^{c,s} \gamma_s \quad c \in C \quad (\text{sb.9})$$

$$\sum_{s \in S} \gamma_s = 1 \quad (\text{sb.10})$$

$$z_sb_{ij,-}^k \leq y_{ij}^{k,0} \quad k \in K, ij \in A_f \quad (\text{sb.12})$$

$$y_{ij}^{k,0} + z_sb_{ij,+}^k \leq 1 \quad k \in K, ij \in A_f \quad (\text{sb.13})$$

$$\gamma_s \in \{0, 1\} \quad s \in S \quad (\text{sb.11})$$

$$f_{ij}^c \in \mathbb{R}_+ \quad c \in C, ij \in A \quad (\text{sb.14})$$

$$g_{ij}^c \in \mathbb{R}_+ \quad c \in C, ij \in A \quad (\text{sb.15})$$

$$sel_weight^c \in \mathbb{R}_+ \quad c \in C \quad (\text{sb.16})$$

$$y_sb_{ij}^k, z_sb_{ij,+}^k, z_sb_{ij,-}^k \in \mathbb{Z}_+ \quad k \in K, ij \in A \quad (\text{sb.17})$$

(RT.1) – (RT.5)

A.4. Cortes QT globales 1-fv

Similar a los cortes proactivos, los cortes globales buscan acotar todas las soluciones en la vecindad 1-fv de alguna solución de referencia agregando restricciones que modelan la vecindad en vez de crear las soluciones.

Para que una solución y pertenezca a la vecindad 1-fv de \bar{y} respecto a un vuelo \bar{ij} operado por un avión tipo \bar{k} debe satisfacer:

- (1) Para todos los vuelos que no son similares a \bar{ij} , la solución y debe ser exactamente igual a \bar{y} . Esto implica que la distancia de Hamming para los vuelos que no son similares a \bar{ij} deben ser igual a cero:

$$\Delta^1(y, \overline{y, ij, k}) := \sum_{(ij, k) \in \Omega^1(\overline{y, ij, k})} (1 - y_{ij}^{k,0}) + \sum_{(ij, k) \in \Omega^2(\overline{y, ij, k})} y_{ij}^{k,0} = 0$$

$$\text{con } \Omega^1(\overline{y, ij, k}) := \left\{ (ij, k) : ij \in A_f, ij \notin S(\bar{ij}), k \in K, \bar{y}_{ij}^{k,0} = 1 \right\}$$

$$\text{y } \Omega^2(\overline{y, ij, k}) := \left\{ (ij, k) : ij \in A_f, ij \notin S(\bar{ij}), k \in K, \bar{y}_{ij}^{k,0} = 0 \right\}.$$

Es relevante notar que en general $\Delta^1(y, \overline{y, ij, k}) \in \mathbb{N}_+$ si y no pertenece a la vecindad 1-fv de \bar{y} .

- (2) Los vuelos similares a \bar{ij} , no pueden ser operados por aviones que no sean tipo \bar{k} . Adicionalmente, el vuelo \bar{ij} no debe ser operado:

$$\Delta^2(y, \overline{y, ij, k}) := \sum_{ij \in S(\bar{ij}), k \in K \setminus \{\bar{k}\}} y_{ij}^{k,0} + \sum_{k \in K} y_{ij}^{k,0} = 0$$

Se observa que en general $\Delta^2(y, \overline{y, ij, k}) \in \mathbb{N}_+$ si y no pertenece a la vecindad 1-fv de \bar{y} .

- (3) Para los vuelos similares a \bar{ij} , exactamente uno debe ser operado por un avión tipo \bar{k} . Agregando variables nuevas, notando que $S(\bar{ij})$ está delimitado por los nodos \hat{a} en el origen y \hat{b} en el destino:

- $\nu_{\hat{a}\hat{b},1}^{\bar{k}} = 1$ si hay al menos un vuelo en $S(\bar{ij})$ operado por un avión tipo \bar{k} ; 0 e.o.c.

- $\nu_{\hat{a}\hat{b},2}^{\bar{k}} = 1$ si hay exactamente un vuelo en $S(\overline{ij})$ operado por un avión tipo \bar{k} ; 0 e.o.c.

Esto requiere definir previamente las variables $\nu_{ab,1}^k, \nu_{ab,2}^k$ para todo $k \in K, a \in N, b \in N : time_a < time_b \wedge air_a \neq air_b$ en el problema de primera etapa. Agregando las siguientes restricciones para modelar la existencia de un único vuelo operado:

$$y_{ij}^{\bar{k},0} \leq \nu_{\hat{a}\hat{b},1}^{\bar{k}} \quad ij \in S(\overline{ij}) \quad (\text{GC.1})$$

$$\nu_{\hat{a}\hat{b},1}^{\bar{k}} \leq \sum_{ij \in S(\overline{ij})} y_{ij}^{\bar{k},0} \quad (\text{GC.2})$$

$$2\nu_{\hat{a}\hat{b},1}^{\bar{k}} - \sum_{ij \in S(\overline{ij})} y_{ij}^{\bar{k},0} \leq \nu_{\hat{a}\hat{b},2}^{\bar{k}} \quad (\text{GC.3})$$

$$\Delta^3(y, \overline{y, ij, k}) := 1 - \nu_{\hat{a}\hat{b},2}^{\bar{k}} = 0$$

Es necesario destacar que en general $\Delta^3(y, \overline{y, ij, k}) \in \{0, 1\}$ si y no pertenece a la vecindad 1-fv de \bar{y} .

Corte global 1-fv respecto al vuelo $\overline{ij, k}$ operado por un avión tipo \bar{k} en \bar{y} :

$$\theta \leq Q(\bar{y}) + T(\bar{y}) + (\Delta^1(y, \overline{y, ij, k}) + \Delta^2(y, \overline{y, ij, k}) + \Delta^3(y, \overline{y, ij, k})) U$$

con $T(\bar{y}) := \sum_{s \in S} p^s s c_{ij}^{\bar{k},s}$.

Si y pertenece a la vecindad de \bar{y} , $\Delta^1(y, \overline{y, ij, k}) = \Delta^2(y, \overline{y, ij, k}) = \Delta^3(y, \overline{y, ij, k}) = 0$ y se obtiene el corte QT $\theta \leq Q(\bar{y}) + T(\bar{y})$. En caso contrario se acota θ por un valor mayor a U y no se agrega información adicional.

A.5. Cortes QT globales n -fv

La idea anterior de cortes para una vecindad 1-fv se puede expandir para considerar n -fv, es decir, considerar n vecindades simultáneamente:

Para que una solución y pertenezca a la vecindad n -fv de \bar{y} respecto a los vuelos operados $\overline{ij, k^1}, \dots, \overline{ij, k^n}$ debe satisfacer:

- (1) Para todos los vuelos que no son similares a $\overline{ij, k^1}, \dots, \overline{ij, k^n}$, la solución y debe ser exactamente igual a \bar{y} . Esto implica que la distancia de Hamming para los vuelos que no son similares a $\overline{ij, k^1}, \dots, \overline{ij, k^n}$ deben ser igual a cero:

$$\Delta^1(y, \bar{y}, \overline{ij, k^1}, \dots, \overline{ij, k^n}) := \sum_{(ij, k) \in \Omega^1(\overline{ij, k})} (1 - y_{ij}^{k,0}) + \sum_{(ij, k) \in \Omega^2(\overline{ij, k})} y_{ij}^{k,0} = 0$$

con $\Omega^1(\overline{ij, k}) := \left\{ (ij, k) : ij \in A_f, ij \notin \bigcup_{v=1, \dots, n} S(\overline{ij^v}), k \in K, \bar{y}_{ij}^{k,0} = 1 \right\}$
y $\Omega^2(\overline{ij, k}) := \left\{ (ij, k) : ij \in A_f, ij \notin \bigcup_{v=1, \dots, n} S(\overline{ij^v}), k \in K, \bar{y}_{ij}^{k,0} = 0 \right\}$. Es relevante notar que en general $\Delta^1(y, \bar{y}, \overline{ij, k^1}, \dots, \overline{ij, k^n}) \in \mathbb{N}_+$ si y no pertenece a la vecindad n -fv de \bar{y} .

- (2) Para cada vuelo $\overline{ij, k^v}$ con $v = 1, \dots, n$, los vuelos similares a $\overline{ij^v}$ no pueden ser operados por aviones que no sean tipo $\overline{k^v}$. Adicionalmente, el vuelo $\overline{ij^v}$ no debe ser operado:

$$\Delta^{2,v}(y, \bar{y}, \overline{ij, k^v}) := \sum_{ij \in S(\overline{ij^v}), k \in K \setminus \{\overline{k^v}\}} y_{ij}^{k,0} + y_{\overline{ij^v}}^{\overline{k^v},0} = 0$$

Se observa que para cada vuelo $\overline{ij, k^v}$, en general $\Delta^{2,v}(y, \bar{y}, \overline{ij, k^v}) \in \mathbb{N}_+$ si y no pertenece a la vecindad 1-fv de \bar{y} , y si para cualquier $v = 1, \dots, n$ no pertenece a la 1-fv vecindad tampoco pertenece a la n -fv vecindad.

- (3) Para cada vuelo $\overline{ij, k^v}$ con $v = 1, \dots, n$, respecto a los vuelos similares a $\overline{ij^v}$ exactamente uno debe ser operado por un avión tipo $\overline{k^v}$. Agregando variables nuevas, notando que $S(\overline{ij^v})$ está delimitado por los nodos \hat{a}^v en el origen y \hat{b}^v en el destino:

- $\nu_{\hat{a}^v \hat{b}^v, 1}^{\bar{k}^v} = 1$ si hay al menos un vuelo en $S(\overline{ij^v})$ operado por un avión tipo \bar{k}^v ; 0 e.o.c.
- $\nu_{\hat{a}^v \hat{b}^v, 2}^{\bar{k}^v} = 1$ si hay exactamente un vuelo en $S(\overline{ij^v})$ operado por un avión tipo \bar{k}^v ; 0 e.o.c.

Esto requiere definir previamente las variables $\nu_{ab,1}^k, \nu_{ab,2}^k$ para todo $k \in K, a \in N, b \in N : time_a < time_b \wedge air_a \neq air_b$ en el problema de primera etapa. Agregando las siguientes restricciones para modelar la existencia de un único vuelo operado:

$$y_{ij}^{\bar{k}^v, 0} \leq \nu_{\hat{a}^v \hat{b}^v, 1}^{\bar{k}^v} \quad ij \in S(\overline{ij^v}) \quad v = 1, \dots, n \quad (\text{nGC.1})$$

$$\nu_{\hat{a}^v \hat{b}^v, 1}^{\bar{k}^v} \leq \sum_{ij \in S(\overline{ij^v})} y_{ij}^{\bar{k}^v, 0} \quad v = 1, \dots, n \quad (\text{nGC.2})$$

$$2\nu_{\hat{a}^v \hat{b}^v, 1}^{\bar{k}^v} - \sum_{ij \in S(\overline{ij^v})} y_{ij}^{\bar{k}^v, 0} \leq \nu_{\hat{a}^v \hat{b}^v, 2}^{\bar{k}^v} \quad v = 1, \dots, n \quad (\text{nGC.3})$$

$$\Delta^{3,v}(y, \overline{ij, k^v}) := 1 - \nu_{\hat{a}^v \hat{b}^v, 2}^{\bar{k}^v} = 0$$

Es necesario destacar que para cada vuelo $\overline{ij, k^v}$, en general $\Delta^{3,v}(y, \overline{ij, k^v}) \in \{0, 1\}$ si y no pertenece a la vecindad 1-fv de \overline{y} , y si para cualquier $v = 1, \dots, n$ no pertenece a la 1-fv vecindad tampoco pertenece a la n -fv vecindad.

Corte global n -fv respecto a los vuelos operados $\overline{ij, k^1}, \dots, \overline{ij, k^n}$ en \overline{y} :

$$\theta \leq Q(\overline{y}) + T(\overline{y}) + \left(\Delta^1(y, \overline{y}, \overline{ij, k^1}, \dots, \overline{ij, k^n}) + \sum_{v=1}^n (\Delta^{2,v}(y, \overline{y}, \overline{ij, k^v}) + \Delta^{3,v}(y, \overline{y}, \overline{ij, k^v})) \right) U$$

$$\text{con } T(\overline{y}) := \sum_{s \in S} p^s \sum_{v=1}^n sc_{\overline{ij}^v}^{\bar{k}^v, s}.$$

Si y pertenece a la vecindad de \overline{y} ,

$$\Delta^1(y, \overline{y}, \overline{ij, k^1}, \dots, \overline{ij, k^n}) = \sum_{v=1}^n \Delta^{2,v}(y, \overline{y}, \overline{ij, k^v}) = \sum_{v=1}^n \Delta^{3,v}(y, \overline{y}, \overline{ij, k^v}) = 0$$

y se obtiene el corte QT $\theta \leq Q(\overline{y}) + T(\overline{y})$. En caso contrario se acota θ por un valor mayor a U y no se agrega información adicional.

B. CONSIDERACIONES ADICIONALES

B.1. Costo de Transformación no puede incluir re-timings

Es relevante notar que a diferencia de un problema de segunda etapa, el costo de transformación para un corte QT no puede considerar re-timings. Se utiliza el siguiente ejemplo para demostrarlo: sean y_2^0, y_1^0, y^s itinerarios formados por un único vuelo tales que difieren únicamente en la hora del vuelo, y se considera un máximo de 6 horas para los re-timings: en y_2^0 sale a las 6:00, en y_1^0 sale a las 12:00 y en y^s sale a las 18:00. Sea y^s la solución óptima de $Q(y_2^0, s)$ y de $Q(y_1^0, s)$ para algún $s \in S$. La Figura B.1 ilustra dicha situación.

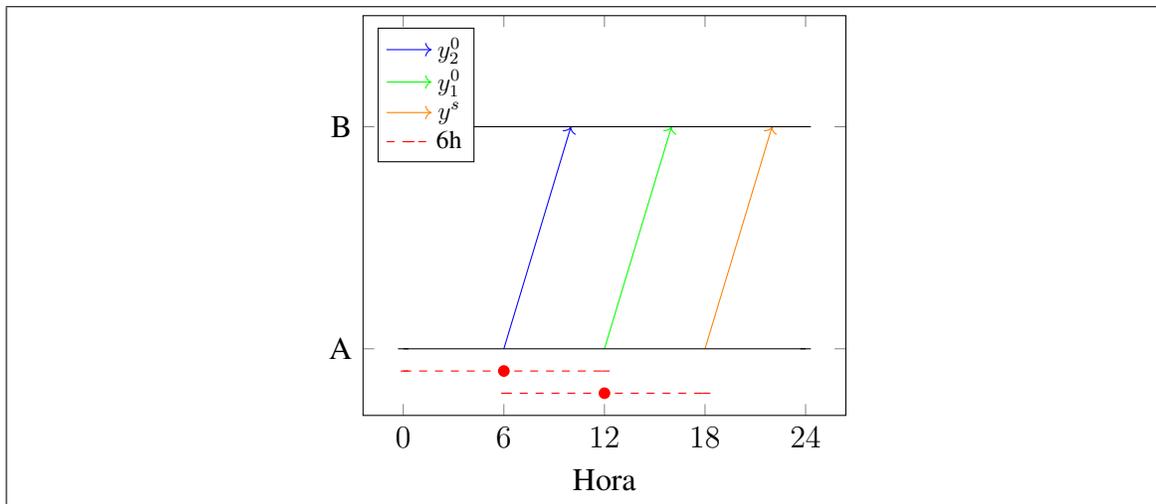


Figura B.1. Costos de transformación no pueden considerar re-timings.

Si no se conociera el valor de $Q(y_2^0, s)$ y se deseara aplicar un corte QT con $Q(y_1^0, s)$ ya calculado, siendo $\hat{T}(y_2^0, y_1^0, s)$ el costo de transformación que permite re-timings, éste consistiría en un re-timing (de 6:00 a 12:00). Resolver $Q(y_1^0, s)$ también requiere sólo un re-timing (de 12:00 a 18:00). Sin embargo, $Q(y_2^0, s)$ requiere agregar un vuelo completamente nuevo (descartar el de las 6:00 y reemplazarlo por el de las 18:00), con un costo superior a los dos re-timings anteriores. Dado que y^s es la solución tanto de $Q(y_1^0, s)$ como $Q(y_2^0, s)$ significa que tienen el mismo SSP, con diferencias sólo en el costo anteriormente

explicado, por lo que la cota QT no sería válida:

$$Q(y_1^0, s) \not\leq \hat{T}(y_2^0, y_1^0, s) + Q(y_2^0, s).$$

La situación anterior muestra que lo que debería ser un vuelo completamente nuevo, con su costo asociado, podría ser considerado como dos re-timings consecutivos si se permite utilizar re-timings en el costo de transformación, lo que implicaría un costo menor al real. Debido a que esto sería incorrecto, el costo de transformación no puede considerar re-timings.