



**PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
INSTITUTO DE ECONOMIA
MAGISTER EN ECONOMIA**

**TESIS DE GRADO
MAGISTER EN ECONOMIA**

Cerda Reyes, Patricio Ignacio

Diciembre, 2014



**PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
INSTITUTO DE ECONOMIA
MAGISTER EN ECONOMIA**

**ESTIMACION DEL MODELO DE INVENTARIOS PARA
COMMODITIES CON TENDENCIA**

Patricio Ignacio Cerda Reyes

Comisión

Eugenio Bobenrieth y Salvador Valdés

Santiago, diciembre de 2014

Resumen

Un supuesto básico del modelo de inventarios es que el proceso generador de precios es estacionario. Sin embargo, un porcentaje considerable de las series históricas de precios de mercancías presentan tendencia. A pesar de este hecho, la mayoría de las estimaciones econométricas previas han sido realizadas sin depurar por la respectiva tendencia. El objetivo del presente trabajo es determinar si esta depuración afecta algunas conclusiones que ha obtenido la literatura previa. En 12 de las 13 mercancías estudiadas por Deaton y Laroque (1992), con series de precios desde 1900 hasta 1987, se observa una tendencia loglineal significativa al 95 %, donde la tendencia más pronunciada corresponde a la del azúcar (-1,12 % anual). La tendencia del cobre también fue significativa (-0,43 % anual). El principal hallazgo de este trabajo es que para 4 de las 13 mercancías (algodón, maíz, aceite de palma y estaño), los porcentajes de *stockouts* estimados por Deaton y Laroque (1992) son significativamente distintos a los estimados con series depuradas de tendencia, con un 95 % de confianza.

Abstract

A basic assumption of the inventory model is that the pricing generator process is stationary. However, most of the historical commodity prices have trend. Despite this fact, most of the previous estimations have been done ignoring the refined trendless series. The aim of this study is to determine whether this affects some of the conclusions obtained by the prior literature. In 12 of the 13 commodities studied by Deaton and Laroque (1992), with price series from 1900-1987, a significant log-linear trend at 95% confidence level is observed, being sugar the commodity with the most pronounced one (-1,12% annual). The trend of copper is also significant (-0,43% annual). The most relevant finding of the present study is that in 4 of the 13 commodities (cotton, maize, palm oil and tin), the estimated *stockout* levels by Deaton y Laroque (1992) are significantly different from the estimates with trendless series, with 95% confidence.

JEL Classifications: C12, C13, C52, Q11,

Keywords: Commodity prices, inventory model, arbitrage, trend.

Índice

1. Introducción	1
2. Modelo Teórico	4
2.1. Tendencia	4
2.2. Modelo de inventarios	4
3. Análisis Econométrico	7
3.1. Método Generalizado de Momentos (GMM)	7
3.2. Método de Pseudo Máxima Verosimilitud (PMV)	11
4. Estimaciones	12
4.1. GMM	13
4.2. PMV	18
4.3. Tests empíricos	20
5. Conclusión	24
Referencias	25
6. Anexos	27
6.1. Simulación	27
6.2. Identificación del estimador GMM	29
6.3. Comparación de p^* estimado con y sin tendencia	31
6.4. Estimaciones adicionales	38
6.4.1. GMM	38
6.4.2. PMV	40
6.4.3. Tests empíricos	41

1. Introducción

El estudio de los precios de mercancías (commodities) es de gran relevancia para los países en los que la mayoría de su producción corresponde a este tipo de bienes, como es el caso de varios países en vías de desarrollo. En este contexto, contar con un modelo que permita entender las fluctuaciones de los precios, utilizando como única información las series históricas de precios, cobra especial relevancia.

Una característica importante que poseen los precios de varios commodities es una gran volatilidad. Consideremos el siguiente modelo: supongamos un commodity almacenable que se transa en un mercado competitivo con agentes neutrales al riesgo. En el corto plazo, el arbitraje intertemporal posiblemente juega un rol fundamental en el nivel de los precios. Los especuladores, que observan el precio en el periodo actual p_t , pueden acumular inventarios del producto en cuestión, para venderlo en el futuro si es que sus expectativas de precios así lo ameritan. Si p_t es suficientemente alto en relación a su expectativa de precio para el periodo siguiente, $E_t[p_{t+1}]$, lo conveniente será almacenar cero para el próximo periodo¹. Por el contrario, si el precio del commodity es más bajo que un cierto valor crítico, que llamaremos p^* , el especulador considerará conveniente mantener inventarios, para así vender el producto en un futuro más promisorio. Los modelos centrados en explorar esta idea se iniciaron con los trabajos de Gustafson (1958), que estudia la demanda óptima por inventarios, y de Muth (1961), quien agrega el supuesto de expectativas racionales. Posteriormente, varios autores realizaron diversas extensiones y aplicaciones a políticas óptimas de almacenamiento, resolviendo un problema de programación dinámica estocástica. Entre ellos, los más relevantes son, Samuelson (1971), Johnson y Sumner (1976), Newbery y Stiglitz (1981), Gardner (1979), Wright y Williams (1982) y Wright y Williams (1991).

Por otro lado, existe una amplia evidencia de que los precios de algunas mercancías pueden exhibir una tendencia en el largo plazo. En particular, Prebisch (1950) y Singer (1950) sugieren que los precios de todos los commodities deberían seguir una tendencia a la baja en el largo plazo. Esta última hipótesis ha sido reafirmada en cierta medida por Erten y Ocampo (2013) y Cashin y McDermott (2002), aunque este último concluye que la tendencia es de poca relevancia en comparación a la volatilidad que presentan los precios. Harvey, Kellard, Madsen, y Wohar (2010) muestran que una tendencia a la baja es una característica presente en una fracción

¹Consideraremos en este trabajo que no existe la posibilidad de almacenamiento negativo.

importante de los commodities, pues encuentra evidencia robusta de la existencia de tendencia negativa para 11 de los 25 commodities primarios que ellos analizan. Análogamente, Cuddington (1992) concluye que la hipótesis de Prebisch y Singer no debería considerarse como universal, encontrando una tendencia significativamente distinta de cero solo para 10 commodities (5 al alza y 5 a la baja). Las posibles razones de la presencia de tendencias son: una reducción o un aumento secular en la diferenciación de producto en estas mercancías; un aumento secular en la eficiencia de los procesos productivos gracias al desarrollo de nuevas tecnologías, que excede el aumento secular en la demanda; y una posible asimetría de la estructura de los mercados, donde las industrias manufactureras que compran la mercancías se comportan como oligopsonios.

En la tabla 1 se observan las principales características de los 13 commodities estudiados en Deaton y Laroque (1992), obtenidas a partir de precios promedio anuales, utilizando los años calendario del periodo 1900-1987, y deflactados con el *U.S. Consumer Price Index* (fuente: *World Bank Commodities Division*). Las características más importantes de las series son, en general, la presencia de volatilidad con un alto grado de autocorrelación y una marcada asimetría.

Tabla 1: Características de los commodities (series de precios reales).

	AC(1)	AC(2)	CV	Asim	Curt
Plátanos	0.91	0.82	0.17	-0.15	-0.98
Cacao	0.83	0.66	0.54	0.99	1.21
Café	0.80	0.62	0.45	1.66	3.82
Cobre	0.84	0.64	0.38	1.02	0.86
Algodón	0.88	0.68	0.35	0.35	0.07
Yute	0.71	0.45	0.32	0.61	0.26
Maíz	0.76	0.53	0.38	1.18	2.48
A. de palma	0.73	0.48	0.48	3.24	16.52
Arroz	0.83	0.61	0.36	0.55	0.03
Azúcar	0.62	0.39	0.60	1.49	3.08
Té	0.78	0.59	0.26	0.04	0.04
Estaño	0.89	0.76	0.41	1.66	3.05
Trigo	0.86	0.68	0.38	0.87	0.61

Nota: AC(1) y AC(2) corresponden a las autocorrelaciones de primer y segundo orden, CV es el coeficiente de variación, Asim es la asimetría y Curt la curtosis.

La tabla 2 de la sección 4 muestra que para 10 de los 13 commodities, con una

especificación de tipo loglineal, existió una tendencia a la baja, significativa al 95 % (plátanos, cobre, algodón, yute, maíz, aceite de palma, arroz, azúcar, té y trigo), mientras que para 2 de ellos la tendencia fue significativamente al alza (café y estaño). El único commodity sin tendencia significativa al 95 % es el cacao.

El principal inconveniente es que, obviamente, las tendencias y las variaciones de corto plazo, motivadas en parte por el arbitraje, ocurren simultáneamente, lo que dificulta separarlas. Una manera de sobrellevar este problema de simultaneidad consiste en depurar la tendencia temporal de los datos antes de aplicar el modelo de arbitraje intertemporal. Este método asegura el cumplimiento de un supuesto básico de este modelo, el cual es que la función de precios por la oferta total del bien (inventarios más producción) sea una función estacionaria en el tiempo.

Cuando la tendencia loglineal es sustraída de la serie de precios deflactados por inflación, que llamaremos PCT, se obtiene una nueva serie de precios "sin tendencia", que llamaremos PST. Múltiples trabajos en los que se realizan estimaciones económicas para precios de commodities utilizan precios históricos sin considerar que éstos puedan presentar tendencia a lo largo del tiempo. En particular, esto ocurre en Deaton y Laroque (1992) y trabajos posteriores relacionados, como Deaton y Laroque (1995) y Cafiero, Bobenrieth H, Bobenrieth H, y Wright (2011).

El objetivo de este estudio es determinar si cambian algunos resultados y conclusiones de Deaton y Laroque (1992), Deaton y Laroque (1995) y Cafiero y cols. (2011) cuando se trabaja con series de precios estacionarias (PST). El principal hallazgo de este trabajo es que las tendencias tienen un efecto importante en algunas estimaciones económicas, concluyendo que para 4 de los 13 commodities (algodón, maíz, aceite de palma y estaño), el porcentaje de *stockouts* (porcentaje de periodos en los que se produce un quiebre de inventarios) estimados por Deaton y Laroque (1992), es significativamente distinto al estimado con series depuradas de tendencia, con un 95 % de confianza.

En las secciones siguientes describiremos el modelo teórico a utilizar, para posteriormente introducir los análisis económicos que realizaremos. Finalmente, a partir de simulaciones de precios del azúcar², que es el commodity utilizado como ejemplo base en Deaton y Laroque (1992), realizaremos tests empíricos para concluir que los parámetros obtenidos con las estimaciones, y las características de las series de precios sin tendencia (PST), pueden ser reproducidas por el modelo de inventarios.

²Con la metodología desarrollada en la sección 6.1 de Anexos.

2. Modelo Teórico

2.1. Tendencia

Sea un commodity almacenable cualquiera que se transa en un mercado perfectamente competitivo. Supongamos que tenemos una serie de precios reales con tendencia (PCT) $\{\tilde{p}_t\}_{t=1}^T$. Finalmente, suponiendo una tendencia loglineal en los precios, de acuerdo al primer modelo estudiado en Harvey y cols. (2010)³, se tiene que:

$$\ln(\tilde{p}_t) = \alpha + \beta t + \epsilon_t \quad \forall t = 1, \dots, T \quad (1)$$

donde $E[\epsilon_t] = 0$. Cada elemento de la serie de precios sin tendencia (PST) $\{p_t\}_{t=1}^T$, se define como:

$$p_t = e^{\epsilon_t} \quad \forall t = 1, \dots, T \quad (2)$$

Supondremos que esta última serie proviene de un modelo estacionario de almacenamiento con posibilidad de arbitraje intertemporal en el espíritu de Gustafson (1958), utilizando de cerca el desarrollo teórico de Deaton y Laroque (1992).

2.2. Modelo de inventarios

Sea z_t la producción de un commodity cualquiera. Supongamos z_t *i.i.d.* con soporte compacto $[z, \bar{z}]$. El precio de equilibrio, en ausencia de inventarios, estará dado por la función de demanda estacionaria $D(p_t) = z_t$. Estos *shocks* pueden ser interpretados como la diferencia entre los *shocks* de oferta y demanda, por lo que, en estricto rigor, no se está asumiendo una demanda determinística. Sean I_t los inventarios y supongamos que éstos se deprecian a una tasa δ , que hay un costo marginal de almacenaje k constante y que existe un factor de descuento intertemporal $\beta = (1 + r)^{-1}$, con r la tasa de interés real libre de riesgo⁴. Por último, sea $E_t[p_{t+1}]$ el valor esperado

³Es posible considerar la presencia de quiebre de tendencias, sin embargo, como forma de simplificar el análisis, no consideraremos esta alternativa.

⁴Para todas las estimaciones realizadas en este trabajo consideraremos $r = 5\%$.

de p_{t+1} condicional en la información en t .

En el caso en que $k = 0$, que es justamente el considerado en Deaton y Laroque (1992), para que los inventarios sean costosos, se debe cumplir que $\beta(1 - \delta) < 1$.

Un agente especulador, neutral al riesgo y con capacidad de almacenaje, maximiza sus ganancias $I_t(\beta(1 - \delta)E_t[p_{t+1}] - k - p_t)$ arbitrando intertemporalmente. En equilibrio, sin embargo, no existirán oportunidades de arbitraje, por lo que:

$$I_t = 0 \quad \text{si} \quad \beta(1 - \delta)E_t[p_{t+1}] - k < p_t \quad (3)$$

$$I_t \geq 0 \quad \text{si} \quad \beta(1 - \delta)E_t[p_{t+1}] - k = p_t \quad (4)$$

En este trabajo consideraremos que el almacenamiento se produce solo por motivos de especulación. p_t podría ser mayor a la esperanza descontada del precio futuro si es que se alcanza el nivel máximo de inventarios, pero no consideraremos esta alternativa por ser inviable en la práctica. También, es posible considerar para algunos commodities que existe un almacenamiento por conveniencia o *convenience yield*, el cual se justifica con el hecho de que el mercado de algunos commodities requiere tener inventarios positivos para mantener activo el proceso de producción.

Si bien el *convenience yield* puede ser importante para explicar por qué en algunos commodities no se observan quiebres de inventario con la frecuencia que el modelo descrito en esta sección lo predice, en este trabajo no lo consideraremos, para así concentrarnos únicamente en el efecto que puedan o no tener las tendencias⁵.

La cantidad de bien disponible en un periodo se define como $x_t \equiv z_t + (1 - \delta)I_{t-1}$, la cual tiene como soporte $X = [\underline{z}, \infty)$. Así, un equilibrio estacionario de expectativas racionales (SREE) se define como una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{aligned} p_t = f(x_t) &= \text{máx}[\beta(1 - \delta)E_t p_{t+1} - k, D^{-1}(x_t)] \\ &= \text{máx}[\beta(1 - \delta)E_t[f(x_{t+1})] - k, D^{-1}(x_t)] \\ &= \text{máx}[\beta(1 - \delta)E_t[f(z_{t+1} + (1 - \delta)I_t)] - k, D^{-1}(x_t)] \\ &= \text{máx}[\beta(1 - \delta)E_t[f\{z_{t+1} + (1 - \delta)(x_t - Df\{x_t\})\}] - k, D^{-1}(x_t)] \end{aligned} \quad (5)$$

⁵Además, Wright y Williams (1991) y Bobenrieth H, Bobenrieth H, y Wright (2004) consideran que el *convenience yield* es un concepto que no está bien definido.

Quitando los subíndices del tiempo, se obtiene la siguiente ecuación funcional:

$$f(x) = \text{máx}[\beta(1 - \delta)E[f\{z + (1 - \delta)(x - Df\{x\})\}] - k, D^{-1}(x)] \quad (6)$$

En la Figura 1 se aprecia la diferencia entre las funciones de precio con y sin almacenamiento para una función de demanda lineal. Cuando $p_t \geq p^*$ no existe almacenamiento, por lo que p_{t+1} es independiente de p_t . Por el contrario, si $p_t < p^*$, el precio esperado en $t + 1$ será el que no permita oportunidades de arbitraje, por lo que $E[p_{t+1}|p_t] - k = p^*$, que en la figura corresponde al punto de no diferenciabilidad para el cual f es distinta a D^{-1} para precios menores a p^* .

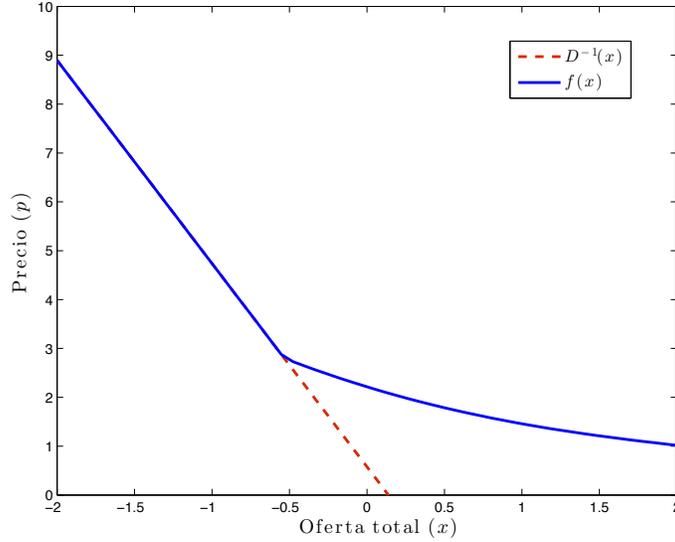


Figura 1: Funciones de precio con y sin almacenamiento (f y D^{-1} , respectivamente).

De esta manera, bajo un argumento análogo al de Deaton y Laroque (1992), es posible obtener la siguiente autoregresión:

$$E[p_{t+1}|p_t] = \frac{\text{mín}\{p_t, p^*\} + k}{\beta(1 - \delta)} \quad (7)$$

Si $p_t \geq p^*$, entonces no habrán inventarios en ese periodo, por lo que $p_{t+1} = f(x_{t+1}) = f(z_{t+1}) \Rightarrow E_t[p_{t+1}] = \frac{p^* + k}{\beta(1 - \delta)}$. Por el contrario, si $p_t < p^*$, $I_t > 0$, con lo que $p_t = \beta(1 - \delta)E_t[f(x_{t+1})] - k = \beta(1 - \delta)E_t[p_{t+1}] - k \Rightarrow E_t[p_{t+1}] = \frac{p_t + k}{\beta(1 - \delta)}$. Luego, se

obtiene directamente el resultado de la ecuación 7.

Así, tenemos una forma explícita de evaluar la evolución de los precios de un commodity cualquiera que cumpla los supuestos anteriormente mencionados.

Consideraremos particularmente el caso $k = 0$ para comparar nuestros resultados con los de Deaton y Laroque (1992) y posteriormente el caso $\delta = 0$, que es el estudiado en Cafiero y cols. (2011).

3. Análisis Econométrico

En esta sección se revisarán los métodos econométricos utilizados en las estimaciones del modelo teórico.

Para la tendencia, realizaremos una estimación con el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO).

3.1. Método Generalizado de Momentos (GMM)

De acuerdo a la forma autoregresiva de la ecuación 7, podemos hacer una estimación econométrica mediante el Método Generalizado de Momentos (GMM) a la siguiente regresión:

$$p_t = \gamma(\text{mín} \{p_{t-1}, p^*\} + k) + u_t \quad (8)$$

donde $\gamma = (\beta(1 - \delta))^{-1}$. La idea es estimar, a partir de los datos, los valores de γ , k y p^* para las series con tendencia (PCT) y sin tendencia (PST).

Deaton y Laroque (1992) utilizan como instrumento la matriz V de dimensión $T \times 4$ con filas del tipo:

$$v_t = (1, p_{t-1}, p_{t-2}, p_{t-3})$$

En nuestro análisis, usaremos esta misma matriz de instrumentos. Así, podemos obtener el estimador $\hat{\theta} = (\hat{\gamma}, \hat{p}^*)$ minimizando la función objetivo $\frac{1}{n}u'V(V'V)^{-1}V'u$.

Antes de proseguir con las estimaciones, veamos primero si esta metodología aplica a nuestro problema, ya que la ecuación 8 es no lineal y, además, no es diferenciable en todo su dominio, (sin embargo, supondremos que es continuamente diferenciable con probabilidad uno). Para ello, seguiremos de cerca el desarrollo teórico del estimador GMM de Newey y McFadden (1994). Supongamos una función de momentos vectorial $g(z, \theta)$ tal que $E[g(z, \theta_0)] = 0$ y sea \hat{W} una matriz semi-definida positiva. Buscamos $\hat{\theta} = \operatorname{argmax}_{\theta \in \Theta} \hat{Q}_n(\theta)$, con $\hat{Q}_n(\theta) = -\hat{g}_n(\theta)' \hat{W} \hat{g}_n(\theta) = -\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(z_i, \theta)\right)' \hat{W} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(z_i, \theta)\right)$. Realizando la analogía con nuestra regresión de interés, $g(z, \theta) = v_t' u_t$ y $\hat{W} = \left(\frac{1}{n} V' V\right)^{-1}$, por lo que:

$$\hat{Q}_n = \frac{1}{n} u' V (V' V)^{-1} V' u \quad (9)$$

La condición de identificación del estimador GMM es que la función objetivo $\hat{Q}_n(\theta)$ sea minimizada en un único punto $\theta = \theta_0$. Por Ley de los Grandes Números, sabemos que $\hat{g}_n \xrightarrow{p} g_0(\theta) = E[g(z, \theta)]$, por lo que si $\hat{W} \xrightarrow{p} W$, con W semidefinida positiva, entonces $\hat{Q}_n(\theta) \xrightarrow{p} Q_0(\theta)$. El mínimo de esta función es 0 justamente en $\theta = \theta_0$, por lo que solo nos queda ver si es único, lo que es garantizado por el Lema 2,3 de Newey y McFadden (1994) si es que $W g_0(\theta) \neq 0$ para $\theta \neq \theta_0$.

En la sección 6.2 de anexos se muestra un desarrollo numérico de la identificación del estimador GMM para una simulación de precios con los parámetros estimados por Cafiero y cols. (2011) para el cobre.

Los primeros resultados de las propiedades asintóticas para funciones no lineales fueron desarrollados por Burguete, Ronald Gallant, y Souza (1982) y Hansen (1982). El siguiente teorema (Teorema 2,6 Newey y McFadden (1994), pág. 2132) muestra un listado de condiciones suficientes para obtener la convergencia en probabilidad del estimador GMM.

Teorema 1 (Consistencia). *Supongamos z_i ($i = 1, 2, \dots$) i.i.d., $\hat{W} \xrightarrow{p} W$ y que:*

(a) *W es semidefinida positiva y $W E[g(z, \theta)] = 0 \iff \theta = \theta_0$.*

(b) *$\theta_0 \in \Theta$ compacto.*

(c) $g(z, \theta)$ continua en Θ con probabilidad uno.

(d) $E[\sup_{\theta \in \Theta} \|g(z, \theta)\|] < \infty$.

Entonces, $\hat{\theta} \xrightarrow{p} \theta_0$.

Por hipótesis, asumamos que las condiciones (a) y (b) del teorema anterior se cumplen para la función de momentos de los 13 commodities utilizada en Deaton y Laroque (1992). La condición (c) se satisface por inspección, ya que $g(z, \theta) = v'_t u_t$ es continua en todo Θ^6 . Finalmente, (d) se cumple si es que la condición de existencia de los momentos se satisface⁷. Finalmente, $\hat{\theta} = (\hat{\gamma}, \hat{p}^*)$ converge en probabilidad al parámetro poblacional.

La normalidad asintótica desarrollada por estos autores requiere que la función $g_n(\theta)$ sea continuamente diferenciable en una vecindad de θ_0 , lo que no necesariamente se cumple en nuestro caso. La normalidad asintótica para funciones que no pertenecen a esta clase fue desarrollada por Pollard (1985) y Pakes y Pollard (1989). En el caso en que los momentos no sean continuos en los parámetros, que es justamente nuestro caso, el siguiente teorema (Teorema 7,2 Newey y McFadden (1994), pág. 2186) aplica:

Teorema 2 (Normalidad Asintótica). *Supongamos que $\hat{g}_n(\hat{\theta})' \hat{W} \hat{g}_n(\hat{\theta}) \leq \inf_{\theta \in \Theta} \hat{g}_n(\hat{\theta})' \hat{W} \hat{g}_n(\hat{\theta}) + o_p(n^{-1})$, $\hat{\theta} \xrightarrow{p} \theta_0$, $\hat{W} \xrightarrow{p} W$, W es semidefinida positiva y $g_0(\theta)$ es tal que:*

(a) $g_0(\theta_0) = 0$.

(b) $g_0(\theta)$ es diferenciable en θ_0 con derivada igual a G tal que $G'WG$ es de rango completo.

(c) $\theta_0 \in \text{int}(\Theta)$.

(d) $\sqrt{n} \hat{g}_n(\theta_0) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma)$.

(e) $\forall \delta_n \rightarrow 0, \sup_{\|\theta - \theta_0\| \leq \delta_n} \frac{\sqrt{n}}{1 + \sqrt{n} \|\theta - \theta_0\|} \|\hat{g}_n(\theta_0) - \hat{g}_n(\theta)\| \xrightarrow{p} 0$.

Entonces $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) \xrightarrow{d} N[0, (G'WG)^{-1}G'W\Sigma WG(G'WG)^{-1}]$.

⁶ u_t es una composición de funciones continuas.

⁷Es necesario que hayan más datos que condiciones de momento para que estos existan.

(a), (c) y (d) son supuestos de nuestro modelo, por lo que consideraremos que se cumplen. Según el teorema anterior, para que exista normalidad asintótica g_0 debe ser diferenciable en θ_0 . Como ya se ha discutido anteriormente, en nuestro caso $\hat{g}_n = v_t u_t$ no es diferenciable en $p^* = p_{t-1}$, por lo que no sabemos si g_0 lo será. Así, para verificar las condiciones (b) y (e), necesitamos el siguiente teorema (Teorema 7,3 Newey y McFadden (1994), pág. 2188):

Teorema 3. *Supongamos que $E[g(z, \theta_0)] = 0$ y que existen $\Delta(z)$ y $\epsilon > 0$ tal que con probabilidad uno $r(z, \theta) = |g(z, \theta) - g(z, \theta_0) - \Delta(z)(\theta - \theta_0)|/|\theta - \theta_0|$ cuando $\theta \rightarrow \theta_0$, $E[\sup_{\|\theta - \theta_0\| \leq \epsilon} r(z, \theta)] < \infty$, y $n^{-1} \sum_{i=1}^n \Delta(z_i) \xrightarrow{p} E[\Delta(z)]$. Entonces, los supuestos (b) y (e) del teorema 2 se cumplen para $G = E[\Delta(z)]$.*

Los requerimientos de este último teorema, formulado por Hansen (1982), implican que una condición suficiente para la normalidad asintótica del teorema 2 es que la función de momentos $\hat{g}_n(\theta) = n^{-1} \sum_{i=1}^n g(z_i, \theta)$ sea diferenciable con probabilidad uno y con derivada Δ en θ_0 . Podemos suponer que esto último se cumple en nuestro caso, ya que el punto de conflicto $p^* = p_{t-1}$ es único en un conjunto Θ compacto. De acuerdo a esto, podemos concluir finalmente que nuestros parámetros estimados presentan normalidad asintótica, y que la matriz de varianzas y covarianzas explicitada por Deaton y Laroque (1992) es correcta, con derivada $\Delta = \partial_\theta(v_t u_t)$ ⁸.

Las pruebas a los tres teoremas previamente enunciados se encuentran en Newey y McFadden (1994).

De esta forma, la matriz de varianzas y covarianzas es efectivamente:

$$\hat{\Omega}_{GMM} = \Sigma_1^{-1} \Sigma_2 \hat{D} \Sigma_2' \Sigma_1^{-1} \quad (10)$$

donde \hat{D} es una matriz diagonal con $\hat{D}_{tt} = \hat{u}_t^2$, $\Sigma_1 = (\partial_\theta \hat{u})' V (V' V)^{-1} V' (\partial_\theta \hat{u})$ y $\Sigma_2 = (\partial_\theta \hat{u})' V (V' V)^{-1} V'$.

⁸Esto es justamente lo que los autores realizan en su paper.

3.2. Método de Pseudo Máxima Verosimilitud (PMV)

La aplicación de esta metodología al modelo de inventarios, desarrollada por Deaton y Laroque (1995), consiste básicamente en construir la función de verosimilitud para u_t (ecuación 8), con el supuesto de que estos errores poseen una distribución asintóticamente normal. Esto claramente no se cumple en nuestro caso. Sin embargo, los autores demuestran que los estimadores son consistentes bajo el modelo de inventarios.

El primer y segundo momento de p_{t+1} condicional a p_t son:

$$\begin{aligned} m(p_t) &= E_t[p_{t+1}] \\ &= \sum_{n=1}^N f^{-1}(z_{t+1}^n + (1-d)(f^{-1}(p_t) - D(p_t))Pr(z_{t+1}^n)) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} s(p_t) &= V_t[p_{t+1}] \\ &= \sum_{n=1}^N f^{-1}(z_{t+1}^n + (1-d)(f^{-1}(p_t) - D(p_t)))^2 Pr(z_{t+1}^n) - m^2(p_t) \end{aligned} \quad (12)$$

Así, la función de verosimilitud corresponde a:

$$\begin{aligned} \ln(L) &= \sum_{t=1}^{T-1} \ln(l_t) \\ &= \frac{1}{2} \left(-(T-1) \ln(2\pi) - \sum_{t=1}^{T-1} \ln s(p_t) - \sum_{t=1}^{T-1} \frac{(p_{t+1} - m(p_t))^2}{s(p_t)} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

Finalmente, la matriz de varianzas y covarianzas es:

$$\hat{\Omega}_{PMV} = J^{-1} G' G J^{-1} \quad (14)$$

donde $J_{i,j} = \frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$ y $G_{t,i} = \frac{\partial \ln(l_t)}{\partial \theta_i}$.

Si bien las estimaciones con esta metodología requieren mayor información, como por ejemplo la forma funcional de la función de demanda asociada, tiene la ventaja de que se pueden estimar parámetros asociados al mecanismo generador de precios (lo que no es posible hacer con estimaciones mediante GMM). Sin embargo, la desventaja es que surge la posibilidad de que el modelo pueda estar mal especificado.

4. Estimaciones

En la tabla 2 se muestran las tendencias estimadas según la ecuación 1, para los 13 commodities estudiados, con el método MCO. De todos ellos, solo el cacao no presenta una tendencia significativa al 95 % de confianza. Cabe señalar, sin embargo, que el término de error de la ecuación 1 no satisface los supuestos usuales de una regresión por MCO, por lo que los errores estándar presentados en la tabla 2 deben ser interpretados con precaución.

Tabla 2: Tendencias estimadas para el modelo loglineal

	β	S.E.	$100(e^\beta - 1)$
Plátanos	-0.0025***	0.0007	-0.25
Cacao	0.0018	0.0024	0.18
Café	0.0075***	0.0015	0.76
Cobre	-0.0043***	0.0015	-0.43
Algodón	-0.0090***	0.0013	-0.89
Yute	-0.0029**	0.0014	-0.29
Maíz	-0.0093***	0.0012	-0.93
A. de palma	-0.0091***	0.0014	-0.91
Arroz	-0.0100***	0.0012	-1.00
Azúcar	-0.0113***	0.0021	-1.12
Té	-0.0037***	0.0011	-0.37
Estaño	0.0081***	0.0013	0.82
Trigo	-0.0096***	0.0012	-0.96

*Nota: ** y *** corresponden a las significancias al 10 % y 5 %, respectivamente, sobre la hipótesis nula de que no existe tendencia. S.E. corresponde al error estándar de cada estimación. La última columna indica la tendencia como porcentaje de variación.*

En la siguiente sección se replicarán las estimaciones de Deaton y Laroque (1992) con su misma metodología, para posteriormente estimar la serie PST y observar si cambian algunas de las conclusiones de su trabajo.

4.1. GMM

Para el algoritmo de minimización de la función objetivo Q_n (sección 3.1, ecuación 9), los autores utilizan el método de Newton. Para funciones diferenciables en todo su soporte⁹, el método consiste en encontrar $\hat{\theta}$ mediante la siguiente ecuación recursiva:

$$\theta_{n+1} = \theta_n - H^{-1} \nabla_{\theta} \hat{Q}_n(\theta_n) \quad (15)$$

Los resultados obtenidos con un algoritmo de minimización no basado completamente en gradientes, como por ejemplo la función de MATLAB *fminsearch*, entregan, para algunos commodities, valores de la función objetivo levemente menores a los obtenidos con el método de Newton, por lo que utilizaremos *fminsearch* para nuestros resultados.

En la tabla 3 se muestran las estimaciones para las series PCT (fuente: *World Bank Commodities Division*), con el método GMM, para los 13 commodities estudiados, considerando la especificación con $k = 0$. Se observa que las estimaciones son prácticamente idénticas a las de la Tabla 4 de Deaton y Laroque (1992), salvo por los errores estándar, los cuales son aproximadamente la mitad de los obtenidos por los autores. La columna SO (*stockouts*) corresponde a la fracción de precios de cada serie que es mayor a su respectivo p^* , es decir, el porcentaje de periodos en los que teóricamente debieron haber ocurrido quiebres de inventario. OID corresponde al estadístico del test de sobreidentificación y DW se refiere al estadístico de Durbin-Watson.

Posteriormente, en la tabla 4, se realizan las mismas estimaciones para la serie de precios PST, obtenida a partir de la ecuación 2, donde el estimador del término de error de la ecuación 1 se obtuvo mediante MCO a la variable dependiente que corresponde al logaritmo de la serie PCT.

⁹Nuestra regresión de interés no cumple con este requisito, ya que es no diferenciable al menos en $p^* = p_{t-1}$, pero el algoritmo es igualmente aplicable.

Tabla 3: Estimaciones con método GMM para PCT ($k = 0$)

	γ	p^*	SO	OID	DW
Plátanos	1,00 (0,01)	0,69 (0,02)	0,16	1,17	1,87
Cacao	1,03 (0,04)	0,34 (0,06)	0,08	2,31	1,62
Café	1,04 (0,03)	0,38 (0,03)	0,10	2,54	1,45
Cobre	1,01 (0,02)	0,79 (0,08)	0,07	5,35	1,57
Algodón	1,02 (0,02)	0,94 (0,11)	0,08	11,08	1,20
Yute	1,05 (0,03)	0,76 (0,05)	0,19	8,17	1,74
Maíz	1,02 (0,02)	1,08 (0,18)	0,07	0,81	1,71
A. de palma	0,99 (0,03)	1,43 (0,56)	0,01	2,26	1,84
Arroz	1,01 (0,02)	0,93 (0,09)	0,09	6,38	1,40
Azúcar	1,09 (0,06)	1,03 (0,12)	0,24	4,47	1,90
Té	1,01 (0,02)	0,64 (0,05)	0,16	0,65	1,74
Estaño	1,01 (0,02)	0,45 (0,05)	0,05	2,71	1,62
Trigo	1,01 (0,02)	1,10 (0,10)	0,09	5,84	1,36

Nota: errores estándar entre paréntesis. SO (stockouts) es la fracción de precios de cada serie que es mayor a su respectivo p^ , OID corresponde al estadístico del test de sobreidentificación y DW se refiere al estadístico de Durbin-Watson.*

Tabla 4: Estimaciones con método GMM para PST ($k = 0$)

	γ	p^*	SO	OID	DW
Plátanos	1,01 (0,01)	1,21 (0,03)	0,17	0,74	1,92
Cacao	1,03 (0,04)	1,93 (0,23)	0,15	2,47	1,66
Café	1,04 (0,03)	1,54 (0,09)	0,15	2,30	1,54
Cobre	1,02 (0,02)	1,50 (0,13)	0,10	7,06	1,55
Algodón	1,02 (0,02)	1,36 (0,08)	0,17	13,67	1,22
Yute	1,05 (0,03)	1,32 (0,09)	0,22	8,36	1,71
Maíz	1,04 (0,03)	1,33 (0,13)	0,16	1,00	1,67
A. de palma	1,01 (0,03)	1,80 (0,38)	0,05	2,55	1,83
Arroz	1,02 (0,02)	1,42 (0,23)	0,08	7,59	1,23
Azúcar	1,06 (0,06)	2,25 (0,56)	0,06	4,57	1,82
Té	1,01 (0,02)	1,35 (0,10)	0,12	0,63	1,76
Estaño	1,01 (0,02)	1,56 (0,15)	0,08	4,80	1,48
Trigo	1,01 (0,02)	1,56 (0,11)	0,08	11,46	1,32

Nota: errores estándar entre paréntesis. SO (stockouts) es la fracción de precios de cada serie que es mayor a su respectivo p^ , OID corresponde al estadístico del test de sobreidentificación y DW se refiere al estadístico de Durbin-Watson.*

En las estimaciones de la tabla 4, todos los commodities presentan un parámetro estimado $\gamma > 1$, por lo que se podría considerar que la especificación del modelo mejora cuando se utiliza PST. Sin embargo, al igual que en Deaton y Laroque (1992), este parámetro no es significativamente distinto de 1,

Otro aspecto a considerar es que el nivel de *stockouts* disminuye solo para 4 de los 13 commodities (arroz, azúcar, té y trigo) cuando se realizan las estimaciones con PST (tabla 4) en comparación a las con PCT (tabla 3). Es intuitivo pensar que los *stockouts* deberían aumentar cuando se consideran los precios depurados de tendencia, porque la probabilidad de que p_t sea mayor a p^* ya no se concentrará en el inicio de la serie, para los casos en que la tendencia es negativa, o al final de esta, en caso de una tendencia positiva. Veamos como ejemplo el caso del trigo. En la figura 2, se observa que al inicio de la serie se producen múltiples *stockouts* cuando se usa PCT para las estimaciones¹⁰. Por el contrario, al eliminar la tendencia, los *stockouts* se distribuyen de forma relativamente uniforme a lo largo de toda la muestra. Este efecto es similar en los demás casos: commodities con tendencia negativa o positiva tienen una distinta distribución de *stockouts* a lo largo del tiempo en las dos estimaciones. En un modelo en el que los *shocks* de producción son aleatorios, que los *stockouts* estén uniformemente distribuidos a lo largo del tiempo es una característica esperable.

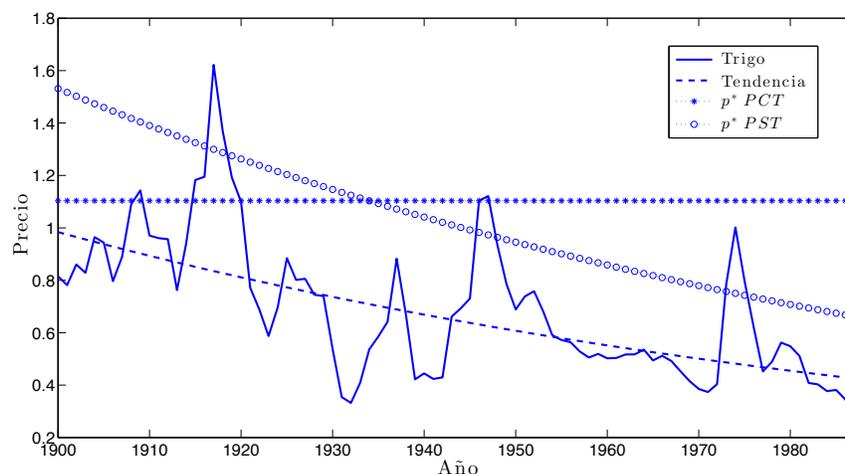


Figura 2: Serie de precios del trigo (línea continua), su tendencia asociada (línea discontinua) y p^* estimado con las series de precios PCT y PST

En el caso del azúcar (figura 3), que es el que presenta la mayor tendencia de los 13 commodities estudiados (1,1%), la situación es similar a la del trigo. Sin embargo, debido a que al inicio de la muestra los precios del azúcar se mantuvieron

¹⁰Un *stockout* se produce en un periodo t cuando p_t es mayor al p^* estimado, el cual se puede obtener a partir de la serie PCT (tabla 3) o de la serie PST (tabla 4). Notar que, en términos reales, el p^* estimado con PST posee la tendencia de la serie de precios respectiva.

relativamente altos por un periodo de aproximadamente 20 años (1900 a 1920), el porcentaje de *stockouts* es considerablemente mayor en el caso de las estimaciones con PCT (24%), en comparación a las con PST (6%).

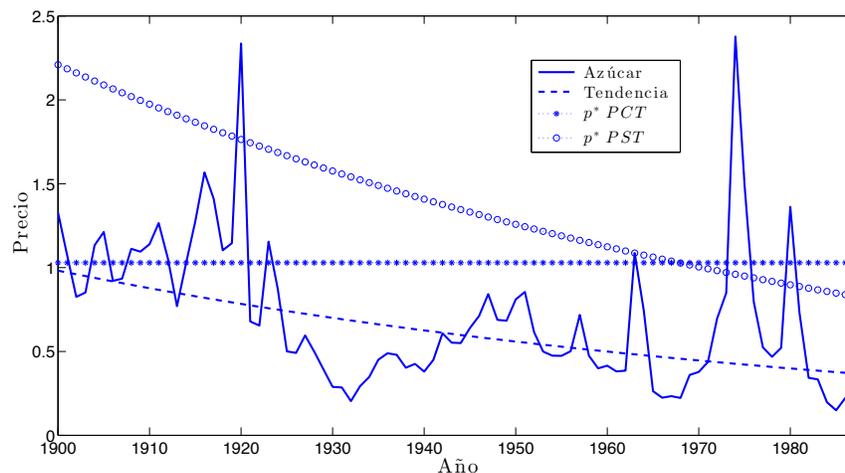


Figura 3: Serie de precios del azúcar (línea continua), su tendencia asociada (línea discontinua) y p^* estimado con las series de precios PCT y PST

En la sección 6.3 de Anexos, se encuentran estas mismas figuras para los 11 commodities restantes.

Con respecto al estadístico OIT, este es mayor a 5,89 (valor crítico al 5% con dos grados de libertad) para 5 commodities en el caso de PST y para 3 en el de PCT. Sin embargo, el estadístico DW se encuentra entre 1 y 2 para todos los commodities, con lo que no existe evidencia estadística de autocorrelación serial para la estimación instrumentada.

Finalmente, con el objetivo de testear si las estimaciones del nivel de *stockouts* obtenidas por Deaton y Laroque (1992) (tabla 3), son significativamente distintas a las realizadas con precios depurados de tendencia (tabla 4), en la tabla 5 se muestra el intervalo de confianza al 95% para los *stockouts* estimados con GMM para PST ($k = 0$), contruidos a partir del error estándar de p^* , el cual sabemos que se distribuye normal (teorema 2, sección 3.1). Se observa que 4 commodities (algodón, maíz, aceite de palma y estaño) poseen un nivel de *stockouts* significativamente distinto

cuando se consideran los precios depurados de tendencia. El intervalo de confianza debe ser construido para los *stockouts* estimados con PST, ya que las estimaciones con PCT, al provenir de una serie de precios no estacionaria, no están bien especificadas, y por lo tanto, no sabemos cómo distribuyen sus parámetros.

Tabla 5: Intervalos de confianza de SO estimados con GMM para PST ($k = 0$)

	SO(PCT)	Intervalo al 95 % SO(PST)
Plátanos	0.16	(0,06 0,24)
Cacao	0.08	(0,05 0,25)
Café	0.10	(0,07 0,20)
Cobre	0.07	(0,05 0,27)
Algodón	0.08**	(0,08 0,30)
Yute	0.19	(0,10 0,31)
Maíz	0.06**	(0,06 0,34)
A. de palma	0.01**	(0,01 0,42)
Arroz	0.09	(0,02 0,63)
Azúcar	0.24	(0,03 0,40)
Té	0.16	(0,03 0,27)
Estaño	0.05**	(0,05 0,19)
Trigo	0.08	(0,03 0,14)

Nota: ** corresponde a los valores con significancia al 95 % de confianza. *SO(PST)* es la fracción de *stockouts* estimada con la serie *PST*.

4.2. PMV

En esta sección se realiza una estimación por el método PMV para la serie PST del azúcar, de acuerdo a la metodología mostrada en la sección 3.2. Este commodity corresponde al ejemplo base en el estudio de Deaton y Laroque (1992) y es también el abordado en Cafiero, Wright, y cols. (2015). No se realiza una estimación para PCT debido a que esta serie, al poseer tendencia, no permite obtener estimadores consistentes.

Los parámetros estimados por PMV se utilizarán en la siguiente sección para realizar simulaciones de precios que permitan obtener distribuciones empíricas de estos mismos parámetros y de las características de la serie (tabla 1). Así, podremos com-

parar nuestros resultados con los de Cafiero y cols. (2011). En la tabla 6 se muestran estimaciones con el método de PMV para la serie PST del azúcar, para el caso en que no se considera depreciación de los inventarios ($\delta = 0$). Cafiero y cols. (2011) utilizan esta especificación argumentando que la evidencia histórica es consistente con costos marginales de almacenamiento positivo ($k > 0$) más que con tasas de depreciación considerables.

Se sabe además que Deaton y Laroque (1995) utilizan una grilla de puntos de discretización bastante pequeña (10 puntos para los shocks de producción y 10 a 20 puntos para la grilla de oferta total). Cafiero y cols. (2011) notan que las estimaciones cambian considerablemente si se aumenta el tamaño de grilla de la oferta, pero mantienen los mismos 10 puntos para la grilla de shocks de producción (los que provienen de una distribución $N(0, 1)$). En este trabajo notamos que si se aumenta también la grilla de z_t , se obtienen resultados aún más estables, en los que los algoritmos de maximización entregan resultados que no son dependientes del punto de partida que se utilice. De esta forma, las especificaciones que se utilizaron para el azúcar son un soporte $X = [-5, 30]$, con una grilla de 1.000 puntos para x_t y de 200 puntos para z_t (oferta total y shocks de demanda/producción, respectivamente).

Tabla 6: Estimaciones con método PMV para PST ($\delta = 0$) del azúcar.

	a	b	k	PMV
Azúcar	0.96	-1.85	0.03	-31.61
	(0,27)	(0,33)	(0,04)	

Nota: errores estándar entre paréntesis. a y b son los parámetros estimados para la demanda lineal, k es el costo marginal de almacenaje y PMV es el valor de la función de máxima verosimilitud.

De los 13 commodities estudiados en este trabajo, el azúcar es el único que entrega valores del parámetro a consistentes con los datos. Los demás commodities poseen estimadores para a demasiado altos. Considerando que este parámetro corresponde a la media de las series de precios, y que ningún commodity tiene media mayor a 2, un valor demasiado alto de a no es realista.

4.3. Tests empíricos

Nos interesa saber si los parámetros y características de las series históricas del azúcar son o no estadísticamente distintas a las que se pueden obtener con simulaciones de precios. En el caso que lo fueran, es posible concluir que el modelo de arbitraje, por sí solo, es capaz de replicar el comportamiento de los precios del azúcar.

En esta sección utilizaremos simulaciones de 880.000 periodos para realizar diversos tests empíricos. Como las series históricas utilizadas son de 88 periodos, a partir de las simulaciones se obtendrán 10.000 series de 88 periodos cada una (no traslapadas). Cada una de estas pequeñas series simuladas tienen características asociadas (media, autocorrelación de primer y segundo orden, coeficiente de variación, asimetría y curtosis), los parámetros k , p^* obtenidos mediante estimación por GMM ($\delta = 0$) y el nivel de *stockouts* SO respectivo (las estimaciones para esta especificación se encuentran en las tablas 9 y 10 de Anexos). De esta forma, se pueden construir distribuciones de probabilidad empíricas para cada uno de estos valores, (ya sea si fueron obtenidos a partir de las series con o sin tendencia) para así obtener el percentil en el que se encuentran con respecto a su distribución, tal como se muestra en las tablas 7 y 8, en las cuales las simulaciones se realizaron a partir de los valores de PST estimados con PMV para las series PST y PCT, respectivamente, del azúcar. Si el percentil es menor a 2,5 o mayor a 97,5, podemos concluir con un 95% de confianza que la serie de precios histórica no podría provenir de la simulación de precios. Para poder comparar los valores de las simulaciones de PST con las características de PCT, los precios históricos se normalizaron de forma que su media sea 1. Esto es solo un factor de escala que no modifica las estimaciones econométricas.

Tabla 7: Valores de características y parámetros de PST y su percentil asociado a la distribución empírica de la simulación de precios PST (Normalizados para que su media sea igual a 1).

Azúcar	Media	AC(1)	AC(2)	CV	Asim	Curt	k	p^*	SO
PST	1,00	0,57	0,26	0,65	3,13	13,61	0,02	1,96	0,05
Percentil	35,7	67,7	28,8	65,6	88,0	88,8	15,6	84,7	5,1

Nota: AC(1) y AC(2) corresponden a las autocorrelaciones de primer y segundo orden, CV es el coeficiente de variación, Asim es la asimetría, Curt la curtosis, k y p^ los parámetros estimados mediante GMM ($\delta = 0$) y SO la fracción de stockouts.*

Tabla 8: Valores de características y parámetros de PCT, y su percentil asociado a la distribución empírica de la simulación de precios PST (Normalizados para que su media sea igual a 1).

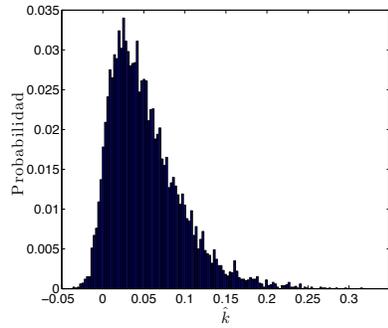
Azúcar	Media	AC(1)	AC(2)	CV	Asim	Curt	k	p^*	SO
PCT	1,00	0,62	0,39	0,60	1,49	3,08	0,03	1,47	0,23
Percentil	35,7	79,7	63,3	48,6	12,4	16,0	33,5	41,7	83,7

Nota: AC(1) y AC(2) corresponden a las autocorrelaciones de primer y segundo orden, CV es el coeficiente de variación, Asim es la asimetría, Curt la curtosis, k y p^ los parámetros estimados mediante GMM ($\delta = 0$) y SO la fracción de stockouts.*

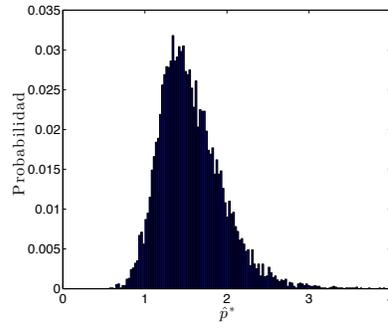
El azúcar es el único caso en que no se puede rechazar la hipótesis nula de que todos los parámetros y características de las series PCT y PST provienen de la distribución empírica de la simulación de precios depurados de tendencia. No se observan diferencias de significancia entre PCT y PST, posiblemente porque, para efectos de este análisis, ni siquiera la tendencia del azúcar, que corresponde a la más alta de la muestra (en términos absolutos), es lo suficientemente pronunciada.

Si se realiza el mismo ejercicio de la tabla 7 para los demás commodities, se observaría que los percentiles de la media serían significativos al 95% al menos (razón por la cual se descartaron). Esto quiere decir que, a excepción del azúcar, las estimaciones no replican satisfactoriamente la media de las series de precios. Para sobrellevar este problema, se realizaron estimaciones en las que se fijó el parámetro a en el valor 1, En la tabla 11 de Anexos se muestran los parámetros estimados para esta especificación, los que posteriormente fueron utilizados para realizar los tests empíricos de la tabla 12 de Anexos. Sin embargo, restringir el valor del parámetro a provoca que las simulaciones de precios de 9 de los 13 commodities no sean capaz de explicar los niveles de autocorrelación de las series de precios históricas, por lo que no se considerarán como relevantes en este trabajo.

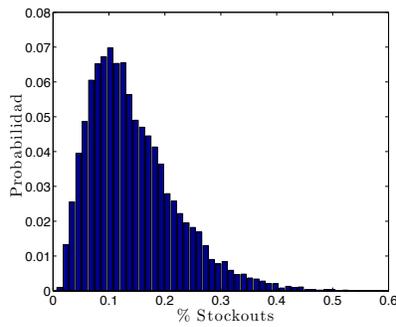
Finalmente, con el objetivo de tener una apreciación visual de cómo son las distribuciones empíricas generadas computacionalmente, se muestran los gráficos para el caso particular del azúcar (figuras 4 y 5).



(a) PST

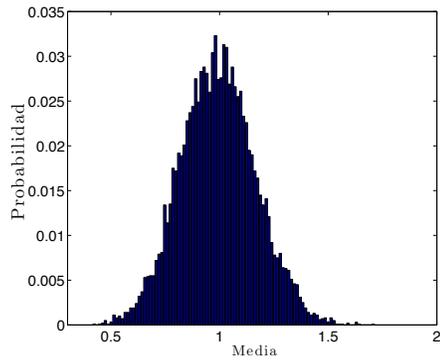


(b) PST

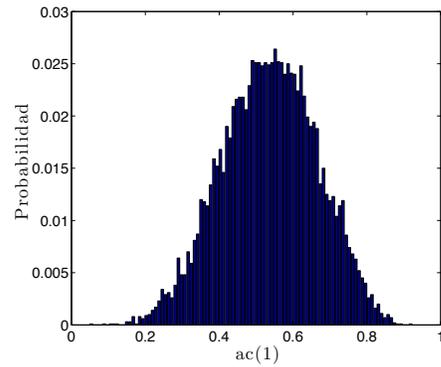


(c) PST

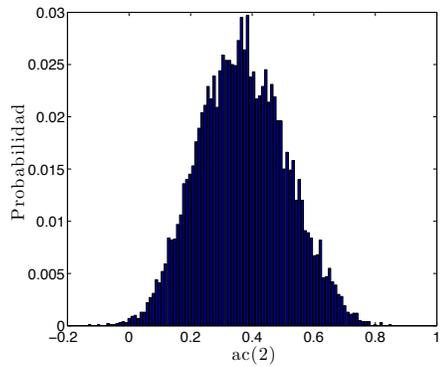
Figura 4: Distribución empírica de k , p^* y SO para el azúcar. Simulaciones realizadas con los parámetros estimados mediante PMV ($\delta = 0$) para PST.



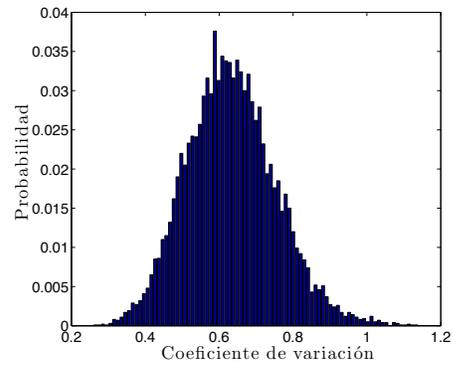
(a) PST



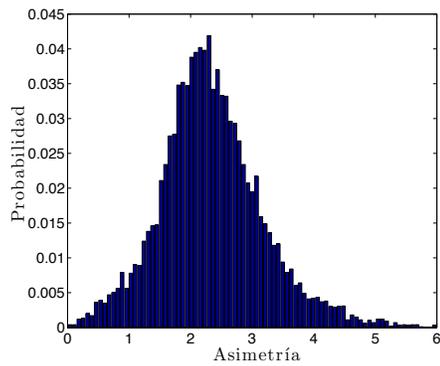
(b) PST



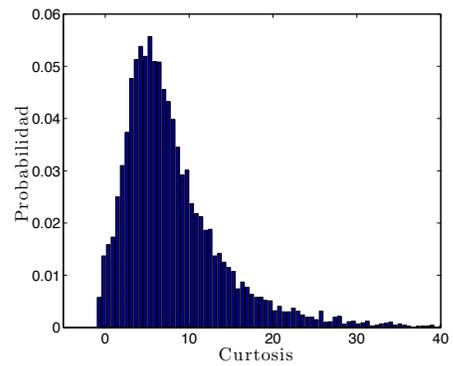
(c) PST



(d) PST



(e) PST



(f) PST

Figura 5: Distribución empírica de la media, autocorrelaciones de primer y segundo orden $AC(1)$ y $AC(2)$, coeficiente de variación, asimetría y curtosis para el azúcar. Simulaciones realizadas con los parámetros estimados mediante PMV ($\delta = 0$) para PST.

5. Conclusión

En el presente trabajo se analiza cómo cambian algunos de los resultados obtenidos por Deaton y Laroque (1992, 1995) y Cafiero y cols. (2011) si es que se elimina la tendencia de las series de precios (periodo 1900-1987) de 13 commodities de acuerdo a una regresión de tipo loglineal. En particular, el trabajo se concentró en estudiar si las estimaciones sin tendencia entregan parámetros que sean significativamente distintos a las estimaciones con series que no han sido depuradas de su respectiva tendencia.

Un primer resultado es que la estimación del parámetro γ , realizada mediante GMM para precios sin tendencia, es mayor a uno para todos los commodities (tabla 4), lo que es consistente con los supuestos del modelo de inventarios. Sin embargo, al igual que en Deaton y Laroque (1992), en ninguno de los commodities estudiados este parámetro es significativamente mayor a uno (lo que corroboraría que el modelo está bien especificado).

La principal diferencia entre las estimaciones para precios con y sin tendencia es la distribución de los *stockouts* teóricos a lo largo del tiempo. Para 4 de los 13 commodities (algodón, maíz, aceite de palma y estaño), los niveles de *stockouts* estimados por Deaton y Laroque (1992) son significativamente distintos a los estimados con series depuradas de su respectiva tendencia, con un 95 % de confianza.

El modelo de inventarios, más el supuesto de una demanda lineal, tiene propiedades deseables sólo para el caso del azúcar. Para las demás mercancías, los parámetros estimados mediante PMV tienen propiedades poco deseables, como un valor muy alto del parámetro a de la demanda.

Un trabajo futuro podría consistir en realizar análisis similares para una mayor cantidad de commodities, con series de precios más largas, y también con una mejor especificación de la función de demanda, ya que las estimaciones presentadas en este trabajo, que consideran series de 88 precios, entregan resultados robustos solo para el azúcar.

Referencias

- Bobenrieth H, E. S., Bobenrieth H, J. R., y Wright, B. D. (2004). A model of supply of storage. *Economic Development and Cultural Change*, 52(3), 605–616.
- Burguete, J. F., Ronald Gallant, A., y Souza, G. (1982). On unification of the asymptotic theory of nonlinear econometric models. *Econometric Reviews*, 1(2), 151–190.
- Cafiero, C., Bobenrieth H, E. S., Bobenrieth H, J. R., y Wright, B. D. (2011). The empirical relevance of the competitive storage model. *Journal of Econometrics*, 162(1), 44–54.
- Cafiero, C., Wright, B. D., y cols. (2015). Maximum likelihood estimation of the standard commodity storage model: Evidence from sugar prices. *American Journal of Agricultural Economics*, 97(1), 122–136.
- Cashin, P., y McDermott, C. J. (2002). The long-run behavior of commodity prices: small trends and big variability. *IMF staff Papers*, 175–199.
- Cuddington, J. T. (1992). Long-run trends in 26 primary commodity prices: A disaggregated look at the prebisch-singer hypothesis. *Journal of Development Economics*, 39(2), 207 - 227.
- Deaton, A., y Laroque, G. (1992). On the behaviour of commodity prices. *The Review of Economic Studies*, 59(1), 1–23.
- Deaton, A., y Laroque, G. (1995). Estimating a nonlinear rational expectations commodity price model with unobservable state variables. *Journal of Applied Econometrics*, 10(S1), S9–S40.
- Erten, B., y Ocampo, J. A. (2013). Super cycles of commodity prices since the mid-nineteenth century. *World Development*, 44, 14–30.
- Gardner, B. L. (1979). *Optimal stockpiling of grain*. Wiley Online Library.
- Gustafson, R. L. (1958). *Carryover levels for grains: a method for determining amounts that are optimal under specified conditions*. US Department of Agriculture. Technical Bulletin 1178.
- Hansen, L. P. (1982). Large sample properties of generalized method of moments estimators. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1029–1054.
- Harvey, D. I., Kellard, N. M., Madsen, J. B., y Wohar, M. E. (2010). The prebisch-singer hypothesis: four centuries of evidence. *The review of Economics and Statistics*, 92(2), 367–377.
- Johnson, D., y Sumner, D. (1976). *An optimization approach to grain reserves for developing countries*. Univ. Descargado de <http://books.google.cl/books?id=1lM6mwEACAAJ>

- Muth, J. F. (1961). Rational expectations and the theory of price movements. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 315–335.
- Newbery, D. M., y Stiglitz, J. E. (1981). *The theory of commodity price stabilization: A study in the economics of risk*. Clarendon Press Oxford.
- Newey, W. K., y McFadden, D. (1994). Large sample estimation and hypothesis testing. *Handbook of econometrics*, 4, 2111–2245.
- Pakes, A., y Pollard, D. (1989). Simulation and the asymptotics of optimization estimators. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1027–1057.
- Pollard, D. (1985). New ways to prove central limit theorems. *Econometric Theory*, 1(03), 295–313.
- Prebisch, R. (1950). The economic development of latin america and its principal problems.
- Samuelson, P. A. (1971). Stochastic speculative price. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 68(2), 335–337.
- Singer, H. W. (1950). The distribution of gains between investing and borrowing countries. *The American Economic Review*, 473–485.
- Wright, B. D., y Williams, J. C. (1982). The economic role of commodity storage. *The Economic Journal*, 596–614.
- Wright, B. D., y Williams, J. C. (1991). Storage and commodity markets. *Cambridge, UK: Cambridge University*.

6. Anexos

6.1. Simulación

A partir del modelo descrito en la sección anterior, podemos realizar simulaciones de series de precios para observar si las características de los precios generados son similares a los datos históricos.

Supongamos en primer lugar que se cumple la ecuación funcional 6 para una función de demanda D conocida. Para poder encontrar f , podemos utilizar la siguiente recursión:

$$f_{s+1}(x) = \text{máx}[\beta(1 - \delta)E[f_s(z + (1 - \delta)(x - D(f_s\{x\})) - k, D^{-1}(x))] \quad (16)$$

La figura 1 se obtuvo con este proceso, iterando hasta que f_s converja a la verdadera función de precios $f(x)$ utilizando una demanda por consumo lineal. Una vez que esta función es conocida, podemos calcular una serie artificial de precios, dada una serie de producciones aleatorias $\{z_t\}_{t=1}^T$, con la siguiente regla:

$$p_t = f(x_t) \quad \wedge \quad x_{t+1} = (1 - \delta)(x_t - D(fx_t)) + z_{t+1} \quad (17)$$

La metodología anterior, sin embargo, no asegura que la distribución obtenida sea invariante, ya que el valor de los inventarios iniciales debe ser introducido exógenamente, (no proviene de ningún arbitraje). Para replicar numéricamente la distribución de los precios, una solución es utilizar una matriz de transición \mathbb{T} sobre una grilla xx_i , $i = 1, 2, \dots, M$ de la función de demanda.

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{ij} &= Pr\{x_{t+1} = xx_i | x_t = xx_j\} \\ &= Pr\{xx_i + \kappa/2 \geq (1 - \delta)[xx_j - Df(xx_j)] + z \geq xx_i - \kappa/2\} \\ &= Pr\{xx_i + \kappa/2 - g(xx_j) \geq z \geq xx_i - \kappa/2 - g(xx_j)\} \end{aligned} \quad (18)$$

donde $g(xx_j) = (1 - \delta)[xx_j - Df(xx_j)]$.

A partir de esta matriz de transición, y suponiendo una distribución conocida para z , se puede calcular la distribución invariante $\pi_p = \{\pi_{p1}, \pi_{p2}, \dots, \pi_{pM}\}$ de la función de precios $f(x)$ a partir del vector propio correspondiente al valor propio igual a 1. A su vez, con esta distribución podemos obtener la autocorrelación de la serie de precios ρ_p con la siguiente fórmula:

$$\rho_p = \sigma_p^{-2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M (f(xx_i) - \mu_p)(f(xx_j) - \mu_p) \mathbb{T}_{ij} \pi_{pj} \quad (19)$$

donde μ_p y σ_p corresponden a la media y varianza de la distribución límite π_p .

Finalmente, el nivel de stockouts SO_p , que indica el porcentaje de periodos en los que no se generaron inventarios para el periodo siguiente, puede ser expresado como:

$$SO_p = \sum_{\{i: f(xx_i) > p^*\}} \pi_{pi} \quad (20)$$

A partir de una serie de precios, el nivel de *stockouts*, SO , puede ser calculado simplemente como la proporción de periodos en los que $p > p^*$ sobre el número de periodos totales de la serie.

En este trabajo se analiza si efectivamente las series de precios sin tendencia pueden ser explicadas con el modelo de inventarios. Con este objetivo, se realizarán estimaciones a partir de una simulación de un millón de precios con las especificaciones de la tabla 6, obtenidas de la estimación con el método de Pseudo Máxima verosimilitud (PMV, sección 3.2) para las series PCT y PST respectivamente, con una grilla de estimación de 1000 puntos en ambos casos, y utilizando un valor fijo de la tasa libre de riesgo $r = 0,05$. Como los datos se obtuvieron suponiendo shocks z_t i.i.d. con distribución $N(0, 1)$ y con una función de demanda inversa para la cantidad consumida q de la forma $D^{-1} = a + bq$, usaremos estas mismas especificaciones para las simulaciones.

Claramente, una función de demanda lineal es poco realista y es una simplificación, así como también lo es el hecho de que la demanda sea estacionaria (es decir, que no dependa explícitamente del tiempo). Sin embargo, como se ha explicado previamente, en este modelo se consideran shocks de oferta normales. Estos shocks, en la realidad, pueden ser interpretados como la diferencia entre los shocks de oferta y

demanda, por lo que en estricto sentido, no se está asumiendo una demanda determinística.

Si bien hay otras formas funcionales que podrían ajustarse mejor a los datos, en este trabajo se utilizará una demanda lineal tal como se hace en Deaton y Laroque (1995) y Cafiero y cols. (2011), con la finalidad de poder observar los efectos directos de la tendencia sobre las estimaciones.

La función de precios utilizada para la simulación se obtuvo con la función *sree.m* programada en MATLAB. Esta función también sirve para calcular la distribución invariante de los precios (figura 6), obtenida con la matriz de transición de la ecuación 18.

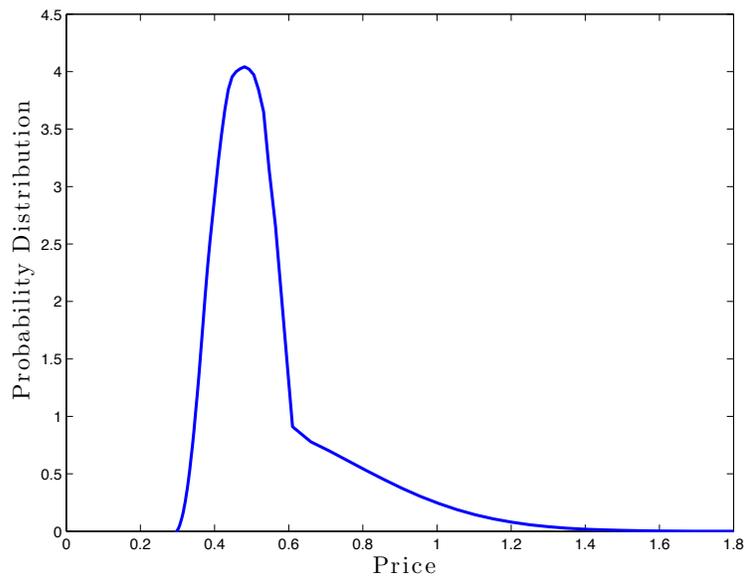


Figura 6: Distribución de probabilidad de precios simulados para el cobre.

6.2. Identificación del estimador GMM

La condición de identificación del estimador GMM es que la función objetivo $\hat{Q}_n(\theta)$ sea minimizada en un único punto $\theta = \theta_0$. Por la ley de los grandes números,

sabemos que $\hat{g}_n \xrightarrow{p} g_0(\theta) = E[g(z, \theta)]$, por lo que si $\hat{W} \xrightarrow{p} W$, con W semidefinida positiva, entonces $\hat{Q}_n(\theta) \xrightarrow{p} Q_0(\theta)$. El mínimo de esta función es 0 justamente en $\theta = \theta_0$, por lo que solo nos queda ver si es único, lo que es garantizado por el Lema 2,3 de Newey y McFadden (1994) si es que $Wg_0(\theta) \neq 0$ para $\theta \neq \theta_0$:

Lema 1 (Identificación). *Si W es semidefinida positiva, $g_0(\theta_0) = 0$ y $Wg_0(\theta) \neq 0$ para $\theta \neq \theta_0$, entonces $Q_0(\theta) = -g_0(\theta)'Wg_0(\theta)$ tiene un único máximo en θ_0 .*

La convergencia en probabilidad de \hat{W} la podemos verificar empíricamente para la simulación de precios del cobre.

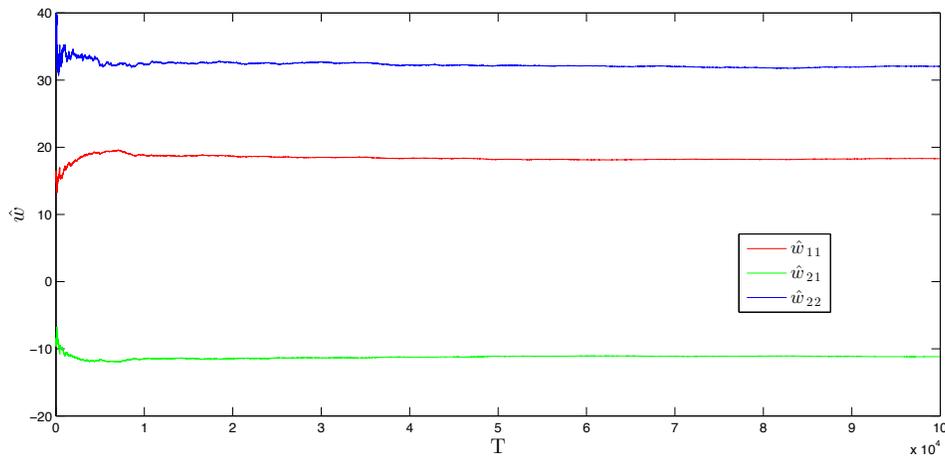


Figura 7: Convergencia de los elementos de la matriz de pesos del estimador GMM.

W es de la forma $n(V'V)^{-1}$ por lo que siempre es semidefinida positiva si $(V'V)^{-1}$ existe.

Por otro lado, la condición $WE[g(z, \theta)] = 0 \iff \theta = \theta_0$ también se cumple ya que el número de precios de la serie supera el número de condiciones de momento.

Otra aproximación es verificar directamente la función objetivo $Q_n(\theta_0)$ para una simulación de precios del cobre.

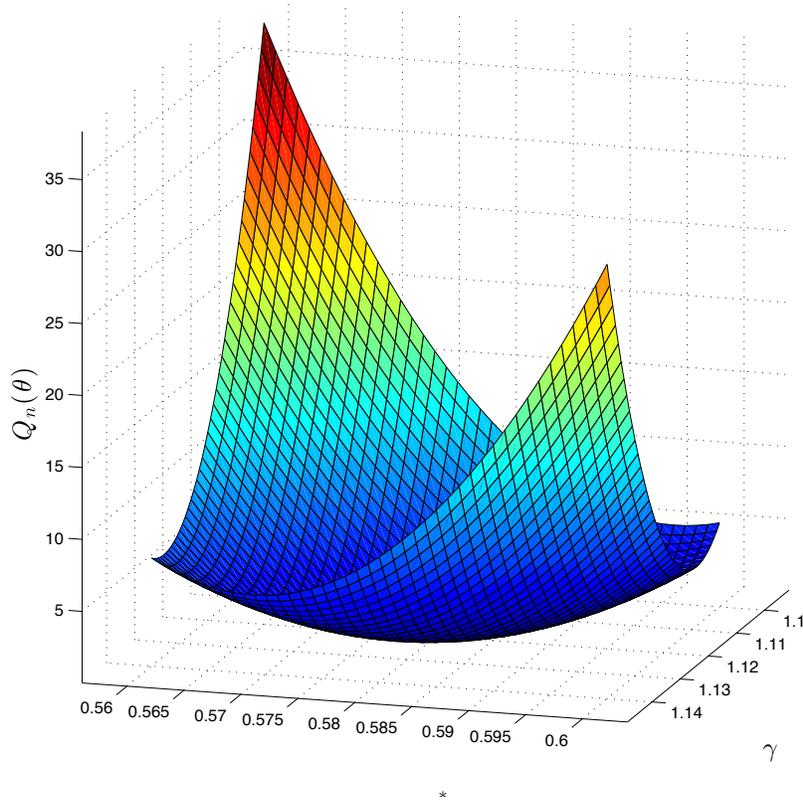


Figura 8: Función objetivo del estimador GMM $Q_n(p^*, \gamma)$ para la simulación de precios del cobre. El eje X corresponde a p^* y el eje Y a γ .

La concavidad estricta de la función objetivo se verificó calculando el determinante del Hessiano (aproximación discreta de las derivadas parciales), el cual dio un valor estrictamente positivo en cada punto de la grilla utilizada de la figura 8.

6.3. Comparación de p^* estimado con y sin tendencia

A continuación se muestran los resultados gráficos de la estimación de p^* para los 13 commodities estudiados. En todas las figuras, se encuentra en negro la serie de precios deflactada por el CPI, en azul la tendencia loglineal respectiva, y en verde y rojo el p^* estimado para la serie con y sin tendencia respectivamente¹¹. Lo más

¹¹El p^* estimado sin tendencia no es constante en las figuras debido a que una vez calculado se

relevante a considerar en estas figuras es la observación cualitativa del por qué los resultados cambian al considerar o no tendencia.

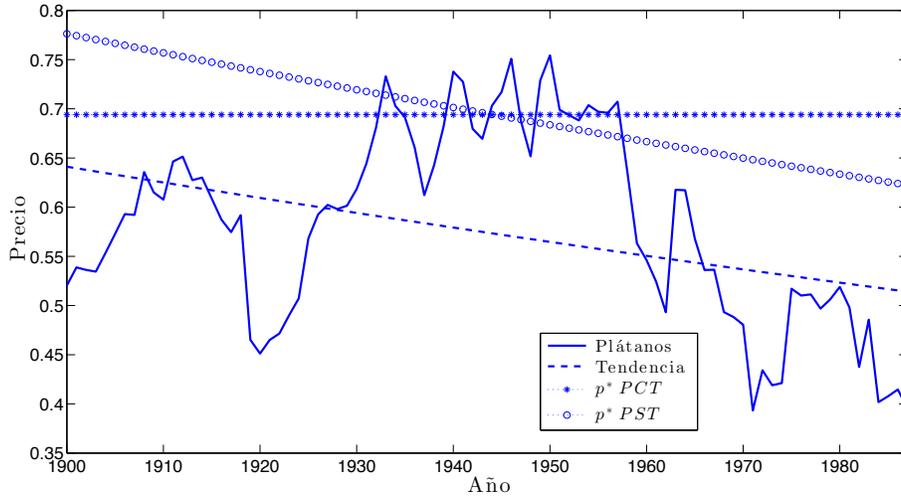


Figura 9: Plátanos

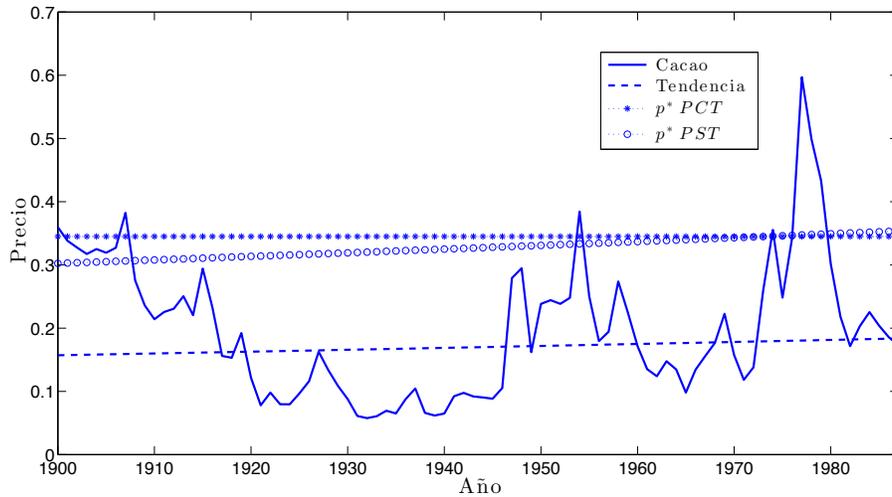


Figura 10: Cacao

le agregó la tendencia de su serie respectiva de acuerdo a la ecuación 2

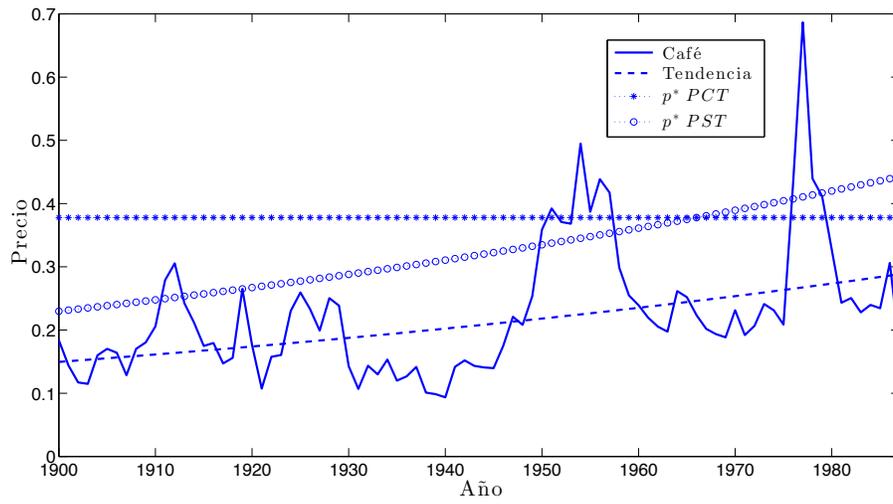


Figura 11: Café

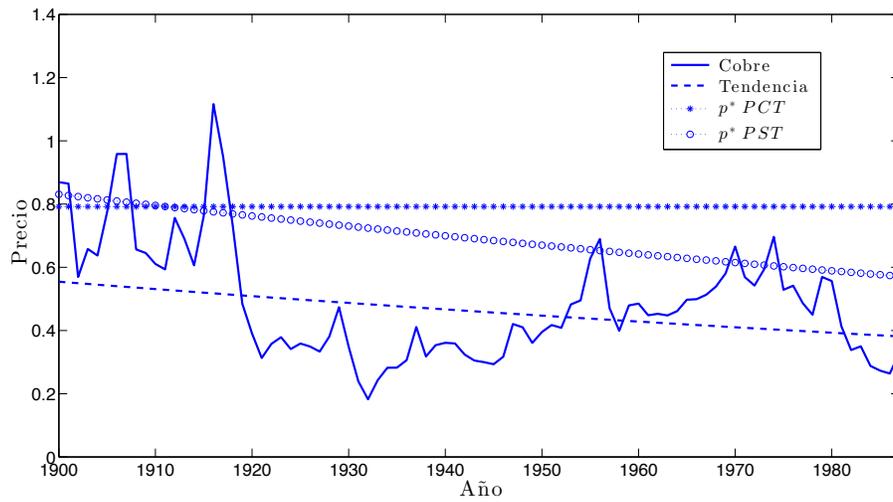


Figura 12: Cobre

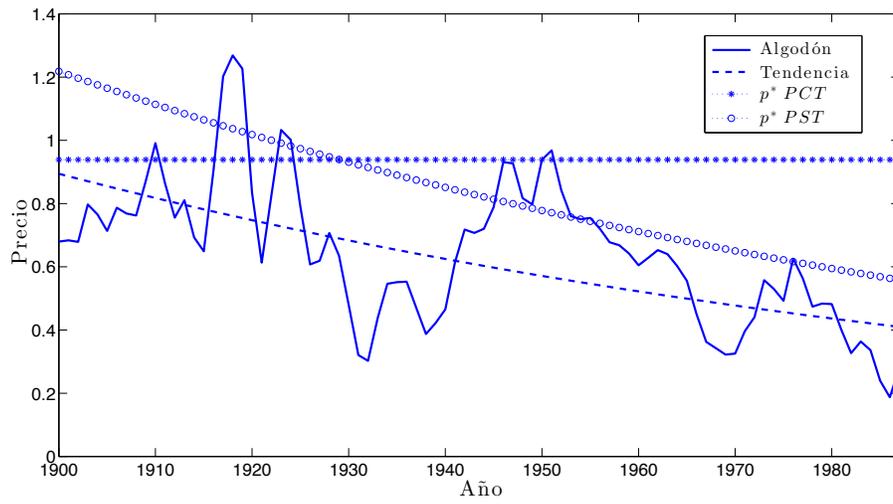


Figura 13: Algodón

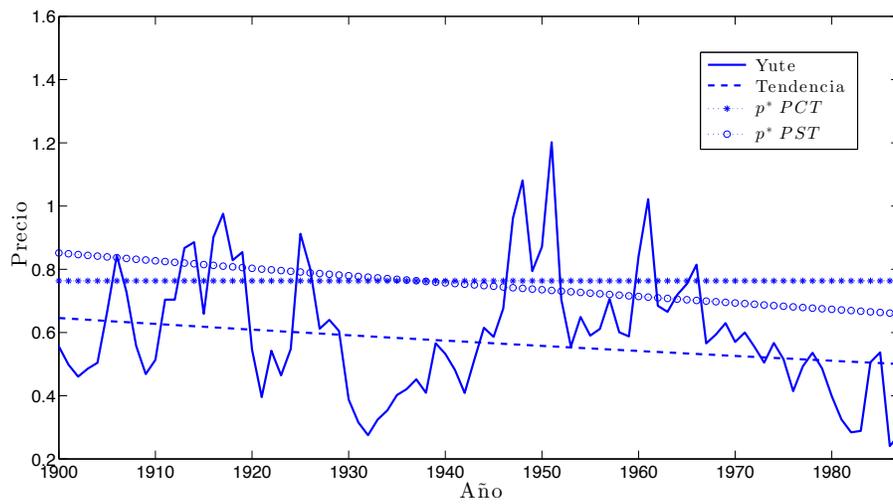


Figura 14: Yute

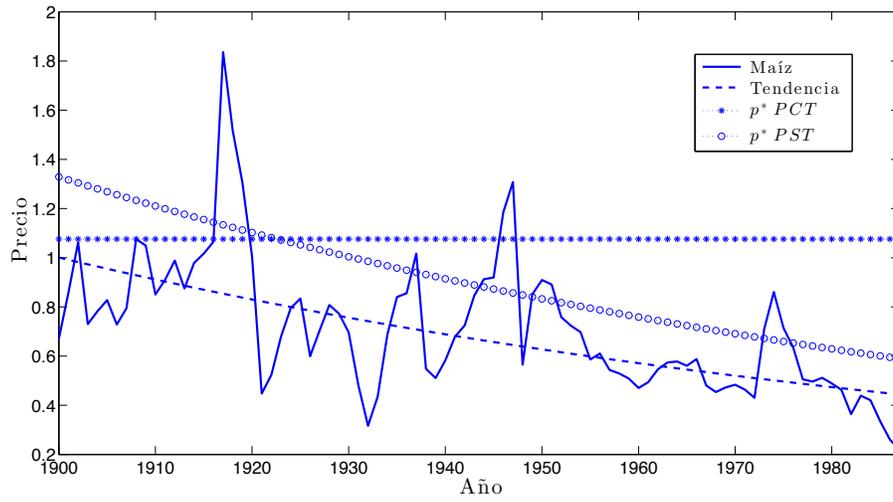


Figura 15: Maíz

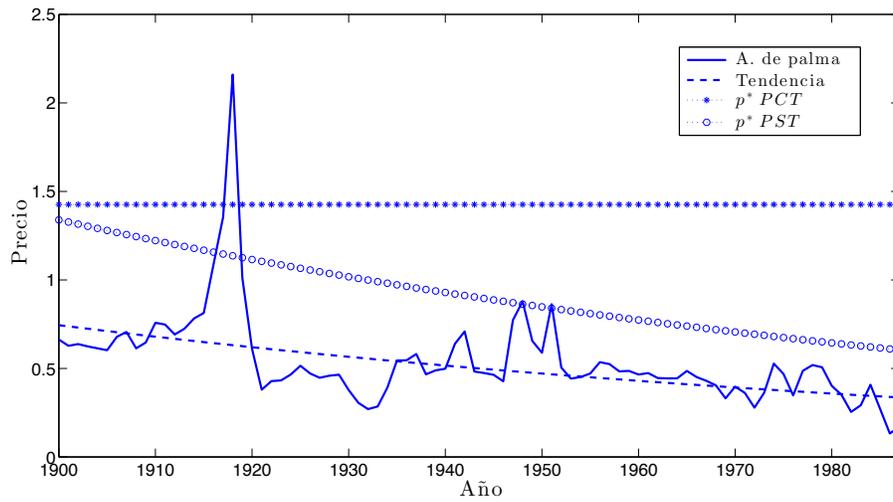


Figura 16: Aceite de palma

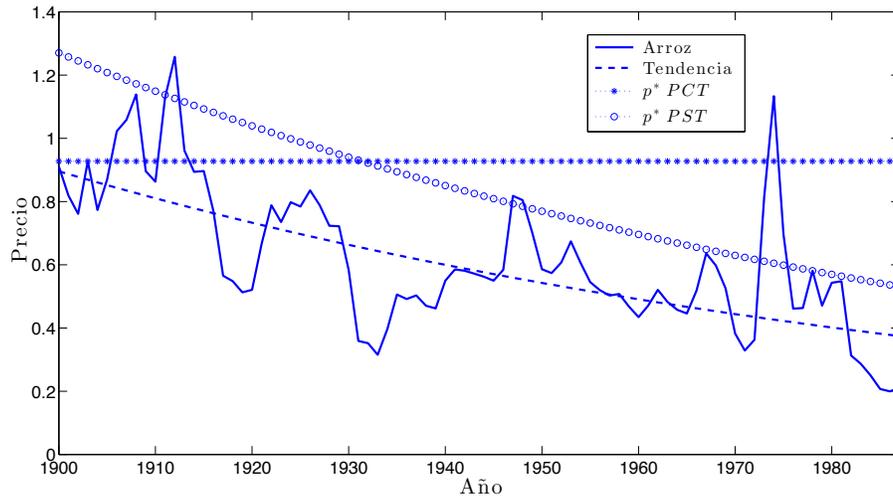


Figura 17: Arroz

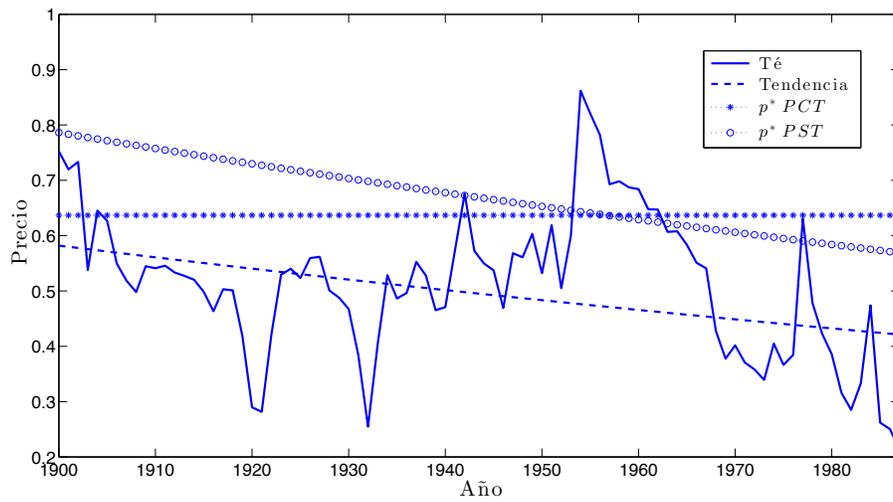


Figura 18: Té

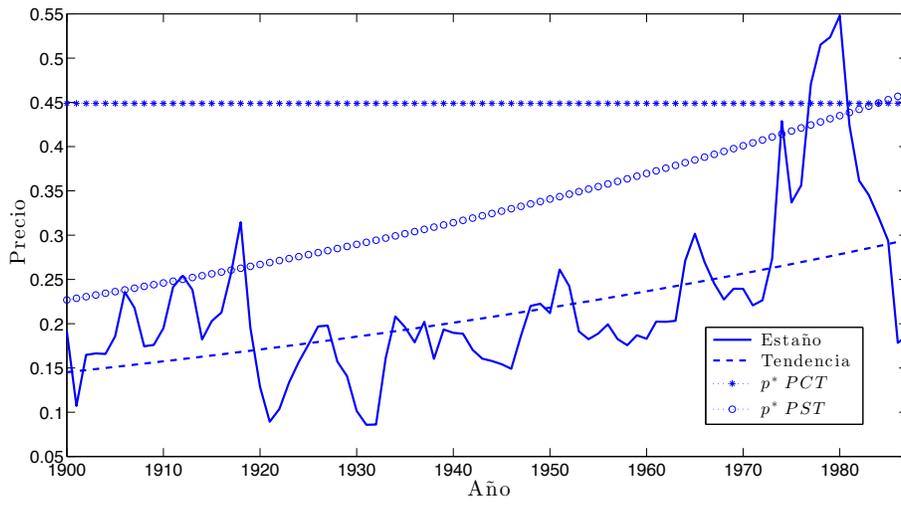


Figura 19: Estaño

6.4. Estimaciones adicionales

6.4.1. GMM

Tabla 9: Estimaciones con método GMM para PCT ($\delta=0$)

	p^*	k	SO	OID	DW
Plátanos	0,68 (0,01)	-0,02 (0,01)	0,24	1,02	1,87
Cacao	0,34 (0,05)	-0,00 (0,01)	0,09	2,72	1,63
Café	0,37 (0,03)	-0,00 (0,01)	0,10	2,51	1,44
Cobre	0,77 (0,08)	-0,02 (0,01)	0,07	5,69	1,59
Algodón	0,94 (0,09)	-0,02 (0,01)	0,09	10,58	1,22
Yute	0,76 (0,04)	-0,00 (0,01)	0,19	8,06	1,73
Maíz	1,04 (0,14)	-0,02 (0,01)	0,10	0,76	1,71
A. de palma	1,28 (0,34)	-0,02 (0,01)	0,02	1,42	1,84
Arroz	0,89 (0,06)	-0,02 (0,01)	0,14	6,15	1,35
Azúcar	1,05 (0,11)	0,02 (0,03)	0,23	4,07	1,90
Té	0,62 (0,04)	-0,02 (0,01)	0,19	0,78	1,70
Estaño	0,43 (0,05)	-0,01 (0,00)	0,05	2,53	1,57
Trigo	1,08 (0,08)	-0,02 (0,01)	0,11	5,78	1,34

Nota: errores estándar entre paréntesis. SO (stockouts) es la fracción de precios de cada serie que es mayor a su respectivo p^ , OID corresponde al estadístico del test de sobreidentificación y DW se refiere al estadístico de Durbin-Watson.*

Tabla 10: Estimaciones con método GMM para PST ($\delta=0$)

	p^*	k	SO	OID	DW
Plátanos	1,19 (0,02)	-0,04 (0,01)	0,19	0,65	1,88
Cacao	1,91 (0,19)	-0,02 (0,03)	0,15	2,61	1,66
Café	1,53 (0,09)	-0,01 (0,03)	0,16	2,37	1,54
Cobre	1,47 (0,12)	-0,03 (0,02)	0,10	7,32	1,55
Algodón	1,35 (0,06)	-0,02 (0,02)	0,18	13,72	1,22
Yute	1,31 (0,08)	-0,00 (0,02)	0,22	8,23	1,71
Maíz	1,32 (0,12)	-0,01 (0,02)	0,16	0,99	1,67
A. de palma	1,73 (0,37)	-0,03 (0,02)	0,05	2,17	1,83
Arroz	1,41 (0,22)	-0,03 (0,02)	0,08	8,21	1,23
Azúcar	2,25 (0,60)	0,02 (0,05)	0,05	4,02	1,82
Té	1,32 (0,08)	-0,03 (0,02)	0,14	0,64	1,74
Estaño	1,53 (0,11)	-0,03 (0,02)	0,10	4,84	1,47
Trigo	1,41 (0,09)	-0,02 (0,02)	0,11	10,15	1,23

Nota: errores estándar entre paréntesis. SO (stockouts) es la fracción de precios de cada serie que es mayor a su respectivo p^ , OID corresponde al estadístico del test de sobreidentificación y DW se refiere al estadístico de Durbin-Watson.*

6.4.2. PMV

Tabla 11: Estimaciones con método PMV para PST normalizado a media 1 ($\delta = 0, a = 1$)

	b	k	PMV
Cacao	-1.18 (0,18)	0.04 (0,02)	-17.05
Café	-0.85 (0,13)	0.03 (0,01)	-3.55
Cobre	-0.61 (0,14)	0.02 (0,01)	23.23
Algodón	-0.45 (0,05)	0.05 (0,01)	14.54
Yute	-0.56 (0,10)	0.04 (0,02)	3.89
Maíz	-3.72 (0,43)	0.00 (0,00)	3.01
A. de palma	-3.09 (0,60)	0.00 (0,00)	6.28
Arroz	-0.52 (0,13)	0.04 (0,02)	3.21
Azúcar	-1.99 (0,48)	0.03 (0,02)	-31.81
Té	-0.39 (0,04)	0.07 (0,01)	8.09
Trigo	-0.59 (0,09)	0.03 (0,01)	6.92

Nota: errores estándar entre paréntesis. b es el parámetro estimado para la demanda lineal, δ es la tasa de depreciación por periodo y PMV es el valor de la función de máxima verosimilitud.

6.4.3. Tests empíricos

Tabla 12: Valores de los parámetros de PST y su percentil asociado a la distribución empírica de la simulación de precios PST.

	Media	AC(1)	AC(2)	CV	Asim	Curt	k	p^*	SO
Cacao									
PST	1,00	0,83***	0,67***	0,54	0,87**	0,43**	-0,01***	1,64	0,15
Percentil	27,9	100,0	100,0	78,0	0,9	1,0	0,1	94,2	27,3
Café									
PST	1,00	0,76***	0,53**	0,38	1,18	1,33	-0,01 **	1,44	0,16
Percentil	36,3	100,0	98,7	44,1	5,7	10,1	1,3	93,4	27,8
Cobre									
PST	1,00	0,83***	0,63***	0,34	0,52***	-0,17***	-0,02***	1,39**	0,11*
Percentil	43,0	100,0	99,9	82,7	0,1	0,1	0,2	98,8	4,0
Algodón									
PST	1,00	0,85***	0,60***	0,29	0,23***	-0,60 ***	-0,02***	1,29***	0,18**
Percentil	41,5	100,0	100,0	65,2	0,0	0,2	0,0	100,0	1,9
Yute									
PST	1,00	0,71***	0,44**	0,32	0,68***	0,59	0,00**	1,25**	0,22
Percentil	39,4	100,0	98,2	61,7	0,3	8,8	0,7	98,1	16,4
Maíz									
PST	1,00	0,64	0,33	0,30**	1,11	1,96	-0,01	1,27	0,16
Percentil	52,2	29,8	9,6	1,1	20,1	29,5	20,3	19,7	90,5
A. de palma									
PST	1,00	0,64	0,31	0,37	2,82	13,80	-0,03**	1,64	0,05
Percentil	50,9	33,7	9,8	7,2	68,1	77,8	2,3	37,0	27,8
Arroz									
PST	1,00	0,70***	0,28	0,30	1,63	6,70*	-0,03***	1,35***	0,08***
Percentil	39,2	100,0	83,1	63,7	66,5	95,5	0,0	99,9	0,1
Azúcar									
PST	1,00	0,57	0,26	0,65	3,13	13,61	0,02	1,96	0,05
Percentil	29,3	64,4	26,3	62,4	85,3	86,1	16,5	78,0	7,1
Té									
PST	1,00	0,79***	0,61***	0,26	0,48***	0,43	-0,03 ***	1,28***	0,14***
Percentil	41,2	100,0	100,0	40,4	0,3	29,0	0,0	100,0	0,0
Estaño									
PST	1,00	0,79	0,55	0,31**	0,83	0,52	-0,03**	1,46	0,10
Percentil	55,0	48,4	30,0	0,6	9,6	18,6	1,6	27,0	76,7
Trigo									
PST	1,00	0,77***	0,43*	0,29	1,09	1,56	-0,02 ***	1,36**	0,11**
Percentil	39,0	100,0	96,5	36,2	6,9	23,1	0,1	99,0	1,5

*Nota: Sea x el percentil asociado a cada uno de los parámetros de la tabla. ***, ** y * corresponden a los valores que no provienen de la distribución empírica con un 99%, 95% y 90% de confianza, respectivamente. Así, *** si $x < 0,5$ ó $x > 99,5$, ** si $x < 2,5$ ó $x > 97,5$ y * si $x < 5$ ó $x > 95$, AC(1) y AC(2) corresponden a las autocorrelaciones de primer y segundo orden, CV es el coeficiente de variación, Asim es la asimetría, Curt la curtosis, k y p^* los parámetros estimados mediante GMM ($\delta = 0$) y SO la fracción de stockouts.*