PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA

DESARROLLO Y APLICACIÓN DE UN MODELO DINÁMICO DE PRICING PARA PRODUCTOS SUSTITUTOS, CON REVISIONES PERIÓDICAS, BAJO CONSIDERACIONES DE VALOR RESIDUAL.

PEDRO DANIEL TIRAPEGUI ROJAS

Tesis presentada a la Dirección de Investigación y Postgrado
como parte de los requisitos para optar al grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Profesor Supervisor:
JUAN CARLOS FERRER ORTIZ

Santiago de Chile, Septiembre 2008

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA

DESARROLLO Y APLICACIÓN DE UN MODELO DINÁMICO DE PRICING PARA PRODUCTOS SUSTITUTOS, CON REVISIONES PERIÓDICAS, BAJO CONSIDERACIONES DE VALOR RESIDUAL.

PEDRO DANIEL TIRAPEGUI ROJAS

Miembros del Comité:

JUAN CARLOS FERRER ORTIZ

JORGE RAFAEL VERA ANDREO

VÍCTOR MANUEL ALBORNOZ SANHUEZA

JOSÉ ENRIQUE FERNÁNDEZ LARRAÑAGA

Para completar las exigencias del grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Santiago de Chile, Septiembre 2008

INDICE GENERAL

Página

ÍNDICE DE FIGURAS

Página

ÍNDICE DE TABLAS

Página

A mis padres, máximo orgullo y ejemplo a seguir

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecerle a Dios por el mayor regalo que siempre tendré, mi familia, quienes me han apoyado en todas las decisiones y desafíos que he emprendido. Gracias a mis padres, por los valores y principios que me inculcaron y que representan el mayor y mejor legado que puedo haber recibido. Su esfuerzo, perseverancia y entrega me demuestran que se puede obtener lo que uno desea con dedicación.

También a mis hermanos, con los que he compartido gratos e inolvidables momentos, especialmente en esta época universitaria.

Quiero agradecer a mi profesor guía Juan Carlos Ferrer, por su disposición y colaboración tanto en el desarrollo de la tesis como en lo personal.

También quiero agradecer a mis compañeros de la oficina 16: Francisco Olivares, Alejandro Sánchez y Francisca Valenzuela, con los que pude compartir en distintas instancias. Gracias por los momentos vividos.

Finalmente, quiero agradecer nuevamente a Dios, por guiarme y ayudarme en todas las pruebas que he debido afrontar en la vida...

RESUMEN

Esta investigación estudia el problema de determinación periódica de precios para productos sustitutos con consideraciones de valor residual que efectúa un retailer monopolista. Se desarrolla un modelo de programación dinámica definido por el inventario disponible al inicio de cada período. La llegada de clientes a la tienda se modela como un proceso de Poisson homogéneo y la elección es modelada con el modelo Logit Multinomial.

Se caracterizan algunas soluciones relacionadas con la trayectoria de los precios cuando existen modificaciones tanto de inventarios como de la valoración que tengan los clientes de los productos. En las primeras se encontró que en un momento dado: i) el precio óptimo de un producto alcanza un límite asintótico a medida que las unidades del sustituto aumentan a infinito, ii) el precio óptimo de un producto es una función no creciente de su propio inventario, iii) el beneficio del retailer es una función no decreciente del inventario pero con incrementos decrecientes. Para las segundas, se compara con el modelo de Bitran y Mondschein modificado [BMM], obteniéndose algunas relaciones con el inventario de los productos.

Se desarrolla una modelación del valor residual variable que depende de los eventos ocurridos en la temporada de venta a través del nivel de inventarios de ambos productos. Altos niveles de inventario afectan negativamente el valor residual pero con distinto impacto según se trate del mismo producto o del sustituto.

Finalmente se aplica el modelo a un caso real, obteniéndose mejoras en el beneficio (al menos un 36,9 % en la temporada y un 21,9 % con el inventario remanente).

ABSTRACT

This research studies the periodic pricing problem of substitute products with considerations of residual value that makes a monopolist retailer. We develop a dynamic programming model defined by the inventory available at the beginning of each period. The arrival of customers in the store is modeled by a homogeneous Poisson process and the choice is modeled with the multinomial logit model (MNL).

Some solutions related to the trajectory of prices are characterized when there are changes on inventories and valuation that consumers have for each product. In the first change was found at any given time: i) the optimal price of a product reach an asymptotical limit as the number of substitute products grows infinitely, ii) the optimal price of a product is a nonincreasing function of its units in inventory, iii) the retailer's profit is a nondecreasing function of its own inventory but with decreasing marginal increments. In the second change, compared with the modified Bitran and Mondschein model [BMM], obtaining some relations with the level of inventories of both products.

We develop a modeling variable residual value depending on events that occurred in the selling season through the level of inventories of both products. High levels of inventory negatively affect the residual value but with different impact depending on whether the same product or substitute.

Finally the model was applied to a case of actual sales, obtaining improvements in the incomes (at least 36.9% in the regular season and 21.9% with the remaining inventory).

NOTACIÓN

K	Número total de períodos de revisión y determinación de precios.
k	Subíndice que representa el período de tiempo.
ΔT_k	Largo del período k.
λ	Tasa de llegada de clientes a la tienda.
p_i^k	Tarifa periódica del producto i en el período k.
$\mathbf{p}^k$	Vector de precios que tiene el *retailer* en el período k.
s_i^k	Inventario del producto i en el período k.
$\mathbf{s}^k$	Vector de inventarios que tiene el *retailer* en el período k.
$V^k(s_i^k, s_j^k)$	Ingresos esperados por el *retailer* desde el período k en adelante, cuando posee $\mathbf{s}^k$ unidades en inventario.
α_i	Valoración de los clientes por el producto i.
β	Parámetro de escala para la sensibilidad al precio.
$q_i\left(\mathbf{p}^k\right)$	Probabilidad que el cliente escoja el producto i como su opción de compra, dado el vector de precios $\mathbf{p}^k$.
ϕ_{a_1,a_2}	Probabilidad que a_1 clientes compren el producto 1 y a_2 clientes compren el producto 2.
F_i	Valor residual constante del producto $i = 1, 2$.
δ_i	Variación que experimenta el valor residual del producto $i = 1, 2$ para la consideración de valor residual variable ($\%$).
$R_{i,\mathbf{s}^0}$	Valor residual variable del producto $i = 1, 2$ cuando queda con $\mathbf{s}^0$ unidades en inventario.

1. INTRODUCCIÓN

Hoy en día, como una forma de ofrecer más alternativas a los consumidores, los *retailers* ofrecen una amplia gama de productos de similares características que permiten la elección tanto por precio como por su disponibilidad al momento efectuar la compra (Rajaram y Tang, 2001; Kök y Fisher, 2007). Esto se ha visto reflejado en el aumento de productos de marcas propias del *retailer* que incluyen productos sustitutos para necesidades básicas como algunos de líneas *premium*. Estas alternativas compiten con los productos de marcas tradicionales a través del precio, variable utilizada para influenciar ciertos patrones de sustitución de preferencias en el cliente, por lo que no sólo es importante desde un punto de vista financiero sino que también desde el operacional (Bitran y Caldentey, 2003). Estas perspectivas están fuertemente ligadas en la industria del *retail* por las características de los productos (servicios) sustitutos que ofrecen en las temporadas de venta, donde generalmente tienen un plazo máximo y las relaciones de precio/inventario determinan su éxito o fracaso, haciendo necesario conocer las interacciones que ocurren entre estos (efecto de sustitución) debido a valoraciones efectuadas por los clientes. Otro aspecto relacionado con la duración y éxito de la temporada de ventas corresponde al valor del producto al final de ésta y su posible venta en tiendas de descuento o conveniencia, donde se liquidan a un precio significativamente menor al que se ofreció regularmente y que es considerado fijo por unidad no vendida, independiente de las condiciones de la temporada (Cachon y Kök, 2007). Considerando lo anterior, el objetivo general de esta investigación es encontrar una estrategia óptima de precios que considere las características de los productos sustitutos ofrecidos y que permita a los *retailers* maximizar los beneficios en la temporada, además de analizar cómo estos se ven afectados por la consideración de valor residual adoptada: variable *vs* fijo. Los objetivos específicos son:

- Desarrollar un modelo de gestión dinámica de precios para productos sustitutos en múltiples períodos.
- Modelar un valor residual variable que permita incluir las aprensiones respecto de la consideración de valor residual fijo.
- Encontrar propiedades que permitan generalizar los resultados obtenidos.
- Aplicar el modelo propuesto a una situación real de un *retailer* chileno y comparar sus resultados.

La investigación se estructura como sigue. En la sección 2 se comenzará con una revisión de la literatura. En la sección 3 se describirá la forma de modelar características relacionadas con el cliente: la elección por uno de los productos y la llegada a la tienda. En la sección 4 se describe el problema, se plantea el modelo así como la forma en que se calculará el valor residual de los productos. En la sección 5 se realiza un análisis de los resultados obtenidos, caracterizando los más importantes para distintos valores de los parámetros y consideraciones de valor residual. En la sección 6 se utiliza el modelo para compararlo con la operación real de un *retailer* chileno, obteniendo mejoras significativas en el beneficio. Finalmente, en la sección 7 se presentan las conclusiones y los trabajos futuros que se pueden realizar a partir de esta investigación.

2. REVISIÓN LITERATURA

Para abordar todos los tópicos relacionados con la investigación, se revisan artículos de:

- Modelos de sustitución de demanda.
- Modelos de gestión dinámica de precios.
- Valor residual.

Dentro de cada tópico existen trabajos que se diferencian por la variedad y profundidad de las materias analizadas, pero ninguno reúne los tres temas desde la perspectiva considerada en esta investigación.

2.1 Modelos de sustitución de demanda

La mayoría de los artículos modelan la relación existente entre productos sustitutos desde la perspectiva de selección óptima por categoría (surtido), dejando de lado las consideraciones de precio (Bitran et al., 2005). Esta selección la realizan desde 3 enfoques distintos: El primero consiste en asumir que la sustitución es efectuada por el consumidor en base al precio en la tienda (van Ryzin y Mahajan, 1999). Este artículo tiene la importancia de ser el primero en adoptar el modelo MNL para determinar la demanda de productos sustitutos, con el propósito de construir un surtido óptimo, donde la sustitución se da en el momento que el cliente debe elegir entre todas las opciones disponibles (modelo de una etapa), pero si el producto no está disponible, la venta se pierde (el cliente sólo conoce las opciones pero no el inventario). El segundo enfoque corresponde a la sustitución que se produce por la falta de *stock* para satisfacer la demanda (Smith y Agrawal, 2000; Kök y Fisher, 2007). En Smith y Agrawal (2000) proponen una metodología para resolver en forma conjunta el problema del surtido e inventario de productos para múltiples etapas: el cliente elige el producto que desea comprar así como un conjunto de posibles sustitutos que serán el nuevo conjunto de elección en el caso que la primera elección no tenga unidades en *stock*, existiendo la posibilidad de elegir uno de los sustitutos según ciertas probabilidades, del cual puede que existan o no unidades en *stock*. En el caso que existan unidades del sustituto, el cliente puede decidir si compra o no, y en caso contrario no realiza una nueva elección y la venta se pierde, terminando la posible elección del consumidor (modelo de dos etapas). Esta última restricción es levantada por Kök y Fisher (2007) proponiendo un modelo que si no existe inventario de la primera opción, existe una segunda opción que puede que tenga o no inventario; en el caso que si posea, el cliente efectúa la compra o se retira de la tienda sin realizarla, pero si no existe inventario el cliente elige su tercera opción, y así continúa la búsqueda hasta que el consumidor efectúe la compra o se retire sin realizarla. El tercer enfoque corresponde a la sustitución controlada por el *retailer*, que intenta satisfacer la demanda por un producto que no se encuentra en *stock* con el inventario de productos de mayor calidad. Esta sustitución rara vez se observa en la realidad, aunque existen algunos artículos como Bassok et al. (1999) que desarrollan un algoritmo que permite asignar los productos dependiendo de los costos, demandas e inventario de cada tipo para un período.

Desde la perspectiva de consideraciones de precios, Bitran et al. (2005) centran su estudio en la demanda que se realiza por una familia de productos, modelada por la intención de compra y el presupuesto disponible de los clientes, analizando el problema a nivel de subfamilias que presentan diferencias (no es sensible a alternativas equivalentes), permitiendo sólo la compra de un producto y sin consideraciones de valor residual. Dong et al. (2008) desarrollan un modelo que sólo permite la llegada de un cliente por período y donde la formulación tiene particularidades que no permite una optimización directa y la consideración de un valor residual sólo implica agregar el valor al precio calculado.

2.2 Modelos de gestión dinámica de precios

Una correcta determinación de precios puede afectar el comportamiento del consumidor, haciendo que éste adopte ciertos patrones de sustitución de preferencias en el corto plazo, por lo que no sólo es importante desde un punto de vista financiero sino que también desde el operacional (Bitran y Caldentey, 2003). La mayoría de los artículos relacionados con gestión dinámica de precios están referidos a sólo un tipo de producto, investigaciones que son analizadas en las revisiones efectuadas por Elmaghraby y Keskinocak (2003), y Bitran y Caldentey (2003), donde las agrupan por los supuestos utilizados así como por sus contribuciones, centrándose en modelos de *revenue management* para *retail*. Otros artículos importantes corresponden a Gallego y van Ryzin (1994), y Bitran y Mondschein (1997) que consideran una tienda con demanda estocástica por un inventario que se debe vender en una temporada. En Gallego y van Ryzin (1994) la demanda se modela como un proceso de Poisson homogéneo y se considera que el precio puede ser ajustado en forma continua en el horizonte de ventas planificado, lo cual no es muy utilizado en la práctica, ya que existen costos asociados con esta política, como costos de administración y coordinación de precios y otro costo implícito de destrucción de valor del producto. Por esta razón, Bitran y Mondschein (1997) modifican la modelación al utilizar políticas de revisión y gestión del precio en forma periódica, además de generalizar el problema al modelar la demanda como un proceso de Poisson no homogéneo, donde la función de distribución del precio de reserva[1] puede ir variando a través del tiempo. Una modelación de la demanda similar se encuentra en Zhao y Zheng (2000) quienes demuestran que el precio óptimo disminuye a medida que aumenta el inventario (para un tiempo dado) e identifican una condición suficiente bajo la cual el precio óptimo disminuye en el tiempo (para un inventario dado), y si ambas propiedades se cumplen, la política óptima tiene una forma escalonada. Para el caso en que el *retailer* posea múltiples tiendas, Bitran et al.(1998) analizan las políticas de precios de una cadena de *retail* que posee varias tiendas con precios coordinados, para modelos con/sin redistribución de inventarios entre tiendas y los contrastan con las prácticas normales de la industria.

Para múltiples productos, Gallego y van Ryzin (1997) desarrollan dos heurísticas aplicables a problemas de producción a diferentes tasas cuando se posee un inventario limitado de recursos y la demanda es sensible al precio, centrándose en la industria de aerolíneas. Una investigación más reciente resulta la de Maglaras y Meissner (2006) que estudian dos problemas de *revenue management*: gestión dinámica del precio para múltiples productos (Gallego y van Ryzin, 1997) y asignación de capacidades de producción para múltiples productos cuando los precios son conocidos. Ellos demuestran que ambos problemas pueden ser representados como un problema de gestión del precio de un producto, lo que permite un marco de solución conjunto.

[1] Máxima disposición a pagar del cliente por un producto.

2.3 Valor residual

La mayoría de las investigaciones consideran el supuesto que los productos tienen un valor residual 0 al término de la temporada de ventas, asumiéndolos como costos hundidos (Bitran y Mondschein, 1997; Bitran et al., 1998; van Ryzin y Mahajan, 1999; Zhao y Zheng, 2000; Bitran et al., 2005;Maglaras y Meissner, 2006), provocando "distorsiones en las medidas adoptadas" al no considerar la opción de vender el inventario remanente en tiendas de liquidación o realizar contratos con los proveedores que permitan establecer un precio para las unidades que se devuelvan (Mantrala y Rao, 2001). En el caso que estos posean un valor final, siempre se considera menor a su costo y fijo, independiente de las unidades vendidas en la temporada. Para esta última situación, generalmente redefinen la función de demanda así como el precio calculado, obteniéndose como el exceso sobre el valor residual en el caso que sea mayor al valor residual considerado y eliminando todos los precios menores a éste (Gallego y van Ryzin, 1994). Sin embargo, esta hipótesis fue cuestionada desde un principio: Hertz y Schaffir (1960) reconocen que el valor residual depende de las cantidades de inventario involucrado pero consideran que un valor fijo puede ser una adecuada aproximación inicial, y Cachon y Kök (2007) concluyen que la hipótesis de valor residual fijo es cuestionable cuando el precio es elegido en respuesta de los posibles eventos que se puedan observar en la temporada de ventas: menor precio si el producto no se vendió mucho o un mayor precio si el producto tuvo altas ventas en la temporada y pocas unidades quedaron al final de ésta. Para ello analizan distintos métodos utilizados para calcular el valor residual y los aplican al problema del vendedor viajero, además de proponer un método para su cálculo, analizando los resultados desde la perspectiva de cómo cambian los resultados si los valores utilizados están influenciados por decisiones del modelo y no son fijados a priori.

No existen investigaciones que estudien las relaciones que puedan existir e influenciar el valor residual de los productos sustitutos, por lo que en esta dirección se centrará la investigación, analizando cómo afecta en los beneficios la determinación de un valor residual que considere los eventos ocurridos en la temporada, tanto del producto analizado como de su(s) sustituto(s), bajo el esquema de tarificación periódica.

3. MODELACIÓN DE LOS CLIENTES

3.1 Proceso de elección

La elección efectuada por los clientes que llegan a la tienda en cada período se modela utilizando la teoría de la utilidad aleatoria al no conocer todos los factores que participan en el proceso de elección, donde se supone que la utilidad que reporta cada producto al cliente puede ser descompuesta en una componente determinística y otra aleatoria (McFadden, 1972), y dentro de estos se escoge el modelo de elección discreta Logit Multinomial, MNL ($Ver\ Anexo$ A). Este modelo es ampliamente utilizado para representar elecciones entre un *set* de alternativas por su simplicidad, ya que es posible derivar de una forma cerrada y sencilla la función de probabilidad de elección de una de éstas (Domencich y McFadden, 1975).

Supuesto 1 *Sea $N = \{1, 2, ..., n\}$ el conjunto de todos los productos disponibles y que son considerados como sustitutos.*

Se asume que la utilidad que reporta cada producto $i \in N$ a un cliente en el período k es

$$U_i^k = \alpha_i - \beta \cdot p_i^k + Z_i \quad \forall i = 1, 2, ..., n; k = 1, 2, ..., K. \tag{3.1}$$

y la opción de "*no comprar*" posee una utilidad

$$\alpha_0 - \beta \cdot p_0^k \equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad U_0^k = Z_0 \quad \forall k = 1, 2, ..., K. \tag{3.2}$$

En este modelo, el parámetro α_i modela atributos del producto como calidad, imagen de la marca y otras cualidades inherentes[2], p_i^k representa el precio del producto i en el período k y el parámetro β es la respuesta al precio por parte del consumidor (sensibilidad al precio). Por otra parte, la variable aleatoria Z_i, $i = 0, 1, ...n$, modela las preferencias individuales de cada consumidor, que se asumen independientes e idénticamente distribuidas (iid) Gumbel con función de distribución:

$$F_{Z_i}(z) = \exp(-(e^{\frac{z}{\mu}+\gamma})) \qquad \forall i = 0, 1, ..., n. \tag{3.3}$$

donde μ es un parámetro de escala y γ corresponde a la constante de Euler ($\approx 0,5772$).

Supuesto 2 *Los clientes actúan de manera racional, maximizando su utilidad neta personal (homo economicus), sujeto a restricciones relacionadas con su entorno y tiempo.*

A partir del supuesto anterior y usando el vector de precios de todos los productos disponibles, $\mathbf{p}^k = \left(p_1^k, p_2^k, ..., p_n^k\right)$, un consumidor escoge comprar el producto i (sólo una unidad) con probabilidad

$$q_i(p_1^k, p_2^k, ..., p_n^k) = P\left\{U_i^k = \max_{j=0,1,...,n} U_j^k\right\} \forall i = 0, 1, ..., n; k = 1, 2, ..., K. \tag{3.4}$$

$$q_i(p_1^k, p_2^k, ..., p_n^k) = \frac{e^{\alpha_i - \beta \cdot p_i^k}}{\sum_{j=0}^{n} e^{\alpha_j - \beta \cdot p_j^k}} \qquad \forall i = 0, 1, ..., n; k = 1, 2, ..., K. \tag{3.5}$$

[2] Se establece una correspondencia $1-1$ entre los atributos del producto y la valoración por parte de los clientes.

donde el producto 0 se interpreta como la decisión de no compra.

Si alguno de los productos no se encuentra disponible o el *retailer* no desea venderlo en ese período, las probabilidades de compra se ven modificadas producto de la disminución de alternativas donde elegir. Para ello, el *retailer* fija el precio del producto i suficientemente alto $\left(p_i^k \rightarrow \infty\right)$, con lo que la probabilidad de elección de ese producto en la etapa k sea 0, dada la forma que tiene la función de utilidad.

Supuesto 3 *Sea D el conjunto de todos los productos disponibles o que el retailer desea vender.*

Utilizando las consideraciones anteriores, la probabilidad de elección de un producto disponible para la venta queda representada por:

$$q_i(\mathbf{p}^k) = \frac{e^{\alpha_i - \beta \cdot p_i^k}}{\sum\limits_{j \in D \cup \{0\}} e^{\alpha_j - \beta \cdot p_j^k}} \qquad \forall i \in \{D\}\,; k = 1, 2, ..., K. \tag{3.6}$$

y para los productos que no tienen unidades en inventario o que el *retailer* no desea vender, su probabilidad de elección es:

$$q_i(\mathbf{p}^k) = 0 \qquad \forall i \in \{N - D\}\,; k = 1, 2, ..., K. \tag{3.7}$$

3.2 Proceso de llegada

La llegada de los clientes a la tienda, en cada período, se modela mediante un proceso de Poisson con tasa λ, que es función de los patrones de compra y no del precio específico de los productos. Este comportamiento es realista para tiendas que manejan un gran número de productos y a las cuales llegan los clientes motivados principalmente por la variedad y comodidad más que por los niveles de precio que en general desconocen con exactitud, consideración que se mantiene en las campañas de liquidación o descuentos, ya que estos son anunciados para la familia de productos y sólo una pequeña muestra son resaltados (Bitran y Mondschein, 1997). A pesar que la llegada es independiente de los precios $\mathbf{p}^k$, la elección por algún producto si depende de todos los precios (*Ver sección* 3,1)**.**

Definición 1 *Utilizando las probabilidades de elección $q_i(p^k_{1,}p^k_{2,}...,p^k_n)$, el proceso de Poisson de llegada de clientes a la tienda se puede dividir en "n" procesos de Poisson independientes de compra con tasa $\lambda q_i(p^k)$, $i = 1, 2, ..., n$.(por propiedad del proceso de Poisson).*

La modelación considera que el *retailer* revisa y determina los precios de los productos en forma periódica, cumpliéndose para una temporada de ventas T que se divide en K períodos:

$$\sum_{k=1}^{K} \Delta T_k = T \tag{3.8}$$

donde ΔT_k el largo del $k - \acute{e}simo$ período.

Por esta razón se permite la llegada de múltiples clientes a la tienda por período (pueden comprar sólo una unidad) y que se modelan como un proceso que sigue una distribución de Poisson, donde la función de distribución de probabilidad que a_1 clientes lleguen por el producto 1, a_2 clientes lleguen por el producto 2, ..., y a_n

clientes lleguen por el producto "n", todos en el período k, queda representada por:

$$\phi_{a_1,a_2,\ldots,a_n} = \Pr\left\{a_{1k}(\mathbf{p}^k) = a_1 \wedge a_{2k}(\mathbf{p}^k) = a_2 \wedge \ldots \wedge a_{nk}(\mathbf{p}^k) = a_n\right\} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}\phi_{a_1,a_2,\ldots,a_n} = {} & \tfrac{\exp(-\lambda\Delta T_k q_1(\mathbf{p}^k))}{a_1!} \cdot \tfrac{\exp(-\lambda\Delta T_k q_2(\mathbf{p}^k))}{a_2!} \cdot \ldots \cdot \tfrac{\exp(-\lambda\Delta T_k q_n(\mathbf{p}^k))}{a_n!} \\ & \cdot \left(\lambda\Delta T_k q_1(\mathbf{p}^k)\right)^{a_1} . \left(\lambda\Delta T_k q_2(\mathbf{p}^k)\right)^{a_2} \cdot \ldots \cdot \left(\lambda\Delta T_k q_n(\mathbf{p}^k)\right)^{a_n}\end{aligned} \tag{3.10}$$

Considerando la elección que realiza cada cliente al llegar a la tienda (expresión 3.5) y que determinan las distintas tasas de llegada para cada producto, y reemplazando en la expresión 3.10 se obtiene:

$$\begin{aligned}\phi_{a_1,a_2,\ldots,a_n} = {} & \frac{e^{-\left(\frac{\lambda\cdot(e^{\alpha_1-\beta\cdot p_1})\cdot\Delta t}{1+\sum\limits_{i=1}^{n} e^{\alpha_i-\beta\cdot p_i}}\right)} \cdot e^{-\left(\frac{\lambda\cdot(e^{\alpha_2-\beta\cdot p_2})\cdot\Delta t}{1+\sum\limits_{i=1}^{n} e^{\alpha_i-\beta\cdot p_i}}\right)} \cdot \ldots \cdot e^{-\left(\frac{\lambda\cdot(e^{\alpha_n-\beta\cdot p_n})\cdot\Delta t}{1+\sum\limits_{i=1}^{n} e^{\alpha_i-\beta\cdot p_i}}\right)}}{a_1!\cdot a_2!\cdot\ldots\cdot a_n!} \cdot \\ & \left(\frac{\lambda\cdot(e^{\alpha_1-\beta\cdot p_1})\cdot\Delta t}{1+\sum\limits_{i=1}^{n} e^{\alpha_i-\beta\cdot p_i}}\right)^{a_1} \cdot \left(\frac{\lambda\cdot(e^{\alpha_2-\beta\cdot p_2})\cdot\Delta t}{1+\sum\limits_{i=1}^{n} e^{\alpha_i-\beta\cdot p_i}}\right)^{a_2} \cdot\ldots\cdot \left(\frac{\lambda\cdot(e^{\alpha_n-\beta\cdot p_n})\cdot\Delta t}{1+\sum\limits_{i=1}^{n} e^{\alpha_i-\beta\cdot p_i}}\right)^{a_n}\end{aligned} \tag{3.11}$$

4. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

El problema consiste en un *retailer* que opera una tienda bajo condiciones monopólicas, vendiendo sólo dos productos sustitutos $(1, 2)$ en un horizonte de tiempo definido (T). Al inicio de la temporada el *retailer* posee un inventario de $\mathbf{s}^K = \{s_1^K, s_2^K\}$ unidades, y durante ésta no se permite el reabastecimiento de productos, supuesto realista para temporadas cortas o *lead time* largo de los productos. Se asume que el *retailer* revisa y determina periódicamente (K períodos) los precios de los productos en la temporada de ventas, influenciado por los eventos ocurridos durante ésta, es decir, su determinación en un período dependerá del inventario del producto y el de su sustituto (relacionado con las ventas en períodos anteriores). Considerando esta última dependencia, la hipótesis de un valor residual conocido y fijo por unidad no vendida, independiente del inventario al final de la temporada, es cuestionable (Elmaghraby y Keskinocak, 2003; Cachon y Kök, 2007).

4.1 Descripción del modelo

El modelo permite determinar la política óptima de precios que debe adoptar un *retailer* que vende dos productos sustitutos en una temporada sin competencia. Para replicar las prácticas comunes de las empresas de *retail*, el modelo revisa y determina periódicamente el precio de los productos con el propósito de evitar costos de administración que debe incurrir la práctica de fijación continua así como la "*destrucción de valor del producto*" resultado de la fluctuación continua de precios en la temporada (Bitran y Mondschein, 1997). Por esta razón, la temporada de ventas (T) se divide en K períodos que se enumeran en forma regresiva, es decir, $k = K$ y

$k=1$ corresponden al primer y último período de venta regular respectivamente, y $k=0$ corresponde al período donde el inventario remanente se vende a valor residual. Los clientes llegan a la tienda en cada período de acuerdo a un proceso de Poisson con tasa λ, independiente del vector de precios, y realizan una elección por el producto que maximiza su utilidad personal considerando el precio de ambos productos.

Se define $\mathbf{p}^k = \left\{p_1^k, p_2^k\right\}$ como el vector de precios de los productos en el período k, perteneciente al espacio$([0,...,\infty], [0,...,\infty])$, donde el precio $p_i^k = \infty \, (i=1,2)$, corresponde a la situación en que el *retailer* no posee unidades en inventario del producto i en la etapa k o no desea venderlos. No se consideran los costos de los productos en la determinación de precios.

Luego, el máximo beneficio esperado si el *retailer* comienza la etapa k con $\mathbf{s}^k$ unidades en inventario $\left(V^k(\mathbf{s}^k)\right)$ se modela:

$$\begin{aligned} & V^k(\mathbf{s}^k) = \\ & \max_{\substack{p_1^{k+1} \geq p_1^k \geq 0 \\ p_2^{k+1} \geq p_2^k \geq 0}} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \left[\begin{array}{c} p_1^k \min(i, s_1^k) + p_2^k \min(j, s_2^k) + \\ V^{k-1}(s_1^k - \min(i, s_1^k), s_2^k - \min(j, s_2^k)) \end{array} \right] \phi_{i,j}(\mathbf{p}^k) \right] \end{aligned} \tag{4.1}$$

con condiciones de borde:

$$\begin{array}{ll} V^0(s_1^0, s_2^0) = \mathbf{R}_0 & \forall s_1^0 = 1,2,...,s_1^K; s_2 = 1,2,...,s_2^K. \\ V^k(0{,}0) = 0 & \forall k = 1,2,...,K. \end{array} \tag{4.2}$$

Esta función representa el ingreso esperado de la etapa k más el ingreso esperado de la etapa $k-1$ en adelante.

Reemplazando la función de probabilidad del número de clientes del período k por la expresión 3.11 y realizando algunas manipulaciones algebraicas, el modelo se puede reescribir como:

$$V^k(\mathbf{s}^k) = \max_{\substack{p_1^{k+1} \geq p_1^k \geq 0 \\ p_2^{k+1} \geq p_2^k \geq 0}} \left[\begin{array}{c} \sum_{i=0}^{s_1^k} \left(p_1^k \cdot \left(i - s_1^k\right) + V^{k-1}\left(s_1^k - i, 0\right)\right) \cdot \phi_{i,\cdot} + p_1^k \cdot s_1^k + \\ \sum_{j=0}^{s_2^k} \left(p_2^k \cdot \left(j - s_2^k\right) + V^{k-1}\left(0, s_2^k - j\right)\right) \cdot \phi_{\cdot,j} + p_2^k \cdot s_2^k + \\ \sum_{i=0}^{s_1^k} \sum_{j=0}^{s_2^k} \left(\begin{array}{c} V^{k-1}\left(s_1^k - i, s_2^k - j\right) - V^{k-1}\left(0, s_2^k - j\right) \\ -V^{k-1}\left(s_1^k - i, 0\right) \end{array} \right) \cdot \phi_{i,j} \end{array} \right] \tag{4.3}$$

$$\phi_{i,j} = \frac{e^{-(\lambda \cdot q_1(\cdot,\cdot) \cdot \Delta t)} \cdot (\lambda \cdot q_1(\cdot,\cdot) \cdot \Delta t)^i}{i!} \cdot \frac{e^{-(\lambda \cdot q_2(\cdot,\cdot) \cdot \Delta t)} \cdot (\lambda \cdot q_2(\cdot,\cdot) \cdot \Delta t)^j}{j!} \tag{4.4}$$

$$\phi_{i,\cdot} = \frac{e^{-(\lambda \cdot q_1(\cdot,\cdot) \cdot \Delta t)} \cdot (\lambda \cdot q_1(\cdot,\cdot) \cdot \Delta t)^i}{i!} \tag{4.5}$$

$$\phi_{\cdot,j} = \frac{e^{-(\lambda \cdot q_2(\cdot,\cdot) \cdot \Delta t)} \cdot (\lambda \cdot q_2(\cdot,\cdot) \cdot \Delta t)^j}{j!} \tag{4.6}$$

donde el desarrollo se puede ver en el *Anexo* B.

Luego, dependiendo del inventario $\mathbf{s}^k$ que posea el *retailer* en el período k, se pueden reconocer 4 situaciones definidas por la probabilidad de elección de los clientes $q_i(\cdot,\cdot), i = 1, 2$:

– $s_1^k \neq 0 \wedge s_2^k \neq 0$:

$$q_1(p_1^k, p_2^k) = \frac{e^{\alpha_1 - \beta \cdot p_1^k}}{1 + e^{\alpha_1 - \beta \cdot p_1^k} + e^{\alpha_2 - \beta \cdot p_2^k}} \qquad \forall k = 1, 2, ..., K. \tag{4.7}$$

$$q_2(p_1^k, p_2^k) = \frac{e^{\alpha_2 - \beta \cdot p_2^k}}{1 + e^{\alpha_1 - \beta \cdot p_1^k} + e^{\alpha_2 - \beta \cdot p_2^k}} \qquad \forall k = 1, 2, ..., K. \tag{4.8}$$

$$q_0(p_1^k, p_2^k) = \frac{1}{1 + e^{\alpha_1 - \beta \cdot p_1^k} + e^{\alpha_2 - \beta \cdot p_2^k}} \qquad \forall k = 1, 2, ..., K. \tag{4.9}$$

– $s_1^k \neq 0 \wedge s_2^k = 0 :\Rightarrow p_2^k \longrightarrow \infty$

$$
\begin{aligned}
q_1(p_1^k, \infty) &= \frac{e^{\alpha_1 - \beta \cdot p_1^k}}{1 + e^{\alpha_1 - \beta \cdot p_1^k}} && \forall k = 1, 2, ..., K. && (4.10)\\
q_2(p_1^k, \infty) &= 0 && \forall k = 1, 2, ..., K. && (4.11)\\
q_0(p_1^k, \infty) &= \frac{1}{1 + e^{\alpha_1 - \beta \cdot p_1^k}} && \forall k = 1, 2, ..., K. && (4.12)
\end{aligned}
$$

– $s_1^k = 0 \wedge s_2^k \neq 0 :\Rightarrow p_1^k \longrightarrow \infty$

$$
\begin{aligned}
q_1(\infty, p_2^k) &= 0 && \forall k = 1, 2, ..., K. && (4.13)\\
q_2(\infty, p_2^k) &= \frac{e^{\alpha_2 - \beta \cdot p_2^k}}{1 + e^{\alpha_2 - \beta \cdot p_2^k}} && \forall k = 1, 2, ..., K. && (4.14)\\
q_0(\infty, p_2^k) &= \frac{1}{1 + e^{\alpha_2 - \beta \cdot p_2^k}} && \forall k = 1, 2, ..., K. && (4.15)
\end{aligned}
$$

– $s_1^k = 0 \wedge s_2^k = 0 :\Longrightarrow p_1^k \longrightarrow \infty \wedge p_2^k \longrightarrow \infty$

$$
\begin{aligned}
q_1(\infty, \infty) &= 0 && \forall k = 1, 2, ..., K. && (4.16)\\
q_2(\infty, \infty) &= 0 && \forall k = 1, 2, ..., K. && (4.17)\\
q_0(\infty, \infty) &= 1 && \forall k = 1, 2, ..., K. && (4.18)
\end{aligned}
$$

4.2 Valor residual

La modelación del valor residual considera los eventos ocurridos en la temporada (ventas), técnica que no es utilizada por los modelos de gestión dinámica de precios existentes que asumen un valor residual 0 (costos hundidos) o en su defecto uno fijo por unidad no vendida ($\neq 0$), independiente del inventario final y que resultan cuestionables al considerar la relación intertemporal de los precios con los beneficios que se pueden obtener en el último período como resultado del éxito de los productos, es decir, un menor precio si el inventario remanente es grande o uno mayor en el caso que existan sólo pocas unidades(Elmaghraby y Keskinocak, 2003; Cachon y Kök, 2007).

Se analiza el valor residual de uno de los productos (análogo para el otro) y se asume que el valor afectado por las ventas corresponde al que se obtendría si no existen unidades en *stock* del producto sustituto y el *stock* completo del producto analizado al final de la temporada, es decir, el valor fijado por unidad no vendida, independiente del inventario, de la actualidad. Por esta razón, se reconoce en el inventario final $\mathbf{s}^0$ el principal causante de las variaciones negativas que experimenta el valor residual, pero en distinto grado según se trate de inventario del mismo producto o del sustituto.

Supuesto 4 *El valor residual del producto $i = 1, 2$ es una función decreciente del inventario final $\mathbf{s}^0$.*

Se considera que el éxito de ventas del producto en la temporada afecta positivamente su valor residual debido a que sólo algunas unidades quedan en el inventario final, existiendo la opción de quedarse sin unidades en *stock* en el transcurso de ésta, por lo que la aprobación de los clientes genera una mayor valoración al final de la temporada.

Supuesto 5 *El valor residual de un producto aumenta mientras mayores hayan sido sus ventas en la temporada.*

Por otro lado, las malas ventas del producto sustituto afectan negativamente al aumentar el inventario remanente, por ende, la tienda de descuento debe liquidar una mayor cantidad de productos a un menor precio para aumentar su probabilidad de venta. Este impacto negativo disminuye a medida que transcurren los períodos donde el *retailer* revisa y determina los precios, debido a que el producto experimenta varios descuentos que no se reflejan en un aumento de sus ventas como consecuencia de una mala aceptación por parte de los clientes, disminuyendo su incidencia en el cálculo del valor residual.

Supuesto 6 *El valor residual de un producto disminuye al aumentar el inventario del sustituto.*

Supuesto 7 *La influencia del inventario del sustituto es inversamente proporcional al número de períodos de determinación de precios en la temporada.*

Además, existen otras consideraciones que se deben realizar para que la modelación sea consistente con las prácticas actuales:

Supuesto 8 *Existen tiendas que permiten obtener, con certeza, el valor residual de las unidades no vendidas (Mantrala y Rao, 2001).*

Supuesto 9 *Aunque no se consideran costos, el valor residual considerado debe ser menor que el costo marginal de adquirir el producto.*

El supuesto 9 se considera para evitar un posible incentivo que pueda presentar el *retailer* en sus órdenes, solicitando más unidades de las que realmente puede vender, con las que obtendría siempre beneficios al tener asegurada su venta el final de la temporada (supuesto 8), independiente del inventario final. Además, se debe tener en cuenta que los beneficios obtenidos producto del valor residual deben ser una función no decreciente del inventario considerado.

A partir de las características anteriores, el valor residual se modela:

$$\delta_1(s_1^K, s_1^0, s_2^0) = \frac{\left(s_1^K - s_1^0\right) - \frac{s_2^0}{K}}{\sum_{i=1}^{2} s_i^K} \quad \forall s_1^0 = 1, 2, ..., s_1^K; s_2^0 = 0, 1, 2, ..., s_2^K \tag{4.19}$$

$$\delta_2(s_2^K, s_1^0, s_2^0) = \frac{\left(s_2^K - s_2^0\right) - \frac{s_1^0}{K}}{\sum_{i=1}^{2} s_i^K} \quad \forall s_1^0 = 0, 1, 2, ..., s_1^K; s_2^0 = 1, 2, ..., s_2^K \tag{4.20}$$

$$R_{1,\mathbf{s}^0} = F_1 \cdot (1 + \delta_1) \qquad \forall \mathbf{s}^0 = \left\{1, 2, ..., s_1^K; 0, 1, 2, ..., s_2^K\right\} \tag{4.21}$$

$$R_{2,\mathbf{s}^0} = F_2 \cdot (1 + \delta_2) \qquad \forall \mathbf{s}^0 = \left\{0, 1, 2, ..., s_1^K; 1, 2, ..., s_2^K\right\} \tag{4.22}$$

$$R_{1,\mathbf{s}^0} = 0 \qquad \forall \mathbf{s}^0 = \left\{0; 1, 2, ..., s_2^K\right\} \tag{4.23}$$

$$R_{2,\mathbf{s}^0} = 0 \qquad \forall \mathbf{s}^0 = \left\{1, 2, ..., s_1^K; 0\right\} \tag{4.24}$$

, donde $R_{i,\mathbf{s}^0}$ corresponde al valor residual del producto $i = 1, 2$ cuando termina con $\mathbf{s}^0$ unidades en inventario. Para la obtención de este valor se calcula la variación porcentual (δ_i, $i = 1, 2$) que experimenta el valor (F_i, $i = 1, 2$) que se cobraría al vender todas las unidades del producto j y ninguna del mismo ($i \neq j$), cuando comienza la temporada con s_i^K ($i = 1, 2$) unidades en inventario.

5. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Los resultados que se presentan en este capítulo se obtienen tanto de simulaciones computacionales realizadas en el *software* $MATLAB$ como de análisis matemático, utilizando como base los resultados de la investigación efectuada por Gallego y van Ryzin (1994) quienes, ocupando una función de demanda regular[3] para un producto, derivan las siguientes propiedades estructurales de la política óptima de precios:

i) Para algún tiempo dado, el precio óptimo es una función no creciente de las unidades en inventario.

ii) Para un nivel de inventario dado, el precio óptimo es una función no creciente del tiempo.

Ambas propiedades hacen referencia a la monotonicidad de la función de demanda: monotonicidad de inventario (i) y monotonicidad de tiempo (ii).

Para todas las simulaciones[4] se considera que el *retailer* posee en la tienda un inventario inicial $\mathbf{s}^K = \{12, 12\}$ que debe vender en una temporada T que se divide en $K = 4$ períodos. En cada uno de estos, los clientes llegan según un proceso de Poisson con tasa $\lambda = 10$, presentando igual sensibilidad $\beta = 0,000765$ al precio de los productos. El análisis se realiza con el producto 1 (análogo para el producto 2) bajo distintos escenarios, según los supuestos y parámetros utilizados.

[3] Correspondencia $1-1$ entre el precio y la tasa de demanda específica.

[4] Se utilizan estos parámetros para respetar las características del modelo, que además son avalados por algunos resultados de la investigación de Bitran et al.(2005).

5.1 Resultados Considerando Valor Residual 0 ($\mathbf{R}_0 = 0$)

5.1.1 Los clientes presentan igual valoración media por los productos ($\alpha_1 = \alpha_2 = 3$).

Este caso corresponde a sustitutos perfectos, bajo el supuesto que ambos productos satisfacen las mismas necesidades, al presentar igual valoración por parte de los clientes (imagen, calidad y otras características propias del producto).

La formulación del modelo impone que la evolución experimentada por el precio óptimo de un inventario en el tiempo es una función no creciente de éste, práctica que ocurre con los productos estacionales, donde el *retailer* disminuye los precios a medida que se aproxima el fin de temporada con el propósito de aumentar su probabilidad de venta y así llegar al final de ésta con el menor inventario posible, idealmente 0 si no existen consideraciones de valor residual. Esta evolución intertemporal se observa en la figura 5.1.

Definición 2 *Para un inventario dado del producto $i = 1, 2$, el precio óptimo es una función no creciente del tiempo.*

La disminución intertemporal de precios para todos las posibles situaciones de inventario inicial ocurre hasta un límite asintótico inferior que se alcanza para varias combinaciones de alto inventario de productos (comparado con la tasa de llegada de clientes), situación que se aprecia claramente en el último período de venta ($k = 1$).

La evolución del precio óptimo para un período frente a cambios en el inventario tiene distinto comportamiento de acuerdo al inventario considerado: del mismo producto o

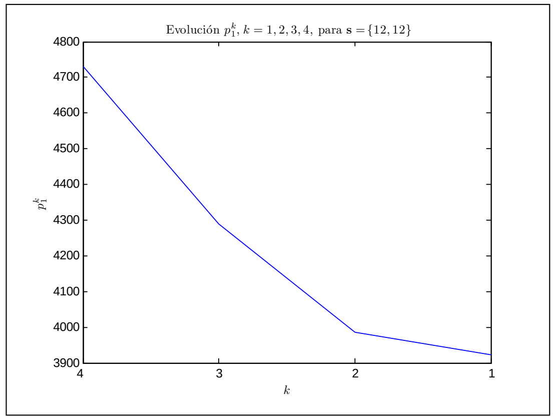

Figura 5.1 Evolución de p_1^k en la temporada de ventas.

del sustituto. Para el primer caso el precio óptimo disminuye a medida que aumentan sus unidades en inventario, situación provocada por un aumento en la oferta del *retailer* que genera una pérdida de exclusividad para el cliente que lo adquiere, y por ende obliga a disminuir su precio para aumentar las probabilidades de venta, lo que se muestra en la figura 5.2 (izquierda).

Proposición 1 *Para un tiempo dado, el precio óptimo de un producto es una función no creciente de su propio inventario y convexa.*

Demostración 1 *Dado que la función de demanda por un producto es regular (correspondencia uno a uno entre la tasa de demanda y el precio, Ver Anexo C) se utilizan los resultados obtenidos por Gallego y van Ryzin* (1994) *que permiten demostrar la proposición.*

Además, para el último período, se puede calcular analíticamente el máximo y mínimo precio p_1^1 que obtiene el *retailer* por una unidad del producto resolviendo el

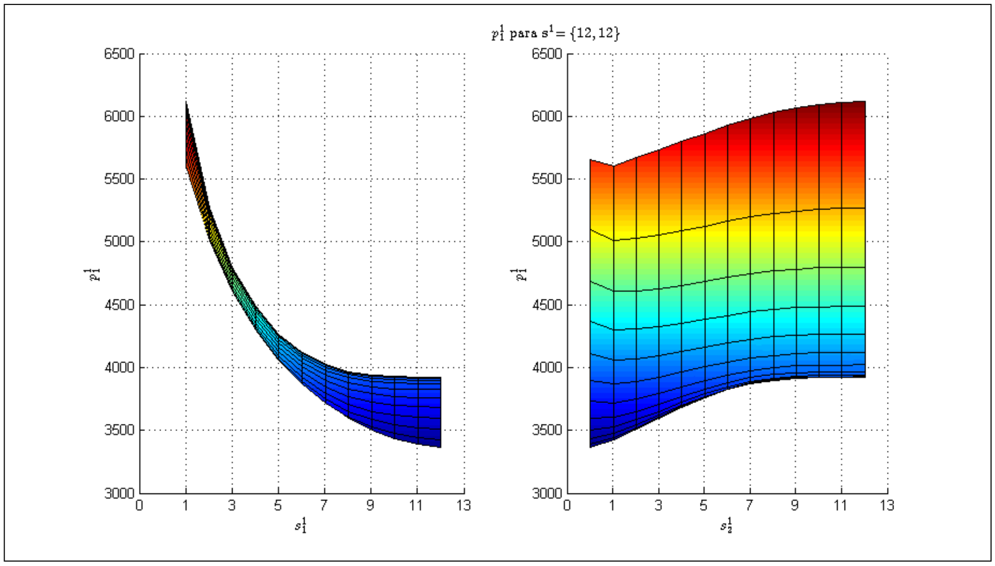

Figura 5.2 Evolución de p_1^1 al aumentar el inventario s_2^1 y s_1^1.

sistema de ecuaciones del *Anexo* D, para $s_1^1 = 1 \wedge s_2^1 \rightarrow \infty$ y para $s_1^1 \rightarrow \infty \wedge s_2^1 = 0$ respectivamente.

Para el segundo caso, el precio óptimo disminuye a medida que aumentan las unidades del sustituto hasta un cierto inventario que hace aumentar el precio óptimo hasta alcanzar un límite asintótico superior que depende de la sensibilidad al precio de los clientes y de las valoraciones que realizan por cada producto a través de las probabilidades de elección, y de la tasa de llegada de clientes a la tienda. Este límite se alcanza en menos períodos para los productos que son menos valorados por los clientes. En la figura 5.2 (derecha) se observa que el precio p_1^1 para el último período aumenta a medida que lo hace el inventario s_2^1 hasta un límite cercano a \$3920.

Proposición 2 *Para un período dado, el precio óptimo de un producto alcanza un límite asintótico superior a medida que aumentan las unidades del sustituto.*

Demostración 2 *Este precio se calcula resolviendo el sistema de ecuaciones del Anexo D, para* $s_1^1 \to \infty \wedge s_2^1 \to \infty$, *donde la nueva función de beneficios para el último período es* $V^1(\infty,\infty) = p_1^1 \lambda q_1(p_1^1, p_2^1) + p_2^1 \lambda q_2(p_1^1, p_2^1)$. *Ver el Anexo E para el cálculo del mínimo nivel de inventarios que alcanza el límite asintótico superior.*

Como resultado de las proposiciones anteriores se obtiene una región donde el precio alcanza un límite asintótico para varias combinaciones de inventario. Además, resultado de la evolución que experimenta el precio ante cambios en el inventario se concluye que el beneficio del *retailer* es una función no decreciente del inventario pero con incrementos decrecientes, debido a que los precios determinados por la política óptima son una función no creciente en el tiempo (para un inventario dado) y en el inventario (para un período dado) alcanzando un límite asintótico (inferior) que repercute en los beneficios del *retailer* que también alcanzan un límite asintótico(superior) para altos niveles de inventario (ver figura 5.3). Este beneficio límite se obtiene analíticamente para el modelo sin consideración de valor residual e inventario $\mathbf{s}^k \to \infty, k = 1, 2, ..., K$ en el *Anexo* D y se alcanza para pocas unidades en inventario, al igual que el resultado obtenido por Bitran et al. (2005).

Proposición 3 *El beneficio del retailer es una función no decreciente del inventario que posea en la temporada de ventas, pero con incrementos decrecientes.*

Demostración 3 *Al igual que la proposición* 1, *producto que la función de demanda por un producto es regular (correspondencia uno a uno entre la tasa de demanda y el precio, Ver Anexo C) se utilizan los resultados obtenidos por Gallego y van Ryzin* (1994) *que permiten demostrar la proposición.*

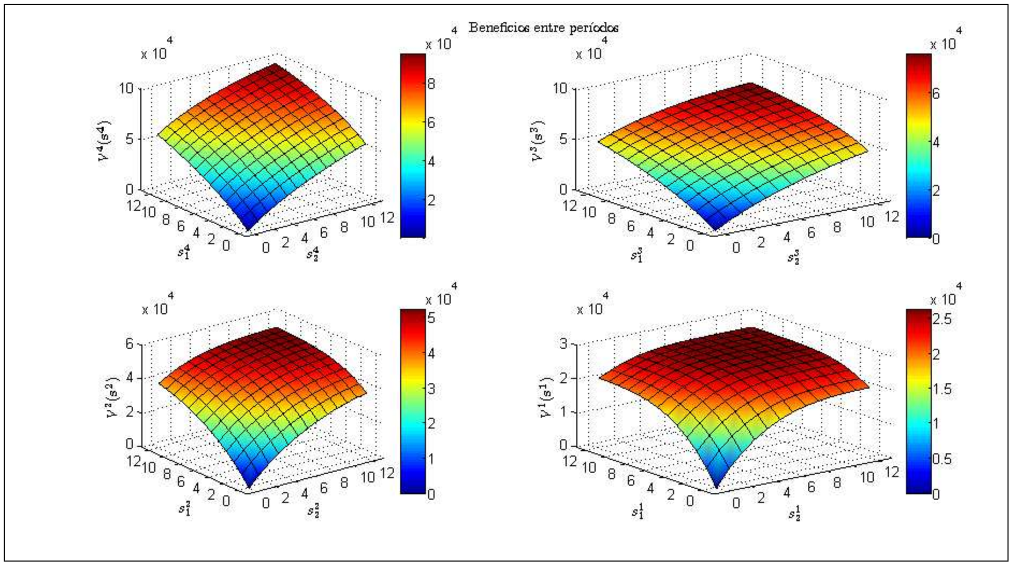

Figura 5.3 Beneficios esperados por período.

Este resultado tiene una implicancia directa en la determinación de precios, ya que la componente de la función de beneficios que modela la interacción entre ambos inventarios (sustitución)

$$\sum_{i=0}^{s_1^k}\sum_{j=0}^{s_2^k}\left(\begin{array}{c} V^{k-1}\left(s_1^k-i,s_2^k-j\right)-V^{k-1}\left(0,s_2^k-j\right) \\ -V^{k-1}\left(s_1^k-i,0\right)\end{array}\right)\leq 0 \qquad \forall k=1,2,...,K. \quad (5.1)$$

nunca será positiva. Este último resultado se demuestra para condiciones de $s_1^k \rightarrow \infty \wedge s_2^k \rightarrow \infty$ vs la consideración cada inventario por sí solo, como consecuencia de las probabilidades utilizadas ($Ver\ Anexo$ D):

$$q_1(p_1^k,p_2^k) \wedge q_2(p_1^k,p_2^k) \ vs \ q_1(p_1^k,\infty) \wedge q_2(\infty,p_2^k) \quad (5.2)$$

5.1.2 Los clientes presentan distinta valoración media por los productos ($\alpha_1 \neq \alpha_2$)

Este caso corresponde a productos que presentan distintos grados de sustitución como resultado de las diferencias en las valoraciones efectuadas por los clientes hacia el producto, donde la política óptima (figura 5.4) fija menores precios para los menos valorados para igual nivel de inventario $\mathbf{s}^k$, alcanzando en menos períodos el nivel de inventario s_2^k que hace aumentar el precio p_1^k hasta que se hace prácticamente constante como consecuencia de una menor probabilidad de elección. Sin embargo, a medida que avanzan los períodos en la temporada de ventas, el nivel mínimo de inventario $\mathbf{s}^k$ que determina un precio prácticamente constante para todo nivel de inventario mayor o igual a $\mathbf{s}^k$ disminuye para mayores valoraciones, pero a un precio mayor respecto al que se obtiene en productos de menores valoraciones. Esta situación se observa en la figura 5.5, donde p_1^1 para $\alpha_1 = 4$ es constante para un menor nivel s_2^1 a un precio mayor al que se obtiene para $\alpha_1 = 2$ ($Ver\ Anexo$ E).

5.1.3 Comparación con modelo Bitran y Mondschein (1997) Modificado [BMM]

Para analizar el caso en que el *retailer* no considere el efecto de sustitución entre productos, asumiendo que sólo posee un tipo de producto con un inventario inicial $s_s^K = s_1^K + s_2^K$, se compara el modelo propuesto con el desarrollado por Bitran y Mondschein (1997, p.71) con algunas modificaciones respecto a la modelación de la demanda y el precio reserva ($Ver\ Anexo$ F). Para hacer consistentes y comparables los modelos, se modifica la modelación de la demanda en Bitran y Mondschein, de un proceso de Poisson no homogéneo a uno homogéneo con intensidad de demanda

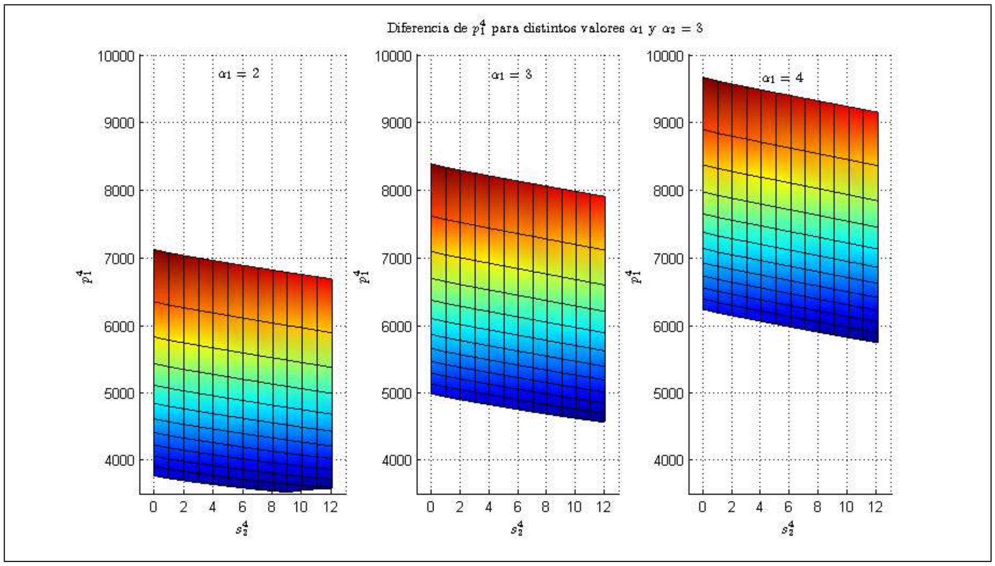

Figura 5.4 Diferencia de p_1^4 para distintas valoraciones medias del producto.

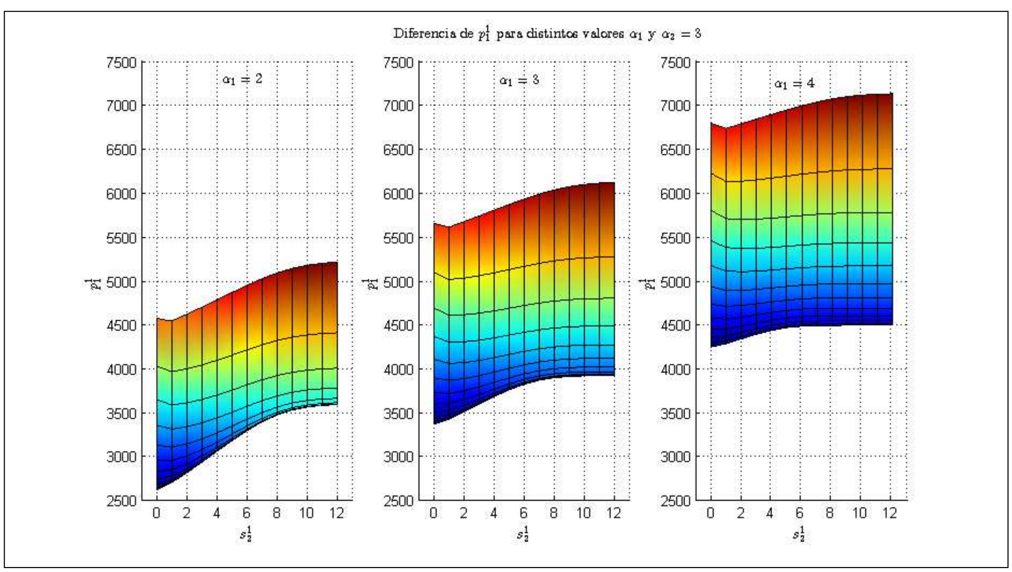

Figura 5.5 Diferencia de p_1^1 para distintas valoraciones medias del producto.

que no considera la distribución del precio de reserva sino que la elección que resulta del modelo MNL. Para la simulación, se utiliza igual valoración media de los productos ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_s = 3$) e igual factor de escala para la sensibilidad del precio ($\beta = \beta_s = 0,000765$), con inventarios $s_1^K = 12, s_2^K = 12$ para el modelo propuesto y $s_s^K = s_1^K + s_2^K = 24$ unidades para el modelo $[BMM]$, sin consideraciones de valor residual.

El análisis considera la variación porcentual en el beneficio que se obtiene con el modelo propuesto vs $[BMM]$

$$\Delta V^k(\mathbf{s}^k) = \frac{V^k(\mathbf{s}^k) - V^k_{BM}(\mathbf{s}^k)}{V^k_{BM}(\mathbf{s}^k)} \cdot 100 \tag{5.3}$$

, donde $V^k_{BM}(\mathbf{s}^k)$ representa los beneficios obtenidos por el modelo $[BMM]$, en la etapa k cuando posee un inventario $\mathbf{s}^k$.

En la figura 5.6 se observa que la consideración de sustitución entre productos permite al menos tener los mismos beneficios cuando sólo se posee un tipo de producto en inventario, donde el modelo propuesto y el de $[BMM]$ son iguales. En el caso que el *retailer* posea inventario de los dos productos, siempre se obtendrá mayores beneficios con el modelo propuesto respecto a $[BMM]$, aumentando a medida que transcurren los períodos de la temporada, hasta un cierto límite superior donde existen combinaciones de inventario que generan la misma diferencia porcentual de beneficios, explicado por la zona donde el precio alcanza el límite asintótico. La mayor diferencia siempre ocurre para condiciones de máximo inventario en cada período, aumentando a medida que se aproxima el término de la temporada pero con incrementos decrecientes: $\Delta V^4_{\text{máx}}(12, 12) = 22,2\,\%$; $\Delta V^3_{\text{máx}}(12, 12) = 25,5\,\%$;

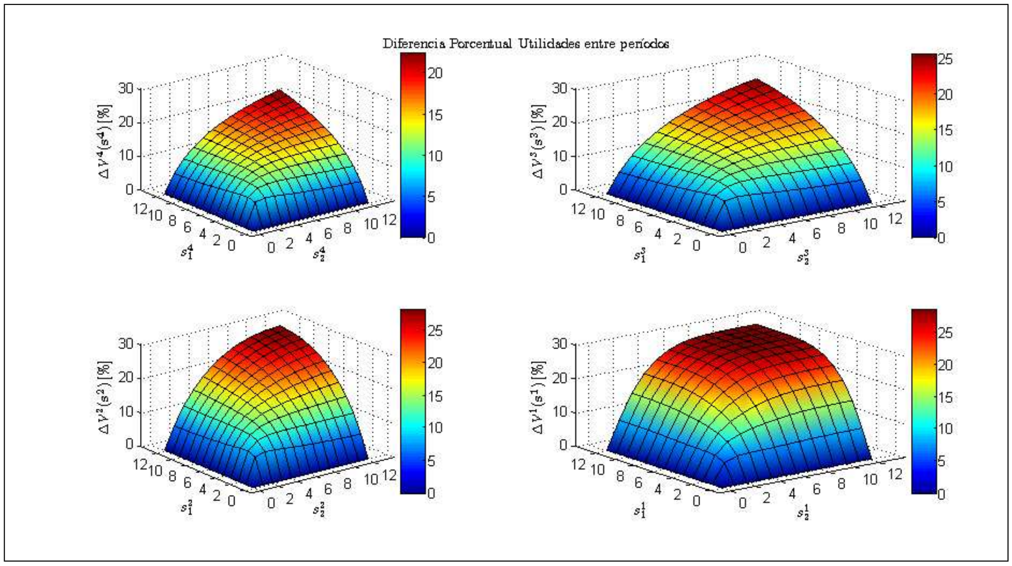

Figura 5.6 Diferencia de beneficios del modelo propuesto con el de Bitran y Mondschein Modificado $[BMM]$ para α iguales (%).

$\Delta V^2_{\text{máx}}(12,12) = 28,0\,\%$; $\Delta V^1_{\text{máx}}(12,12) = 28,4\,\%$.

Sin embargo, esta comparación cambia si los productos presentan distintos grados de sustitución, como resultado de diferencias en las valoraciones efectuadas por los clientes y que influyen en los parámetros utilizados para la determinación de precios en el modelo $[BMM]$, y por ende, en los beneficios: siempre se obtendrán mejores o iguales resultados con el modelo propuesto si α_s del modelo $[BMM]$ se escoge como la menor valoración de los productos, donde el peor de los casos (sólo se posee inventario del producto de menor valoración) no produce una mejora pero tampoco pérdidas (izquierda de la figura 5.7). En cambio, si α_s se escoge como la mayor valoración para el modelo $[BMM]$, se obtendrán iguales resultados si sólo posee inventario del producto de mayor valoración, peores resultados si sólo posee inventario del producto de menor valoración y existirán resultados mejores/peores dependiendo de

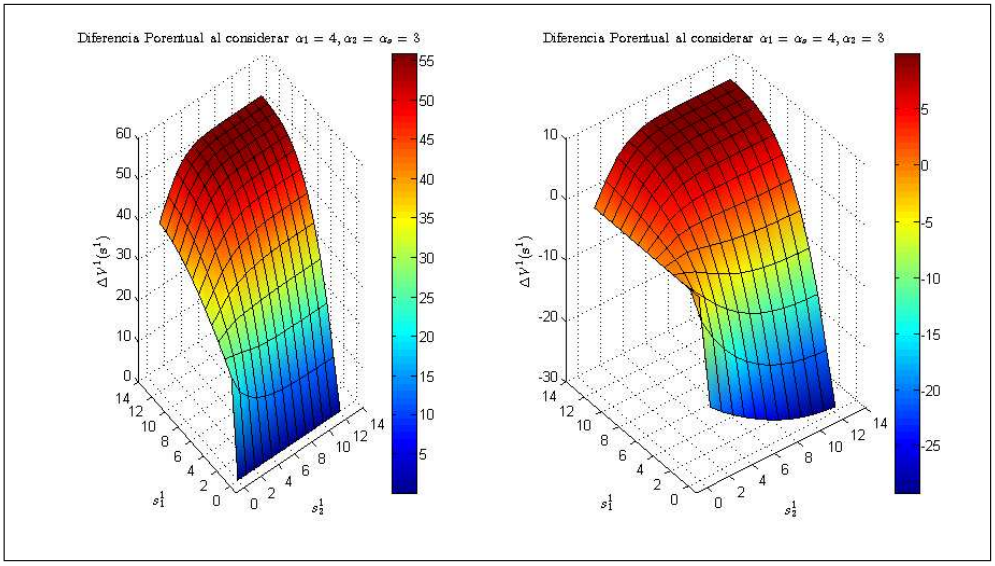

Figura 5.7 Diferencia de beneficios del modelo propuesto con el de Bitran y Mondschein Modificado $[BMM]$ para α distintos (%).

la combinación de inventario de productos, donde los mejores se obtendrán cuando exista una mayor cantidad de unidades del producto de mayor valoración que logren compensar el precio de las unidades de menor valoración(derecha de la figura 5.7).

5.2 Resultados Considerando Valor Residual en función de las condiciones de venta

Se estudian las implicancias de considerar dos configuraciones para el valor residual de los productos en $k = 0$:

- Valor residual fijo por unidad (F_1, F_2), independiente del inventario remanente e igual a \$2000.
- Valor residual que depende de los eventos ocurridos en la temporada de ventas

$(F_1(1+\delta_1), F_2(1+\delta_2))$.

Esta determinación influirá, de forma positiva o negativa, en los beneficios de la temporada, al representar las condiciones de borde de la programación dinámica. Por esta razón, al analizar las variaciones que pueda experimentar el valor residual ($\delta_i, i = 1, 2$), se concluye que el mayor valor se obtiene cuando el *retailer* sólo posee una unidad del producto en inventario, disminuyendo a medida que aumenta el inventario de ambos productos, pero con mayor rapidez si aumenta el inventario del mismo, hasta llegar a un mínimo nivel cuando no existen ventas en la temporada, situación que raramente se produce en la realidad. Considerando que el *retailer* inicio la temporada con $\mathbf{s}^K$ unidades en inventario, las variaciones del valor residual para el producto 1 se encuentran dentro de ciertos límites (análogo para el producto 2):

$$\delta_1(\mathbf{s}^K, 1, 0) = \frac{\left(s_1^K - 1\right)}{\sum_{i=1}^{2} s_i^K} \tag{5.4}$$

$$\delta_1(\mathbf{s}^K, s_1^K, 0) = 0 \tag{5.5}$$

$$\delta_1(\mathbf{s}^K, 1, s_2^K) = \frac{\left(s_1^K - 1\right) - s_2^K \cdot \frac{1}{K}}{\sum_{i=1}^{2} s_i^K} \tag{5.6}$$

$$\delta_1(\mathbf{s}^K, s_1^K, s_2^K) = \frac{-s_2^K \cdot \frac{1}{K}}{\sum_{i=1}^{2} s_i^K} \tag{5.7}$$

De las 156 combinaciones posibles de inventario que determinan una variación porcentual (δ_1) respecto del valor fijo (F_1) (tabla 5.1) 128 corresponden a casos donde el valor residual variable es mayor al fijo (82 %), 4 casos corresponden al mismo valor (3 %) y 24 casos el valor residual variable es menor al fijo (15 %) para combinaciones de alto inventario, tanto del producto como del sustituto (malas ventas

Tabla 5.1 Variaciones del valor residual, respecto de un valor fijo F_i (%), para $\lambda = 10$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 3$, $\beta = 0,000765$, $s_1^K = s_2^K = 12$, $K = 4$.

δ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	s_1^0
0	45,8	41,7	37,5	33,3	29,2	25,0	20,8	16,7	12,5	8,3	4,2	0,0	
1	44,8	40,6	36,5	32,3	28,1	24,0	19,8	15,6	11,5	7,3	3,1	-1,0	
2	43,8	39,6	35,4	31,3	27,1	22,9	18,8	14,6	10,4	6,3	2,1	-2,1	
3	42,7	38,5	34,4	30,2	26,0	21,9	17,7	13,5	9,4	5,2	1,0	-3,1	
4	41,7	37,5	33,3	29,2	25,0	20,8	16,7	12,5	8,3	4,2	0,0	-4,2	
5	40,6	36,5	32,3	28,1	24,0	19,8	15,6	11,5	7,3	3,1	-1,0	-5,2	
6	39,6	35,4	31,3	27,1	22,9	18,8	14,6	10,4	6,3	2,1	-2,1	-6,3	
7	38,5	34,4	30,2	26,0	21,9	17,7	13,5	9,4	5,2	1,0	-3,1	–7,3	
8	37,5	33,3	29,2	25,0	20,8	16,7	12,5	8,3	4,2	0,0	-4,2	-8,3	
9	36,5	32,3	28,1	24,0	19,8	15,6	11,5	7,3	3,1	-1,0	-5,2	-9,4	
10	35,4	31,3	27,1	22,9	18,8	14,6	10,4	6,3	2,1	-2,1	-6,3	-10,4	
11	34,4	30,2	26,0	21,9	17,7	13,5	9,4	5,2	1,0	-3,1	-7,3	-11,5	
12	33,3	29,2	25,0	20,8	16,7	12,5	8,3	4,2	0,0	-4,2	-8,3	-12,5	
s_2^0													

en la temporada). Por esta razón, el *retailer* debe conocer cuál es la real valoración de los clientes por los productos así como su sensibilidad al precio, ya que de lo contrario puede fijar precios altos que no reflejen las valoraciones reales, provocando una disminución considerable de las ventas, y por ende menores beneficios al final de la temporada. Sólo analizando la diferencia de ambas estrategias con el inventario remanente:

$$F_1\left(\frac{s_1^K - s_1^0 - \frac{1}{K}s_2^0}{\sum\limits_{i=1}^{2} s_i^K}\right)s_1^0 + F_2\left(\frac{s_2^K - s_2^0 - \frac{1}{K}s_1^0}{\sum\limits_{i=1}^{2} s_i^K}\right)s_2^0 \tag{5.8}$$

se concluye que la consideración de un valor variable permite obtener mayores beneficios, tanto en cantidad como magnitud de estos, llegando a mejoras de $45,85\,\%$

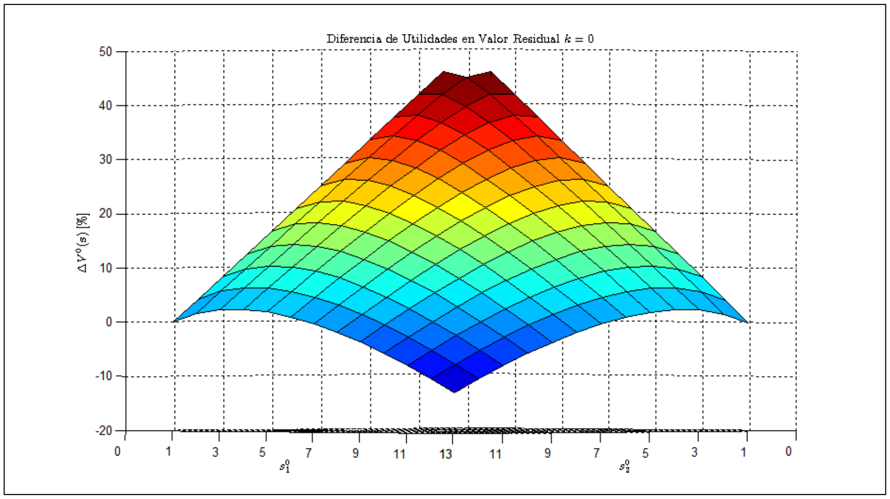

Figura 5.8 Diferencia de beneficios al aplicar valor residual variable *vs* constante para $k = 0$ (%).

respecto del caso fijo para bajos inventarios, y la mayor pérdida, como castigo de una mala temporada donde no existieron ventas, corresponde a $-12,5\,\%$ pero que rara vez ocurre en la práctica como resultado de ajustes que se puedan realizar en el caso que el producto tenga poco éxito (figura 5.8). Estos valores dependen directamente del inventario inicial de cada producto, por lo que eventualmente las mejoras o pérdidas pueden ser mayores.

Analizando la diferencia porcentual en el beneficio para los otros períodos ($k \neq 0$) con

$$\Delta V^k(\mathbf{s}^k) = \frac{V_v^k(\mathbf{s}^k) - V_f^k(\mathbf{s}^k)}{V_f^k(\mathbf{s}^k)} \cdot 100 \tag{5.9}$$

donde $V_v^k(\mathbf{s}^k)$ es el beneficio obtenido por el *retailer* al considerar un valor residual variable y $V_f^k(\mathbf{s}^k)$ es el beneficio obtenido por el *retailer* al considerar un valor residual fijo, se concluye que ésta siempre será pequeña para los primeros períodos,

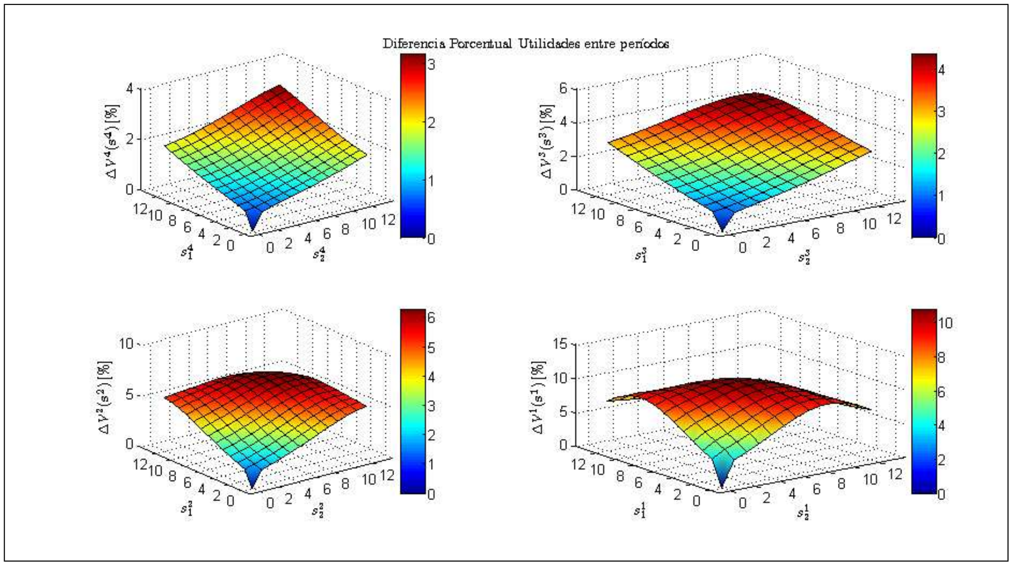

Figura 5.9 Diferencia de beneficios al aplicar valor residual variable *vs* constante en la temporada de ventas (%).

aumentando junto con el inventario. Este comportamiento cambiará a medida que se aproxima el fin de la temporada, donde la utilización de un determinado valor residual afectará la función de beneficios del *retailer*, especialmente en el período $k = 1$, producto de simplificaciones que no considerarán ciertas interacciones en la estrategia de valor residual fijo para $k = 0$ (*Ver Anexo* G), razón que explica la disminución de la diferencia porcentual del beneficio para grandes cantidades de inventario y su aumento para menores (figura 5.9). La disminución puede generar períodos con beneficios esperados negativos para ciertas combinaciones de inventarios, pero que siempre serán para pocas ventas, por lo que el *retailer* podrá modificar los precios y de esta manera evitar obtener estos bajos beneficios, por lo que raramente ocurrirá en la práctica.

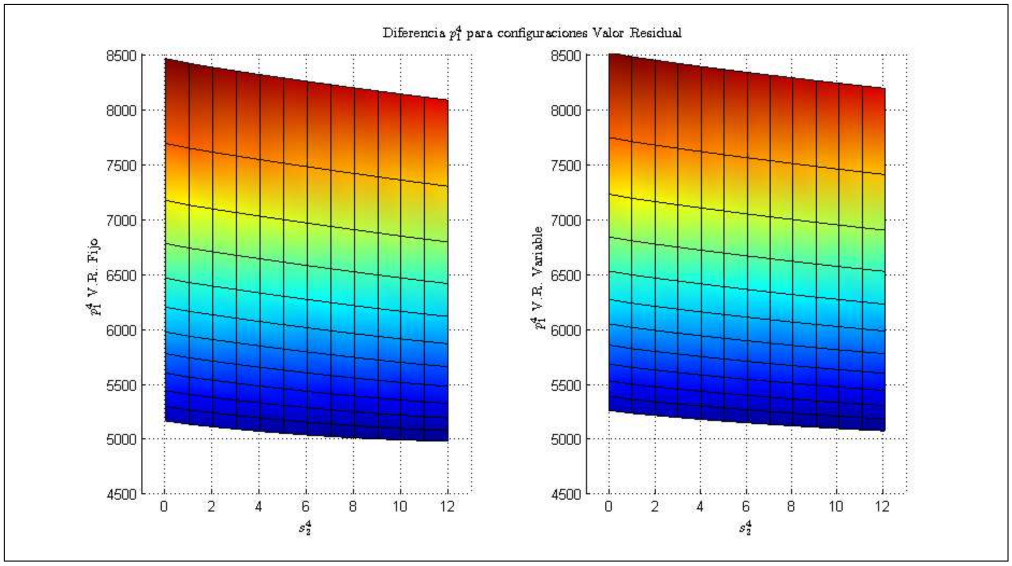

Figura 5.10 Diferencia de p_1^4 para configuraciones de valor residual variable y fijo.

Comparando los precios obtenidos con ambas estrategias, se concluye que la consideración de valor residual variable genera mayores precios en el primer período de ventas (figura 5.10), que se traducen en los mayores beneficios de la figura 5.9, para todas las combinaciones de inventario. Esta diferencia desaparece para un mayor número de revisiones de precios.

Para el último período, el valor residual utilizado tiene una mayor incidencia en la determinación de los precios óptimos (ver figura 5.11) al representar variables de *input* del modelo. Por esta razón, el precio que se obtiene utilizando un valor residual variable será mayor para inventarios pequeños (mayor aceptación del producto en la temporada, por ende tiene un mayor precio) pero menor para altos niveles de inventario (castigo por bajo éxito en la temporada), lo que explica la forma de la diferencia porcentual $\Delta V^1(\mathbf{s}^1)$ en la figura 5.9.

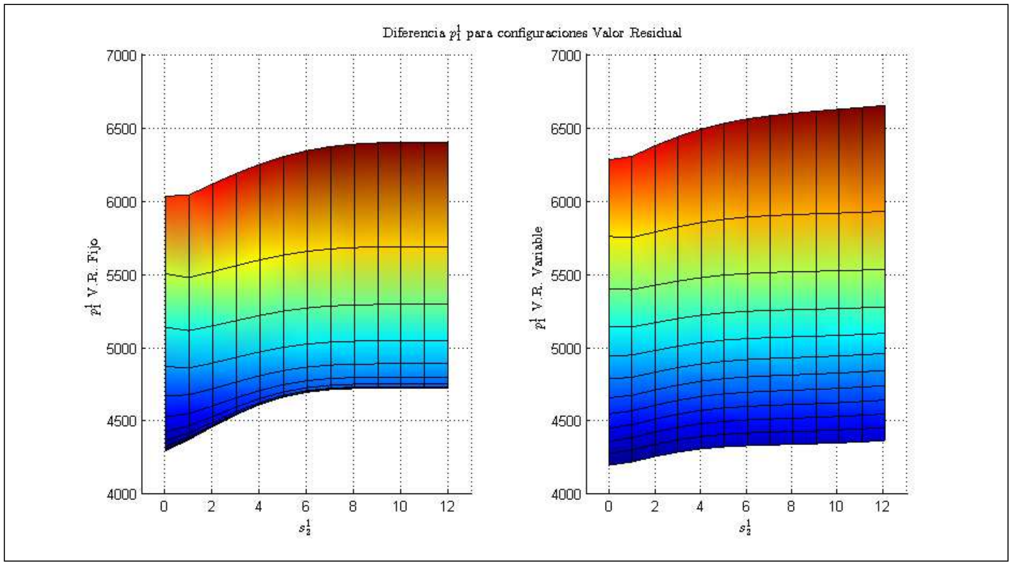

Figura 5.11 Diferencia de p_1^1 para configuraciones de valor residual variable y fijo.

Para analizar el impacto del número de períodos de fijación de precio, se considera la peor situación de inventario para el cálculo del valor residual variable (mayor pérdida):

$$R_{1,\mathbf{s}^0} = F_1 \cdot \left(1 - \frac{s_2^K \cdot \frac{1}{K}}{\sum_{i=1}^{2} s_i^K}\right) \qquad \mathbf{s}^0 = (s_1^K; s_2^K) \tag{5.10}$$

$$R_{2,\mathbf{s}^0} = F_2 \cdot \left(1 - \frac{s_1^K \cdot \frac{1}{K}}{\sum_{i=1}^{2} s_i^K}\right) \qquad \mathbf{s}^0 = (s_1^K; s_2^K) \tag{5.11}$$

donde se observa que irá aumentando mientras mayor sea el número de revisiones y fijaciones de precio en la temporada, llegando al límite, cuando $K \to \infty$, donde se igualará al valor fijo y todos los otros valores serán mayores, con lo que la diferencia porcentual $\left(\Delta V^k\right)$ aumentará aún más pero dependerá del número de revisiones de precios que falten por realizar, al no existir un castigo por altos niveles de inventario.

Proposición 4 *Para un inventario dado, la diferencia porcentual* $\left(\Delta V^k\right)$ *entre los beneficios obtenidos con la consideración de valor residual variable vs fijo, cuando* $K \to \infty$*, irá aumentando con el transcurso de los períodos de fijación de precios en la temporada.*

Sin embargo, este aumento en los beneficios como resultado de un mayor número de períodos no considera los inconvenientes (costos) que involucra una política de determinación continua de precios.

6. ANÁLISIS DE UN CASO REAL

Se compara el modelo para productos sustitutos propuesto con las prácticas actuales en la industria del *retail*, utilizando datos de preferencias reveladas de venta, precio e inventario de 2 tipos de poleras de niña de la temporada primavera verano 2006 de un *retailer* chileno. Se comparan tanto los beneficios de la temporada como los que se obtendrían por valor residual. Este experimento se realiza bajo consideraciones de valor residual: variable, fijo distinto de 0 y 0. Se considera como valor residual la última tendencia clara del precio que fue cobrado en las últimas semanas de la temporada, donde el producto tiene todos los descuentos y promociones al no existir un incentivo a cobrar un precio mayor por la limitante de tiempo.

6.1 Estimación de parámetros

Para obtener una mayor cantidad de datos que permitan calibrar los parámetros de la función de utilidad en el *software* BIOGEME, se usan agregados por todas la tiendas (80 a lo largo del país), los que finalmente se normalizan para trabajar con una tienda promedio. El inventario también se trabajó de manera agregada para las consideraciones de valor residual. Sólo se analizan 63 días de la temporada, divididos en 3 períodos de 21 días cada uno (igual duración de los períodos), debido a que en este lapso ocurren claros cambios de precios (Ver figura 6.1) así como la mayoría de las ventas (se realizan el $87,2\,\%$ de las ventas en un $44\,\%$ de la temporada). Se usa como valor residual real el valor de \$1500 que corresponde al valor del producto en las últimas ventas y se asume que no existe reabastecimiento, considerando que el aumento de unidades en la temporada se produce por restricciones físicas de almacenamiento pero que las unidades fueron ordenadas al inicio de la temporada, por lo que se suman como inventario inicial de la simulación.

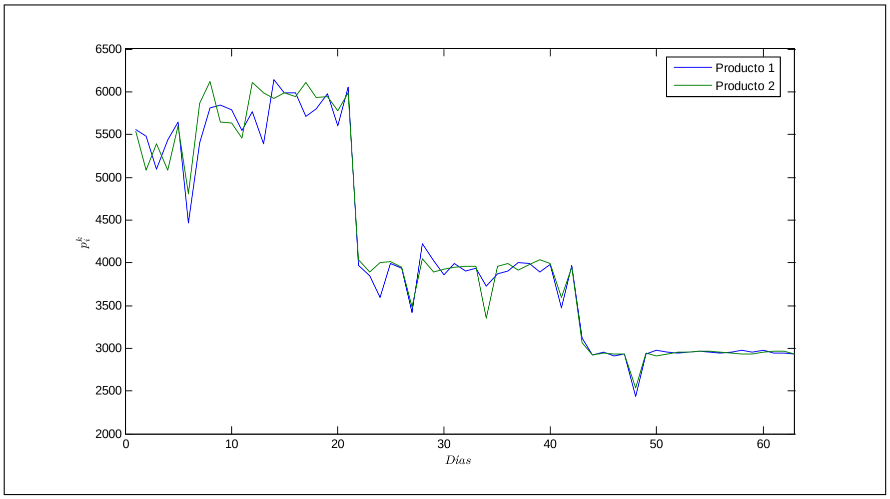

Figura 6.1 Evolución de p_i^k reales del *retailer* $(i = 1, 2; k = 1, 2, 3)$.

La utilidad que reporta cada producto i a un cliente en el período k es

$$U_i^k = \alpha_i + \beta \cdot p_i^k \qquad \forall i = 1, 2; k = 1, 2, 3. \tag{6.1}$$

y la opción de "*no comprar*"

$$U_0^k = 0$$

Como se usan datos de preferencias reveladas, no se posee registro de las personas que finalmente optaron por "*no comprar*", asumiendo este porcentaje en un 20 %. Bajo este supuesto se obtienen los parámetros de la tabla 6.1 que concuerdan con lo esperado, ya que las parámetros α_1 y α_2 (interceptos) son positivos pues reflejan las características propias de las poleras además de ser prácticamente el mismo valor (se podrían considerar casi sustitutos perfectos) y el parámetro β tiene signo negativo porque representa un costo para el cliente, y por ende, disminuye su utilidad. Para cada uno de los parámetros calibrados, se muestra entre paréntesis el estadístico t que será utilizado para evaluar si los parámetros considerados son significativos. Para que ello ocurra, dicho estadístico debe ser superior al valor $t_{\alpha=5\,\%} = 1,96$ (este valor se obtiene de tablas tabuladas con la distribución $t - student$ para diferentes niveles de significancia). Se puede ver que todos los estadísticos t de los parámetros son mayores a $1,96$ y, por lo tanto, los parámetros son significativos en el modelo al $95\,\%$ de confianza.

Tabla 6.1 Parámetros calibrados en $software$ BIOGEME.

α_1	$=$	$3,53$	$(42,41)$
α_2	$=$	$3,52$	$(42,3)$
β	$=$	$-0,000765$	$(-37,69)$

La intensidad de demanda para poleras de niña en la tienda promedio $\left(\overset{\curlywedge}{\lambda}\right)$, se estima usando procedimientos de máxima verosimilitud, donde la tasa de compra se calcula:

$$\overset{\curlywedge}{\lambda} = \left(\frac{1}{80 \cdot K} \cdot \sum_{k=1}^{K} \left(\left\lceil \sum_{i=1}^{2} (v_{ik}) \right\rceil \right) \right) \cdot 1,2 \tag{6.2}$$

con v_{ik} el total de poleras del tipo $i = 1,2$ vendidas en la semana k. El parámetro estimado se debe corregir por el valor de la opción de "*no comprar*" utilizado para la calibración de parámetros, obteniéndose los valores de la tabla 6.2.

Tabla 6.2 Datos utilizados en la simulación.

$\overset{\curlywedge}{\lambda}$	=	$45\,(personas/período)$
s_1^K	=	63
s_2^K	=	59

6.2 Comparación de resultados

Los resultados obtenidos con el modelo propuesto supera en todos los casos a la operación del *retailer* en la temporada (tabla 6.3). Sólo comparando los beneficios obtenidos en la temporada regular de venta ($k = 1, 2, 3$), el modelo tiene incrementos de $36,9\,\%$, $52,7\,\%$ y $48,2\,\%$ para las simulaciones sin valor residual, valor residual fijo y valor residual variable respectivamente. Comparando los beneficios obtenidos con el inventario remanente ($k = 0$), el modelo presenta una mejora del $21,9\,\%$ para el caso de valor residual variable

Tabla 6.3 Resultados considerando la llegada de clientes como un proceso de Poisson Homogéneo.

Comparación de Estrategias (Beneficios)				
	Polera 1	Polera 2	Temporada	Inv. Remanente
Datos reales	\$182.052	\$174.019	\$356.071	\$19.500
Sin valor residual (\$0)	\$250.334	\$237.305	\$487.639	\$0
Valor Residual Fijo (\$1500)	\$279.254	\$264.573	\$543.827	\$19.500
Valor Residual Variable	\$270.267	\$257.418	\$527.685	\$23.779

Para los primeros resultados, la diferencia entre el modelo de valor residual fijo y variable se produce por las características de las ventas: al inicio de la temporada se realizan pocas y como consecuencia de la forma que presenta la función del valor residual variable, donde siempre disminuye a medida que aumenta el inventario, castiga al precio cobrado por el exceso de inventario, repercutiendo en menores beneficios respecto del modelo con valor residual fijo, pero igualmente supera a la operación del $retailer$ en la temporada.

La diferencia en los beneficios obtenidos con el modelo de valor residual variable vs fijo, menores en la temporada de venta regular ($k = 1, 2, 3$) pero mayores para la venta en $k = 0$, se explica por las bajas ventas que ocurren en los primeros períodos respecto del último, castigando los precios con el exceso de inventario, y luego en el último período se realiza una mayor venta que permite tener bajos inventarios para tarificarlos a un mayor valor residual. Por esta razón, para un mejor $performance$ de la estrategia de valor residual variable, es necesario incentivar las ventas en los primeros períodos para evitar el castigo sobre los precios que significa estar en la zona donde el valor residual es menor al fijo, y de esta forma aprovechar los mejores precios y mayores beneficios de contar con un inventario de productos reducidos.

Para modelar de mejor forma las ventas por período, se modifica la llegada de clientes por un proceso de Poisson no homogéneo, con tasas que varían en cada período, obteniéndose los resultados de la tabla 6.4. Al igual que la primera modelación, se obtienen mejores resultados que la operación del $retailer$ en la temporada, pero con diferencias en el modelo que presenta los mayores beneficios. Sólo comparando los beneficios obtenidos en la temporada regular de venta ($k = 1, 2, 3$), el modelo tiene incrementos de $38,0\,\%$, $52,9\,\%$ y $54,8\,\%$ para las simulaciones sin valor residual, valor residual fijo y valor residual variable respectivamente. Esta simulación considera las distintas tasas de llegada, influyendo positivamente en todos los modelos y donde el que utiliza un valor residual variable obtiene los mayores beneficios como resultado de una menor penalización en los precios de los primeros períodos.

Tabla 6.4 Resultados considerando la llegada de clientes como un proceso de Poisson No Homogéneo.

Comparación de Estrategias (Beneficios)				
	Polera 1	Polera 2	Temporada	Inv. Remanente
Datos reales	$182.052	$174.019	$356.071	$19.500
Sin valor residual ($0)	$250.283	$241.046	$491.329	$0
Valor Residual Fijo ($1500)	$279.018	$265.365	$544.383	$19.500
Valor Residual Variable	$282.321	$268.772	$551.093	$23.779

A pesar que los resultados del modelo, bajo distintas estrategias de tarificación del valor residual, superan a los obtenidos en la práctica del *retailer*, es necesario considerar que los parámetros utilizados corresponden a los datos reales de la tasa de llegada de clientes y sus valoraciones medias por los productos, método que no puede utilizar el *retailer*, que puede estimarlos, de mejor o peor forma, pero en ningún caso serán los verdaderos utilizados en la simulación.

7. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En esta investigación se ha abordado el problema de un *retailer* que debe determinar políticas óptimas de precios para productos sustitutos en una temporada de ventas, los cuales pueden ser valorados de igual o distinta manera por parte de los clientes, según el grado de sustitución existente entre estos. Además, se consideró su valor residual, proponiendo un modelo para su determinación que difiere de las consideraciones actuales, donde se asume fijo por unidad no vendida e independiente del inventario final.

La llegada de clientes fue modelada por un proceso de Poisson con tasa λ, y para la elección de un producto se utilizó el modelo de elección discreta Logit Multinomial.

Se encontró una política óptima de precios para los productos sustitutos en función del nivel de inventario que dispone el *retailer* y las valoraciones que presentan los clientes por los productos.

Se caracterizaron algunos resultados de la política óptima que concuerdan con las prácticas reales de los *retailers*:

- Para un período dado, el precio óptimo de un producto es una función no creciente de su propio inventario, llegando a un límite asintótico inferior que se obtiene al considerar el inventario infinito.
- Para un período dado, existen varias combinaciones de inventario donde el precio óptimo alcanza un límite asintótico superior y que depende de la sensibilidad al precio de los clientes y de las valoraciones que realizan por cada

producto a través de las probabilidades de elección, y de la tasa de llegada de clientes a la tienda.

- El beneficio del *retailer* es una función no decreciente de su inventario pero con incrementos decrecientes, consecuencia de los resultados anteriores y la restricción impuesta al modelo que para un inventario dado, el precio óptimo es una función no creciente del tiempo.

También se analizaron las implicancias de utilizar el modelo con productos que poseen distintas valoraciones por parte de los clientes, encontrando que aquellos con mayor valoración pueden ser tarificados a un mayor precio para iguales condiciones de inventario y período. Además, los productos de menores valoraciones alcanzarán en menos períodos el límite asintótico inferior del precio óptimo Sin embargo, en el último período existirá una mayor combinación de inventarios que harán que el producto de mayor valoración alcance antes el límite asintótico respecto de los productos de menor valoración.

Otro resultado se desprende de la comparación del modelo propuesto con el de Bitran y Mondschein (1997) modificado $[BMM]$, donde la consideración de sustitución entre productos siempre genera mayores o iguales beneficios para el caso de sustitutos perfectos. En el caso que exista algún grado de sustitución (diferentes valoraciones), el resultado dependerá de la valoración utilizada en el modelo $[BMM]$:

- Si se utiliza la menor valoración de los dos productos, el modelo propuesto siempre tendrá mayores o iguales beneficios que $[BMM]$.

- Si se utiliza la mayor valoración en $[BMM]$, los resultados dependerán del nivel de inventarios de cada tipo de producto así como de las valoraciones utilizadas.

Se modeló un valor residual que cumpliera con las características de generar un beneficio que aumente con las unidades en inventario pero con incrementos decrecientes, considerando los eventos ocurridos en la temporada tanto de inventarios (ventas) como períodos de revisión y determinación de precios. Se derivaron algunos resultados de la variación que puede experimentar el valor calculado, así como las combinaciones de inventario final e inicial que hacen más beneficioso utilizar la estrategia. Según la modelación, el impacto negativo que genera terminar con una mayor cantidad de productos sustitutos disminuye a medida que aumentan las revisiones de precios al aislar el efecto del sustituto que no tiene éxito en la temporada y que no tiene relación con el valor residual del otro producto. Además, como el valor residual corresponde a una condición de borde de la programación dinámica, su influencia disminuye a medida que aumentan los períodos de revisión, ya que la diferencia con los precios determinados para la estrategia de valor residual fijo van disminuyendo pero sigue siendo importante para el último período de venta regular ($k = 1$).

Por último, se aplicó el modelo a una situación de venta real experimentada por un *retailer* para dos productos en parte de una temporada de ventas donde existen claros cambios de precio, utilizando para ello los datos de preferencias reveladas de precio, ventas e inventario con los que se calcularon la tasa de llegada (proceso de Poisson homogéneo) y parámetros de la función de utilidad (valoraciones y sensibilidad), asumiendo que un 20 % de los clientes que llega a la tienda no compra, con el propósito de considerar la "opción de no compra". Se obtuvieron mejores resultados para distintas estrategias de valor residual: \$0, fijo e igual a \$1500 y variable con $F_i =$ \$1500, $i = 1, 2$, donde la estrategia de valor residual fijo obtuvo los mayores beneficios (52,7 %) respecto a la operación real en la temporada regular ($k = 1, 2, 3$) mientras que la estrategia variable obtuvo los mayores beneficios ($21,9\,\%$) para el período $k = 0$. Las diferencias de beneficio en la temporada regular se explican por los niveles de ventas en cada período, que se concentran en el último y de esta forma castigan los precios de los primeros en la estrategia de valor residual variable como resultado de los altos niveles de inventario. Por esta razón, se aplicó el modelo nuevamente, considerando que la llegada de clientes es un proceso de Poisson no homogéneo con tasa que se calculó de las preferencias reveladas, obteniéndose mejores resultados que la operación real, pero donde la estrategia de valor residual variable fue superior en un $54,8\,\%$ y $21,9\,\%$ en las ventas de la temporada regular y con el inventario remanente respectivamente.

Como trabajos futuros que se pueden realizar a partir de esta investigación, se propone estudiar una nueva modelación del valor residual que involucre distintas interacciones que puedan ocurrir cuando existen más de 2 productos.

También se propone estudiar el comportamiento estratégico de los clientes frente a la opción de valor residual variable de los productos.

Otra extensión de la investigación puede ser analizar cómo cambia la cantidad a ordenar al inicio de la temporada si se considera un valor residual variable de los productos.

Finalmente, se puede realizar una aplicación que implique la creación y aplicación de una encuesta de preferencias declaradas, con el propósito de obtener datos que permitan estimar tanto los parámetros como la opción de no compra.

BIBLIOGRAFÍA

Bassok, Y., Anupindi, R. y Akella, R. (1999). Single-period multiproduct inventory models with substitution. *Operations Research*, 47(4), 632–642.

Bitran, G., Caldentey, R. y Mondschein, S. (1998). Coordinating clearance markdown sales of seasonal products in retail chains. *Operations research*, 46(5), 609–624.

Bitran, G., Caldentey, R. y Vial, R. (2005). Pricing policies for perishable products with demand substitution. Working paper, Sloan School of Management, MIT, Boston, MA.

Bitran, G. y Caldentey, R. (2003). An overview of pricing models for revenue management. *Manufacturing and Service Operations Management*, 5(3), 203–229.

Bitran, G. R. y Mondschein, S. V. (1997). Periodic pricing of seasonal products in retailing. *Management Science*, 43(1), 64–79.

Cachon, G. P. y Kok, A. G. (2007). Implementation of the Newsvendor Model with Clearance Pricing: How to (and How Not to) Estimate a Salvage Value. *Manufacturing and Service Operations Management*, 9(3), 276–290.

Dong, L., Kouvelis, P. y Tian, Z. (2008). Dynamic Pricing and Inventory Control of Substitute Products. *Manufacturing and Service Operations Management*, doi:10.1287/msom.1080.0221.

Elmaghraby, W. y Keskinocak, P. (2003). Dynamic pricing in the presence of inventory considerations: Research overview, current practices, and future directions. *Management Science*, 49(10), 1287–1309.

Gallego, G. y Van Ryzin, G. (1994). Optimal dynamic pricing of inventories with stochastic demand over finite horizons. *Management Science*, 40(8), 999–1020.

Gallego, G. y van Ryzin, G. (1997). A multiproduct dynamic pricing problem and its applications to network yield management. *Operations research*, 45(1), 24–41.

Hertz, D. B. y Schaffir, K. H. (1960). A forecasting method for management of seasonal style-goods inventories. *Operations Research*, 8(1), 45–52.

Kok, A. G. y Fisher, M. L. (2007). Demand Estimation and Assortment Optimization Under Substitution: Methodology and Application. *Operations Research*, 55(6), 1001–1021.

Maglaras, C. y Meissner, J. (2006). Dynamic pricing strategies for multiproduct revenue management problems. *Manufacturing and Service Operations Management*, 8(2), 136.

Mantrala, M. K. y Rao, S. (2001). A decision-support system that helps retailers decide order quantities and markdowns for fashion goods. *Interfaces*, 31(3), S146.

McFadden, D. (1972). *Conditional Logit Analysis of Qualitative Choice Behavior*. Vol. 199. Institute of Urban and Regional Development, University of California. Berkeley, CA.

Rajaram, K. y Tang, C. S. (2001). The impact of product substitution on retail merchandising. *European Journal of Operational Research*, 127(3), 582–601.

Ryzin, G. V. y Mahajan, S. (1999). On the relationship between inventory costs and variety benefits in retailassortments. *Management Science*, 45(11), 1496–1509.

Smith, S. A. y Agrawal, N. (2000). Management of multi-item retail inventory systems with demand substitution. *Operations Research*, 48(1), 50–64.

Zhao, W. y Zheng, Y.-S. (2000). Optimal dynamic pricing for perishable assets with nonhomogeneous demand. *Management Science*, 46(3), 375–388.

ANEXOS

ANEXO A: Modelo Logit Multinomial

La probabilidad de elección de la alternativa i por parte del individuo n se obtiene a partir de suponer una función de utilidad que se comporta como una variable aleatoria, compuesta por dos términos:

i) Una parte observable o sistemática V_{iq}.

ii) Un término de error aleatorio ϵ_{iq} que distribuyen Gumbel iid, obteniéndose una utilidad de la forma:

$$U_{iq} = V_{iq} + \epsilon_{iq}$$

Luego, la probabilidad que el individuo n escoja la alternativa i viene dada por:

$$\begin{aligned} P_{i/C_n} &= \Pr(\epsilon_{kn} - \epsilon_{in} \leq V_{in} - V_{kn}) & \forall k \neq i \\ P_{i/C_n} &= \frac{\exp(\beta V_{in})}{\sum\limits_{k \in C_n} \exp(\beta V_{kn})} & \forall k \neq i \end{aligned}$$

donde β es el factor de escala asociado a la varianza del término de error Gumbel $\sigma_i^2 = \frac{\pi^2}{6 \cdot \beta^2}$ y C_n son las alternativas disponibles del individuo n.

El modelo es fácilmente estimable a través del método de máxima verosimilitud, debido a su forma cerrada y a que su forma funcional permite un único máximo global en el proceso de maximización[5].

Los supuestos de independencia realizados en la construcción del modelo, implican la conocida característica de Independencia de Alternativas Irrelevantes (IAI), donde

[5] Sin embargo, no es posible conocer el valor exacto de la varianza de los errores, ya que el parámetro β no es identificable, por lo que se asume igual a 1 sin pérdida de generalidad.

la razón de las probabilidades de dos alternativas es constante e independiente del resto.

Este modelo tiene la particularidad de ser homocedástico, es decir, presenta la misma varianza para todas las alternativas y no permite medir correlación entre ellas, de manera que la matriz varianza-covarianza, para tres alternativas, es de la forma:

$$\sum = \begin{bmatrix} \sigma_i^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_i^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_i^2 \end{bmatrix} = \frac{\pi^2}{6 \cdot \beta^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ANEXO B: Desarrollo del Modelo

$$V^k(\mathbf{s}^k) =$$
$$\max_{\substack{p_1^{k+1} \geq p_1^k \geq 0 \\ p_2^{k+1} \geq p_2^k \geq 0}} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \left[\begin{array}{c} p_1^k \operatorname{mín}(i, s_1^k) + p_2^k \operatorname{mín}(j, s_2^k) + \\ V^{k-1}(s_1^k - \operatorname{mín}(i, s_1^k), s_2^k - \operatorname{mín}(j, s_2^k)) \end{array} \right] \phi_{i,j}(\mathbf{p}^k) \right]$$

$$V^0(s_1^0, s_2^0) = \mathbf{R}_0 \qquad \forall s_1^0 = 1, 2, ..., s_1^K; s_2 = 1, 2, ..., s_2^K.$$
$$V^k(0{,}0) = 0 \qquad \forall k = 1, 2, ..., K.$$

con

$$\phi_{i,j} = \frac{e^{-(\lambda \cdot q_1(\cdot,\cdot) \cdot \Delta t)} \cdot (\lambda \cdot q_1(\cdot,\cdot) \cdot \Delta t)^i}{i!} \cdot \frac{e^{-(\lambda \cdot q_2(\cdot,\cdot) \cdot \Delta t)} \cdot (\lambda \cdot q_2(\cdot,\cdot) \cdot \Delta t)^j}{j!}$$

Sólo considerando la función que se debe optimizar y asumiendo como mínimos los índices i y j se obtiene:

$$V^k(\mathbf{s}^k) = \operatorname{máx} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \left[p_1^k \cdot i + p_2^k \cdot j + V^{k-1}(s_1^k - i, s_2^k - j) \right] \cdot \phi_{i,j}(\mathbf{p}^k) \right]$$

Separando las 4 situaciones de inventario que puede enfrentar la tienda en el tiempo en la temporada de ventas se llega a

$$V^k(\mathbf{s}^k) = \operatorname{máx} \left[\begin{array}{c} \sum_{i=0}^{s_1^k} \sum_{j=0}^{s_2^k} \left(p_1^k \cdot i + p_2^k \cdot j + V^{k-1}\left(s_1^k - i, s_2^k - j\right)\right) \cdot \phi_{i,j}(\mathbf{p}^k) + \\ \sum_{i=s_1^k+1}^{\infty} \sum_{j=0}^{s_2^k} \left(p_1^k \cdot s_1^k + p_2^k \cdot j + V^{k-1}\left(0, s_2^k - j\right)\right) \cdot \phi_{i,j}(\mathbf{p}^k) + \\ \sum_{i=0}^{s_1^k} \sum_{j=s_2^k+1}^{\infty} \left(p_1^k \cdot i + p_2^k \cdot s_2^k + V^{k-1}\left(s_1^k - i, 0\right)\right) \cdot \phi_{i,j}(\mathbf{p}^k) + \\ \sum_{i=s_1^k+1}^{\infty} \sum_{j=s_2^k+1}^{\infty} \left(p_1^k \cdot s_1^k + p_2^k \cdot s_2^k \right) \cdot \phi_{i,j}(\mathbf{p}^k) \end{array} \right]$$

Sumando y restando términos para obtener "probabilidades cerradas"

$$V^k(\mathbf{s}^k) = \text{máx} \left[\begin{array}{c} \sum_{i=0}^{s_1^k}\sum_{j=0}^{s_2^k} \left(p_1^k \cdot \left(i - s_1^k\right) + p_2^k \left(j - s_2^k\right) + V^{k-1}\left(s_1^k - i, s_2^k - j\right)\right) \cdot \phi_{i,j}(\mathbf{p}^k) \\ + \sum_{i=s_1^k+1}^{\infty}\sum_{j=0}^{s_2^k} \left(p_2^k \cdot \left(j - s_2^k\right) + V^{k-1}\left(0, s_2^k - j\right)\right) \cdot \phi_{i,j}(\mathbf{p}^k) \\ + \sum_{i=0}^{s_1^k}\sum_{j=s_2^k+1}^{\infty} \left(p_1^k \cdot \left(i - s_1^k\right) + V^{k-1}\left(s_1^k - i, 0\right)\right) \cdot \phi_{i,j}(\mathbf{p}^k) \\ + p_1^k \cdot s_1^k + p_2^k \cdot s_2^k \end{array} \right]$$

$$V^k(\mathbf{s}^k) = \text{máx} \left[\begin{array}{c} \sum_{i=0}^{s_1^k}\sum_{j=0}^{s_2^k} \left(p_1^k \cdot \left(i - s_1^k\right) + p_2^k \cdot \left(j - s_2^k\right) + V^{k-1}\left(s_1^k - i, s_2^k - j\right)\right) \cdot \phi_{i,j}(\mathbf{p}^k) \\ + \sum_{j=0}^{s_2^k} \left(p_2^k \cdot \left(j - s_2^k\right) + V^{k-1}\left(0, s_2^k - j\right)\right) \cdot \phi_{\cdot,j}(\mathbf{p}^k) \\ - \sum_{i=0}^{s_1^k}\sum_{j=0}^{s_2^k} \left(p_2^k \cdot \left(j - s_2^k\right) + V^{k-1}\left(0, s_2^k - j\right)\right) \cdot \phi_{i,j}(\mathbf{p}^k) \\ + \sum_{i=0}^{s_1^k} \left(p_1^k \cdot \left(i - s_1^k\right) + V^{k-1}\left(s_1^k - i, 0\right)\right) \cdot \phi_{i,\cdot}(\mathbf{p}^k) \\ - \sum_{i=0}^{s_1^k}\sum_{j=0}^{s_2^k} \left(p_1^k \cdot \left(i - s_1^k\right) + V^{k-1}\left(s_1^k - i, 0\right)\right) \cdot \phi_{i,j}(\mathbf{p}^k) \\ + p_1^k \cdot s_1^k + p_2^k \cdot s_2^k \end{array} \right]$$

Simplificando los términos se obtiene la expresión para el ingreso esperado por el *retailer* desde el período k en adelante.

$$V^k(\mathbf{s}^k) = \text{máx}\left[\begin{array}{c} \sum_{i=0}^{s_1^k}\sum_{j=0}^{s_2^k}\left(\begin{array}{c} V^{k-1}\left(s_1^k - i, s_2^k - j\right) - V^{k-1}\left(0, s_2^k - j\right) \\ -V^{k-1}\left(s_1^k - i, 0\right) \end{array}\right)\cdot \phi_{i,j}(\mathbf{p}^k) \\ +\sum_{j=0}^{s_2^k}\left(p_2^k \cdot \left(j - s_2^k\right) + V^{k-1}\left(0, s_2^k - j\right)\right)\cdot \phi_{\cdot,j}(\mathbf{p}^k) \\ +\sum_{i=0}^{s_1^k}\left(p_1^k \cdot \left(i - s_1^k\right) + V^{k-1}\left(s_1^k - i, 0\right)\right)\cdot \phi_{i,\cdot}(\mathbf{p}^k) \\ +p_1^k \cdot s_1^k + p_2^k \cdot s_2^k \end{array}\right]$$

con

$$\phi_{i,j} = \frac{e^{-(\lambda\cdot q_1(\cdot,\cdot)\cdot\Delta t)}\cdot(\lambda\cdot q_1(\cdot,\cdot)\cdot\Delta t)^i}{i!}\cdot\frac{e^{-(\lambda\cdot q_2(\cdot,\cdot)\cdot\Delta t)}\cdot(\lambda\cdot q_2(\cdot,\cdot)\cdot\Delta t)^j}{j!}$$

$$\phi_{i,\cdot} = \frac{e^{-(\lambda\cdot q_1(\cdot,\cdot)\cdot\Delta t)}\cdot(\lambda\cdot q_1(\cdot,\cdot)\cdot\Delta t)^i}{i!}$$

$$\phi_{\cdot,j} = \frac{e^{-(\lambda\cdot q_2(\cdot,\cdot)\cdot\Delta t)}\cdot(\lambda\cdot q_2(\cdot,\cdot)\cdot\Delta t)^j}{j!}$$

ANEXO C: Correspondencia Modelo Logit Multinomial

Utilizando la definición de elección del producto i dada por la ecuación 3.5, se puede observar que el vector de probabilidades de elección $\mathbf{q}$ es función del vector de precios $\mathbf{p}^k$, por lo que es suficiente demostrar que $\mathbf{p}^k$ es también función de $\mathbf{q}$. Para esto se supone que existen dos vectores de precios $\mathbf{p}^k$ y $\widetilde{\mathbf{p}}^k$, para los cuales se cumple:

$$q_i(\mathbf{p}^k) = q_i(\widetilde{\mathbf{p}}^k) \qquad\qquad i = 0, 1, 2, ..., n$$

Definiendo

$$K = \sum_{j=0}^{n} e^{\alpha_j - \beta \cdot p_j^k} \qquad\qquad j = 0, 1, 2, ..., n$$

que se puede escribir

$$K = \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^{n} q_j}$$

donde el valor de K es el mismo para los vectores de precio $\mathbf{p}^k$ y $\widetilde{\mathbf{p}}^k$. Así, por la ecuación 3.5, se sabe que el término $e^{\alpha_j - \beta \cdot p_j^k}$, $j = 0, 1, 2, ..., n$ para los dos vectores es el mismo. Además, como la función $e^{\alpha_j - \beta \cdot p_j}$ es estrictamente decreciente cuando p_j^k crece, y se sabe con certeza que los dos vectores de precio son el mismo. Esto es,

$$e^{\alpha_j - \beta \cdot p_j^k} = e^{\alpha_j - \beta \cdot \widetilde{p}_j^k} \implies p_j^k = \widetilde{p}_j^k \qquad\qquad j = 1, 2, ..., n.$$

ANEXO D: Condiciones Límites

Para el último período y sin consideraciones de valor residual, los precios $p_i^1, i = 1, 2$ se obtienen resolviendo un sistema de ecuaciones que depende del nivel de inventario que posee el *retailer* (condiciones límites):

- $s_1^1 \to \infty \wedge s_2^1 = 0$

La nueva función de beneficios es

$$V^1(\infty, 0) = \max_{p_1^2 \geq p_1^1 \geq 0} \left[p_1^1 \lambda q_1(p_1^1, \infty)\right]$$

el precio se obtiene de realizar

$$\frac{\partial V^1(\infty,0)}{\partial p_1^1} = 0 \implies \lambda q_1(p_1^1, \infty) \cdot (1 - p_1^1\beta + p_1^1\beta q_1(p_1^1, \infty)) = 0$$

con $p_2 = \infty$.

- $s_1^1 = 0 \wedge s_2^1 \to \infty$

La nueva función de beneficios es

$$V^1(0, \infty) = \max_{p_2^2 \geq p_2^1 \geq 0} \left[p_2^1 \lambda q_2(\infty, p_2^1)\right]$$

el precio se obtiene de realizar

$$\frac{\partial V^1(0,\infty)}{\partial p_2^1} = 0 \implies \lambda q_2(\infty, p_2^1) \cdot (1 - p_2^1\beta + p_2^1\beta q_2(\infty, p_2^1)) = 0$$

con $p_1 = \infty$.

– $s_1^1 = 1 \wedge s_2^1 \to \infty$

La nueva función de beneficios es

$$V^1(1,\infty) = \max_{\substack{p_1^2 \geq p_1^1 \geq 0 \\ p_2^2 \geq p_2^1 \geq 0}} \left[p_1^1(1 - e^{\lambda q_1(p_1^1, p_2^1)}) + p_2^1 \lambda q_2(p_1^1, p_2^1) \right]$$

el precio se obtiene al resolver el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial V^1(1,\infty)}{\partial p_1^1} = 0$$

$$\implies 1 - e^{-\lambda q_1(p_1^1, p_2^1)} + q_1(p_1^1, p_2^1)\lambda\beta\{p_1^1(q_1(p_1^1, p_2^1) - 1)e^{-\lambda q_1(p_1^1, p_2^1)} + p_2^1 q_2(p_1^1, p_2^1)\} = 0$$

$$\frac{\partial V^1(1,\infty)}{\partial p_2^1} = 0$$

$$q_2(p_1^1, p_2^1)\lambda\{p_1^1\beta q_1(p_1^1, p_2^1)e^{-\lambda q_1(p_1^1, p_2^1)} + 1 + p_2^1\beta(q_2(p_1^1, p_2^1) - 1)\} = 0$$

– $s_1^1 \to \infty \wedge s_2^1 = 1$

La nueva función de beneficios es

$$V^1(\infty, 1) = \max_{\substack{p_1^2 \geq p_1^1 \geq 0 \\ p_2^2 \geq p_2^1 \geq 0}} \left[p_1^1 \lambda q_1(p_1^1, p_2^1) + p_2^1(1 - e^{\lambda q_2(p_1^1, p_2^1)}) \right]$$

el precio se obtiene al resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial V^1(\infty,1)}{\partial p_1^1} &= 0 \\
\Longrightarrow\ & q_1(p_1^1,p_2^1)\lambda\{p_2^1\beta q_2(p_1^1,p_2^1)e^{-\lambda q_2(p_1^1,p_2^1)}+1+p_1^1\beta(q_1(p_1^1,p_2^1)-1)\}=0 \\
\tfrac{\partial V^1(\infty,1)}{\partial p_2^1} &= 0 \\
\Longrightarrow\ & 1-e^{-\lambda q_2(p_1^1,p_2^1)}+q_2(p_1^1,p_2^1)\lambda\beta\{p_2^1(q_2(p_1^1,p_2^1)-1)e^{-\lambda q_2(p_1^1,p_2^1)}+p_1^1q_1(p_1^1,p_2^1)\}=0
\end{aligned}$$

– $s_1^1 \to \infty \wedge s_2^1 \to \infty$

La nueva función de beneficios es

$$V^1(\infty,\infty)=\max_{\substack{p_1^2\geq p_1^1\geq 0\\ p_2^2\geq p_2^1\geq 0}}\left[p_1^1\lambda q_1(p_1^1,p_2^1)+p_2^1\lambda q_2(p_1^1,p_2^1)\right]$$

el precio se obtiene al resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial V^1(\infty,\infty)}{\partial p_1^1} &= 0 \Longrightarrow \lambda q_1(p_1^1,p_2^1)\cdot\left(\begin{array}{c} 1-p_1^1\beta+p_1^1\beta q_1(p_1^1,p_2^1) \\ +p_2^1\beta q_2(p_1^1,p_2^1)\end{array}\right)=0 \\
\tfrac{\partial V^1(\infty,\infty)}{\partial p_2^1} &= 0 \Longrightarrow \lambda q_2(p_1^1,p_2^1)\cdot\left(\begin{array}{c} 1-p_2\beta+p_2\beta q_2(p_1^1,p_2^1) \\ +p_1^1\beta q_1(p_1^1,p_2^1)\end{array}\right)=0
\end{aligned}$$

La evolución intertemporal que experimenta para altos inventarios se puede representar por:

$$\lim_{s_1\to\infty, s_2\to\infty} V^k(s^k) =$$

$$\max_{\substack{p_1^{k+1}\geq p_1^k\geq 0\\ p_2^{k+1}\geq p_2^k\geq 0}} \left[\begin{array}{l} p_1^k\lambda q_1(p_1^k,p_2^k)+p_2^k\lambda q_2(p_1^k,p_2^k)+ \\ \lim\limits_{s_1\to\infty, s_2\to\infty} V^{k-1}(s_1,s_2)-\lim\limits_{s_1\to\infty} V^{k-1}(s_1,0)-\lim\limits_{s_2\to\infty} V^{k-1}(0,s_2) \end{array} \right]$$

con

$$\lim_{s_1\to\infty, s_2\to\infty} V^1(s_1,s_2) = \max_{\substack{p_1^2\geq p_1^1\geq 0\\ p_2^2\geq p_2^1\geq 0}} [p_1^1\lambda q_1(p_1^1,p_2^1)+p_2^1\lambda q_2(p_1^1,p_2^1)]$$

$$\lim_{s_1\to\infty} V^1(s_1,0) = \max_{p_1^2\geq p_1^1\geq 0} [p_1^1\lambda q_1(p_1^1,\infty)]$$

$$\lim_{s_2\to\infty} V^1(0,s_2) = \max_{p_2^2\geq p_2^1\geq 0} [p_2^1\lambda q_2(\infty,p_2^1)]$$

ANEXO E: Menor Inventario para Precio Constante

Para los modelos que consideran un valor residual fijo o 0 existe un período k donde el precio p_1^k alcanza un límite asintótico a partir de un inventario s_1^k (análogo para el precio p_2^k que alcanza un límite asintótico a partir de un inventario s_2^k). Esta formulación está directamente ligada con la proposición 3, específicamente con el nivel de inventario que reporta incrementos poco significativos para el *retailer*, por lo que a partir de este nivel se puede considerar que el beneficio y ambos precios se mantienen prácticamente constantes por las magnitudes involucradas. Por lo tanto, se cumple:

$$V^k(s_1^k+1,s_2^k) - V^k(s_1^k,s_2^k) \approx 0$$

La ecuación anterior debería ser igual a 0 para condiciones de alto inventario.

Desarrollando los beneficios se llega a la expresión

$$V^k(s_1^k{+}1,s_2^k) - V^k(s_1^k,s_2^k) =$$

$$\sum_{i=0}^{s_1^k+1}\left(p_1^k\cdot(i-(s_1^k+1)) + V^k(s_1^k+1-i,s_2^k)\right)\cdot\phi_{i,\cdot}{+}p_1^k{\cdot}(s_1^k{+}1)$$

$$+\sum_{j=0}^{s_2^k}\left(p_2^k\cdot\left(j-s_2^k\right) + V^{k-1}\left(0,s_2^k-j\right)\right)\cdot\phi_{j,\cdot}{+}p_2^k{\cdot}s_2^k$$

$$+\sum_{i=0}^{s_1^k+1}\sum_{j=0}^{s_2^k}\left(\begin{array}{c} V^{k-1}\left((s_1^k+1)-i,s_2^k-j\right) - V^{k-1}\left(0,s_2^k-j\right) \\ -V^{k-1}\left((s_1^k+1)-i,0\right)\end{array}\right)\cdot\phi_{i,j}$$

$$-\sum_{i=0}^{s_1^k}\left(p_1^k\cdot\left(i-s_1^k\right) + V^k(s_1^k-i,s_2^k)\right)\cdot\phi_{i,\cdot}{-}p_1^k{\cdot}s_1^k$$

$$-\sum_{j=0}^{s_2^k}\left(p_2^k\cdot\left(j-s_2^k\right)+V^{k-1}\left(0,s_2^k-j\right)\right)\cdot\phi_{j,\cdot}-p_2^k\cdot s_2^k$$

$$-\sum_{i=0}^{s_1^k}\sum_{j=0}^{s_2^k}\left(V^{k-1}\left(s_1^k-i,s_2^k-j\right)-V^{k-1}\left(0,s_2^k-j\right)-V^{k-1}\left(s_1^k-i,0\right)\right)\cdot\phi_{i,j}$$

con

$$\phi_{i,j}=e^{\left(\frac{-\lambda(e^{\alpha_1-\beta\cdot p_1^k}+e^{\alpha_2-\beta\cdot p_2^k})}{1+e^{\alpha_1-\beta\cdot p_1^k}+e^{\alpha_2-\beta\cdot p_2^k}}\right)}\cdot\frac{\left(\frac{\lambda e^{\alpha_1-\beta\cdot p_1^k}}{1+e^{\alpha_1-\beta\cdot p_1^k}+e^{\alpha_2-\beta\cdot p_2^k}}\right)^i\cdot\left(\frac{\lambda e^{\alpha_2-\beta\cdot p_2^k}}{1+e^{\alpha_1-\beta\cdot p_1^k}+e^{\alpha_2-\beta\cdot p_2^k}}\right)^j}{i!\cdot j!}$$

$$\phi_{i,\cdot}=e^{\left(\frac{-\lambda e^{\alpha_1-\beta\cdot p_1^k}}{1+e^{\alpha_1-\beta\cdot p_1^k}+e^{\alpha_2-\beta\cdot p_2^k}}\right)}\frac{\left(\frac{\lambda e^{\alpha_1-\beta\cdot p_1^k}}{1+e^{\alpha_1-\beta\cdot p_1^k}+e^{\alpha_2-\beta\cdot p_2^k}}\right)^i}{i!}$$

$$\phi_{\cdot,j}=e^{\left(\frac{-\lambda e^{\alpha_2-\beta\cdot p_2^k}}{1+e^{\alpha_1-\beta\cdot p_1^k}+e^{\alpha_2-\beta\cdot p_2^k}}\right)}\frac{\left(\frac{\lambda e^{\alpha_2-\beta\cdot p_2^k}}{1+e^{\alpha_1-\beta\cdot p_1^k}+e^{\alpha_2-\beta\cdot p_2^k}}\right)^j}{j!}$$

Considerando que p_1^k y p_2^k son prácticamente constantes para $(s_1^k)\wedge(s_1^k+1)$, el término $q_1(p_1^k,p_2^k)=\frac{e^{\alpha_1-\beta\cdot p_1^k}}{1+e^{\alpha_1-\beta\cdot p_1^k}+e^{\alpha_2-\beta\cdot p_2^k}}$ se puede considerar constante.

Resolviendo y eliminando términos se obtiene

$$V^k(s_1^k+1,s_2^k)-V^k(s_1^k,s_2^k)=$$

$$p_1^k(1-\sum_{i=0}^{s_1^k}\cdot\phi_{i,\cdot})+V^{k-1}\left((s_1^k+1),0\right)\cdot e^{\left(\frac{-\lambda e^{\alpha_1-\beta\cdot p_1^k}}{1+e^{\alpha_1-\beta\cdot p_1^k}+e^{\alpha_2-\beta\cdot p_2^k}}\right)} \tag{E.1}$$

$$+\sum_{i=0}^{s_1^k}V^{k-1}(s_1^k-i,s_2^k)\cdot\phi_{i,\cdot}\cdot\left(\frac{\left(\frac{\lambda e^{\alpha_1-\beta\cdot p_1^k}}{1+e^{\alpha_1-\beta\cdot p_1^k}+e^{\alpha_2-\beta\cdot p_2^k}}\right)}{(i+1)}-1\right) \tag{E.2}$$

$$+\sum_{i=0}^{s_1^k}\sum_{j=0}^{s_2^k}\left(\begin{array}{c}V^{k-1}\left((s_1^k+1)-i,s_2^k-j\right)-V^{k-1}\left(s_1^k-i,s_2^k-j\right)\\-V^{k-1}\left((s_1^k+1)-i,0\right)+V^{k-1}\left(s_1^k-i,0\right)\end{array}\right)\cdot\phi_{i,j} \tag{E.3}$$

con

$$\phi_{i,j} = e^{\left(\frac{-\lambda(e^{\alpha_1-\beta\cdot p_1^k}+e^{\alpha_2-\beta\cdot p_2^k})}{1+e^{\alpha_1-\beta\cdot p_1^k}+e^{\alpha_2-\beta\cdot p_2^k}}\right)} \cdot \frac{\left(\frac{\lambda e^{\alpha_1-\beta\cdot p_1^k}}{1+e^{\alpha_1-\beta\cdot p_1^k}+e^{\alpha_2-\beta\cdot p_2^k}}\right)^i \cdot \left(\frac{\lambda e^{\alpha_2-\beta\cdot p_2^k}}{1+e^{\alpha_1-\beta\cdot p_1^k}+e^{\alpha_2-\beta\cdot p_2^k}}\right)^j}{i!\cdot j!}$$

$$\phi_{i,\cdot} = e^{\left(\frac{-\lambda e^{\alpha_1-\beta\cdot p_1^k}}{1+e^{\alpha_1-\beta\cdot p_1^k}+e^{\alpha_2-\beta\cdot p_2^k}}\right)} \frac{\left(\frac{\lambda e^{\alpha_1-\beta\cdot p_1^k}}{1+e^{\alpha_1-\beta\cdot p_1^k}+e^{\alpha_2-\beta\cdot p_2^k}}\right)^i}{i!}$$

$$\phi_{\cdot,j} = e^{\left(\frac{-\lambda e^{\alpha_2-\beta\cdot p_2^k}}{1+e^{\alpha_1-\beta\cdot p_1^k}+e^{\alpha_2-\beta\cdot p_2^k}}\right)} \frac{\left(\frac{\lambda e^{\alpha_2-\beta\cdot p_2^k}}{1+e^{\alpha_1-\beta\cdot p_1^k}+e^{\alpha_2-\beta\cdot p_2^k}}\right)^j}{j!}$$

Para el último período y sin consideraciones de valor residual, el inventario s_1^1 corresponderá a aquél donde la probabilidad Poisson de adicionar una unidad al inventario sea baja. Considerando valor residual fijo, el nivel s_1^1 corresponderá a aquél donde la componente E.2 sea negativa y contrarreste el valor positivo de E.1, es decir, donde la probabilidad de elección o la tasa de llegada sean bajas para el período. Para un período $k \neq 1$ se debe incluir la condición E.3 que siempre es negativa por la propiedad de incrementos decrecientes de la función de beneficio. Por esta razón, el nivel s_1^k $\left(s_2^k\right)$ dependerá de la tasa de llegada de clientes así como de las probabilidades de elección $q_1(p_1^k, p_2^k)$ $\left(q_2(p_1^k, p_2^k)\right)$ para el precio constante. Además el nivel s_1^k $\left(s_2^k\right)$ también provoca que el precio p_2^k $\left(p_1^k\right)$ sea constante a partir de ese nivel, por la relación que resulta de los incrementos decrecientes del beneficio.

ANEXO F: Modelo de Bitran y Mondschein Modificado

El modelo sirve para la determinación de precios de sólo un producto y corresponde a una modificación en el proceso de llegada y la elección que realizan el cliente, respecto del modelo original (p. 71)

$$
\begin{aligned}
&V^k(s_s^k) = \\
&\max_{p_s^{k+1} \geq p_s^k \geq 0} \sum_{i=0}^{s_s^k} \begin{pmatrix} p_s^k \cdot \left(i - s_s^k\right) + \\ V^{k-1}\left(s_s^k - i, 0\right) \end{pmatrix} \cdot \frac{e^{\left(\frac{-\lambda e^{\alpha_s - \beta_s \cdot p_s^k}}{1+e^{\alpha_s - \beta_s \cdot p_s^k}}\right)} \cdot \left(\frac{\lambda e^{\alpha_s - \beta_s \cdot p_s^k}}{1+e^{\alpha_s - \beta_s \cdot p_s^k}}\right)^i}{i!} + p_s^k \cdot s_s^k \\
&V^{k-1}(0) = \quad 0 \qquad \forall k = 1, 2, ..., K. \\
&V^0\left(s_s^0\right) = \quad \mathbf{R}_0 \qquad \forall s_s^0 = 1, 2, ..., s_s^K
\end{aligned}
$$

ANEXO G: Beneficio Último Período

La utilización de un determinado valor residual condiciona la forma de la función de beneficios en el último período como resultado de simplificaciones que se pueden realizar. Si se utiliza:

- Valor residual fijo e igual a 0

$$V^1(\mathbf{s}^1) = \max \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{s_1^1} \left(p_1^1 \cdot (i - s_1^1)\right) \cdot \phi_{i,\cdot}(\mathbf{p}^1) + p_1^1 \cdot s_1^1 \\ \sum_{j=0}^{s_2^1} \left(p_2^1 \cdot (j - s_2^1)\right) \cdot \phi_{\cdot,j}(\mathbf{p}^1) + p_2^1 \cdot s_2^1 \end{bmatrix}$$

- Valor residual fijo y distinto de 0

$$V^1(\mathbf{s}^1) = \max \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{s_1^1} \left(p_1^1 \cdot (i - s_1^1) + V^0\left(s_1^1 - i, 0\right)\right) \cdot \phi_{i,\cdot}(\mathbf{p}^1) + p_1^1 \cdot s_1^1 \\ \sum_{j=0}^{s_2^1} \left(p_2^1 \cdot (j - s_2^1) + V^0\left(0, s_2^1 - j\right)\right) \cdot \phi_{\cdot,j}(\mathbf{p}^1) + p_2^1 \cdot s_2^1 \end{bmatrix}$$

- Valor residual variable

$$V^1(\mathbf{s}^1) = \max \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{s_1^1}\sum_{j=0}^{s_2^1} \begin{pmatrix} V^0\left(s_1^1 - i, s_2^1 - j\right) - V^0\left(0, s_2^1 - j\right) \\ -V^0\left(s_1^1 - i, 0\right) \end{pmatrix} \cdot \phi_{i,j}(\mathbf{p}^1) \\ +\sum_{i=0}^{s_1^1} \left(p_1^1 \cdot (i - s_1^1) + V^0\left(s_1^1 - i, 0\right)\right) \cdot \phi_{i,\cdot}(\mathbf{p}^1) + p_1^1 \cdot s_1^1 \\ +\sum_{j=0}^{s_2^1} \left(p_2^1 \cdot (j - s_2^1) + V^0\left(0, s_2^1 - j\right)\right) \cdot \phi_{\cdot,j}(\mathbf{p}^1) + p_2^1 \cdot s_2^1 \end{bmatrix}$$