



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA

**IMPACTO EN EL CONSUMO DE
COMBUSTIBLE AL PLANIFICAR RUTAS
VEHICULARES CONSIDERANDO LAS
PENDIENTES DEL CAMINO**

CARLOS FEDERICO BRUNNER PARRA

Tesis para optar al grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Profesores Supervisores:
RICARDO GIESEN ENCINA
MATHIAS KLAPP BELMAR

Santiago de Chile, agosto, 2018

© MMXVIII, CARLOS FEDERICO BRUNNER PARRA



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA

**IMPACTO EN EL CONSUMO DE
COMBUSTIBLE AL PLANIFICAR RUTAS
VEHICULARES CONSIDERANDO LAS
PENDIENTES DEL CAMINO**

CARLOS FEDERICO BRUNNER PARRA

Miembros del Comité:

RICARDO GIESEN ENCINA

MATHIAS KLAPP BELMAR

JUAN ENRIQUE COEYMANS AVARIA

MIGUEL ANDRÉS FIGLIOZZI

SEBASTIÁN VICUÑA DÍAZ

Tesis para optar al grado de

Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Santiago de Chile, agosto, 2018

© MMXVIII, CARLOS FEDERICO BRUNNER PARRA

A mis seres queridos

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, agradezco a mis profesores supervisores, Ricardo Giesen y Mathias Klapp. El apoyo, los consejos y la dedicación entregada, fue fundamental en esta investigación y en mi formación como persona. Agradezco al profesor Juan Enrique Coeymans, por ser el primer profesor en acercarse e invitarme a seguir un postgrado. Agradezco también, a los profesores Sebastián Vicuña y Miguel Figliozzi por formar parte de mi comisión y los aportes realizados a esta investigación.

En segundo lugar, agradezco a mis amigos y compañeros de programa. El ambiente grato, las salidas y la ayuda fue muy importante para mí. En especial a mi amigo Owen, que fue fundamental para la organización de mi defensa.

En tercer lugar, te doy las gracias Cony, por aguantarme estos años, apoyarme y centrarme en los momentos complicados. Agradezco a mis padres y hermana, todo se los debo a ustedes. En particular a mi padre, por el tremendo esfuerzo que ha hecho por nosotros. También agradezco a mis cuatro abuelos, a quienes admiro.

Finalmente, agradezco el apoyo y financiamiento a esta tesis por medio del proyecto Fondecyt N° 1171049 y proyecto Fondap Cedeus, ambos de Conicyt.

ÍNDICE GENERAL

AGRADECIMIENTOS	IV
Índice de figuras	VIII
Índice de tablas	X
ABSTRACT	XI
RESUMEN	XII
Capítulo 1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Contexto y motivación del problema	1
1.2. ¿Cómo abordamos el problema?	5
1.3. Objetivos	6
1.4. Principales contribuciones	7
1.5. Alcances	7
1.6. Estructura de la tesis	8
Capítulo 2. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA	9
2.1. Modelos de consumo de combustible	9
a. Modelo <i>U.K. Transport Research Laboratory 1999</i>	10
b. Modelo de Barth y Boriboonsomsin	10
2.2. Problema de ruteo de vehículos	12
2.3. VRP con objetivo de minimizar emisión de contaminantes	13
a. Flota de vehículos que utilizan combustibles alternativos	13
b. Modelos VRP que minimizan una función de emisión de contaminantes	13
c. Dependencia de la velocidad en el tiempo	16
d. Flota heterogénea	17
e. Trabajos que agrupan características anteriores	17

f. Enfoque estadístico sin decidir rutas	18
2.4. Ruteo por arcos en el problema de barrido de nieve	18
2.5. Clasificación de trabajos previos	18
Capítulo 3. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	21
3.1. Supuestos	21
3.2. Parámetros	22
3.3. Variables de decisión	23
3.4. Modelo de optimización	24
3.5. Validación en instancia pequeña	26
Capítulo 4. ALGORITMO DE SOLUCIÓN	29
4.1. Secuenciamiento de visitas a clientes	29
4.2. Partición del ciclo en múltiples despachos	32
4.3. Validación de la heurística	35
Capítulo 5. CASO DE ESTUDIO Y RESULTADOS	36
5.1. Instancia resuelta a optimalidad	36
5.2. Construcción de la red	38
5.2.1. Muestreo geográfico de clientes	39
5.2.2. Preproceso de la red	40
5.3. Tipo de experimento y diseño	40
5.4. Desempeño de heurística	41
5.5. Resultados generales	43
Caso (i)	43
Casos (ii) y (iii)	45
5.6. Características de la solución en instancias particulares	46
Caso (i): primera etapa heurística	46
Caso (i): heurística completa	48
Caso (ii)	50

5.7. Disminución de velocidad en arcos con pendiente positiva	52
5.8. Efecto de la densidad de clientes en los ahorros	52
Capítulo 6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	55
6.1. Conclusiones	55
6.2. Recomendaciones	56
REFERENCIAS	58
Anexo	62
A. Extensión del modelo de optimización	63
B. Tabla de parámetros	71

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1.	Perfil de altura de un tramo en Valparaíso y Santiago	3
1.2.	Impacto de poseer vías empinadas	5
2.1.	Dependencia de la velocidad en el tiempo	16
3.1.	Instancia de 12 clientes	27
3.2.	Planificación óptima de rutas para instancia de 12 clientes	27
4.1.	Eliminación y reconstrucción parcial aleatoria de la solución	30
4.2.	Red prueba heurística	31
4.3.	Ejemplo de solución mediante heurística	31
4.4.	Partición del ciclo en rutas factibles	32
4.5.	Mejora a partición del ciclo en rutas factibles	34
4.6.	Algoritmo <i>switch</i> entre distintas rutas	34
5.1.	Instancia resuelta a optimalidad	37
5.2.	Red de estudio Santiago	38
5.3.	Red de estudio Valparaíso	39
5.4.	Histograma de alturas Santiago y Valparaíso	39
5.5.	Desempeño primera etapa algoritmo para instancia particular	42
5.6.	Secuenciamiento en instancia representativa de Valparaíso	46
5.7.	Perfiles de altura de rutas para instancia representativa de Valparaíso	47

5.8. Planificación de rutas para instancia representativa de Valparaíso	48
5.9. Perfil de altura de planificación de rutas para instancia representativa de Valparaíso	49
5.10. Planificaciones sin restricción de capacidad (a)	50
5.11. Perfiles de altura planificación sin restricción de capacidad (a)	50
5.12. Planificaciones sin restricción de capacidad (b)	51
5.13. Perfiles de altura planificación sin restricción de capacidad (b)	51
5.14. Zona de estudio reducida	54
A.1. Perfil de velocidad	63
A.2. Tiempo de viaje arco	64

ÍNDICE DE TABLAS

2.1. Principales trabajos revisados.	20
4.1. Validación heurística	35
5.1. Resumen indicadores instancia a optimalidad.	37
5.2. Tiempo computacional promedio heurística.	41
5.3. diferencia promedio heurística con tiempo limitado	43
5.4. Ahorro en costos caso (i) cuando se considera pendientes.	44
5.5. Flota promedio utilizada en Valparaíso	45
5.6. Ahorros promedio casos (ii) y (iii)	45
5.7. Costo total y distancia recorrida de secuenciamiento de visitas para instancia representativa.	47
5.8. Costo y distancia recorrida en solución VRP.	49
5.9. Ahorros cambiando velocidad	52
5.10. Estadísticos muestras	53
B.1. Parámetros utilizados.	71

ABSTRACT

The transportation cost of a product, from procurement of raw materials to the distribution to the final consumer, corresponds approximately between 10 % and 20 % of its final total cost. This has motivated the use of Operations Research based methods to reduce transportation costs. In the final distribution stage of the product, multiple variants of the Vehicle Routing Problem (VRP) have been studied for this purpose.

A typical assumption made for the VRP is that vehicles travel over a flat terrain, and therefore, minimizing total vehicle travelled distance is a good approximation to minimizing transportation costs. However, in coastal cities such as Valparaíso, Chile, there may be customers separated with a difference of more than 200m in altitude. If the plan is designed assuming a flat terrain, then fuel consumption costs could increase. An ideal planning requires to accurately model fuel consumption to distinguish between traversing roads uphill or downhill having different vehicle cargo levels.

In this research, we study the effect of road grades in the operational costs of a vehicle routing plan. In particular, we compare plans that assume flat terrain with others that consider a three-dimensional geography through a MILP model solved by a metaheuristic approach. We study the one-to-many distribution problem in the cities of Valparaíso and Santiago, Chile. We generate 20 families of instances, each with 10, 20, 50 and 100 geographically stratified customers over different altitudes within the city.

In Valparaíso, we report potential cost savings up to 13 % when road degrees are considered in the vehicle routing plan. Our results indicate that benefits are obtained by sacrificing distance travelled per route to use less inclined routes. Also, our solutions tend to increase the number of routes dispatched, so that vehicles climb steep roads carrying less weight. Finally, in our solutions is common to cluster customers over similar altitudes.

Keywords: Vehicle Routing Problem, Pollution Routing Problem, Emission Vehicle Routing, fuel consumption.

RESUMEN

El costo de transportar un producto, desde el abastecimiento de materia prima hasta la distribución del producto terminado al consumidor final, corresponde aproximadamente entre un 10 % y 20 % de su costo total final. Esto ha motivado el uso de la Investigación de Operaciones para reducir este costo. En la etapa de distribución final del producto, se han estudiado múltiples variantes del Problema de Ruteo de Vehículos, en inglés *Vehicles Routing Problem* (VRP).

Típicamente, la literatura especializada ha considerado que los vehículos se trasladan sobre un terreno plano y por ende, minimizar distancia recorrida minimiza costos de transporte. Sin embargo, en ciudades costeras como Valparaíso, Chile, puede haber clientes separados con una diferencia de más de 200m de altitud, lo que puede incrementar el consumo de combustible si se planifica en el plano. Por eso, una planificación debe modelar el consumo de combustible distinguiendo los viajes que son en subida, de los de bajada.

En esta investigación, estudiamos el efecto que tienen las pendientes de caminos en una red vial urbana sobre los costos operativos asociados a una planificación rutas vehiculares. En particular, comparamos planificaciones que asumen un terreno plano con otras que consideran una geografía tridimensional mediante un modelo de optimización que minimiza consumo de combustible y tiempo de viaje que resolvemos mediante metaheurísticas. Estudiamos el problema de distribución de un centro de distribución a muchos clientes en Valparaíso y Santiago, generando 20 familias de instancias con 10, 20, 50 y 100 clientes seleccionados en un muestreo estratificado por alturas.

En Valparaíso, obtenemos ahorros potenciales de costo de hasta 13 % al considerar pendientes en la planificación de rutas. Nuestros experimentos indican que los beneficios se obtienen diseñando rutas que evitan utilizar arcos con pendientes elevadas, recorriendo

más distancia que la mínima posible. Además, la cantidad de despachos tiende a aumentar, de manera que las rutas en subida transporten menos carga. Finalmente, observamos que nuestras soluciones tienden a formar rutas en donde clientes visitados sucesivamente poseen alturas similares.

Palabras Claves: Ruteo de vehículos, *Pollution Routing*, *Emission Vehicle Routing*, consumo de combustible.

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo introducimos nuestra investigación, que estudia considerar el efecto de pendientes sobre el consumo de combustible en una planificación de rutas vehiculares y está organizado en las siguientes secciones: en la sección 1.1 contextualizamos y motivamos el problema. En la sección 1.2 mencionamos el enfoque con el que abordaremos nuestra investigación. En la sección 1.3 mencionamos cuáles son los objetivos generales y específicos de esta tesis. En la sección 1.4 presentamos nuestras principales contribuciones. En la sección 1.5 mostramos cuáles son los alcances y en la sección 1.6 describimos la estructura del resto del documento.

1.1. Contexto y motivación del problema

El transporte está presente desde el abastecimiento de insumos de un producto, hasta su distribución. Generalmente el costo de transporte en la cadena de distribución del producto representa entre un 10 % y 20 % del costo final del producto. Esto motiva el uso de técnicas de investigación de operaciones para automatizar procesos y hacer planificaciones costo-eficientes, obteniendo ahorros entre 5 % y 20 % (Toth y Vigo, 2014).

En esta tesis estudiamos la distribución de un producto, la cual es modelada por una familia de problemas conocida como Problemas de Ruteo de Vehículos, en inglés: *Vehicles Routing Problem* (VRP). El VRP es un modelo fuertemente estudiado en la Ciencia del Transporte y Logística, en inglés *Transportation Science and Logistics* (TSL) (Toth y Vigo, 2014) y consiste en definir un conjunto de secuencias de visitas a clientes, *i.e.*, rutas, que inician y terminan en un centro de distribución (*depot*). Normalmente, estas rutas deben satisfacer una serie de restricciones, incluyendo la demanda por cliente, una capacidad máxima de carga y una duración máxima de ruta. El Problema del Vendedor Viajero, en inglés: *Travelling Salesperson Problem* (TSP) es un caso particular del VRP y busca diseñar una única ruta que visite a todos los clientes sin limitaciones de tiempo y

carga. El objetivo del VRP consiste en minimizar el costo total de operación dependiente de múltiples componentes tales como: distancia total recorrida en la planificación, tiempo total de viaje, cantidad de depachos ejecutados y cantidad de vehículos requeridos en el plan.

Planificar esta operación de distribución desde un depósito hacia un conjunto de localidades con gran variabilidad de altura impone una dificultad adicional: al momento de diseñar una ruta se debe considerar efectos de carga transportada, distancia recorrida y pendiente del camino seleccionado sobre el consumo de combustible. Barth, Younglove, y Scora (2005); y Barth y Boriboonsomsin (2009) proponen un modelo de consumo de combustible, que posteriormente es simplificado por Bektaş y Laporte (2011). Este modelo indica que el consumo de combustible (F) sigue la relación:

$$F = A\frac{d}{v} + Bdv^2 + Cd(c_r \cos(\theta) + \sin(\theta))(\mu + f), \quad (1.1)$$

que depende de constantes asociadas a un vehículo: A : diseño de motor; B : área frontal; C : eficiencia del motor; y μ : peso del vehículo sin carga. Depende además, de variables de operación: v : velocidad de operación en el tramo recorrido; d : distancia del tramo recorrido; θ : pendiente del tramo recorrido; y f : peso de la carga transportada en el tramo recorrido. Finalmente, la constante c_r incluye el efecto del roce.

El efecto de la pendiente θ sobre F en este modelo podría ser relevante en ciudades costeras o ciudades ubicadas entre montañas. Ejemplos de este tipo de ciudades son Valparaíso y Santiago, respectivamente. En Valparaíso, por ejemplo, hay puntos geográficos sobre una misma vía ubicados a nivel del mar y otros a 250 metros sobre el nivel del mar (ms.n.m.). En Santiago, hay potenciales destinos entre los 500 y 1000 m s.n.m. Las Figuras 1.1a y 1.1b ilustran el cambio de altura s.n.m. para un tramo de 5,6 kilómetros en Valparaíso y 22,7 kilómetros en Santiago, respectivamente.

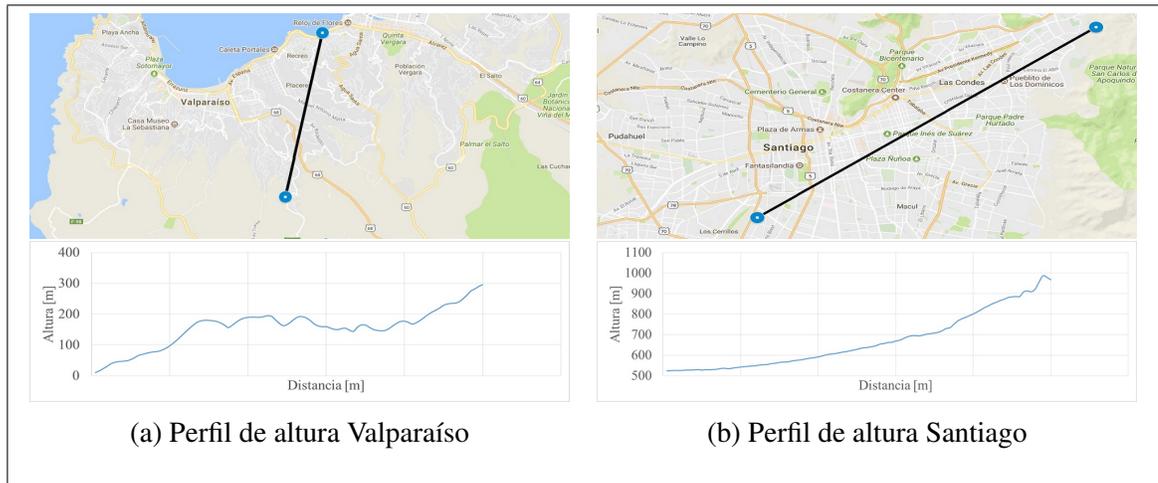


Figura 1.1. Perfil de altura de un tramo en Valparaíso y Santiago

El costo operacional de distribución podría ser significativamente mayor que el mínimo costo posible cuando no se planifica considerando el impacto de recorrer vías empinadas sobre el consumo de combustible. En este caso, una planificación de rutas vehiculares eficiente debe distinguir qué arcos de la red serán recorridos en bajada y qué arcos serán recorridos en subida a diferentes niveles de carga transportada. Intuitivamente, cuando un vehículo va cargado, se debiese evitar caminos en subida e intentar ir en bajada utilizando la fuerza de gravedad para reducir el consumo de combustible.

Trabajos recientes que han incorporado el efecto del consumo de combustible al minimizar costos operacionales en el VRP se han enfocado en el efecto de la velocidad de operación y presencia de congestión (Figliozzi, 2010; Bektaş y Laporte, 2011). En la literatura de problemas de ruteo en arcos, se ha considerado en el problema de barrido de nieve (Dussault, Golden, y Wasil, 2014) la restricción adicional de que arcos con pendientes elevadas no serán recorridos en subida al momento de minimizar la distancia total recorrida. Nuestro trabajo llena un vacío en la literatura especializada incorporando para el VRP el efecto que tienen las pendientes de caminos en la red vial sobre los costos operacionales.

A continuación, ilustramos el impacto de poseer vías empinadas sobre una planificación óptima que no considera el efecto de las pendientes sobre el costo. La Figura 1.2 presenta una instancia del VRP con un centro de distribución representado por el nodo 0 y dos clientes: nodos 1 y 2; cada uno está ubicado a d unidades de distancia del depósito y a ℓ unidades entre ellos, con $\ell \gg d$. El cliente 1 demanda una entrega de $q_1 > 0$ unidades de producto, mientras que el segundo cliente demanda $q_2 < q_1$ unidades. No hay restricción de capacidad máxima de carga por vehículo, pero el peso del vehículo, incluyendo su carga, afecta directamente sobre el consumo de combustible.

Existen dos posibles rutas que visitan a ambos clientes: $0 - 1 - 2 - 0$ y $0 - 2 - 1 - 0$. La Figura 1.2a ilustra la ruta $0 - 1 - 2 - 0$ que minimiza consumo de combustible si las tres ubicaciones están a la misma altura, *i.e.*, $\theta_a = 0$ donde θ_a es la pendiente de cada arco a en el grafo. La intuición es simple; el vehículo primero visita al cliente 1 liberándose de la carga más pesada y luego continúa semicargado para servir al cliente 2 y retornar al depósito. La ruta $0 - 2 - 1 - 0$ consumirá más combustible, pues recorre la misma distancia cargando en promedio mayor peso por distancia recorrida. Lo anterior ilustra el efecto de carga sobre el consumo de combustible generando rutas con diferentes costos por sentido.

Si estos caminos poseen pendientes elevadas, la solución óptima puede cambiar. La Figura 1.2b ilustra la ruta óptima cuando el cliente 1 está ubicado a una altura $h \gg 0$. En este caso, el arco $(0, 1)$ posee pendiente positiva ($\theta_{0,1} > 0$), mientras que $\theta_{1,2} < 0$. Para valores $d = 1$ km, $\ell = 3$ km, $q_1 = 8$ ton, $q_2 = 5$ ton, una velocidad de operación 30 km/hr y $h = 250$ metros, la ruta $0 - 1 - 2 - 0$ consume 12% más combustible que la ruta $0 - 2 - 1 - 0$.

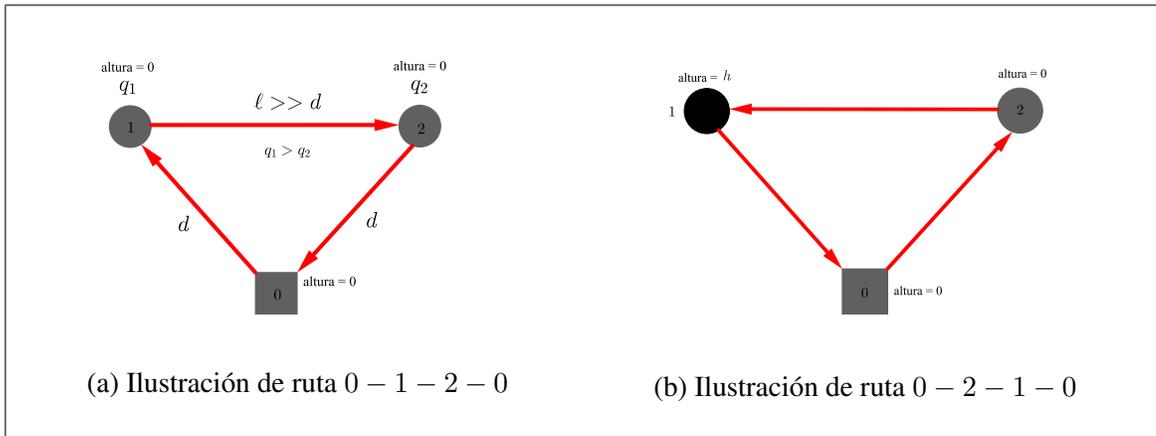


Figura 1.2. Impacto de poseer vías empinadas

El ejemplo anterior ilustra la importancia de considerar el efecto de pendientes sobre el consumo de combustible. La pregunta que surge del ejemplo anterior es para qué tipo de redes viales reales puede haber ahorros significativos de costo. En esta tesis respondemos a esa pregunta incorporando este efecto al planificar rutas sobre las ciudades de Valparaíso y Santiago. Para esto, formulamos una variante del VRP que minimiza costos operacionales incorporando consumo de combustible y tiempo total en ruta.

1.2. ¿Cómo abordamos el problema?

Resolver nuestro problema de forma exacta en problemas de gran tamaño puede ser poco práctico, pues el VRP y la mayoría de sus variantes son *NP-Hard* (Lenstra y Kan, 1981). Para instancias pequeñas con pocos clientes, se puede obtener soluciones óptimas, pero el tiempo de resolución del problema aumenta exponencialmente a medida que el número de clientes aumenta.

Lo anterior nos motiva a resolver el problema mediante una metaheurística de tres etapas: secuenciamiento inicial, *clustering* y *randomized adaptive neighborhood search* basadas en (Savelsbergh, 1985). Esto permite obtener buenas soluciones en un tiempo de planificación compatible con la operación.

Validamos nuestro algoritmo de solución en instancias simuladas computacionalmente sobre las redes viales de dos ciudades chilenas: Santiago y Valparaíso. En nuestros ejercicios preliminares consideramos flota homogénea y velocidad constante e idéntica en todos los arcos de la red. Tampoco suponemos que la velocidad de operación es una variable de decisión, pues en la práctica tiende a ser controlada por el conductor del vehículo. Finalmente, no consideramos efectos de congestión vehicular para aislar el efecto que tienen las pendientes en una planificación de rutas vehiculares.

1.3. Objetivos

El objetivo general de esta tesis es cuantificar el ahorro potencial en costos operacionales y consumo de combustible alcanzables si es que se planifican rutas considerando el efecto de las pendientes en comparación con una planificación que asume un terreno plano. En particular, definimos los siguientes objetivos específicos:

- Modelar una función de costos que represente adecuadamente el efecto de las pendientes sobre el consumo de combustible de un vehículo de carga.
- Formular un modelo de optimización que planifique rutas minimizando dicha función de costos.
- Diseñar un algoritmo metaheurística que resuelva el modelo de optimización para instancias de tamaño realista.
- Simular instancias computacionales que representen una operación de distribución sobre una red vial realista.
- Diseñar experimentos que permitan determinar empíricamente el ahorro potencial al incluir pendientes en la planificación de rutas.
- Comprender las características comunes en las instancias que logran los mayores ahorros en costo.

1.4. Principales contribuciones

Planteamos un modelo de optimización multiobjetivo que incorpora: (i) el efecto de poseer vías empinadas sobre el consumo de combustible al momento de planificar rutas; y (ii) el costo asociado al tiempo de viaje requerido en la solución.

Verificamos empíricamente que la inclusión de pendientes viales en una planificación de rutas puede permitir ahorros promedio de 3,4 % en ciudades con geografía similar a la de Valparaíso, pudiendo llegar a obtener hasta un 13 % en algunas instancias. Para Santiago, empíricamente obtenemos ahorros promedios cercanos al 1 %. De nuestros resultados, observamos que en planificaciones de rutas que consideren el efecto de las pendientes, los primeros clientes en ser visitados por una ruta son accedidos utilizando arcos de baja o nula pendiente positiva, mientras que los arcos utilizados para visitar a los clientes finales de la ruta tienden a poseer pendientes elevadas. Esta solución es costo-eficiente, pues al comienzo de la ruta el vehículo va más cargado y un uso de vías empinadas consume mayor combustible en comparación con el término de la ruta. A medida que los clientes son atendidos el vehículo pierde peso, hasta un punto en que el incremento marginal de consumo de combustible al utilizar una vía empinada es menor al de ocupar una vía alternativa con mayor distancia recorrida con menor pendiente. Un efecto contrario sería observado si el vehículo, en vez de entregar carga a clientes, recibiera carga desde ellos (*pickup*).

Nuestros resultados además indican que planificaciones que consideran pendientes, tienden a realizar más rutas con menos carga transportada al compararse con planes que asumen un terreno plano.

1.5. Alcances

Estudiamos sistemas de distribución de un centro de distribución a muchos clientes.

Para simplificar el problema a resolver, consideramos una flota de vehículos homogénea; no consideramos restricciones de máxima duración de rutas; ni tampoco ventanas de tiempo de atención al cliente.

Por simplicidad, suponemos que todos los arcos de la red se recorren a la misma velocidad operacional, independiente de la pendiente y nivel de carga transportada en el arco.

Obtenemos soluciones mediante metaheurísticas, por lo que no garantizamos optimalidad en nuestras soluciones, aunque sí validamos nuestro procedimiento contra métodos exactos.

Estudiamos dos ejemplos de logística urbana con datos georreferenciados de las ciudades de Santiago y Valparaíso. En estos ejemplos, asumimos que las demandas de cada cliente son conocidas.

1.6. Estructura de la tesis

Lo que resta de esta tesis está ordenado de la siguiente manera. En el capítulo 2, revisamos investigación relevante al VRP y a modelos de consumo de combustible en la literatura científica. En el capítulo 3, formulamos un modelo de optimización que planifica rutas de vehículos considerando el efecto de pendientes presentando sus supuestos, parámetros, variables de decisión, restricciones y función objetivo. En el capítulo 4 presentamos el método de solución para el modelo formulado, junto con una validación del algoritmo empleado. En el capítulo 5 presentamos los principales resultados para los casos de estudio de Valparaíso y Santiago. Finalmente, en el capítulo 6 presentamos las conclusiones de nuestro trabajo y sus posibles extensiones futuras.

CAPÍTULO 2. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

En este capítulo, presentamos una revisión bibliográfica organizada en cinco secciones. En la sección 2.1, revisamos dos modelos de consumo de combustible utilizados para estudiar la emisión de contaminantes para vehículos de carga. En la sección 2.2, revisamos el Problema de Ruteo de Vehículos y mencionamos algunas de sus extensiones. En la sección 2.3 presentamos una clasificación de los Problemas de Ruteo de Vehículos que incluyen minimizar consumo de combustible en su objetivo. En la sección 2.4 presentamos un problema de ruteo en arcos que ha considerado el efecto de pendientes en los arcos. Finalmente, en la sección 2.5 clasificamos modelos recientes de planificación de rutas con minimización de consumo de combustible presentes en la literatura.

2.1. Modelos de consumo de combustible

El consumo de combustible está directamente relacionado con la emisión de contaminantes. Ciudades pobladas y con alta tasa de vehículos motorizados pueden tener serios problemas de contaminación. Al incluir transporte terrestre de carga la situación empeora. Esto ha motivado la necesidad de modelar el consumo de combustible de vehículos, permitiendo generar desde políticas públicas hasta decisiones de privados que han permitido disminuir la contaminación y generar ahorros económicos. Ejemplos de políticas públicas son: restricción vehicular, límites de velocidad máxima y programación de semáforos (Stevanovic, Stevanovic, Zhang, y Batterman, 2009; Asadi y Vahidi, 2011). Ejemplos de decisiones de privados son: velocidad de operación de un sistema, niveles de carga transportada y tipo de flota a utilizar.

a. Modelo U.K. Transport Research Laboratory 1999

Este modelo, planteado por Hickman, Hassel, Joumard, Samaras, y Sorenson (1999), relaciona la emisión de contaminantes de un vehículo E medida en kg de CO₂ con la velocidad de operación (v) y la distancia recorrida (d). La ecuación (2.1) ilustra esta relación.

$$E = \left(\alpha_0 + \alpha_1 v + \alpha_2 v^3 + \alpha_3 \frac{1}{v^2} \right) d \quad (2.1)$$

Donde α_i , $i \in \{0, \dots, 3\}$ son coeficientes asociados al tipo de vehículo. Su principal limitación es que solo considera efectos como función de la velocidad y distancia recorrida. No incorpora otros efectos relevantes como el peso transportado y las pendientes del camino.

b. Modelo de Barth y Boriboonsomsin

El modelo de consumo de combustible propuesto por Barth et al. (2005); Barth y Boriboonsomsin (2009), establece que el poder de tracción, que es la fuerza necesaria para poner en movimiento un vehículo, $P_{tractive}$ (kW) sigue la siguiente relación:

$$P_{tractive} = \frac{(M(g \cdot \sin(\theta) + g \cdot C_r \cdot \cos(\theta) + a) + 0,5 \cdot C_d \cdot A \cdot \rho \cdot v^2)v}{1000} \quad (2.2)$$

Donde M es la masa del vehículo (kg), v la velocidad (m/s), a la aceleración (m/s²), g aceleración de gravedad (9,81 m/s²), θ el ángulo de la vía (grados), C_d el coeficiente de arrastre, A el área frontal del vehículo (m²), ρ densidad del aire (kg/m³) y C_r el coeficiente de roce.

La potencia que necesita el motor del vehículo (P_{engine}) para realizar la tracción sigue la siguiente relación:

$$P_{engine} = \frac{P_{tractive}}{\eta_{tf}} + P_{acc} \quad (2.3)$$

Donde η_{tf} es la eficiencia de transmisión y P_{acc} es potencia necesaria por el motor para hacer funcionar ciertos accesorios del vehículo, como por ejemplo el aire acondicionado.

La tasa de consumo de combustible se relaciona con P_{engine} de la siguiente manera

$$\frac{dF}{dt} \approx \lambda \left(kNV + \frac{P_{engine}}{\eta_{engine}} \right) \quad (2.4)$$

Donde λ es la razón entre combustible y aire para que ocurra combustión, k el factor de fricción del motor, N es la velocidad del motor, V es el desplazamiento del motor y η_{engine} es la eficiencia del motor.

Al simplificar el modelo anterior y asumir que los parámetros relevantes se mantienen constantes al recorrer con el vehículo un camino de largo d , el consumo de combustible F en el arco será:

$$F = \lambda \left(kNV + \frac{P_{engine}}{\eta_{engine}} \right) \cdot \frac{d}{v} \quad (2.5)$$

Como la velocidad es constante en el arco utilizado, en la ecuación (2.2) fijamos la aceleración $a = 0$. Por simplicidad, despreciamos el gasto en consumo de combustible por aire acondicionado u otros efectos similares. Por lo que en la ecuación (2.3) fijamos $P_{acc} = 0$. Luego, el consumo de combustible en un arco de largo d se expresa como:

$$F = \lambda \left(kNV + \frac{(M(g \cdot \sin(\theta) + g \cdot C_r \cdot \cos(\theta)) + 0,5 \cdot C_d \cdot A \cdot \rho \cdot v^2)v}{1000\eta_{tf}\eta_{engine}} \right) \cdot \frac{d}{v} \quad (2.6)$$

La expresión (2.6) es similar a la planteada por Bektaş y Laporte (2011)

$$F = \lambda \left(kNV \frac{d}{v} + M\gamma\alpha d + \beta\gamma dv^2 \right) \quad (2.7)$$

Donde $\gamma = 1/1000\eta_{t,f}\eta_{engine}$, $\alpha = g(\sin(\theta) + C_r\cos(\theta))$ y $\beta = 0,5C_dA\rho$

Este modelo de consumo de combustible incorpora múltiples efectos, como la velocidad de operación, nivel de carga transportada, distancia recorrida y pendientes del camino. Sin embargo, requiere estimar más parámetros que no siempre son conocidos.

2.2. Problema de ruteo de vehículos

El Problema de Ruteo de Vehículos, en inglés: *Vehicles Routing Problem* (VRP) es un modelo clásico dentro de la Ciencia del Transporte y Logística, y consiste en definir un conjunto de secuencias de visitas a clientes, *i.e.*, rutas, que inician y terminan en un centro de distribución (*depot*). Normalmente se exige que estas rutas cumplan restricciones de demanda requerida por cliente, capacidad máxima de carga del vehículo y duración máxima de ruta, entre otros.

La primera formulación del problema de ruteo de vehículos se reporta en el trabajo seminal de Dantzig y Ramser (1959). Presenta un VRP aplicado a un problema de distribución de combustible a múltiples estaciones de servicio. Considera un único depósito y una flota de vehículos homogénea, buscando minimizar la distancia total recorrida de la planificación de rutas.

Extensiones del VRP consideran: múltiples depósitos, dando la posibilidad de que una ruta no comience ni termine necesariamente en el mismo punto; ventanas de tiempo, imponiendo una restricción sobre el horario de atención al cliente (Solomon, 1987); costos de arcos dependientes del tiempo, para incorporar efectos asociados a congestión vehicular (Desaulniers, Lavigne, y Soumis, 1998); flota de vehículos heterogénea con distinta

capacidad de carga máxima; entre otros. Estas extensiones y otras son descritas en Toth y Vigo (2014).

2.3. VRP con objetivo de minimizar emisión de contaminantes

En esta sección clasificamos los problemas de ruteo de vehículos que minimizan emisiones de contaminantes. Esta clasificación considera: uso de vehículos que utilicen combustibles alternativos y modelos que incorporen directamente una función de consumo de combustible. Dentro de los modelos que consideran una función de consumo de combustible encontramos: dependencia de la velocidad en el tiempo para representar congestión; flota heterogénea de vehículos; y un enfoque estadístico en asignación de rutas para minimización de consumo de combustible.

a. Flota de vehículos que utilizan combustibles alternativos

Erdoğan y Miller-Hooks (2012) plantean un modelo VRP que tiene como objetivo minimizar el costo por distancia total recorrida. En el problema solo se considera una flota de vehículos que utilice combustibles alternativos, en inglés: *Alternative Fuel Vehicle fleet*. Típicamente, estos vehículos poseen baja autonomía. Se estudia el valor de incluir nodos adicionales en la red que representan puntos de recarga de combustible, permitiendo visitar a más clientes en una misma ruta.

b. Modelos VRP que minimizan una función de emisión de contaminantes

Minimizar una función de emisión de contaminantes para vehículos que utilicen combustibles convencionales ha sido otra línea de investigación en problemas VRP. La función de emisión de contaminantes o de consumo de combustible puede depender de variables como la velocidad, carga, distancia, entre otras. Estas variables son optimizadas en cada

arco de las rutas utilizadas de modo de minimizar la emisión de contaminantes o consumo de combustible.

Kuo y Wang (2011) proponen un modelo que calcula el consumo de combustible en función de la velocidad y carga para distintos planes de rutas. Con este modelo, pueden minimizar el consumo de combustible para una planificación dada por medio de la velocidad de operación.

Los distintos planes de rutas optimizados según consumo de combustible, son comparados con el plan que minimiza la distancia total recorrida. Los autores determinan que el objetivo de minimizar distancia total recorrida, no implica minimizar consumo de combustible.

Figliozzi (2010) presenta el *Emission Vehicle Routing Problem* (EVRP) que tiene como objetivos: minimización de flota de vehículos; minimización de distancia total recorrida y duración de rutas; y minimización de emisión de contaminantes. Utiliza la función de emisión de contaminantes dada por la ecuación (2.1), siendo uno de los primeros modelos que planifica rutas con un objetivo de minimización que incluye emisión de contaminantes.

El EVRP considera el efecto de la congestión al momento de planificar rutas, incluyendo la posibilidad de detener vehículos en nodos para evitar congestión. Debido a que el modelo se presenta como uno multiobjetivo, el enfoque de solución es jerárquico. En primer lugar se resuelve el problema de tamaño óptimo de la flota mediante un modelo VRP con ventanas de tiempo. En segundo lugar, reduce mediante un algoritmo la emisión de contaminantes del plan en el primer punto. Este algoritmo permite modificar la planificación original, pero no permite aumentar el tamaño de flota.

Como resultado preliminar, el autor obtiene importantes disminuciones en emisión de contaminantes en momentos de congestión. Además, reporta que logra estas disminuciones sin aumentar de manera considerable el objetivo de distancia total recorrida y duración de las rutas de la planificación vehicular.

Bektaş y Laporte (2011) proponen el *Pollution Routing Problem* (PRP) y lo formulan como un modelo lineal entero-mixto. Como objetivo, minimiza el tiempo total recorrido y el consumo de combustible de la flota utilizando la ecuación (2.7), por lo que considera efectos de la carga y de la velocidad en la planificación. Este trabajo considera que la velocidad del vehículo en cada arco es una variable de decisión a optimizar. Los resultados de este modelo se comparan con un modelo que: solo considera tiempo en ruta; solo considera consumo de combustible y sin optimizar velocidad en cada arco, llegando a ahorros en costo de 8 % con respecto al modelo que solo minimiza consumo de combustible.

Demir, Bektaş, y Laporte (2012) desarrollan una heurística para resolver el PRP de manera más eficiente. Utilizan un *adaptive large neighborhood search* de dos etapas. En la primera etapa construyen soluciones de ruteo que mejoran localmente. La mejora local consiste de dos pasos: el primer paso decide qué nodos serán removidos de la planificación actual en base a algún criterio. En el segundo paso, se decide en base a algún criterio, dónde se insertarán los nodos que fueron previamente removidos. En la segunda etapa de la heurística, optimizan la velocidad en cada arco utilizado por cada ruta. Demir, Bektaş, y Laporte (2014) estudian el PRP como un problema bi-objetivo buscando soluciones que no estén dominadas por el efecto de tiempo en ruta o consumo de combustible. Una alternativa que proponen es minimizar alguno de los dos objetivos, por ejemplo consumo de combustible pero incluyendo una restricción adicional de duración máxima de rutas. Dabia, Demir, y Van Woensel (2014) resuelven el PRP de manera exacta mediante *branch-and-price* llegando a resolver a optimalidad instancias simuladas de 100 clientes.

c. Dependencia de la velocidad en el tiempo

Jabali, Van Woensel, y De Kok (2012) plantean un modelo VRP que minimiza una suma ponderada del costo asociado al tiempo en ruta y emisión de contaminantes. Ocupan la función de emisión de contaminantes (2.1).

Este trabajo considera el efecto de la congestión, definiendo dos períodos: flujo libre y congestión. Estos dos períodos definen dos velocidades: velocidad a flujo libre (v_f) y velocidad en congestión (v_c). La velocidad en congestión es fija, mientras que la velocidad a flujo libre es una variable de decisión del modelo. La Figura 2.1a ilustra el perfil de velocidades para un arco dado, mientras que la Figura 2.1b ilustra el tiempo de viaje (TV) en el arco, como función de la velocidad, como una función continua que cumple la propiedad FIFO (*first-in, first-out*).

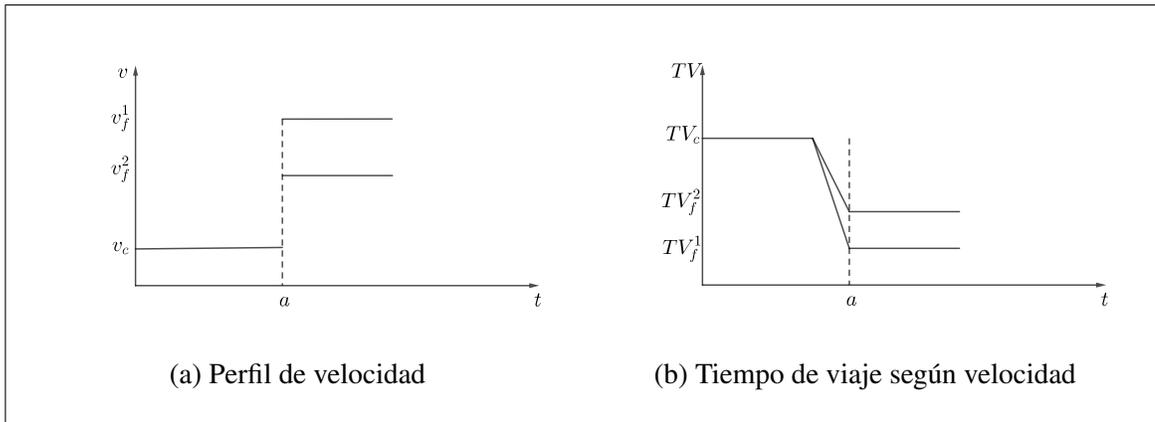


Figura 2.1. Dependencia de la velocidad en el tiempo

El trabajo de Franceschetti, Honhon, Van Woensel, Bektaş, y Laporte (2013) formula el *time-dependent* PRP (TDPRP), que corresponde a una extensión del PRP que optimiza la velocidad solo en períodos de flujo libre. A diferencia del trabajo de Jabali et al. (2012), este trabajo considera el efecto de la carga en el vehículo para calcular el consumo de combustible. Concluyen que en ocasiones es conveniente esperar en el depósito o en nodos para reducir costos de consumo de combustible.

Qian y Eglese (2016) formulan un modelo que decide rutas y optimiza velocidad de cada arco con el objetivo de minimizar emisiones de CO₂, resolviendo el problema mediante generación de columnas. Prueban el modelo con datos de tráfico reales de Londres, reduciendo en promedio un 3 % las emisiones con respecto al modelo que solo minimiza distancia. Además, concluyen que el problema que minimiza distancia, entrega un buen secuenciamiento de visitas a clientes para el problema de minimización de emisiones.

d. Flota heterogénea

Kopfer, Schönberger, y Kopfer (2014) proponen un modelo VRP que minimiza el consumo de combustible considerando flota heterogénea. Modelan el consumo de combustible exclusivamente como función de parámetros específicos de cada vehículo, distancia recorrida y carga transportada. Utilizan datos simulados para probar el desempeño de su modelo, con respecto al VRP que minimiza distancia total recorrida. Concluyen que realizar una planificación con flota heterogénea reduce significativamente la emisión de contaminantes. Koç, Bektaş, Jabali, y Laporte (2014) extienden el PRP a flota heterogénea, considerando efectos de carga, velocidad y distancia en la función de consumo de combustible. Prueban su modelo con datos de distancias reales del Reino Unido, obteniendo reducciones importantes en costos.

e. Trabajos que agrupan características anteriores

Los trabajos recientes más completos son Ehmke, Campbell, y Thomas (2016); Xiao y Konak (2016) donde han integrado dependencia del tiempo con flota heterogénea obteniendo mejoras con respecto a modelos anteriores.

Ehmke et al. (2016) incluyen además, el efecto del *pickup* en la planificación de rutas. Utilizan datos de velocidad de Stuttgart, Alemania por lo que no consideran la velocidad como variable a optimizar. Reportan que cuando se trata de un problema de *pickup* las

rutas no necesariamente se invierten, debido a las condiciones de tráfico. Xiao y Konak (2016) consideran la velocidad de operación como una variable a optimizar.

f. Enfoque estadístico sin decidir rutas

Velázquez-Martínez, Fransoo, Blanco, y Valenzuela-Ocaña (2016) proponen un modelo estadístico que como primera etapa asocia tipos de vehículos a zonas geográficas determinadas buscando un mejor desempeño del vehículo. La segunda etapa corresponde a un modelo matemático que asigna vehículos a rutas previamente establecidas, de modo de minimizar consumo de combustible dado por la ecuación (2.7).

En este trabajo se considera el efecto de las pendientes de una manera agregada para definir las zonas geográficas que luego se le asignan tipos de camiones. Sin embargo, no se considera el efecto pendientes a la hora de planificar rutas.

2.4. Ruteo por arcos en el problema de barrido de nieve

Dentro de la literatura de ruteo por arcos, se ha considerado tratar de manera diferente los arcos con pendiente en subida. Dussault, Golden, Groër, y Wasil (2013); Dussault et al. (2014) plantean el problema de barrido de nieve, en que cada vehículo, por restricciones técnicas, debe evitar arcos con elevada pendiente positiva y favorecer aquellos en bajada.

2.5. Clasificación de trabajos previos

En base a la literatura revisada, no encontramos trabajos que incorporen completamente el efecto de pendientes sobre el consumo de combustible al momento de decidir rutas.

La Tabla 2.1 clasifica los trabajos sobre emisiones de contaminantes revisados considerando las siguientes categorías: optimización de velocidad en arcos de ruta utilizados (Opt.

vel.); consideración de efecto carga sobre el consumo de combustible (Carga); consideración de pendientes en el consumo de combustible (Pendiente); dependencia de la velocidad en el tiempo (Depend. del tiempo); uso de flota heterogénea (Flota Heterogénea); diseño optimizado de rutas (Ruteo); y si es resuelto por un algoritmo exacto (Optimalidad).

Tabla 2.1. Principales trabajos revisados.

Referencia	Opt. vel.	Carga	Pendiente	Depend. del tiempo	Flota Heterogénea	Ruteo	Optimalidad
Figliozzi (2010)	✓			✓		✓	
Bektaş y Laporte (2011)	✓	✓				✓	
Kuo y Wang (2011)	✓	✓					
Erdoğan y Miller-Hooks (2012)						✓	
Demir et al. (2012)	✓	✓				✓	
Jabali et al. (2012)	✓			✓		✓	
Franceschetti et al. (2013)	✓	✓		✓		✓	
Demir et al. (2014)	✓	✓				✓	
Dabia et al. (2014)	✓	✓				✓	✓
Kopfer et al. (2014)		✓			✓	✓	
Koç et al. (2014)	✓	✓			✓	✓	
Dussault et al. (2014)			✓			✓	
Velázquez-Martínez et al. (2016)	✓	✓	✓		✓		
Ehmke et al. (2016)		✓		✓	✓	✓	
Xiao y Konak (2016)		✓		✓	✓	✓	
Qian y Eglese (2016)	✓			✓		✓	✓

CAPÍTULO 3. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

En este capítulo, presentamos un modelo de optimización que planifica rutas que minimizan el costo operacional de una operación de distribución dependiente del consumo de combustible y tiempo total de vehículos en ruta. En la sección 3.1, presentamos los supuestos del modelo. En la sección 3.2, identificamos cuáles son los parámetros requeridos por el modelo. En la sección 3.3, definimos cuáles son las variables de decisión del modelo y su naturaleza. En la sección 3.4, formulamos el modelo de optimización que finalmente es validado en la sección 4.3 resolviendo una instancia de 12 clientes a optimalidad.

3.1. Supuestos

Nuestro modelo asume lo siguiente:

- Velocidad constante por arco. Se asume además que la velocidad no es una variable de decisión y está definida de antemano.
- Un vehículo puede realizar un máximo de dos despachos desde el depósito durante el horizonte de operación en instantes de tiempo fijos $t \in \{1, 2\}$. Este supuesto puede representar una política de instantes de despacho de un operador logístico.
- No hay restricciones de duración de ruta. Esto implica que la jornada laboral no tiene límite de tiempo.
- Cada cliente debe ser visitado una sola vez. Esto fuerza a que la capacidad máxima de carga de los vehículos sea mayor o igual que la máxima cantidad demandada.
- No se permiten esperas una vez concluido el tiempo de servicio en el cliente. Al tener tiempos de viaje constantes por arco, este supuesto es sin pérdida de optimalidad.
- La pendiente de cada arco se calcula mediante la diferencia de cotas de altura entre el inicio y el final del arco. Esto asume que la pendiente es constante en cada

arco de la red. Trabajando con una red vial densa, este supuesto no debería inducir mayores errores.

En el Anexo A presentamos una extensión a este modelo que considera tres períodos horarios para modelar congestión.

3.2. Parámetros

Consideramos un grafo completo dirigido $G = (N_0, A)$, dados los siguientes conjuntos:

- Conjunto de clientes $N = \{1, 2, \dots, n\}$.
- Conjunto de clientes más depósito $N_0 = N \cup \{0\}$.
- Conjunto de arcos $A = \{(i, j) \in N_0 \times N_0 : i \neq j\}$.

Datos de los clientes:

- Demanda de cliente i : q_i [kg] $\forall i \in N$ con $q_0 = 0$.
- Tiempo que toma el servicio del cliente i : h_i [s] $\forall i \in N$ con $h_0 = 0$.

Datos por arco:

- Distancia del arco (i, j) : d_{ij} [m], $\forall (i, j) \in A$.
- Velocidad del arco (i, j) : v_{ij} [m/s], $\forall (i, j) \in A$.

Adicionalmente, el costo por unidad de combustible es p_c , el costo por unidad de tiempo en ruta es p_d .

Además, para la flota de vehículos definimos los siguientes parámetros:

- K : conjunto de vehículos disponibles en la flota.

- Q : capacidad máxima de carga de los vehículos.

Instantes de tiempo relevantes:

- T^1 : instante de tiempo en que se realiza el primer despacho.
- T^2 : instante de tiempo en que se realiza el segundo despacho.
- T^P : Horizonte temporal de planificación vehicular.

3.3. Variables de decisión

x_{ij}^{kt} : Variable binaria que toma el valor 1 si el vehículo $k \in K$ despachado en $t \in \{1, 2\}$ utiliza el arco $(i, j) \in A$. Toma el valor 0 en caso contrario.

f_{ij}^{kt} : Variable no-negativa que representa la carga transportada del vehículo $k \in K$ despachado en $t \in \{1, 2\}$ al momento de pasar por el arco $(i, j) \in A$.

w_{ij}^{kt} : Variable no-negativa que representa el instante en que el vehículo $k \in K$ despachado en $t \in \{1, 2\}$ utiliza el arco $(i, j) \in A$.

s^{kt} : Variable no-negativa que representa el tiempo total de la ruta del vehículo $k \in K$ despachado en $t \in \{1, 2\}$

z_k : Variable binaria que toma el valor 1 si el vehículo $k \in K$ puede realizar un segundo despacho. Toma el valor 0 en caso contrario.

g_{ij} : Variable no-negativa que representa el consumo de combustible en el arco $(i, j) \in A$.

3.4. Modelo de optimización

La función objetivo del modelo en la ecuación (3.1) considera dos componentes. La primera componente corresponde al consumo total de combustible; mientras que la segunda componente corresponde al tiempo total en ruta de los vehículos.

$$\min \sum_{(i,j) \in A} p_c \cdot g_{ij} + \sum_{t=1}^2 \sum_{k \in K} p_d \cdot s^{kt} \quad (3.1)$$

Las restricciones del modelo son las siguientes:

$$\sum_{j \in N} x_{0j}^{k1} \leq 1 \quad \forall k \in K \quad (3.2)$$

$$\sum_{j \in N} x_{0j}^{k2} = z_k \quad \forall k \in K \quad (3.3)$$

$$z_k \leq \sum_{j \in N} x_{0j}^{k1} \quad \forall k \in K \quad (3.4)$$

$$\sum_{t=1}^2 \sum_{k \in K} \sum_{j \in N} x_{ij}^{kt} = 1 \quad \forall i \in N \quad (3.5)$$

$$\sum_{j \in N} x_{ij}^{kt} = \sum_{j \in N} x_{ji}^{kt} \quad \forall i \in N_0, \forall k \in K, \forall t \in \{1, 2\} \quad (3.6)$$

$$x_{ij}^{k2} \leq z_k \quad \forall (i, j) \in A, \forall k \in K \quad (3.7)$$

$$\sum_{t=1}^2 \sum_{k \in K} \sum_{j \in N} f_{ji}^{kt} - \sum_{t=1}^2 \sum_{k \in K} \sum_{j \in N} f_{ji}^{kt} = q_i \quad \forall i \in N_0 \quad (3.8)$$

$$q_j x_{ij}^{kt} \leq f_{ij}^{kt} \leq (Q - q_i) x_{ij}^{kt} \quad \forall (i, j) \in A, \forall k \in K, \forall t \in \{1, 2\} \quad (3.9)$$

$$\sum_{t=1}^2 \sum_{k \in K} \sum_{j \in N} w_{ij}^{kt} = \sum_{t=1}^2 \sum_{k \in K} \sum_{j \in N} \left(w_{ji}^{kt} + \frac{d_{ji}}{v_{ji}} x_{ji}^{kt} \right) + h_i \quad \forall i \in N_0 \quad (3.10)$$

$$s^{kt} = \sum_{(i,j) \in A} \left(\frac{d_{ij}}{v_{ij}} + h_i \right) x_{ij}^{kt} \quad \forall k \in K, \forall t \in \{1, 2\} \quad (3.11)$$

$$s^{k1} \leq T^2 + (1 - z_k)(T^P - T^2) \quad \forall k \in K \quad (3.12)$$

$$s^{k2} \leq T^P - T^2 \quad \forall k \in K \quad (3.13)$$

$$g_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A \quad (3.14)$$

$$g_{ij} \geq \sum_{t=1}^2 \sum_{k \in K} A_{ij}^k \frac{d_{ij}}{v_{ij}} x_{ij}^{kt} + B_{ij}^k (\mu^k x_{ij}^{kt} + f_{ij}^{kt}) + C_{ij}^k v_{ij}^2 d_{ij} x_{ij}^{kt} \quad \forall (i, j) \in A \quad (3.15)$$

El conjunto de restricciones (3.2) impone que un vehículo puede salir máximo una vez del depósito durante el primer instante de despacho. El conjunto de restricciones (3.3) es análogo para el caso del segundo despacho. El conjunto de restricciones (3.4) impone que vehículos despachados durante el segundo instante de despacho, hayan sido despachados durante el primer instante.

El conjunto de restricciones (3.5) impone que todos los clientes sean visitados exactamente una vez. El conjunto de restricciones (3.6) impone que el vehículo que sale de un cliente, haya sido el mismo que lo visitó. El conjunto de restricciones (3.7) impone que vehículos que no puedan realizar un segundo despacho, no sean asignados a rutas presentes en el segundo instante de despacho.

El conjunto de restricciones (3.8) impone que la demanda de cada cliente sea satisfecha. El conjunto de restricciones (3.9) indica que el flujo de carga transportado por un arco es factible en términos de restricciones de capacidad de carga.

El conjunto de restricciones (3.10) impone que el instante de salida desde un nodo cliente, es igual al instante en que se llegó a ese cliente más el tiempo de atención de dicho cliente. El conjunto de restricciones (3.11) calcula la duración de rutas. El conjunto de

restricciones (3.12) controla qué vehículos pueden realizar un segundo despacho. El conjunto de restricciones (3.13) mantiene la duración de rutas realizadas durante el segundo instante de despacho dentro del horizonte de planificación.

Finalmente, el conjunto de restricciones (3.14) y (3.15) calculan el consumo de combustible para cada arco. La naturaleza de variables es incluida al momento de definir las.

3.5. Validación en instancia pequeña

A continuación, resolvemos una instancia de 12 clientes ilustrada por la Figura 3.1. Con este ejemplo, presentamos las limitaciones de resolver directamente mediante el modelo de optimización el problema de planificación de rutas. Existen 5 niveles de altura en esta instancia: 0, 30, 100, 150 y 200 metros que están representados por una escala de grises. La demanda de cada cliente es 1 tonelada, la velocidad en cada arco es 40 km/hr y la capacidad de carga de los vehículos es 4 toneladas. En este ejemplo, asumimos que existe un camino en línea recta que une a cada par de nodos, por lo que consideramos distancia euclidiana tridimensional. Ocupamos $p_c = 500 \text{ \$/L}$ y $p_d = 0,7 \text{ \$/s}$, estos parámetros son escalados para ser aplicados en Chile, manteniendo la razón p_c/p_d presentada en Bektaş y Laporte (2011).

Las Figuras 3.2a y 3.2b ilustran una planificación óptima de rutas en el plano y considerando pendientes, respectivamente. En la planificación que considera pendientes observamos dos efectos. El primer efecto corresponde a invertir el sentido de la ruta $0 - 1 - 2 - 3 - 4 - 0$, permitiendo visitar al cliente de mayor altura (2) con menor carga en el vehículo. El segundo efecto, es un reordenamiento de la ruta $0 - 5 - 6 - 7 - 8 - 0$. Este reordenamiento de visitas permite agrupar a clientes de alturas similares, produciendo un ahorro en consumo de combustible.

La planificación de rutas en el plano consume 7,87 litros de combustible y en total recorre 26,9 km. Mientras que la planificación de rutas con pendientes, consume 7,13

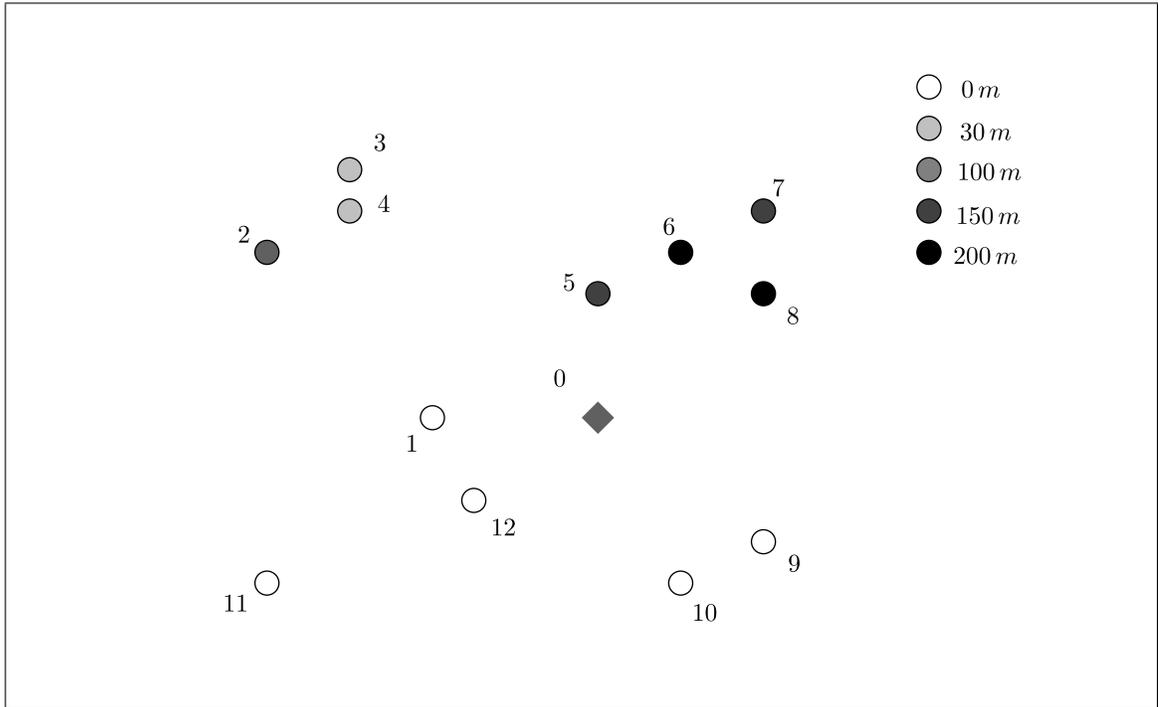
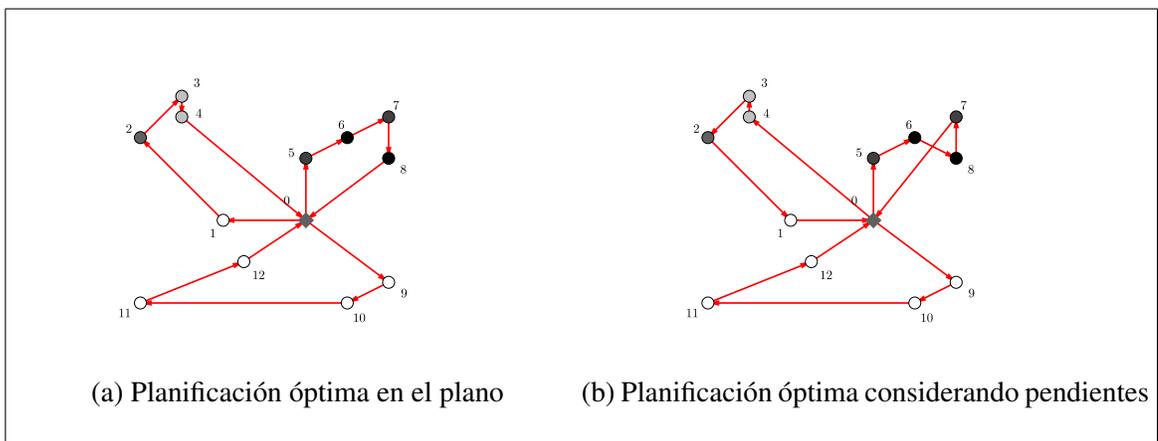


Figura 3.1. Instancia de 12 clientes



(a) Planificación óptima en el plano

(b) Planificación óptima considerando pendientes

Figura 3.2. Planificación óptima de rutas para instancia de 12 clientes

litros de combustible y recorre en total 27,4 km. El costo de la planificación en el plano es de \$ 6.393, mientras que el costo de la planificación con pendientes es de \$ 6.052. De este modo, el ahorro en costos operacionales al considerar pendientes es de 5,3 %.

Este experimento fue realizado con un procesador Intel i5-4210U de 1.7 GHz. La memoria RAM disponible fue de 8 GB y el solver de optimización utilizado fue Gurobi 7.0.2. El tiempo de resolución para la planificación de rutas en el plano fue de 1,1 horas, mientras que la planificación de rutas que considera pendientes tardó 7,5 horas. Este tiempo nos motiva a buscar otro enfoque de solución para la planificación de rutas.

CAPÍTULO 4. ALGORITMO DE SOLUCIÓN

Debido a los altos tiempos de solución de nuestro modelo de optimización exacto, optamos por una solución heurística. En la sección 4.1 presentamos la primera etapa del algoritmo que corresponde a realizar un secuenciamiento de visitas a todos los clientes en una sola ruta. En la sección 4.2 presentamos la segunda y tercera etapa del algoritmo que corresponde a particionar de manera óptima el secuenciamiento de clientes en rutas que respeten la restricción de capacidad del vehículo y posterior búsqueda local inter-rutas. En la sección 4.3 validamos empíricamente nuestra heurística sobre un conjunto de 20 instancias de VRP con tamaño variable entre 32 y 65 clientes con demandas y localización aleatorias.

4.1. Secuenciamiento de visitas a clientes

Comenzamos con un ciclo que visita a todos los clientes. Este puede ser aleatorio o del tipo *farthest insertion* (Golden, Bodin, Doyle, y Stewart Jr, 1980). A partir del ciclo inicial, realizamos movimientos de búsqueda local 2-opt, OR-opt y *switch* (Savelsbergh, 1985) adaptados a nuestro problema. Incluimos eliminación y reconstrucción parcial aleatoria de una fracción p del ciclo para evitar óptimos locales. Este tamaño irá aumentando desde un porcentaje inicial p_0 mientras no se encuentren mejoras hasta un límite definido por p^* .

Una vez que se elimina el segmento de ruta, los nodos que quedaron desconectados se vuelven a unir aleatoriamente. La Figura 4.1 ejemplifica cómo funciona la eliminación y reconstrucción parcial de la solución. El algoritmo en *pseudocódigo* está definido a continuación.

Algoritmo 1: Secuenciamiento de nodos

```
1 Encontrar solución inicial (aleatoria o farthest insertion);
2 while  $p < p^*$  do
3   while  $n < N^{IT}$  do
4     Randomización y búsqueda local;
5     if Hay mejora then
6        $n \leftarrow 0$ ;
7        $p \leftarrow p_0$ ;
8     else
9        $n \leftarrow n + 1$ ;
10    end
11  end
12   $p \leftarrow p + 0,1$ ;
13   $n \leftarrow 0$ ;
14 end
15 return secuenciamiento;
```

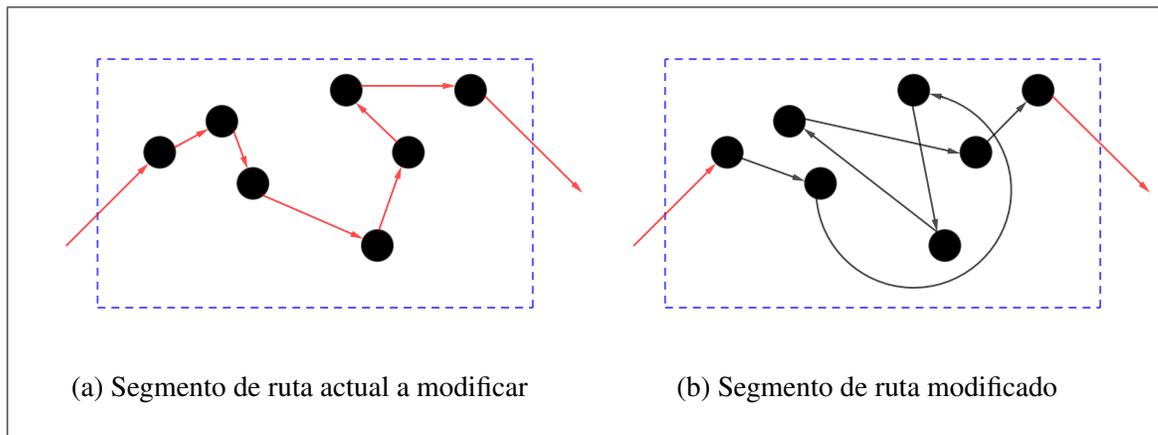


Figura 4.1. Eliminación y reconstrucción parcial aleatoria de la solución

El parámetro N^{IT} indica el número máximo de iteraciones en que se intentará la búsqueda local con eliminación y reconstrucción aleatoria. Una mejora en el costo del ciclo reinicia los parámetros a su valor inicial.

Para validar la construcción del ciclo, diseñamos una red de 50 clientes ubicados sobre cinco anillos concéntricos de distinto diámetro. El depósito es ubicado en el centro a una

altura $h = 0$ y en cada anillo ubicamos 10 clientes. La altura de cada cliente aumenta a medida que se aleja del centro formando un cono con una pendiente máxima de un arco de 5 %. La Figura 4.2 ejemplifica la red construida.

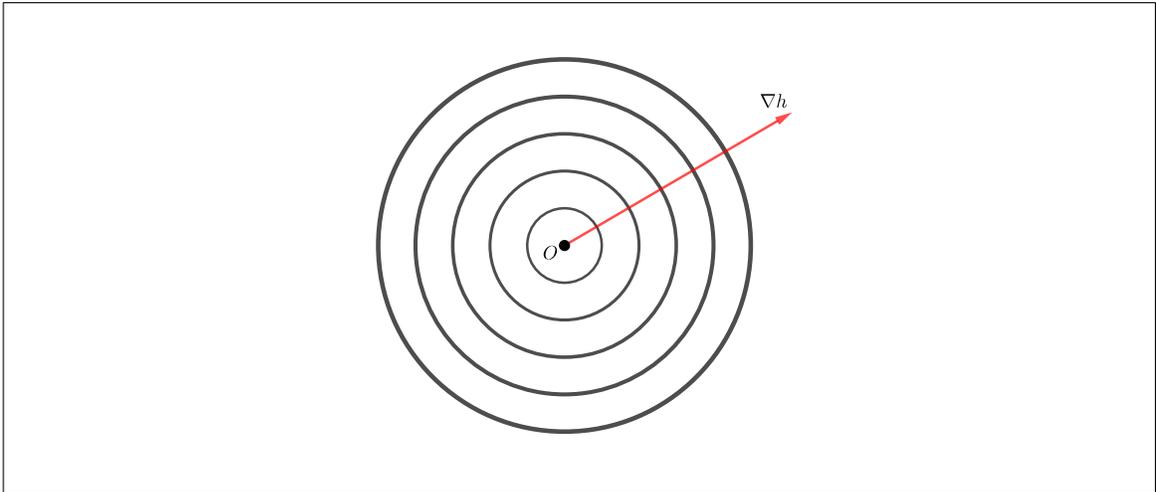


Figura 4.2. Red prueba heurística

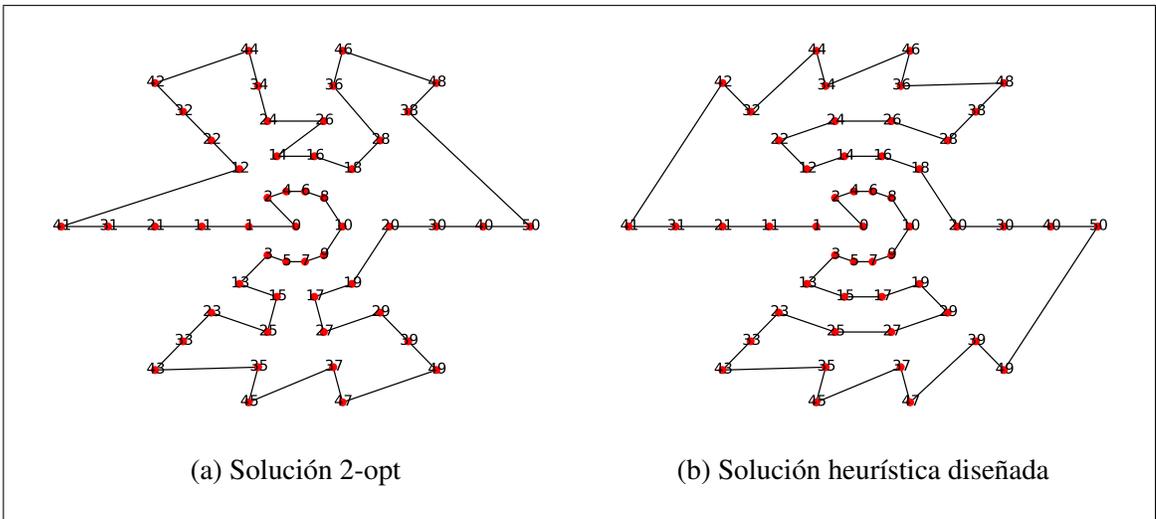


Figura 4.3. Ejemplo de solución mediante heurística

La Figura 4.3a ilustra el ciclo obtenido después de ejecutar una corrida de búsqueda local 2-opt, mientras que el ciclo obtenido por la heurística de secuenciamiento completa

se ilustra en la Figura 4.3b. La heurística que diseñamos disminuye en un 4% el valor objetivo obtenido de la solución que solo ocupa búsqueda local 2-opt.

4.2. Partición del ciclo en múltiples despachos

En esta etapa, separamos el ciclo en múltiples despachos para cumplir con la restricción de carga máxima. Dado un ciclo, la separación se hace de manera óptima calculando la ruta mínima entre el primer y último cliente de la secuencia. Cada arco $(a, b) \in \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : n \geq j > i\}$ de la Figura 4.4 representa una ruta que visita a los clientes contenidos en dicho arco y que respeta la capacidad máxima del vehículo. Por ejemplo, el arco (i, w) corresponde al ciclo $0 - j - k - w - 0$, cuya demanda no excede la capacidad máxima del vehículo. Notar que la ruta dada por el arco (i, w) no visita al cliente i , pues el único caso en que el cliente i es visitado es cuando $i = 1$.

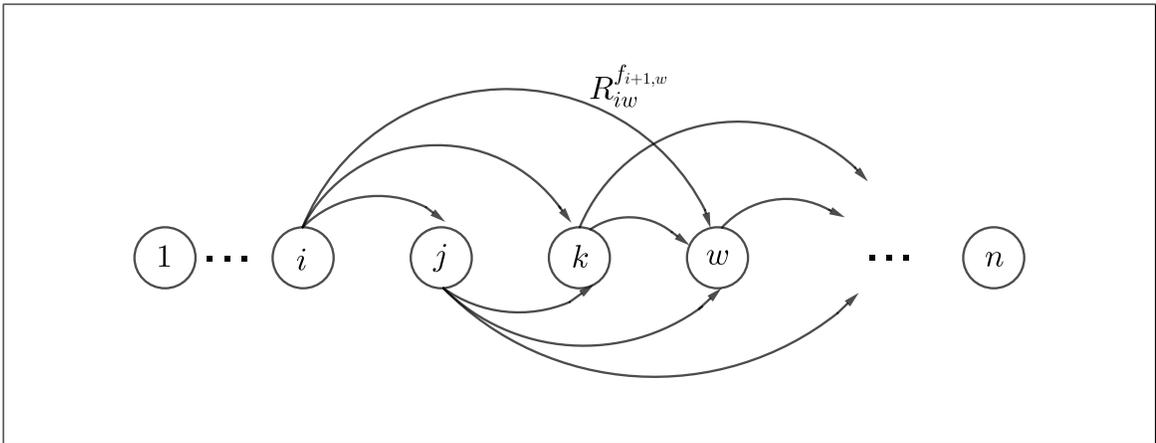


Figura 4.4. Partición del ciclo en rutas factibles

El costo de visitar dos clientes consecutivos, está dado por la ecuación (3.1), que depende del consumo de combustible y del tiempo de viaje entre ambos clientes. A su vez, el consumo de combustible g , depende de la carga $f_{i,i+1}$ transportada entre ambos clientes. Luego, el costo c del arco $(i, i + 1)$ está dado por la siguiente ecuación:

$$c_{i,i+1}^{f_{i,i+1}} = p_c \cdot g_{ij}^{f_{i,i+1}} + p_d \cdot \frac{d_{ij}}{v_{ij}} \quad (4.1)$$

El costo R de cada arco de la Figura 4.4, es decir costo de ruta factible, se calcula como la suma del costo de cada arco utilizado por la ruta más el costo de ir y volver al depósito:

$$R_{iw}^{f_{i+1,w}} = c_{0,i+1}^{f_{0,i+1}} + c_{w,0}^{f_{w,0}} + \sum_{k=i+1}^{w-1} c_{k,k+1}^{f_{k,k+1}}, \quad \forall w \geq i > 1 \quad (4.2)$$

La ecuación (4.2) es válida siempre y cuando se respete la restricción de capacidad del vehículo, dada por:

$$\sum_{k=i+1}^{w-1} f_{k,k+1} \leq Q \quad (4.3)$$

En este caso, los costos son definidos “hacia delante”, pues los arcos que definen las rutas son del estilo $(i, j) : j > i$. Sin embargo, en algunos casos podría convenir agrupar a los clientes del principio de la secuencia junto con los que están al final. Tal como definimos este problema esto no puede ocurrir sin pasar por el depósito primero. Para solucionar esto, tomamos los últimos k nodos de la secuencia y los insertamos en las primeras m ($m > 1$) posiciones. Los nodos son insertados en el sentido original y en el sentido inverso. Estas inserciones, generan nuevos ciclos que visitan a todos los clientes. Para cada uno de ellos, calculamos la ruta mínima respetando la restricción de capacidad máxima del vehículo. Finalmente, la ruta mínima que posea menor costo continúa a la siguiente parte del algoritmo. La Figura 4.5 ilustra este procedimiento para $k = 2$ y $m = j$.

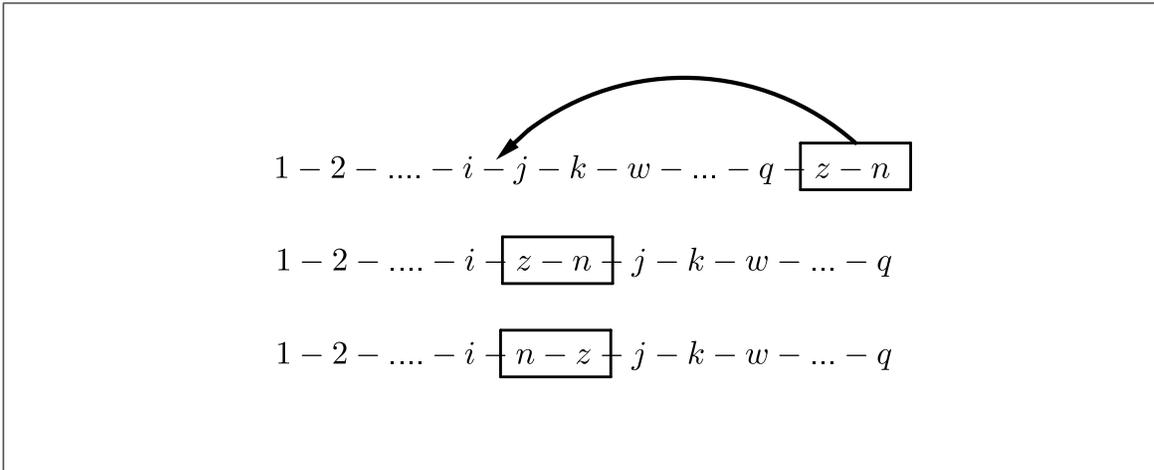


Figura 4.5. Mejora a partición del ciclo en rutas factibles

La siguiente parte del algoritmo, corresponde a mejorar localmente las rutas diseñadas. Para esto, realizamos una búsqueda local *switch*, es decir, intercambio entre visitas a clientes de distintas rutas como lo ilustra la Figura 4.6.

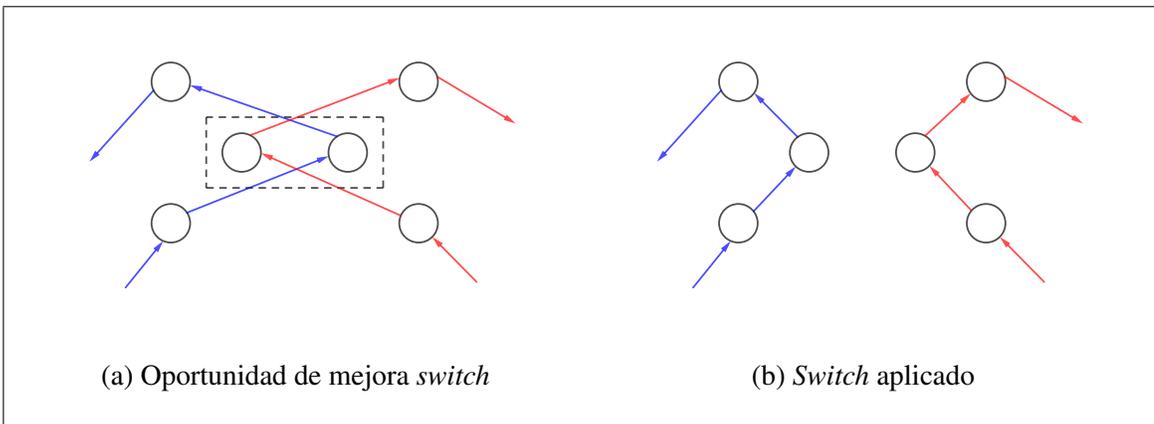


Figura 4.6. Algoritmo *switch* entre distintas rutas

Terminado el algoritmo de búsqueda local *switch*, repetimos el algoritmo de secuenciación de la primera etapa en cada ruta. Con esto termina la segunda etapa del algoritmo.

4.3. Validación de la heurística

Como no hay instancias de nuestro modelo (3.1) que consideren el efecto de pendientes resueltas a optimalidad, validamos nuestra heurística sobre un conjunto de 20 instancias de VRP cuyas soluciones óptimas están descritas en Augerat et al. (1998). Para hacer la equivalencia en costos, basta hacer la siguiente consideración:

$$c_{i,j}^{f_{i,j}} = d_{i,j} \quad \forall i \neq j \quad (4.4)$$

Cada instancia posee entre 32 y 65 clientes distribuidos aleatoriamente, con demandas aleatorias y vehículos con capacidad máxima de 100 unidades de demanda. La Tabla 4.1 resume el desempeño de nuestra heurística según cantidad de clientes.

Tabla 4.1. Validación heurística

n	% sobre valor óptimo		
	[32, 40)	[40, 50)	[50, 65]
Promedio	1,9	4	3,2
Máximo	3,9	7,6	6,2

CAPÍTULO 5. CASO DE ESTUDIO Y RESULTADOS

En este capítulo, presentamos los resultados obtenidos de la aplicación de nuestro modelo y algoritmo de solución que planifica rutas considerando el efecto de pendientes sobre el consumo de combustible. En la sección 5.1, resolvemos a optimalidad una instancia de 6 clientes, mostrando potenciales ahorros que podrían replicarse en instancias de mayor tamaño resueltas mediante metaheurísticas. En la sección 5.2, detallamos la forma en que las instancias son construidas mediante un muestreo geográfico de clientes y posterior preproceso de costos. En la sección 5.3, describimos las condiciones iniciales de los tres experimentos a realizar: (i) caso base; (ii) restricción de capacidad relajada; y (iii) peso de carga despreciable. En la sección 5.4, presentamos el desempeño que tuvo la heurística en el caso base. En la sección 5.5, exponemos los ahorros obtenidos para cada experimento. En la sección 5.6, presentamos características representativas que tiene la solución obtenida en algunas instancias seleccionadas. En la sección 5.7, consideramos velocidades distintas para arcos con pendientes elevadas. En la sección 5.8, realizamos un experimento adicional que analiza nuestra solución frente a cambios en la densidad de clientes.

5.1. Instancia resuelta a optimalidad

Podemos obtener intuición valiosa al resolver instancias de menor tamaño a optimalidad. Para ello, construimos arbitrariamente una instancia de 6 clientes, donde la demanda de cada cliente es 1 tonelada y no hay capacidad máxima de carga.

La Figura 5.1a ilustra la solución óptima en el plano, en ella también se describen las alturas de cada cliente utilizando una escala de grises. Sobre cada arco presentamos el consumo de combustible al recorrerlo, y el número entre paréntesis es el consumo de combustible si el arco fuese recorrido en sentido contrario. La Figura 5.1b ilustra la solución óptima considerando el efecto de las pendientes de los arcos.

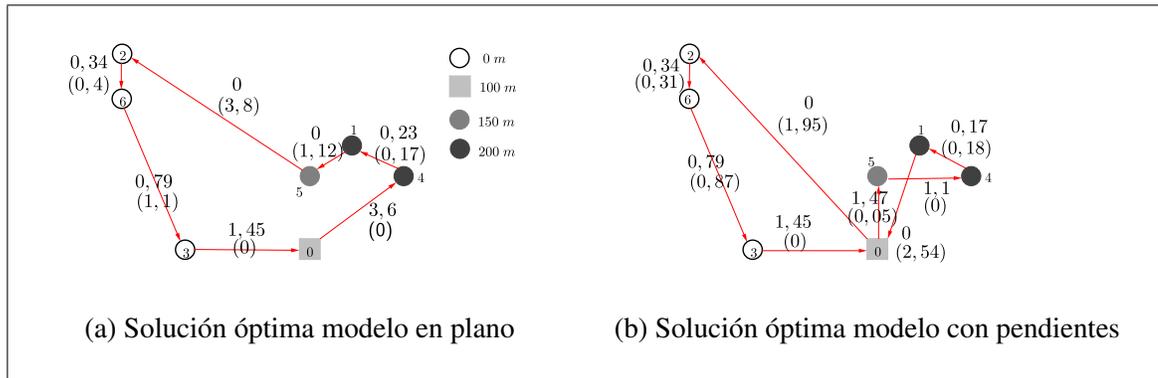


Figura 5.1. Instancia resuelta a optimalidad

Observamos que la solución en el plano consolida a todos los clientes en una sola ruta, mientras que la solución que considera pendientes, utiliza dos rutas. Las rutas del modelo que considera efecto pendiente concentran a clientes que están en alturas similares entre sí. Además, la ruta que visita a los clientes en altura, utiliza los arcos de menor pendiente, pues el modelo que considera pendientes sigue la secuencia de nodos 0–5–4–1, teniendo un perfil de alturas $100\text{ m} - 150\text{ m} - 200\text{ m} - 200\text{ m}$. Mientras que el modelo en plano, sigue la secuencia 0–4–1–5, con un perfil de alturas $100\text{ m} - 200\text{ m} - 200\text{ m} - 150\text{ m}$. Adicionalmente, en la solución con pendientes, los clientes son visitados con menor carga dentro del vehículo.

La Tabla 5.1 indica el costo operacional, consumo de combustible y distancia recorrida de ambas soluciones.

Tabla 5.1. Resumen indicadores instancia a optimalidad.

	Modelo en plano	Modelo con pendientes	Δ (%)
Combustible (L)	6,4	5,3	-17
Distancia (km)	11	14	28
Costo total (\$)	4.493	4.121	-8

En este ejemplo, realizar una planificación en el plano aumenta en un 8% los costos operacionales sobre la solución óptima. Observamos en este caso que hay un *trade-off*

entre la distancia recorrida y el consumo de combustible. Al consolidar clientes de alturas similares ocupar arcos con menor pendiente la distancia recorrida aumenta en un 28 %, sin embargo, permite reducir el consumo de combustible en un 17 %.

5.2. Construcción de la red

A continuación, estudiamos nuestro modelo en redes viales reales. Esto permitirá estimar los potenciales beneficios sin sesgo hacia instancias generadas artificialmente.

Para los casos de estudio ocupamos una región acotada de la red ESTRAUS (Santiago) y ESTRAVAL (Valparaíso) (SECTRA, 2017). Elegimos estas regiones debido a que poseen una alta densidad de nodos y además, son regiones urbanas donde un operador logístico estaría interesado en planificar rutas vehiculares. Las Figuras 5.2 y 5.3 ilustran la región seleccionada para Santiago y Valparaíso respectivamente.

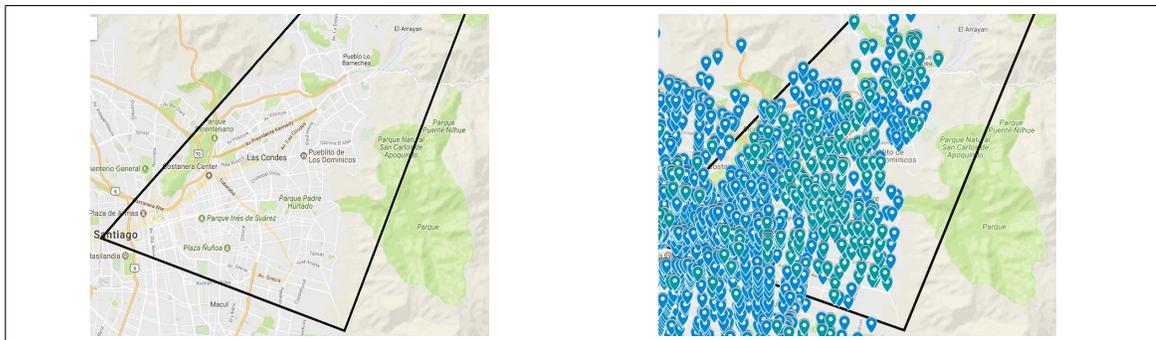


Figura 5.2. Red de estudio Santiago

Obtenemos la ubicación geográfica de cada nodo en la red de ESTRAUS y ESTRAVAL en las regiones seleccionadas. Para obtener las pendientes de los arcos combinamos esta información con la API de *Google Maps Elevation* (Google, 2017) que permite consultar la altura sobre el nivel del mar de un punto geográfico.

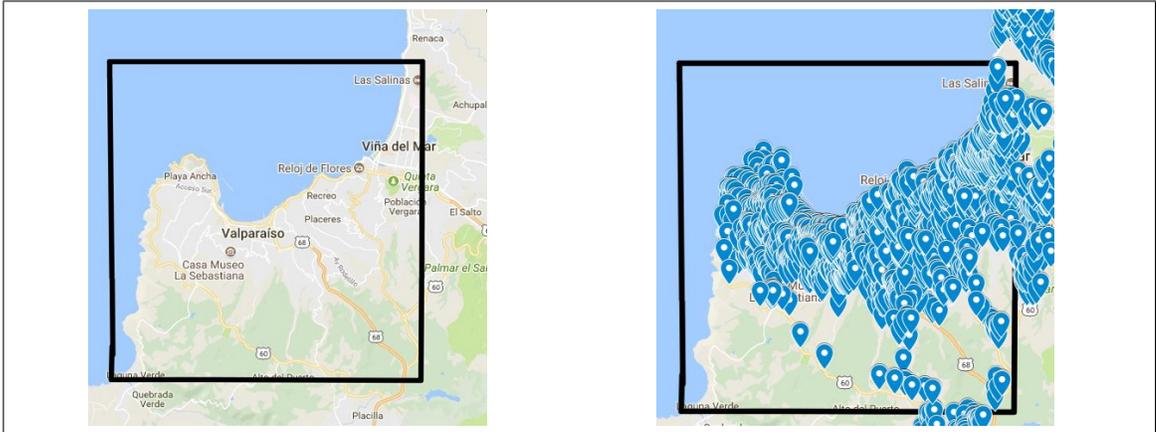


Figura 5.3. Red de estudio Valparaíso

5.2.1. Muestreo geográfico de clientes

Para las redes construidas de cada ciudad, simulamos computacionalmente 20 familias de instancias cada una con cuatro instancias con 100, 50, 20 y 10 clientes. La ubicación del depósito es común para todas las instancias. En cada familia, los clientes son seleccionados aleatoriamente mediante un muestreo geográfico estratificado por alturas. Las Figuras 5.4a y 5.4b ilustran la proporción de clientes que son seleccionados según el rango de alturas para la región definida en Santiago y Valparaíso respectivamente.

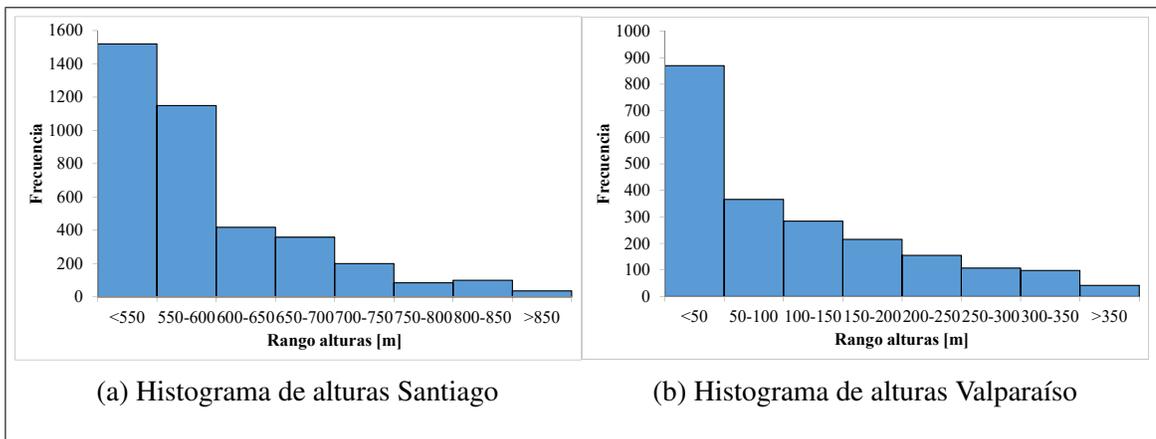


Figura 5.4. Histograma de alturas Santiago y Valparaíso

5.2.2. Preproceso de la red

El costo de ir de un cliente a otro debe ser preprocesado para respetar la formulación de nuestro modelo. Esto porque en una red vial es poco común que exista un arco directo con pendientes constantes entre dos puntos, sino más bien, es una ruta que los une a mínimo costo.

Debido a que nuestro modelo minimiza consumo de combustible y tiempo de viaje en ruta, dado por la ecuación (3.1), el preproceso de la red corresponde a buscar rutas mínimas entre clientes que minimicen (3.1). Una particularidad de este problema, es que la ruta mínima entre dos clientes depende de la pendiente de cada arco y nivel de carga del vehículo al comienzo de la ruta (Ben Ticha, Absi, Feillet, y Quilliot, 2018). Por este motivo, consideramos 10 niveles de carga como porcentaje de la capacidad del vehículo: $\{10\%, 20\%, \dots, 100\%\}$ y calculamos la ruta mínima entre cada par de clientes para cada nivel de carga. Dichos costos de ruta mínima entre cada par de nodos corresponderán al costo a utilizar en el modelo.

5.3. Tipo de experimento y diseño

Una vez que generamos las familias de instancias y los costos preprocesados, realizamos los siguientes experimentos: (i) caso base, (ii) caso restricción de capacidad relajada; y (iii) caso peso de la carga despreciable.

El caso base (i) corresponde una planificación de rutas, considerando que los vehículos tienen una capacidad máxima de carga. En el caso (ii) levantamos la restricción de capacidad máxima de los vehículos. En el caso (iii) consideramos que el peso de la carga transportada es despreciable, por ejemplo si se repartieran cartas. El caso (i) lo resolvemos para Santiago y Valparaíso, mientras que (ii) y (iii) solo para Valparaíso, pues los ahorros en Santiago fueron marginales en el caso (i).

Todos los experimentos son resueltos considerando un modelo que asume costos en el plano y otro con pendientes, con una función objetivo que minimiza la suma de los costos por consumo de combustible y tiempo en ruta. Finalmente, comparamos potenciales ahorros de la solución que considera pendientes.

Los experimentos tienen el siguiente diseño: velocidad constante en todos los arcos de 30 km/hr, capacidad máxima de carga de vehículos de 13 toneladas (excepto en caso (ii)) y demanda de cada cliente igual a 1 tonelada (excepto en caso (iii)). Los parámetros utilizados son presentados en el anexo B.

5.4. Desempeño de heurística

En esta sección exponemos el tiempo de ejecución de nuestra heurística empleado para resolver el caso (i). En la Tabla 5.2 observamos los tiempos promedio para cada etapa de la heurística.

Tabla 5.2. Tiempo computacional promedio heurística.

	Etapa 1 (s)	Etapa 2 y 3 (s)
$n = 100$	13.052	478
$n = 50$	1.042	88
$n = 20$	38	16
$n = 10$	4,7	4,7

Observamos que el tiempo computacional para la primera fase del algoritmo aumenta drásticamente, llegando a un promedio de 3,6 horas para instancias de 100 clientes. La Figura 5.5 ilustra cómo evoluciona el costo de la primera etapa del algoritmo en función del tiempo de proceso para una instancia representativa.

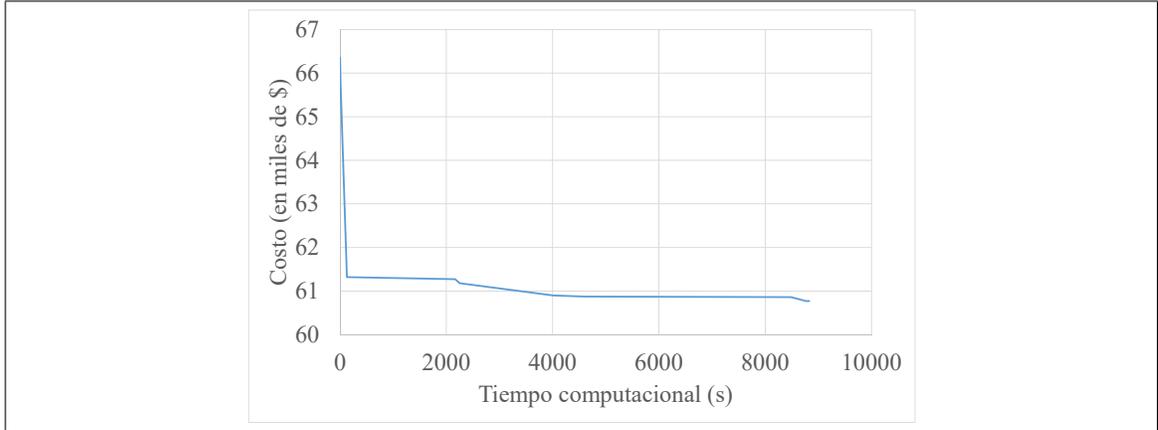


Figura 5.5. Desempeño primera etapa algoritmo para instancia particular

Observamos que en esta instancia las disminuciones de costo importantes ocurren al comienzo del algoritmo. A medida que avanza el tiempo las disminuciones se vuelven marginales.

Debido a lo anterior, replicamos los experimentos incluyendo una restricción de tiempo en la primera etapa de nuestra heurística. El tiempo de término de ejecución se establece en $t = n$ segundos. Es decir, para las instancias de 100 clientes serán 100 segundos y así sucesivamente. Comparamos ambas soluciones mediante una diferencia porcentual dada por la ecuación (5.1).

$$\epsilon = \frac{\sum_{i=0}^n \frac{|z_i - z_i^T|}{z_i}}{n} \quad (5.1)$$

Donde z_i es el valor objetivo de la instancia i que entrega la heurística sin limitar su tiempo de ejecución y z_i^T es el valor objetivo VRP de la instancia i que entrega la heurística luego de limitar el tiempo de ejecución en la etapa 1. La Tabla 5.3 contiene las diferencias promedios y máximas dadas por la ecuación (5.1), para las instancias de 100, 50 y 20 clientes.

Tabla 5.3. diferencia promedio heurística con tiempo limitado

	ϵ (%) máximo	
$n = 100$	1,4	3,2
$n = 50$	1,1	2,6
$n = 20$	0,3	2,2

Observamos empíricamente que al limitar el tiempo de ejecución en la etapa 1, la diferencia promedio es de 1,4 % para la instancia de 100 clientes.

5.5. Resultados generales

En esta sección presentamos los resultados de nuestros experimentos computacionales. En primer lugar presentamos el caso base (i) que contempla las ciudades de Santiago y Valparaíso. En segundo lugar presentamos los casos (ii) y (iii) para la ciudad de Valparaíso.

Caso (i)

La Tabla 5.4 presenta el ahorro porcentual de costo, al realizar una planificación que considera pendientes comparada con una en el plano.

Observamos empíricamente que en la ciudad de Valparaíso los ahorros son mayores. Esto es sensato, pues sobre los arcos con pendiente positiva, el promedio de pendientes en Valparaíso es 4,7 %; mientras que en el caso de Santiago este valor disminuye a 1,4 %.

En Valparaíso observamos que para las instancias de 20 y 50 clientes el ahorro promedio es de 3,4 % y 3,6 %, respectivamente, y en las instancias de 10 clienes el ahorro es del 5 %. La diferencia en ahorro para las instancias de 10 clientes es significativa debido a que existe capacidad suficiente en el vehículo para visitar a todos los clientes en una ruta. El modelo en el plano, consolida carga y tiende a visitar a todos los clientes en una sola

Tabla 5.4. Ahorro en costos caso (i) cuando se considera pendientes.

		Valparaíso	Santiago
		Ahorro (%)	Ahorro (%)
$N = 100$	máx	6,4	4,2
	promedio	2,8	1,5
$N = 50$	máx	6,8	4,8
	promedio	3,6	2
$N = 20$	máx	8,9	4,6
	promedio	3,4	0,7
$N = 10$	máx	13,4	1,8
	promedio	5	0,4

ruta. Estas soluciones son ineficientes en consumo de combustible, puesto que recorren vías empinadas con elevada carga en el vehículo.

El modelo que considera pendientes en cambio, puede realizar más de una ruta aún cuando hay capacidad para visitar a todos los clientes en un viaje. De este modo, consume menos combustible al transportar menos carga en arcos con pendiente elevada. Sin embargo, debido a que existen múltiples rutas, esta planificación recorre mayor distancia que la planificación en el plano.

Para ilustrar este punto, consideremos la Tabla 5.5 que ilustra el número de vehículos promedio utilizados en Valparaíso. En ella observamos que el número promedio de vehículos utilizados por el modelo con pendientes es mayor que la flota promedio utilizada en el plano, lo que se traduce en un número mayor de rutas para satisfacer la demanda.

Tabla 5.5. Flota promedio utilizada en Valparaíso

	Con pendientes	En el plano
	Tamaño flota	Tamaño flota
$n = 100$	4,95	4,65
$n = 50$	3	2,45
$n = 20$	1,5	1,15

Casos (ii) y (iii)

La Tabla 5.6 ilustra los ahorros al realizar una planificación que considera pendientes para los casos (ii) y (iii) en la ciudad de Valparaíso.

Tabla 5.6. Ahorros promedio casos (ii) y (iii)

	Caso (ii)	Caso (iii)
	Ahorro(%)	Ahorro(%)
$n = 100$	4,4	1,2
$n = 50$	5,8	1,4
$n = 20$	5,2	1,3

Observamos que los ahorros aumentan al levantar la restricción de capacidad. El ahorro es similar al obtenido en las instancias de 10 clientes, pues está ocurriendo el mismo efecto. La solución en el plano no internaliza el costo adicional de ir con el vehículo cargado en un arco con pendiente elevada, por lo que busca consolidar carga y visitar la mayor cantidad de clientes. Este tipo de rutas son eficientes en tiempo total de viaje, sin embargo, son ineficientes en términos de consumo de combustible debido al alto peso transportado en vías empinadas.

Para el caso (iii), obtenemos que los ahorros son poco significativos cuando el peso de la carga es despreciable. Sin embargo, para afinar conclusiones se debiese considerar

distintos tipos de flota, pues lo relevante es el peso de cada vehículo y no la carga que transporta.

5.6. Características de la solución en instancias particulares

En esta sección presentamos y analizamos las características de las soluciones para el caso (i) y (ii) en algunas instancias representativas. En el caso (i) incluimos además la primera etapa de la heurística.

Caso (i): primera etapa heurística

La primera etapa del algoritmo genera una única ruta que visita a todos los clientes. Si bien en general esta ruta viola la restricción de capacidad máxima del vehículo, se aprecia notablemente la diferencia estructural de una solución en el plano con respecto a una que considera pendientes.

La Figura 5.6 ilustra el secuenciamiento de visitas a clientes para una instancia representativa de 20 clientes en Valparaíso. La Figura 5.6a es en el plano, mientras que la Figura 5.6b es considerando pendientes. El nodo en color rojo representa el depósito y los arcos representan rutas entre clientes.

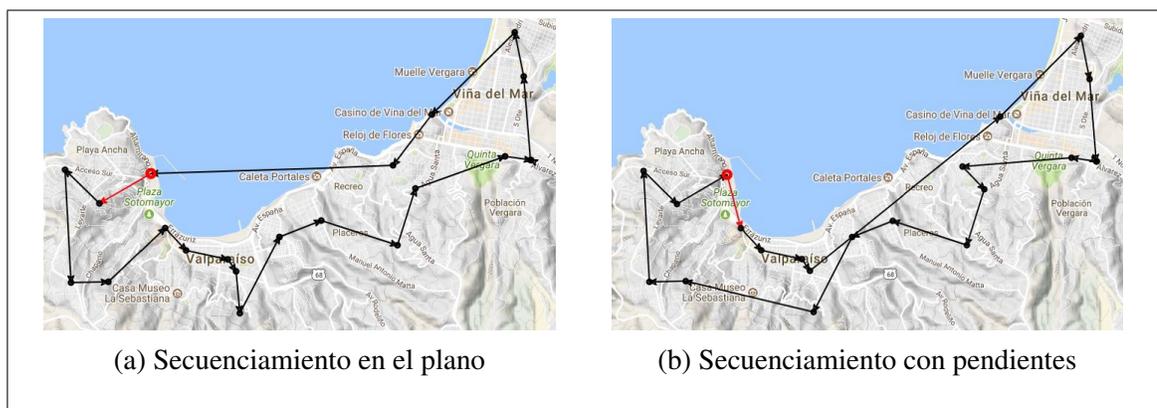


Figura 5.6. Secuenciamiento en instancia representativa de Valparaíso

Observamos que en esta instancia hay una diferencia significativa en el secuencia-
miento de visitas a clientes según se considere o no pendientes. Para ilustrar mejor esta
diferencia, las Figuras 5.7a y 5.7b describen el perfil de altura *versus* distancia recorrida
por la ruta en plano y con pendientes respectivamente.

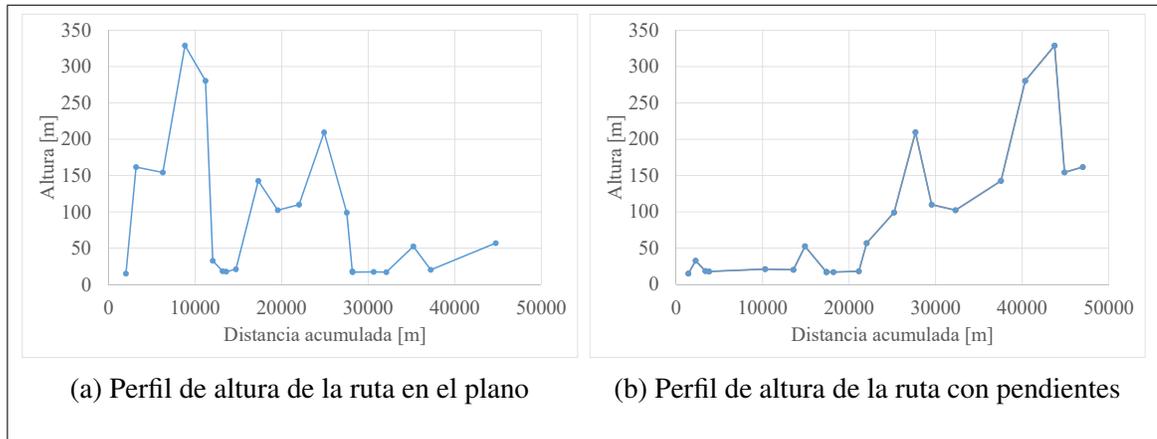


Figura 5.7. Perfiles de altura de rutas para instancia representativa de Valparaíso

Observamos que para esta instancia el perfil de altura para la solución en el plano
no obedece una tendencia. En cambio, la solución con pendientes evita realizar cambios
de altura drásticos al comienzo de la ruta, que es el momento con mayor carga en el
vehículo. Una vez que el vehículo ha dejado carga en el camino, comienza a realizar
mayores cambios de altura.

Para comparar cuantitativamente ambas soluciones, la Tabla 5.7 presenta información
sobre el costo total y distancia recorrida para ambos secuenciamientos.

Tabla 5.7. Costo total y distancia recorrida de secuenciamiento de visitas
para instancia representativa.

	Ruta en el plano	Ruta con pendientes	Δ (%)
Costo total (CLP \$)	20.440	17.606	13,9
Distancia recorrida (km)	44,7	46,9	-4,7

Caso (i): heurística completa

En esta sección incluimos la restricción de capacidad máxima del vehículo al problema de secuenciamiento de visitas a clientes.

La Figura 5.8 ilustra una planificación de ruteo para una instancia representativa de 20 clientes en Valparaíso. La Figura 5.8a ilustra una planificación en el plano, mientras que la Figura 5.8b ilustra una planificación que considera pendientes.

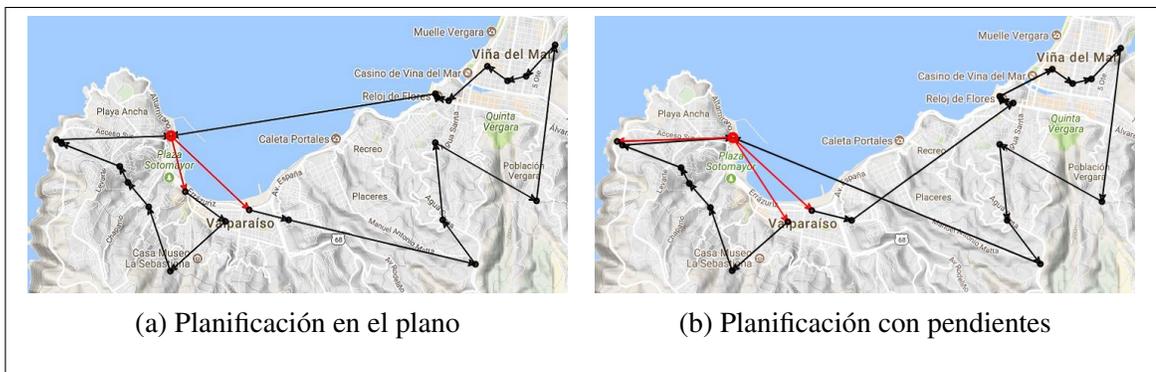


Figura 5.8. Planificación de rutas para instancia representativa de Valparaíso

Además de observar diferencias en las rutas, notamos que la planificación en el plano realiza dos rutas, mientras que la planificación con pendientes realiza tres. Para ilustrar de mejor manera las diferencias entre ambas soluciones, presentamos la Figura 5.9 que compara el perfil de altura entre ambas soluciones.

Observamos que esta instancia posee una estructura similar a la vista en la sección anterior. Para comparar cuantitativamente ambas soluciones, en la Tabla 5.8 presentamos los costos totales de ambas soluciones y la distancia recorrida.

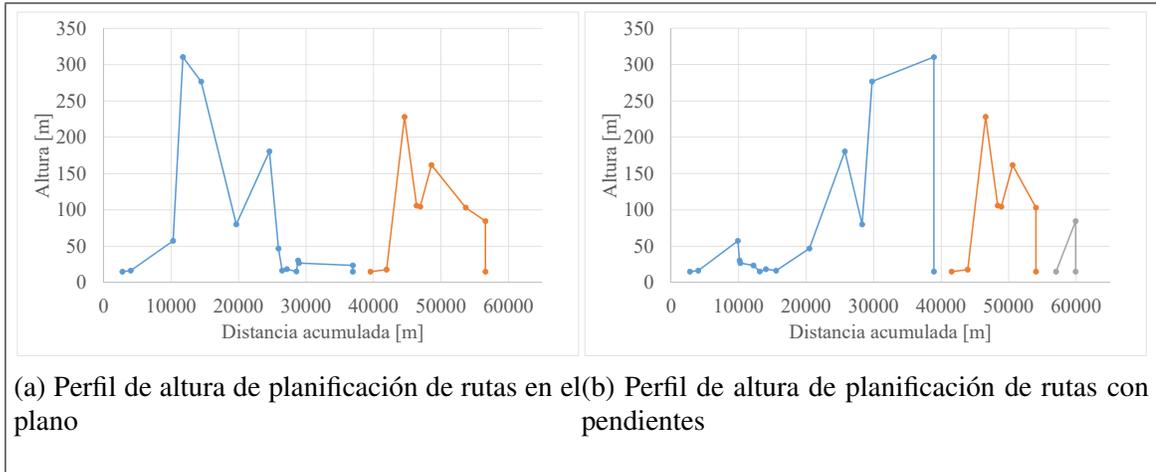


Figura 5.9. Perfil de altura de planificación de rutas para instancia representativa de Valparaíso

Tabla 5.8. Costo y distancia recorrida en solución VRP.

	Plan. en el plano	Plan. con pendientes	Δ (%)
Costo total (CLP \$)	22.718	20.704	8,8
Distancia recorrida (km)	56,5	59,9	-5,6

Estos resultados plantean la pregunta de si es conveniente en algunos casos separar rutas para ahorrar consumo de combustible cuando se realiza una planificación con pendientes, incluso cuando la capacidad de carga no es una limitación. Para responder esta pregunta resolvemos el caso (ii).

Caso (ii)

En esta sección ilustramos dos instancias representativas de Valparaíso donde hemos levantado la restricción de capacidad máxima del vehículo.

Las Figuras 5.10 y 5.11 ilustran la planificación de ruteo y el perfil de altura respectivamente para una instancia particular en Valparaíso. Las Figuras 5.12 y 5.13 representan lo mismo para otra instancia de Valparaíso.

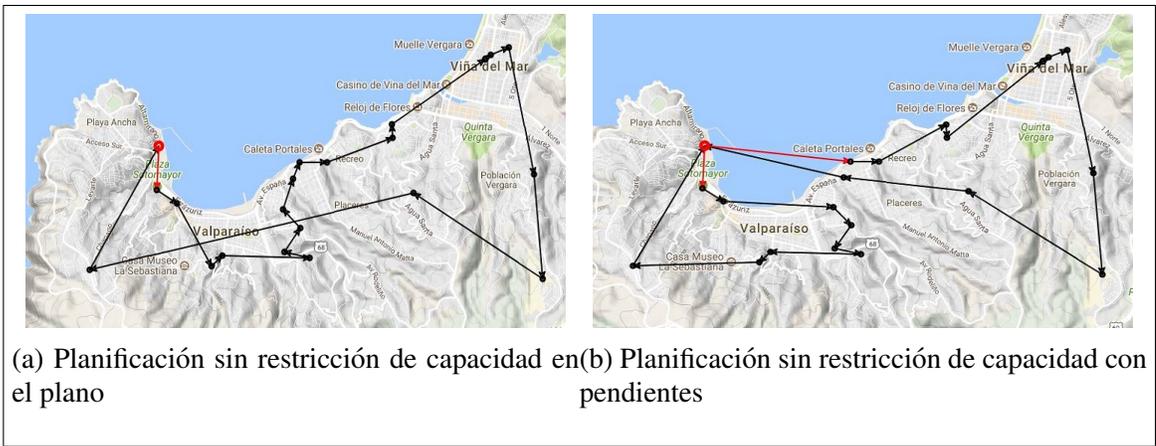


Figura 5.10. Planificaciones sin restricción de capacidad (a)

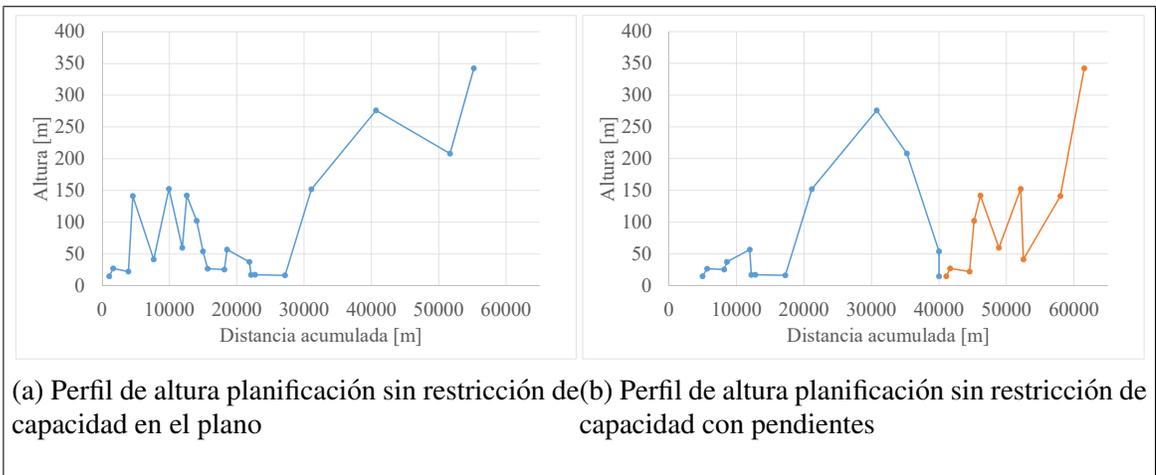


Figura 5.11. Perfiles de altura planificación sin restricción de capacidad (a)

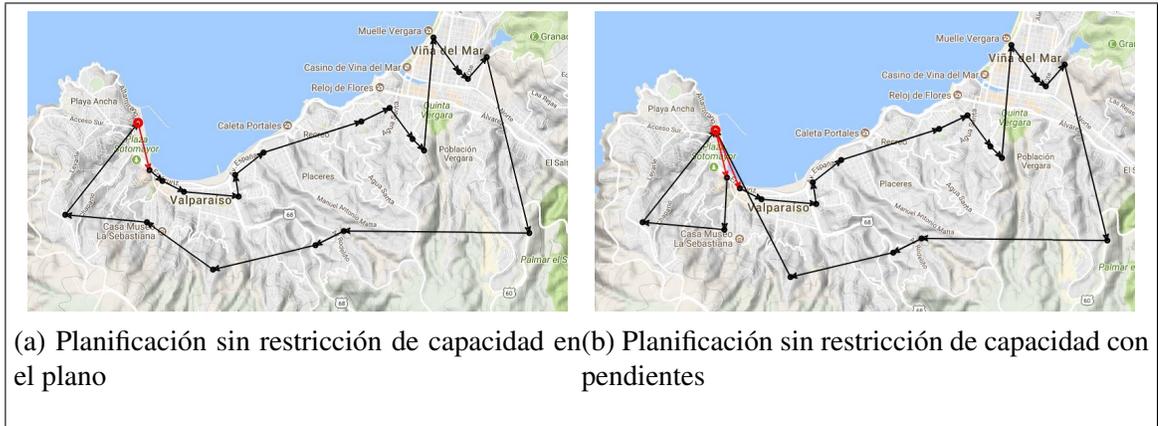


Figura 5.12. Planificaciones sin restricción de capacidad (b)

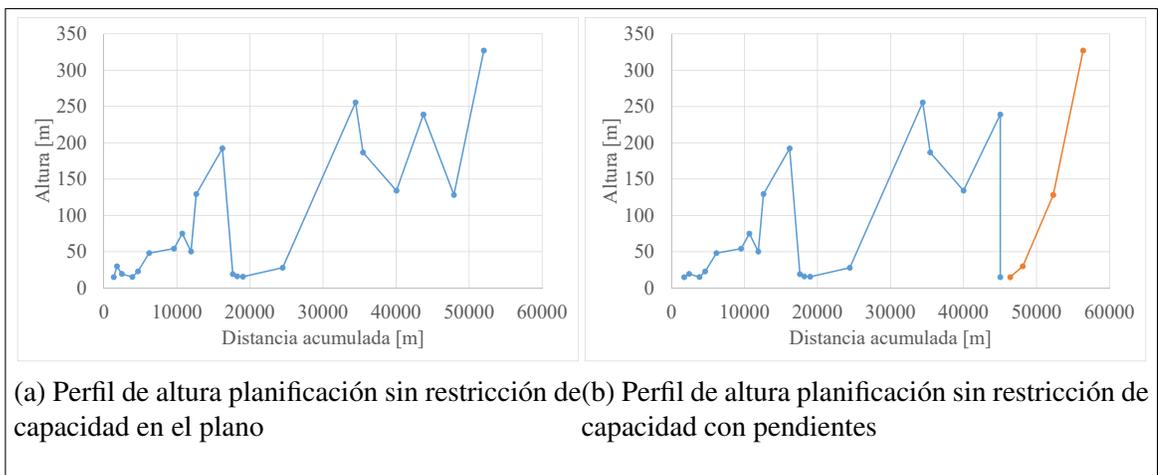


Figura 5.13. Perfiles de altura planificación sin restricción de capacidad (b)

Observamos que para estas dos instancias particulares, una planificación en el plano visitará a todos los clientes en una sola ruta. La planificación que considera pendientes, en cambio, realiza más de una ruta en estas instancias.

La explicación de este resultado es similar al caso (i) para las instancias de 10 clientes. El modelo que no considera pendientes, no internaliza el costo de ir con carga en un arco de elevada pendiente. Luego, las soluciones de este modelo tienden a consolidar carga y visitar la mayor cantidad de clientes en el menor tiempo posible. Al evaluar estas

soluciones en la red, terminan siendo ineficientes en consumo de combustible debido a la cantidad de carga transportada en arcos de pendiente positiva.

El modelo que considera pendientes, en cambio, evita arcos con pendientes elevadas cuando la carga del vehículo es importante, de modo de hacer un uso eficiente del combustible. Una forma de lograr esto, es realizando más rutas para visitar a todos los clientes.

5.7. Disminución de velocidad en arcos con pendiente positiva

En esta sección, modificamos el supuesto de que todos los arcos se recorren a la misma velocidad en Valparaíso. Arcos que superen un 8 % de pendiente, tendrán una velocidad de 20 km/hr, mientras que los demás arcos mantendrán la velocidad de 30 km/hr. Los resultados se resumen en la Tabla 5.9.

Tabla 5.9. Ahorros cambiando velocidad

	Ahorro(%)
$n = 100$	3,2
$n = 50$	3,7
$n = 20$	3,5

Observamos que los ahorros promedio aumentan considerando el caso base resumido en la Tabla 5.4. Lo cual tiene sentido, debido a que el modelo que considera pendientes ahora además observa disminuciones de velocidad en arcos con pendientes elevadas. Sin embargo, notamos que el aumento en ahorro es marginal en los experimentos realizados.

5.8. Efecto de la densidad de clientes en los ahorros

Finalmente, analizamos el efecto que puede tener la densidad de clientes en los potenciales ahorros de una planificación que considera el efecto de pendientes en Valparaíso.

Planteamos como hipótesis que mientras mayor sea la densidad de clientes mayores serán los ahorros de una planificación que considere pendientes.

Para probar empíricamente esta hipótesis reducimos la zona de estudio a la ilustrada por la Figura 5.14. En esta zona repetiremos los experimentos del caso (i) para instancias de 20 clientes en Valparaíso. Denominaremos X a la muestra de ahorros obtenidos en la sección 5.5, resumidos en la Tabla 5.6. Mientras que la muestra de ahorros obtenidos al modificar la densidad de clientes, la denominaremos Y . Los estadísticos para cada muestra se presentan en la Tabla 5.10.

Tabla 5.10. Estadísticos muestras

	X	Y
Promedio	3,4	3,6
Varianza	7	7

Realizamos un *test* de hipótesis para determinar si las medias entre las dos muestras son estadísticamente diferentes.

$$H_0 : \mu_x = \mu_y \quad (5.2)$$

$$H_1 : \mu_x \neq \mu_y \quad (5.3)$$

Obtenemos el valor T

$$T = \left| \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{s_x^2}{N_x} + \frac{s_y^2}{N_y}}} \right| = 0,24 < t_{0,9;20-2} = 1,734 \quad (5.4)$$

Dado el valor t , no existe evidencia para rechazar la hipótesis nula H_0 . Luego, aumentar la densidad de clientes no implica un aumento en los ahorros promedio.

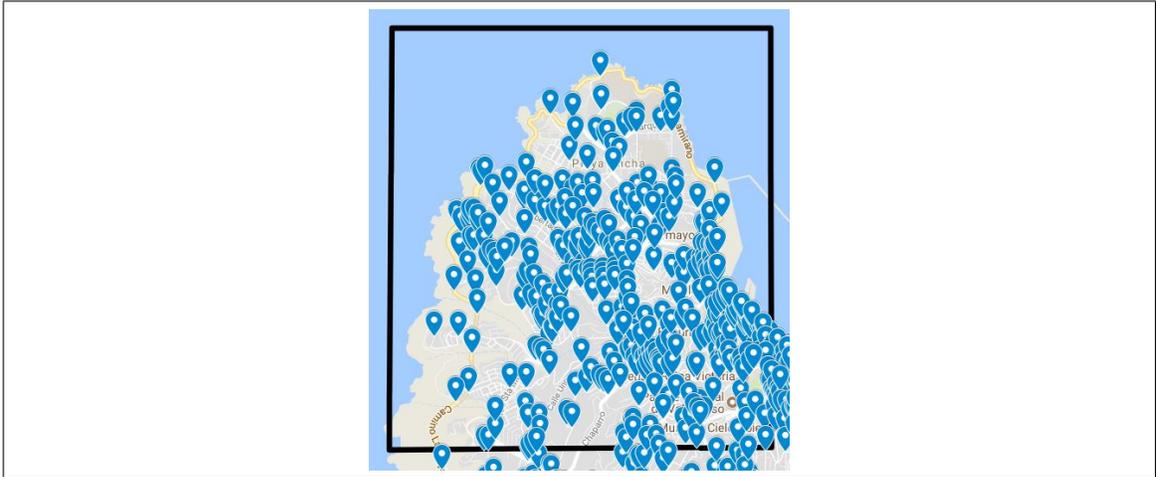


Figura 5.14. Zona de estudio reducida

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este capítulo presentamos en la sección 6.1, las conclusiones respecto al objetivo general de esta tesis. En la sección 6.2, mencionamos posibles futuras investigaciones que exploren más allá de los alcances que tuvo esta investigación.

6.1. Conclusiones

Considerar el efecto de pendientes sobre el consumo de combustible en una planificación de rutas puede generar importantes ahorros en costos operacionales con respecto a una planificación en el plano. Este ahorro dependerá de la geografía de estudio, pues en redes como la de Valparaíso obtenemos ahorros promedio superiores al 3 %, mientras que, en Santiago éstos son marginales.

Mostramos empíricamente que una planificación de rutas en el plano para Valparaíso, puede ser ineficiente en términos de costos operacionales, llegando a diferencias de hasta un 13 % con respecto a planificaciones que consideran pendientes. Esta diferencia se debe a que planificaciones que consideren pendientes siguen una estructura de visitas a clientes organizada por niveles de altura. Esto evita que el vehículo realice fuertes cambios de altura al visitar clientes consecutivos en los tramos de mayor carga, sin embargo requiere que el vehículo recorra distancia adicional. Una vez que el vehículo pierde peso, la ruta toma arcos con mayores pendientes debido al costo de tiempo total en ruta.

Una segunda diferencia entre las planificaciones que entregan ambos modelos, es que el efecto de pendientes puede requerir particionar rutas sin tener limitaciones de capacidad del vehículo. Nuestros experimentos sugieren que la planificación en el plano realiza menos rutas con mayor carga transportada, mientras que planificaciones que consideren pendientes realizan más rutas lo que conlleva a una menor carga transportada por ruta.

Los ahorros potenciales obtenidos se ven disminuidos al considerar el peso de la carga transportada como despreciable. En nuestros experimentos, la diferencia en costos de una planificación en el plano con la que considera pendientes es de 1,2 % promedio. Esto indicaría que el peso de la carga transportada es relevante al momento de realizar una planificación de rutas que considere pendientes. En los experimentos que variaban la densidad de clientes, los ahorros promedio no tuvieron diferencias estadísticamente significativas.

6.2. Recomendaciones

Identificamos las siguientes extensiones como potenciales líneas de investigación futuras, agrupadas en las siguientes categorías: utilizar mayor nivel de detalle en funciones de costo; extensiones al modelo de optimización; utilizar el modelo para realizar análisis estratégicos; y estudiar cómo diseñar métodos de solución computacionalmente eficientes para la planificación de rutas.

En cuanto al detalle en las funciones de costo a utilizar, se podría incluir el efecto que puede tener el peso de la carga y la pendiente en la velocidad del vehículo. En esta tesis, solo consideramos el efecto directo que tiene la pendiente sobre el consumo de combustible, pero eventualmente podrían haber efectos secundarios, por ejemplo en la velocidad de operación.

En el caso de extensiones al modelo de optimización, identificamos: considerar flota heterogénea de vehículos, incluyendo vehículos que utilicen combustibles alternativos y con restricciones diferentes, por ejemplo de autonomía. Adicionalmente, se podría extender el problema de optimización a uno con ventanas de tiempo y con velocidad dependiente en el tiempo.

Dentro de los análisis estratégicos que pueden realizarse con el modelo actual, se encuentra: estudiar cómo localizar depósitos según geografía de la región estudiada y configuración de demanda.

Finalmente, se podría estudiar y diseñar métodos de solución para la planificación de rutas, donde podemos encontrar: técnicas que aceleren nuestros algoritmos, como por ejemplo búsqueda tabú; resolver la formulación (3.1) de manera exacta.

REFERENCIAS

- Asadi, B., y Vahidi, A. (2011). Predictive cruise control: Utilizing upcoming traffic signal information for improving fuel economy and reducing trip time. *IEEE transactions on control systems technology*, 19(3), 707–714.
- Augerat, P., Belenguer, J. M., Benavent, E., Corberán, A., Naddef, D., y Rinaldi, G. (1998). Computational results with a branch-and-cut code for the capacitated vehicle routing problem.
- Barth, M., y Boriboonsomsin, K. (2009). Energy and emissions impacts of a freeway-based dynamic eco-driving system. *Transportation Research Part D: Transport and Environment*, 14(6), 400–410.
- Barth, M., Younglove, T., y Scora, G. (2005). Development of a heavy-duty diesel modal emissions and fuel consumption model. *California Partners for Advanced Transit and Highways (PATH)*.
- Bektaş, T., y Laporte, G. (2011). The pollution-routing problem. *Transportation Research Part B: Methodological*, 45(8), 1232–1250.
- Ben Ticha, H., Absi, N., Feillet, D., y Quilliot, A. (2018). Vehicle routing problems with road-network information: State of the art. *Networks*.
- Dabia, S., Demir, E., y Van Woensel, T. (2014). An exact approach for the pollution-routing problem. *Relatório técnico, Beta Research School for Operations Management and Logistics*.
- Dantzig, G. B., y Ramser, J. H. (1959). The truck dispatching problem. *Management*

science, 6(1), 80–91.

Demir, E., Bektaş, T., y Laporte, G. (2012). An adaptive large neighborhood search heuristic for the pollution-routing problem. *European Journal of Operational Research*, 223(2), 346–359.

Demir, E., Bektaş, T., y Laporte, G. (2014). The bi-objective pollution-routing problem. *European Journal of Operational Research*, 232(3), 464–478.

Desaulniers, G., Lavigne, J., y Soumis, F. (1998). Multi-depot vehicle scheduling problems with time windows and waiting costs. *European Journal of Operational Research*, 111(3), 479–494.

Dijkstra, E. W. (1959). A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische matematik*, 1(1), 269–271.

Dussault, B., Golden, B., Groër, C., y Wasil, E. (2013). Plowing with precedence: A variant of the windy postman problem. *Computers & Operations Research*, 40(4), 1047–1059.

Dussault, B., Golden, B., y Wasil, E. (2014). The downhill plow problem with multiple plows. *Journal of the Operational Research Society*, 65(10), 1465–1474.

Ehmke, J. F., Campbell, A. M., y Thomas, B. W. (2016). Vehicle routing to minimize time-dependent emissions in urban areas. *European Journal of Operational Research*, 251(2), 478–494.

Erdoğan, S., y Miller-Hooks, E. (2012). A green vehicle routing problem. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 48(1), 100–114.

Figliozzi, M. (2010). Vehicle routing problem for emissions minimization. *Transportation*

Research Record: Journal of the Transportation Research Board(2197), 1–7.

Franceschetti, A., Honhon, D., Van Woensel, T., Bektaş, T., y Laporte, G. (2013). The time-dependent pollution-routing problem. *Transportation Research Part B: Methodological*, 56, 265–293.

Golden, B., Bodin, L., Doyle, T., y Stewart Jr, W. (1980). Approximate traveling salesman algorithms. *Operations research*, 28(3-part-ii), 694–711.

Google. (2017). *Google maps elevation api*. Descargado 2017-11-08, de <https://developers.google.com/maps/documentation/elevation/start?hl=en>

Hickman, J., Hassel, D., Joumard, R., Samaras, Z., y Sorenson, S. (1999). Methodology for calculating transport emissions and energy consumption.

Jabali, O., Van Woensel, T., y De Kok, A. (2012). Analysis of travel times and co2 emissions in time-dependent vehicle routing. *Production and Operations Management*, 21(6), 1060–1074.

Koç, Ç., Bektaş, T., Jabali, O., y Laporte, G. (2014). The fleet size and mix pollution-routing problem. *Transportation Research Part B: Methodological*, 70, 239–254.

Kopfer, H. W., Schönberger, J., y Kopfer, H. (2014). Reducing greenhouse gas emissions of a heterogeneous vehicle fleet. *Flexible Services and Manufacturing Journal*, 26(1-2), 221–248.

Kuo, Y., y Wang, C.-C. (2011). Optimizing the vrp by minimizing fuel consumption. *Management of Environmental Quality: An International Journal*, 22(4), 440–450.

Lenstra, J. K., y Kan, A. (1981). Complexity of vehicle routing and scheduling problems.

Networks, 11(2), 221–227.

Qian, J., y Eglese, R. (2016). Fuel emissions optimization in vehicle routing problems with time-varying speeds. *European Journal of Operational Research*, 248(3), 840–848.

Savelsbergh, M. W. (1985). Local search in routing problems with time windows. *Annals of Operations research*, 4(1), 285–305.

SECTRA. (2017). *Metodologías y herramientas de análisis de sistemas de transporte*. Descargado 2017-08-30, de <http://www.sectra.gob.cl/metodologias/estaus.htm>

Solomon, M. M. (1987). Algorithms for the vehicle routing and scheduling problems with time window constraints. *Operations research*, 35(2), 254–265.

Stevanovic, A., Stevanovic, J., Zhang, K., y Batterman, S. (2009). Optimizing traffic control to reduce fuel consumption and vehicular emissions: Integrated approach with vis-sim, cmem, and visgaost. *Transportation Research Record: Journal of the transportation research board*(2128), 105–113.

Toth, P., y Vigo, D. (2014). *Vehicle routing: problems, methods, and applications*. SIAM.

Velázquez-Martínez, J. C., Fransoo, J. C., Blanco, E. E., y Valenzuela-Ocaña, K. B. (2016). A new statistical method of assigning vehicles to delivery areas for co 2 emissions reduction. *Transportation Research Part D: Transport and Environment*, 43, 133–144.

Xiao, Y., y Konak, A. (2016). The heterogeneous green vehicle routing and scheduling problem with time-varying traffic congestion. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 88, 146–166.

ANEXO

A. EXTENSIÓN DEL MODELO DE OPTIMIZACIÓN

La extensión del modelo contempla 3 horarios de tráfico: punta mañana, fuera de punta y punta tarde. De este modo la velocidad por arco es de este estilo:

- Velocidad por arco: $v_{ij}^p, \forall (i, j) \in A \forall p \in P$

Siendo $P = \{1, 2, 3\}$, representa los tres períodos antes mencionados. La figura A.1 muestra el perfil de velocidad para un arco de la red. El día comienza en $t = 0$, inicialmente en hora punta mañana durante a unidades de tiempo. Luego viene el horario fuera de punta hasta $t = e$. La punta tarde es el último período del día comenzando en $t = e$. A partir de este perfil calculamos el tiempo de viaje del arco (i, j) como explica en (Jabali et al., 2012; Franceschetti et al., 2013). La figura A.2 muestra el tiempo de viaje del arco (i, j) según el instante de salida del nodo i hacia el nodo j (w_{ij}).

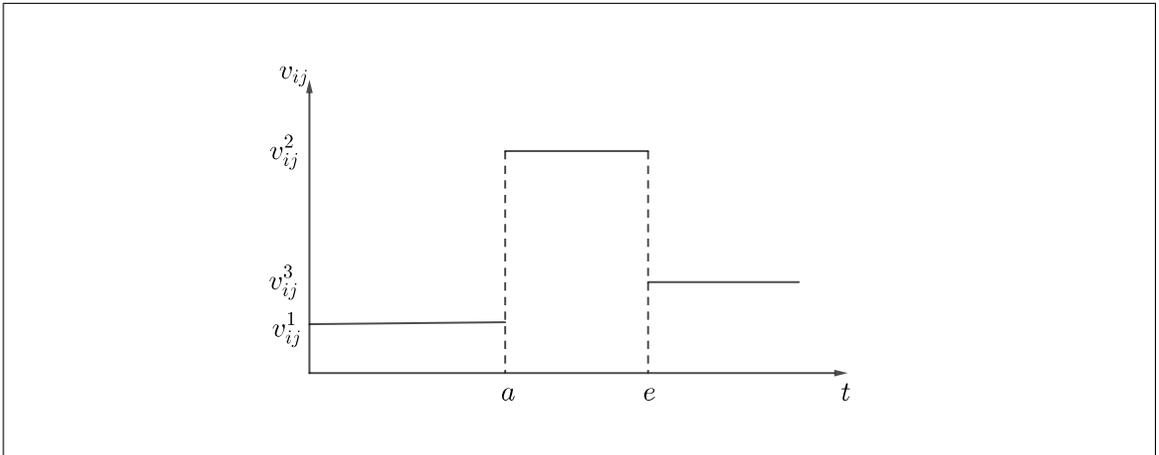


Figura A.1. Perfil de velocidad

En la figura A.2 observamos 5 regiones definidas por: $b_{ij}^0 = 0$, $b_{ij}^1 = a - d_{ij}/v_{ij}^1$, $b_{ij}^2 = a$, $b_{ij}^3 = e - d_{ij}/v_{ij}^2$, $b_{ij}^4 = e$, $b_{ij}^5 = T$. Estos puntos definen 5 períodos definidos como $[b_{ij}^{m-1}, b_{ij}^m)$, $m \in \{0, \dots, 5\}$.

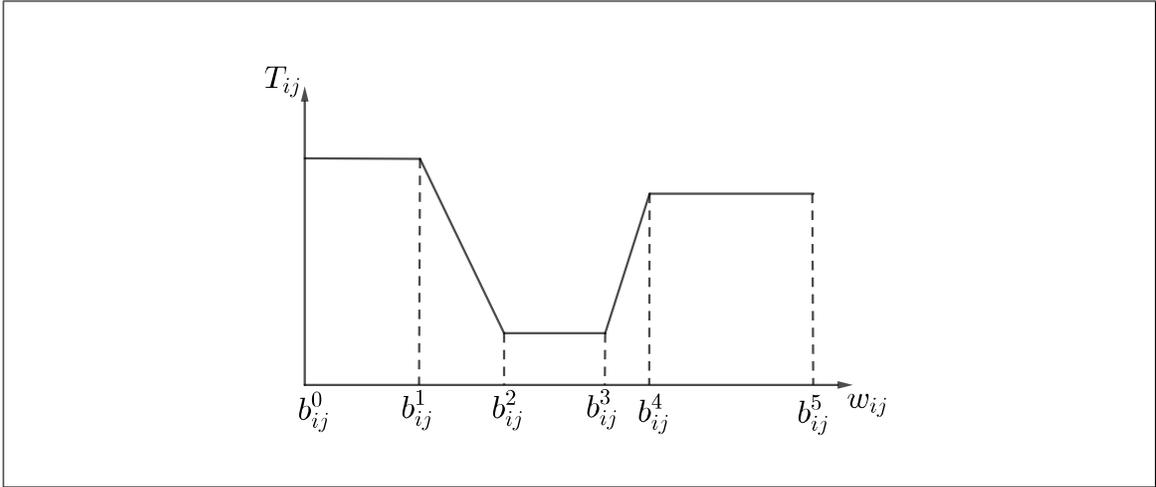


Figura A.2. Tiempo de viaje arco

Variables de decisión

x_{ij}^{kmt} : Variable binaria que toma el valor 1 si el vehículo $k \in K$ despachado en $t \in \{1, 2\}$ utiliza el arco $(i, j) \in A$ en intervalo $m \in \{1, \dots, 5\}$. Toma el valor 0 en caso contrario.

f_{ij}^{kt} : Variable no-negativa que representa la carga transportada del vehículo $k \in K$ despachado en $t \in \{1, 2\}$ al momento de pasar por el arco $(i, j) \in A$.

a_i : Variable no-negativa que representa el instante de tiempo en que el cliente $i \in N$ comienza a ser atendido.

w_{ij}^{kmt} : Variable no-negativa que representa el instante en que el vehículo $k \in K$ despachado en $t \in \{1, 2\}$ utiliza el arco $(i, j) \in A$ en intervalo $m \in \{1, \dots, 5\}$.

s^{kt} : Variable no-negativa que representa el tiempo total de la ruta del vehículo $k \in K$ despachado en $t \in \{1, 2\}$

z_k : Variable binaria que toma el valor 1 si el vehículo $k \in K$ puede realizar un segundo despacho. Toma el valor 0 en caso contrario.

g_{ij} : Variable no-negativa que representa el consumo de combustible en el arco $(i, j) \in A$.

Modelo

Calculamos el tiempo de viaje de un arco (i, j) siguiendo a (Franceschetti et al., 2013), solo que en este caso estamos considerando un período adicional. Definimos los siguientes parámetros.

$$\theta_{ij}^m = \begin{cases} 0 & m = 1 \\ \frac{v_{ij}^1 - v_{ij}^2}{v_{ij}^2} & m = 2 \\ 0 & m = 3 \\ \frac{v_{ij}^2 - v_{ij}^3}{v_{ij}^3} & m = 4 \\ 0 & m = 5 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

$$\eta_{ij}^m = \begin{cases} \frac{d_{ij}}{v_{ij}^1} & m = 1 \\ \frac{d_{ij}}{v_{ij}^2} + \frac{v_{ij}^2 - v_{ij}^1}{v_{ij}^1} a & m = 2 \\ \frac{d_{ij}}{v_{ij}^2} & m = 3 \\ \frac{d_{ij}}{v_{ij}^3} + \frac{v_{ij}^3 - v_{ij}^2}{v_{ij}^3} e & m = 4 \\ \frac{d_{ij}}{v_{ij}^3} & m = 5 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

El tiempo de viaje de un vehículo que sale en el instante w_{ij}^{kmt} se calcula como:

$$T_{ij}^V = \theta_{ij}^m w_{ij}^{kmt} + \eta_{ij}^m x_{ij}^{kmt} \quad (\text{A.3})$$

La función objetivo es:

$$\text{mín} \sum_{(i,j) \in A} p_c \cdot g_{ij} + \sum_{t=1}^2 \sum_{k \in K} p_d \cdot s^{ht} \quad (\text{A.4})$$

Buscamos minimizar el costo del consumo de combustible y el costo de tiempo en ruta.

El consumo de combustible depende de la velocidad. Por lo tanto, en las zonas transientes (donde ocurre un cambio de velocidad) se debe distinguir qué fracción del tiempo se recorre a cada velocidad para realizar el cálculo del consumo de combustible.

La primera región transiente, los tiempos recorridos a velocidad v_{ij}^1 y v_{ij}^2 son los que siguen:

$$\begin{cases} v_{ij}^1 \rightarrow ax_{ij}^{h2t} - w_{ij}^{h2t} \\ v_{ij}^2 \rightarrow \theta_{ij}^2 w_{ij}^{h2t} + \eta_{ij}^2 x_{ij}^{h2t} - ax_{ij}^{h2t} + w_{ij}^{h2t} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Para la segunda región transiente, los tiempos recorridos a velocidad v_{ij}^2 y v_{ij}^3 son los que siguen:

$$\begin{cases} v_{ij}^2 \rightarrow ex_{ij}^{h4t} - w_{ij}^{h4t} \\ v_{ij}^3 \rightarrow \theta_{ij}^4 w_{ij}^{h4t} + \eta_{ij}^4 x_{ij}^{h4t} - ex_{ij}^{h4t} + w_{ij}^{h4t} \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Las restricciones son las siguientes:

$$\sum_{j \in N_0} \sum_{m=1}^5 x_{0j}^{kmt=1} \leq 1 \quad \forall k \in K \quad (\text{A.7})$$

$$\sum_{j \in N_0} \sum_{m=1}^5 x_{0j}^{kmt=2} = z_k \quad \forall k \in K \quad (\text{A.8})$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in N} \sum_{m=1}^5 x_{ij}^{kmt} = 1 \quad \forall i \in N \quad (\text{A.9})$$

$$\sum_{j \in N} \sum_{m=1}^5 x_{ij}^{kmt} = \sum_{j \in N} \sum_{m=1}^5 x_{ji}^{kmt} \quad \forall i \in N_0, \forall k \in K, \forall t \in \{1, 2\} \quad (\text{A.10})$$

$$x_{ij}^{kmt=2} \leq z_k \quad \forall (i, j) \in A, \forall k \in K \quad (\text{A.11})$$

$$\sum_{t=1}^2 \sum_{k \in K} \sum_{j \in N} f_{ji}^{kt} - \sum_{t=1}^2 \sum_{k \in K} \sum_{j \in N} f_{ji}^{kt} = q_i \quad \forall i \in N_0 \quad (\text{A.12})$$

$$q_j \sum_{m=1}^5 x_{ij}^{kmt} \leq f_{ij}^{kt} \leq (Q^k - q_i) \sum_{m=1}^5 x_{ij}^{kmt} \quad \forall (i, j) \in A, \forall k \in K, \forall t \in \{1, 2\} \quad (\text{A.13})$$

$$x_{ij}^{kmt} \theta_{ij}^{m-1} \leq w_{ij}^{kmt} \leq x_{ij}^{kmt} \theta_{ij}^m \quad \forall (i, j) \in A, \forall k \in K, \forall m, \forall t \in \{1, 2\} \quad (\text{A.14})$$

$$a_j = \sum_{t=1}^2 \sum_{m=1}^5 \sum_{k \in K} \sum_{j \in N} w_{ij}^{kmt} + \theta_{ij}^m w_{ij}^{kmt} + \eta_{ij}^m x_{ij}^{kmt} \quad \forall j \in N_0 \quad (\text{A.15})$$

$$\sum_{t=1}^2 \sum_{m=1}^5 \sum_{k \in K} \sum_{j \in N} w_{ij}^{kmt} = a_i + h_i \quad \forall i \in N_0 \quad (\text{A.16})$$

$$s^{kt} = \sum_{m=1}^5 \sum_{(i,j) \in A} \theta_{ij}^m w_{ij}^{kmt} + \eta_{ij}^m x_{ij}^{kmt} + \sum_{(i,j) \in A} \sum_{m=1}^5 h_i x_{ij}^{kmt} \quad \forall k \in K, \forall t \in \{1, 2\} \quad (\text{A.17})$$

$$s^{h1} \leq T^2 + (1 - z_k)(T^P - T^2) \quad \forall k \in K \quad (\text{A.18})$$

$$s^{k2} \leq T^P - T^2 \quad \forall k \in K \quad (\text{A.19})$$

$$Comb_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A \quad (\text{A.20})$$

$$\begin{aligned}
Comb_{ij} \geq & \sum_{t=1}^2 \sum_{k \in K} \sum_{m=1}^5 A_{ij}^h (\theta_{ij}^m w_{ij}^{kmt} + \eta_{ij}^m x_{ij}^{kmt}) + \sum_{t=1}^2 \sum_{k \in K} B_{ij}^k (\mu^k \sum_{m=1}^5 x_{ij}^{kmt} + f_{ij}^{kt}) \\
& + \sum_{t=1}^2 \sum_{k \in K} \sum_{m=1}^5 C_{ij}^k (\bar{v}_{ij}^m)^3 (\theta_{ij}^m w_{ij}^{kmt} + \eta_{ij}^m x_{ij}^{kmt}) + \sum_{t=1}^2 \sum_{k \in K} C_{ij}^k (v_{ij}^1)^3 (ax_{ij}^{k2t} - w_{ij}^{k2t}) \\
& + \sum_{t=1}^2 \sum_{k \in K} C_{ij}^k (v_{ij}^2)^3 (\theta_{ij}^2 w_{ij}^{k2t} + \eta_{ij}^2 x_{ij}^{k2t} - ax_{ij}^{k2t} + w_{ij}^{k2t}) \\
& + \sum_{t=1}^2 \sum_{k \in K} C_{ij}^k (v_{ij}^2)^3 (ex_{ij}^{k4t} - w_{ij}^{k4t}) \\
& + \sum_{t=1}^2 \sum_{k \in K} C_{ij}^k (v_{ij}^3)^3 (\theta_{ij}^4 w_{ij}^{k4t} + \eta_{ij}^4 x_{ij}^{k4t} - ex_{ij}^{k4t} + w_{ij}^{k4t}) \quad \forall (i, j) \in A
\end{aligned}$$

Siendo

$$\bar{v}_{ij}^m = \begin{cases} v_{ij}^1 & m = 1 \\ 0 & m = 2 \\ v_{ij}^2 & m = 3 \\ 0 & m = 4 \\ v_{ij}^3 & m = 5 \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

El conjunto de restricciones (A.7) impone que un vehículo puede salir máximo una vez del depósito durante el primer instante de despacho. El conjunto de restricciones (A.8) es análogo para el caso del segundo despacho.

El conjunto de restricciones (A.9) impone que todos los clientes sean visitados exactamente una vez. El conjunto de restricciones (A.10) impone que el vehículo que sale de un cliente, haya sido el mismo que lo visitó. El conjunto de restricciones (A.11) impone que vehículos que no puedan realizar un segundo despacho, no sean asignados a rutas presentes en el segundo instante de despacho.

El conjunto de restricciones (A.12) impone que la demanda de cada cliente sea satisfecha. El conjunto de restricciones (A.13) indica que el flujo de carga transportado por un arco es factible en términos de restricciones de capacidad de carga. El conjunto de restricciones (A.14) controla el instante de salida de un vehículo.

El conjunto de restricciones (A.15) calcula el instante de llegada a un cliente. El conjunto de restricciones (A.16) impone que el instante de salida de un nodo es igual al instante de llegada más el tiempo de servicio. El conjunto de restricciones (A.17) calcula la duración de rutas. El conjunto de restricciones (A.18) controla qué vehículos pueden realizar un segundo despacho. El conjunto de restricciones (A.19) mantiene la duración de rutas realizadas durante el segundo instante de despacho dentro del horizonte de planificación.

Finalmente, el conjunto de restricciones (A.20) y (A.21) calculan el consumo de combustible para cada arco. La naturaleza de variables es incluida al momento de definir las.

B. TABLA DE PARÁMETROS

Los parámetros utilizados se resumen en la Tabla B.1.

Tabla B.1. Parámetros utilizados.

Parámetro	Descripción	Valor
λ	razón entre combustible y aire ($1/L \text{ kj}$)	$3,08 \times 10^{-5}$
k	factor de fricción ($\text{kj}/\text{rev}/L$)	0,2
N	velocidad del motor (rev/s)	36,67
V	desplazamiento del motor (L)	6,9
g	aceleración de gravedad (m/s^2)	9,8
C_r	coeficiente de roce	0,01
C_d	coeficiente de arrastre	0,7
A	área frontal (m^2)	8
ρ	densidad del aire (kg/m^3)	1,2041
η_{tf}	eficiencia de transmisión	0,45
η_{engine}	eficiencia del motor	0,45
Q	carga máxima (kg)	13000
μ	masa del vehículo descargado (kg)	5500
p_c	precio combustible ($\$/L$)	500
p_d	precio tiempo ($\$/L$)	0,7