



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE

ESCUELA DE INGENIERIA

**ANÁLISIS MICROECONÓMICO DE LA
RELACIÓN ENTRE OPERADORES Y
CHOFERES DE BUSES EN EL TRANSPORTE
COLECTIVO A TRAVÉS DE LA TEORÍA DE
CONTRATOS**

JOSÉ MIGUEL DE LA VEGA ATÍAS

Tesis para optar al grado de

Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Profesor Supervisor:

PATRICIA VIVIANA GALILEA ARANDA

Santiago de Chile, mayo, 2018

© 2018, José Miguel de la Vega Atías



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE

ESCUELA DE INGENIERIA

ANÁLISIS MICROECONÓMICO DE LA RELACIÓN ENTRE OPERADORES Y CHOFERES DE BUSES EN EL TRANSPORTE COLECTIVO A TRAVÉS DE LA TEORÍA DE CONTRATOS

JOSÉ MIGUEL DE LA VEGA ATÍAS

Tesis presentada a la Comisión integrada por los profesores:

PATRICIA GALILEA

FELIPE DELGADO

LEONARDO BASSO

MATÍAS HUBE

Para completar las exigencias del grado de Magíster en Ciencias de la
Ingeniería

Santiago de Chile, mayo, 2018

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi familia y a todos quienes formaron parte de esta tesis de una u otra forma. Reconozco especialmente a mi madre por su compañía, a mi compañera María Jesús por su apoyo, a mi hermano Joaquín por su constante buen humor y a mi amigo Andrés por estar siempre ahí.

También quiero agradecer particularmente a mi profesora Patricia Galilea por su humana, consciente y permanente forma de guiar este proceso. Agradezco a los miembros de la comisión, porque lograron nutrir esta investigación de componentes que sin ellos no existirían.

Finalmente, agradezco al club Universidad de Chile por tantas alegrías, como la Copa Sudamericana del 2011 y por tantos grandes jugadores, como Charles Mariano Aránguiz Sandoval, lo mejor que he visto en una cancha de fútbol.

TABLA DE CONTENIDOS

1	INTRODUCCIÓN	1
1.1	CONTEXTO	1
1.2	MOTIVACIÓN Y OBJETIVOS.....	2
1.3	ESTRUCTURA	2
2	MARCO TEÓRICO.....	4
2.1	TEORÍA DE ELECCIÓN RACIONAL.....	4
2.1.1	Críticas a la Teoría de Elección Racional	6
2.2	ELECCIÓN BAJO INCERTIDUMBRE: TEORÍA DE AVERSIÓN AL RIESGO	8
2.2.1	Críticas a la Teoría de Aversión al Riesgo.....	10
2.3	TEORÍA DE CONTRATOS	10
2.3.1	Modelo Agente-Principal con dos resultados	11
2.3.2	Modelo Agente-Principal con contratos lineales y distribución normal de los resultados	14
2.3.3	Modelación Agente-Principal con multitasking: el trabajo de Hölmstrom y Milgrom (1991).....	16
2.4	CHOFERES DE TRANSPORTE COLECTIVO Y SUS CONDICIONES DE TRABAJO	18
2.4.1	Consecuencias negativas asociadas a la salud física.....	19
2.4.2	Consecuencias negativas asociadas a la salud psicológica	20
2.4.3	Consecuencias negativas asociadas a la salud conductual.....	20
2.4.4	Carga mental y <i>burn out</i> en choferes del transporte público	21
2.4.5	Medidas para disminuir la consecuencias negativas sobre la salud de los choferes	22

2.5	RESULTADOS ORGANIZACIONALES DE LOS PROBLEMAS SUFRIDOS POR LOS CHOFERES	23
2.5.1	Ausentismo	23
2.5.2	Rotación	24
2.5.3	Accidentes.....	24
3	DESARROLLO Y ANÁLISIS DEL MODELO 1: UN OPERADOR Y UN CHOFER	26
3.1	DEFINICIONES DEL MODELO	26
3.1.1	Chofer: actividades, aversión al riesgo y Costo Personal	27
3.1.2	Operador: salarios a pagar e ingresos	31
3.2	PROBLEMA A SOLUCIONAR Y SUS RESPECTIVAS RESTRICCIONES	32
3.2.1	Maximización del Chofer	32
3.2.2	Maximización del Operador	35
3.3	ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DEL MODELO 1	39
4	DESARROLLO Y ANÁLISIS DEL MODELO 2: UN OPERADOR Y UN GRUPO DE CHOFERES	46
4.1	DEFINICIONES DEL MODELO	46
4.1.1	Choferes: actividades, aversión al riesgo y Costo Personal.....	46
4.1.2	Operador: salarios a pagar e ingresos	48
4.2	PROBLEMA A SOLUCIONAR Y SUS RESPECTIVAS RESTRICCIONES	49
4.2.1	Maximización Choferes	49
4.2.2	Maximización del Operador	54
5	ANÁLISIS DE LA RELACIÓN ENTRE EL ESFUERZO ENCOMENDADO Y EL NÚMERO DE CHOFERES	60

6	DISCUSIÓN	65
6.1	CONDICIONES LABORALES Y SALUD EN EL TRABAJO	65
6.1.1	Ausentismo	67
6.1.2	Rotación	68
6.1.3	Accidentes.....	69
6.1.4	Círculo vicioso de cargas excesivas a los choferes del transporte colectivo	69
6.2	ESTABILIDAD Y PREDICTIBILIDAD DE LOS RESULTADOS	70
6.3	TAMAÑO DE LOS GRUPOS DE TRABAJO	72
7	CONCLUSIONES	73
7.1	RECOMENDACIONES DE POLÍTICA PÚBLICA	74
7.2	LIMITACIONES DE ESTE TRABAJO	78
7.3	FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN	80
8	BIBLIOGRAFÍA.....	83
	ANEXOS	90
	ANEXO 1. DEMOSTRACIÓN DE UN MÁXIMO LOCAL MEDIANTE LA CONDICIÓN DE SEGUNDO ORDEN DEL LAGRANGEANO DEL CHOFER EN EL MODELO 1.	91
	ANEXO 2. DEMOSTRACIÓN DE UN MÁXIMO LOCAL MEDIANTE LA CONDICIÓN DE SEGUNDO ORDEN DEL LAGRANGEANO DEL OPERADOR EN EL MODELO 1.....	91
	ANEXO 3. TÉRMINOS POSITIVOS EN EL CONTRATO ÓPTIMO DEL MODELO 1	93
	ANEXO 4. RELACIÓN DE L CON RESPECTO A LA UTILIDAD ALTERNATIVA.	97
	ANEXO 5. DERIVADA DE LOS INCENTIVOS RESPECTO AL PAGO POR PASAJERO TRANSPORTADO (PPT) Y EL PAGO POR KILÓMETRO (PK)	101

ANEXO 6. DERIVADA DE LOS ESFUERZOS RESPECTO AL PAGO POR PASAJERO TRANSPORTADO.....	103
(PPT) Y EL PAGO POR KILÓMETRO (PK).....	103
ANEXO 7. COMPORTAMIENTO DE LOS ESFUERZOS CON RESPECTO A LOS COSTOS DIRECTOS	105
ANEXO 8. CONDICIÓN DE LOS PARÁMETROS PARA ESFUERZOS NO NEGATIVOS	107
ANEXO 9. COMPORTAMIENTO DE LOS ESFUERZOS AL VARIAR EL COSTO POR MULTITASKING.....	110
ANEXO 10. COMPORTAMIENTO DE LOS ESFUERZOS AL VARIAR LAS VARIANZAS CORRESPONDIENTES.....	113
ANEXO 11. COMPORTAMIENTO DE LOS ESFUERZOS AL VARIAR EL COEFICIENTE DE AVERSIÓN AL RIESGO R.	116
ANEXO 12. DERIVADAS DE LOS INCENTIVOS CON RESPECTO AL COSTO POR MULTITASKING.....	119
ANEXO 13. DEMOSTRACIÓN DE UN MÁXIMO LOCAL MEDIANTE LA CONDICIÓN DE SEGUNDO ORDEN DEL LAGRANGEANO DEL CHOFER EN EL MODELO 2	121
ANEXO 14. DEMOSTRACIÓN DE UN MÁXIMO LOCAL MEDIANTE LA CONDICIÓN DE SEGUNDO ORDEN DEL LAGRANGEANO DEL OPERADOR EN EL MODELO 2.....	121
ANEXO 15 ESFUERZOS DECRECIENTES EN EL NÚMERO DE CONDUCTORES EN EL MODELO 2 PRODUCTO DEL EFECTO FREE RIDING.....	124
ANEXO 16. ESFUERZOS DECRECIENTES EN EL NÚMERO DE CONDUCTORES EN EL MODELO 2 PRODUCTO DEL AUMENTO DE LA VARIANZA.....	127

ÍNDICE DE FIGURAS

Ilustración 2-1: Relación de la concavidad con la aversión al riesgo	9
Ilustración 6-1: Círculo vicioso de cargas excesivas.....	68

RESUMEN

Producto de la necesidad de poseer sistemas de transporte equitativos, accesibles y eficientes distintos países han regulado la operación de buses a través de contratos de concesión. Sin embargo, varias han sido las dificultades que este instrumento ha presentado en su diseño.

Como resultado de estos problemas, ha aumentado el interés por estudiar los esquemas de incentivos a los cuales se enfrentan los operadores del sistema, produciendo cambios considerables en los contratos y mejoras en los servicios ofrecidos. Sin embargo, la literatura no ha explorado con el mismo énfasis los esquemas de pago bajo los cuales trabajan los choferes del sistema.

Dada la relevancia de los choferes en la operación, surge la necesidad de estudiar los esquemas de incentivos a los cuales estos se enfrentan, para recomendar mejoras que eleven la calidad del servicio que proporcionan. En este trabajo se modela el comportamiento de los choferes, poniendo especial énfasis en la relación Principal-Agente, los efectos del multitasking y la aversión al riesgo frente a pagos variables.

Se concluye que en situaciones sub-óptimas del esfuerzo realizado por los conductores en transportar pasajeros o recorrer circuitos, es recomendable aplicar bonos variables en la rendimiento individual y no grupal de las tareas descritas. También se demuestra que factores como varianza en las actividades realizadas o en las señales observadas por el operador, además de fatiga y estrés, inducirán esfuerzos menores por parte de los conductores. Finalmente, se evidencia que las condiciones laborales de los conductores tienen consecuencias importantes en la productividad de los operadores, por lo mismo, se enuncian una serie de recomendaciones de política pública que logran propiciar un ambiente más saludable para los conductores y un mejor servicio para los ciudadanos.

ABSTRACT

Because of a need for equitable, accessible and efficient transportation systems, different countries have regulated the operation of buses through concession contracts. However, the design of this policy presents several challenges.

These inherent design challenges prompted an increased interest in studying incentive schemes faced by system operators, resulting in considerable changes in concession contracts, and consequent improvements in service. However, the literature has not explored the payment structures of the system's drivers.

Given drivers' importance to a public transit system's operation, there is a need to study the incentives they face, in order to recommend improvements that will increase quality of service. In this paper, the behavior of the drivers is modeled. Special emphasis is placed on the Principal-Agent relationship, the effects of multitasking, and risk aversion in the face of variable wage rates.

We conclude that in conditions that are suboptimal in encouraging drivers to expend effort in transporting passengers or completing routes, service can be improve by offering drivers individual, performance-based bonuses. We also demonstrate that variance in a drivers' duties or in the results observed by the operator, in addition with fatigue and stress, will result in a reduction of efforts made by drivers. Finally, it is shown that the working conditions of drivers have important consequences on the productivity of operators, for which a series of public policy recommendations are established that favor a healthier environment for drivers and a better service for the users.

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Contexto

El transporte público posee una serie de características que lo diferencian del transporte privado y que han incitado a distintos gobiernos a invertir en él (Asensio, Matas, & Raymond, 2001; República de Chile, 2017; Transmilenio S.A., 2017). Accesibilidad, equidad, eficiencia en el uso del espacio urbano, menores costos sociales y un costo medio decreciente en la demanda son en general las ventajas que presenta el transporte público (Asensio, Matas, & Raymond, 2001; Daganzo, 2010; Rizzi & De La Maza, 2017). Sin embargo, la mera transferencia de recursos al transporte público no logra enmendar una serie de problemas relacionados con su provisión: prácticas monopólicas, competencia excesiva, gestiones anticompetitivas y la necesidad de resguardar el buen uso de los recursos públicos. Estas dificultades generan la necesidad de regular el sistema (Hensher & Stanley, 2010).

Como resultado de esto, se han producido una serie de experiencias de regulación de la operación de buses, en particular mediante contratos de concesión (Díaz, Gómez-Lobos, & Velasco, 2004; Chaparro, 2002; Hensher & Wallis, 2005; Amaral, Saussier, & Yvrande-Billon, 2009; Piacenza, 2006), algunas de las cuales han tenido inconvenientes y operaciones deficientes (Hensher & Wallis, 2005; Amaral, Saussier, & Yvrande-Billon, 2009; Muñoz, Batarce, & Hidalgo, 2014). Estos procesos han concitado un especial interés académico, particularmente sobre los esquemas de incentivos económicos a los cuales se enfrentan los operadores de buses (Hensher & Wallis, 2005; Amaral, Saussier, & Yvrande-Billon, 2009; Muñoz, Batarce, & Hidalgo, 2014; Johnson, Reiley, & Muñoz, 2005). Así, las investigaciones derivadas han aportado a la mejora del servicio ofrecido por las empresas (Amaral, Saussier, & Yvrande-Billon, 2009; Hensher & Wallis, 2005; Piacenza, 2006; Muñoz, Batarce, & Hidalgo, 2014).

Sin embargo, la literatura no ha mostrado la misma inclinación para estudiar los esquemas de pagos y los incentivos económicos bajo los cuales operan los choferes de

buses. Prueba de esto, es que en general, los conductores tienen salarios fijos que no incentivan la realización de actividades (Salazar, 2017).

Dada la relevancia de los choferes en la operación del sistema, surge la necesidad de estudiar los esquemas de pagos y los incentivos económicos que pueden desprenderse de sus contratos, especialmente porque sus tareas son diversas y grupales. Esto, con el fin de recomendar mejoras que eleven la calidad del servicio del sistema de transporte en donde los choferes son actores claves.

1.2. Motivación y objetivos

En concordancia con la hipótesis propuesta, el objetivo general de esta tesis consiste en desarrollar dos modelos que permitan predecir el comportamiento del esfuerzo desarrollado por los choferes bajo dos metodologías de contratos lineales. Esto, a través de la Teoría de contratos.

Dentro de los objetivos específicos se encuentran los siguientes:

- 1) Ajustar los factores que determinan el nivel de esfuerzo que realizan los choferes en el contexto de un contrato lineal con incentivos,
- 2) Comprender los efectos de los factores que determinan el nivel de esfuerzo,
- 3) Hallar a través de qué componentes es posible mejorar el nivel de servicio de los choferes,
- 4) Evaluar las razones que determinan las condiciones laborales de los choferes, analizar su salud en el trabajo en comparación con el resto de la población,
- 5) Esbozar políticas públicas que deberían promoverse a la luz de los hallazgos de esta investigación.

1.3. Estructura

Esta tesis se divide en 7 capítulos. El segundo capítulo presenta el marco teórico, el cual contiene una revisión a la literatura asociada a la teoría de elección racional, la teoría de aversión al riesgo, la teoría de contratos, al entorno en el cual los choferes realizan su trabajo y a otras temáticas relevantes para esta investigación. La tercera sección presenta

el primer modelo analizado el que corresponde a una relación contractual entre un operador con un chofer. Aquí se describe la formulación del modelo y el análisis de los resultados obtenidos. En el capítulo cuatro se muestra el segundo modelo en el que se relaciona un operador con un grupo de choferes. En particular, se presentará la metodología utilizada, la formulación y resolución del modelo. El quinto capítulo muestra el análisis de la relación entre el esfuerzo encomendado por un conductor y el número de choferes del grupo de trabajo. El sexto capítulo muestra el análisis de los resultados obtenidos. Finalmente, en el capítulo siete se presentan las conclusiones obtenidas y las políticas públicas recomendadas que se desprenden del análisis realizado.

2. MARCO TEÓRICO

En esta sección se presenta una revisión bibliográfica sobre temas relacionados con los esquemas de incentivos en una relación Principal-Agente, el entorno en el cual trabajan los choferes de buses e información complementaria. En primer lugar, se describen los fundamentos de la Teoría de Elección Racional. Seguido a esto, se muestra parte de la Teoría de Aversión al Riesgo relevante para esta investigación. Posteriormente, se describe la Teoría de Contratos, profundizando en la acción oculta de los agentes bajo distintos contextos. Para aplicar esta teoría microeconómica al trabajo desempeñado por los choferes, se examina la documentación existente referente a las condiciones laborales de los choferes en el mundo. Finalmente, se muestra un marco utilizado en literatura de la Teoría Psicológica del Trabajo relacionado con la carga mental y su efecto en los choferes del sistema de transporte colectivo de la ciudad de Santiago de Chile.

2.1. Teoría de Elección Racional

Para modelar el comportamiento de los conductores de buses bajo distintos incentivos y condiciones de trabajo, es necesario definir criterios a partir de los cuales se espera que los choferes tomen sus decisiones. Ante esto, la teoría más aceptada considera que los agentes tienden a maximizar su utilidad y a disminuir sus costos (Levin & Milgrom, 2004). Para comprender mejor la elección racional, se considerará solo un agente económico. Se definirá la función de preferencias débiles \succsim del agente económico según lo planteado por Levin y Milgrom (2004):

$$x \succsim y \Leftrightarrow x \text{ es a lo menos tan buena como } y \text{ para el agente.} \quad (2.1)$$

Además, se dirá que es *estrictamente preferente* x sobre y (o $x \succ y$) si se cumple que $x \succsim y$ pero no que $y \succsim x$. También se dirá que se es *indiferente entre* x e y si se cumple que $x \succsim y$ y $y \succsim x$.

Por su parte, se definirá X como un conjunto de posibles elecciones. Se puede especificar que $X \subset \mathbb{R}^n$, lo que significa que hay n diferentes bienes, además si $x \in X$,

entonces $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ son cantidades específicas de cada uno de los n diferentes bienes. Sin embargo, la abstracción del conjunto X permite una importante flexibilidad según el contexto referido.

Dos supuestos fundamentales de la Teoría de Elección Racional son los supuestos que las preferencias del agente son completas y transitivas:

1. *Completas*: Una relación de preferencia entre dos bienes, servicios o actividades $x, y \in X$ es completa si $x \succcurlyeq y$ o $y \succcurlyeq x$, o ambas.

Esto quiere decir que si se le enfrenta al agente frente a dos opciones, siempre tendrá una preferencia. Puede estar indiferente entre ambas alternativas, pero nunca se encontrará desorientado.

2. *Transitivas*: Una relación es transitiva si cuando $x \succcurlyeq y$ y $y \succcurlyeq z$, entonces $x \succcurlyeq z$.

Al asumir que se cumplen estas propiedades, se puede describir el comportamiento del agente. Dado un conjunto B , él escogerá el elemento de B que prefiera más. La regla de elección del agente se puede formalizar de la siguiente manera:

$$C(B, \succcurlyeq) = \{x \in B; x \succcurlyeq y, \forall y \in B\} \quad (2.2)$$

A partir de lo anterior, es posible demostrar que si \succcurlyeq es completa y transitiva, entonces (1) para cualquier conjunto B finito y no vacío, el conjunto C no podrá ser vacío. Además, bajo el mismo supuesto, (2) si: x e $y \in (A \cap B)$, $x \in C(A, \succcurlyeq)$, $y \in C(B, \succcurlyeq)$, entonces $x \in C(B, \succcurlyeq)$ y $y \in C(A, \succcurlyeq)$.

También la Teoría de Elección Racional define el concepto de Utilidad para obtener una forma tratable matemáticamente de la toma de decisiones. Así, la Utilidad asignará una clasificación numérica a cada opción posible, donde la opción escogida será la de mayor valor numérico. Formalizando:

Una función de preferencia \succcurlyeq sobre un conjunto X es representada por una función de utilidad $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ si:

$$x \succcurlyeq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y) \quad (2.3)$$

Tener una representación matemática de las preferencias del agente es conveniente porque el problema de maximización de preferencias se vuelve una maximización familiar. De esta forma, si la función de utilidad u representa a la función de preferencias \succsim , entonces:

$$C(B, \succsim) = \left\{ x \mid x \text{ resuelve } \max_{y \in B} u(y) \right\} \quad (2.4)$$

Además, se puede probar que si X es finito, entonces cualquier relación de preferencia completa y transitiva \succsim sobre X puede ser representada por una función de utilidad $u: X \rightarrow \mathbb{R}$.

A continuación si se condiciona a un continuo de preferencias X , se puede demostrar que la representación de \succsim existe y es continua. Para forma formalizar esto, se definirá que una relación de preferencia es continua sobre X si para cualquier secuencia $\{(x^n, y^n)\}_{n=1}^{\infty}$ con $x^n \rightarrow x$, $y^n \rightarrow y$, y con $x^n \geq y^n$ para todo n , se tiene $x \succsim y$. A partir de esto se puede decir que si $X \subset \mathbb{R}^n$, entonces cualquier relación de preferencia \succsim completa, transitiva y continua sobre X puede ser representado por una continua función de utilidad $u: X \rightarrow \mathbb{R}$.

Otro aporte importante puede ser anunciado de la siguiente manera: si la función de utilidad u representa a la función de preferencias \succsim , entonces otra función de utilidad $U(\cdot) = v(u(\cdot))$ también lo hará siempre y cuando $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sea una función creciente. Esta arbitrariedad para representar las preferencias tiene importantes consecuencias. La principal secuela tiene relación con que las utilidades no pueden ser utilizadas para comparaciones interpersonales.

2.1.1. Críticas a la Teoría de Elección Racional

Durante las últimas décadas ha habido un creciente movimiento que cuestiona los supuestos principales del modelo de elección racional y busca incorporar ideas desde la psicología, sociología y neurociencia cognitiva dentro del análisis económico (Levin & Milgrom, 2004).

Según Levin y Milgrom (2004) una de las principales críticas al modelo de elección racional es que al analizar las situaciones en las que se toman decisiones, parecería ser que la mayoría de estas son altamente situacionales o dependientes del contexto. La forma en que se toman las decisiones, el contexto social de la decisión, el estado emocional del agente, la suma de elementos aparentemente exógenos y una serie de factores ambientales parecen influir en la decisión. Sin embargo, la fuerza de los modelos de elección racional deriva del supuesto de que las preferencias son estables y no dependen del contexto. Esto, porque las investigaciones basadas en la teoría de elección racional observan situaciones en un momento determinado t_1 para luego realizar recomendaciones para t_2 , lo que sería problemático para elecciones altamente influenciadas por el contexto.

En esta misma línea, varias investigaciones empíricas han corroborado lo sensibles de las decisiones al entorno. Entre estas están Madrian y Shea (2001), Kahneman (2003) y Ariely, Loewenstein y Prelec (2003).

Otra crítica que recogen Levin y Milgrom (2004) es que muchas de las elecciones que realiza el agente no son consideradas racionalmente por él y se basan más bien en heurísticas, intuiciones y deseos. Dado que las personas poseen una limitada capacidad cognitiva, no es posible razonar en cada decisión. De esta forma, al realizar elecciones a través de heurísticas o intuiciones, el resultado se aleja considerablemente del comportamiento predicho por modelos de elección racional.

Sin embargo, a pesar de las fundadas críticas, el enfoque de elección racional sigue siendo una herramienta poderosa para el análisis de políticas públicas, aún más cuando se logran incorporar elementos que aborden estas apreciaciones. Esto se hace más claro al notar que no existe una metodología alternativa con el alcance de la teoría de elección racional (Levin & Milgrom, 2004).

2.2. Elección bajo incertidumbre: Teoría de Aversión al riesgo

Esta teoría plantea que existe un costo particular producto de la incerteza en los pagos. Así, el valor percibido de una actividad que genera recompensas no será necesariamente el valor esperado de los pagos de la actividad, sino que podrá ser menor por la incerteza que pueden implicar los pagos futuros para el agente.

Para desarrollar este enfoque, se utilizará lo planteado por Jonathan Levin (2006). Primero, se asumirá que $F(\cdot)$ es una distribución que representa el riesgo o lotería y $F(x)$ es la probabilidad de recibir una cantidad menor o igual a x dólares. De esta forma:

$$U(F) = \int u(x)dF(x) \quad (2.5)$$

Se asumirá que la función $u(x)$ es continua y creciente.

Además, se considerará a δ_x como una transferencia, que entrega la misma cantidad x al agente con certeza. Así, un tomador de decisiones será averso al riesgo si para cualquier lotería $F(\cdot)$ con valor esperado $E_F = \int x dF(x)$, el agente preferirá δ_{E_F} sobre $F(\cdot)$. La aversión al riesgo plantea lo siguiente:

$$\int u(x)dF(x) \leq u\left(\int x dF(x)\right) \text{ para todo } F \quad (2.6)$$

Esta expresión matemática lleva el nombre de desigualdad de Jensen y define a $u(x)$ como una función cóncava. Por tanto, se podrá decir que un agente será averso al riesgo si su función $u(x)$ es cóncava.

Para entregar una noción de esta propiedad se considerará el siguiente ejemplo de la Ilustración 2-1. Suponga que existe una lotería que entrega pagos de 1 y 3 con igual probabilidad y otra que paga con certeza 2. Claramente, si $u(x)$ es cóncava, preferiría el pago de 2 con certeza.

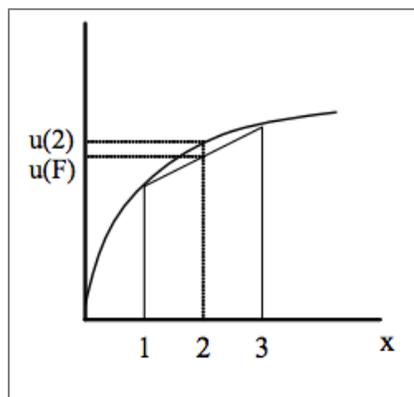


Ilustración 2-1: Relación de la concavidad con la aversión al riesgo

Fuente: Levis (2006).

Así, un tomador de decisiones averso al riesgo, dado un pago E_F seguro, preferirá este por sobre una lotería $F(\cdot)$. Esto invita a la pregunta sobre cuál es el valor real (en dólares seguros) de la lotería F . Para esto, se define $c(F, u)$, como la cantidad de dólares tal que:

$$u(c(F, u)) = \int u(x)dF(x) \quad (2.7)$$

Considerando dos funciones de Bernoulli de dos agentes distintos u y v , si se estima que u es más aversa al riesgo que v para la lotería F , entonces $c(F, u) \leq c(F, v)$.

Además, existen otras formas de medir la aversión al riesgo, como las planteadas por Arrow (1971) y Pratt (1964), basadas en la curvatura local de la función de utilidad. Es decir:

$$\text{Arrow - Pratt coefficient of absolute risk aversion} = A(x) = \frac{-u''(x)}{u'(x)} \quad (2.8)$$

Puesto que la característica que define a los individuos con aversión al riesgo es la utilidad marginal decreciente de la riqueza ($u''(x) < 0$), el coeficiente de Arrow-Pratt es positivo en esos casos. Además, al dividir por la primera derivada, se logra una

normalización en la cual el indicador no varía con las transformaciones lineales de la función de utilidad (Nicholson, 2006).

Algo relevante aquí es estudiar la relación de las definiciones de u “más aversa” que v . Según Pratt (1964), todos los siguientes planteamientos de u “más aversa” que v son igual de válidos:

1. Para cualquier F , $c(F, u) \leq c(F, v)$.
2. La función u es más cóncava que v
3. Para cualquier x , $A(x, u) \geq A(x, v)$

2.2.1. Críticas a la Teoría de Aversión al Riesgo

La principal crítica al enfoque de aversión al riesgo es descrita por Levin (2006). Como se planteó anteriormente, la aversión al riesgo es sinónimo de la concavidad en la función de utilidad. Muchos investigadores, sin embargo, han argumentado que esto no entrega una manera razonable de considerar los riesgos de tamaño medio. Esto, porque si el agente rechaza alternativas por riesgos de tamaño medio implicaría que existe un alto grado de curvatura en la función de utilidad, lo que conllevaría una aversión no plausible para riesgos mayores. Este planteamiento es sostenido y ejemplificado por Rabin (2000).

Estos argumentos han conducido a teorías complementarias, como la teoría de *loss aversion*. Este enfoque planteado por Kahneman y Tversky (1979) sugiere que la forma en la cual el agente define sus preferencias, y por tanto mide la aversión al riesgo, depende del punto de un punto de referencia. Sin embargo, según Levin (2006), esto ha sido difícil de aplicar en los modelos producto por la dificultad de definir el punto de referencia.

2.3. Teoría de Contratos

La Teoría de Contrato puede ser dividida en dos tópicos principales: información oculta y acción oculta (Bolton & Dewatripont, 2005). Para este documento se utilizará el último tema como base investigativa, en particular para el caso del riesgo moral. Los

comportamientos modelados por riesgo moral responden a lo siguiente: cuando los agentes tienen mayor protección (o total) contra malos resultados futuros, ellos racionalmente invertirán menos recursos en tratar de evitar estos (Bolton & Dewatripont, 2005). Uno de los primeros estudios empíricos sobre riesgo moral fue desarrollado por Peltzman (1975), quien documentó cómo la introducción de leyes que hacen obligatorio el uso de cinturón de seguridad ha resultado en un aumento de la velocidad promedio de conducción y en una mayor incidencia de accidentes.

El riesgo moral también está presente en las relaciones empleador-trabajador. En particular, cuando el agente (trabajador) tiene información exclusiva sobre los resultados de sus acciones, sin embargo es el Principal (empleador) el que sufre las consecuencias. También puede plantearse de la siguiente manera: los problemas agente-principal pueden desarrollarse cuando un sujeto económico (Principal) depende de la acción de otro actor (agente) sobre la cual no cuenta con información perfecta (Bolton & Dewatripont, 2005).

2.3.1. Modelo Agente-Principal con dos resultados

Para comprender el alcance de esta modelación se mostrará el caso más simple de una relación principal-agente con solo dos posibles resultados $q \in \{0,1\}$. En este modelo, que fue ilustrado por Bolt y Dewatripont (2005), $q = 1$ se considera un éxito y el caso contrario un fracaso. La probabilidad de éxito es $Pr(q = 1|a) = p(a)$ donde a es el esfuerzo encomendado por el agente, $p(a)$ será creciente y cóncava en a . Se asumirá también que $p(0) = 0$ y $p(\infty) = 1$, además $p'(0) > 1$. Por su parte, la función de utilidad del principal será $V(\cdot)$ y del agente $u(\cdot)$, donde $V'(\cdot) > 0$ y $V''(\cdot) < 0$ y $u'(\cdot) > 0$ y $u''(\cdot) < 0$. Además, por simplicidad se dirá que la función de costos $\psi(a) = a$.

De esta forma, cuando la acción del agente es observable, el pago puede hacerse contingente a esa elección. El contrato óptimo es entonces la solución del siguiente problema:

$$\max_{a, w_0, w_1} \{p(a) * V(1 - w_1) + (1 - p(a)) * V(-w_0)\}$$

sujeto a

$$p(a)u(w_1) + (1 - p(a))u(w_0) - a \geq u_{alternativa} \quad (2.9)$$

donde $u_{alternativa}$ es el beneficio de la mejor opción alternativa que desecha el agente y w_1 y w_0 son los pagos del principal al agente en caso de que el resultado sea 1 y 0 respectivamente. De esta forma, la función objetivo representará el ingreso del principal, el cual será optimizado al elegir el esfuerzo que deberá hacer el chofer y los pagos que recibirá por esto. Esta maximización estará sujeta a la condición de participación, la cual restringe a que la utilidad esperada para el chofer debe ser mayor o igual al beneficio de la mejor opción alternativa que desecha el agente.

Si se denota a λ como el multiplicador de Lagrange de la restricción de participación del agente (2.9), de la condición de primer orden con respecto a w_1 y w_0 se obtiene lo siguiente:

$$\frac{V'(1 - w_1)}{u'(w_1)} = \lambda = \frac{V'(-w_0)}{u'(w_0)} \quad (2.10)$$

Por su parte la condición de primer orden con respecto al esfuerzo es:

$$p'(a) * [V(1 - w_1) - V(-w_0)] + \lambda p'(a)[u(w_1) - u(w_0)] - \lambda = 0 \quad (2.11)$$

Lo que en conjunto, según la regla de Borch determina el esfuerzo óptimo a (Bolton & Dewatripont, 2005).

Por otro lado, cuando el agente elije una cantidad de esfuerzo no observable, la compensación no puede ser contingente a la elección sobre la acción. Entonces, un pago contingente al resultado inducirá al agente a elegir un esfuerzo que maximice su pago. Así, el agente realizará la siguiente maximización:

$$\max_a p(a)u(w_1) + (1 - p(a))u(w_0) - a \quad (2.12)$$

El contrato óptimo del agente en el contexto de acción oculta será la solución del siguiente problema:

$$\max_{a, w_0, w_1} \{p(a) * V(1 - w_1) + (1 - p(a)) * V(-w_0)\}$$

sujeto a

$$p(a)u(w_1) + (1 - p(a))u(w_0) - a \geq u_{alternativa}$$

$$a \in \arg \max_{a^\circ} p(a^\circ)u(w_1) + (1 - p(a^\circ))u(w_0) - a^\circ \quad (2.13)$$

la solución de primer orden de la condición de maximización del agente está dada por:

$$p'(a)[u(w_1) + -u(w_0)] - 1 = 0 \quad (2.14)$$

Es posible reemplazar la ecuación de compatibilidad de incentivos del agente por la condición de primer orden (2.14). Al hacer esto y resolver se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{V'(1 - w_1)}{u'(w_1)} &= \lambda + \mu \frac{p'(a)}{p(a)} \text{ y} \\ \frac{V'(-w_0)}{u'(w_0)} &= \lambda - \mu \frac{p'(a)}{1 - p(a)} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Cuando $\mu = 0$ se obtiene la solución mostrada en 2.10 que responde a la regla de Borch. Sin embargo, cuando en el óptimo $\mu > 0$, bajo condiciones bastantes generales, se distorsiona el contrato óptimo. El agente obtendrá una mayor (menor) parte de la ganancia en relativo a la regla de Borch en el caso de alto (bajo) rendimiento. Particularmente, el agente será premiado (o castigado) para los resultados cuya frecuencia aumenta (disminuye) con el esfuerzo. En nuestro caso de dos resultados: en $q=1$ es recompensado y en $q=0$ es castigado.

2.3.2. Modelo Agente-Principal con contratos lineales y distribución normal de los resultados

Después de estudiar el caso con dos posibles resultados, es interesante profundizar en otro modelo profusamente utilizado. Este modelo recogido por Bolt y Dewatripont (2005) considera contratos lineales, resultados normalmente distribuidos y una utilidad exponencial. Para este modelo se considerará que los resultados serán iguales a la suma del esfuerzo encomendado en la tarea más un componente de error: $q = a + \varepsilon$, donde el componente ε distribuye normal de media cero y varianza σ^2 , es decir $\varepsilon \sim (0, \sigma^2)$. El principal se asumirá neutro al riesgo, en cambio el agente será averso. Para modelar esta aversión se usará la siguiente exponencial negativa de la utilidad:

$$u(w, a) = -e^{-\eta[w-\psi(a)]} \quad (2.16)$$

Donde w es el pago monetario y $\eta > 0$ es el coeficiente absoluto de aversión al riesgo del agente ($\eta = -u''/u'$). También se considerará que el costo producido por el esfuerzo a será medido en unidades monetarias. Por simplicidad, se asumirá que la función de costos es cuadrática de la siguiente forma: $\psi(a) = \frac{1}{2}ca^2$. Se considerará también que solo será posible generar contratos lineales del tipo: $w = l + \beta q$, donde l es una transferencia fija y β es la tasa, relacionada con una compensación variable en el resultado. El problema del principal será el siguiente:

$$\max_{a, l, \beta} q - w$$

sujeto a

$$E(-e^{-\eta[w-\psi(a)]}) \geq u_{alt}$$

$$a \in \arg \max_a E(-e^{-\eta[w-\psi(a)]}) \quad (2.16)$$

Donde u_{alt} es la utilidad de la mejor alternativa desechada por el agente para realizar la tarea. La maximización de la utilidad esperada del agente será equivalente a maximizar:

$$\begin{aligned}
& E\left(-e^{-\eta\left[l+\beta(a+\varepsilon)-\frac{1}{2}ca^2\right]}\right) \\
&= \left(-e^{-\eta\left[l+\beta a-\frac{1}{2}ca^2\right]}\right)E(e^{-\eta\beta\varepsilon})
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Además, es posible demostrar que para una variable aleatoria ε que distribuye normal con media cero y varianza σ^2 , se tiene para cualquier γ :

$$E(e^{-\gamma\varepsilon}) = e^{\gamma^2\sigma^2/2} \tag{2.18}$$

Por lo tanto, la maximización esperada de la utilidad será equivalente a maximizar:

$$-e^{-\eta\left[l+\beta(a)-\frac{1}{2}ca^2-\frac{\eta\beta^2\sigma^2}{2}\right]} = -e^{-\eta\hat{w}(a)} \tag{2.19}$$

Donde $\hat{w}(a)$ representa la compensación segura equivalente del agente. Esta conclusión es fundamental porque el valor de $\hat{w}(a)$ será igual a la compensación esperada por el agente como resultado del costo de su esfuerzo y del riesgo dado un pago variable. El costo de aversión será creciente en el coeficiente de aversión al riesgo η , en la varianza σ^2 y en la tasa β .

Producto de esto, mediante la forma exponencial de la utilidad esperada es posible obtener una solución cerrada para la forma de la compensación segura equivalente. Esto, porque generalmente no se obtiene una solución explícita con otras formas funcionales.

El problema de optimización del agente será entonces:

$$a \in \arg \max \hat{w}(a) = l + \beta a - \frac{1}{2}ca^2 - \frac{\eta}{2}\beta^2\sigma^2 \tag{2.20}$$

El cual tiene como resultado $a = \beta/c$. Esta ecuación entrega el esfuerzo que realizará el agente bajo cualquier compensación β . Sabiendo que $a = \beta/c$, el principal resolverá el sistema previamente planteado. Así obtendrá $\beta = \frac{1}{1+\eta c\sigma^2}$.

De esta forma, el esfuerzo y la tasa (β) disminuirán cuando c , η , σ^2 crezcan. Esto ocurre por que a medida que aumenta c , η o σ^2 se incrementa también el costo percibido por el

agente, lo que a su vez disminuirá la compensación segura equivalente ($\widehat{w}(a)$). Esto impactará en los costos del operador, por lo que disminuirá el incentivo β . Por efecto de esto último también disminuirá el esfuerzo del agente (Bolton & Dewatripont, 2005).

2.3.3. Modelación Agente-Principal con multitasking: el trabajo de Hölmstrom y Milgrom (1991)

Para esta investigación además de modelar contextos con riesgo moral se considerarán aspectos de multitasking como parte de la situación estudiada. Este tópico pone su foco en situaciones donde los agentes deben realizar dos o más tareas en simultáneo. Es relevante esta visión porque al pasar de un contexto unidimensional a uno multidimensional puede producirse un reacomodo de los incentivos (Bolton & Dewatripont, 2005).

En este sentido, el problema Principal-Agente con multitasking fue desarrollado por Holmström y Milgrom (1991) a través de contratos lineales. Con esto lograron realizar predicciones sobre el alto o bajo poder de los esquemas de incentivos. El esquema planteado en ese trabajo será basal para esta investigación. Para desarrollar este modelo se considerará que el agente realiza esfuerzos en dos tareas a_i ($i = 1, 2$), cada tarea produce algún resultado medible q_i , donde $q_i = a_i + \varepsilon_i$. El componente aleatorio será normal con media cero, covarianza cero y varianza σ_i^2 . El agente será averso al riesgo y tendrá una función de utilidad representada por la siguiente expresión:

$$u(w, a) = -e^{-\eta[w - \psi(a_1, a_2)]} \quad (2.21)$$

donde η es el coeficiente de aversión al riesgo ($\eta = -u''/u'$) y $\psi(a_1, a_2)$ es la función de costos personales o privados del agente. Esta última tendrá la siguiente forma:

$$\psi(a_1, a_2) = \frac{1}{2}(\alpha_1 a_1^2 + \alpha_2 a_2^2) + \alpha_3 a_1 a_2$$

$$\text{con } 0 \leq \alpha_3 \leq \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \quad (2.22)$$

Con dos resultados observables, el pago para el agente tendrá la siguiente forma:

$$w = l + \beta_1 q_1 + \beta_2 q_2 \quad (2.23)$$

Para solucionar este contrato, se usarán la metodología empleada por Spence y Zeckhauser (1971), Ross (1973) y Harris y Raviv (1979). Bajo este método, la compensación equivalente para el agente será (ver sección 2.3.2 Modelo Agente-Principal con contratos lineales y distribución normal de los resultados):

$$l + \beta_1 q_1 + \beta_2 q_2 - \frac{\eta}{2}(\beta_1^2 \sigma_1^2 + \beta_2^2 \sigma_2^2) - \frac{1}{2}(\alpha_1 a_1^2 + \alpha_2 a_2^2) + \alpha_3 a_1 a_2 \quad (2.24)$$

El agente escogerá a_i para maximizar la expresión anterior. Para hacer esto se obtendrá la condición de primer orden, equivalente a igualar el ingreso marginal de esfuerzo con su costo marginal:

$$\beta_i = \alpha_i a_i + \alpha_3 a_j \quad (2.25)$$

donde $i = 1,2$ y $j = 2,1$. De esta forma, la única solución para el agente es:

$$a_i = \frac{\beta_i \alpha_i - \alpha_3 \beta_j}{\alpha_i \alpha_j - \alpha_3^2} \quad (2.26)$$

Por su parte el problema del principal será escoger el salario a pagar (l, β_1, β_2) al resolver:

$$\max a_1(1 - \beta_1) + a_2(1 + \beta_2) - l$$

sujeto a

$$a_i = \frac{\beta_i \alpha_i - \alpha_3 \beta_j}{\alpha_i \alpha_j - \alpha_3^2}$$

$$l + \beta_1 q_1 + \beta_2 q_2 - \frac{\eta}{2}(\beta_1^2 \sigma_1^2 + \beta_2^2 \sigma_2^2) - \frac{1}{2}(\alpha_1 a_1^2 + \alpha_2 a_2^2) + \alpha_3 a_1 a_2 \geq U_{alt} \quad (2.27)$$

al resolver se tiene:

$$\beta_1^* = \frac{1 + (a_2 - a_3) \eta \sigma_2^2}{1 + \eta a_2 \sigma_2^2 + \eta a_1 \sigma_1^2 + \eta^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 (a_1 a_2 - a_3^2)}$$

$$\beta_2^* = \frac{1 + (a_1 - a_3) \eta \sigma_1^2}{1 + \eta a_2 \sigma_2^2 + \eta a_1 \sigma_1^2 + \eta^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 (a_1 a_2 - a_3^2)} \quad (2.28)$$

Finalmente, existen investigaciones que obtienen soluciones numéricas a los contratos planteados por los modelos de Holmstrom y Milgrom. En particular, Haubrich (1994) evidenció que este tipo de contratos pueden mejorar en gran medida el desempeño de la firma, a un costo muy bajo para ella.

Ahora bien, ya habiendo revisado los modelos, en la próxima sección se presentarán las particularidades del ambiente en el cual trabajan los conductores. Esto será fundamental para caracterizar los modelos que se desarrollarán y para su posterior interpretación.

2.4. Choferes de transporte colectivo y sus condiciones de trabajo

Dentro de la literatura existe un importante número de publicaciones que evidencian las dañinas consecuencias del trabajo realizado por los choferes de buses (Tse, Flin, & Mearns, 2006). Estas complicaciones no solo ponen en riesgo su salud física, sino que también atentan de forma psicosocial (Tse, Flin, & Mearns, 2006) (Matthews, 2002).

Este menoscabo en su salud puede aparecer como resultado de la carga mental, tensión, altas exigencias psicológicas, la violencia en el trabajo y el tráfico (Tse, Flin, & Mearns, 2006) (Matthews, 2002).

En general, la conducción de buses implica una alta concentración mental y la percepción de no tener el control sobre las actividades realizadas, lo que podría estar relacionado con los efectos nocivos en la salud mental para los participantes de este oficio (Olivares, Jélvez, Mena, & Lavarello, 2013).

Por lo anterior, en lo siguiente se mostrarán los factores estresantes a los cuales se ven enfrentados los choferes del transporte colectivo y sus respectivas consecuencias. Los efectos negativos serán agrupados en tres categorías:

- a. Físicos como enfermedades cardiovasculares, gastrointestinales, problemas musco-esqueléticos y fatiga,

- b. Psicológicos como depresión, ansiedad, trastornos de estrés postraumático y
- c. Conductuales como abuso de sustancias.

Posterior a esto se mostrará la relación entre la exigencia temporal de la tarea, los requerimientos de recursos de procesamiento y aspectos de naturaleza emocional de los choferes con consecuencias nocivas para ellos. Finalmente se enunciarán algunas medidas para disminuir los efectos negativos para la salud de los trabajadores.

2.4.1. Consecuencias negativas asociadas a la salud física

Uno de los problemas más recurrentes entre los choferes son las enfermedades cardíacas (CHD por su sigla en inglés). La cardiopatía isquémica se ha encontrado mayormente en conductores de edad media, hombres, entre 50 y 59 años, consumidores de cigarrillos, con problemas de obesidad, cortos en alturas y que sus padres murieron en una edad comprendida entre 40 y 64 años (Tse, Flin, & Mearns, 2006). En los países donde existen asistentes de viaje, se ha logrado mostrar que los conductores tienen dos veces más probabilidades de sufrir CHD que los asistentes, aunque hagan el mismo gasto energético (Tse, Flin, & Mearns, 2006).

Un estudio ruso realizado por Pikus y Tarranikova (1975) y recogido por Tse, Flin y Mearns (2006) muestra que el 42% de los choferes rusos tienen hipertensión, encontrando una relación positiva entre el largo de la ruta y esta enfermedad. Además, en una muestra de 1500 choferes estadounidenses, la presencia de hipertensión era más alta para ellos que para el grupo de control (Tse, Flin, & Mearns, 2006).

La literatura también muestra una alta tasa de problemas gastrointestinales en los choferes de transporte público. Concordante es la evidencia que muestra que la principal justificación del ausentismo laboral de choferes en Londres está vinculada a problemas estomacales (Tse, Flin, & Mearns, 2006). En Italia, los choferes tienen cinco veces más problemas estomacales que los trabajadores de oficina (Tse, Flin, & Mearns, 2006).

Parallel muestra que agotadoras condiciones de trabajo y la irregularidad de los turnos de los choferes están relacionadas con altos niveles de problemas gastrointestinales

(como se cita en Aronsson y Barklöf, 1980). Además a ello se suma los irregulares horarios de alimentación y pobres hábitos alimenticios (Tse, Flin, & Mearns, 2006) (Aronsson & Barklöf, 1980).

También se reportan altos niveles de problemas musco-esqueléticos (MSD por su sigla en inglés). Una postura estática sumado a la tensión muscular acumulada por la falta de libertad y muchas horas al volante pueden producir este efecto. Los problemas psicosociales como el bajo apoyo de los supervisores, alta exigencia psicológica y frecuentes problemas mecánicos pueden ser predictivos para dolor espinal y de cuello. Otro factor también es la continua vigilancia, en este caso, del tráfico (Tse, Flin, & Mearns, 2006).

El efecto de los estresores psicosociales es tan relevante que en una revisión de 30.000 trabajadores manufactureros durante 6 años, al reducir la carga psicosocial, los casos de MSD disminuyeron de 225 a 10, junto con el aumento de la satisfacción, productividad y la reducción de la rotación y el ausentismo (Tse, Flin, & Mearns, 2006).

2.4.2. Consecuencias negativas asociadas a la salud psicológica

Los problemas usuales como resultado del estrés son depresión y ansiedad. Estos en conjunto con las sensaciones paranoides han sido encontradas en choferes turcos (Issever, Onen, Sabuncu, & Altunkaynak, 2002). Los mismos estados fueron asociados positivamente con el largo del servicio (Tse, Flin, & Mearns, 2006). También se pudo ver que el 13% de los choferes británicos tienen una salud mental similar a la de los pacientes ambulatorios de psiconeurosis. Dentro de la población total el porcentaje va entre el 5% y el 10% (Duffy & McGoldrick, 1990).

Un estresor particular que ha sido implicado en la mala salud de los conductores es la negativa interacción con los pasajeros. Esto puede ser a partir de un comportamiento desagradable, la evasión de la tarifa o el asalto físico (Tse, Flin, & Mearns, 2006).

2.4.3. Consecuencias negativas asociadas a la salud conductual

Dentro de los problemas conductuales destaca el abuso de alcohol (Tse, Flin, & Mearns, 2006). Este último ha sido usado como una forma de lidiar con el estrés cuando otras formas se ven bloqueadas. También se logró encontrar una asociación positiva entre el número de años de conducción y el consumo de alcohol semanal promedio (Ragland, Greiner, Krause, Holman, & Fisher, 1995).

Además, se considerarán *heavy drinkers* a las personas que beben frecuentemente grandes cantidades de alcohol, en particular, a hombres que consumen más de 4 bebidas diarias o más de 14 semanales y a mujeres que beben más de 3 bebidas diarias o 7 semanales (National Institutes of Health U.S. Department of Health and Human Services, 2017). Considerando esta clasificación, el número de *heavy drinkers* también es progresivamente mayor mientras aumenta el número de años de servicio. También se halló una asociación negativa entre el consumo y la satisfacción del trabajo (Ragland, Greiner, Krause, Holman, & Fisher, 1995). Además se encontró una asociación positiva entre el consumo y el reporte de situaciones de estrés en el trabajo y también entre el consumo y las reacciones de auto-tensión.

Más recientemente se ha visto que el nivel de consumo de tabaco va en aumento a la par del nivel de stress ligado al trabajo, específicamente con las condiciones monótonas de este (Greiner, Ragland, Krause, & Syme, 1997). Otra forma reportada de afrontar las dificultades de este trabajo es el consumo de drogas, legales o ilegales (Tse, Flin, & Mearns, 2006).

2.4.4. Carga mental y *burn out* en choferes del transporte público

Concordante con lo anterior, se han desarrollado investigaciones que relacionan la presión temporal del trabajo, las capacidades del chofer y aspectos emocionales, con efectos perjudiciales para ellos. Para comprender estos estudios, se definirán previamente un par de conceptos. Se entenderá la carga mental como un fenómeno enmarcado dentro de aspectos relacionados con la presión temporal de una tarea (tiempo disponible, tiempo necesitado), la cantidad de recursos de procesamiento que demanda la tarea (recursos mentales, sensoriales, tipo de tarea) y los aspectos de naturaleza

emocional (fatiga, frustración) (Olivares, Jélvez, Mena, & Lavarello, 2013; Rolo, Díaz, & Hernández, 2009). Por su parte, el *burn out* se comprenderá como una respuesta del individuo al estrés laboral crónico (Cooper, Dewe, & O'Driscoll; Hobfoll & Shirom, 2001). Una experiencia subjetiva interna que agrupa sentimientos y actitudes, y que tiene un cariz negativo para el sujeto dado que implica alternaciones, problemas y disfunciones psicofisiológicas como consecuencias nocivas para la persona y la organización (Olivares, Jélvez, Mena, & Lavarello, 2013).

Así, Cunradi, Greiner, Ragland y Fisher (2003) han mostrado la existencia de *burn out* en los conductores de autobuses, por su parte Olivares, Jélvez, Mena, y Lavarello (2013) concuerdan sobre la existencia de *burn out* en este oficio. A la par, estos últimos muestran que la carga mental es una variable relacionada con la aparición de esta respuesta nociva en los individuos.

Esto se torna aún más relevante al evidenciar que el *burn out* avanza a la par del deterioro cognitivo, deterioro emocional y del deterioro actitudinal en forma de indiferencia o indolencia con las personas con las que trabaja el agente. (Gil-Monte, 2011). Conjuntamente, se ha logrado mostrar que el *burn out* está asociado con un elevado riesgo de dependencia al consumo de alcohol (Cunradi, Greiner, Ragland, & Fisher, 2003).

2.4.5. Medidas para disminuir la consecuencias negativas sobre la salud de los choferes

Por otro lado, existe literatura que ha buscado proponer mecanismos para atenuar las consecuencias nocivas del trabajo realizado por los choferes. Así, Matthews (2002) plantea que la mejor alternativa para solucionar impedimentos biocognitivos, alcoholismo, problema de abuso de drogas y trastornos de sueño en choferes de transporte público es suspender la conducción temporal o permanentemente.

Para disminuir la ansiedad de los choferes se recomienda generar políticas que reduzcan la incerteza en su operación y para buscar reducir la agresividad en los choferes se debe

poner el foco en reducir los enfrentamientos y la hostilidad. (Matthews, 2002). Por su parte, en términos del monitoreo de las condiciones de los choferes, se recomienda realizarlo a nivel individual. Esto, porque aspectos como estrés y fatiga están íntimamente ligados a la personalidad (Matthews, 2002).

2.5. Resultados organizacionales de los problemas sufridos por los choferes

Los problemas descritos anteriormente tendrán consecuencias nocivas no solo para los choferes, sino también para la organización. Estos efectos se presentarán principalmente a través de ausentismo, rotación y accidentes. A continuación se profundizarán estos aspectos.

2.5.1. Ausentismo

De acuerdo con Winkleby et al. (1988), los estudios de tránsito que examinan las ausencias de trabajo debido a la enfermedad han demostrado consistentemente que los conductores de autobuses tienen más ausencias de mayor duración que los grupos de empleados de otras ocupaciones (Winkleby, Ragland, Fisher, & Syme, 1988). Ellos comentan además que la diferencia aproximada de los niveles de absentismo entre los conductores de autobús y los grupos de control se encuentra en la región de dos a tres veces mayor para los conductores. Las tasas promedio de ausentismo para los conductores holandeses se ha notificado ser dos veces mayor que el promedio de la población holandesa (Kompier, Mulders, Meijman, Boersma, Groen, & Bullinga, 1990) (Mulders, Meijman, O'Hanlon, & Mulder, 1982). Por otro lado, se puede observar un patrón de mayor ausentismo durante los fin de semana (Tse, Flin, & Mearns, 2006). Producto del ausentismo los trabajadores asistentes tienen que realizar horas extras para cubrir a sus colegas ausentes, aumentando la carga, lo que puede generar fatiga. Así, en el caso de Estados Unidos, las horas extras y los demás gastos derivados del ausentismo se puede estimar como un cuarto de todo lo invertido por el Gobierno en transporte (Long & Perry, 1985).

2.5.2. Rotación

Otro resultado del trabajo bajo alta exigencia es la alta rotación del personal. Esto puede ser una consecuencia de la exigencia física que conduce a la invalidez. Por su parte, Mulders et al. (1982) muestra que sólo uno de cada 10 conductores que salen de una empresa de transporte habían llegado a la edad oficial de retiro (60 años). La jubilación anticipada era la norma, y la mayoría de los conductores se retiró a la edad de 47 debido a una incapacidad médica general. Del mismo modo, Gobel et al. (1998) se refieren a un estudio realizado por Giesser-Weigl y Schmitt (1989), que informa de que los conductores de autobuses alemanes se ven obligados a retirarse de la profesión a la edad de 50 años, por lo general con menos de 20 años de experiencia de conducción de autobuses. Por otra parte, sólo el 5% de los conductores suelen pasar las evaluaciones médicas frecuentes, para retirarse finalmente a la edad de 63 (Göbel, Springer, & Scherff, 1998). Por su parte Kopier et al. (1990) muestran que sólo el 11% de los conductores holandeses dejan su trabajo a la edad de retiro oficial.

Las razones del retiro anticipado son 35% debido a problemas a la espalda, tendones y articulaciones, 35% debido a enfermedades mentales y 12% a enfermedades cardiovasculares (Tse, Flin, & Mearns, 2006).

2.5.3. Accidentes

Se ha demostrado que los conductores sanos que trabajan en condiciones óptimas en lugar de la carga de trabajo excesiva será menos propenso a los accidentes (Evans & Johansson, 1998). Además, al parecer existe una correlación positiva entre la presión del tiempo y los accidentes para los conductores de bus (Greiner, Krause, Ragland, & Fisher, 1998).

Del mismo modo, Greiner et al. (1998) plantean que la falta de descansos garantizados combinados con el programa del ciclo inflexible causa fatiga, que es el principal factor de causalidad de los accidentes para los conductores de autobús.

Esto se ve confirmado por un estudio de Jordania, que mostró que los conductores de minibuses que tenían muy pocos descansos tenían índices de accidentes más altos (Hamed, Jaradat, & Easa, 1998)

Además, se ha descubierto que la ansiedad reduce el funcionamiento en términos de tareas centrales y periféricas. Por lo tanto, no sólo el campo atencional se reduce, sino también la susceptibilidad a la distracción se incrementa (Janelle, Singer, & Williams, 1999).

A continuación, se desarrollarán dos modelos que se nutrirán de la teoría de contratos caracterizada en este capítulo 2. A la par, las observaciones expresadas en esta sección sobre el contexto en el cual trabajan los choferes de los sistemas de transporte colectivo servirá para enriquecer e interpretar los modelos a desarrollar.

3. DESARROLLO Y ANÁLISIS DEL MODELO 1: UN OPERADOR Y UN CHOFER

La siguiente modelación cuenta con tres actores: el chofer, el operador y el Planificador Central (rol asumido generalmente por una Agencia Estatal). Existirán distintos niveles de información entre ellos: los choferes tendrán mayor certidumbre sobre las actividades que realizan, mientras que el Planificador Central y el operador verán señales difusas de estas acciones. Por simplicidad, y como el objetivo de esta modelación es analizar la relación chofer-operador, se asumirá que no existen diferencias de información entre el operador y el Planificador Central. Por otro lado, se considerará que los choferes son aversos al riesgo y el operador neutral a este (Bolton & Dewatripont, 2005; Holmstrom & Milgrom, 1991).

Así, en esta sección se analizará el caso en el que se establece un contrato entre el operador y un chofer, en el cual el salario del chofer depende de su performance individual. Esto servirá para evaluar las consecuencias de un salario variable, de la aversión al riesgo de los choferes y del multitasking. En el próximo capítulo se estudiará un caso en el que se establece un contrato entre el operador y un grupo de choferes, en el cual el salario de cada conductor depende de la performance del equipo. Esto, con el fin de juzgar las consecuencias del trabajo grupal.

3.1. Definiciones del modelo

A continuación, se presenta el contrato entre el operador y un chofer a través de una adecuación del modelo desarrollado por Holmstrom y Milgrom (1991) al contexto estudiado. Primero se explicarán las decisiones que toma el chofer (esfuerzos), su función de utilidad y los costos que percibe. Luego se expondrán los costos e ingresos del operador, para seguir con la maximización de la utilidad de cada uno y el análisis de estos resultados.

3.1.1. Chofer: actividades, aversión al riesgo y Costo Personal

Las diversas actividades que realiza el chofer de transporte público pueden simplificarse en dos tareas principales, t_1 : transportar pasajeros y t_2 : recorrer kilómetros. Para el operador que contrata al conductor ambas actividades son deseables y espera que el chofer realice las dos.

Además, el conductor realizará esfuerzos a_i con $i \in \{t_1, t_2\}$ para lograr ejecutar las actividades, estos esfuerzos serán mayores o iguales a cero. De esta forma, se utilizará q_i para señalar el resultado de la actividad $i \in \{t_1, t_2\}$. Dicho resultado será función del esfuerzo a_i que desarrolla el chofer en la tarea i y de un componente aleatorio de dicha actividad i , $\xi_i \sim (0, \sigma_i^2)$. Esto queda expresado de la siguiente manera:

$$q_i = \text{Resultado}(a_i, \xi_i) = g_i(a_i) + \xi_i \quad (3.1)$$

La función $g_i(a_i)$ será la parte determinística del resultado y se le llamará función de productividad. Este término relacionará el esfuerzo ejecutado en la actividad i con el resultado obtenido en dicha tarea y deberá cumplir las siguientes condiciones:

$$\frac{dg_i(a_i)}{da_i} \geq 0 \quad \forall i \in \{t_1, t_2\} \quad (3.2)$$

$$\frac{d^2g_i(a_i)}{da_i^2} \leq 0 \quad \forall i \in \{t_1, t_2\} \quad (3.3)$$

$$\frac{dg_i(a_i)}{da_j} = 0 \quad \forall i, j \in \{t_1, t_2\} \wedge i \neq j \quad (3.4)$$

La ecuación 3.2 define que el resultado en la tarea i crece con el esfuerzo realizado en la actividad i . La desigualdad 3.3 muestra que la productividad marginal decrece con el esfuerzo. Es decir, a mayores magnitudes de esfuerzo realizado, más dificultoso será

para el conductor obtener una unidad de resultado adicional. Finalmente, el término 3.4 describe que el efecto en el resultado de una actividad i no depende directamente (a través de su función de productividad) del esfuerzo encomendado en la actividad j . Se asume que el efecto del esfuerzo realizado en la actividad j podría impactar en el resultado de la actividad i mediante la repartición del esfuerzo total que realiza el chofer, pero no directamente en la función de producción $g_i(a_i)$.

Se considera que el chofer es averso al riesgo y se representará como un costo percibido por el chofer (Holmstrom & Milgrom, 1991; Bolton & Dewatripont, 2005):

$$\text{Costo de aversión} = \frac{r}{2} * \text{Var}(\text{sueldo}) \quad (3.5)$$

Donde r es el coeficiente de aversión al riesgo ($r = -u''/u'$), el cual es un número positivo que relaciona la varianza experimentada con costos económicos.

Por otro lado, el conductor al realizar actividades incurre en un costo personal, que es función del esfuerzo que aplique a ambas tareas. Así:

$$\text{CostoPersonal} = \mathcal{H}(a_{t_1}, a_{t_2}) \quad (3.6)$$

Esta función se caracteriza por:

$$\mathcal{H}(a_{t_1}, a_{t_2}) = \alpha_1 h_1(a_{t_1}) + \alpha_2 h_2(a_{t_2}) + \alpha_3 h_3(a_{t_1}, a_{t_2}) \quad (3.7)$$

Donde α_1, α_2 y α_3 son constantes positivas y h_1, h_2 y h_3 son funciones. Además h_1 y h_2 dependen únicamente de a_{t_1} y a_{t_2} respectivamente, en cambio h_3 depende de los esfuerzos encomendado en ambas tareas: a_{t_1}, a_{t_2} . Particularmente, se dirá que $\alpha_1, \alpha_2 > \alpha_3$.

Además, $\mathcal{H}(a_{t_1}, a_{t_2})$ se comporta de la siguiente forma:

$$\frac{dh_l(a_{t_l})}{da_{t_l}} \geq 0 \quad \forall l \in \{1,2\} \quad (3.8)$$

$$\frac{d^2h_l(a_{t_l})}{da_{t_l}^2} \geq 0 \quad \forall l \in \{1,2\} \quad (3.9)$$

$$\frac{dh_l(a_{t_l})}{da_{t_m}} = 0 \quad \forall l, m \in \{1,2\} \wedge i \neq j \quad (3.10)$$

$$\frac{dh_3(a_{t_1}, a_{t_2})}{da_{t_l}} \geq 0 \quad \forall l \in \{1,2\} \quad (3.11)$$

$$\frac{d^2h_3(a_{t_1}, a_{t_2})}{da_{t_1}da_{t_2}} \geq 0 \quad (3.12)$$

Se asumirá que:

$$\frac{d^2h_3(a_{t_1}, a_{t_2})}{da_{t_l}^2} = 0 \quad \forall l \in \{1,2\} \quad (3.13).$$

Así, el término 3.8 describe que las funciones de costo h_1 y h_2 crecen con el esfuerzo encomendados en las tareas t_1 y t_2 respectivamente. La desigualdad 3.9 plantea que a medida que aumenta la cantidad de esfuerzo realizado, se acrecentará cada vez más la función h_l por cada unidad de esfuerzo adicional.

La ecuación 3.10 describe que h_1 y h_2 no representan en su estructura el costo de multitasking, solo representan el costo de realizar la tarea t_1 o t_2 , respectivamente. El efecto del costo por multitasking estará representado por el término h_3 . Entonces, la desigualdad 3.11 muestra que a medida que se realiza más esfuerzo en la tarea i , el costo debido al efecto multitasking aumenta. Por otra parte, la expresión 3.12 plantea que el costo marginal por multitasking de realizar un esfuerzo a_i es creciente en el esfuerzo a_j . Finalmente, se asumirá que el costo marginal por multitasking de realizar un esfuerzo a_i es constante en el esfuerzo a_i . Esto último se representa en el punto 3.13.

La forma funcional de la función $\mathcal{H}(a_{t_1}, a_{t_2})$ presenta diversas ventajas para esta investigación. En primer lugar, se pueden variar las constantes para describir distintas situaciones. Por ejemplo, para un recorrido nocturno, se podría calibrar un costo más alto para detenerse en los paraderos y así tomar pasajeros, producto de que las vías se encuentran despejadas y pasar de flujo libre a la detención total implica mayor trabajo que detenerse cuando el bus se encuentra en congestión.

En esta misma línea, es posible suponer un costo distinto para recorrer determinadas distancias entre un bus que circula por un corredor en comparación con uno que se encuentra en tráfico mixto. Así, la constante α_2 del bus en tráfico mixto debería ser mayor, o si se considera que las experiencias son distintas la variación se podría realizar en la función $h_2(a_{t_2})$.

En tercer lugar, como la modelación en cuestión describe un contexto con multitasking, es fundamental representar el efecto de realizar dos actividades en comparación con el equilibrio unidimensional. Así, el último término de la función constituye el costo de realizar dos tareas simultáneamente. Se asumirá también que este costo estará relacionado positivamente con la carga mental a la que se enfrentan los conductores de buses del transporte colectivo. Esta carga será producto de la presión de las tareas (tiempo disponible, tiempo necesario), la cantidad de recursos de procesamiento y los aspectos de naturaleza emocional (fatiga, estrés) (Tse, Flin, & Mearns, 2006; Rolo, Díaz, & Hernández, 2009; Olivares, Jélvez, Mena, & Lavarello, 2013). Así, el costo por multitasking (α_3) tenderá a aumentar cuando la carga mental crezca (Gil-Monte, 2011; Olivares, Jélvez, Mena, & Lavarello, 2013).

Finalmente, se considerará que el chofer tendrá un costo de oportunidad. Este costo proviene de la renuncia al beneficio de la mejor opción alternativa, la cual no puede realizar por ejecutar las actividades aquí descritas. De esta forma, para representar este costo se utilizará $Utilidad_{Alt.}$ o U_{Alt} (Holmstrom & Milgrom, 1991; Bolton & Dewatripont, 2005).

3.1.2. Operador: salarios a pagar e ingresos

Para lograr que el conductor realice esfuerzo e incurra en el costo expresado anteriormente, el operador debe pagarle un salario. Este pago tendrá tres elementos: uno fijo, uno variable en los pasajeros transportados y otra variable en los kilómetros recorridos. Sin embargo, el operador no puede observar directamente los resultados q_i sino que observa señales s_{q_i} , las cuales están compuestas por la suma del resultado q_i y una componente aleatoria ϕ_{q_i} . Así, se tiene que:

$$s_{q_i} = q_i + \phi_{q_i}$$

$$\text{Con } \phi_{q_i} \sim (0, \vartheta_{q_i}^2) \quad (3.14)$$

De esta forma, el salario queda expresado de la siguiente manera:

$$w = L + \beta_1 s_{q_{t_1}} + \beta_2 s_{q_{t_2}} \quad (3.15)$$

Donde β_1 y β_2 son constantes positivas.

El operador a su vez determina su ingreso a partir del Contrato de Concesión que tiene con el Planificador Central. Así su ingreso es:

$$\text{Ingreso}^{con} = PPT * s_{q_{t_1}} + PK * s_{q_{t_2}} + Ctes \quad (3.16)$$

Donde PPT representa el valor del pago por pasajero transportado y PK simboliza el valor del pago por kilómetro y $Ctes$ reproduce las transferencias que no dependen de las dos actividades.

3.2. Problema a solucionar y sus respectivas restricciones

Para encontrar el contrato óptimo, se supondrá que los individuos son racionales (Levin & Milgrom, 2004), por lo que buscarán maximizar su pago. Es decir, se considerarán los supuestos de la Teoría de Elección Racional (Levin & Milgrom, 2004). Conjuntamente, se utilizará la forma especificada por Spence y Zeckhauser (1971), Ross (1973), Harris y Raviv (1979) y Hölmstrom (1979) para la resolución de esta relación. El esquema, en términos del presente modelo plantea lo siguiente:

$$\underset{\text{Salario a pagar}}{\text{Max}} \{ \text{Ingreso}^{\text{con}} - \text{Salario} \}$$

Sujeto a

$$\text{Salario} \geq \text{CostoPersonal} + \text{Costo de Aversión} + \text{Utilidad}_{\text{Alternativa}}$$

$$a_{t_1}, a_{t_2} \text{ ArgMax} \{ \text{Salario} - \text{CostoPersonal} - \text{Costo de Aversión} - \text{Utilidad}_{\text{Alternativa}} \}$$

(3.17)

De esta forma, el operador maximizará su beneficio neto cumpliendo dos condiciones. En primer lugar, le entregará un salario al chofer que cubra la totalidad de sus costos y, en segundo lugar, el operador asumiendo racionalidad por parte del chofer, considerará que este elegirá la combinación de esfuerzos que maximizarán sus ingresos (Levin & Milgrom, 2004; Holmstrom & Milgrom, 1991; Bolton & Dewatripont, 2005).

Así, para resolver este modelo primero se buscarán a_{t_1}, a_{t_2} que optimizan la decisión del chofer, los cuales deberán ser una condición en la posterior maximización del operador.

3.2.1. Maximización del Chofer

El conductor buscará maximizar su utilidad, la cual depende de su salario y de los costos en los que incurre. De esta forma, se tiene:

$$\underset{\text{Esfuerzo}}{\text{Max}} \{ \text{Salario} - \text{CostoPersonal} - \text{Costo de aversión al riesgo} - \text{Utilidad Alternativa} \}$$

(3.18)

Así, para representar el costo de aversión, se utilizará la siguiente expresión:

$$\text{Costo de aversión} = \frac{r}{2} * \text{Var}(\text{sueldo}) \quad (3.19)$$

De esta forma, se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{Costo de aversión} &= \frac{r}{2} * \text{Var} \left(L + \beta_1 s_{qt_1} + \beta_2 s_{qt_2} \right) \\ \text{Costo de aversión} &= \frac{r}{2} \left[\beta_1^2 \left(\sigma_{t_1}^2 + \vartheta_{qt_1}^2 \right) + \beta_2^2 \left(\sigma_{t_2}^2 + \vartheta_{qt_2}^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

Así, reemplazando en la maximización del chofer, se tiene que el comportamiento del conductor está descrito por la siguiente maximización:

$$\begin{aligned} \text{Max}_{a_{t_1}, a_{t_2}} \quad & L + \beta_1 s_{qt_1} + \beta_2 s_{qt_2} - \alpha_1 h_1(a_{t_1}) - \alpha_2 h_2(a_{t_1}) - \alpha_3 h_3(a_{t_1}, a_{t_2}) \\ & - \frac{r}{2} \left[\beta_1^2 \left(\sigma_{t_1}^2 + \vartheta_{qt_1}^2 \right) + \beta_2^2 \left(\sigma_{t_2}^2 + \vartheta_{qt_2}^2 \right) \right] - \text{Utilidad}_{\text{Alt.}} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Calculando el *Lagrangeano* de esta maximización con respecto al esfuerzo a_{t_1} , se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{dL^{\text{chof}}}{da_{t_1}} = \beta_1 \frac{ds_{qt_1}}{da_{t_1}} + \beta_2 \frac{ds_{qt_2}}{da_{t_1}} - \alpha_1 \frac{dh_1(a_{t_1})}{da_{t_1}} - \alpha_2 \frac{dh_2(a_{t_2})}{da_{t_1}} - \alpha_3 \frac{dh_3(a_{t_1}, a_{t_2})}{da_{t_1}} \quad (3.22)$$

De la definición de a_i , q_i , s_{q_i} , h_1 , h_2 y h_3 se desprende que:

$$\frac{ds_{q_i}}{da_i} = \frac{dq_i}{da_i} = \frac{dg_i(a_i)}{da_i} \quad \forall i \in \{t_1, t_2\} \quad (3.23)$$

$$\frac{ds_{q_i}}{da_j} = 0 \quad \forall i, j \in \{t_1, t_2\} \wedge i \neq j \quad (3.24)$$

$$\frac{dh_1(a_{t_1})}{da_{t_2}} = 0 \wedge \frac{dh_2(a_{t_2})}{da_{t_1}} = 0 \quad (3.25)$$

Desarrollando el *Lagrangeano* e igualando a cero para encontrar el posible máximo, se obtiene:

$$\frac{dL^{chof}}{da_{t_1}} = \beta_1 \frac{dg_{t_1}(a_{t_1})}{da_{t_1}} - \alpha_1 \frac{dh_1(a_{t_1})}{da_{t_1}} - \alpha_3 \frac{dh_3(a_{t_1}, a_{t_2})}{da_{t_1}} = 0 \quad (3.26)$$

Análogamente, se obtiene para $\frac{dL}{da_{t_2}} = 0$.

$$\frac{dL^{chof}}{da_{t_2}} = \beta_2 \frac{dg_{t_2}(a_{t_2})}{da_{t_2}} - \alpha_2 \frac{dh_2(a_{t_2})}{da_{t_2}} - \alpha_3 \frac{dh_3(a_{t_1}, a_{t_2})}{da_{t_2}} = 0 \quad (3.27)$$

Al revisar las condiciones de segundo orden, se confirman estos puntos como máximos y representarán el esfuerzo que realiza el conductor en cada actividad como resultado de su función de producción, los incentivos generados en su salario y sus costos personales. Para más detalles de cómo se demostró este máximo se invita a revisar el Anexo 1.

Sin embargo, para poder interpretar cómo interactúan cada uno de los elementos, se asumirán determinadas formas funcionales de la función de producción y los costos personales, las cuales son coherentes con trabajos anteriores (Bolton & Dewatripont, 2005; Holmstrom & Milgrom, 1991):

$$q_i = g_i(a_i) + \xi_i = a_i + \xi_i \quad \forall i \in \{t_1, t_2\}$$

$$h_1(a_{t_1}) = a_{t_1}^2$$

$$h_2(a_{t_2}) = a_{t_2}^2$$

$$h_3(a_{t_1}, a_{t_2}) = a_{t_1} * a_{t_2}$$

(3.28)

Reemplazando estas funciones en $\frac{dL^{chof}}{da_{t_1}} = 0$ y $\frac{dL^{chof}}{da_{t_2}} = 0$, se obtiene:

$$\frac{dL^{chof}}{da_{t_1}} = \beta_1 - \alpha_1 2a_{t_1} - \alpha_3 a_{t_2} = 0$$

$$\frac{dL^{chof}}{da_{t_2}} = \beta_2 - \alpha_2 2a_{t_2} - \alpha_3 a_{t_1} = 0 \quad (3.29)$$

A partir de los máximos, se encuentran las siguiente expresiones que describen el esfuerzo realizado por el chofer en cada actividad como función de $\beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2$ y α_3 .

$$a_{t_1} = \frac{2\beta_1\alpha_2 - \alpha_3\beta_2}{4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2} \quad (3.30)$$

$$a_{t_2} = \frac{2\beta_2\alpha_1 - \alpha_3\beta_1}{4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2} \quad (3.31)$$

Estas expresiones son el primer acercamiento al comportamiento de los conductores, ya que falta que el operador determine β_1 y β_2 . El resultado muestra que la cantidad de esfuerzo realizado en la actividad i (a_{t_i}) está positivamente relacionado con el pago de la tarea i (β_i) y negativamente con el pago de la tarea j (β_j). Esto es intuitivo, ya que el chofer percibirá el pago de la tarea i como un beneficio de hacer una unidad extra de esfuerzo en esta tarea. Por el contrario, el pago de la tarea j será percibido como un costo de oportunidad de realizar esfuerzo en a tarea i .

3.2.2. Maximización del Operador

Por su parte, el concesionario también querrá maximizar sus beneficios. Para esto, optimizará su ingreso menos sus egresos:

$$\begin{aligned} & \text{Max}_{\text{Salario a pagar}} \{ \text{Ingreso}^{con} - \text{Salario} \} \\ & \text{Max}_{L, \beta_1, \beta_2} \quad PPT * s_{qt_1} + PK * s_{qt_2} + Ctes - L - \beta_1 s_{qt_1} - \beta_2 s_{qt_2} \end{aligned} \quad (3.32)$$

El operador se ve enfrentado a una serie de condiciones que se debe cumplir para poder operar. Debe entregar un salario al chofer que logre cubrir los costos a los cuales se

enfrenta, comprendiendo entre estos el coste personal en el que incurre, el costo debido a la aversión al riesgo y la alternativa a la que renuncia para realizar este trabajo:

$$\text{Salario} \geq \text{CostoPersonal} + \text{Costo de Aversión} + \text{Utilidad}_{\text{Alternativa}}$$

$$\begin{aligned} L + \beta_1 s_{qt_1} + \beta_1 s_{qt_2} &\geq \alpha_1 h_1(a_{t_1}) + \alpha_2 h_2(a_{t_1}) + \alpha_3 h_3(a_{t_1}, a_{t_2}) \\ &+ \frac{r}{2} \left[\beta_1^2 (\sigma_{t_1}^2 + \vartheta_{qt_1}^2) + \beta_2^2 (\sigma_{t_2}^2 + \vartheta_{qt_2}^2) \right] + \text{Utilidad}_{\text{Alt.}} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Por otro lado, el operador también buscará reducir la ganancia del chofer para disminuir los costos que percibe y planteará el mínimo salario posible que logre mantener al chofer trabajando. Así, si se mantiene el supuesto (3.28), al reducir constantemente la ganancia o utilidad del conductor, se llegará al siguiente equilibrio:

$$\text{Salario} = \text{CostoPersonal} + \text{Costo de Aversión} + \text{Utilidad}_{\text{Alternativa}} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} L + \beta_1 s_{qt_1} + \beta_1 s_{qt_2} &= \alpha_1 a_{t_1}^2 + \alpha_2 a_{t_2}^2 + \alpha_3 a_{t_1} a_{t_2} \\ &+ \frac{r}{2} \left[\beta_1^2 (\sigma_{t_1}^2 + \vartheta_{qt_1}^2) + \beta_2^2 (\sigma_{t_2}^2 + \vartheta_{qt_2}^2) \right] + \text{Utilidad}_{\text{Alt.}} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Por otra parte, el operador asume como una condición en su determinación la maximización que ejecuta el chofer. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \text{Arg Max}_{a_{t_1}, a_{t_2}} &L + \beta_1 s_{qt_1} + \beta_1 s_{qt_2} - \alpha_1 h_1(a_{t_1}) - \alpha_2 h_2(a_{t_1}) - \alpha_3 h_3(a_{t_1}, a_{t_2}) \\ &- \frac{r}{2} \left[\beta_1^2 (\sigma_{t_1}^2 + \vartheta_{qt_1}^2) + \beta_2^2 (\sigma_{t_2}^2 + \vartheta_{qt_2}^2) \right] - \text{Utilidad}_{\text{Alt.}} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Entonces, el concesionario sabe que el chofer escogerá los niveles de esfuerzos definidos por 3.30 y 3.31. Además, el operador es neutral al riesgo, por lo tanto, para el operador $s_{q_i} = a_i$. De esta forma, remplazando las ecuaciones 3.30, 3.31 y 3.35 como condiciones de maximización y haciendo $s_{q_i} = a_i$ en la función objetivo del operador:

$$\begin{aligned} \text{Max}_{L, \beta_1, \beta_2} \quad & PPT * a_{t_1} + PK * a_{t_2} + Ctes - \alpha_1 a_{t_1}^2 - \alpha_2 a_{t_2}^2 - \alpha_3 a_{t_1} a_{t_2} - \frac{r}{2} [\beta_1^2 (\sigma_{t_1}^2 + \vartheta_{q_{t_1}}^2) + \beta_2^2 (\sigma_{t_2}^2 + \vartheta_{q_{t_2}}^2)] \\ & - Utilidad_{Alt.} \end{aligned}$$

sujeto a:

$$L + \beta_1 a_{t_1} + \beta_2 a_{t_2} = \alpha_1 a_{t_1}^2 + \alpha_2 a_{t_2}^2 + \alpha_3 a_{t_1} a_{t_2} + \frac{r}{2} [\beta_1^2 (\sigma_{t_1}^2 + \vartheta_{q_{t_1}}^2) + \beta_2^2 (\sigma_{t_2}^2 + \vartheta_{q_{t_2}}^2)] + Utilidad_{Alt.}$$

$$a_{t_1} = \frac{2\beta_1 \alpha_2 - \alpha_3 \beta_2}{4\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2}$$

$$a_{t_2} = \frac{2\beta_2 \alpha_1 - \alpha_3 \beta_1}{4\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2}$$

(3.37)

Así, la maximización del operador está expresada en función de constantes y los valores a maximizar β_1 y β_2 . Calculando el *Lagrangeano* con respecto a β_1 y β_2 se obtiene:

$$\frac{dL^{op}}{d\beta_1} = \frac{da_{t_1}}{d\beta_1} [PPT - \alpha_1 2a_{t_1} - \alpha_3 a_{t_2}] + \frac{da_{t_2}}{d\beta_1} [PK - \alpha_2 2a_{t_2} - \alpha_3 a_{t_1}] - r\beta_1 (\sigma_{t_1}^2 + \vartheta_{q_{t_1}}^2) = 0 \quad (3.38)$$

Análogamente, se obtiene $\frac{dL^{chof}}{d\beta_2}$:

$$\frac{dL^{op}}{d\beta_2} = \frac{da_{t_1}}{d\beta_2} [PPT - \alpha_1 2a_{t_1} - \alpha_3 a_{t_2}] + \frac{da_{t_2}}{d\beta_2} [PK - \alpha_2 2a_{t_2} - \alpha_3 a_{t_1}] - r\beta_2 (\sigma_{t_2}^2 + \vartheta_{q_{t_2}}^2) = 0 \quad (3.39)$$

Además, de las condiciones se desprende que:

$$\frac{da_{t_1}}{d\beta_1} = \frac{2\alpha_2}{4\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2}$$

$$\frac{da_{t_1}}{d\beta_2} = \frac{-\alpha_3}{4\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2}$$

$$\frac{da_{t_2}}{d\beta_2} = \frac{2\alpha_1}{4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2}$$

$$\frac{da_{t_2}}{d\beta_1} = \frac{-\alpha_3}{4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2}$$

$$\frac{d^2a_i}{d\beta_l^2} = 0 \quad \forall i \in \{t_1, t_2\} \wedge \forall l \in \{1, 2\}$$

(3.40)

De esta forma, es posible resolver el sistema planteado y obtener expresiones para el contrato óptimo entre el operador y el chofer:

$$\beta_1 = \frac{PPT + 2PPT\alpha_2rv_2 - PK\alpha_3rv_2}{1 + r^2v_1v_2(4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2) + r(2\alpha_1v_1 + 2\alpha_2v_2)}$$

$$\beta_2 = \frac{PK + 2PK\alpha_1rv_1 - PPT\alpha_3rv_1}{1 + r^2v_1v_2(4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2) + r(2\alpha_1v_1 + 2\alpha_2v_2)}$$

entendiendo $v_1 = (\sigma_{t_1}^2 + \vartheta_{q_{t_1}}^2)$ y $v_2 = (\sigma_{t_2}^2 + \vartheta_{q_{t_2}}^2)$

(3.41)

Así, se muestra que los incentivos por pasajero transportado: β_1 y el incentivo por kilómetro recorrido: β_2 son simétricos entre sí, lo cual es esperable debido a la estructura del modelo.

Reemplazando los incentivos encontrados en la ecuación 3.35 se calcula la componente fija del salario del chofer (L).

Los esfuerzos óptimos quedan representados por:

$$a_{t_1} = \frac{r(PPTv_1\alpha_3^2 + 4PPTv_2\alpha_2^2 - 2PKv_1\alpha_1\alpha_3 - 2PKv_2\alpha_2\alpha_3) - PK\alpha_3 + 2PPT\alpha_2}{(4r^2v_1v_2\alpha_1\alpha_2 - v_1v_2r^2\alpha_3^2 + 2v_1r\alpha_1 + 2v_2r\alpha_2 + 1)(4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2)}$$

$$\alpha_{t_2} = \frac{r(PKv_2\alpha_3^2 + 4PKv_1\alpha_1^2 - 2PPTv_2\alpha_2\alpha_3 - 2PPTv_1\alpha_1\alpha_3) - PPT\alpha_3 + 2PK\alpha_1}{(4r^2v_1v_2\alpha_1\alpha_2 - v_1v_2r^2\alpha_3^2 + 2v_1r\alpha_1 + 2v_2r\alpha_2 + 1)(4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2)}$$

donde $v_1 = (\sigma_{t_1}^2 + \vartheta_{q_{t_1}}^2)$ y $v_2 = (\sigma_{t_2}^2 + \vartheta_{q_{t_2}}^2)$.

(3.42)

Los puntos estudiados son efectivamente máximos, dado que la segunda derivada del *Lagrangeano* es negativa. Esto puede revisarse en el Anexo 2.

3.3. Análisis de los Resultados del Modelo 1

La primera conclusión es que los resultados son coherentes a los de trabajos similares (Holmstrom & Milgrom, 1991). De esta forma, también se desprende que es posible generar un contrato que induzca el *second best* bajo las condiciones previamente expuestas (Bolton & Dewatripont, 2005). Es decir, el Principal puede generar un contrato que sea óptimo dada el contexto descrito, a través de primas variables por performance en un contrato lineal.

La principal función del salario fijo L es, dada una combinación óptima de incentivos β_1 y β_2 , entregar la mínima cantidad de recursos para que la utilidad del chofer sea no negativa y acceda a trabajar. Gracias al software MAPLE se constató que el valor obtenido de L es no negativo, como se condicionó en el inicio del modelo, para cualquier combinación de α_1 , α_2 , α_3 , r , $\sigma_{t_1}^2$, $\sigma_{t_2}^2$, $\vartheta_{q_{t_1}}^2$, $\vartheta_{q_{t_2}}^2$, $Utilidad_{Alt.}$, PK y PPT dentro del dominio de estos términos. Esto puede revisarse en el Anexo 3.

Conjuntamente, es necesario estudiar la relación de L con respecto a $Utilidad_{Alt.}$, lo cual puede verse en detalle en el Anexo 4. Hacer esto es relevante porque se espera que una variación en la utilidad alternativa del chofer sea compensada por el salario fijo que el operador ofrece:

$$\frac{dL}{dU_{Alt}} = 1 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, r, \sigma_{t_1}^2, \sigma_{t_2}^2, \vartheta_{q_{t_1}}^2, \vartheta_{q_{t_2}}^2, Utilidad_{Alt.}, PK \text{ y } PPT$$

(3.43)

Así, al estudiar el efecto de la $Utilidad_{Alt}$ en los estímulos propuestos por el operador, se obtiene que:

$$\begin{aligned} d\beta_1/dU_{Alt} &= 0 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, r, \sigma_{t_1}^2, \sigma_{t_2}^2, \vartheta_{q_{t_1}}^2, \vartheta_{q_{t_2}}^2, Utilidad_{Alt.}, PK \text{ y } PPT \\ d\beta_2/dU_{Alt} &= 0 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, r, \sigma_{t_1}^2, \sigma_{t_2}^2, \vartheta_{q_{t_1}}^2, \vartheta_{q_{t_2}}^2, Utilidad_{Alt.}, PK \text{ y } PPT \end{aligned} \quad (3.44)$$

Con las ecuaciones (3.43) y (3.44) se puede concluir que cualquier variación en la $Utilidad_{Alt}$ del conductor será compensada únicamente y en su totalidad por un cambio en el pago fijo del chofer: L .

Ahora, al analizar β_1 y β_2 , la primera conclusión es que existen situaciones extremas en las cuales el modelo puede arrojar incentivos negativos. Examinando bajo qué condiciones, más allá de la no negatividad de los parámetros, se pueden asumir incentivos no negativos se llegó a la siguiente condición para que β_1 y β_2 sean mayores o iguales a cero:

$$\frac{v_2 r \alpha_3}{2v_2 r \alpha_2 + 1} \leq \frac{PPT}{PK} \leq \frac{2v_1 r \alpha_1 + 1}{v_1 r \alpha_3}$$

donde $v_1 = (\sigma_{t_1}^2 + \vartheta_{q_{t_1}}^2)$ y $v_2 = (\sigma_{t_2}^2 + \vartheta_{q_{t_2}}^2)$.

(3.45)

Inicialmente se estableció que $\alpha_1 > \alpha_3$ y $\alpha_2 > \alpha_3$, condición necesaria para obtener incentivos no negativos. Puede verse esto en detalle en el Anexo 3. De esta forma, para denotar el conjunto de los parámetros que cumplen la condición recientemente enunciada, se utilizará $\mathbb{N}(C_1)$.

A continuación se revisará el comportamiento de β_1 , β_2 , a_{t_1} y a_{t_2} en relación de las variables más relevantes del problema. El siguiente análisis en detalle puede verse en el Anexo 5:

$$\bullet \frac{d\beta_1}{dPPT} \geq 0 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \alpha_3, r, \sigma_{t_1}^2, \sigma_{t_2}^2, \vartheta_{q_{t_1}}^2, \vartheta_{q_{t_2}}^2, Utilidad_{Alt.}, PK \text{ y } PPT \quad (3.46)$$

$$\bullet \frac{d\beta_2}{dPK} \geq 0 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \alpha_3, r, \sigma_{t_1}^2, \sigma_{t_2}^2, \vartheta_{q_{t_1}}^2, \vartheta_{q_{t_2}}^2, Utilidad_{Alt.}, PK \text{ y } PPT \quad (3.47)$$

$$\bullet \frac{d\beta_1}{dPK} \leq 0 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \alpha_3, r, \sigma_{t_1}^2, \sigma_{t_2}^2, \vartheta_{q_{t_1}}^2, \vartheta_{q_{t_2}}^2, Utilidad_{Alt.}, PK \text{ y } PPT \quad (3.48)$$

$$\bullet \frac{d\beta_2}{dPPT} \leq 0 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \alpha_3, r, \sigma_{t_1}^2, \sigma_{t_2}^2, \vartheta_{q_{t_1}}^2, \vartheta_{q_{t_2}}^2, Utilidad_{Alt.}, PK \text{ y } PPT \quad (3.49)$$

Entonces, el operador, al experimentar una variación en el pago correspondiente a sus ingresos producto de la actividad i , no solo advierte que esa tarea ha cambiado su atractivo (ecuaciones (3.46) y (3.47)), sino que nota que en términos relativos la otra actividad j también ve modificado su valor (ecuaciones (3.48) y (3.49)), traspasando ambos efectos al conductor a través de las tasas. Así, al modificar el pago del operador por una tarea i no solo se modificarán los incentivos de esa actividad, sino que también los de la tarea j en sentido contrario.

Al estudiar el comportamiento de los esfuerzos encomendados en las distintas actividades en relación a variaciones en los pagos que recibe en operador, el modelo concluye que:

$$\bullet \frac{da_{t_1}}{dPPT} \geq 0 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \alpha_3, r, \sigma_{t_1}^2, \sigma_{t_2}^2, \vartheta_{q_{t_1}}^2, \vartheta_{q_{t_2}}^2, Utilidad_{Alt.}, PK \text{ y } PPT \quad (3.50)$$

$$\bullet \frac{da_{t_2}}{dPK} \geq 0 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \alpha_3, r, \sigma_{t_1}^2, \sigma_{t_2}^2, \vartheta_{q_{t_1}}^2, \vartheta_{q_{t_2}}^2, Utilidad_{Alt.}, PK \text{ y } PPT \quad (3.51)$$

$$\bullet \frac{da_{t_1}}{dPK} \leq 0 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \alpha_3, r, \sigma_{t_1}^2, \sigma_{t_2}^2, \vartheta_{q_{t_1}}^2, \vartheta_{q_{t_2}}^2, Utilidad_{Alt.}, PK \text{ y } PPT \quad (3.52)$$

$$\bullet \frac{da_{t_2}}{dPPT} \leq 0 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \alpha_3, r, \sigma_{t_1}^2, \sigma_{t_2}^2, \vartheta_{q_{t_1}}^2, \vartheta_{q_{t_2}}^2, Utilidad_{Alt.}, PK \text{ y } PPT \quad (3.53)$$

Para observar cómo se obtuvieron estas expresiones, es posible ir al Anexo 6. La ecuación (3.50) muestra coherencia con el objetivo del modelo, ya que el operador traspasa la variación de su ingreso (PPT) al chofer a través del salario pagado y a su vez, esto incidirá en las acciones del conductor (esfuerzo a_{t_1}).

Análogamente, gracias a (3.51) se observa que una variación en PK generará alteraciones en el esfuerzo a_{t_2} en la misma dirección de cambio que experimentó inicialmente PK . Este efecto se producirá a través de cambios en los incentivos β_1 y β_2 .

La ecuación (3.52) muestra el efecto de una variación de PK en el esfuerzo encomendado en transportar pasajeros (a_{t_1}), donde un cambio en PK producirá variaciones en β_2 en el mismo sentido de cambio y en β_1 en sentido contrario. Así, la actividad t_1 alterará su valor relativo producto de las dos modificaciones anteriores. Al sumar estos dos efectos, a_{t_1} cambiará en sentido contrario al cambio original.

La interpretación de la desigualdad (3.53) es equivalente a la anterior. La relación entre un cambio en PPT y una variación en sentido contrario del esfuerzo encomendado en recorrer kilómetros (a_{t_2}). Por lo tanto, una variación en PPT generará cambios en β_1 en el mismo sentido y en β_2 en sentido contrario al cambio original. De esta forma, la actividad t_2 modificará su valor relativo como resultado de las dos variaciones anteriores. Al sumar estos dos efectos, el esfuerzo encomendado en recorrer kilómetros (a_{t_2}) cambiará en sentido contrario al cambio original.

Retomando las expresiones para los esfuerzos óptimos (ecuaciones (3.42)), se desprenden las siguientes dos conclusiones al derivarlas con respecto a los costos de realizar una tarea i .

$$\begin{aligned}
 & \bullet \frac{da_{t_1}}{d\alpha_1} \leq 0 \quad \forall a_{t_1}(\alpha_1, \alpha_2\alpha_3, r, \sigma_{t_1}^2, \sigma_{t_2}^2, \vartheta_{q_{t_1}}^2, \vartheta_{q_{t_2}}^2, Utilidad_{Alt.}, PK, PPT) \geq 0 \\
 & \bullet \frac{da_{t_2}}{d\alpha_2} \leq 0 \quad \forall a_{t_2}(\alpha_1, \alpha_2\alpha_3, r, \sigma_{t_1}^2, \sigma_{t_2}^2, \vartheta_{q_{t_1}}^2, \vartheta_{q_{t_2}}^2, Utilidad_{Alt.}, PK, PPT) \geq 0
 \end{aligned}
 \tag{3.54}$$

Para analizar cómo se obtuvo este hallazgo, es posible ver el Anexo 7.

Ahora, a medida que varía el ponderador del costo directo de realizar una tarea i , el esfuerzo encomendado en esta tarea disminuirá debido al mayor costo en el que debe incurrir el chofer para realizarla, siempre y cuando $a_i \geq 0$. Por un lado, es posible notar que el denominador de a_i (ecuación (3.42)) es siempre positivo debido a que $\alpha_1, \alpha_2 >$

α_3 y por consiguiente $(4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2) > 0$. Por otro lado, se necesita que el numerador de a_i sea positivo, es decir:

$$\begin{aligned} & [r^2v_1v_2(4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2) + 2v_1r\alpha_1 + 2v_2r\alpha_2 + 1](4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2) \geq 0 \\ & \forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, r, \sigma_{t_1}^2, \sigma_{t_2}^2, \vartheta_{q_{t_1}}^2, \vartheta_{q_{t_2}}^2 \end{aligned} \quad (3.55)$$

Al analizar el comportamiento del numerador de a_i se evidencia que existen combinaciones de los parámetros que generarían una expresión negativa. De esta forma, al condicionar $a_{t_1} \geq 0$ y $a_{t_2} \geq 0$ se obtiene la siguiente condición.

$$\frac{\alpha_3(2v_2r\alpha_2+2v_1r\alpha_1+1)}{v_1r\alpha_3^2+4rv_2\alpha_2^2+2\alpha_2} \leq \frac{PPT}{PK} \leq \frac{v_2r\alpha_3^2+4rv_1\alpha_1^2+2\alpha_1}{\alpha_3(2v_2r\alpha_2+2v_1r\alpha_1+1)} \quad (3.56)$$

Esta condición es más exigente que la encontrada para incentivos no negativos y puede observarse en el Anexo 8. Por esto, es posible considerar únicamente la expresión recientemente expuesta para asegurar incentivos y esfuerzos no negativos. Para denotar el conjunto de los parámetros que cumplen la condición recientemente enunciada, se utilizará $\mathbb{N}(C_2)$:

- $a_{t_1} \geq 0 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2\alpha_3, r, \sigma_{t_1}^2, \sigma_{t_2}^2, \vartheta_{q_{t_1}}^2, \vartheta_{q_{t_2}}^2, Utilidad_{Alt.}, PK \text{ y } PPT \in \mathbb{N}(C_2)$
- $a_{t_2} \geq 0 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2\alpha_3, r, \sigma_{t_1}^2, \sigma_{t_2}^2, \vartheta_{q_{t_1}}^2, \vartheta_{q_{t_2}}^2, Utilidad_{Alt.}, PK \text{ y } PPT \in \mathbb{N}(C_2)$

(3.57)

Al relacionar los esfuerzos generados por el conductor en las actividades t_1 y t_2 , con el costo el ponderador del costo por multitasking (α_3), se puede concluir lo siguiente.

- $\frac{da_{t_1}}{d\alpha_3} \leq 0 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2\alpha_3, r, \sigma_{t_1}^2, \sigma_{t_2}^2, \vartheta_{q_{t_1}}^2, \vartheta_{q_{t_2}}^2, Utilidad_{Alt.}, PK \text{ y } PPT \in \mathbb{N}(C_2)$
- $\frac{da_{t_2}}{d\alpha_3} \leq 0 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2\alpha_3, r, \sigma_{t_1}^2, \sigma_{t_2}^2, \vartheta_{q_{t_1}}^2, \vartheta_{q_{t_2}}^2, Utilidad_{Alt.}, PK \text{ y } PPT \in \mathbb{N}(C_2)$

(3.58)

El detalle de cómo se obtuvo esto puede observarse en el Anexo 9. Las ecuaciones (3.58) reflejan que a medida que varía el ponderador del costo por multitasking (α_3),

cambiarán en sentido contrario los esfuerzos encomendados en ambas tareas (a_{t_1} y a_{t_2}). Al modificarse α_3 variará en el mismo sentido el Costo Personal experimentado por el chofer para realizar las actividades t_1 y t_2 y el atractivo de ambas tareas se verá modificado en sentido contrario al cambio de α_3 .

Al continuar analizando el comportamiento de los esfuerzos a_{t_1} y a_{t_2} en relación con los parámetros del modelo, es posible notar que:

- $\frac{da_{t_1}}{dv_1} \leq 0 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, r, \sigma_{t_1}^2, \sigma_{t_2}^2, \vartheta_{q_{t_1}}^2, \vartheta_{q_{t_2}}^2, Utilidad_{Alt.}, PK \text{ y } PPT \in \mathbb{N}(C_1)$
 - $\frac{da_{t_2}}{dv_2} \leq 0 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, r, \sigma_{t_1}^2, \sigma_{t_2}^2, \vartheta_{q_{t_1}}^2, \vartheta_{q_{t_2}}^2, Utilidad_{Alt.}, PK \text{ y } PPT \in \mathbb{N}(C_1)$
- Con $v_1 = (\sigma_{t_1}^2 + \vartheta_{q_{t_1}}^2)$ y $v_2 = (\sigma_{t_2}^2 + \vartheta_{q_{t_2}}^2)$.

(3.59)

Estas expresiones (que pueden analizarse en detalle en el Anexo 10) reflejan que al modificar la varianza observada por el operador sobre los resultados de la tarea i , variará en sentido contrario el esfuerzo encomendado por el chofer en dicha actividad: a_i . A medida que cambia la varianza observada de los resultados v_i , se modificará en el mismo sentido el costo por aversión al riesgo que enfrenta el chofer, cambiando el costo experimentado por el chofer al realizar la tarea en cuestión. Luego, esta variación modificará en sentido contrario el atractivo de la actividad i . Así, al cambiar el valor relativo de la tarea i , se modificará el esfuerzo encomendado en esta (a_i) en el mismo sentido del cambio en el atractivo, es decir, en sentido contrario al cambio original sobre v_i .

Además, de forma coherente con lo esperado, es posible demostrar que el modelo entrega esfuerzos que cumplen con las siguientes desigualdades descubiertas gracias al análisis del Anexo 11:

- $\frac{da_{t_1}}{dr} \leq 0 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, r, \sigma_{t_1}^2, \sigma_{t_2}^2, \vartheta_{q_{t_1}}^2, \vartheta_{q_{t_2}}^2, Utilidad_{Alt.}, PK \text{ y } PPT$
- $\frac{da_{t_2}}{dr} \leq 0 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, r, \sigma_{t_1}^2, \sigma_{t_2}^2, \vartheta_{q_{t_1}}^2, \vartheta_{q_{t_2}}^2, Utilidad_{Alt.}, PK \text{ y } PPT$

(3.60)

Las desigualdades (3.60) plantean que a medida que varía el coeficiente de aversión al riesgo (r), cambiará en sentido contrario el esfuerzo realizado por el chofer. Una modificación en el coeficiente de aversión al riesgo cambiará el costo al cual se enfrenta el conductor para realizar ambas tareas, en el mismo sentido del cambio original. Esta alteración del costo hará que cambie el atractivo de la actividad en dirección contraria a la modificación de r . Finalmente, el esfuerzo encomendado por el chofer variará en sentido contrario al cambio en el coeficiente de aversión al riesgo.

Al estudiar cómo varían los incentivos propuestos por el concesionario al cambiar los valores del costo de multitasking, en particular el ponderador α_3 se puede llegar a la siguiente conclusión:

- $\frac{d\beta_1}{d\alpha_3} \leq 0 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, r, \sigma_{t_1}^2, \sigma_{t_2}^2, \vartheta_{q_{t_1}}^2, \vartheta_{q_{t_2}}^2, Utilidad_{Alt.}, PK \text{ y } PPT$
- $\frac{d\beta_2}{d\alpha_3} \leq 0 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, r, \sigma_{t_1}^2, \sigma_{t_2}^2, \vartheta_{q_{t_1}}^2, \vartheta_{q_{t_2}}^2, Utilidad_{Alt.}, PK \text{ y } PPT$

(3.61)

Este resultado se obtuvo a través del desarrollo descrito en el Anexo 12.

Por lo tanto, al variar el ponderador del costo por multitasking (α_3), cambiarán en sentido contrario ambos incentivos propuestos por el operador (β_1 y β_2). Al modificarse α_3 , variarán en la misma dirección los Costos Personales experimentados por el chofer al realizar las actividades, afectando el atractivo de las actividades y el operador representará esta modificación reacomodando los incentivos β_1 y β_2 .

4. DESARROLLO Y ANÁLISIS DEL MODELO 2: UN OPERADOR Y UN GRUPO DE CHOFERES

Para modelar las decisiones de un grupo de choferes, al trabajo de Holmström y Milgrom (1991) se le sumará la investigación de Holmström (1982). Para estudiar este caso en particular, es necesario redefinir algunos de los conceptos expresados anteriormente.

4.1. Definiciones del modelo

Primero se clarificará cómo los choferes toman decisiones en el nuevo contexto con un grupo de trabajadores, luego se expondrán los costos y la utilidad que enfrentan los choferes y el operador.

4.1.1. Choferes: actividades, aversión al riesgo y Costo Personal

Se usará el subíndice k para señalar al k -ésimo conductor que tiene una relación contractual con el operador y realiza las actividades previamente descritas. Estos choferes pertenecen al grupo K de conductores que cuenta con $\#K$ trabajadores. Además, se continuará asumiendo que los choferes son aversos al riesgo y el operador neutral (Holmstrom & Milgrom, 1991; Bolton & Dewatripont, 2005).

Se utilizará Q_i para señalar el resultado total en la actividad $i \in \{t_1, t_2\}$. Este será función de los esfuerzos a_i^k que desarrollan todos los choferes en la tarea i y de un componente aleatorio de dicha actividad i para cada chofer, $\xi_i^k \sim (0, \sigma_i^2)$:

$$Q_i = G_i(a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^{\#K}) + \sum_{k \in K} \xi_i^k \quad (4.1)$$

Se asumirá que los choferes tienen la misma varianza en los resultados. De esta forma, se define $G_i(a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^{\#K})$ como el componente determinístico de la función de resultado total (Q_i) de la actividad $i \in \{t_1, t_2\}$. Por simplicidad, se llamará a

$G_i(a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^{\#K})$ como la función de productividad y tendrá el siguiente comportamiento:

$$\frac{dG_i(a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^{\#K})}{da_i^k} = \frac{dQ_i}{da_i^k} \geq 0 \quad \forall i \in \{t_1, t_2\}, \forall k \in K \quad (4.2)$$

$$\frac{d^2G_i(a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^{\#K})}{da_i^{k^2}} = \frac{d^2Q_i}{da_i^{k^2}} \leq 0 \quad \forall i \in \{t_1, t_2\}, \forall k \in K \quad (4.3)$$

$$\frac{dG_i(a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^{\#K})}{da_j^k} = \frac{dQ_i}{da_j^k} = 0 \quad \forall i \neq j \in \{t_1, t_2\}, \forall k \in K \quad (4.4)$$

Además, se mantendrá la misma forma funcional de los Costos Personales. Así el costo del chofer k queda expresado como:

$$\text{CostoPersonal} = \mathcal{H}^k(a_{t_1}^k, a_{t_2}^k) \quad (4.5)$$

Se supondrá que todos los choferes poseen la misma forma de experimentar costos a partir de los esfuerzos realizados. Para caracterizar esta función, se dirá que:

$$\mathcal{H}^k(a_{t_1}^k, a_{t_2}^k) = \alpha_1 h_1(a_{t_1}^k) + \alpha_2 h_2(a_{t_2}^k) + \alpha_3 h_3(a_{t_1}^k, a_{t_2}^k) \quad (4.6)$$

Donde α_1, α_2 y α_3 son constantes y h_1, h_2 y h_3 son funciones. Particularmente, h_1 y h_2 dependen únicamente de $a_{t_1}^k$ y $a_{t_2}^k$ respectivamente, en cambio h_3 depende de los esfuerzos encomendado en ambas tareas: $a_{t_1}^k, a_{t_2}^k$. Además se mantendrá el supuesto que considerará $\alpha_1, \alpha_2 > \alpha_3 \forall k \in K$.

El comportamiento de los componentes de los Costos Personales será:

$$\frac{dh_l(a_{t_l}^k)}{da_{t_l}^k} \geq 0 \quad \forall l \in \{1,2\}, \forall k \in K \quad (4.7)$$

$$\frac{d^2h_l(a_{t_l}^k)}{da_{t_l}^{k^2}} \geq 0 \quad \forall l \in \{1,2\}, \forall k \in K \quad (4.8)$$

$$\frac{dh_l(a_{t_l}^k)}{da_{t_m}^k} = 0 \quad \forall l, m \in \{1,2\} \wedge l \neq m, \forall k \in K \quad (4.9)$$

$$\frac{dh_3(a_{t_1}^k, a_{t_2}^k)}{da_{t_l}^k} \geq 0 \quad \forall l \in \{1,2\}, \forall k \in K \quad (4.10)$$

$$\frac{d^2h_3(a_{t_1}^k, a_{t_2}^k)}{da_{t_1}^k da_{t_2}^k} \geq 0 \quad \forall k \in K \quad (4.11)$$

$$\frac{d^2h_3(a_{t_1}^k, a_{t_2}^k)}{da_{t_l}^{k^2}} = 0 \quad \forall l \in \{1,2\}, \forall k \in K \quad (4.12)$$

Además, se considerará que el Costo Personal de un chofer k es independiente de los esfuerzos realizados por cualquier otro conductor h :

$$\frac{d\mathcal{H}^k(a_{t_1}^k, a_{t_2}^k)}{da_{t_l}^h} = 0 \quad \forall l \in \{1,2\}, \forall k, h \in K \wedge k \neq h \quad (4.13)$$

Finalmente, se mantendrá el supuesto que los choferes tendrán una costo de oportunidad representado por $Utilidad_{Alt.}$ o $U_{Alt.}$.

4.1.2. Operador: salarios a pagar e ingresos

El salario a pagar por el operador seguirá teniendo tres elementos: uno fijo, uno variable en los pasajeros transportados totales y otro variable en los kilómetros recorridos totales. Además, el operador no podrá observar Q_i sino que observa señales de los resultados globales (s_{Q_i}). Estas señales están compuestas por la suma de Q_i con una componente aleatoria $\phi_{Q_i} \sim (0, \vartheta_{Q_i}^2)$:

$$s_{Q_i} = Q_i + \phi_{Q_i} \quad (4.14)$$

De esta forma, el salario del chofer k queda expresado de la siguiente manera:

$$w^k = L' + \beta'_1 s_{Q_{t_1}} + \beta'_2 s_{Q_{t_2}} \quad (4.15)$$

Donde β'_1 y β'_2 son constantes positivas.

El operador seguirá obteniendo su ingreso a partir del Contrato de Concesión que lo relaciona con el Planificador Central a través de la siguiente estructura de pago:

$$Ingreso_p^{con} = PPT * s_{Q_{t_1}} + PK * s_{Q_{t_2}} + Ctes \quad (4.16)$$

4.2. Problema a solucionar y sus respectivas restricciones

Para encontrar el contrato óptimo, se mantendrá el supuesto de racionalidad (Introduction to Choice Theory, 2004) y se utilizará nuevamente la forma especificada por Spence y Zeckhauser (1971), Ross (1973), Harris y Raviv (1979) y Holmström (1979) para la resolución de esta relación. Este esquema, en términos del presente modelo plantea lo siguiente:

$$\text{Max}_{\text{Salario a pagar}} \{ Ingreso_p^{con} - \sum_{h \in K}^{\#K} \text{Salario}^h \}$$

Sujeto a

$$\text{Salario}^k \geq \text{CostoPersonal}^k + \text{Costo de aversión}^k + \text{Utilidad}_{\text{Alternativa}}$$

$$a_{t_1}^k, a_{t_2}^k \text{ ArgMax} \{ \text{Salario}^k - \text{CostoPersonal}^k - \text{Costo de aversión}^k - \text{Utilidad}_{\text{Alternativa}} \}$$

$$\forall k \in K$$

(4.17)

El operador maximizará su Utilidad cumpliendo estas condiciones. Así, para resolver este modelo primero se buscarán $a_{t_1}^k, a_{t_2}^k$ óptimos, los cuales deberán ser una condición en la posterior maximización del operador.

4.2.1. Maximización Choferes

Cada conductor buscará maximizar su utilidad, la cual depende de su salario y de los costos en los que incurre. Sin embargo, el salario en este contexto será función del desempeño grupal. De esta forma, se tiene:

$$\text{Max}_{\text{Esfuerzo}} \{ \text{Salario}^k - \text{CostoPersonal}^k - \text{Costo de aversión}^k - \text{Utilidad}_{\text{Alternativa}} \}$$

$$\forall k \in K \quad (4.18)$$

El costo de aversión al riesgo será:

$$\text{Costo de aversión} = \frac{r}{2} \text{Var}(\text{salario}) \quad (4.19)$$

Donde r representa el coeficiente de aversión al riesgo. Desarrollando esta expresión, se obtiene:

$$\text{Costo de aversión} = \frac{r}{2} \left[\beta_1'^2 (\#K\sigma_{t_1}^2 + \vartheta_{Q_{t_1}}^2) + \beta_2'^2 (\#K\sigma_{t_2}^2 + \vartheta_{Q_{t_2}}^2) \right]$$

$$\forall k \in K \quad (4.20)$$

Reemplazando en la maximización del chofer, su comportamiento queda definido por:

$$\text{Max}_{a_{t_1}^k, a_{t_2}^k} \left[L' + \beta_1' s_{Q_{t_1}} + \beta_2' s_{Q_{t_2}} - \alpha_1 h_1(a_{t_1}^k) - \alpha_2 h_2(a_{t_2}^k) - \alpha_3 h_3(a_{t_1}^k, a_{t_2}^k) - \frac{r}{2} \left[\beta_1'^2 (\#K\sigma_{t_1}^2 + \vartheta_{Q_{t_1}}^2) + \beta_2'^2 (\#K\sigma_{t_2}^2 + \vartheta_{Q_{t_2}}^2) \right] - \text{Utilidad}_{\text{Alt.}} \right]$$

$$\forall k \in K \quad (4.21)$$

El *Lagrangeano* de esta maximización en términos de $a_{t_1}^k$ es:

$$\frac{dL^{\text{chof } k}}{da_{t_1}^k} = \beta_1' \frac{ds_{Q_{t_1}}}{da_{t_1}^k} + \beta_2' \frac{ds_{Q_{t_2}}}{da_{t_1}^k} - \alpha_1 \frac{dh_1(a_{t_1}^k)}{da_{t_1}^k} - \alpha_2 \frac{dh_2(a_{t_2}^k)}{da_{t_1}^k} - \alpha_3 \frac{dh_3(a_{t_1}^k, a_{t_2}^k)}{da_{t_1}^k} \quad (4.22)$$

Además, se desprende que:

$$\frac{ds_{Q_i}}{da_i^k} = \frac{dQ_i}{da_i^k} = \frac{dG_i(a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^{\#K})}{da_i^k} \geq 0 \quad \forall i \in \{t_1, t_2\}, \quad \forall k \in K$$

$$\frac{ds_{Q_i}}{da_j^k} = \frac{dQ_i}{da_j^k} = \frac{dG_i(a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^{\#K})}{da_j^k} = 0 \quad \forall i, j \in \{t_1, t_2\} \wedge i \neq j, \forall k \in K$$

$$\frac{dh_1(a_{t_1}^k)}{da_{t_2}^k} = 0 \wedge \frac{dh_2(a_{t_2}^k)}{da_{t_1}^k} = 0 \quad \forall k \in K$$

(4.23)

Desarrollando el *Lagrangeano* e igualando a cero para mostrar el posible máximo, se obtiene:

$$\frac{dL^{chof k}}{da_{t_1}^k} = \beta_1' \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}^k} - \alpha_1 \frac{dh_1(a_{t_1}^k)}{da_{t_1}^k} - \alpha_3 \frac{dh_3(a_{t_1}^k, a_{t_2}^k)}{da_{t_1}^k} = 0$$

(4.24)

De forma análoga, para $\frac{dL^{chof k}}{da_{t_2}^k}$ se obtiene:

$$\frac{dL^{chof k}}{da_{t_2}^k} = \beta_2' \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}^k} - \alpha_2 \frac{dh_2(a_{t_2}^k)}{da_{t_2}^k} - \alpha_3 \frac{dh_3(a_{t_1}^k, a_{t_2}^k)}{da_{t_2}^k} = 0$$

(4.25)

Es posible verificar que los puntos $\frac{dL^{chof k}}{da_{t_1}^k} = 0$ y $\frac{dL^{chof k}}{da_{t_2}^k} = 0$ son máximos y representan el esfuerzo realizado por cada uno de los choferes. Este análisis se encuentra en el Anexo 13.

Además, se harán los siguientes supuestos y se usarán formas funcionales específicas para estudiar el equilibrio descrito:

$$\frac{dG_{t_l}(a_{t_l}^1, a_{t_l}^2, \dots, a_{t_l}^{\#K})}{da_{t_l}^k} \text{ es constante } \forall l \in \{1, 2\}, \forall k \in K$$

$$h_1(a_{t_1}^k) = (a_{t_1}^k)^2 \quad \forall k \in K$$

$$h_2(a_{t_2}^k) = (a_{t_2}^k)^2 \quad \forall k \in K$$

$$h_3(a_{t_1}^k, a_{t_2}^k) = a_{t_1}^k * a_{t_2}^k \quad \forall k \in K$$

(4.26)

Reemplazando en $\frac{dL^{chof k}}{da_{t_1}^k} = 0$ y $\frac{dL^{chof k}}{da_{t_2}^k} = 0$

$$\frac{dL^{chof k}}{da_{t_1}^k} = \beta_1' \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}^k} - 2\alpha_1 a_{t_1}^k - \alpha_3 a_{t_2}^k = 0 \quad \forall k \in K$$

$$\frac{dL^{chof k}}{da_{t_2}^k} = \beta_2' \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}^k} - 2\alpha_2 a_{t_2}^k - \alpha_3 a_{t_1}^k = 0 \quad \forall k \in K$$

(4.27)

Así, se obtiene expresiones para el esfuerzo realizado en ambas tareas para cada chofer:

$$a_{t_1}^k = \frac{2\alpha_2 \beta_1' \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}^k} - \alpha_3 \beta_2' \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}^k}}{4\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2}$$

(4.28)

$$a_{t_2}^k = \frac{2\alpha_1 \beta_2' \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}^k} - \alpha_3 \beta_1' \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}^k}}{4\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2}$$

(4.29)

$\forall k \in K$

Asumiendo simetría entre los conductores, se obtiene:

$$a'_{t_1} = a_{t_1}^1 = a_{t_1}^2 = a_{t_1}^3 = \dots = a_{t_1}^{\#K-1} = a_{t_1}^{\#K}$$

$$a'_{t_2} = a_{t_2}^1 = a_{t_2}^2 = a_{t_2}^3 = \dots = a_{t_2}^{\#K-1} = a_{t_2}^{\#K}$$

(4.30)

Así, al resolver en primera instancia para los esfuerzos del conductor 1 y 2, se tiene que

$a_{t_1}^1 = a_{t_1}^2$ y $a_{t_2}^1 = a_{t_2}^2$. Así:

$$\frac{2\alpha_2 \beta_1' \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}^1} - \alpha_3 \beta_2' \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}^1}}{4\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2} = \frac{2\alpha_2 \beta_1' \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}^2} - \alpha_3 \beta_2' \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}^2}}{4\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2}$$

$$\frac{2\alpha_1\beta_2' \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}^k} - \alpha_3\beta_1' \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}^k}}{4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2} = \frac{2\alpha_1\beta_2' \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}^k} - \alpha_3\beta_1' \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}^k}}{4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2} \quad (4.31)$$

Reordenando:

$$2\alpha_2\beta_1' \left[\frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}^1} - \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}^2} \right] = \alpha_3\beta_2' \left[\frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}^1} - \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}^2} \right]$$

$$2\alpha_1\beta_2' \left[\frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}^k} - \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}^k} \right] = \alpha_3\beta_1' \left[\frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}^k} - \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}^k} \right] \quad (4.32)$$

Al resolver el sistema, se obtiene

$$\frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}^1} = \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}^2}$$

$$\frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}^1} = \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}^2} \quad (4.33)$$

Al generalizar este análisis para todos los choferes:

$$\frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}^1} = \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}^2} = \dots = \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}^{\#K}} = \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}^{\prime}}$$

$$\frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}^1} = \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}^2} = \dots = \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}^{\#K}} = \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}^{\prime}} \quad (4.34)$$

Se usará $a_{t_1}^{\prime}$ y $a_{t_2}^{\prime}$ para describir los esfuerzos desarrollados por los conductores y

$\frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}^{\prime}}$ y $\frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}^{\prime}}$ para señalar la derivada de la producción con

respecto a los esfuerzos para cualquier chofer. Esto último, porque cada chofer aportará lo mismo a la función de producción, situación que se comportará como un Equilibrio de Nash.

4.2.2. Maximización del Operador

Por su parte, el operador también querrá maximizar sus beneficios. Para esto, optimizará su ingreso menos sus costos:

$$\begin{aligned} & \text{Max}_{\text{salarios a pagar}} \{ \text{Ingreso}_p^{\text{con}} - \sum_{h \in K} \text{Salario}_h \} \\ & \text{Max}_{L, \beta_1', \beta_2'} \quad PPT_M * s_{Q_{t_1}} + PK_M * s_{Q_{t_2}} + Ctes - \sum_{h \in K} [L' + \beta_1' s_{Q_{t_1}} + \beta_2' s_{Q_{t_2}}] \end{aligned} \quad (4.35)$$

Enfrentado ante un grupo de choferes, el operador debe pagar un salario a cada conductor el cual logre cubrir los costos a los que se enfrentan.

$$\text{Salario}^k \geq \text{CostoPersonal}^k + \text{Costo de aversión}^k + \text{Utilidad}_{\text{Alternativa}}^k$$

$\forall k \in K$

$$\begin{aligned} & L' + \beta_1' s_{Q_{t_1}} + \beta_2' s_{Q_{t_2}} \\ & \geq \alpha_1 h_1(a_{t_1}^k) + \alpha_2 h_2(a_{t_2}^k) + \alpha_3 h_3(a_{t_1}^k, a_{t_2}^k) + \frac{r}{2} [\beta_1'^2 (\#K \sigma_{t_1}^2 + \vartheta_{Q_{t_1}}^2) + \beta_2'^2 (\#K \sigma_{t_2}^2 + \vartheta_{Q_{t_2}}^2)] \\ & + \text{Utilidad}_{\text{Alt.}} \end{aligned}$$

$\forall k \in K$

(4.36)

Sin embargo, el operador buscará disminuir el margen a favor de los conductores y ofrecerá el mínimo salario que sea capaz de cubrir los costos económicos de los choferes. Así el equilibrio será:

$$\text{Salario}^k = \text{CostoPersonal}^k + \text{Costo de aversión}^k + \text{Utilidad}_{\text{Alternativa}}^k$$

$\forall k \in K$

$$\begin{aligned}
& L' + \beta'_1 s_{Q_{t_1}} + \beta'_2 s_{Q_{t_2}} \\
&= \alpha_1 h_1(a_{t_1}^k) + \alpha_2 h_2(a_{t_2}^k) + \alpha_3 h_3(a_{t_1}^k, a_{t_2}^k) + \frac{r}{2} [\beta_1'^2 (\#K \sigma_{t_1}^2 + \vartheta_{Q_{t_1}}^2) + \beta_2'^2 (\#K \sigma_{t_2}^2 + \vartheta_{Q_{t_2}}^2)] \\
&+ Utilidad_{Alt.}
\end{aligned}$$

$\forall k \in K$

(4.37)

Esto último expresado en las funciones definidas previamente.

$$\begin{aligned}
& L' + \beta'_1 s_{Q_{t_1}} + \beta'_2 s_{Q_{t_2}} \\
&= \alpha_1 (a_{t_1}^k)^2 + \alpha_2 (a_{t_2}^k)^2 + \alpha_3 (a_{t_1}^k * a_{t_2}^k) + \frac{r}{2} [\beta_1'^2 (\#K \sigma_{t_1}^2 + \vartheta_{Q_{t_1}}^2) + \beta_2'^2 (\#K \sigma_{t_2}^2 + \vartheta_{Q_{t_2}}^2)] \\
&+ Utilidad_{Alt.}
\end{aligned}$$

(4.38)

Por otra parte, se asumirá que los choferes son racionales (Levin & Milgrom, 2004). Por lo tanto, el operador puede considerar como una condición en su determinación, la maximización que ejecuta cada conductor. Así:

$$\begin{aligned}
& \underset{a_{t_1}^k, a_{t_2}^k}{Max} \quad L' + \beta'_1 s_{Q_{t_1}} + \beta'_2 s_{Q_{t_2}} - \alpha_1 h_1(a_{t_1}^k) - \alpha_2 h_2(a_{t_2}^k) - \alpha_3 h_3(a_{t_1}^k, a_{t_2}^k) \\
&\quad - \frac{r}{2} [\beta_1'^2 (\#K \sigma_{t_1}^2 + \vartheta_{Q_{t_1}}^2) + \beta_2'^2 (\#K \sigma_{t_2}^2 + \vartheta_{Q_{t_2}}^2)] - Utilidad_{Alt.}
\end{aligned}$$

$\forall k \in K$

(4.39)

En término de las funciones utilizadas, el esfuerzo que realizan los choferes queda expresado por:

$$\begin{aligned}
a'_{t_1} = a^1_{t_1} = a^2_{t_1} = \dots = a^{\#K}_{t_1} &= \frac{2\alpha_2\beta'_1 \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da'_{t_1}} - \alpha_3\beta'_2 \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da'_{t_2}}}{4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2} \\
a'_{t_2} = a^1_{t_2} = a^2_{t_2} = \dots = a^{\#K}_{t_2} &= \frac{2\alpha_1\beta'_2 \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da'_{t_2}} - \alpha_3\beta'_1 \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da'_{t_1}}}{4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2}
\end{aligned}$$

(4.40)

Además, debido a las definiciones de s_{Q_i} y Q_i :

$$s_{Q_i} = \sum_{h \in K} (a_i^h + \xi_i^h) + \phi_{Q_i} = G_i(a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^{\#K}) + \#K * \xi_i^h + \phi_{Q_i} \quad (4.41)$$

Lo que es equivalente a $s_{Q_i} = G_i(a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^{\#K})$ para un concesionario neutral al riesgo.

Por lo anterior, el comportamiento del operador está definido por:

$$\begin{aligned} \text{Max}_{L, \beta_1', \beta_2'} \quad & PPT_M * G_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K}) + PK_M * G_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K}) + Ctes \\ & - \sum_{h \in K} \{ \alpha_1 (a_{t_1}^h)^2 + \alpha_2 (a_{t_2}^h)^2 + \alpha_3 (a_{t_1}^h * a_{t_2}^h) + \frac{r}{2} [\beta_1'^2 (\#K \sigma_{t_1}^2 + \vartheta_{Q_{t_1}}^2) + \beta_2'^2 (\#K \sigma_{t_2}^2 + \vartheta_{Q_{t_2}}^2)] \\ & + U_{Alt.} \} \end{aligned}$$

Sujeto a:

$$L' + \beta_1' s_{Q_{t_1}} + \beta_2' s_{Q_{t_2}} = \alpha_1 (a_{t_1}^k)^2 + \alpha_2 (a_{t_2}^k)^2 + \alpha_3 (a_{t_1}^k * a_{t_2}^k) + \frac{r}{2} [\beta_1'^2 (\#K \sigma_{t_1}^2 + \vartheta_{Q_{t_1}}^2) + \beta_2'^2 (\#K \sigma_{t_2}^2 + \vartheta_{Q_{t_2}}^2)] + Utilidad_{Alt.}$$

$\forall k \in K$

$$a_{t_1}^1 = a_{t_1}^2 = \dots = a_{t_1}^{\#K} = \frac{2\alpha_2 \beta_1' \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}^1} - \alpha_3 \beta_2' \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}^1}}{4\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2}$$

$$a_{t_2}^1 = a_{t_2}^2 = \dots = a_{t_2}^{\#K} = \frac{2\alpha_1 \beta_2' \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}^1} - \alpha_3 \beta_1' \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}^1}}{4\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2}$$

(4.42)

Para poder encontrar el contrato óptimo, se asumirá que $\frac{d^2 G_{t_l}(a_{t_l}^1, a_{t_l}^2, \dots, a_{t_l}^{\#K})}{d\beta_l'^2} = 0 \forall l \in$

$\{1, 2\}$, además de mantener el supuesto que plantea que $\frac{dG_{t_l}(a_{t_l}^1, a_{t_l}^2, \dots, a_{t_l}^{\#K})}{da_{t_l}^k}$ será constante

$\forall l \in \{1, 2\}, \forall k \in K$. Por lo tanto, las expresiones para el *Lagrangeano* con respecto a β_1' y β_2' son las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{dL^{op}}{d\beta'_1} = & PPT_M * \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{d\beta'_1} + PK_M * \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{d\beta'_1} \\ & - \sum_{h \in K} \left\{ \alpha_1 2a_{t_1}^h \frac{da_{t_1}^h}{d\beta'_1} + \alpha_2 2a_{t_2}^h \frac{da_{t_2}^h}{d\beta'_1} + \alpha_3 \left(a_{t_2}^h \frac{da_{t_1}^h}{d\beta'_1} + \frac{da_{t_2}^h}{d\beta'_1} a_{t_1}^h \right) + r\beta'_1 (\#K \sigma_{t_1}^2 + \vartheta_{0_{t_1}}^2) \right\} \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \frac{dL^{op}}{d\beta'_2} = & PPT_M * \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{d\beta'_2} + PK_M * \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{d\beta'_2} \\ & - \sum_{h \in K} \left\{ \alpha_1 2a_{t_1}^h \frac{da_{t_1}^h}{d\beta'_2} + \alpha_2 2a_{t_2}^h \frac{da_{t_2}^h}{d\beta'_2} + \alpha_3 \left(a_{t_2}^h \frac{da_{t_1}^h}{d\beta'_2} + \frac{da_{t_2}^h}{d\beta'_2} a_{t_1}^h \right) + r\beta'_2 (\#K \sigma_{t_2}^2 + \vartheta_{0_{t_2}}^2) \right\} \end{aligned} \quad (4.44)$$

A partir de las restricciones de (4.42):

$$\begin{aligned} \frac{da_{t_1}^1}{d\beta'_1} = \frac{da_{t_1}^2}{d\beta'_1} = \dots = \frac{da_{t_1}^{\#K}}{d\beta'_1} &= \frac{2\alpha_2 \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}^1}}{4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2} \\ \frac{da_{t_1}^1}{d\beta'_2} = \frac{da_{t_1}^2}{d\beta'_2} = \dots = \frac{da_{t_1}^{\#K}}{d\beta'_2} &= \frac{-\alpha_3 \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}^1}}{4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2} \\ \frac{da_{t_2}^1}{d\beta'_1} = \frac{da_{t_2}^2}{d\beta'_1} = \dots = \frac{da_{t_2}^{\#K}}{d\beta'_1} &= \frac{-\alpha_3 \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}^1}}{4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2} \\ \frac{da_{t_2}^1}{d\beta'_2} = \frac{da_{t_2}^2}{d\beta'_2} = \dots = \frac{da_{t_2}^{\#K}}{d\beta'_2} &= \frac{2\alpha_1 \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}^1}}{4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2} \\ \frac{d^2 a_i^k}{d\beta_i'^2} = 0 \quad \forall i \in \{t_1, t_2\} \wedge \forall k \in \{1, 2\} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Por lo tanto, es posible obtener una expresión para β'_1 y β'_2 :

$$\begin{aligned}
\beta_1' = & \frac{1}{\#K \left\{ \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}'} \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}'} + r^2 v_1 v_2 (4\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2) + r(2\alpha_1 v_1 \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}'} + 2\alpha_2 v_2 \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}'}) \right\}} \\
& * \left\{ PPT \left\{ \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{d\beta_1'} \left[\left(\frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}'} \right)^2 2\alpha_1 + r v_2 (4\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2) \right] \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{d\beta_2'} \left[\frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}'} \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}'} \alpha_3 \right] \right\} \right\} \\
& + PK \left\{ \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{d\beta_1'} \left[\left(\frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}'} \right)^2 2\alpha_1 + r v_2 (4\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2) \right] \right. \\
& + \left. \left. \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{d\beta_2'} \left[\frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}'} \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}'} \alpha_3 \right] \right\} \right\}
\end{aligned} \tag{4.46}$$

$$\begin{aligned}
\beta_2' = & \frac{1}{\#K \left\{ \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}'} \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}'} + r^2 v_1 v_2 (4\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2) + r(2\alpha_1 v_1 \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}'} + 2\alpha_2 v_2 \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}'}) \right\}} \\
& * \left\{ PK \left\{ \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{d\beta_2'} \left[\left(\frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}'} \right)^2 2\alpha_2 + r v_1 (4\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2) \right] \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{d\beta_1'} \left[\frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}'} \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}'} \alpha_3 \right] \right\} \right\} \\
& + PPT \left\{ \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{d\beta_2'} \left[\left(\frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}'} \right)^2 2\alpha_2 + r v_1 (4\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2) \right] \right. \\
& + \left. \left. \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{d\beta_1'} \left[\frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}'} \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}'} \alpha_3 \right] \right\} \right\}
\end{aligned} \tag{4.47}$$

entendiendo $v_1 = (\#K \sigma_{t_1}^2 + \vartheta_{Q_{t_1}}^2)$ y $v_2 = (\#K \sigma_{t_2}^2 + \vartheta_{Q_{t_2}}^2)$.

Hay coherencia con el modelo de un chofer al mantener los supuestos del modelo anterior, ya que los incentivos β_1' y β_2' son equivalentes a β_1 y β_2 si:

$$\#K = 1$$

$$G_i(a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^{\#K}) = a_i \quad \forall i \in \{t_1, t_2\}$$

$$\tag{4.48}$$

Para calcular la componente fija del salario del conductor: L' se deben reemplazar los incentivos recientemente encontrados en la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
L' + \beta'_1 s_{Q_{t_1}} + \beta'_2 s_{Q_{t_2}} \\
&= \alpha_1 a_{t_1}^2 + \alpha_2 a_{t_2}^2 + \alpha_3 a_{t_1} * a_{t_2} + \frac{r}{2} \left[\beta_1'^2 (\#K \sigma_{t_1}^2 + \vartheta_{Q_{t_1}}^2) + \beta_2'^2 (\#K \sigma_{t_2}^2 + \vartheta_{Q_{t_2}}^2) \right] \\
&\quad + Utilidad_{Alt.}
\end{aligned}$$

Por su parte, los esfuerzos óptimos quedan representados por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
a'_{t_1} = & \frac{1}{\#K \left\{ \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}} \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}} + rv_1 v_2 (4\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2) + r(2\alpha_1 v_1 \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}} + 2\alpha_2 v_2 \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}}) \right\}} \\
& * \left(PPT \left[\frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{d\beta'_1} \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}} \left[\left(\frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}} \right)^2 + 2\alpha_2 rv_2 \right] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{d\beta'_2} \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}} rv_1 \alpha_3 \right] \right. \\
& \quad \left. + PK \left[\frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{d\beta'_1} \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}} \left[\left(\frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}} \right)^2 + 2\alpha_2 rv_2 \right] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{d\beta'_2} \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}} rv_1 \alpha_3 \right] \right\}}
\end{aligned} \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned}
a'_{t_2} = & \frac{1}{\#K \left\{ \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}} \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}} + rv_1 v_2 (4\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2) + r(2\alpha_1 v_1 \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}} + 2\alpha_2 v_2 \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}}) \right\}} \\
& * \left(PK \left[\frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{d\beta'_2} \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}} \left[\left(\frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}} \right)^2 + 2\alpha_1 rv_1 \right] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{d\beta'_1} \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}} rv_2 \alpha_3 \right] \right. \\
& \quad \left. + PPT \left[\frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{d\beta'_2} \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}} \left[\left(\frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}} \right)^2 + 2\alpha_1 rv_1 \right] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{d\beta'_1} \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}} rv_2 \alpha_3 \right] \right\}}
\end{aligned} \tag{4.50}$$

entendiendo $v_1 = (\#K \sigma_{t_1}^2 + \vartheta_{Q_{t_1}}^2)$ y $v_2 = (\#K \sigma_{t_2}^2 + \vartheta_{Q_{t_2}}^2)$.

Nuevamente hay coherencia con el modelo anterior si se mantienen los supuestos (4.48), ya que los incentivos $a_{t_1}^k$ y $a_{t_2}^k$ serán equivalentes a a_{t_1} y a_{t_2} . Además, se confirma que este punto es un máximo al verificar la condición de segundo orden a través del Anexo 14.

5. ANÁLISIS DE LA RELACIÓN ENTRE EL ESFUERZO ENCOMENDADO Y EL NÚMERO DE CHOFERES

A continuación se estudiará cómo varía el esfuerzo realizado por cada chofer a medida que aumenta el número de conductores en el grupo. Inicialmente, se asumirá el supuesto conservador de que las varianzas v_1 y v_2 son constantes en el número de choferes. La intuición indica que esto no será cierto y que v_1 y v_2 serán crecientes en la cantidad de integrantes del grupo, sin embargo, considerar esto resultará útil para separar dos análisis que serán fundamentales. Más tarde, en este mismo capítulo, se levantará el supuesto anterior y se estudiará cómo cambian las varianzas al aumentar los integrantes del grupo y cómo esto afecta el esfuerzo de cada chofer.

Conjuntamente, se considerará que los cambios de la producción total de t_l con respecto al incentivo β'_l (es decir $\frac{dG_{t_l}(a_{t_l}^1, a_{t_l}^2, \dots, a_{t_l}^{\#K})}{d\beta'_l}$) serán función del número de choferes ($\#K$), esto último $\forall l \in \{1, 2\}$. Así, se definirá $\frac{dG_l(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{d\beta'_1}$ como función del número de miembros del grupo de trabajo de la siguiente manera:

$$\frac{dG_{t_l}(a_{t_l}^1, a_{t_l}^2, \dots, a_{t_l}^{\#K})}{d\beta'_l} \quad \text{Con } \#K = \text{número de choferes} \quad (5.1)$$

Esta función será una función creciente, debido a que a medida que aumenta el número de conductores, se asumirá que el efecto de variar el pago β'_l afectará a más choferes, por lo que el cambio de $G_{t_l}(a_{t_l}^1, a_{t_l}^2, \dots, a_{t_l}^{\#K})$ será mayor. Además de creciente, se supondrá que $\frac{dG_{t_l}(a_{t_l}^1, a_{t_l}^2, \dots, a_{t_l}^{\#K})}{d\beta'_l}$ como función de $\#K$ será cóncava. Considerando todo lo anterior, la función se comportará de la siguiente manera:

- Para $\#K = 1 \Rightarrow \frac{dG_{t_l}(a_{t_l}^1, a_{t_l}^2, \dots, a_{t_l}^{\#K})}{d\beta'_l} = \frac{da_{t_l}}{d\beta'_l} \forall l \in \{1, 2\}$

$$\bullet \quad 0 \leq \frac{d\left(\frac{dG_{t_l}(a_{t_l}^1, a_{t_l}^2, \dots, a_{t_l}^{\#K})}{d\beta'_l}\right)}{d\#K} \quad \forall l \in \{1, 2\}, \forall K \in \mathbb{N}$$
(5.2)

Y se asumirá que:

$$\bullet \quad \frac{d^2\left(\frac{dG_{t_l}(a_{t_l}^1, a_{t_l}^2, \dots, a_{t_l}^{\#K})}{d\beta'_l}\right)}{d\#K^2} \leq 0 \quad \forall l \in \{1, 2\}, \forall K \in \mathbb{N}$$
(5.3)

La primera condición de (5.2) muestra que para $K=1$, es decir un chofer, $\frac{dG_{t_l}(a_{t_l}^1, a_{t_l}^2, \dots, a_{t_l}^{\#K})}{d\beta'_l} (\#K)$ será equivalente a $\frac{da_{t_l}}{d\beta'_l}$. De la segunda expresión de (5.2) se desprende que mientras mayor sea el número de conductores $\#K$, mayor será el efecto sobre la producción total G_{t_l} de variar el incentivo β'_l . A medida que aumenta el número de conductores, el efecto de modificar β'_l afectará a más choferes, lo que hará que altere en mayor medida a G_{t_l} . En (5.3) por su parte se plantea que a medida que aumenta el número de choferes, el efecto de este incremento sobre la $\frac{dG_{t_l}(a_{t_l}^1, a_{t_l}^2, \dots, a_{t_l}^{\#K})}{d\beta'_l}$ será decreciente.

Por otra parte, se podrán hacer consideraciones equivalentes a las anteriores para $\frac{dG_{t_l}(a_{t_l}^1, a_{t_l}^2, \dots, a_{t_l}^{\#K})}{d\beta'_j}$. Así, también se construirá $\frac{dG_{t_l}(a_{t_l}^1, a_{t_l}^2, \dots, a_{t_l}^{\#K})}{d\beta'_j}$ como función del número de choferes ($\#K$).

$$\frac{dG_{t_l}(a_{t_l}^1, a_{t_l}^2, \dots, a_{t_l}^{\#K})}{d\beta'_j}$$

Con $\#K$ =número de choferes

(5.4)

Esta esta nueva función será negativa, decreciente y cóncava y su comportamiento puede ser definido de la siguiente manera:

- Para $\#K = 1 \Rightarrow \frac{dG_{t_l}(a_{t_l}^1, a_{t_l}^2, \dots, a_{t_l}^{\#K})}{d\beta'_j} = \frac{da_{t_l}}{d\beta'_j} \forall l, j \in \{1, 2\} \wedge l \neq j$
- $\frac{d\left(\frac{dG_{t_l}(a_{t_l}^1, a_{t_l}^2, \dots, a_{t_l}^{\#K})}{d\beta'_j}\right)}{d\#K} \leq 0 \forall l, j \in \{1, 2\} \wedge l \neq j, \forall K \in \mathbb{N}$

(5.5)

Y

- $\frac{d^2\left(\frac{dG_{t_l}(a_{t_l}^1, a_{t_l}^2, \dots, a_{t_l}^{\#K})}{d\beta'_j}\right)}{d\#K^2} \geq 0 \forall l, j \in \{1, 2\} \wedge l \neq j, \forall K \in \mathbb{N}$

(5.6)

Ahora bien, Al considerar las dos funciones definidas recientemente como funciones monótonas y cóncavas en $\#K$. Es trivial notar que:

$$\begin{aligned}
 2 * \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{d\beta'_1} \underset{\text{Con } \#K=1}{\quad} - \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{d\beta'_1} \underset{\text{Con } \#K=2}{\quad} &\geq 0 \\
 2 * \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{d\beta'_2} \underset{\text{Con } \#K=1}{\quad} - \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{d\beta'_2} \underset{\text{Con } \#K=2}{\quad} &\geq 0 \\
 2 * \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{d\beta'_1} \underset{\text{Con } \#K=1}{\quad} - \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{d\beta'_1} \underset{\text{Con } \#K=2}{\quad} &\leq 0 \\
 2 * \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{d\beta'_2} \underset{\text{Con } \#K=1}{\quad} - \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{d\beta'_2} \underset{\text{Con } \#K=2}{\quad} &\leq 0
 \end{aligned}$$

(5.7)

Esto, al flexibilizar el dominio de $\#K$ de \mathbb{N} a \mathbb{Q}^+ .

Generalizando el análisis anterior, se pueden desprender las siguiente desigualdades.

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{n+1}{n}\right) \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{d\beta'_1} \underset{\text{Con } \#K=n}{\quad} - \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{d\beta'_1} \underset{\text{Con } \#K=n+1}{\quad} &\geq 0 \\
 \left(\frac{n+1}{n}\right) \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{d\beta'_2} \underset{\text{Con } \#K=n}{\quad} - \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{d\beta'_2} \underset{\text{Con } \#K=n+1}{\quad} &\geq 0 \\
 \left(\frac{n+1}{n}\right) \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{d\beta'_1} \underset{\text{Con } \#K=n}{\quad} - \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{d\beta'_1} \underset{\text{Con } \#K=n+1}{\quad} &\leq 0
 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right) \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{d\beta_2'} \Big|_{Con \#K=n} - \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{d\beta_2'} \Big|_{Con \#K=n+1} \leq 0 \quad (5.8)$$

Con lo anterior y con el apoyo de softwares de resolución matemática (lo cual es posible ver en el Anexo 15), fue posible mostrar que:

$$\begin{aligned} a_{t_1, Con \#K=1}^k &> a_{t_1, Con \#K=2}^k \quad y, \\ a_{t_1, Con \#K=n}^k &> a_{t_1, Con \#K=n+1}^k \end{aligned} \quad (5.9)$$

Por consiguiente, a través del método de inducción, es posible probar por inducción que $a_{t_1}^k$ es decreciente en $\#K$. Finalmente, por simetría, es posible esperar el mismo comportamiento para $a_{t_2}^k$.

Por otro lado, anteriormente se condicionó que las varianzas v_1 y v_2 serían constantes en el número de choferes del grupo. Sin embargo, esto no será necesariamente cierto, por lo que de aquí en adelante se levantará este supuesto para evaluar cómo varían los esfuerzos por efecto de las varianzas al modificarse el número de integrantes del grupo.

De esta forma, el análisis del modelo 1 entrega ciertas luces sobre este en la ecuación (3.59):

- $\frac{da_{t_1}}{dv_1} \leq 0 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, r, \sigma_{t_1}^2, \sigma_{t_2}^2, \vartheta_{q_{t_1}}^2, \vartheta_{q_{t_2}}^2, Utilidad_{Alt.}, PK \text{ y } PPT \in \mathbb{N}(C_1)$
 - $\frac{da_{t_2}}{dv_2} \leq 0 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, r, \sigma_{t_1}^2, \sigma_{t_2}^2, \vartheta_{q_{t_1}}^2, \vartheta_{q_{t_2}}^2, Utilidad_{Alt.}, PK \text{ y } PPT \in \mathbb{N}(C_1)$
- Con $v_1 = (\sigma_{t_1}^2 + \vartheta_{q_{t_1}}^2)$ y $v_2 = (\sigma_{t_2}^2 + \vartheta_{q_{t_2}}^2)$.

A partir, de esto y analizando el mismo comportamiento para el contexto grupal, se logra probar lo siguiente:

- $\frac{da_{t_1}^k}{dv_1} \leq 0 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, r, \sigma_{t_1}^2, \sigma_{t_2}^2, \vartheta_{q_{t_1}}^2, \vartheta_{q_{t_2}}^2, Utilidad_{Alt.}, PK \text{ y } PPT \text{ con } a_{t_i}^k \geq 0$
- $\frac{da_{t_2}^k}{dv_2} \leq 0 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, r, \sigma_{t_1}^2, \sigma_{t_2}^2, \vartheta_{q_{t_1}}^2, \vartheta_{q_{t_2}}^2, Utilidad_{Alt.}, PK \text{ y } PPT \text{ con } a_{t_i}^k \geq 0$

$$\text{Con } v_1 = \left(\#K\sigma_{t_1}^2 + \vartheta_{q_{t_1}}^2 \right) \text{ y } v_2 = \left(\#K\sigma_{t_2}^2 + \vartheta_{q_{t_2}}^2 \right).$$

(5.10)

Para más detalles, es posible ver cómo se llegó a esto en el Anexo 16.

Con esto, al notar que la varianza aumenta con el número de conductores será posible plantear que el esfuerzo también disminuirá con la cantidad de integrantes del grupo producto del aumento de la varianza.

Así, se concluye que los esfuerzos encomendados por choferes que se relacionan con un operador a través de un pago variable en la performance grupal disminuyen con el número de integrantes del grupo producto de dos efectos: *free riding* y aumento de la varianza.

6. DISCUSIÓN

En este capítulo se discutirán los principales hallazgos de este trabajo, para así posteriormente en el capítulo 7 plantear propuestas de políticas públicas concordantes con los descubrimientos descritos. Para esto se cruzarán las conclusiones de las modelaciones previamente expuestas con la literatura tendiente a analizar las condiciones laborales de los conductores del transporte público, aproximaciones legales a estos tópicos y documentos del Directorio de Transporte Público Metropolitano de Chile. Existirá un énfasis especial en la experiencia chilena, sin perjuicio de que las conclusiones pueden ser extrapolables a sistemas de transporte público de diversos países.

Considerando el estudio realizado en la sección 3.3 y lo analizado en el capítulo 5, hay tres temas que condicionan el trabajo de los choferes y que serán discutidos a continuación:

1. Condiciones laborales y salud en el trabajo
2. Estabilidad y predictibilidad de los resultados
3. Tamaño de los grupos de trabajo

El análisis de estos tópicos tendrá como finalidad estudiar las situaciones que influyen en la operación de los choferes, a la par de exponer sus causas y consecuencias específicas.

6.1. Condiciones laborales y salud en el trabajo

A continuación se analizará la salud en el trabajo de los choferes bajo la óptica de la productividad. Esta perspectiva planteará que al mejorar el entorno de trabajo de los choferes se podrá elevar el esfuerzo que ellos realizan en sus actividades diarias, disminuir los costos por horas extras y accidentes, licencias médicas y los derivados de la rotación.

Es fundamental declarar el uso de este enfoque en particular, ya que no es la única ni necesariamente la principal óptica bajo la cual se puede reflexionar sobre las

condiciones laborales y la salud en el trabajo de los choferes. De esta forma, existe un sinnúmero de perspectivas alternativas, como por ejemplo el Derecho Internacional y la óptica de los Derechos Humanos.

El enfoque del Derecho Internacional plantea a cada Estado la obligación de actualizar su legislación con el fin de hacerla compatible con los tratados firmados (Aldunate, 2010). De esta forma, Chile al aprobar el Convenio N° 187 sobre el Marco Promocional para la Seguridad y Salud en el Trabajo el 20 de enero del 2011 se compromete a promover la mejora constante de la seguridad y salud en el trabajo con el fin de prevenir las lesiones, enfermedades y muertes de los trabajadores (Biblioteca del Congreso Nacional, 2011). Esto debe lograrse mediante el desarrollo de una política, un sistema y un programa nacional particular para este tema (Ministerio de Relaciones Exteriores, 2011).

Finalmente, la visión desde la perspectiva de los Derechos Humanos plantea el derecho al trabajo como un derecho humano consagrado, tanto a nivel individual como colectivo. A partir de esta definición, se le fijan determinadas obligaciones a los Estados, principalmente a través del Pacto Internacional de Derechos Económicos, Sociales y Culturales (Nacionales Unidas, 1966; Molina, 2007). Estas responsabilidades pueden ser progresivas o instantáneas y abordan temas como salud, bienestar, alimentación, seguridad social y enfermedad. Por otra parte, la declaración reconoce el derecho al descanso, al disfrute del tiempo libre y a la limitación de la jornada laboral (Molina, 2007; Nacionales Unidas, 1966).

A pesar del invaluable aporte de estas perspectivas alternativas, se determinó utilizar el enfoque de productividad, ya que permite exponer las condiciones laborales de los choferes de los sistemas de transporte colectivo y relacionarlas con el nivel de servicio desarrollado.

La primera advertencia para pensar en una relación entre condiciones laborales y productividad se desprende de uno de los planteamientos de la sección 3.3.

Particularmente, esto se muestra en las inecuaciones (3.58), $\frac{da_{t1}}{d\alpha_3} \leq 0$ y $\frac{da_{t2}}{d\alpha_3} \leq 0$. Una de

las aproximaciones al análisis de esta expresión la entrega la Psicología Laboral y relaciona la carga mental con el *burn out*. A medida que el chofer se expone a situaciones de fatiga y estrés (carga mental), aumentará el nivel de *burnout* y así la dificultad de realizar las tareas (Olivares, Jélvez, Mena, & Lavarello, 2013; Matthews, 2002). Esto podría ajustarse en los modelos a través de un aumento en el ponderador del costo por multitasking (α_3), lo que determinará una disminución en el esfuerzo encomendado por el chofer en ambas tareas (a_{t_1} y a_{t_2}). De esta forma, es posible concluir que al disminuir la exposición a fatiga y estrés por parte de los choferes se podrían generar mayores esfuerzos y como consecuencia de eso elevar las condiciones de servicio.

A la par, existe basta literatura que expone que una reducción de la carga psicosocial logra aumentar la satisfacción laboral y la productividad, a la par de reducir la rotación y el ausentismo (Tse, Flin, & Mearns, 2006; Green, 2015; Long & Perry, 1985). Por lo anterior, es posible plantear que el efecto de mejorar la salud no solo logrará mejorar la productividad a través del incremento en el esfuerzo de los choferes, sino que también al disminuir el ausentismo, la rotación y los accidentes. Este hallazgo es fundamental, ya que existe literatura que plantea que los costos derivados por ausentismo, accidentes y rotación tiene significativos impactos en las empresas de transporte público (Long & Perry, 1985) (Navarro Sanchez, 2008; Salazar, 2017).

Por lo mismo, a continuación se estudiará en detalle la relación entre las condiciones laborales de los trabajadores con estos tres fenómenos (ausentismo, rotación y accidentes).

6.1.1. Ausentismo

Al estudiar más en profundidad el fenómeno del ausentismo, Winkleby *et al.* (1988) han mostrado consistentemente que los conductores de autobuses tienen más ausencias de mayor duración que los grupos de empleados de otras profesiones. Ellos comentan además que la diferencia aproximada de los niveles de absentismo entre los conductores de autobús y los grupos de control se encuentra en la región de dos a tres veces mayor

para los conductores, lo que conlleva un costo considerable en hora extras o multas por incumplimiento de servicio. Esto es concordante con estudios de choferes holandeses, los cuales plantean que la tasa promedio de ausentismo para los conductores de este país sería dos veces mayor que la del promedio de la población holandesa (Kompier, Mulders, Meijman, Boersma, Groen, & Bullinga, 1990; Mulders, Meijman, O'Hanlon, & Mulder, 1982).

Producto de alto nivel de ausentismo los trabajadores asistentes tienden a realizar horas extras para cubrir los turnos de sus colegas ausentes, aumentando la carga. Este aumento de la carga podrá producir fatiga y estrés en los conductores que se presenten, lo que finalmente aumentará la posibilidad de dolencias y ausencias futuras en estos últimos. Como consecuencia de lo descrito anteriormente, en Estados Unidos, las horas extras y los demás gastos derivados del ausentismo se puede estimar como un cuarto de lo invertido en transporte (Long & Perry, 1985).

6.1.2. Rotación

El trabajo desarrollado por Mulders *et al.* (1982) muestra que sólo uno de cada 10 conductores que salen de una empresa de transporte han llegado a la edad oficial de retiro (60 años). La jubilación anticipada pareciera ser la norma y, la mayoría de los conductores se retira a la edad de 47 debido a una incapacidad médica general. Estos resultados son concordantes con la literatura de la materia (Göbel, Springer, & Scherff, 1998; Kompier, Mulders, Meijman, Boersma, Groen, & Bullinga, 1990). Así, la alta rotación que caracteriza a este oficio genera mayores cargas para los trabajadores efectivos y costos derivados de preparar y conseguir nuevos empleados (Salazar, 2017).

A la par, la alta rotación producto de la jubilación anticipada y del poco atractivo del trabajo puede producir empresas con menos trabajadores de los necesarios (Salazar, 2017). Esto en conjunto con el ausentismo, podría generar altos costos de horas extras para el sistema.

6.1.3. Accidentes

Se ha mostrado una relación positiva entre la presión del tiempo y carga mental con los accidentes de buses (Greiner, Krause, Ragland, & Fisher, 1998). A su vez, Evans y Johansson (1998) han demostrado que los conductores sanos que trabajan en condiciones óptimas (y no con cargas de trabajo excesivas) será menos propenso a los accidentes (Evans & Johansson, 1998). Del mismo modo, Greiner et al. (1998) plantean que la falta de descansos garantizados combinados con el programa del ciclo inflexible causa fatiga, que es el principal factor de causalidad de los accidentes para los conductores de autobús, lo que es concordante con otros estudios (Hamed, Jaradat, & Easa, 1998).

6.1.4. Círculo vicioso de cargas excesivas a los choferes del transporte colectivo

Luego de estudiar la relación entre la carga mental con el aumento de ausentismo, rotación y accidentes, es posible notar la tendencia hacia un proceso circular que se retroalimenta. Esto se puede evidenciar de la siguiente forma: producto de cargas excesivas y prolongadas en el tiempo, existirá una tendencia a aumentar el absentismo, la rotación, los accidentes y a disminuir la productividad (*burn out*) (Olivares, Jélvez, Mena, & Lavarello, 2013; Kompier, Mulders, Meijman, Boersma, Groen, & Bullinga, 1990; Göbel, Springer, & Scherff, 1998; Mulders, Meijman, O'Hanlon, & Mulder, 1982; Greiner, Krause, Ragland, & Fisher, 1998; Hamed, Jaradat, & Easa, 1998). Todo esto, a su vez tenderá a aumentar la carga sobre los choferes presentes de las empresas de transporte público y con esto, se acrecentará la posibilidad de futuras ausencias, retiros y accidentes por parte estos conductores. Con esto, se instaura un círculo vicioso para el funcionamiento de la institución graficado a continuación:

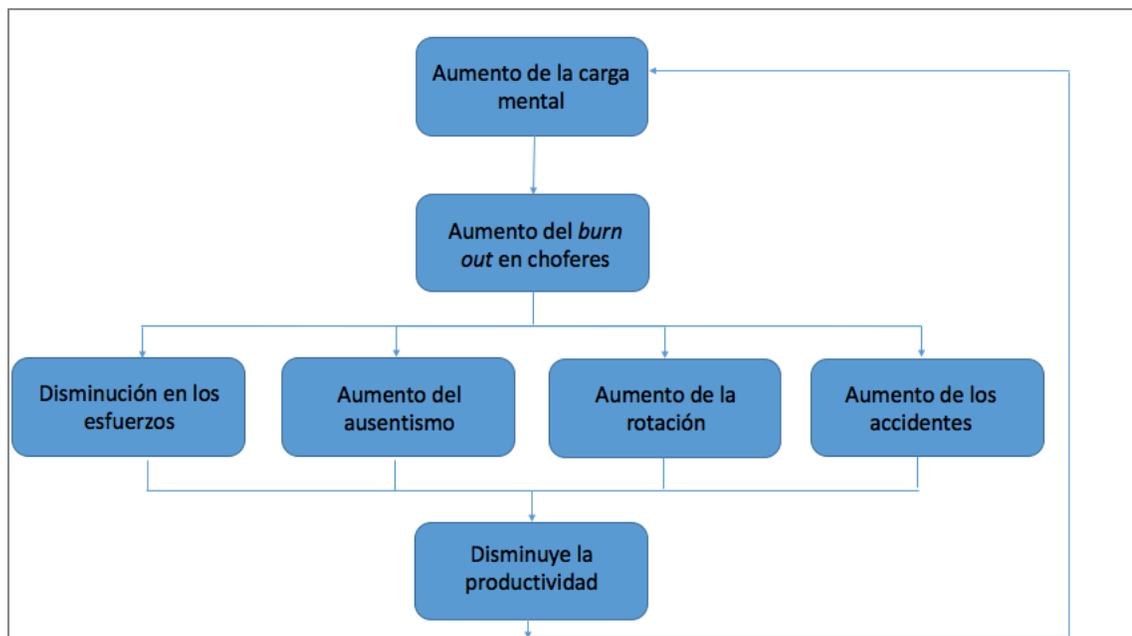


Ilustración 6-1: Ciclo vicioso de cargas excesivas

Fuente: Elaboración propia.

En síntesis, existe un círculo vicioso que debe romperse para elevar la productividad del sistema. Por lo tanto, prevenir consecuencias negativas en los conductores y atenuar los efectos nocivos para la organización a través de mejores condiciones parecería ir en la dirección correcta si se busca aumentar los esfuerzos de los conductores a la par de disminuir el ausentismo, la rotación del personal y los accidentes. Esto último, implicando además una disminución de costos de horas extras, capacitación, renovación de la flota, entre otros.

6.2. Estabilidad y predictibilidad de los resultados

Otro hallazgo de la sección 3.3 y del capítulo 5 es el que plantea que los esfuerzos de los conductores en una tarea disminuyen al aumentar la varianza de los resultados de dicha actividad. Esto se puede evidenciar particularmente en las ecuaciones (3.59) $\frac{da_{t_1}}{dv_1} \leq 0$ y

$\frac{da_{t_2}}{dv_2} \leq 0$ con $v_1 = (\sigma_{t_1}^2 + \vartheta_{q_{t_1}}^2)$ y $v_2 = (\sigma_{t_2}^2 + \vartheta_{q_{t_2}}^2)$ para contratos individuales y en la ecuación (5.10) $\frac{da_{t_1}^k}{dv_1} \leq 0$ y $\frac{da_{t_2}^k}{dv_2} \leq 0$ con $v_1 = (\#K\sigma_{t_1}^2 + \vartheta_{q_{t_1}}^2)$ y $v_2 = (\#K\sigma_{t_2}^2 + \vartheta_{q_{t_2}}^2)$ para contratos grupales.

Así, es posible mostrar que a medida que aumenta la componente variable, el conductor notará que una porción menor de su ingreso en relación a la situación anterior dependerá de sus decisiones, por lo que será menos atractivo realizar esfuerzos. Por esto, medidas que avancen en entregarles mayor certeza a los conductores aportarán al aumento de los esfuerzos, en específico, una mayor seguridad de que los resultados dependerán de su labor y no de componentes exógenos.

Otra razón para disminuir el efecto de factores exógenos en la conducción de los choferes es entregado por Olivares, Jélvez, Mena y Lavarello (2013). Ellos plantean que, en general, el trabajo realizado por los conductores del transporte público implica una alta carga mental y la percepción de no tener control sobre las actividades realizadas, lo cual tendría efectos nocivos para la salud de los trabajadores (Olivares, Jélvez, Mena, & Lavarello, 2013). Estos planteamientos han sido compartidos por otros investigadores (Kompier & Di Martino, 1995; Matthews, 2002). Así, producto de los argumentos entregados en la sección anterior, elevar las condiciones de los trabajadores, esta vez a través de una conducción confiable, permitirá una mayor productividad para las empresas de transporte.

Por lo anterior, una de las conclusiones que pueden desprenderse es que al priorizar y segregar el transporte colectivo no solo se perfeccionará la operación producto de las mejores condiciones de tráfico, sino que también producto del aumento en la productividad de los conductores. Esto, porque al disminuir o eliminar un componente exógena como la congestión, se logrará que los resultados de las actividades dependan en mayor medida de las decisiones del chofer y menos de componentes externos, aumentando así el esfuerzo realizado y disminuyendo los derivados negativos de la alta carga mental (ausentismo, rotación y accidentes).

6.3. Tamaño de los grupos de trabajo

Ahora bien, un descubrimiento relevante fue el descrito en la capítulo 5. Aquí se logró demostrar que el esfuerzo encomendado por los conductores disminuirá a medida que aumenta el número de integrantes del grupo de trabajo, considerando contratos grupales. De esta forma, el contrato óptimo deberá ser un contrato individual. Así, se mostró que los esfuerzos realizados por choferes en contratos de performance grupal disminuyen con el número de miembros del grupos como resultado de dos efectos: *free riding* y aumento de la varianza en los pagos.

El primer efecto es definido como un patrón de comportamiento seguido por individuos en trabajos grupales, en el que estos últimos no contribuyen de manera justa al esfuerzo colectivo como los demás miembros del equipo (Aggarwal & O'Brien, 2008). Esta conducta, que se vería acentuada al aumentar el número de integrantes del grupo, tendrá efectos negativos para el desempeño global. El segundo efecto, por su parte, fue descrito en la sección anterior como una disminución de los esfuerzos encomendados por los conductores producto del alto impacto de factores exógenos en sus resultados. De esta forma, en contextos de primas por desempeño del grupo, a medida que aumente el tamaño del grupo, el esfuerzo realizado por cada trabajador se verá disminuido.

A su vez, la literatura enfocada en propiciar medidas que resguarden la salud laboral de los conductores de transporte colectivo recomienda realizar un monitoreo individual de las condiciones de cada chofer. Aspectos como el estrés y la fatiga están íntimamente ligados a factores personales, como la personalidad de los conductores (Matthews, 2002).

Por lo anterior, es deseable acercarse hacia una relación personalizada entre las empresas de transporte y los choferes que trabajan en ellas. Esto con el fin de elevar la productividad a través de combatir el *free riding*, la varianza en los resultados y al incrementar las condiciones de salud de los choferes. De esta forma, contratos que premien a los conductores por sus desempeños individuales y monitoreo individual a las

condiciones de salud de cada chofer permitirán mejorar la performance de las empresas de transporte.

7. CONCLUSIONES

En esta investigación se desarrollaron dos modelos. El primero representa una relación contractual entre un operador y un chofer, en la cual el salario del conductor depende de su performance individual. El segundo modelo reproduce un contrato entre un operador y un grupo de choferes, en el cual el salario de cada conductor depende del resultado grupal.

A partir de estos modelos, fue posible examinar dos formas en las cuales los operadores de transporte colectivo incentivan a los choferes para capturar más pasajeros y recorrer más kilómetros. Se mostró que en el equilibrio, a medida que aumenta el número de trabajadores que se consideran dentro del pago variable, se harán menos atractivos los incentivos por el incremento del efecto de *free riding* y del costo relacionado con la varianza en el sueldo.

Luego fue posible discutir sobre las condiciones laborales y salud en el trabajo, la predictibilidad de los resultados y el tamaño de los grupos de trabajo. Gracias a esto, en este capítulo se anunciarán recomendaciones que puede acoger el Estado para elevar la calidad de sus sistemas de transporte colectivo. Así, se espera realizar recomendaciones de políticas públicas, a la par de esbozar qué efectos esperar de cada medida.

A continuación, se reflexionará sobre las limitaciones que presenta esta investigación. Esto con la finalidad de comprender las fronteras sobre los cuales se establecen las conclusiones expuestas.

Finalmente, se exhibirán futuras líneas de investigación que se derivan de este trabajo. Con esto, se busca contribuir al continuo desarrollo de una literatura robusta sobre los incentivos que podrían enfrentar los conductores de sistemas de transporte colectivos. Así, se entregarán distintas propuestas de investigación que desafíen los supuestos de

este trabajo, que complementen con distintas perspectivas y que se basen en las conclusiones aquí entregadas.

7.1. Recomendaciones de política pública

Después de discutir en profundidad los hallazgos de esta investigación, a continuación se plantearán sugerencias que podrían ser adoptadas para mejorar la productividad del sistema a la par de elevar las condiciones laborales de los trabajadores. Para esto se esbozarán medidas que buscan detener el círculo vicioso de cargas excesivas que fue presentado previamente, se entregarán propuestas para entregarle mayor certeza a los conductores sobre sus resultados y se darán recomendaciones para optimizar el número de integrantes de los grupos de trabajo.

Así, el primer hallazgo fue que disminuir la carga mental tenderá a aumentar la productividad de la firma, esta mejora se alcanzará mediante un incremento del esfuerzo por parte de los conductores y una reducción del ausentismo, la rotación y los accidentes. Previamente se definió la carga mental como un fenómeno enmarcado dentro de aspectos relacionados con la presión temporal de una tarea (tiempo disponible, tiempo necesario), la cantidad de recursos de procesamiento que demanda la tarea (recursos mentales, sensoriales, tipo de tarea) y aspectos de naturaleza emocional (fatiga, frustración, estrés) (Olivares, Jélvez, Mena, & Lavarello, 2013). Sumado a esto, otros factores que implican un posible menoscabo en la salud de los conductores son la violencia en el trabajo y la percepción de no tener control sobre las actividades (Tse, Flin, & Mearns, 2006; Matthews, 2002; Olivares, Jélvez, Mena, & Lavarello, 2013; Duffy & McGoldrick, 1990; Aronsson & Barklöf, 1980).

A la par de lo anterior, existe bastante literatura que expone que los choferes suelen realizar su trabajo en condiciones más perjudiciales que la población de control (Tse, Flin, & Mearns, 2006; Aronsson & Barklöf, 1980; Issever, Onen, Sabuncu, & Altunkaynak, 2002; Duffy & McGoldrick, 1990; Ragland, Greiner, Krause, Holman, & Fisher, 1995; Greiner, Krause, Ragland, & Fisher, 1998). De lo que surge un imperativo ético de

mejorar sus condiciones de vida y una oportunidad de mejorar los sistemas de transporte para todos los actores involucrados.

Además, fue posible descubrir que priorizar y segmentar el transporte público no solo perfecciona la operación producto de mejores condiciones de tráfico, sino que también como resultado de un aumento en la productividad de los conductores. Finalmente, se concluyó que tender a una relación personalizada en los incentivos y la inspección de la salud de cada chofer permitirá una mejor performance en la empresa.

Por lo anterior, se proponen las siguientes medidas apoyadas en los descubrimientos recientemente descritos:

1. *Disminuir el largo de las rutas:* El largo de la ruta ha sido estudiado como determinante del menoscabo de la salud de los conductores. De esta forma, un estudio de Pikus y Tarranikova (1975) y recogido por Tse, Flin y Mearns (2006) mostró una relación positiva entre el largo de la ruta y la presencia de hipertensión en los conductores (Tse, Flin, & Mearns, 2006). Además, estrés, depresión, problemas musco-esqueléticos y sensaciones paranoides pueden ser asociados positivamente con el largo del servicio (Duffy & McGoldrick, 1990; Tse, Flin, & Mearns, 2006). Así, cuando se observan, por ejemplo, ciclos de ida y vuelta de casi 100 kilómetros en la ciudad de Santiago existe una advertencia sobre las consecuencias nocivas que puede significar esto para los conductores y la necesidad de estudiar mecanismos que impliquen mayores descansos o ciclos menores para estos trabajadores (Google Maps, 2018).
2. *Turnos definidos y recorridos con holgura:* La irregularidad de los turnos ha sido asociada positivamente a enfermedades gastrointestinales en los conductores (Aronsson & Barklöf, 1980). A su vez, la percepción de no tener control sobre las acciones fue relacionada con consecuencias nocivas para la salud (Olivares, Jélvez, Mena, & Lavarello, 2013). Además, los choferes han declarado a los esquemas rígidos y rigurosos como uno de los mayores estresores de su trabajo (Tiznado, Galilea, Delgado, & Niehaus, 2014). Por lo anterior, se recomienda un

sistema de asignación de turnos claro para los conductores, con holguras que le permitan a los trabajadores contar con un descanso asegurado y le entregue la certeza de que el ciclo será cumplido.

3. *Mejora en la relación de los choferes con usuarios y jefes:* En la experiencia chilena, los conductores declaran que la relación con los usuarios y con sus jefes son el estresor numero uno y tres respectivamente (Tiznado, Galilea, Delgado, & Niehaus, 2014). A la par, problemas con pasajeros o supervisores pueden ser predictivos de dolores espinales y del cuello y el estrés en el trabajo ha sido relacionado positivamente con el abuso de alcohol, drogas y tabaco (Ragland, Greiner, Krause, Holman, & Fisher, 1995; Greiner, Ragland, Krause, & Syme, 1997; Tse, Flin, & Mearns, 2006). Por lo mismo, se recomienda (1) identificar los recorridos-horarios-días-sentido críticos en violencia hacia los conductores, (2) concientizar a la población general sobre el arduo trabajo de los choferes, (3) analizar la cultura organizacional de cada empresa de transporte público con el objetivo de intervenir de ser necesario y (4) monitorear individualmente el nivel de estrés percibido por los conductores en pos de aplicar mecanismos que resguarden su salud.
4. *Reparación de las consecuencias nocivas:* La evidencia recolectada muestra que las consecuencias nocivas que experimentan los choferes agrupan problemas físicos, como enfermedades cardiacas, hipertensión, problemas gastrointestinales o dolencias musco-esqueléticos, problemas psicológicos, como depresión, ansiedad y sensaciones paranoides, y problemas conductuales, como abuso de drogas, alcohol y tabaco. Algunas de las consecuencias han sido asociadas a la profesión como tal, y no ha podido definirse en torno a una tarea o característica en particular. Por esto, se vuelve fundamental (1) proporcionar a los conductores ayuda psicológica, médica y actividades recreativas que ayuden a elevar su calidad de vida, (2) monitorear constantemente e individualmente la salud de los trabajadores, (3) en caso de notar problemas, derivar tempranamente a los

especialistas pertinentes y (4) acompañar y apoyar los procesos que sean necesarios.

5. *Entregar salarios variables en el desempeño:* Una de las principales conclusiones obtenida es que si es posible identificar un contexto sub-óptimo de alguna actividad realizada por los conductores, se recomienda pagar primas variables en el desempeño individual de los choferes en dicha tarea. En caso de no tener el acceso tecnológico para un nivel individualizado de los salarios, se aconseja generar salarios variables en la performance grupal, creando grupos del menor número de miembros posibles.
6. *Priorizar y segmentar el transporte público:* Las consecuencias negativas del tráfico en los conductores han sido profusamente documentadas. Se han documentado una relación entre el alto nivel de vigilancia que exige manejar en tráfico mixto con dolor espinal y en el cuello (Tse, Flin, & Mearns, 2006). También implica un alto nivel de concentración, que también es un factor determinante del *burn-out* (Olivares, Jélvez, Mena, & Lavarello, 2013). A su vez, ha sido demostrado en esta investigación, que una mayor certeza en los resultados, la cual se obtiene priorizando y segmentando el transporte público del resto del tráfico, implica mayores esfuerzos de los choferes en sus tareas y por tanto, mayor productividad de las empresas de transporte. Por lo anterior, se recomienda entregar preferencias al transporte público, al separarlo del tráfico privado.
7. *Introducir tecnología:* La adopción de nuevas tecnologías puede traer consigo varios beneficios. En este sentido, si se desea pagar salarios variables, incluir mecanismos que permitan obtener información por conductor puede ser fundamental para lograr mayores esfuerzos de los choferes. A su vez, tecnologías que disminuyan la incerteza en los resultados medidos por los operadores, también entregarán más incentivos a los conductores a mejorar su operación. Introducir tecnología puede ser un aporte importante al alza del sistema, sin embargo, ninguna modificación tecnológica debe hacerse sin mediar acuerdo con

los conductores. Esto, ya que dichos cambios pueden aumentar el estrés, la percepción de descontrol o la tensión con los usuarios que ya perciben los conductores, y con ellos, perjudicar el servicio.

8. *Seguimiento prioritario a conductores de mayor experiencia:* Como indica la literatura, uno de los sub-grupos con mayor riesgo entre los conductores son los que llevas más tiempo trabajando en esta profesión (Ragland, Greiner, Krause, Holman, & Fisher, 1995). Entre las consecuencias que se pueden relacionar positivamente con el número de años de conducción están el consumo de alcohol semanal, el número de *heavy drinkers* y el consumo de drogas. Por lo anterior, se recomienda tener especial énfasis en el seguimiento de los conductores de mayor experiencia, con una preocupación particular en el abuso de estas sustancias.
9. *Monitoreo individual de las condiciones laborales:* Las consecuencias nocivas para la salud pueden presentarse aun tomando todas las medidas antes mencionadas. Por lo tanto, por el riesgo en la salud que implica este trabajo, se recomienda llevar un monitoreo personalizado de las condiciones de salud de los choferes. Esto implica la revisión constante de la salud física, psicológica y conductual. En caso de notar problemas de abuso de drogas y alcohol, se recomienda suspender la conducción temporal o permanentemente (Matthews, 2002).

7.2. Limitaciones de este trabajo

Comprender las restricciones de este trabajo es fundamental para considerar las conclusiones aquí expuestas de manera razonable. Por lo anterior, a continuación se expondrán las principales limitaciones encontradas.

La primera restricción surge del supuesto de que el aumento del esfuerzo de los choferes en transportar pasajeros o recorrer kilómetros será siempre positivo para el sistema. Esto no es necesariamente cierto, de hecho, el nivel de esfuerzo en trasladar pasajeros que maximiza el bienestar del sistema no es trivial, lo que puede ser demostrado a través de la experiencia chilena.

Durante el periodo de las micros amarillas en Santiago de Chile, previo a la instauración del Transantiago, los choferes recibían un porcentaje del boleto cortado de cada pasajero, lo que indujo a conductas indeseables de los conductores (Díaz, Gómez-Lobos, & Velasco, 2004). Este comportamiento fue denominado “guerra por el centavo”, y comprendía vulneraciones constantes a la ley de tránsito, acciones peligrosas para adelantar a otros choferes y otras conductas dañinas derivadas de la competencia entre conductores por captar pasajeros. Estas acciones ponían en riesgo la vida de peatones, usuarios y choferes (Díaz, Gómez-Lobos, & Velasco, 2004).

Como respuesta a este y otros fenómenos, en Santiago de Chile se realizó una gran transformación al sistema de transporte público. Esta reforma introdujo varias modificaciones, entre ellas, se realizó una licitación de uso de vías para la operación de buses por zonas, entregándole la exclusividad a determinadas empresas. Así, se definieron contratos de concesión, que en un inicio no incentivaban correctamente a los operadores a cumplir con los planes operaciones (Briones, 2009; Muñoz & Gschwender, 2008). Esto produjo graves problemas, como operadores que preferían no sacar los buses a las calles, o choferes que no se detenían en los paraderos a recoger pasajeros (Muñoz & Gschwender, 2008).

Este ejemplo nos permite vislumbrar que no es trivial encontrar el punto óptimo de esfuerzo encomendado por los choferes en transportar pasajeros que maximiza el bienestar social. En la misma línea, no existen indicios que planteen que cualquier esfuerzo adicional será siempre beneficioso ni tampoco evidencia sobre cuál es el nivel de esfuerzo en recorrer kilómetros que optimiza la felicidad de todos.

Por lo anterior, la conclusión principal es que los hallazgos expuestos en esta investigación relacionados a elevar los esfuerzos de los conductores en determinadas tareas, deben ser utilizados en contextos donde existan indicios de esfuerzos sub-óptimos en dichas actividades. Ejemplo de esto son las situaciones en las cuales los choferes no se detienen para recoger pasajeros. Esto ocurre principalmente en los

recorridos nocturnos, en los cuales puede notarse que existe un nivel sub-óptimos a la hora de transportar a los usuarios (CEDEUS, 2017).

La segunda limitación de esta investigación fue que las conclusiones sobre los comportamientos de los conductores fueron obtenidas teóricamente. Por lo anterior, se debe comprender que los hallazgos expuestos derivan de una base teórica que contiene una serie de supuestos, que pueden alejar los resultados de la realidad. Así, los supuestos que presenta la Teoría de Elección Racional y la Teoría de Contratos fueron expuestos y clarificados en el capítulo 2 de este documento y deberán ser considerados a la hora de utilizar las conclusiones entregadas.

Particularmente, uno de las críticas habituales a la Teoría de Elección Racional es que considera que las decisiones de los individuos son racionales y conscientes, cuando gran parte de las elecciones son situacionales, dependiendo de factores emocionales y ambientales (Levin & Milgrom, 2004). En el contexto estudiado, los factores situacionales podrían tener una mayor preponderancia, por lo exigente del contexto en cuestión (Tse, Flin, & Mearns, 2006; Matthews, 2002). Así, es posible que las decisiones del conductor sean más basadas en heurísticas y menos en valoraciones conscientes y estables en el tiempo que lo que establecen los modelos.

7.3. Futuras líneas de investigación

La investigación sobre los incentivos a los cuales se enfrentan los conductores del transporte público no ha sido prioridad en los espacios académicos. Por lo mismo, existe una amplia gama de posibilidades de expandir el conocimiento actual en este tema. A continuación, se expondrá algunas recomendaciones que surgen del conocimiento adquirido durante esta investigación.

Las conclusiones aquí expuestas fueron obtenidas en su gran mayoría a través de modelaciones con base teóricas y bibliografía de experiencias internacionales. Por lo anterior, será fundamental complementar las recomendaciones entregadas a través del análisis de respuestas reales en contextos específicos. Esto tendrá gran utilidad, ya que servirá para confirmar, matizar o rebatir las conclusiones entregadas. En particular, se

recomienda investigar cómo responderán los choferes, controlando por edad, género, ruta, horario, tipo de día y otros factores que podrían ser relevantes, ante:

- Salarios fijos, salarios variables por grupos grandes, salarios variables por grupos pequeños y salarios variables por performance individual
- Mejores condiciones laborales
- Disminución de la varianza en los resultados

También, se recomienda investigar mecanismos que contribuyan a la certeza en las decisiones del chofer. Como fue posible mostrar en esta investigación, el trabajo de los conductores se caracteriza por necesitar de una alta carga mental y la percepción de no tener el control sobre las actividades realizadas (Olivares, Jélvez, Mena, & Lavarello, 2013). De esta forma, algunos intentos por mejorar la operación del servicio de buses han buscado integrar tecnologías de información en tiempo real, las cuales entregan órdenes a los conductores. Esto teóricamente podría tender a alivianar la carga mental al tomar menos decisiones, sin embargo también podría aumentar aún más la percepción de no tener control sobre las tareas ejecutadas, con las consecuencias nocivas que esto puede tener. Además, estas tecnologías aún no solucionan el impacto que mayores tiempos de espera, aparentemente sin motivos, podrían causar en la relación con los usuarios. Esto se hace más grave al notar que existen experiencias en las cuales los choferes declaran como el máximo estresor la actitud y relación con los pasajeros (Tiznado, Galilea, Delgado, & Niehaus, 2014).

Por esto último, se vuelve fundamental estudiar la forma de introducir nuevas tecnologías que contribuyan a mejorar el sistema, preservando la salud, seguridad y comodidad de los principales actores involucrados.

Finalmente, al recopilar información sobre las condiciones laborales de los conductores del transporte público, se puede notar la escasez de material sobre estos últimos en las ciudades de Latinoamérica. Esto debe ser motivo de preocupación, ya que esta región presenta una creciente precariedad laboral, lo cual podría acentuar las consecuencias nocivas para los conductores (Busso, 2001). Por lo mismo, si los resultados son

alarmantes al revisar la literatura actual, pueden ser más graves aún en contextos de vulneración. Muestra de esto es el trabajo de Tiznado, Galilea, Delgado y Niehaus (2014), que plantea que en la experiencia de Santiago de Chile la legislación sobre descanso y duración máxima de los turnos en la práctica no siempre se respeta, producto del alto nivel de ausentismo, de accidentes en la ruta y la falta de choferes en el mercado laboral.

8. BIBLIOGRAFÍA

Aggarwal, P., & O'Brien, C. (2008). Social loafing on group projects: Structural antecedents and effect on student satisfaction. *Journal of Marketing Education* , 30 (3), 255–64.

Aldunate, E. (2010). LA POSICIÓN DE LOS TRATADOS INTERNACIONALES EN EL SISTEMA DE FUENTES DEL ORDENAMIENTO JURÍDICO CHILENO A LA LUZ DEL DERECHO POSITIVO. *Ius et Praxis* , 16 (2), 185 - 210.

Amaral, M., Saussier, S., & Yvrande-Billon, A. (2009). Auction procedures and competition in public services: The case of urban public transport in France and London. *Utilities Policy* , 17 (2), 166-175.

Ariely, D., Loewenstein, G., & Prelec, D. (2003). “Coherent Arbitrariness”: Stable Demand Curves Without Stable Preferences. *The Quarterly Journal of Economics* , 118, 73-106.

Aronsson, G., & Barklöf, K. (1980). *Work environment for local public transport personnel: Work conditions-health-leisure activities*. Stockholm University, Department of Psychology, Stockholm.

Arrow, K. (1971). *Essays on the Theory of Risk Bearing*.

Asensio, J., Matas, A., & Raymond, J. (2001). *Efectos redistributivos de las subvenciones al transporte público en áreas urbanas*. Department of Applied Economics at Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona.

Bellemare, M., & Brown, Z. (2010). On the (Mis)Use of Wealth as a Proxy for Risk Aversion. *American Journal of Agricultural Economics* , 92, 273–282.

Biblioteca del Congreso Nacional. (2011). *Ministerio de Relaciones Exteriores*. Recuperado el 21 de febrero de 2018, de PROMULGA EL CONVENIO N° 187 SOBRE MARCO PROMOCIONAL PARA LA SEGURIDAD Y SALUD EN EL TRABAJO

DE LA ORGANIZACIÓN INTERNACIONAL DEL TRABAJO:
https://www.leychile.cl/Consulta/m/norma_plana?org=&idNorma=1028776

Bolton, P., & Dewatripont, M. (2005). *Contract Theory*. Cambridge, Massachusetts: The MIT press.

Briones, I. (2009). Transantiago: un problema de información. *Estudios Públicos* , 116, 37-91.

Busso, G. (2001). *Vulnerabilidad social: nociones e implicancias de políticas para Latinoamérica a inicios del siglo XXI*. Documento para el Seminario Internacional "Las Diferentes expresiones de la Vulnerabilidad Social en América Latina y el Caribe", Comisión Económica Para América Latina y el Caribe - CEPAL, División de Población.

Cooper, C., Dewe, P., & O'Driscoll, M. *Organizational stress: A review and critique of theory, research, and applications*. London: Sage.

Cunradi, C., Greiner, B., Ragland, D., & Fisher, J. (2003). Burnout and alcohol problems among urban transit operators in San Francisco. *Addictive Behaviors* , 28 (1), 91-109.

Chaparro, I. (2002). Evaluación del impacto socioeconómico del transporte urbano en la ciudad de Bogotá: El caso del sistema de transporte masivo, Transmilenio. *United Nations Publications* , 48.

Daganzo, C. (2010). Public transportation systems: Basic principles of system design. *Operations Planning and Real-Time Control* .

Díaz, G., Gómez-Lobos, A., & Velasco, A. (357 de 2004). Micros en Santiago: de enemigo público a servicio público. *Centro de Estudios Públicos* .

Duffy, C., & McGoldrick, A. (1990). Stress and the bus driver in the UK transport industry. *Work & Stress* , 4, 17–27.

Evans, G., & Johansson, G. (1998). Urban bus driving: An international arena for the study of occupational health psychology. *Journal of Occupational Health Psychology* , 3, 99–108.

- Gil-Monte, P. (2011). The Influence of Guilt on the Relationship Between Burnout and Depression. *European Psychologist* , 17, 231-236.
- Göbel, M., Springer, J., & Scherff, J. (1998). Stress and strain of short haul bus drivers: Psychophysiology as a design oriented method for analysis. *Ergonomics* , 41, 563–580.
- Google Maps. (27 de febrero de 2018). *Google Maps*. Recuperado el 27 de febrero de 2018, de <https://www.google.cl/maps?source=tldsi&hl=es>
- Green, S. (15 de agosto de 2015). The Research Is Clear: Long Hours Backfire for People and for Companies. *Harvard Business Review* .
- Greiner, B., Krause, N., Ragland, D., & Fisher, J. (1998). Objective stress factors, accidents, and absenteeism in transit operators: A theoretical framework and empirical evidence. . *Journal of Occupational Health Psychology* , 3, 130–146.
- Greiner, B., Ragland, D., Krause, N., & Syme, S. (1997). Objective measurement of occupational stress factors—an example with San Francisco urban transit operators. *Journal of Occupational Health Psychology* , 2, 325–342.
- Hamed, M., Jaradat, A., & Easa, S. (1998). Analysis of commercial mini-bus accidents. *Accident Analysis and Prevention* , 30, 555–567.
- Harris, M., & Raviv, A. (1979). Optimal Incentive Contracts with Imperfect Information. *Journal of economic theory* . , 20 (2), 231-259.
- Haubrich, J. (1994). Risk Aversion, Performance Pay, and the Principal-Agent Problem. *Journal of Political Economy* , 102 (2), 258-276.
- Hensher, D., & Stanley, J. (2010). Contracting regimes for bus services: What have we learnt after 20 years? . *Research in Transportation Economics* , 29 (1), 140-144.
- Hensher, D., & Wallis, I. (2005). Competitive tendering as contracting mechanism for subsidising transport: the bus experience. *Journal of Transport Economics and Policy (JTEP)* , 39 (3), 295-322.

- Hobfoll, S., & Shirom, A. (2001). Conservation of resources theory: Applications to stress and management in the workplace. *Handbook of organizational behavior* , 57-80.
- Holmstrom, B., & Milgrom, P. (1991). Multitask Principal-Agent Analyses: Incentive Contracts, Asset Ownership, and Job Design. *Journal of Law, Economics, & Organization* , 7, 24–52.
- Hölmstrom. (1979). Moral Hazard and observability. *The Bell Journal of economics* , 74-91.
- Holsmtröm, B. (1982). Moral Hazard in Teams. *The bell Journal of Economics* , 324-340.
- Introduction to Choice Theory, J. L. (Septiembre de 2004). *Stanford University*. Recuperado el 21 de Agosto de 2017, de Jonathan Levin: Teaching and Lecture Notes: <https://web.stanford.edu/~jdlevin/Econ%20202/Choice%20Theory.pdf>
- Issever, H., Onen, L., Sabuncu, H., & Altunkaynak, O. (2002). Personality characteristics, psychological symptoms and anxiety levels of drivers in charge of urban transportation in Istanbul. . *Occupational Medicin* , 52, 297–303.
- Janelle, C., Singer, R., & Williams, A. (1999). External distraction and attentional narrowing: Visual search evidence. *Journal of Sport & Exercise Psychology* , 21, 70–91.
- Johnson, R. M., Reiley, D., & Muñoz, J. (2005). "The War for the Fare": How Driver Compensation Affects Bus System Performance. *National Bureau of Economic Research* (w11744).
- Kahneman, D. (2003). Maps of Bounded Rationality: Psychology for Behavioral Economics. *The American Economic Review* , 93 (5), 1449-1475.
- Kahneman, D., & Tversky, A. (1979). Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk. *Econometrica* , 47 (2), 263-292.
- Kompier, M., & Di Martino, V. (1995). Review of bus drivers' occupational stress and stress prevention. *Stress Medicine* , 11 (4), 253-262.

Kompier, M., Mulders, H., Meijman, T., Boersma, M., Groen, G., & Bullinga, R. (1990). Absence behaviour, turnover and disability. A study among city bus drivers in the Netherlands. *Work & Stress* , 4, 83–89.

Levin, & Milgrom. (2004). *Introduction to Choice Theory*. Stanford University.

Long, I., & Perry, J. (1985). Economic and occupational causes of transit operator absenteeism: A review of research. *Transport Reviews* , 5, 247-267.

Madrian, B., & Shea, D. (Noviembre de 2001). The Power of Suggestion: Inertia in 401(k) Participation and Savings Behavior. *The Quarterly Journal of Economics* , 1149–1187.

Matthews, G. (2002). Towards a transactional ergonomics for driver stress and fatigue. *Theoretical Issues in Ergonomics Science* , 3, 195-211.

Ministerio de Relaciones Exteriores. (2011). PROMULGA EL CONVENIO No 187 SOBRE MARCO PROMOCIONAL PARA LA SEGURIDAD Y SALUD EN EL TRABAJO DE LA ORGANIZACIÓN INTERNACIONAL DEL TRABAJO. *Conferencia General de la Organización Internacional del Trabajo*. Santiago: Biblioteca del Congreso Nacional de Chile.

Molina, A. (2007). Aproximaciones sobre el derecho al trabajo desde la perspectiva de los derechos humanos. *Estudios Socio-jurídicos* , 9, 166-189.

Mulders, H., Meijman, T., O'Hanlon, J., & Mulder, G. (1982). Differential psychophysiological reactivity of city bus drivers. *Ergonomics* , 25, 1003–1011.

Muñoz, J., Batarce, M., & Hidalgo, D. (2014). Transantiago, five years after its launch. *Research in Transportation Economics* , 48, 184-193.

Nacionales Unidas. (1966). *Pacto Internacional de Derechos Económicos, Sociales y Culturales*. Recuperado el 21 de Febrero de 2018, de Pacto Internacional de Derechos Económicos, Sociales y Culturales: <http://www.ohchr.org/SP/ProfessionalInterest/Pages/CESCR.aspx>

- Navarro Sanchez, L. (2008). *Satisfacción laboral y rotación de personal en empresas de transporte público de pasajeros*. Tesis para obtener el grado de maestría en Ciencias, Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Comercio y Administración, México, D.F.
- Nicholson, W. (2006). *Teoría microeconómica, principios básicos y ampliaciones*. Madrid, España: Thomson.
- Olivares, V., Jélvez, C., Mena, L., & Lavarello, J. (2013). Studies on burnout and mental workload in drivers of public transportation in Chile (Transantiago). *Ciencia y Trabajo*, 15 (48), 173-178.
- Peltzman, S. (1975). The effects of automobile safety regulation. *Journal of Political Economy*, 83 (4), 677-725.
- Piacenza, M. (2006). Regulatory contracts and cost efficiency: Stochastic frontier evidence from the Italian local public transport. *Journal of Productivity Analysis*, 25 (3), 257-277.
- Pratt, J. (1964). Risk Aversion in the Small and in the Large. *Econometrica*.
- Rabin, M. (2000). Risk Aversion and Expected-utility Theory: A Calibration Theorem. *Econometrica*, 68 (5), 1281–1292.
- Ragland, D., Greiner, B., Krause, N., Holman, B., & Fisher, J. M. (1995). Occupational and nonoccupational correlates of alcohol consumption in urban transit operators. *Preventive Medicine*, 24, 634–645.
- República de Chile. (2017). *Ley de Presupuestos del Sector Público año 2017*. Recuperado el 20 de Septiembre de 2017, de http://www.dipres.gob.cl/572/articles-149470_Ley_de_Presupuestos_2017_V2.pdf
- Rizzi, L., & De La Maza, C. (2017). The external costs of private versus public road transport in the Metropolitan Area of Santiago, Chile. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 98, 123-140.

- Rolo, G., Díaz, D., & Hernández, E. (2009). Development of a Subjective Mental Workload Scale (SCAM). *Revista de Psicología del Trabajo y de las Organizaciones* , 25 (1), 29-37.
- Ross, S. (1973). The Economic Theory of Agency: The Principal's Problem. *The American Economic Review* , 63, 134-139.
- Salazar, G. (18 de abril de 2017). Condiciones de operación y laborales Alsacia y Express. (J. M. De la Vega, Entrevistador) Santiago, Región Metropolitana, Chile.
- Spence, M., & Zeckhauser, R. (1971). Insurance, Information, and Individual Actions. *The American Economic Review* , 61, 380-387.
- Tiznado, I., Galilea, P., Delgado, F., & Niehaus, M. (2014). Incentive schemes for bus drivers: The case of the public transit system in Santiago, Chile. *Research in Transportation Economics* , 48, 77-83.
- Transmilenio S.A. (2017). *Transmilenio S.A.* Recuperado el 5 de Julio de 2017, de RESOLUCIÓN No. 713 de noviembre 20 de 2015: http://www.transmilenio.gov.co/Publicaciones/la_entidad/transparencia_y_acceso_a_la_informacion_publica_transmilenio/5_presupuesto/presupuesto_aprobado_2016.
- Tse, J., Flin, R., & Mearns, K. (2006). Bus driver well-being review: 50 years of research. *Transportation Research Part F: Traffic Psychology and Behaviour* , 9 (2), 89-114.
- Tversky, A., & Kahneman, D. (1974). Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases. *Science* , 185 (4157), 1124-1131.
- Uncertainty, C. u. (Octubre de 2006). *Staford University*. Recuperado el 3 de Septiembre de 2017, de Jonathan Levin: Teaching and Lecture Notes : <https://web.stanford.edu/~jdlevin/Econ%20202/Uncertainty.pdf>
- Winkleby, M., Ragland, D., Fisher, J., & Syme, S. (1988). Excess risk of sickness and disease in bus drivers: A review and synthesis of epidemiological studies. *International Journal of Epidemiology* , 17, 255-261.

ANEXOS

Anexo 1. Demostración de un máximo local mediante la condición de segundo orden del Lagrangeano del chofer en el modelo 1.

Para constatar que los puntos encontrados máximos, se debe revisar la condición de segundo orden $d^2L^{chof}/da_i^2 < 0$. De esta forma, se tiene que:

$$\frac{d^2L^{chof}}{da_{t_1}^2} = \beta_1 \frac{d^2g(a_{t_1})}{da_{t_1}^2} - \alpha_1 \frac{d^2h_1(a_{t_1})}{da_{t_1}^2} < 0$$

Lo cual debido a la definición de los Costos Personales es negativo. De la misma forma, se constata para $d^2L^{chof}/da_{t_2}^2$.

$$\frac{d^2L^{chof}}{da_{t_2}^2} = \beta_2 \frac{d^2g(a_{t_2})}{da_{t_2}^2} - \alpha_2 \frac{d^2h_2(a_{t_2})}{da_{t_2}^2} < 0$$

Con esto, se verifica que los puntos $\frac{dL^{chof}}{da_{t_1}} = 0$ y $\frac{dL^{chof}}{da_{t_2}} = 0$ son máximos.

Anexo 2. Demostración de un máximo local mediante la condición de segundo orden del Lagrangeano del operador en el modelo 1.

Para determinar si los puntos estudiados son efectivamente máximos, se revisará si la segunda derivada del Lagrangeano es negativa. Para esto, se mostrarán a continuación dichas expresiones:

$$\frac{d^2L^{op}}{d\beta_1^2} = \frac{da_{t_1}}{d\beta_1} \left[-2\alpha_1 \left(\frac{da_{t_1}}{d\beta_1} \right) - \alpha_3 \left(\frac{da_{t_2}}{d\beta_1} \right) \right] + \frac{da_{t_2}}{d\beta_1} \left[-2\alpha_2 \left(\frac{da_{t_2}}{d\beta_1} \right) - \alpha_3 \left(\frac{da_{t_1}}{d\beta_1} \right) \right] - r (\sigma_{t_1}^2 + \vartheta_{a_{t_1}}^2)$$

$$\frac{d^2L^{op}}{d\beta_2^2} = \frac{da_{t_1}}{d\beta_2} \left[-2\alpha_1 \left(\frac{da_{t_1}}{d\beta_2} \right) - \alpha_3 \left(\frac{da_{t_2}}{d\beta_2} \right) \right] + \frac{da_{t_2}}{d\beta_2} \left[-2\alpha_2 \left(\frac{da_{t_2}}{d\beta_2} \right) - \alpha_3 \left(\frac{da_{t_1}}{d\beta_2} \right) \right] - r (\sigma_{t_2}^2 + \vartheta_{a_{t_2}}^2)$$

Ahora bien, evaluando estas expresiones, se tiene:

$$\frac{d^2L^{op}}{d\beta_1^2} = -\frac{2\alpha_2}{4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2} \left(\frac{2\alpha_1 * 2\alpha_2 - (\alpha_3)^2}{4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2} \right) - \frac{\alpha_3}{4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2} \left(\frac{2\alpha_2\alpha_3 - 2\alpha_2\alpha_3}{4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2} \right) - r(\sigma_{t_1}^2 + \vartheta_{q_{t_1}}^2)$$

$$\frac{d^2L^{op}}{d\beta_1^2} = -\frac{2\alpha_2}{4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2} \left(\frac{2\alpha_1 * 2\alpha_2 - (\alpha_3)^2}{4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2} \right) - r(\sigma_{t_1}^2 + \vartheta_{q_{t_1}}^2) < 0$$

$$\frac{d^2L^{op}}{d\beta_2^2} = \frac{-\alpha_3}{4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2} \left(\frac{2\alpha_1\alpha_3 - 2\alpha_1\alpha_3}{4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2} \right) - \frac{2\alpha_1}{4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2} \left(\frac{2\alpha_1 * 2\alpha_2 - (\alpha_3)^2}{4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2} \right) - r(\sigma_{t_2}^2 + \vartheta_{q_{t_2}}^2)$$

$$\frac{d^2L^{op}}{d\beta_2^2} = -\frac{2\alpha_1}{4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2} \left(\frac{2\alpha_1 * 2\alpha_2 - (\alpha_3)^2}{4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2} \right) - r(\sigma_{t_2}^2 + \vartheta_{q_{t_2}}^2) < 0$$

Las cuales son negativas ya que $\alpha_1, \alpha_2 > \alpha_3$. Con esto se constata que se está en presencia de un máximo local en los puntos estudiados.

Anexo 3. Términos positivos en el contrato óptimo del Modelo 1

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & \text{> } a[t1] := \frac{2 \cdot \text{beta}[1] \cdot \text{alpha}[2] - \text{alpha}[3] \text{beta}[2]}{(4 \cdot \text{alpha}[1] \cdot \text{alpha}[2]) - \text{alpha}[3]^2}; \\
 & \qquad \qquad \qquad a_{t1} := \frac{2 \alpha_2 \beta_1 - \alpha_3 \beta_2}{4 \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2} \\
 & \text{> } a[t2] := \frac{2 \cdot \text{beta}[2] \cdot \text{alpha}[1] - \text{alpha}[3] \text{beta}[1]}{(4 \cdot \text{alpha}[2] \cdot \text{alpha}[1]) - \text{alpha}[3]^2}; \\
 & \text{> } \text{ter7} := L + \text{beta}[1] \cdot a[t1] + \text{beta}[2] \cdot a[t2] - \text{alpha}[1] \cdot (a[t1])^2 - \text{alpha}[2] \cdot (a[t2])^2 \\
 & \qquad - \text{alpha}[3] \cdot a[t1] \cdot a[t2] - \frac{r}{2} \cdot ((\text{beta}[1])^2 \cdot (v) + (\text{beta}[2])^2 \cdot (b)) - U;
 \end{aligned} \right. \tag{1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & \text{> } da1b1 := \text{diff}(a[t1], \text{beta}[1]); \\
 & \text{> } da1b2 := \text{diff}(a[t1], \text{beta}[2]); \\
 & \text{> } da2b1 := \text{diff}(a[t2], \text{beta}[1]); \\
 & \text{> } da2b2 := \text{diff}(a[t2], \text{beta}[2]); \\
 & \text{> } L; \\
 & \text{> } km; \\
 & \text{> } PPT; \\
 & \text{> } \text{Lagr1} := da1b1 \cdot (PPT - \text{alpha}[1] \cdot 2 \cdot a[t1] - \text{alpha}[3] \cdot a[t2]) + da2b1 \cdot (PK - \text{alpha}[2] \cdot 2 \\
 & \qquad \cdot a[t2] - \text{alpha}[3] \cdot a[t1]) - r \cdot \text{beta}[1] \cdot v; \\
 & \text{> } \text{Lagr2} := da1b2 \cdot (PPT - \text{alpha}[1] \cdot 2 \cdot a[t1] - \text{alpha}[3] \cdot a[t2]) + da2b2 \cdot (PK - \text{alpha}[2] \cdot 2 \\
 & \qquad \cdot a[t2] - \text{alpha}[3] \cdot a[t1]) - r \cdot \text{beta}[2] \cdot b; \\
 & \text{> } \text{solve}(\{\text{Lagr1} = 0, \text{Lagr2} = 0, \text{ter7} = 0\}, \{\text{beta}[1], \text{beta}[2], L\}); \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 & L = \frac{1}{2} \left(128 U b^2 r^4 v^2 \alpha_1^3 \alpha_3^3 - 96 U b^2 r^4 v^2 \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2 + 24 U b^2 r^4 v^2 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3^4 \right. \\
 & \qquad - 2 U b^2 r^4 v^2 \alpha_3^6 + 4 PK^2 b^2 r^3 v \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3^2 - PK^2 b^2 r^3 v \alpha_3^4 + 16 PK^2 b r^3 v^2 \alpha_1^3 \alpha_2 \\
 & \qquad - 4 PK^2 b r^3 v^2 \alpha_1^2 \alpha_3^2 - 16 PK PPT b^2 r^3 v \alpha_1 \alpha_2^2 \alpha_3 + 4 PK PPT b^2 r^3 v \alpha_2 \alpha_3^3 \\
 & \qquad - 16 PK PPT b r^3 v^2 \alpha_1^2 \alpha_2 \alpha_3 + 4 PK PPT b r^3 v^2 \alpha_1 \alpha_3^3 + 16 PPT^2 b^2 r^3 v \alpha_1 \alpha_2^3 \\
 & \qquad - 4 PPT^2 b^2 r^3 v \alpha_2^2 \alpha_3^2 + 4 PPT^2 b r^3 v^2 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3^2 - PPT^2 b r^3 v^2 \alpha_3^4 + 128 U b^2 r^3 v \alpha_1^2 \\
 & \qquad \left. \alpha_2^3 - 64 U b^2 r^3 v \alpha_1 \alpha_2^2 \alpha_3^2 + 8 U b^2 r^3 v \alpha_2 \alpha_3^4 + 128 U b r^3 v^2 \alpha_1^3 \alpha_2^2 - 64 U b r^3 v^2 \right.
 \end{aligned} \right\} \tag{2}
 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha_1^2 \alpha_2 \alpha_3^2 + 8 U b r^3 v^2 \alpha_1 \alpha_3^4 - 2 PK^2 b^2 r^2 \alpha_2 \alpha_3^2 + 16 PK^2 b r^2 v \alpha_1^2 \alpha_2 \\
& - 8 PK^2 b r^2 v \alpha_1 \alpha_3^2 - 8 PK^2 r^2 v^2 \alpha_1^3 + 8 PK PPT b^2 r^2 \alpha_2^2 \alpha_3 \\
& - 8 PK PPT b r^2 v \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + 6 PK PPT b r^2 v \alpha_3^3 + 8 PK PPT r^2 v^2 \alpha_1^2 \alpha_3 \\
& - 8 PPT^2 b^2 r^2 \alpha_2^3 + 16 PPT^2 b r^2 v \alpha_1 \alpha_2^2 - 8 PPT^2 b r^2 v \alpha_2 \alpha_3^2 - 2 PPT^2 r^2 v^2 \alpha_1 \alpha_3^2 \\
& + 32 U b^2 r^2 \alpha_1 \alpha_2^3 - 8 U b^2 r^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2 + 128 U b r^2 v \alpha_1^2 \alpha_2^2 - 48 U b r^2 v \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3^2 \\
& + 4 U b r^2 v \alpha_3^4 + 32 U r^2 v^2 \alpha_1^3 \alpha_2 - 8 U r^2 v^2 \alpha_1^2 \alpha_3^2 + 4 PK^2 b r \alpha_1 \alpha_2 - 3 PK^2 b r \alpha_3^2 \\
& - 8 PK^2 r v \alpha_1^2 + 8 PK PPT b r \alpha_2 \alpha_3 + 8 PK PPT r v \alpha_1 \alpha_3 - 8 PPT^2 b r \alpha_2^2 \\
& + 4 PPT^2 r v \alpha_1 \alpha_2 - 3 PPT^2 r v \alpha_3^2 + 32 U b r \alpha_1 \alpha_2^2 - 8 U b r \alpha_2 \alpha_3^2 + 32 U r v \alpha_1^2 \alpha_2 \\
& - 8 U r v \alpha_1 \alpha_3^2 - 2 PK^2 \alpha_1 + 2 PK PPT \alpha_3 - 2 PPT^2 \alpha_2 + 8 U \alpha_1 \alpha_2 - 2 U \alpha_3^2) / \\
& (64 b^2 r^4 v^2 \alpha_1^3 \alpha_2^3 - 48 b^2 r^4 v^2 \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2 + 12 b^2 r^4 v^2 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3^4 - b^2 r^4 v^2 \alpha_3^6 \\
& + 64 b^2 r^3 v \alpha_1^2 \alpha_2^3 - 32 b^2 r^3 v \alpha_1 \alpha_2^2 \alpha_3^2 + 4 b^2 r^3 v \alpha_2 \alpha_3^4 + 64 b r^3 v^2 \alpha_1^3 \alpha_2^2 \\
& - 32 b r^3 v^2 \alpha_1^2 \alpha_2 \alpha_3^2 + 4 b r^3 v^2 \alpha_1 \alpha_3^4 + 16 b^2 r^2 \alpha_1 \alpha_2^3 - 4 b^2 r^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2 + 64 b r^2 v \alpha_1^2 \\
& \alpha_2^2 - 24 b r^2 v \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3^2 + 2 b r^2 v \alpha_3^4 + 16 r^2 v^2 \alpha_1^3 \alpha_2 - 4 r^2 v^2 \alpha_1^2 \alpha_3^2 + 16 b r \alpha_1 \alpha_2^2 \\
& - 4 b r \alpha_2 \alpha_3^2 + 16 r v \alpha_1^2 \alpha_2 - 4 r v \alpha_1 \alpha_3^2 + 4 \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2), \beta_1 =
\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{PK br \alpha_3 - 2 PPT br \alpha_2 - PPT}{4 br^2 v \alpha_1 \alpha_2 - br^2 v \alpha_3^2 + 2 br \alpha_2 + 2 rv \alpha_1 + 1}, \beta_2 \\ = \frac{2 PK rv \alpha_1 - PPT rv \alpha_3 + PK}{4 br^2 v \alpha_1 \alpha_2 - br^2 v \alpha_3^2 + 2 br \alpha_2 + 2 rv \alpha_1 + 1} \end{array} \right]$$

beta[1] := (-b * (PK * alpha[3] - 2 * PPT * alpha[2]) * r + PPT) / (1 + 4 * b * v * (alpha[1] * alpha[2] - (1/4) * alpha[3]^2) * r^2 + (2 * b * alpha[2] + 2 * v * alpha[1]) * r) :

beta[2] := (v * (2 * PK * alpha[1] - PPT * alpha[3]) * r + PK) / (1 + 4 * b * v * (alpha[1] * alpha[2] - (1/4) * alpha[3]^2) * r^2 + (2 * b * alpha[2] + 2 * v * alpha[1]) * r) :

L := 1/128 (128 (alpha[1] alpha[2] - 1/4 alpha[3]^2)^3 v^2 b^2 U r^4 + 128 (alpha[1] alpha[2] - 1/4 alpha[3]^2) v b ((U alpha[1] alpha[2]^2 + 1/8 PPT^2 alpha[2]^2 + (-1/4 U alpha[3]^2 - 1/8 PK PPT alpha[3]) alpha[2] + 1/32 PK^2 alpha[3]^2) b + v ((U alpha[2] + 1/8 PK^2) alpha[1]^2 + (-1/4 U alpha[3]^2 - 1/8 PK PPT alpha[3]) alpha[1] + 1/32 PPT^2 alpha[3]^2)) r^3 + ((32 U alpha[1] alpha[2]^3 - 8 PPT^2 alpha[2]^3 + (8 PK PPT alpha[3] - 8 U alpha[3]^2) alpha[2]^2 - 2 PK^2 alpha[3]^2 alpha[2]) b^2 + 128 v ((U alpha[2]^2 + 1/8 PK^2 alpha[2]) alpha[1]^2 + (1/8 PPT^2 alpha[2]^2 + (-3/8 U alpha[3]^2 - 1/16 PK PPT alpha[3]) alpha[2] - 1/16 PK^2 alpha[3]^2) alpha[1] + 1/32 U alpha[3]^4 + 3/64 PK PPT alpha[3]^3 - 1/16 PPT^2 alpha[2] alpha[3]^2) b + 32 alpha[1] v^2 ((U alpha[2] - 1/4 PK^2) alpha[1]^2 - 1/4 alpha[3] (-PK PPT + U alpha[3]) alpha[1] - 1/16 PPT^2 alpha[3]^2)) r^2 + (((4 PK^2 alpha[2] + 32 U alpha[2]^2) alpha[1] - 8 PPT^2 alpha[2]^2 + (8 PK PPT alpha[3] - 8 U alpha[3]^2) alpha[2] - 3 PK^2 alpha[3]^2) b + 32 v ((U alpha[2] - 1/4 PK^2) alpha[1]^2 + (1/8 PPT^2 alpha[2]^2 - 1/4 alpha[3] (-PK PPT + U alpha[3])) alpha[1] - 3/32 PPT^2 alpha[3]^2)) r + (-2 PK^2 + 8 U alpha[2]) alpha[1] - 2 U alpha[3]^2 + 2 PK PPT alpha[3] - 2 PPT^2 alpha[2]) / ((alpha[1] alpha[2] - 1/4 alpha[3]^2) (1/4 + b v (alpha[1] alpha[2] - 1/4 alpha[3]^2) r^2 + (1/2 b alpha[2] + 1/2 v alpha[1]) r)^2) :

```
> with(Optimization)
  [ImportMPS, Interactive, LPSolve, LSSolve, Maximize, Minimize, NLPsolve, QPSolve] (3)
> Minimize(L, assume = nonnegative);
[0., [PK = 0., PPT = 0., U = 0., b = 1.05780191789316, r = 1.11518723412897, v
= 1.05780191789316, alpha_1 = 1.14409112275385, alpha_2 = 1.14409112275385, alpha_3
= 1.14409112275385]] (4)
> Minimize(beta[1], {4 * alpha[1] * alpha[2] > (alpha[3]^2)}, assume = nonnegative);
Error, (in Optimization:-NLPsolve) strict inequalities are not
valid constraints
```

```

> Minimize(beta[2], assume = nonnegative);
Error, (in Optimization:-NLPsolve) no improved point could be
found
> #Como no se ha podido encontrar un una expresión con la condición de parametros no negativos,
se estudiará el comportamiento con otras condiciones#
> solve( {beta[1] > 0, alpha[1] > alpha[3], alpha[2] > alpha[3]}, {alpha[1], alpha[2],
alpha[3], r, b, v, PPT, PK}, useassumptions) assuming alpha[1] > 0, b > 0, v > 0, PK
> 0, PPT > 0, alpha[3] > 0, alpha[2] > 0, r > 0;

```

$$\left\{ 0 < PK, 0 < PPT, 0 < b, 0 < r, 0 < v, 0 < \alpha_3, PK < \frac{PPT(2br\alpha_2 + 1)}{br\alpha_3}, \alpha_3 < \alpha_1, \alpha_3 < \alpha_2 \right\} \quad (5)$$

```

> solve( {beta[2] > 0, alpha[1] > alpha[3], alpha[2] > alpha[3]}, {alpha[1], alpha[2],
alpha[3], r, b, v, PPT, PK}, useassumptions) assuming alpha[1] > 0, b > 0, v > 0, PK
> 0, PPT > 0, alpha[3] > 0, alpha[2] > 0, r > 0;

```

$$\left\{ 0 < PPT, 0 < b, 0 < r, 0 < v, 0 < \alpha_3, \alpha_3 < \alpha_1, \alpha_3 < \alpha_2, \frac{PPTvr\alpha_3}{2rv\alpha_1 + 1} < PK \right\} \quad (6)$$

#Con esto notamos que la condición para incentivos no negativos es siguiente: $\left\{ \frac{br\alpha_3}{(2br\alpha_2 + 1)} < \frac{PPT}{PK} < \frac{2rv\alpha_1 + 1}{vr\alpha_3} \right\}$ #

Con esto, fue posible demostrar que la transferencia fija del salario (L) siempre es positiva. Además, se encontró bajo qué condición los incentivos son no negativos.

Anexo 4. Relación de L con respecto a la Utilidad Alternativa.

$$\begin{aligned}
L := & 1/128 (128 (\alpha[1] \alpha[2] - 1/4 \alpha[3]^2)^3 v^2 b^2 U r^4 + 128 (\alpha[1] \alpha[2] \\
& - 1/4 \alpha[3]^2) v b ((U \alpha[1] \alpha[2]^2 + 1/8 PPT^2 \alpha[2]^2 + (-1/4 U \alpha[3] \\
& ^2 - 1/8 PK PPT \alpha[3]) \alpha[2] + 1/32 PK^2 \alpha[3]^2) b + v ((U \alpha[2] + 1/8 PK \\
& ^2) \alpha[1]^2 + (-1/4 U \alpha[3]^2 - 1/8 PK PPT \alpha[3]) \alpha[1] + 1/32 PPT \\
& ^2 \alpha[3]^2) r^3 + ((32 U \alpha[1] \alpha[2]^2 - 8 PPT^2 \alpha[2]^3 \\
& + (8 PK PPT \alpha[3] - 8 U \alpha[3]^2) \alpha[2]^2 - 2 PK^2 \alpha[3]^2 \alpha[2]) b^2 \\
& + 128 v ((U \alpha[2]^2 + 1/8 PK^2 \alpha[2]) \alpha[1]^2 + (1/8 PPT^2 \alpha[2]^2 + (-3 \\
& /8 U \alpha[3]^2 - 1/16 PK PPT \alpha[3]) \alpha[2] - 1/16 PK^2 \alpha[3]^2) \alpha[1] + 1 \\
& /32 U \alpha[3]^4 + 3/64 PK PPT \alpha[3]^3 - 1/16 PPT^2 \alpha[2] \alpha[3]^2) b \\
& + 32 \alpha[1] v^2 ((U \alpha[2] - 1/4 PK^2) \alpha[1]^2 - 1/4 \alpha[3] (-PK PPT \\
& + U \alpha[3]) \alpha[1] - 1/16 PPT^2 \alpha[3]^2) r^2 + (((4 PK^2 \alpha[2] \\
& + 32 U \alpha[2]^2) \alpha[1] - 8 PPT^2 \alpha[2]^2 + (8 PK PPT \alpha[3] - 8 U \alpha[3] \\
& ^2) \alpha[2] - 3 PK^2 \alpha[3]^2) b + 32 v ((U \alpha[2] - 1/4 PK^2) \alpha[1]^2 + (1/8 PPT \\
& ^2 \alpha[2] - 1/4 \alpha[3] (-PK PPT + U \alpha[3])) \alpha[1] - 3/32 PPT^2 \alpha[3]^2) r \\
& + (-2 PK^2 + 8 U \alpha[2]) \alpha[1] - 2 U \alpha[3]^2 + 2 PK PPT \alpha[3] - 2 PPT \\
& ^2 \alpha[2]) / ((\alpha[1] \alpha[2] - 1/4 \alpha[3]^2) (1/4 + b v (\alpha[1] \alpha[2] - 1 \\
& /4 \alpha[3]^2) r^2 + (1/2 b \alpha[2] + 1/2 v \alpha[1]) r)^2) :
\end{aligned}$$

$derivadaLdeU := diff(L, U);$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{128} \left(128 \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right)^3 v^2 b^2 r^4 + 128 \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) v b \left(\left(\alpha_1 \alpha_2^2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \alpha_2 \right) b \right. \right. & \quad (1) \\
& + v \left(\alpha_2 \alpha_1^2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \alpha_1 \right) \left. \right) r^3 + \left(\left(32 \alpha_1 \alpha_2^3 - 8 \alpha_2^2 \alpha_3^2 \right) b^2 + 128 v \left(\alpha_2^2 \alpha_1^2 - \frac{3}{8} \right. \right. \\
& \left. \left. \alpha_3^2 \alpha_2 \alpha_1 + \frac{1}{32} \alpha_3^4 \right) b + 32 \alpha_1 v^2 \left(\alpha_2 \alpha_1^2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \alpha_1 \right) \right) r^2 + \left(\left(32 \alpha_1 \alpha_2^2 - 8 \alpha_2 \alpha_3^2 \right) b \right. \\
& + 32 v \left(\alpha_2 \alpha_1^2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \alpha_1 \right) \left. \right) r + 8 \alpha_1 \alpha_2 - 2 \alpha_3^2 \left. \right) / \left(\left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) \left(\frac{1}{4} \right. \right. \\
& \left. \left. + b v \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r^2 + \left(\frac{1}{2} b \alpha_2 + \frac{1}{2} v \alpha_1 \right) r \right)^2 \right)
\end{aligned}$$

$with(Optimization) :$

$Maximize(derivadaLdeU, \{\alpha[3] = 10000\}, assume = nonnegative);$

Warning, no iterations performed as initial point satisfies first-order conditions

$$[1.00000000000000022, [b = 1., r = 1., v = 1., \alpha_1 = 1., \alpha_2 = 1., \alpha_3 = 10000.]] \quad (2)$$

$Minimize(derivadaLdeU, assume = nonnegative);$

Warning, no iterations performed as initial point satisfies first-order conditions

$$[1., [b = 1., r = 1., v = 1., \alpha_1 = 1., \alpha_2 = 1., \alpha_3 = 1.]] \quad (3)$$

#Notamos que ningún punto satisface la 1 ra condición de orden. Por lo tanto, si la $\frac{dL}{dU}$ varía positivamente con respecto a todos los parámetros, podemos decir que el mínimo es el punto inicial descrito en previamente $\left(\frac{dL}{dU} = 1\right)$ #

```
Segundadeb := diff(derivadaLdeU, b) :
Segundadev := diff(derivadaLdeU, v) :
Segundade1 := diff(derivadaLdeU, alpha[1]) :
Segundade2 := diff(derivadaLdeU, alpha[2]) :
Segundade3 := diff(derivadaLdeU, alpha[3]) :
Segundader := diff(diff(L, U), r) :
Minimize(Segundadeb, assume = nonnegative);
Warning, no iterations performed as initial point satisfies first-
order conditions
[0., [b = 1., r = 1., v = 1., alpha_1 = 1., alpha_2 = 1., alpha_3 = 1.]] (4)
```

```
Maximize(Segundadeb, assume = nonnegative);
Warning, no iterations performed as initial point satisfies first-
order conditions
[0., [b = 1., r = 1., v = 1., alpha_1 = 1., alpha_2 = 1., alpha_3 = 1.]] (5)
```

```
Minimize(Segundadev, assume = nonnegative);
Warning, no iterations performed as initial point satisfies first-
order conditions
[0., [b = 1., r = 1., v = 1., alpha_1 = 1., alpha_2 = 1., alpha_3 = 1.]] (6)
```

```
Maximize(Segundadeb, assume = nonnegative);
Warning, no iterations performed as initial point satisfies first-
order conditions
[0., [b = 1., r = 1., v = 1., alpha_1 = 1., alpha_2 = 1., alpha_3 = 1.]] (7)
```

```
Maximize(Segundader, assume = nonnegative);
Warning, no iterations performed as initial point satisfies first-
order conditions
[0., [b = 1., r = 1., v = 1., alpha_1 = 1., alpha_2 = 1., alpha_3 = 1.]] (8)
```

```
Minimize(Segundader, assume = nonnegative);
Warning, no iterations performed as initial point satisfies first-
order conditions
[0., [b = 1., r = 1., v = 1., alpha_1 = 1., alpha_2 = 1., alpha_3 = 1.]] (9)
```

#Como la derivada de $\frac{dL}{dU}$ en términos de b, v y r es cero,
 se concluye que $\frac{dL}{dU}$ no varía en función de b ni v ni r . Por lo tanto,
 no influye la variación de b ni de v ni de r sobre la condición $\frac{dU}{dL} > 0$.

Minimize(Segundade1, assume = nonnegative);
Warning, no iterations performed as initial point satisfies first-order conditions
 $[2.22044604925031308 \cdot 10^{-16}, [b = 1., r = 1., v = 1., \alpha_1 = 1., \alpha_2 = 1., \alpha_3 = 1.]]$ (10)

Maximize(Segundade1, assume = nonnegative);
Warning, no iterations performed as initial point satisfies first-order conditions
 $[2.22044604925031308 \cdot 10^{-16}, [b = 1., r = 1., v = 1., \alpha_1 = 1., \alpha_2 = 1., \alpha_3 = 1.]]$ (11)

Minimize(Segundade2, assume = nonnegative);
Warning, no iterations performed as initial point satisfies first-order conditions
 $[2.22044604925031308 \cdot 10^{-16}, [b = 1., r = 1., v = 1., \alpha_1 = 1., \alpha_2 = 1., \alpha_3 = 1.]]$ (12)

Maximize(Segundade2, assume = nonnegative);
Warning, no iterations performed as initial point satisfies first-order conditions
 $[2.22044604925031308 \cdot 10^{-16}, [b = 1., r = 1., v = 1., \alpha_1 = 1., \alpha_2 = 1., \alpha_3 = 1.]]$ (13)

Minimize(Segundade3, assume = nonnegative);
Warning, no iterations performed as initial point satisfies first-order conditions
 $[-1.11022302462515654 \cdot 10^{-16}, [b = 1., r = 1., v = 1., \alpha_1 = 1., \alpha_2 = 1., \alpha_3 = 1.]]$ (14)

Maximize(Segundade3, assume = nonnegative);
Warning, no iterations performed as initial point satisfies first-order conditions
 $[-1.11022302462515654 \cdot 10^{-16}, [b = 1., r = 1., v = 1., \alpha_1 = 1., \alpha_2 = 1., \alpha_3 = 1.]]$ (15)

SegundadeU := *diff*(derivadaLdeU, U);
 0 (16)

*#Notamos que $\frac{dU}{dL}$ no varía en términos de $\alpha[1]$, $\alpha[2]$, ni $\alpha[3]$,
por lo tanto para todo valor de $\alpha[1, 2, 3]$ $\frac{dU}{dL} > 0$.*

#Con esto se demuestra que $\frac{dL}{dU} = 1$ para todo valor de los parámetros.

Con lo anterior, fue posible demostrar que $\frac{dL}{dU_{alt}} = 1$ para todos los parámetros del modelo.

Anexo 5. Derivada de los incentivos respecto al Pago por Pasajero Transportado (PPT) y el Pago por Kilómetro (PK)

$$\text{beta}[1] := (-b * (PK * \alpha[3] - 2 * PPT * \alpha[2]) * r + PPT) / (1 + 4 * b * v * (\alpha[1] * \alpha[2]) - (1/4) * \alpha[3]^2 * r^2 + (2 * b * \alpha[2] + 2 * v * \alpha[1]) * r) :$$

$$\text{beta}[2] := (v * (2 * PK * \alpha[1] - PPT * \alpha[3]) * r + PK) / (1 + 4 * b * v * (\alpha[1] * \alpha[2]) - (1/4) * \alpha[3]^2 * r^2 + (2 * b * \alpha[2] + 2 * v * \alpha[1]) * r) :$$

$$\left[\begin{array}{l} > a[t1] := \frac{2 \cdot \text{beta}[1] \cdot \alpha[2] - \alpha[3] \text{beta}[2]}{(4 \cdot \alpha[1] \cdot \alpha[2]) - \alpha[3]^2} : \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} > a[t2] := \frac{2 \cdot \text{beta}[2] \cdot \alpha[1] - \alpha[3] \text{beta}[1]}{(4 \cdot \alpha[2] \cdot \alpha[1]) - \alpha[3]^2} : \end{array} \right.$$

$\left[\begin{array}{l} > \text{derivada1} := \text{diff}(\text{beta}[1], PPT) : \end{array} \right.$

$\text{derivada11} := \text{diff}(\text{beta}[1], PK) :$

$\text{derivada2} := \text{diff}(\text{beta}[2], PK) :$

$\text{derivada22} := \text{diff}(\text{beta}[2], PPT) :$

$\text{with}(\text{Optimization}) :$

$\text{Minimize}(\text{derivada1}, \text{assume} = \text{nonnegative}) ;$

$$\left[1.38408895889306121 \cdot 10^{-10}, [b = 0., r = 1498.55833278288, v = 1516.67533696105, \alpha_1 = 1589.42383889444, \alpha_2 = 131.509928467572, \alpha_3 = 1.32210134716700] \right] \quad (1)$$

$\text{Minimize}(\text{derivada2}, \text{assume} = \text{nonnegative}) ;$

$$\left[1.38408895889306690 \cdot 10^{-10}, [b = 1516.67533696105, r = 1498.55833278288, v = 0., \alpha_1 = 131.509928467571, \alpha_2 = 1589.42383889444, \alpha_3 = 1.32210134716696] \right] \quad (2)$$

$\text{Maximize}(\text{derivada11}, \text{assume} = \text{nonnegative}) ;$

$$\left[0., [b = 0.750614595178083, r = 1.22661602204541, v = 1.43712442056750, \alpha_1 = 1.48375452170176, \alpha_2 = 1.46728546020379, \alpha_3 = 0.] \right]$$

$\text{Maximize}(\text{derivada22}, \{\alpha[1] \geq \alpha[3], \alpha[2] \geq \alpha[3]\}, \text{assume} = \text{nonnegative}) ;$

$$\left[0., [b = 1.43712442056750, r = 1.22661602204541, v = 0.750614595178083, \alpha_1 = 1.46728546020379, \alpha_2 = 1.48375452170176, \alpha_3 = 0.] \right] \quad (4)$$

$\text{Minimize}(\text{derivada11}, \{\alpha[1] \geq \alpha[3], \alpha[2] \geq \alpha[3]\}, \text{assume} = \text{nonnegative}) ;$

Warning, limiting number of major iterations has been reached

$$\left[-0.499999999608349732, [b = 493.822512010095, r = 4315.96269708715, v = 0., \alpha_1 = 299.497360034135, \alpha_2 = 299.497360034135, \alpha_3 = 299.497360034135] \right] \quad (5)$$

Minimize(derivada22, {alpha[1] ≥ alpha[3], alpha[2] ≥ alpha[3]}, assume = nonnegative);
Warning, limiting number of major iterations has been reached

$$\left[-0.499999999608349732, [b = 0., r = 4315.96301387559, v = 493.822516089429, \alpha_1 = 299.497362509037, \alpha_2 = 299.497362509037, \alpha_3 = 299.497362509037] \right] \quad (6)$$

#Con esto notamos, que derivada 1 y derivada 2 son siempre positivas y derivada 11 y derivada 22 son siempre negativas

#Revisión#

fx := derivada1 + derivada22 :
Minimize(fx, {alpha[1] ≥ alpha[3], alpha[2] ≥ alpha[3]}, assume = nonnegative);
Warning, limiting number of major iterations has been reached

$$\left[-0.499999999421433305, [b = 0., r = 843.803385875330, v = 4263.96213245090, \alpha_1 = 360.290869508017, \alpha_2 = 360.290869508017, \alpha_3 = 360.290869508017] \right] \quad (7)$$

Maximize(fx, {alpha[1] ≥ alpha[3], alpha[2] ≥ alpha[3]}, assume = nonnegative);

$$\left[1., [b = 1.33333333333333, r = 0.333333333333333, v = 0., \alpha_1 = 0.555555555555556, \alpha_2 = 1.22222222222222, \alpha_3 = 0.555555555555556] \right] \quad (8)$$

gx := derivada2 + derivada11 :
Minimize(gx, {alpha[1] ≥ alpha[3], alpha[2] ≥ alpha[3]}, assume = nonnegative);
Warning, limiting number of major iterations has been reached

$$\left[-0.499999999421433305, [b = 4263.96197337027, r = 843.803399205550, v = 0., \alpha_1 = 360.290875190557, \alpha_2 = 360.290875190557, \alpha_3 = 360.290875190557] \right] \quad (9)$$

Maximize(gx, {alpha[1] ≥ alpha[3], alpha[2] ≥ alpha[3]}, assume = nonnegative);

$$\left[1., [b = 0., r = 0.333333333333333, v = 1.33333333333333, \alpha_1 = 1.22222222222222, \alpha_2 = 0.555555555555556, \alpha_3 = 0.555555555555556] \right] \quad (10)$$

#No siempre una derivada va sobre la otra#

Anexo 6. Derivada de los esfuerzos respecto al Pago por Pasajero Transportado

(PPT) y el Pago por Kilómetro (PK)

$$\text{beta}[1] := (-b * (PK * \alpha[3] - 2 * PPT * \alpha[2]) * r + PPT) / (1 + 4 * b * v * (\alpha[1] * \alpha[2] - (1/4) * \alpha[3]^2) * r^2 + (2 * b * \alpha[2] + 2 * v * \alpha[1]) * r) :$$

$$\text{beta}[2] := (v * (2 * PK * \alpha[1] - PPT * \alpha[3]) * r + PK) / (1 + 4 * b * v * (\alpha[1] * \alpha[2] - (1/4) * \alpha[3]^2) * r^2 + (2 * b * \alpha[2] + 2 * v * \alpha[1]) * r) :$$

$$\begin{aligned} L := & 1/128 (128 (\alpha[1] \alpha[2] - 1/4 \alpha[3]^2)^3 v^2 b^2 U r^4 + 128 (\alpha[1] \alpha[2] - 1/4 \alpha[3]^2) v b ((U \alpha[1] \alpha[2]^2 + 1/8 PPT^2 \alpha[2]^2 + (-1/4 U \alpha[3]^2 - 1/8 PK PPT \alpha[3]) \alpha[2] + 1/32 PK^2 \alpha[3]^2) b + v ((U \alpha[2] + 1/8 PK^2) \alpha[1]^2 + (-1/4 U \alpha[3]^2 - 1/8 PK PPT \alpha[3]) \alpha[1] + 1/32 PPT^2 \alpha[3]^2)) r^3 + ((32 U \alpha[1] \alpha[2]^3 - 8 PPT^2 \alpha[2]^3 + (8 PK PPT \alpha[3] - 8 U \alpha[3]^2) \alpha[2]^2 - 2 PK^2 \alpha[3]^2 \alpha[2]) b^2 + 128 v ((U \alpha[2]^2 + 1/8 PK^2 \alpha[2]) \alpha[1]^2 + (1/8 PPT^2 \alpha[2]^2 + (-3/8 U \alpha[3]^2 - 1/16 PK PPT \alpha[3]) \alpha[2] - 1/16 PK^2 \alpha[3]^2) \alpha[1] + 1/32 U \alpha[3]^4 + 3/64 PK PPT \alpha[3]^3 - 1/16 PPT^2 \alpha[2] \alpha[3]^2) b + 32 \alpha[1] v^2 ((U \alpha[2] - 1/4 PK^2) \alpha[1]^2 - 1/4 \alpha[3] (-PK PPT + U \alpha[3]) \alpha[1] - 1/16 PPT^2 \alpha[3]^2)) r^2 + (((4 PK^2 \alpha[2] + 32 U \alpha[2]^2) \alpha[1] - 8 PPT^2 \alpha[2]^2 + (8 PK PPT \alpha[3] - 8 U \alpha[3]) \alpha[2] - 3 PK^2 \alpha[3]^2) b + 32 v ((U \alpha[2] - 1/4 PK^2) \alpha[1]^2 + (1/8 PPT^2 \alpha[2] - 1/4 \alpha[3] (-PK PPT + U \alpha[3]) \alpha[1] - 3/32 PPT^2 \alpha[3]^2)) r + (-2 PK^2 + 8 U \alpha[2]) \alpha[1] - 2 U \alpha[3]^2 + 2 PK PPT \alpha[3] - 2 PPT^2 \alpha[2]) / ((\alpha[1] \alpha[2] - 1/4 \alpha[3]^2) (1/4 + b v (\alpha[1] \alpha[2] - 1/4 \alpha[3]^2) r^2 + (1/2 b \alpha[2] + 1/2 v \alpha[1]) r))^2) : \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} > a[t1] := \frac{2 \cdot \text{beta}[1] \cdot \alpha[2] - \alpha[3] \text{beta}[2]}{(4 \cdot \alpha[1] \cdot \alpha[2]) - \alpha[3]^2} : \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} > a[t2] := \frac{2 \cdot \text{beta}[2] \cdot \alpha[1] - \alpha[3] \text{beta}[1]}{(4 \cdot \alpha[2] \cdot \alpha[1]) - \alpha[3]^2} : \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{l} > \text{derivada1} := \text{diff}(a[t1], PPT) : \\ \text{derivada11} := \text{diff}(a[t1], PK) : \\ \text{derivada2} := \text{diff}(a[t2], PK) : \\ \text{derivada22} := \text{diff}(a[t2], PPT) : \\ \text{with}(\text{Optimization}) : \end{array} \right. \end{aligned}$$

Minimize(derivada1, assume = nonnegative);

$$\left[\begin{array}{l} 1.44880371727764611 \cdot 10^{-11}, [b = 12.7304596360419, r = 284.201978746071, v = 278.589217223426, \alpha_1 = 466.843873195111, \alpha_2 = 53.0186354430518, \alpha_3 \end{array} \right. \quad (1)$$

$$= 0.0707622792980433]]$$

Minimize(derivada2, assume = nonnegative);

$$[1.44880371727765192 \cdot 10^{-11}, [b = 278.589217223426, r = 284.201978746071, v = 12.7304596360419, \alpha_1 = 53.0186354430517, \alpha_2 = 466.843873195110, \alpha_3 = 0.0707622792980707]]$$
 (2)

Maximize(derivada11, assume = nonnegative);

$$[0., [b = 1.13292848677617, r = 1.25713098066332, v = 1.13292848677617, \alpha_1 = 1.63254768557546, \alpha_2 = 1.63254768557546, \alpha_3 = 0.]]$$

Maximize(derivada22, assume = nonnegative);

$$[0., [b = 1.13292848677617, r = 1.25713098066332, v = 1.13292848677617, \alpha_1 = 1.63254768557546, \alpha_2 = 1.63254768557546, \alpha_3 = 0.]]$$
 (4)

Minimize(derivada11, {alpha[1] ≥ alpha[3], alpha[2] ≥ alpha[3]}, assume = nonnegative);

$$[-5.23097061562067604 \cdot 10^9, [b = 0.538437072976810, r = 0.0765484490339607, v = 0.538437072976810, \alpha_1 = 6.37230368608100 \cdot 10^{-11}, \alpha_2 = 6.37230368574153 \cdot 10^{-11}, \alpha_3 = 6.37230368608100 \cdot 10^{-11}]]$$

Minimize(derivada22, {alpha[1] ≥ alpha[3], alpha[2] ≥ alpha[3]}, assume = nonnegative);

$$[-5.23097061562067604 \cdot 10^9, [b = 0.538437072976810, r = 0.0765484490339607, v = 0.538437072976810, \alpha_1 = 6.37230368608100 \cdot 10^{-11}, \alpha_2 = 6.37230368574153 \cdot 10^{-11}, \alpha_3 = 6.37230368608100 \cdot 10^{-11}]]$$
 (6)

#Revisión#

fx := derivada1 + derivada22 :

Minimize(fx, {alpha[1] ≥ alpha[3], alpha[2] ≥ alpha[3]}, assume = nonnegative);

$$[-222.454849633692788, [b = 0.000374217980884861, r = 108.905590432806, v = 110.119899144235, \alpha_1 = 0.00103694642656783, \alpha_2 = 9.15767570573180 \cdot 10^{-11}, \alpha_3 = 9.15767713823393 \cdot 10^{-11}]]$$
 (7)

Maximize(fx, {alpha[1] ≥ alpha[3], alpha[2] ≥ alpha[3]}, assume = nonnegative);

Warning, limiting number of major iterations has been reached

$$[6.05559221698996544 \cdot 10^9, [b = 4.48348489843312, r = 0.00206397534613616, v = 2.92930032838662 \cdot 10^9, \alpha_1 = 8.25683074559028 \cdot 10^{-11}, \alpha_2 = 21662.3190610832, \alpha_3 = 21662.3190610832]]$$
 (8)

Con esto fue posible demostrar que $\frac{da_{t1}}{dPPT}$ y $\frac{da_{t2}}{dPK}$ serán siempre mayores a cero y que $\frac{da_{t1}}{dPK}$ y $\frac{da_{t2}}{dPPT}$ serán menores a cero, $\forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, r, \sigma_{t1}^2, \sigma_{t2}^2, \vartheta_{q_{t1}}^2, \vartheta_{q_{t2}}^2$, $Utilidad_{Alt.}, PK$ y PPT .

Anexo 7. Comportamiento de los esfuerzos con respecto a los costos directos

$$\text{beta}[1] := (-b * (PK * \alpha[3] - 2 * PPT * \alpha[2]) * r + PPT) / (1 + 4 * b * v * (\alpha[1] * \alpha[2] - (1/4) * \alpha[3]^2) * r^2 + (2 * b * \alpha[2] + 2 * v * \alpha[1]) * r) :$$

$$\text{beta}[2] := (v * (2 * PK * \alpha[1] - PPT * \alpha[3]) * r + PK) / (1 + 4 * b * v * (\alpha[1] * \alpha[2] - (1/4) * \alpha[3]^2) * r^2 + (2 * b * \alpha[2] + 2 * v * \alpha[1]) * r) :$$

$$\begin{aligned} L := & 1/128 (128 (\alpha[1] \alpha[2] - 1/4 \alpha[3]^2)^3 v^2 b^2 U r^4 + 128 (\alpha[1] \alpha[2] - 1/4 \alpha[3]^2) v b ((U \alpha[1] \alpha[2]^2 + 1/8 PPT^2 \alpha[2]^2 + (-1/4 U \alpha[3] \alpha[2]^2 - 1/8 PK PPT \alpha[3]) \alpha[2] + 1/32 PK^2 \alpha[3]^2) b + v ((U \alpha[2] + 1/8 PK^2) \alpha[1]^2 + (-1/4 U \alpha[3]^2 - 1/8 PK PPT \alpha[3]) \alpha[1] + 1/32 PPT^2 \alpha[3]^2)) r^3 + ((32 U \alpha[1] \alpha[2]^3 - 8 PPT^2 \alpha[2]^3 + (8 PK PPT \alpha[3] - 8 U \alpha[3]^2) \alpha[2]^2 - 2 PK^2 \alpha[3]^2 \alpha[2]) b^2 + 128 v ((U \alpha[2]^2 + 1/8 PK^2 \alpha[2]) \alpha[1]^2 + (1/8 PPT^2 \alpha[2]^2 + (-3/8 U \alpha[3]^2 - 1/16 PK PPT \alpha[3]) \alpha[2] - 1/16 PK^2 \alpha[3]^2) \alpha[1] + 1/32 U \alpha[3]^4 + 3/64 PK PPT \alpha[3]^3 - 1/16 PPT^2 \alpha[2] \alpha[3]^2) b + 32 \alpha[1] v^2 ((U \alpha[2] - 1/4 PK^2) \alpha[1]^2 - 1/4 \alpha[3] (-PK PPT + U \alpha[3]) \alpha[1] - 1/16 PPT^2 \alpha[3]^2)) r^2 + ((4 PK^2 \alpha[2] + 32 U \alpha[2]^2) \alpha[1] - 8 PPT^2 \alpha[2]^2 + (8 PK PPT \alpha[3] - 8 U \alpha[3]) \alpha[2] - 3 PK^2 \alpha[3]^2) b + 32 v ((U \alpha[2] - 1/4 PK^2) \alpha[1]^2 + (1/8 PPT^2 \alpha[2] - 1/4 \alpha[3] (-PK PPT + U \alpha[3])) \alpha[1] - 3/32 PPT^2 \alpha[3]^2)) r + (-2 PK^2 + 8 U \alpha[2]) \alpha[1] - 2 U \alpha[3]^2 + 2 PK PPT \alpha[3] - 2 PPT^2 \alpha[2]) / ((\alpha[1] \alpha[2] - 1/4 \alpha[3]^2) (1/4 + b v (\alpha[1] \alpha[2] - 1/4 \alpha[3]^2) r^2 + (1/2 b \alpha[2] + 1/2 v \alpha[1]) r) : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{> } a[t1] := \frac{2 \cdot \text{beta}[1] \cdot \alpha[2] - \alpha[3] \text{beta}[2]}{(4 \cdot \alpha[1] \cdot \alpha[2]) - \alpha[3]^2}, \\ a_{tl} := & \frac{1}{4 \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2} \left(\frac{2 \alpha_2 (-b (PK \alpha_3 - 2 PPT \alpha_2) r + PPT)}{1 + 4 b v \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r^2 + (2 b \alpha_2 + 2 v \alpha_1) r} \right. \\ & \left. - \frac{\alpha_3 (v (2 PK \alpha_1 - PPT \alpha_3) r + PK)}{1 + 4 b v \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r^2 + (2 b \alpha_2 + 2 v \alpha_1) r} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \text{> } \text{simplify}((1), 'size') \\ & \frac{(-2 PK b \alpha_2 \alpha_3 - 2 PK v \alpha_1 \alpha_3 + 4 PPT b \alpha_2^2 + PPT v \alpha_3^2) r - PK \alpha_3 + 2 PPT \alpha_2}{(4 b r^2 v \alpha_1 \alpha_2 - b r^2 v \alpha_3^2 + 2 b r \alpha_2 + 2 r v \alpha_1 + 1) (4 \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2)} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{> } \text{derivadadea2} := \text{diff}(a[t2], \alpha[2]) :$$

$$\text{> } \text{derivadadea1} := \text{diff}(a[t1], \alpha[1]) :$$

$$\text{> } \text{with}(\text{Optimization}) :$$

```

> Maximize(derivadadea1, {a[t1] ≥ 0, alpha[1] ≥ alpha[3], alpha[2] ≥ alpha[3], alpha[1]
  ≥ 1, alpha[2] ≥ 1, alpha[3] ≥ 1, b ≥ 1, v ≥ 1, r ≥ 1, PPT ≥ 1}, assume = nonnegative)
[-2.23658788126926876 10-12, [PK = 55.7968622437343, PPT = 43.5465936208178, b
  = 119.290426742318, r = 193.869434573927, v = 117.066349324368, α1
  = 611.639727576929, α2 = 197.871594262389, α3 = 61.3824613541885]] (3)
=
> Maximize(derivadadea2, {a[t1] ≥ 0, alpha[1] ≥ alpha[3], alpha[2] ≥ alpha[3], alpha[1]
  ≥ 1, alpha[2] ≥ 1, alpha[3] ≥ 1, b ≥ 1, v ≥ 1, r ≥ 1, PPT ≥ 1}, assume = nonnegative)
;
Warning, no iterations performed as initial point satisfies first-
order conditions
[0., [PK = 1., PPT = 1., b = 1., r = 1., v = 1., α1 = 1., α2 = 1., α3 = 1.]] (4)
=
> #Con esto, es posible mostrar que la cota superior de las derivadas estudiadas es menor a cero.
  Por lo tanto, siempre las derivadas son menores a cero.

```

Anexo 8. Condición de los parámetros para esfuerzos no negativos

$$\text{beta}[1] := (-b * (PK * \alpha[3] - 2 * PPT * \alpha[2]) * r + PPT) / (1 + 4 * b * v * (\alpha[1] * \alpha[2] - (1/4) * \alpha[3]^2) * r^2 + (2 * b * \alpha[2] + 2 * v * \alpha[1]) * r) :$$

$$\text{beta}[2] := (v * (2 * PK * \alpha[1] - PPT * \alpha[3]) * r + PK) / (1 + 4 * b * v * (\alpha[1] * \alpha[2] - (1/4) * \alpha[3]^2) * r^2 + (2 * b * \alpha[2] + 2 * v * \alpha[1]) * r) :$$

$$\begin{aligned} L := & 1/128 (128 (\alpha[1] \alpha[2] - 1/4 \alpha[3]^2)^3 v^2 b^2 U r^4 + 128 (\alpha[1] \alpha[2] \\ & - 1/4 \alpha[3]^2) v b ((U \alpha[1] \alpha[2] + 1/8 PPT^2 \alpha[2]^2 + (-1/4 U \alpha[3] \\ & ^2 - 1/8 PK PPT \alpha[3]) \alpha[2] + 1/32 PK^2 \alpha[3]^2) b + v ((U \alpha[2] + 1/8 PK \\ & ^2) \alpha[1]^2 + (-1/4 U \alpha[3]^2 - 1/8 PK PPT \alpha[3]) \alpha[1] + 1/32 PPT \\ & ^2 \alpha[3]^2)) r^3 + ((32 U \alpha[1] \alpha[2] - 8 PPT^2 \alpha[2]^3 \\ & + (8 PK PPT \alpha[3] - 8 U \alpha[3]^2) \alpha[2]^2 - 2 PK^2 \alpha[3]^2 \alpha[2]) b^2 \\ & + 128 v ((U \alpha[2]^2 + 1/8 PK^2 \alpha[2]) \alpha[1]^2 + (1/8 PPT^2 \alpha[2]^2 + (-3 \\ & /8 U \alpha[3]^2 - 1/16 PK PPT \alpha[3]) \alpha[2] - 1/16 PK^2 \alpha[3]^2) \alpha[1] + 1 \\ & /32 U \alpha[3]^4 + 3/64 PK PPT \alpha[3]^3 - 1/16 PPT^2 \alpha[2] \alpha[3]^2) b \\ & + 32 \alpha[1] v^2 ((U \alpha[2] - 1/4 PK^2) \alpha[1]^2 - 1/4 \alpha[3] (-PK PPT \\ & + U \alpha[3]) \alpha[1] - 1/16 PPT^2 \alpha[3]^2)) r^2 + (((4 PK^2 \alpha[2] \\ & + 32 U \alpha[2]^2) \alpha[1] - 8 PPT^2 \alpha[2]^2 + (8 PK PPT \alpha[3] - 8 U \alpha[3] \\ & ^2) \alpha[2] - 3 PK^2 \alpha[3]^2) b + 32 v ((U \alpha[2] - 1/4 PK^2) \alpha[1]^2 + (1/8 PPT \\ & ^2 \alpha[2] - 1/4 \alpha[3] (-PK PPT + U \alpha[3])) \alpha[1] - 3/32 PPT^2 \alpha[3]^2)) r \\ & + (-2 PK^2 + 8 U \alpha[2]) \alpha[1] - 2 U \alpha[3]^2 + 2 PK PPT \alpha[3] - 2 PPT \\ & ^2 \alpha[2]) / ((\alpha[1] \alpha[2] - 1/4 \alpha[3]^2) (1/4 + b v (\alpha[1] \alpha[2] - 1 \\ & /4 \alpha[3]^2) r^2 + (1/2 b \alpha[2] + 1/2 v \alpha[1]) r))^2) : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[\begin{aligned} & a_{tl} := \frac{2 \cdot \text{beta}[1] \cdot \alpha[2] - \alpha[3] \text{beta}[2]}{(4 \cdot \alpha[1] \cdot \alpha[2]) - \alpha[3]^2}; \\ & a_{tl} := \frac{1}{4 \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2} \left(\frac{2 \alpha_2 (-b (PK \alpha_3 - 2 PPT \alpha_2) r + PPT)}{1 + 4 b v \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r^2 + (2 b \alpha_2 + 2 v \alpha_1) r} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\alpha_3 (v (2 PK \alpha_1 - PPT \alpha_3) r + PK)}{1 + 4 b v \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r^2 + (2 b \alpha_2 + 2 v \alpha_1) r} \right) \end{aligned} \right] \quad (1) \\ & \left[\begin{aligned} & \text{simplify}((1), 'size') \\ & \frac{(-2 PK b \alpha_2 \alpha_3 - 2 PK v \alpha_1 \alpha_3 + 4 PPT b \alpha_2^2 + PPT v \alpha_3^2) r - PK \alpha_3 + 2 PPT \alpha_2}{(4 b r^2 v \alpha_1 \alpha_2 - b r^2 v \alpha_3^2 + 2 b r \alpha_2 + 2 r v \alpha_1 + 1) (4 \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2)} \end{aligned} \right] \quad (2) \\ & \left[\begin{aligned} & NI := \frac{(-2 PK b \alpha_2 \alpha_3 - 2 PK v \alpha_1 \alpha_3 + 4 PPT b \alpha_2^2 + PPT v \alpha_3^2) r - PK \alpha_3 + 2 PPT \alpha_2}{1} ; \\ & DI := (4 b r^2 v \alpha_1 \alpha_2 - b r^2 v \alpha_3^2 + 2 b r \alpha_2 + 2 r v \alpha_1 + 1) (4 \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2) ; \\ & \text{with}(\text{Optimization}) : \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &> \text{Minimize}(DI, (\text{alpha}[1] \geq \text{alpha}[3], \text{alpha}[2] \geq \text{alpha}[3]), \text{assume} = \text{nonnegative}); \\ &\quad [0., [b = 0., r = 0., v = 0., \alpha_1 = 0., \alpha_2 = 0., \alpha_3 = 0.]] \end{aligned} \quad (3)$$

#Con esto es posible notar que el denominador toma solo valores mayores a cero#
 > solve({N1 > 0}, {alpha[1], alpha[2], alpha[3], r, b, v, PPT, PK}, useassumptions) assuming r > 0, alpha[1] > 0, b > 0, v > 0, PK > 0, PPT > 0, alpha[3] > 0, alpha[2] > 0;

$$\begin{aligned} &\left\{ 0 < PK, 0 < PPT, 0 < b, 0 < r, 0 < v, 0 < \alpha_1, 0 < \alpha_2, 0 < \alpha_3, PK \right. \\ &\quad < \frac{PPT(4br\alpha_2^2 + rv\alpha_3^2 + 2\alpha_2)}{\alpha_3(2br\alpha_2 + 2rv\alpha_1 + 1)}, \alpha_1 < \frac{1}{4} \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2} \left. \right\}, \left\{ \alpha_1 = \frac{1}{4} \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2}, 0 < PK, 0 \right. \\ &\quad < PPT, 0 < b, 0 < r, 0 < v, 0 < \alpha_2, 0 < \alpha_3, PK < \frac{2PPT\alpha_2}{\alpha_3} \left. \right\}, \left\{ 0 < PK, 0 < PPT, 0 \right. \\ &\quad < b, 0 < r, 0 < v, 0 < \alpha_2, 0 < \alpha_3, PK < \frac{PPT(4br\alpha_2^2 + rv\alpha_3^2 + 2\alpha_2)}{\alpha_3(2br\alpha_2 + 2rv\alpha_1 + 1)}, \frac{1}{4} \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2} \\ &\quad < \alpha_1 \left. \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

#La 3ra solución es factible, Ahora el mismo estudio para a[t1]#

$$\begin{aligned} &> a[t2] := \frac{2\alpha_1\beta_2 - \alpha_3\beta_1}{4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2}; \\ a_{t2} &:= \frac{1}{4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2} \left(\frac{2\alpha_1(v(2PK\alpha_1 - PPT\alpha_3)r + PK)}{1 + 4bv\left(\alpha_1\alpha_2 - \frac{1}{4}\alpha_3^2\right)r^2 + (2b\alpha_2 + 2v\alpha_1)r} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha_3(-b(PK\alpha_3 - 2PPT\alpha_2)r + PPT)}{1 + 4bv\left(\alpha_1\alpha_2 - \frac{1}{4}\alpha_3^2\right)r^2 + (2b\alpha_2 + 2v\alpha_1)r} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} &> \text{simplify}((5), 'size') \\ &\quad \frac{(4vPK\alpha_1^2 - 2vPPT\alpha_3\alpha_1 + b\alpha_3(PK\alpha_3 - 2PPT\alpha_2))r + 2PK\alpha_1 - PPT\alpha_3}{(4br^2v\alpha_1\alpha_2 - br^2v\alpha_3^2 + 2br\alpha_2 + 2rv\alpha_1 + 1)(4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2)} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} &> N2 := (4vPK\alpha_1^2 - 2vPPT\alpha_3\alpha_1 + b\alpha_3(PK\alpha_3 - 2PPT\alpha_2))r + 2PK\alpha_1 - PPT\alpha_3; \\ N2 &:= (4vPK\alpha_1^2 - 2vPPT\alpha_3\alpha_1 + b\alpha_3(PK\alpha_3 - 2PPT\alpha_2))r + 2PK\alpha_1 - PPT\alpha_3 \end{aligned} \quad (7)$$

> solve({N2 > 0}, {alpha[1], alpha[2], alpha[3], r, b, v, PPT, PK}, useassumptions) assuming r > 0, alpha[1] > 0, b > 0, v > 0, PK > 0, PPT > 0, alpha[3] > 0, alpha[2] > 0;

(8)

$$\left\{ 0 < PPT, 0 < b, 0 < r, 0 < v, 0 < \alpha_1, 0 < \alpha_2, 0 < \alpha_3, \alpha_2 < \frac{1}{4} \frac{\alpha_3^2}{\alpha_1}, \right. \quad (8)$$

$$\left. \frac{PPT \alpha_3 (2br\alpha_2 + 2rv\alpha_1 + 1)}{br\alpha_3^2 + 4rv\alpha_1^2 + 2\alpha_1} < PK \right\}, \left\{ \alpha_2 = \frac{1}{4} \frac{\alpha_3^2}{\alpha_1}, 0 < PPT, 0 < b, 0 < r, 0 \right.$$

$$\left. < v, 0 < \alpha_1, 0 < \alpha_3, \frac{1}{2} \frac{PPT \alpha_3}{\alpha_1} < PK \right\}, \left\{ 0 < PPT, 0 < b, 0 < r, 0 < v, 0 < \alpha_1, 0 \right.$$

$$\left. < \alpha_3, \frac{PPT \alpha_3 (2br\alpha_2 + 2rv\alpha_1 + 1)}{br\alpha_3^2 + 4rv\alpha_1^2 + 2\alpha_1} < PK, \frac{1}{4} \frac{\alpha_3^2}{\alpha_1} < \alpha_2 \right\}$$

> #La 3ra solución es factible#

> #Así, encontramos un rango para la relación $\frac{PPT}{PK}$ para que $a[t1]$ y $a[t2]$ sean positivos.#

$$\left[\frac{\alpha_3 (2br\alpha_2 + 2rv\alpha_1 + 1)}{4br\alpha_2^2 + rv\alpha_3^2 + 2\alpha_2} \right] < \frac{PPT}{PK} < \frac{br\alpha_3^2 + 4rv\alpha_1^2 + 2\alpha_1}{\alpha_3 (2br\alpha_2 + 2rv\alpha_1 + 1)} \#$$

Anexo 9. Comportamiento de los esfuerzos al variar el costo por multitasking

$$\beta_1 := (-b * (PK * \alpha_3 - 2 * PPT * \alpha_2) * r + PPT) / (1 + 4 * b * v * (\alpha_1 * \alpha_2) - (1/4) * \alpha_3^2 * r^2 + (2 * b * \alpha_2 + 2 * v * \alpha_1) * r) :$$

$$\beta_2 := (v * (2 * PK * \alpha_1 - PPT * \alpha_3) * r + PK) / (1 + 4 * b * v * (\alpha_1 * \alpha_2) - (1/4) * \alpha_3^2 * r^2 + (2 * b * \alpha_2 + 2 * v * \alpha_1) * r) :$$

$$\begin{aligned} L := & 1/128 (128 (\alpha_1 \alpha_2 - 1/4 \alpha_3^2)^3 v^2 b^2 U r^4 + 128 (\alpha_1 \alpha_2) \\ & - 1/4 \alpha_3^2) v b ((U \alpha_1 \alpha_2)^2 + 1/8 PPT^2 \alpha_2^2 + (-1/4 U \alpha_3) \\ & ^2 - 1/8 PK PPT \alpha_3) \alpha_2 + 1/32 PK^2 \alpha_3^2) b + v ((U \alpha_2) + 1/8 PK \\ & ^2) \alpha_1^2 + (-1/4 U \alpha_3^2 - 1/8 PK PPT \alpha_3) \alpha_1 + 1/32 PPT \\ & ^2 \alpha_3^2) r^3 + ((32 U \alpha_1 \alpha_2)^3 - 8 PPT^2 \alpha_2^3 \\ & + (8 PK PPT \alpha_3 - 8 U \alpha_3^2) \alpha_2^2 - 2 PK^2 \alpha_3^2 \alpha_2) b^2 \\ & + 128 v ((U \alpha_2)^2 + 1/8 PK^2 \alpha_2) \alpha_1^2 + (1/8 PPT^2 \alpha_2^2 + (-3 \\ & /8 U \alpha_3^2 - 1/16 PK PPT \alpha_3) \alpha_2 - 1/16 PK^2 \alpha_3^2) \alpha_1 + 1 \\ & /32 U \alpha_3^4 + 3/64 PK PPT \alpha_3^3 - 1/16 PPT^2 \alpha_2 \alpha_3^2) b \\ & + 32 \alpha_1 v^2 ((U \alpha_2 - 1/4 PK^2) \alpha_1^2 - 1/4 \alpha_3 (-PK PPT \\ & + U \alpha_3) \alpha_1 - 1/16 PPT^2 \alpha_3^2) r^2 + (((4 PK^2 \alpha_2) \\ & + 32 U \alpha_2^2) \alpha_1 - 8 PPT^2 \alpha_2^2 + (8 PK PPT \alpha_3 - 8 U \alpha_3) \\ & ^2) \alpha_2 - 3 PK^2 \alpha_3^2) b + 32 v ((U \alpha_2 - 1/4 PK^2) \alpha_1^2 + (1/8 PPT \\ & ^2 \alpha_2 - 1/4 \alpha_3 (-PK PPT + U \alpha_3)) \alpha_1 - 3/32 PPT^2 \alpha_3^2) r \\ & + (-2 PK^2 + 8 U \alpha_2) \alpha_1 - 2 U \alpha_3^2 + 2 PK PPT \alpha_3 - 2 PPT \\ & ^2 \alpha_2) / ((\alpha_1 \alpha_2 - 1/4 \alpha_3^2) (1/4 + b v (\alpha_1 \alpha_2 - 1 \\ & /4 \alpha_3^2) r^2 + (1/2 b \alpha_2 + 1/2 v \alpha_1) r)^2) : \end{aligned}$$

$$a[t1] := \frac{2 \cdot \beta_1 \cdot \alpha_2 - \alpha_3 \beta_2}{(4 \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2) - \alpha_3^2} :$$

$$a[t2] := \frac{2 \alpha_1 \beta_2 - \alpha_3 \beta_1}{4 \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2} :$$

$$\text{derivada1} := \text{diff}(a[t1], \alpha_3) ;$$

$$\begin{aligned} \text{derivada1} := & \frac{1}{4 \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2} \left(- \frac{2 \alpha_2 b PK r}{1 + 4 b v \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r^2 + (2 b \alpha_2 + 2 v \alpha_1) r} \right. \\ & + \frac{4 \alpha_2 (-b (PK \alpha_3 - 2 PPT \alpha_2) r + PPT) b v \alpha_3 r^2}{\left(1 + 4 b v \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r^2 + (2 b \alpha_2 + 2 v \alpha_1) r \right)^2} \\ & \left. - \frac{v (2 PK \alpha_1 - PPT \alpha_3) r + PK}{1 + 4 b v \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r^2 + (2 b \alpha_2 + 2 v \alpha_1) r} \right) \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha_3 v PPT r}{1 + 4 b v \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r^2 + (2 b \alpha_2 + 2 v \alpha_1) r} \\
& - \frac{2 \alpha_3^2 \left(v (2 PK \alpha_1 - PPT \alpha_3) r + PK \right) b v r^2}{\left(1 + 4 b v \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r^2 + (2 b \alpha_2 + 2 v \alpha_1) r \right)^2} \\
& + \frac{1}{\left(4 \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2 \right)^2} \left(2 \left(\frac{2 \alpha_2 (-b (PK \alpha_3 - 2 PPT \alpha_2) r + PPT)}{1 + 4 b v \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r^2 + (2 b \alpha_2 + 2 v \alpha_1) r} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\alpha_3 \left(v (2 PK \alpha_1 - PPT \alpha_3) r + PK \right)}{1 + 4 b v \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r^2 + (2 b \alpha_2 + 2 v \alpha_1) r} \right) \alpha_3 \right)
\end{aligned}$$

> simplify((1), 'size')

$$\begin{aligned}
& \left(-32 \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) \left(b (PK \alpha_1 - 2 PPT \alpha_3) \alpha_2^2 + \left(\frac{3}{4} b PK \alpha_3^2 + v PK \alpha_1^2 \right. \right. \right. \quad (2) \\
& \left. \left. - v PPT \alpha_1 \alpha_3 \right) \alpha_2 + \frac{3}{4} \alpha_3^2 v \left(PK \alpha_1 - \frac{1}{3} PPT \alpha_3 \right) \right) v b r^3 + \left(-16 b^2 (PK \alpha_1 \right. \\
& \left. - PPT \alpha_3) \alpha_2^3 - 4 b (PK b \alpha_3^2 + 12 PK v \alpha_1^2 - 16 PPT v \alpha_1 \alpha_3) \alpha_2^2 - 16 \left(b PK \alpha_1 \alpha_3^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} b PPT \alpha_3^3 + v PK \alpha_1^3 - v PPT \alpha_1^2 \alpha_3 \right) v \alpha_2 + 3 b v PK \alpha_3^4 - 4 v^2 PK \alpha_1^2 \alpha_3^2 \right) r^2 \\
& - 16 (b \alpha_2 + v \alpha_1) \left((PK \alpha_1 - PPT \alpha_3) \alpha_2 + \frac{1}{4} PK \alpha_3^2 \right) r + (-4 PK \alpha_1 \\
& + 4 PPT \alpha_3) \alpha_2 - PK \alpha_3^2 \Big/ \left((4 b r^2 v \alpha_1 \alpha_2 - b r^2 v \alpha_3^2 + 2 b r \alpha_2 + 2 r v \alpha_1 \right. \\
& \left. + 1)^2 (4 \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2)^2 \right)
\end{aligned}$$

> derivada2 := diff(a[t2], alpha[3]);

$$\begin{aligned}
derivada2 := & \frac{1}{4 \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2} \left(- \frac{2 \alpha_1 v PPT r}{1 + 4 b v \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r^2 + (2 b \alpha_2 + 2 v \alpha_1) r} \right. \quad (3) \\
& + \frac{4 \alpha_1 \left(v (2 PK \alpha_1 - PPT \alpha_3) r + PK \right) b v \alpha_3 r^2}{\left(1 + 4 b v \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r^2 + (2 b \alpha_2 + 2 v \alpha_1) r \right)^2} \\
& \left. - \frac{-b (PK \alpha_3 - 2 PPT \alpha_2) r + PPT}{1 + 4 b v \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r^2 + (2 b \alpha_2 + 2 v \alpha_1) r} \right)
\end{aligned}$$

```

+ 
$$\frac{\alpha_3 b PK r}{1 + 4 b v \left( \alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r^2 + (2 b \alpha_2 + 2 v \alpha_1) r}$$

- 
$$\frac{2 \alpha_3^2 \left( -b (PK \alpha_3 - 2 PPT \alpha_2) r + PPT \right) b v r^2}{\left( 1 + 4 b v \left( \alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r^2 + (2 b \alpha_2 + 2 v \alpha_1) r \right)^2}$$

+ 
$$\frac{1}{\left( 4 \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2 \right)^2} \left( 2 \left( \frac{2 \alpha_1 \left( v (2 PK \alpha_1 - PPT \alpha_3) r + PK \right)}{1 + 4 b v \left( \alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r^2 + (2 b \alpha_2 + 2 v \alpha_1) r} \right. \right.$$

- 
$$\left. \left. \frac{\alpha_3 \left( -b (PK \alpha_3 - 2 PPT \alpha_2) r + PPT \right)}{1 + 4 b v \left( \alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r^2 + (2 b \alpha_2 + 2 v \alpha_1) r} \right) \alpha_3 \right)$$

> simplify( (3), 'size' )

> with(Optimization);
  [ImportMPS, Interactive, LPSolve, LSSolve, Maximize, Minimize, NLPsolve, QPSolve] (4)
> solve( {derivada1 < 0, alpha[1] > alpha[3], alpha[2] > alpha[3]}, {alpha[1], alpha[2],
  alpha[3], r, b, v, PPT, PK}, useassumptions) assuming r > 0, alpha[1] > 0, b > 0, v > 0,
  PK > 0, PPT > 0, alpha[3] > 0, alpha[2] > 0;

Warning, computation interrupted
> Maximize(derivada1, {a[t1] ≥ 0, a[t2] ≥ 0, alpha[1] ≥ alpha[3], alpha[2] ≥ alpha[3],
  alpha[1] ≥ 1, alpha[2] ≥ 1, alpha[3] ≥ 1, b ≥ 1, v ≥ 1, r ≥ 1, PPT ≥ 1}, assume
  = nonnegative);
[-8.40912617786524395 10-9, [PK = 6162.84596823024, PPT = 12756.2988781093, b
  = 45.7506550045591, r = 44.6035369148002, v = 8605.01907647752, α1
  = 2524.14445807416, α2 = 133.325484254574, α3 = 1.00000320916646]] (5)

> Minimize(derivada1, {a[t1] ≥ 0, a[t2] ≥ 0, alpha[1] ≥ alpha[3], alpha[2] ≥ alpha[3],
  alpha[1] ≥ 1, alpha[2] ≥ 1, alpha[3] ≥ 1, b ≥ 1, v ≥ 1, r ≥ 1, PPT ≥ 1}, assume
  = nonnegative);
[-9.73352460186514219 1013, [PK = 6.56644917315827 1014, PPT
  = 4.70114996415331 1014, b = 1., r = 1., v = 1., α1 = 1., α2 = 1., α3
  = 0.999999999999999]] (6)

>
>
> #Así es posible notar que la derivada  $\frac{da[t1]}{d(\alpha[3])}$  siempre será negativa mientras los esfuerzos
  sean positivos#

```

Así, por simetría, es posible notar que $\frac{da_{t_1}}{d\alpha_3}$ y $\frac{da_{t_2}}{d\alpha_3}$ serán menores a cero $\forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, $r, \sigma_{t_1}^2, \sigma_{t_2}^2, \vartheta_{t_1}^2, \vartheta_{t_2}^2, Utilidad_{Alt.}, PK$ y $PPT \in \mathbb{N}(C_2)$.

Anexo 10. Comportamiento de los esfuerzos al variar las varianzas correspondientes

$$\text{beta}[1] := (-b * (PK * \alpha[3] - 2 * PPT * \alpha[2]) * r + PPT) / (1 + 4 * b * v * (\alpha[1] * \alpha[2] - (1/4) * \alpha[3]^2) * r^2 + (2 * b * \alpha[2] + 2 * v * \alpha[1]) * r) :$$

$$\text{beta}[2] := (v * (2 * PK * \alpha[1] - PPT * \alpha[3]) * r + PK) / (1 + 4 * b * v * (\alpha[1] * \alpha[2] - (1/4) * \alpha[3]^2) * r^2 + (2 * b * \alpha[2] + 2 * v * \alpha[1]) * r) :$$

$$\begin{aligned} L := & 1/128 (128 (\alpha[1] \alpha[2] - 1/4 \alpha[3]^2)^3 v^2 b^2 U r^4 + 128 (\alpha[1] \alpha[2] - \\ & - 1/4 \alpha[3]^2) v b ((U \alpha[1] \alpha[2]^2 + 1/8 PPT^2 \alpha[2]^2 + (-1/4 U \alpha[3] \\ & ^2 - 1/8 PK PPT \alpha[3]) \alpha[2] + 1/32 PK^2 \alpha[3]^2) b + v ((U \alpha[2] + 1/8 PK \\ & ^2) \alpha[1]^2 + (-1/4 U \alpha[3]^2 - 1/8 PK PPT \alpha[3]) \alpha[1] + 1/32 PPT \\ & ^2 \alpha[3]^2) r^3 + (32 U \alpha[1] \alpha[2]^3 - 8 PPT^2 \alpha[2]^3 \\ & + (8 PK PPT \alpha[3] - 8 U \alpha[3]^2) \alpha[2]^2 - 2 PK^2 \alpha[3]^2 \alpha[2]) b^2 \\ & + 128 v ((U \alpha[2]^2 + 1/8 PK^2 \alpha[2]) \alpha[1]^2 + (1/8 PPT^2 \alpha[2]^2 + (-3 \\ & /8 U \alpha[3]^2 - 1/16 PK PPT \alpha[3]) \alpha[2] - 1/16 PK^2 \alpha[3]^2) \alpha[1] + 1 \\ & /32 U \alpha[3]^4 + 3/64 PK PPT \alpha[3]^3 - 1/16 PPT^2 \alpha[2] \alpha[3]^2) b \\ & + 32 \alpha[1] v^2 ((U \alpha[2] - 1/4 PK^2) \alpha[1]^2 - 1/4 \alpha[3] (-PK PPT \\ & + U \alpha[3]) \alpha[1] - 1/16 PPT^2 \alpha[3]^2) r^2 + ((4 PK^2 \alpha[2] \\ & + 32 U \alpha[2]^2) \alpha[1] - 8 PPT^2 \alpha[2]^2 + (8 PK PPT \alpha[3] - 8 U \alpha[3] \\ & ^2) \alpha[2] - 3 PK^2 \alpha[3]^2) b + 32 v ((U \alpha[2] - 1/4 PK^2) \alpha[1]^2 + (1/8 PPT \\ & ^2 \alpha[2] - 1/4 \alpha[3] (-PK PPT + U \alpha[3]) \alpha[1] - 3/32 PPT^2 \alpha[3]^2) r \\ & + (-2 PK^2 + 8 U \alpha[2]) \alpha[1] - 2 U \alpha[3]^2 + 2 PK PPT \alpha[3] - 2 PPT \\ & ^2 \alpha[2]) / ((\alpha[1] \alpha[2] - 1/4 \alpha[3]^2) (1/4 + b v (\alpha[1] \alpha[2] - 1 \\ & /4 \alpha[3]^2) r^2 + (1/2 b \alpha[2] + 1/2 v \alpha[1]) r))^2) : \end{aligned}$$

$$\left[\begin{aligned} a[t1] &:= \frac{2 \cdot \text{beta}[1] \cdot \alpha[2] - \alpha[3] \text{beta}[2]}{(4 \cdot \alpha[1] \cdot \alpha[2]) - \alpha[3]^2} ; \\ a[t2] &:= \frac{2 \cdot \text{beta}[2] \cdot \alpha[1] - \alpha[3] \text{beta}[1]}{(4 \cdot \alpha[2] \cdot \alpha[1]) - \alpha[3]^2} ; \end{aligned} \right.$$

$$\text{Derivadaxx} := \text{diff}(a[t1], v);$$

$$\frac{1}{4 \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2} \left(\begin{aligned} & \frac{2 \alpha_2 \left(-b \left(PK \alpha_3 - 2 PPT \alpha_2 \right) r + PPT \right) \left(4 b \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r^2 + 2 \alpha_1 r \right)}{\left(1 + 4 b v \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r^2 + (2 b \alpha_2 + 2 v \alpha_1) r \right)^2} \\ & - \frac{\alpha_3 \left(2 PK \alpha_1 - PPT \alpha_3 \right) r}{1 + 4 b v \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r^2 + (2 b \alpha_2 + 2 v \alpha_1) r} \end{aligned} \right) \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha_3 \left(v \left(2 PK \alpha_1 - PPT \alpha_3 \right) r + PK \right) \left(4 b \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r^2 + 2 \alpha_1 r \right)}{\left(1 + 4 b v \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r^2 + \left(2 b \alpha_2 + 2 v \alpha_1 \right) r \right)^2} \\
& \text{simplificar} \\
& = \frac{r \left(2 b r \alpha_2 + 1 \right) \left(PK b r \alpha_3 - 2 PPT b r \alpha_2 - PPT \right)}{\left(4 b r^2 v \alpha_1 \alpha_2 - b r^2 v \alpha_3^2 + 2 b r \alpha_2 + 2 r v \alpha_1 + 1 \right)^2} \quad (2)
\end{aligned}$$

Derivadayy := diff(a[t2], b);

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4 \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2} \left(\right. \\
& - \frac{2 \alpha_1 \left(v \left(2 PK \alpha_1 - PPT \alpha_3 \right) r + PK \right) \left(4 v \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r^2 + 2 \alpha_2 r \right)}{\left(1 + 4 b v \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r^2 + \left(2 b \alpha_2 + 2 v \alpha_1 \right) r \right)^2} \\
& + \frac{\alpha_3 \left(PK \alpha_3 - 2 PPT \alpha_2 \right) r}{1 + 4 b v \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r^2 + \left(2 b \alpha_2 + 2 v \alpha_1 \right) r} \\
& \left. + \frac{\alpha_3 \left(-b \left(PK \alpha_3 - 2 PPT \alpha_2 \right) r + PPT \right) \left(4 v \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r^2 + 2 \alpha_2 r \right)}{\left(1 + 4 b v \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r^2 + \left(2 b \alpha_2 + 2 v \alpha_1 \right) r \right)^2} \right) \\
& \text{simplificar} \\
& =
\end{aligned} \quad (3)$$

Error, unable to parse



$$- \frac{r \left(2 PK r v \alpha_1 - PPT r v \alpha_3 + PK \right) \left(2 r v \alpha_1 + 1 \right)}{\left(4 b r^2 v \alpha_1 \alpha_2 - b r^2 v \alpha_3^2 + 2 b r \alpha_2 + 2 r v \alpha_1 + 1 \right)^2} \quad (4)$$

#Notamos que la condición para que el esfuerzo varía en sentido contrario al cambio de sus costos de varianza es#

$$\# \frac{b r \alpha_3}{\left(2 b r \alpha_2 + 1 \right)} < \frac{PPT}{PK} < \frac{2 r v \alpha_1 + 1}{v r \alpha_3} \#$$

with (Optimization)

$$\left[\text{ImportMPS, Interactive, LPSolve, LSSolve, Maximize, Minimize, NLPsolve, QPSolve} \right] \quad (5)$$

Minimize(*Derivadaxx*, {beta[1] ≥ 0, beta[2] ≥ 0, alpha[1] ≥ alpha[3], alpha[2] ≥ alpha[3],
alpha[1] ≥ 1, alpha[2] ≥ 0, alpha[3] ≥ 0, b ≥ 0, v ≥ 0, r ≥ 0, PPT ≥ 0}, *assume*
= *nonnegative*)

$$\left[-1.79203331856088394 \cdot 10^{37}, [PK = 9.69513008821668 \cdot 10^{-8}, PPT \right. \quad (6)$$

$$= 1.79551166983331 \cdot 10^{17}, b = 2.78746515934415 \cdot 10^{11}, r = 9.98062752066240 \cdot 10^{19}, v$$

$$= 0., \alpha_1 = 1., \alpha_2 = 6.20283739575075 \cdot 10^{18}, \alpha_3 = 0.]]$$

Maximize(*Derivadaxx*, {beta[1] ≥ 0, beta[2] ≥ 0, alpha[1] ≥ alpha[3], alpha[2] ≥ alpha[3],
alpha[1] ≥ 1, alpha[2] ≥ 0, alpha[3] ≥ 0, b ≥ 0, v ≥ 0, r ≥ 0, PPT ≥ 0}, *assume*
= *nonnegative*)

$$\left[-1.10163704392099115 \cdot 10^{15}, [PK = 1.19583423141641, PPT = 0.418966623281696, b \quad (7)$$

$$= 1.04286816941021, r = 1.13864401719022, v = 1.36828302373010, \alpha_1$$

$$= 1.42847441616279, \alpha_2 = 0.985823467853555, \alpha_3 = 0.985823467853555]]$$

#Notamos que la condición para que el esfuerzo varía en sentido contrario al cambio de sus costos de
varianza es#

$$\# \frac{br\alpha_3}{(2br\alpha_2 + 1)} < \frac{PPT}{PK} < \frac{2rv\alpha_1 + 1}{vr\alpha_3} \#$$

Anexo 11. Comportamiento de los esfuerzos al variar el coeficiente de aversión al riesgo r .

$$\text{beta}[1] := (-b * (PK * \alpha[3] - 2 * PPT * \alpha[2]) * r + PPT) / (1 + 4 * b * v * (\alpha[1] * \alpha[2] - (1/4) * \alpha[3]^2) * r^2 + (2 * b * \alpha[2] + 2 * v * \alpha[1]) * r) :$$

$$\text{beta}[2] := (v * (2 * PK * \alpha[1] - PPT * \alpha[3]) * r + PK) / (1 + 4 * b * v * (\alpha[1] * \alpha[2] - (1/4) * \alpha[3]^2) * r^2 + (2 * b * \alpha[2] + 2 * v * \alpha[1]) * r) :$$

$$\begin{aligned} L := & 1/128 (128 (\alpha[1] \alpha[2] - 1/4 \alpha[3]^2)^3 v^2 b^2 U r^4 + 128 (\alpha[1] \alpha[2] - 1/4 \alpha[3]^2) v b ((U \alpha[1] \alpha[2]^2 + 1/8 PPT^2 \alpha[2]^2 + (-1/4 U \alpha[3]^2 - 1/8 PK PPT \alpha[3]) \alpha[2] + 1/32 PK^2 \alpha[3]^2) b + v ((U \alpha[2] + 1/8 PK^2 \alpha[3]^2) \alpha[1]^2 + (-1/4 U \alpha[3]^2 - 1/8 PK PPT \alpha[3]) \alpha[1] + 1/32 PPT^2 \alpha[3]^2) r^3 + ((32 U \alpha[1] \alpha[2] - 1/4 PK^2 \alpha[3]) \alpha[2]^3 - 8 PPT^2 \alpha[2]^3 + (8 PK PPT \alpha[3] - 8 U \alpha[3]^2) \alpha[2]^2 - 2 PK^2 \alpha[3]^2 \alpha[2]) b^2 + 128 v ((U \alpha[2]^2 + 1/8 PK^2 \alpha[2]) \alpha[1]^2 + (1/8 PPT^2 \alpha[2]^2 + (-3/8 U \alpha[3]^2 - 1/16 PK PPT \alpha[3]) \alpha[2] - 1/16 PK^2 \alpha[3]^2) \alpha[1] + 1/32 U \alpha[3]^4 + 3/64 PK PPT \alpha[3]^3 - 1/16 PPT^2 \alpha[2] \alpha[3]^2) b + 32 \alpha[1] v^2 ((U \alpha[2] - 1/4 PK^2) \alpha[1]^2 - 1/4 \alpha[3] (-PK PPT + U \alpha[3]) \alpha[1] - 1/16 PPT^2 \alpha[3]^2)) r^2 + (((4 PK^2 \alpha[2] + 32 U \alpha[2]^2) \alpha[1] - 8 PPT^2 \alpha[2]^2 + (8 PK PPT \alpha[3] - 8 U \alpha[3]^2) \alpha[2] - 3 PK^2 \alpha[3]^2) b + 32 v ((U \alpha[2] - 1/4 PK^2) \alpha[1]^2 + (1/8 PPT^2 \alpha[2]^2 - 1/4 \alpha[3] (-PK PPT + U \alpha[3])) \alpha[1] - 3/32 PPT^2 \alpha[3]^2)) r + (-2 PK^2 + 8 U \alpha[2]) \alpha[1] - 2 U \alpha[3]^2 + 2 PK PPT \alpha[3] - 2 PPT^2 \alpha[2]) / ((\alpha[1] \alpha[2] - 1/4 \alpha[3]^2) (1/4 + b v (\alpha[1] \alpha[2] - 1/4 \alpha[3]^2) r^2 + (1/2 b \alpha[2] + 1/2 v \alpha[1]) r))^2) : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[\begin{aligned} > a[t1] := \frac{2 \cdot \text{beta}[1] \cdot \alpha[2] - \alpha[3] \text{beta}[2]}{(4 \cdot \alpha[1] \cdot \alpha[2]) - \alpha[3]^2} ; \\ > a[t2] := \frac{2 \cdot \text{beta}[2] \cdot \alpha[1] - \alpha[3] \text{beta}[1]}{(4 \cdot \alpha[2] \cdot \alpha[1]) - \alpha[3]^2} ; \\ > \text{with}(\text{Optimization}) : \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\text{derivada1} := \text{diff}(a[t1], r);$$

$$\frac{1}{4 \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2} \left(- \frac{2 \alpha_2 b (PK \alpha_3 - 2 PPT \alpha_2)}{1 + 4 b v \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r^2 + (2 b \alpha_2 + 2 v \alpha_1) r} \right. \quad (1)$$

$$\left. - \left(2 \alpha_2 \left(-b (PK \alpha_3 - 2 PPT \alpha_2) r + PPT \right) \left(8 b v \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r + 2 b \alpha_2 \right) \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
& + 2v\alpha_1) \Big) \Big/ \left(1 + 4bv \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r^2 + (2b\alpha_2 + 2v\alpha_1) r \right)^2 \\
& - \frac{\alpha_3 v (2PK\alpha_1 - PPT\alpha_3)}{1 + 4bv \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r^2 + (2b\alpha_2 + 2v\alpha_1) r} \\
& + \left(\alpha_3 (v (2PK\alpha_1 - PPT\alpha_3) r + PK) \left(8bv \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r + 2b\alpha_2 \right. \right. \\
& \left. \left. + 2v\alpha_1) \right) \Big) \Big/ \left(1 + 4bv \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r^2 + (2b\alpha_2 + 2v\alpha_1) r \right)^2
\end{aligned}$$

simplificar

$$\begin{aligned}
& \left(2 \left(b \left((PK\alpha_2\alpha_3 - 2PPT\alpha_2^2) b + v\alpha_3 \left(PK\alpha_1 - \frac{1}{2} PPT\alpha_3 \right) \right) r^2 + b (PK\alpha_3 \right. \right. \\
& \left. \left. - 2PPT\alpha_2) r - \frac{1}{2} PPT \right) v \right) \Big/ \left(4br^2v\alpha_1\alpha_2 - br^2v\alpha_3^2 + 2br\alpha_2 + 2rv\alpha_1 + 1 \right)^2 \tag{2}
\end{aligned}$$

derivada2 := diff(a[t2], r);

$$\frac{1}{4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2} \left(\frac{2\alpha_1 v (2PK\alpha_1 - PPT\alpha_3)}{1 + 4bv \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r^2 + (2b\alpha_2 + 2v\alpha_1) r} \right) \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(2\alpha_1 (v (2PK\alpha_1 - PPT\alpha_3) r + PK) \left(8bv \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r + 2b\alpha_2 \right. \right. \\
& \left. \left. + 2v\alpha_1) \right) \Big) \Big/ \left(1 + 4bv \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r^2 + (2b\alpha_2 + 2v\alpha_1) r \right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha_3 b (PK\alpha_3 - 2PPT\alpha_2)}{1 + 4bv \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r^2 + (2b\alpha_2 + 2v\alpha_1) r} \\
& + \left(\alpha_3 (-b (PK\alpha_3 - 2PPT\alpha_2) r + PPT) \left(8bv \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r + 2b\alpha_2 \right. \right. \\
& \left. \left. + 2v\alpha_1) \right) \Big) \Big/ \left(1 + 4bv \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r^2 + (2b\alpha_2 + 2v\alpha_1) r \right)^2
\end{aligned}$$

simplificar

$$- \left(\left(\left(4 PK \alpha_1^2 - 2 PPT \alpha_1 \alpha_3 \right) v + \alpha_3 b \left(PK \alpha_3 - 2 PPT \alpha_2 \right) \right) v r^2 + \left(4 PK \alpha_1 - 2 PPT \alpha_3 \right) v r + PK \right) b \Big/ \left(4 b r^2 v \alpha_1 \alpha_2 - b r^2 v \alpha_3^2 + 2 b r \alpha_2 + 2 r v \alpha_1 + 1 \right)^2 \quad (4)$$

#Notamos que ambos denominadores son positivos. Por lo tanto para estudiar el comportamiento de las derivadas con respecto al cero, se estudiarán los Numeradores#

$$NI := 2 \left(b \left(\left(PK \alpha_2 \alpha_3 - 2 PPT \alpha_2^2 \right) b + v \alpha_3 \left(PK \alpha_1 - \frac{1}{2} PPT \alpha_3 \right) \right) r^2 + b \left(PK \alpha_3 - 2 PPT \alpha_2 \right) r - \frac{1}{2} PPT \right) v; \quad (5)$$

$$2 \left(b \left(\left(PK \alpha_2 \alpha_3 - 2 PPT \alpha_2^2 \right) b + v \alpha_3 \left(PK \alpha_1 - \frac{1}{2} PPT \alpha_3 \right) \right) r^2 + b \left(PK \alpha_3 - 2 PPT \alpha_2 \right) r - \frac{1}{2} PPT \right) v$$

$$\text{Maximize}(NI, \{ \text{alpha}[1] \geq \text{alpha}[3], \text{alpha}[2] \geq \text{alpha}[3] \}, \text{assume} = \text{nonnegative});$$

$$\left[-0., \left[PK = 7., PPT = 0., b = 0., r = 0., v = 0., \alpha_1 = 3.000000000000000, \alpha_2 = 0., \alpha_3 = 0. \right] \right] \quad (6)$$

$$N2 := - \left(\left(\left(4 PK \alpha_1^2 - 2 PPT \alpha_1 \alpha_3 \right) v + \alpha_3 b \left(PK \alpha_3 - 2 PPT \alpha_2 \right) \right) v r^2 + \left(4 PK \alpha_1 - 2 PPT \alpha_3 \right) v r + PK \right) b; \quad (7)$$

$$- \left(\left(\left(4 PK \alpha_1^2 - 2 PPT \alpha_1 \alpha_3 \right) v + \alpha_3 b \left(PK \alpha_3 - 2 PPT \alpha_2 \right) \right) v r^2 + \left(4 PK \alpha_1 - 2 PPT \alpha_3 \right) v r + PK \right) b$$

$$\text{Maximize}(N2, \{ \text{alpha}[1] \geq \text{alpha}[3], \text{alpha}[2] \geq \text{alpha}[3] \}, \text{assume} = \text{nonnegative});$$

$$\left[0., \left[PK = 0., PPT = 7., b = 0., r = 0., v = 0., \alpha_1 = 0., \alpha_2 = 3.000000000000000, \alpha_3 = 0. \right] \right] \quad (8)$$

$$\text{Minimize}(NI, \{ \text{alpha}[1] \geq \text{alpha}[3], \text{alpha}[2] \geq \text{alpha}[3] \}, \text{assume} = \text{nonnegative});$$

$$\left[-2.70538485095043117 \cdot 10^{157}, \left[PK = 0., PPT = 1.48648031856918 \cdot 10^{19}, b = 5.44218210429261 \cdot 10^{19}, r = 6.53061852515114 \cdot 10^{19}, v = 4.08782087606525 \cdot 10^{19}, \alpha_1 = 0., \alpha_2 = 2.96846296597779 \cdot 10^{19}, \alpha_3 = 0. \right] \right] \quad (9)$$

$$\text{Minimize}(N2, \{ \text{alpha}[1] \geq \text{alpha}[3], \text{alpha}[2] \geq \text{alpha}[3] \}, \text{assume} = \text{nonnegative});$$

$$\left[-2.70538485095042843 \cdot 10^{157}, \left[PK = 1.48648031856918 \cdot 10^{19}, PPT = 0., b = 4.08782087606525 \cdot 10^{19}, r = 6.53061852515114 \cdot 10^{19}, v = 5.44218210429261 \cdot 10^{19}, \alpha_1 = 2.96846296597779 \cdot 10^{19}, \alpha_2 = 0., \alpha_3 = 0. \right] \right] \quad (10)$$

$$\text{Maximize}(NI, \{ \text{alpha}[1] \geq \text{alpha}[3], \text{alpha}[2] \geq \text{alpha}[3] \}, \text{assume} = \text{nonnegative});$$

$$\left[-0., \left[PK = 7., PPT = 0., b = 0., r = 0., v = 0., \alpha_1 = 3.000000000000000, \alpha_2 = 0., \alpha_3 = 0. \right] \right] \quad (11)$$

#Notamos que las derivadas son siempre negativas para cualquier parámetro definido en el dominio#

Anexo 12. Derivadas de los incentivos con respecto al costo por multitasking

$$\text{beta}[1] := (-b * (PK * \alpha[3] - 2 * PPT * \alpha[2]) * r + PPT) / (1 + 4 * b * v * (\alpha[1] * \alpha[2] - (1/4) * \alpha[3]^2) * r^2 + (2 * b * \alpha[2] + 2 * v * \alpha[1]) * r) :$$

$$\text{beta}[2] := (v * (2 * PK * \alpha[1] - PPT * \alpha[3]) * r + PK) / (1 + 4 * b * v * (\alpha[1] * \alpha[2] - (1/4) * \alpha[3]^2) * r^2 + (2 * b * \alpha[2] + 2 * v * \alpha[1]) * r) :$$

$$\begin{aligned} L := & 1/128 (128 (\alpha[1] \alpha[2] - 1/4 \alpha[3]^2)^3 v^2 b^2 U r^4 + 128 (\alpha[1] \alpha[2] - 1/4 \alpha[3]^2) v b ((U \alpha[1] \alpha[2]^2 + 1/8 PPT^2 \alpha[2]^2 + (-1/4 U \alpha[3] \\ & ^2 - 1/8 PK PPT \alpha[3]) \alpha[2] + 1/32 PK^2 \alpha[3]^2) b + v ((U \alpha[2] + 1/8 PK \\ & ^2) \alpha[1]^2 + (-1/4 U \alpha[3]^2 - 1/8 PK PPT \alpha[3]) \alpha[1] + 1/32 PPT \\ & ^2 \alpha[3]^2)) r^3 + ((32 U \alpha[1] \alpha[2]^3 - 8 PPT^2 \alpha[2]^3 \\ & + (8 PK PPT \alpha[3] - 8 U \alpha[3]^2) \alpha[2]^2 - 2 PK^2 \alpha[3]^2 \alpha[2]) b^2 \\ & + 128 v ((U \alpha[2]^2 + 1/8 PK^2 \alpha[2]) \alpha[1]^2 + (1/8 PPT^2 \alpha[2]^2 + (-3 \\ & /8 U \alpha[3]^2 - 1/16 PK PPT \alpha[3]) \alpha[2] - 1/16 PK^2 \alpha[3]^2) \alpha[1] + 1 \\ & /32 U \alpha[3]^4 + 3/64 PK PPT \alpha[3]^3 - 1/16 PPT^2 \alpha[2] \alpha[3]^2) b \\ & + 32 \alpha[1] v^2 ((U \alpha[2] - 1/4 PK^2) \alpha[1]^2 - 1/4 \alpha[3] (-PK PPT \\ & + U \alpha[3]) \alpha[1] - 1/16 PPT^2 \alpha[3]^2)) r^2 + (((4 PK^2 \alpha[2] \\ & + 32 U \alpha[2]^2) \alpha[1] - 8 PPT^2 \alpha[2]^2 + (8 PK PPT \alpha[3] - 8 U \alpha[3] \\ & ^2) \alpha[2] - 3 PK^2 \alpha[3]^2) b + 32 v ((U \alpha[2] - 1/4 PK^2) \alpha[1]^2 + (1/8 PPT \\ & ^2 \alpha[2] - 1/4 \alpha[3] (-PK PPT + U \alpha[3])) \alpha[1] - 3/32 PPT^2 \alpha[3]^2)) r \\ & + (-2 PK^2 + 8 U \alpha[2]) \alpha[1] - 2 U \alpha[3]^2 + 2 PK PPT \alpha[3] - 2 PPT \\ & ^2 \alpha[2]) / ((\alpha[1] \alpha[2] - 1/4 \alpha[3]^2) (1/4 + b v (\alpha[1] \alpha[2] - 1 \\ & /4 \alpha[3]^2) r^2 + (1/2 b \alpha[2] + 1/2 v \alpha[1]) r))^2) : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[\begin{aligned} > a[t1] := \frac{2 \cdot \text{beta}[1] \cdot \alpha[2] - \alpha[3] \text{beta}[2]}{(4 \cdot \alpha[1] \cdot \alpha[2]) - \alpha[3]^2} : \\ > a[t2] := \frac{2 \cdot \text{beta}[2] \cdot \alpha[1] - \alpha[3] \text{beta}[1]}{(4 \cdot \alpha[2] \cdot \alpha[1]) - \alpha[3]^2} : \\ > \text{with}(\text{Optimization}) : \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\text{derivada1} := \text{diff}(\text{beta}[1], \alpha[3]);$$

$$\frac{b PK r}{1 + 4 b v \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r^2 + (2 b \alpha_2 + 2 v \alpha_1) r} \quad (1)$$

$$+ \frac{2 \left(-b \left(-2 \alpha_2 PPT + PK \alpha_3 \right) r + PPT \right) b v \alpha_3 r^2}{\left(1 + 4 b v \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) r^2 + (2 b \alpha_2 + 2 v \alpha_1) r \right)^2}$$

simplificar

$$\frac{-\left(b r \left(4 PK b r^2 v \alpha_1 \alpha_2 + PK b r^2 v \alpha_3^2 - 4 PPT b r^2 v \alpha_2 \alpha_3 + 2 PK b r \alpha_2 + 2 PK r v \alpha_1 - 2 PPT r v \alpha_3 + PK \right) \right)}{\left(4 b r^2 v \alpha_1 \alpha_2 - b r^2 v \alpha_3^2 + 2 b r \alpha_2 + 2 r v \alpha_1 + 1 \right)^2} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
\text{derivada2} &:= \text{diff}(\text{beta}[2], \text{alpha}[3]); \\
&= \frac{PPT \, v \, r}{1 + 4 \, b \, v \left(\alpha_1 \, \alpha_2 - \frac{1}{4} \, \alpha_3^2 \right) r^2 + (2 \, b \, \alpha_2 + 2 \, v \, \alpha_1) r} \\
&\quad + \frac{2 \left(v \left(2 \, PK \, \alpha_1 - PPT \, \alpha_3 \right) r + PK \right) b \, v \, \alpha_3 \, r^2}{\left(1 + 4 \, b \, v \left(\alpha_1 \, \alpha_2 - \frac{1}{4} \, \alpha_3^2 \right) r^2 + (2 \, b \, \alpha_2 + 2 \, v \, \alpha_1) r \right)^2}
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
&\text{simplificar} \\
&= \frac{v r \left(4 \, PK \, b \, r^2 \, v \, \alpha_1 \, \alpha_3 - 4 \, PPT \, b \, r^2 \, v \, \alpha_1 \, \alpha_2 - PPT \, b \, r^2 \, v \, \alpha_3^2 + 2 \, PK \, b \, r \, \alpha_3 - 2 \, PPT \, b \, r \, \alpha_2 - 2 \, PPT \, r \, v \, \alpha_1 - PPT \right)}{\left(4 \, b \, r^2 \, v \, \alpha_1 \, \alpha_2 - b \, r^2 \, v \, \alpha_3^2 + 2 \, b \, r \, \alpha_2 + 2 \, r \, v \, \alpha_1 + 1 \right)^2}
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
N1 &:= -b r \left(4 \, PK \, b \, r^2 \, v \, \alpha_1 \, \alpha_2 + PK \, b \, r^2 \, v \, \alpha_3^2 - 4 \, PPT \, b \, r^2 \, v \, \alpha_2 \, \alpha_3 + 2 \, PK \, b \, r \, \alpha_2 + 2 \, PK \, r \, v \, \alpha_1 - 2 \, PPT \, r \, v \, \alpha_3 + PK \right); \\
&- b r \left(4 \, PK \, b \, r^2 \, v \, \alpha_1 \, \alpha_2 + PK \, b \, r^2 \, v \, \alpha_3^2 - 4 \, PPT \, b \, r^2 \, v \, \alpha_2 \, \alpha_3 + 2 \, PK \, b \, r \, \alpha_2 + 2 \, PK \, r \, v \, \alpha_1 - 2 \, PPT \, r \, v \, \alpha_3 + PK \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Maximize}(N1, \{ \text{alpha}[1] \geq \text{alpha}[3], \text{alpha}[2] \geq \text{alpha}[3] \}, \text{assume} = \text{nonnegative}); \\
&\left[0., \left[PK = 0., PPT = 7., b = 0., r = 0., v = 1.11022302462516 \, 10^{-16}, \alpha_1 = 0., \alpha_2 = 0., \alpha_3 = 0. \right] \right]
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
N2 &:= v r \left(4 \, PK \, b \, r^2 \, v \, \alpha_1 \, \alpha_3 - 4 \, PPT \, b \, r^2 \, v \, \alpha_1 \, \alpha_2 - PPT \, b \, r^2 \, v \, \alpha_3^2 + 2 \, PK \, b \, r \, \alpha_3 - 2 \, PPT \, b \, r \, \alpha_2 - 2 \, PPT \, r \, v \, \alpha_1 - PPT \right); \\
&v r \left(4 \, PK \, b \, r^2 \, v \, \alpha_1 \, \alpha_3 - 4 \, PPT \, b \, r^2 \, v \, \alpha_1 \, \alpha_2 - PPT \, b \, r^2 \, v \, \alpha_3^2 + 2 \, PK \, b \, r \, \alpha_3 - 2 \, PPT \, b \, r \, \alpha_2 - 2 \, PPT \, r \, v \, \alpha_1 - PPT \right)
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Maximize}(N2, \{ \text{alpha}[1] \geq \text{alpha}[3], \text{alpha}[2] \geq \text{alpha}[3] \}, \text{assume} = \text{nonnegative}); \\
&\left[-0., \left[PK = 7., PPT = 0., b = 1.11022302462516 \, 10^{-16}, r = 0., v = 0., \alpha_1 = 0., \alpha_2 = 0., \alpha_3 = 0. \right] \right]
\end{aligned} \tag{8}$$

#Las derivadas de los beta en función de los alfa 3 son negativas para cualquier combinación de parámetros#

Anexo 13. Demostración de un máximo local mediante la condición de segundo orden del Lagrangeano del chofer en el modelo 2

Dado el comportamiento de las funciones G_i, h_1, h_2, h_3 con respecto a $a_{t_1}^k$ y $a_{t_2}^k$, es posible asegurar la presencia de un máximo a partir de la condición de segundo orden:

$$\frac{d^2 L^{chof k}}{da_{t_1}^{k 2}} = \beta_1' \frac{d^2 G_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}^{k 2}} - \alpha_1 \frac{d^2 h_1(a_{t_1}^k)}{da_{t_1}^{k 2}} < 0$$

De la misma forma, se constata para $\frac{d^2 L^{chof}}{da_{t_2}^{k 2}}$.

$$\frac{d^2 L^{chof k}}{da_{t_2}^{k 2}} = \beta_2' \frac{d^2 G_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}^{k 2}} - \alpha_2 \frac{d^2 h_2(a_{t_2}^k)}{da_{t_2}^{k 2}} < 0$$

Con esto, se verifica que los puntos $\frac{dL^{chof k}}{da_{t_1}^k} = 0$ y $\frac{dL^{chof k}}{da_{t_2}^k} = 0$ son máximos y representan el esfuerzo óptimo realizado por cada uno de los choferes en términos de su función de producción, sus salario y sus costos personales.

Anexo 14. Demostración de un máximo local mediante la condición de segundo orden del Lagrangeano del operador en el modelo 2

Al revisar la segunda condición de orden, se tiene que:

$$\frac{d^2 L^{op}}{d\beta_1'^2} = - \sum_{h \in K} \left\{ 2\alpha_1 \left(\frac{da_{t_1}^h}{d\beta_1'} \right)^2 + 2\alpha_2 \left(\frac{da_{t_2}^h}{d\beta_1'} \right)^2 + 2\alpha_3 \left(\frac{da_{t_2}^h}{d\beta_1'} \frac{da_{t_1}^h}{d\beta_1'} \right) + r (\#K \sigma_{t_1}^2 + \vartheta_{Q_{t_1}}^2) \right\}$$

lo que será equivalente a:

$$\frac{d^2 L^{op}}{d\beta_1'^2} = -\#K * \left\{ \frac{da_{t_1}^h}{d\beta_1'} \left[2\alpha_1 \frac{da_{t_1}^h}{d\beta_1'} + \alpha_3 \frac{da_{t_2}^h}{d\beta_1'} \right] + \frac{da_{t_2}^h}{d\beta_1'} \left[2\alpha_2 \frac{da_{t_2}^h}{d\beta_1'} + \alpha_3 \frac{da_{t_1}^h}{d\beta_1'} \right] + r (\#K \sigma_{t_1}^2 + \vartheta_{Q_{t_1}}^2) \right\}$$

Además, como se obtuvo previamente que:

$$\begin{aligned} \frac{da_{t_1}^1}{d\beta'_1} &= \frac{da_{t_1}^2}{d\beta'_1} = \dots = \frac{da_{t_1}^{\#K}}{d\beta'_1} = \frac{2\alpha_2 \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}}}{4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2} \\ \frac{da_{t_1}^1}{d\beta'_2} &= \frac{da_{t_1}^2}{d\beta'_2} = \dots = \frac{da_{t_1}^{\#K}}{d\beta'_2} = \frac{-\alpha_3 \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}}}{4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2} \\ \frac{da_{t_2}^1}{d\beta'_1} &= \frac{da_{t_2}^2}{d\beta'_1} = \dots = \frac{da_{t_2}^{\#K}}{d\beta'_1} = \frac{-\alpha_3 \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}}}{4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2} \\ \frac{da_{t_2}^1}{d\beta'_2} &= \frac{da_{t_2}^2}{d\beta'_2} = \dots = \frac{da_{t_2}^{\#K}}{d\beta'_2} = \frac{2\alpha_1 \frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}}}{4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2} \\ \frac{d^2 a_i^k}{d\beta_i'^2} &= 0 \quad \forall i \in \{t_1, t_2\} \wedge \forall k \in \{1, 2\} \end{aligned}$$

Así, reemplazando en la expresión de la segunda derivada del Lagrangeano:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 L^{op}}{d\beta_1'^2} &= -\#K * \left\{ \frac{2\alpha_2 \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}}}{4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2} \left[2\alpha_1 * 2\alpha_2 \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}} - (\alpha_3)^2 \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}} \right] \right. \\ &\quad - \frac{\alpha_3 \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}}}{4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2} \left[2\alpha_2 * -\alpha_3 \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}} + 2\alpha_2\alpha_3 \frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}} \right] \\ &\quad \left. + r(\#K\sigma_{t_1}^2 + \vartheta_{Q_{t_1}}^2) \right\} \end{aligned}$$

Reordenando:

$$\frac{d^2 L^{op}}{d\beta_1'^2} = -\#K * \left\{ \frac{2\alpha_2 \left(\frac{dG_{t_1}(a_{t_1}^1, a_{t_1}^2, \dots, a_{t_1}^{\#K})}{da_{t_1}} \right)^2}{4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2} - r(\#K\sigma_{t_1}^2 + \vartheta_{Q_{t_1}}^2) \right\} < 0$$

Lo cual siempre es negativo. Al realizar el mismo análisis para $\frac{dL^{op}}{d\beta'_2}$, se tiene

$$\frac{dL^{op}}{d\beta'_2} = - \sum_{h \in K} \left\{ \alpha_1 2 \left(\frac{da_{t_1}^h}{d\beta'_2} \right)^2 + \alpha_2 2 \left(\frac{da_{t_2}^h}{d\beta'_2} \right)^2 + 2\alpha_3 \left(\frac{da_{t_1}^h}{d\beta'_2} \frac{da_{t_2}^h}{d\beta'_2} \right) + r (\#K \sigma_{t_2}^2 + \vartheta_{Q_{t_2}}^2) \right\}$$

$$\frac{dL^{op}}{d\beta'_2} = -\#K * \left\{ \frac{2\alpha_1 \left(\frac{dG_{t_2}(a_{t_2}^1, a_{t_2}^2, \dots, a_{t_2}^{\#K})}{da_{t_2}} \right)^2}{4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2} r (\#K \sigma_{t_2}^2 + \vartheta_{Q_{t_2}}^2) \right\} < 0$$

Las cuales son negativas ya que $\alpha_1, \alpha_2 > \alpha_3$. Con esto se constata que se está en presencia de un máximo local en los puntos estudiados.

Anexo 15 Esfuerzos decrecientes en el número de conductores en el modelo 2 producto del efecto free riding

#Antes de comenzar, explicitaremos la nomenclatura usada:
#nomenclatura#

$$\left[\begin{array}{l} > \# \frac{dG[ij]}{dbeta[j]} [k=n] = dGidBetajn; \\ > \# \frac{dG[ij]}{da[j]} [k=n] = dGidAjn; \\ > Además, se considerará $m = n + 1$ \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} > \\ N[1] := PPT \cdot (dg1dbeta1n \cdot dg1da1n \cdot (dg2da2n + 2 \cdot \alpha[2] \cdot r \cdot v[2]) - dg1dbeta2n \cdot dg2da2n \cdot r \cdot v[1] \cdot \alpha[3]) : \\ Deno[2] := K[2] \cdot (dg1da1m \cdot dg2da2m + r \cdot v[1] \cdot v[2] \cdot (\Delta) + r \cdot (2 \cdot \alpha[1] \cdot v[1] \cdot dg2da2m + 2 \cdot \alpha[2] \cdot v[2] \cdot dg1da1m)) : \\ N[3] := PPT \cdot (dg1dbeta1m \cdot dg1da1m \cdot (dg2da2m + 2 \cdot \alpha[2] \cdot r \cdot v[2]) - dg1dbeta2m \cdot dg2da2m \cdot r \cdot v[1] \cdot \alpha[3]) : \\ Deno[1] := K[1] \cdot (dg1da1n \cdot dg2da2n + r \cdot v[1] \cdot v[2] \cdot \Delta + r \cdot (2 \cdot dg1da1n \cdot \alpha[2] \cdot v[2] + 2 \cdot dg2da2n \cdot v[1] \cdot \alpha[1])) : \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} > N[2] := PK \cdot (dg2dbeta1n \cdot dg1da1n \cdot (dg2da2n + 2 \cdot \alpha[2] \cdot r \cdot v[2]) - dg2dbeta2n \cdot dg2da2n \cdot r \cdot v[1] \cdot \alpha[3]) : \\ > N[4] := PK \cdot (dg2dbeta1m \cdot dg1da1m \cdot (dg2da2m + 2 \cdot \alpha[2] \cdot r \cdot v[2]) - dg2dbeta2m \cdot dg2da2m \cdot r \cdot v[1] \cdot \alpha[3]) : \\ > \Delta := 4 \cdot \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) : \end{array} \right.$$

$$a[kn] := \frac{(N[1] + N[2])}{Deno[1]};$$

$$\begin{aligned} & \left(PPT \left(dg1dbeta1n \cdot dg1da1n \left(2r \alpha_2 v_2 + dg2da2n \right) - dg1dbeta2n \cdot dg2da2n \cdot r v_1 \alpha_3 \right) \right. \\ & \quad \left. + PK \left(dg2dbeta1n \cdot dg1da1n \left(2r \alpha_2 v_2 + dg2da2n \right) - dg2dbeta2n \cdot dg2da2n \cdot r v_1 \alpha_3 \right) \right) / \\ & \left(K_1 \left(dg1da1n \cdot dg2da2n + r v_1 v_2 \left(4 \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2 \right) + r \left(2 dg1da1n \alpha_2 v_2 \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 2 dg2da2n \alpha_1 v_1 \right) \right) \end{aligned} \quad (1)$$

$$a[km] := \frac{(N[3] + N[4])}{Deno[2]};$$

$$\begin{aligned} & \left(PPT \left(dg1dbeta1m \cdot dg1da1m \left(2r \alpha_2 v_2 + dg2da2m \right) - dg1dbeta2m \cdot dg2da2m \cdot r v_1 \alpha_3 \right) \right. \\ & \quad \left. + PK \left(dg2dbeta1m \cdot dg1da1m \left(2r \alpha_2 v_2 + dg2da2m \right) - dg2dbeta2m \cdot dg2da2m \cdot r v_1 \alpha_3 \right) \right) / \\ & \left((K_1 + 1) \left(dg1da1m \cdot dg2da2m + r v_1 v_2 \left(4 \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2 \right) + r \left(2 dg1da1m \alpha_2 v_2 \right. \right. \right. \end{aligned} \quad (2)$$

```

+ 2 dg2da2m  $\alpha_1 v_1$ )))
>
> K[2] := K[1] + 1;
                                 $K_2 := K_1 + 1$ 
(3)

```

```

> #Solo se estudiará el Numerador de la resta de  $a[kn]-a[km]$  ya que el denominador será siempre
    positivo al ser una multiplicación de dos términos positivos. Así, el término total será el
    numerador será:

```

```

> total := Deno[2]·(N[1] + N[2]) - Deno[1]·(N[3]·N[4]);
total := ( $K_1 + 1$ ) ( $dg1da1m dg2da2m + r v_1 v_2 (4 \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2) + r (2 dg1da1m \alpha_2 v_2$ 
+ 2 dg2da2m  $\alpha_1 v_1)$ ) (PPT ( $dg1dbeta1n dg1da1n (2 r \alpha_2 v_2 + dg2da2n)$ 
-  $dg1dbeta2n dg2da2n r v_1 \alpha_3$ ) + PK ( $dg2dbeta1n dg1da1n (2 r \alpha_2 v_2 + dg2da2n)$ 
-  $dg2dbeta2n dg2da2n r v_1 \alpha_3$ )) -  $K_1 (dg1da1n dg2da2n + r v_1 v_2 (4 \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2)$ 
+  $r (2 dg1da1n \alpha_2 v_2 + 2 dg2da2n \alpha_1 v_1)$ ) PPT ( $dg1dbeta1m dg1da1m (2 r \alpha_2 v_2$ 
+  $dg2da2m) - dg1dbeta2m dg2da2m r v_1 \alpha_3$ ) PK ( $dg2dbeta1m dg1da1m (2 r \alpha_2 v_2$ 
+  $dg2da2m) - dg2dbeta2m dg2da2m r v_1 \alpha_3$ )
>

```

```

with(Optimization);
[ImportMPS, Interactive, LPSolve, LSSolve, Maximize, Minimize, NLPsolve, QPSolve]
(5)

```

```

Minimize(total, {alpha[1] ≥ alpha[3], alpha[2] ≥ alpha[3], dg1dbeta1n ≥ 0, dg1dbeta1m
≥ dg1dbeta1n, dg1dbeta2n ≤ 0, dg1dbeta2m ≤ dg1dbeta2n, dg2dbeta1n ≤ 0, dg2dbeta1m
≤ dg2dbeta1n, dg2dbeta2n ≥ 0, dg2dbeta2m ≥ dg2dbeta2n, dg1da1n ≥ 0, dg1da1m
≥ dg1da1n, dg2da2n ≥ 0, dg2da2m ≥ dg2da2n, K[2]·dg1dbeta1n - K[1]·dg1dbeta1m ≥ 0,
K[2]·dg2dbeta2n - K[1]·dg2dbeta2m ≥ 0, r ≥ 0, K[2]·dg1dbeta2n - K[1]·dg1dbeta2m ≤ 0,
K[2]·dg2dbeta1n - K[1]·dg2dbeta1m ≤ 0, v[1] ≥ 1, v[2] ≥ 1, r ≥ 1, alpha[3] ≥ 1, K[1]
≥ 1, a[kn] ≥ 0, PPT ≥ 0, PK ≥ 0});
[0., [PK = 0., PPT = 0.4444444444444444, dg1da1m = 0., dg1da1n = 0., dg2da2m = 0., dg2da2n
= 0., r = 1., dg1dbeta1m = 0.7222222222222222, dg1dbeta1n = 0.7222222222222222,
dg1dbeta2m = 1.44162988174432 10-307, dg1dbeta2n = 1.829380305 10-308, dg2dbeta1m =
-6.37465643482072 10-308, dg2dbeta1n = -8.119717880 10-310, dg2dbeta2m = 0.,
dg2dbeta2n = 0., K1 = 1.,  $\alpha_1 = 1.$ ,  $\alpha_2 = 1.$ ,  $\alpha_3 = 1.$ ,  $v_1 = 1.$ ,  $v_2 = 1.$ ]]
(6)

```

#Con esto, es posible notar que el mínimo valor que puede tomar la resta de $a[n] - a[m]$ (con $m = n + 1$) es cero. Por lo que se puede contrir que :

$$a[t1][k = n] \geq a[t1][k = n + 1] \qquad a_{t1_{k=n+1}} \leq a_{t1_{k=n}} \qquad (7)$$

#Además, por simetría entre los esfuerzos:

$$a[t2][k = n] \geq a[t2][k = n + 1] \qquad a_{t2_{k=n+1}} \leq a_{t2_{k=n}} \qquad (8)$$

Anexo 16. Esfuerzos decrecientes en el número de conductores en el modelo 2 producto del aumento de la varianza

#Antes de comenzar, explicitaremos la nomenclatura usada:

(1)

#nomenclatura#

[> # $\frac{dG[i]}{dbeta[j]}$ [k = n] = dGidBetajn;
 # $\frac{dG[i]}{da[j]}$ [k = n] = dGidAjn;
 Además, se considerará $m = n + 1$

Además, se considerará $m = n + 1$

(2)

$N[1] := PPT \cdot (dg1dbeta1n \cdot dg1da1n \cdot (dg2da2n + 2 \cdot \alpha[2] \cdot r \cdot v[2]) - dg1dbeta2n \cdot dg2da2n \cdot r \cdot v[1] \cdot \alpha[3]) :$

$Deno[1] := K[1] \cdot (dg1da1n \cdot dg2da2n + r \cdot v[1] \cdot v[2] \cdot \Delta + r \cdot (2 \cdot dg1da1n \cdot \alpha[2] \cdot v[2] + 2 \cdot dg2da2n \cdot v[1] \cdot \alpha[1])) :$

[> $N[2] := PK \cdot (dg2dbeta1n \cdot dg1da1n \cdot (dg2da2n + 2 \cdot \alpha[2] \cdot r \cdot v[2]) - dg2dbeta2n \cdot dg2da2n \cdot r \cdot v[1] \cdot \alpha[3]) :$

[> $\Delta := 4 \cdot \left(\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 \right) :$

$a[kn] := \frac{(N[1] + N[2])}{Deno[1]} ;$

$(PPT (dg1dbeta1n dg1da1n (2 r \alpha_2 v_2 + dg2da2n) - dg1dbeta2n dg2da2n r v_1 \alpha_3) + PK (dg2dbeta1n dg1da1n (2 r \alpha_2 v_2 + dg2da2n) - dg2dbeta2n dg2da2n r v_1 \alpha_3)) / (K_1 (dg1da1n dg2da2n + r v_1 v_2 (4 \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2) + r (2 dg1da1n \alpha_2 v_2 + 2 dg2da2n \alpha_1 v_1)))$ (3)

[>

with(Optimization);

[ImportMPS, Interactive, LPSolve, LSSolve, Maximize, Minimize, NLPSolve, QPSolve] (4)

[> derivada1del := diff(a[kn], v[1]);

derivada1del := $(-PK dg2da2n r dg2dbeta2n \alpha_3 - PPT dg2da2n r dg1dbeta2n \alpha_3) / (K_1 (dg1da1n dg2da2n + r v_1 v_2 (4 \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2) + r (2 dg1da1n \alpha_2 v_2$ (5)

$$\begin{aligned}
& + 2 dg2da2n \alpha_1 v_1)) - ((PPT (dg1dbeta1n dg1da1n (2 r \alpha_2 v_2 + dg2da2n) \\
& - dg1dbeta2n dg2da2n r v_1 \alpha_3) + PK (dg2dbeta1n dg1da1n (2 r \alpha_2 v_2 + dg2da2n) \\
& - dg2dbeta2n dg2da2n r v_1 \alpha_3)) (r v_2 (4 \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2) + 2 r dg2da2n \alpha_1)) / \\
& (K_1 (dg1da1n dg2da2n + r v_1 v_2 (4 \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2) + r (2 dg1da1n \alpha_2 v_2 \\
& + 2 dg2da2n \alpha_1 v_1))^2)
\end{aligned}$$

> simplify((5), 'size')

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{8} (dg1da1n (r \alpha_2 v_2 + \frac{1}{2} dg2da2n) r (4 (\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2) (PK dg2dbeta1n \\
& + PPT dg1dbeta1n) v_2 + (2 PK dg2dbeta1n + 2 PPT dg1dbeta1n) \alpha_1 \\
& + \alpha_3 (PK dg2dbeta2n + PPT dg1dbeta2n) dg2da2n)) / (K_1 (((\alpha_1 v_1 \\
& + \frac{1}{2} dg1da1n) \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2 v_1) r v_2 + \frac{1}{2} dg2da2n (r \alpha_1 v_1 + \frac{1}{2} dg1da1n))^2)
\end{aligned} \tag{6}$$

>

#Notamos que le denoraminador nuevamente siempre será positivo, por lo que se estudiará solo en numerador.

$$\begin{aligned}
& > Numerador := - dg1da1n (r \alpha_2 v_2 + \frac{1}{2} dg2da2n) r (4 (\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2) (PK dg2dbeta1n \\
& + PPT dg1dbeta1n) v_2 + (2 PK dg2dbeta1n + 2 PPT dg1dbeta1n) \alpha_1 \\
& + \alpha_3 (PK dg2dbeta2n + PPT dg1dbeta2n) dg2da2n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Numerador := - dg1da1n (r \alpha_2 v_2 + \frac{1}{2} dg2da2n) r (4 (\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3^2) (PK dg2dbeta1n \\
& + PPT dg1dbeta1n) v_2 + (2 PK dg2dbeta1n + 2 PPT dg1dbeta1n) \alpha_1 \\
& + \alpha_3 (PK dg2dbeta2n + PPT dg1dbeta2n) dg2da2n)
\end{aligned} \tag{7}$$

> Minimize(Numerador, {alpha[1] ≥ alpha[3], alpha[2] ≥ alpha[3], dg1dbeta1n ≥ 0, dg1dbeta1m ≥ dg1dbeta1n, dg1dbeta2n ≤ 0, dg1dbeta2m ≤ dg1dbeta2n, dg2dbeta1n ≤ 0, dg2dbeta1m ≤ dg2dbeta1n, dg2dbeta2n ≥ 0, dg2dbeta2m ≥ dg2dbeta2n, dg1da1n ≥ 0, dg1da1m ≥ dg1da1n, dg2da2n ≥ 0, dg2da2m ≥ dg2da2n, K[2]·dg1dbeta1n - K[1]·dg1dbeta1m ≥ 0, K[2]·dg2dbeta2n - K[1]·dg2dbeta2m ≥ 0, r ≥ 0, K[2]·dg1dbeta2n

$$\begin{aligned}
& -K[1] \cdot dg1dbeta2m \leq 0, K[2] \cdot dg2dbeta1n - K[1] \cdot dg2dbeta1m \leq 0, v[1] \geq 1, v[2] \\
& \geq 1, r \geq 1, \alpha[3] \geq 1, K[1] \geq 1, a[kn] \geq 0, PPT \geq 0, PK \geq 0); \\
& [-1.11942055106472344 \cdot 10^{14}, [PK = 4.44476688640283, PPT = 18.2238344320141, \\
& dg1da1m = 11.3343006592085, dg1da1n = 11.3343006592085, dg2da2m \\
& = 9.61191721600706, dg2da2n = 9.61191721600706, r = 35.4476688640283, dg1dbeta1m \\
& = 9.61191721600706, dg1dbeta1n = 9.61191721600706, dg1dbeta2m \\
& = 1.85115806193014 \cdot 10^{-306}, dg1dbeta2n = 5.38634657004762 \cdot 10^{-308}, dg2dbeta1m = \\
& -2.01272204298223 \cdot 10^{-306}, dg2dbeta1n = -2.78362039312217 \cdot 10^{-307}, dg2dbeta2m \\
& = 2.72238344320141, dg2dbeta2n = 2.72238344320141, K_1 = 1., \alpha_1 \\
& = 21.6686013184170, \alpha_2 = 28.5581350912226, \alpha_3 = 1., v_1 = 1., v_2 = 25.1133682048198]] \\
& > \text{Maximize}(\text{Numerador}, \{\alpha[1] \geq \alpha[3], \alpha[2] \geq \alpha[3], dg1dbeta1n \geq 0, \\
& dg1dbeta1m \geq dg1dbeta1n, dg1dbeta2n \leq 0, dg1dbeta2m \leq dg1dbeta2n, dg2dbeta1n \leq 0, \\
& dg2dbeta1m \leq dg2dbeta1n, dg2dbeta2n \geq 0, dg2dbeta2m \geq dg2dbeta2n, dg1da1n \geq 0, \\
& dg1da1m \geq dg1da1n, dg2da2n \geq 0, dg2da2m \geq dg2da2n, K[2] \cdot dg1dbeta1n - K[1] \\
& \cdot dg1dbeta1m \geq 0, K[2] \cdot dg2dbeta2n - K[1] \cdot dg2dbeta2m \geq 0, r \geq 0, K[2] \cdot dg1dbeta2n \\
& - K[1] \cdot dg1dbeta2m \leq 0, K[2] \cdot dg2dbeta1n - K[1] \cdot dg2dbeta1m \leq 0, v[1] \geq 1, v[2] \\
& \geq 1, r \geq 1, \alpha[3] \geq 1, K[1] \geq 1, a[kn] \geq 0, PPT \geq 0, PK \geq 0); \\
& [0., [PK = 0., PPT = 0.373417721518987, dg1da1m = 1.00000000000000, dg1da1n = 0., \\
& dg2da2m = 1.00000000000000, dg2da2n = -2.22044604925031 \cdot 10^{-16}, r = 1., dg1dbeta1m \\
& = 0.949367088607595, dg1dbeta1n = 0.474683544303797, dg1dbeta2m = \\
& -1.89556962025316, dg1dbeta2n = -1.89556962025316, dg2dbeta1m = \\
& -0.313291139240506, dg2dbeta1n = -0.313291139240506, dg2dbeta2m = 0., dg2dbeta2n \\
& = 0., K_1 = 1., \alpha_1 = 1., \alpha_2 = 1., \alpha_3 = 1., v_1 = 1., v_2 = 1.]] \\
& > \\
& > \\
& > \#Con esto, como el denominador siempre será positivo y el numerador siempre negativos, vemos \\
& que la derivada del esfuerzo en contextos grupales con respecto a la varianza será siempre \\
& negativa. Además por simetría, se puede extrapolar el análisis para a[t2] y v[2] \\
& >
\end{aligned}$$