



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA

Medidas de Acuerdo bajo el Modelo Estructural Multivariado

Por
Julio Cesar Ávila Albornoz

Tesis presentada a la facultad de Matemáticas de la
Pontificia Universidad Católica de Chile,
como requisito para optar al grado de
Doctor en Estadística.

Profesor guía: **Dr. Manuel Galea Rojas**

octubre de 2022
Santiago, Chile



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA

Medidas de Acuerdo bajo el Modelo Estructural Multivariado

Por
Julio Cesar Ávila Albornoz

Tesis presentada a la facultad de Matemáticas de la
Pontificia Universidad Católica de Chile,
como requisito para optar al grado de
Doctor en Estadística.

Comisión Informante:

Dr. Manuel Galea, Profesor Guía, Pontificia Universidad Católica de Chile

Dr. Mário de Castro, Universidade de São Paulo, Brasil

Dr. Felipe Osorio, Universidad Técnica Federico Santa María, Chile

Dr. Pedro Luiz Ramos, Pontificia Universidad Católica de Chile

octubre de 2022
Santiago, Chile

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Formulación del Problema	1
1.2. Medidas de Acuerdo	1
1.3. Modelos con Error de Medición	3
1.4. Objetivo y estructura de la tesis	5
1.5. Contribuciones	5
2. Medidas de Acuerdo bajo el Modelo Estructural Normal Multivariado	6
2.1. Introducción	6
2.2. Modelo estructural normal multivariado	7
2.2.1. Score y matriz de información de Fisher	8
2.2.2. Estimación de máxima verosimilitud	10
2.2.3. Errores estándar asintóticos	11
2.2.4. Pruebas de Hipótesis	11
2.3. Medidas de acuerdo	11
2.3.1. Coeficiente de correlación de concordancia	12
2.3.2. Probabilidad de acuerdo	14
2.3.3. Inferencia sobre las medidas de acuerdo	15
2.4. Bondad de ajuste	17
2.5. Hipótesis de interés	17
2.6. Estudio de simulación	18
2.7. Aplicaciones	21
2.7.1. Datos de capacidad vital	21
2.7.2. Datos de terremotos en Alaska	25
2.8. Discusión y conclusiones	28
3. Medidas de Acuerdo bajo el Modelo Estructural t_η multivariado	30
3.1. Introducción	30
3.1.1. Distribución t_η univariada	31
3.1.2. Distribución t_η multivariada	32
3.2. Modelo estructural bajo la distribución t_η multivariada	34
3.3. Estimación máximo verosímil	36
3.3.1. Funciones score	36
3.3.2. Errores estándar asintóticos	37

3.3.3.	El algoritmo EM	37
3.3.4.	Test de hipótesis	40
3.4.	Bondad de ajuste	40
3.5.	Medidas de acuerdo	41
3.5.1.	Coefficiente de correlación de concordancia	42
3.5.2.	Probabilidad de Acuerdo	42
3.6.	Aplicaciones	43
3.6.1.	Robustez del modelo t_η multivariado ante datos atípicos	43
3.6.2.	Conjunto de datos Chipkevitch et al. (1996)	44
3.6.3.	Mercado de acciones Chileno	49
3.6.4.	Encuesta de Operadores Financieros	54
3.7.	Discusión y conclusiones	58
4.	Conclusiones finales y trabajo futuro	59
4.1.	Monitoreo del Sueño	59
4.2.	Propuestas de trabajo futuro	61
4.3.	Conclusiones finales	63
A.	Distribuciones y propiedades utilizadas	65
A.1.	Distribuciones de probabilidad	65
A.1.1.	Distribución gamma	65
A.1.2.	Distribución Normal Multivariada	65
A.2.	Resultados de matrices	66
A.2.1.	Matriz inversa de formas especiales	66
A.2.2.	Matriz inversa y determinante de V	67
A.3.	Derivadas	67
A.3.1.	Score del modelo normal	67
A.4.	Score del modelo t_η	70
A.5.	Distribución Condicional de $\mathbf{Z} x, u$	74
B.	Estudio de simulación	75
B.1.	Nivel de significancia empírico para la hipótesis $H_0 : \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}_p, \boldsymbol{\beta} = \mathbf{1}_p$	75
B.2.	Falta de especificidad en $\boldsymbol{\epsilon}_i$ para la hipótesis $H_0 : \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}_p, \boldsymbol{\beta} = \mathbf{1}_p$	80
B.3.	Nivel de significancia empírico para la hipótesis $H_0 : \phi = \phi_0$	83
C.	Paquete R mvstruct	86
C.1.	Características del paquete <code>mvstruct</code>	86
C.2.	Instalación del paquete <code>mvstruct</code>	86
C.3.	Ajuste bajo la distribución Normal multivariada	86
C.4.	Ajuste bajo la distribución t_η multivariada	90
D.	Conjunto de datos Acciones Chilenas	95

Índice de figuras

2.1.	Ejemplos del Coeficiente de Correlación de Concordancia	13
2.2.	Ejemplos de Probabilidad de Acuerdo	14
2.3.	Diagramas de dispersión y gráficas de Bland-Altman para el conjunto de datos Capacidad Vital	22
2.4.	Bondad de ajuste del modelo estructural normal multivariado aplicado al conjunto de datos Capacidad Vital	23
2.5.	Coeficiente de Correlación de Concordancia aplicado al conjunto de datos Capacidad Vital	23
2.6.	Probabilidad de Acuerdo aplicada al conjunto de datos Capacidad Vital	24
2.7.	Diagramas de dispersión y gráficas de Bland-Altman para el conjunto de datos Terremotos en Alaska	25
2.8.	Bondad de ajuste del modelo estructural normal multivariado aplicado al conjunto de datos Terremotos en Alaska	26
2.9.	Coeficiente de Correlación de Concordancia aplicado al conjunto de datos terremotos en Alaska	27
2.10.	Probabilidad de Acuerdo aplicado al conjunto de datos Terremotos en Alaska	28
3.1.	Ejemplos de la densidad t_η univariada	32
3.2.	Ejemplos de la densidad t_η multivariada	34
3.3.	Efecto de la contaminación de un dato en la estimación de las medidas de acuerdo bajo el modelo estructural.	43
3.4.	Efecto de la contaminación de un dato en la estimación de las medidas de acuerdo	43
3.5.	Diagrama de dispersión y gráficas de Bland-Altman para el conjunto de datos de Chipekvitch et al. (1996)	45
3.6.	Bondad de ajuste del modelo estructural aplicado al conjunto de datos Chipekvitch et al. (1996) asumiendo las distribuciones Normal y t_η multivariada	46
3.7.	Probabilidad de Acuerdo para el conjunto de datos Chipekvitch et al. (1996)	47
3.8.	Coeficiente de Correlación de Concordancia para el conjunto de datos Chipekvitch et al. (1996)	48
3.9.	Bondad de ajuste del modelo estructural aplicado al conjunto de datos Acciones Chilenas asumiendo las distribuciones Normal y t_η multivariada	50
3.10.	Probabilidad de Acuerdo aplicada en Acciones Chilenas	51
3.11.	Ejemplo de la Probabilidad de Acuerdo condicionada aplicada en Acciones Chilenas	52

Índice de figuras

3.12. Coeficiente de Correlación de Concordancia aplicado en Acciones Chilenas	52
3.13. Diagrama de dispersión y gráficas de Bland-Altman para Acciones Chilenas	53
3.14. Diagramas de dispersión y gráficas de Bland-Altman para la Encuesta de Operadores Financieros	55
3.15. Bondad de ajuste del modelo estructural aplicado al conjunto de datos Encuesta de Operadores Financieros asumiendo las distribuciones Normal y t_η multivariada	56
3.16. Probabilidad de Acuerdo aplicada en la Encuesta operadores financieros	56
3.17. Ejemplo de la Probabilidad de Acuerdo condicionada aplicada en la Encuesta de Operadores Financieros	57
3.18. Coeficiente de Correlación de Concordancia aplicado en la Encuesta de Operadores Financieros	57
4.1. Dispersión y gráfica de Blant-Altman para los instrumentos de monitoreo del sueño.	60
4.2. Envelope y distancias de Mahalanobis escaladas F_i aplicado al conjunto de datos de monitoreo del sueño.	60
C.1. Bondad de Ajuste al modelo estructural Normal multivariado para los datos vital.	90
C.2. Bondad de Ajuste al modelo estructural Normal multivariado para los datos vital.	94
D.1. Comparación en el tiempo de las series de <i>IPSA</i> y cinco acciones chilenas <i>SQMB</i> , <i>ENEL</i> , <i>Falabella</i> , <i>BSantander</i> y <i>LTM</i>	96
D.2. Comparación en el tiempo de del valor absoluto entre las series de <i>IPSA</i> y cinco acciones chilenas <i>SQMB</i> , <i>ENEL</i> , <i>Falabella</i> , <i>BSantander</i> y <i>LTM</i>	97

Índice de Tablas

2.1.	Nivel de significancia empírico para hipótesis $H_0 : \boldsymbol{\alpha}_p = \mathbf{0}_p, \boldsymbol{\beta}_p = \mathbf{1}_p$ considerando error de medición normal multivariado y varianza $\phi = 1.0$	19
2.2.	Nivel de significancia empírico en la hipótesis $H_0 : \boldsymbol{\alpha}_p = \mathbf{0}_p, \boldsymbol{\beta}_p = \mathbf{1}_p$ considerando error de medición t_η con parámetro $\eta = 0.4$ y varianza $\phi = 1.0$	19
2.3.	Nivel de significancia empírico de la hipótesis $H_0 : \phi = \phi_0$ considerando error de medición normal multivariado y varianza $\phi = 1.5$	20
2.4.	Descriptivos del conjunto de datos capacidad vital en Barnett (1969)	21
2.5.	EMV del modelo estructural aplicado al conjunto de datos capacidad vital	23
2.6.	Coefficiente de Correlación de Concordancia aplicado al conjunto de datos Capacidad Vital	24
2.7.	Probabilidad de Acuerdo aplicada al conjunto de datos Capacidad Vital	24
2.8.	Descriptivos del conjunto de datos Terremotos en Alaska	25
2.9.	EMV del modelo estructural aplicado al conjunto de datos Terremotos en Alaska	26
2.10.	Comparación de EMV en el conjunto de datos Terremotos en Alaska entre datos completos y excluyendo observaciones influyentes	27
2.11.	Coefficiente de Correlación de Concordancia para conjunto de datos Terremotos en Alaska	27
2.12.	Probabilidad de Acuerdo para conjunto terremotos en Alaska	28
3.1.	Descriptivos del conjunto de datos Chipekvitich et al. (1996)	44
3.2.	Comparación de los <i>EMV</i> del modelo estructural bajo la suposición de Normal multivariada y t_η multivariada sobre el conjunto de datos Chipekvitich et al. (1996)	46
3.3.	Probabilidad de Acuerdo para el conjunto de datos Chipekvitich et al. (1996). Como discrepancia entre instrumentos se toma $c_j = 3, 3.5, 4.$	47
3.4.	Estimaciones del <i>CCC</i> para el conjunto de datos Chipekvitich et al. (1996) bajo las distribuciones Normal y t_η multivariadas	48
3.5.	Descriptivos del conjunto de datos Acciones Chilenas	49
3.6.	Estimadores máximo verosímiles del modelo estructural t_η aplicado en Acciones Chilenas	51
3.7.	Probabilidad de Acuerdo aplicada en Acciones Chilenas	51
3.8.	Coefficiente de Correlación de Concordancia aplicado en Acciones Chilenas	52
3.9.	Descriptivos del conjunto de datos Encuesta de Operadores Financieros	55
3.10.	Estimadores máximo verosímiles del modelo estructural t_η aplicado en la Encuesta de Operadores Financieros	56

3.11. Probabilidad de Acuerdo aplicada en la Encuesta operadores financieros . . .	57
3.12. Coeficiente de Correlación de Concordancia aplicado en la Encuesta de Operadores Financieros	57
4.1. Descriptivos del conjunto de datos Monitoreo del Sueño	60
B.1. Nivel de significancia empírico para la hipótesis $H_0 : \alpha = \mathbf{0}_p, \beta = \mathbf{1}_p$. Las muestras x_i fueron generadas desde la distribución normal y varianza del error de medición $\phi = 1$	77
B.2. Nivel de significancia empírico para la hipótesis $H_0 : \alpha = \mathbf{0}_p, \beta = \mathbf{1}_p$. Las muestras x_i fueron generadas desde la distribución t_η y varianza del error de medición $\phi = 1$	78
B.3. Nivel de significancia empírico para la hipótesis $H_0 : \alpha = \mathbf{0}_p, \beta = \mathbf{1}_p$. Las muestras x_i fueron generadas desde la distribución Skew Normal y varianza del error de medición $\phi = 1$	79
B.4. Nivel de significancia empírico para la hipótesis $H_0 : \alpha = \mathbf{0}_p, \beta = \mathbf{1}_p$. Las muestras x_i provienen desde una distribución Normal y los ϵ_i desde una t_η multivariada con $\phi = 1$ y $\eta = 0.4$	80
B.5. Nivel de significancia empírico para la hipótesis $H_0 : \alpha = \mathbf{0}_p, \beta = \mathbf{1}_p$. Las muestras x_i provienen desde una distribución t_η y los ϵ_i desde una t_η multivariada con $\phi = 1$ y $\eta = 0.4$	81
B.6. Nivel de significancia empírico para la hipótesis $H_0 : \alpha = \mathbf{0}_p, \beta = \mathbf{1}_p$. Las muestras x_i provienen desde una distribución Skew Normal y los ϵ_i desde una t_η multivariada con $\phi = 1$ y $\eta = 0.4$	82
B.7. Nivel de significancia empírico para la hipótesis $H_0 : \phi = \phi_0$. Las muestras x_i provienen desde una distribución Normal y los ϵ_i desde una Normal multivariada con $\phi = 1$	83
B.8. Nivel de significancia empírico para la hipótesis $H_0 : \phi = \phi_0$. Las muestras x_i provienen desde una distribución t_η y los ϵ_i desde una Normal multivariada con $\phi = 1$	84
B.9. Nivel de significancia empírico para la hipótesis $H_0 : \phi = \phi_0$. Las muestras x_i provienen desde una distribución Skew Normal y los ϵ_i desde una Normal multivariada con $\phi = 1$	85

Agradecimientos

Esta tesis fue realizada gracias al apoyo del profesor Manuel Galea, quien confió en mi entregando su tiempo y conocimientos con gran sabiduría.

También quiero agradecer a mis compañeros de doctorado: Perla Celis, Claudia Patricia Mora, Gabriel Muñoz, Carla Leal y Oscar López Aliaga con quienes compartí varios años de estudio y que también contribuyeron a que este texto salga a la luz.

A mi esposa Paulina Mora y a mi hija Fernanda que me dieron su apoyo durante la redacción.

Finalmente agradecer a Sonia Salvo y Carlos Muñoz a quienes les debo gran parte de mi trayectoria.

Medidas de Acuerdo bajo el Modelo Estructural Multivariado

Julio Cesar Ávila Albornoz

Profesor guía: Dr. Manuel Galea Rojas

Resumen

En biometría, ingeniería, medicina y otras áreas es común disponer de distintos instrumentos que midan alguna característica en una unidad experimental. En ocasiones, un nuevo instrumento es propuesto como una alternativa más económica o práctica respecto al instrumento estándar. Si ambos trabajan en una misma escala, es deseable medir el grado de acuerdo o de concordancia que alcanzan. En este contexto, existen varias propuestas para medir el acuerdo entre instrumentos de las cuales se profundizará en: El Coeficiente de Correlación de Concordancia (*CCC*) y la Probabilidad de Acuerdo (*PA*).

Las mediciones de los instrumentos pueden estar sujetas a error en la medición. Si estos errores de medición no fueran considerados, las inferencias realizadas podrían estar comprometidas o ser incorrectas. Los Modelos con Error de Medición (*MEM*) permiten incorporar la incertidumbre que el proceso de medición pueda tener. Una aplicación de los *MEM* es el modelo de calibración en su versión estructural.

Para modelar el error de medición, los *MEM* asumen una distribución multivariante, siendo la distribución Normal multivariada de gran utilidad en varias aplicaciones. Sin embargo, en presencia de colas pesadas o de datos atípicos, la suposición de normalidad puede ser poco adecuada llevando a comprometer los resultados. Una manera de afrontar este problema es emplear la distribución *t* multivariada considerada como una extensión de la distribución Normal multivariada.

El objetivo de este trabajo es desarrollar bajo el Modelo Estructural Multivariado, herramientas de inferencia estadística para las medidas de acuerdo: *CCC* y *PA*. El Modelo Estructural considera el uso de la distribución Normal Multivariada y la *t* multivariada.

Las herramientas estadísticas fueron aplicadas a conjuntos de datos clásicos en la comparación de instrumentos y además, en aplicaciones financieras como el retorno de acciones y las proyecciones del tipo de cambio por parte de operadores financieros.

Capítulo 1

Introducción

Este capítulo introduce a las Medidas de Acuerdo y los Modelos con Error de Medición, conceptos que serán utilizados en los próximos capítulos. También, presenta los objetivos, estructura y contribuciones de la tesis.

1.1. Formulación del Problema

Al cuantificar características de un objeto es necesario tomar mediciones sobre éste. El procedimiento para tomar las mediciones dependerá del grado de desarrollo del área de aplicación. Cuando se proponen nuevos instrumentos, técnicas o procedimientos, es deseable asegurar un nivel de concordancia o de acuerdo con los instrumentos ya establecidos con el objetivo de lograr intercambiabilidad entre ellos.

Un desafío al momento de realizar mediciones es considerar que están sujetas a errores. Los expertos buscan maneras para reducir los errores generados y evitar en lo posible los efectos que tiene su propagación.

Teniendo en cuenta que es necesario asegurar un nivel de acuerdo entre instrumentos y el error en las mediciones, a continuación se expondrán las Medidas de Acuerdo: Coeficiente de Correlación de Concordancia (*CCC*) y Probabilidad de Acuerdo (*PA*) y los Modelos con Error de Medición (*MEM*).

1.2. Medidas de Acuerdo

Cada vez que se propone un nuevo instrumento, técnica o procedimiento para realizar una medición, ya sea por ventaja tecnológica o económica, es deseable asegurar estadísticamente que el nuevo instrumento sea intercambiable con un instrumento de referencia o estándar.

Uno de los primeros métodos para verificar el acuerdo entre dos instrumentos es la gráfica propuesta por Altman y Bland (1983) donde se establecen límites de acuerdo para las diferencias entre mediciones de dos instrumentos. Una problemática con este método es el criterio para determinar si la tolerancia es aceptable en el ámbito de aplicación.

Como una adecuación de la Correlación de Pearson en la medición del acuerdo entre dos instrumentos, Lin (1989) propone el Coeficiente de correlación de concordancia (*CCC*)

basado en la distribución Normal Bivariada. El *CCC* estandariza la distancia cuadrática a la diagonal o función identidad ($Y = X$). El *CCC* puede ser separado en el producto de precisión y exactitud, donde queda relacionado con la Correlación de Pearson. Es este sentido, el *CCC* sería la Correlación de Pearson corregida.

Otras dos medidas estarían asociadas al *CCC* de Lin: la extensión a más de dos instrumentos propuesta por Barnhart *et al.* (2002) conocido como el *CCC* global y una formulación alternativa propuesta por Liao (2003).

En la revisión realizada por Barnhart *et al.* (2007) de los métodos estadísticos para la medición del acuerdo en variables continuas, se presenta la probabilidad de cobertura a la que se referirá como Probabilidad de Acuerdo. La Probabilidad de Acuerdo (*PA*) puede interpretarse como el nivel de acuerdo que logran dos instrumentos cuando difieren bajo un nivel de tolerancia, que es fijado por un experto en la medición. En un diseño con replicas considerando errores de medición Stevens *et al.* (2017) asumen la distribución Normal Multivariada para realizar inferencia sobre la *PA*.

El *CCC* y la *PA* se han analizado bajo un diseño multivariado sin errores de medición en los trabajos de Leal (2016) y Leal *et al.* (2019) asumiendo la distribución *t*-multivariada con el objetivo de investigar métodos de diagnóstico para la detección de datos influyentes.

Una característica de la *PA* es que a medida que la tolerancia crece, el grado de acuerdo también aumenta con él. Por tanto, cuando interesa determinar el nivel de tolerancia que se alcanza a cierto nivel de *PA*, o sea su inversa, es cuando aparece el Índice de Distorsión Total (Total Deviation Index, *TDI*) propuesto por Lin (2000).

Una formulación alternativa para la *PA* se da en el área de la bioequivalencia donde se interpreta como la proporción de la población donde dos formulaciones tienen efectos relativamente similares. Anderson y Hauck (1983); Hauck y Anderson (1984); Anderson y Hauck (1990) proponen medir la bioequivalencia entre dos formulaciones o medicamentos a través de la proporción de población (P_E) en la que dos formulaciones tienen efectos similares. Formalmente, si tenemos el efecto de un medicamento estándar X y el efecto de un nuevo medicamento alternativo Y , la bioequivalencia puede darse cuando P_E alcanza un alto valor y como consecuencia ambas formulaciones tienen efectos similares, o sea

$$P_E = \mathbf{P} \left(1 - r \leq \frac{Y}{X} \leq 1 + r \right),$$

donde r sería la diferencia relativa entre ambas formulaciones. Si se obtiene un P_E alto y r es un valor de tolerancia situado por un experto entonces ambas formulaciones tienen bio-habilidades similares.

Otros trabajos pueden ser de interés para el lector. Para profundizar en las medidas de acuerdo están las revisiones de Lin *et al.* (2002) y Barnhart *et al.* (2007). Mientras que para el desarrollo de estimadores e inferencia para varias medidas de acuerdo bajo la distribución normal bivariada y un diseño de muestras pareadas esta el libro de Lin *et al.* (2012) y en el enfoque Bayesiano de las medidas de acuerdo se tiene el trabajo de Vidal y de Castro (2017).

Dada la variedad de medidas de acuerdo, este trabajo se enfocará en el *CCC* y la *PA* las que serán revisadas en la sección 2.3.

A continuación se presenta el Modelo con Error de Medición que será empleado para las inferencias de ambas medidas de acuerdo.

1.3. Modelos con Error de Medición

Los Modelos con Error de Medición (*MEM*) son útiles para describir fenómenos en varias disciplinas tales como agricultura, medicina, ingeniería, psicología, educación y finanzas. Estos modelos establecen relaciones funcionales entre variables observadas con error de medición y su verdadero valor no observado.

A modo de motivación sea el siguiente modelo básico

$$\begin{aligned} X_i &= x_i + \epsilon_{0i} \\ Y_i &= \alpha + \beta x_i + \epsilon_{1i}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde $E(\epsilon_{0i}) = E(\epsilon_{1i}) = 0$, $\text{var}(\epsilon_{0i}) = \phi_x$ y $\text{var}(\epsilon_{1i}) = \phi$.

Si inicialmente no se considera el error de medición y se estima β directamente con el estimador de mínimos cuadrados empleando X_i y Y_i se tiene

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2},$$

si n crece, en el límite el estimador $\hat{\beta}$ converge en probabilidad ¹ a

$$\hat{\beta} \xrightarrow{p} \frac{\text{Cov}(X_i, Y_i)}{\text{Var}(X_i)} = \beta \frac{\phi_x}{\phi_x + \phi}.$$

El factor $\phi_x/(\phi_x + \phi)$ actúa como un atenuador del estimador de β provocando un estimador sesgado. Por tanto, el costo de no considerar los errores de medición en el predictor X_i lleva a estimadores sesgados e inconsistentes (Stefanski, 1985).

Una revisión histórica del *MEM* fue realizada por Stefanski (2000), del cual se sigue la sistematización propuesta por Fuller (2006) para el modelo (1.1) como una extensión del modelo de regresión lineal simple donde se incorpora al menos un predictor con error de medición. El modelo puede escribirse matricialmente como

$$\mathbf{Z}_i = \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} x_i + \boldsymbol{\epsilon}_i, \tag{1.2}$$

donde

$$\boldsymbol{\epsilon}_i = \begin{pmatrix} \epsilon_{0i} \\ \epsilon_{1i} \end{pmatrix} \stackrel{iid}{\sim} \mathbf{N}_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi_x & 0 \\ 0 & \phi \end{pmatrix} \right) \tag{1.3}$$

¹ \xrightarrow{p} simboliza convergencia en probabilidad

Capítulo 1. Introducción

Cuando los verdaderos valores de x_1, x_2, \dots, x_n son constantes desconocidas, llamados parámetros incidentales, el modelo se denomina *MEM* Funcional. Por otro lado, si x_1, x_2, \dots, x_n son variables aleatorias *iid* con media μ_x y varianza ϕ_x , independientes del error de medición ϵ_i , tenemos el llamado *MEM* Estructural. Esta tesis seguirá el enfoque estructural en los siguientes capítulos.

Una característica del modelo (1.2)-(1.3) en su versión estructural es que no es identificable. La siguiente definición de identificabilidad se encuentra en Fuller (2006, pág. 9).

Definición 1. Sea \mathbf{Z} un vector observable de variables aleatorias y sea $F_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}; \boldsymbol{\theta})$ la función de distribución de \mathbf{Z} para el parámetro $\boldsymbol{\theta}$ evaluado en $\mathbf{Z} = \mathbf{z}$. El parámetro $\boldsymbol{\theta}$ es identificable si, para cualquier $\boldsymbol{\theta}_1 \in \Theta$ y $\boldsymbol{\theta}_2 \in \Theta$ con $\boldsymbol{\theta}_1 \neq \boldsymbol{\theta}_2$ implica que

$$F_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}; \boldsymbol{\theta}_1) \neq F_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}; \boldsymbol{\theta}_2)$$

para algún \mathbf{z} . Si el parámetro $\boldsymbol{\theta}$ es identificable también decimos que el modelo es identificable.

Dado que el modelo estructural no es identificable en sus parámetros

$$\boldsymbol{\theta} = (\mu_x, \alpha, \beta, \phi_x, \phi_0, \phi_1)^T,$$

entonces no existe un estimador consistente de $\boldsymbol{\theta}$. Existen formas alternativas de resolver el problema de identificabilidad. Chan y Mak (1984), Gleser (1992) y Fuller (2006) consideran diferentes restricciones de identificabilidad obteniendo estimadores máximo verosímiles de los parámetros y sus propiedades asintóticas. En esta tesis se usará una restricción en el espacio paramétrico, tomando $\phi = \phi_0 = \phi_1$ lo que permite que ϕ_x modele la variabilidad propia de x y no sea confundido con ϕ_0 .

Una aplicación de los *MEM* es la comparación de instrumentos bajo el siguiente diseño. Considere en n unidades experimentales (o individuos) se obtiene la medición de una característica bajo un instrumento estándar con error de medición, digamos X_i y paralelamente tenemos otros p instrumentos alternativos Y_1 a Y_p que miden la misma característica en el mismo individuo. El propósito en este diseño es verificar que los instrumentos alternativos son equivalentes.

1.4. Objetivo y estructura de la tesis

El objetivo de este trabajo es desarrollar e implementar herramientas de inferencia estadística para las medidas de acuerdo Coeficiente de Correlación de Concordancia y Probabilidad de Acuerdo considerando una aplicación de los Modelos con Error de Medición. El modelo empleado se desarrolla asumiendo la distribución normal multivariada y su extensión t -multivariada.

Los contenidos de cada capítulo se presentan a continuación:

- En el capítulo dos se desarrolla un estimador de las medidas de acuerdo CCC y el PA considerando errores de medición en múltiples instrumentos bajo la distribución normal multivariada.
- El capítulo tres extiende el contenido anterior al considerar la distribución t -multivariada.
- El capítulo cuatro discute los resultados más relevantes y propone algunas ampliaciones o mejoras para trabajo futuro.

1.5. Contribuciones

Los aportes de este trabajo son principalmente a la medición del acuerdo entre instrumentos, las cuales son:

- (i) Herramientas de inferencia desde el punto de vista clásico para el CCC y la PA bajo el modelo estructural asumiendo la distribución Normal y su extensión t multivariada.
 - Métodos de estimación de los parámetros utilizando rutinas ya establecidas y el algoritmo EM para el modelo estructural t multivariado.
 - Expresiones para el vector Score y la matriz de Información de Fisher para estimar los errores estándar asintóticos.
 - Pruebas de hipótesis para contrastes de interés.
 - Inferencia para el CCC y la PA : Estimadores puntuales, intervalos de confianza y cotas inferiores basadas en comparaciones múltiples.
 - Método gráfico para evaluar la bondad de ajuste de los modelos y supuestos distribucionales.
- (ii) Aplicación en la comparación de instrumentos y en datos del tipo financiero como los retornos de acciones y las proyecciones del tipo de cambio en la Encuesta de Operadores Financieros.
- (iii) Implementación en \mathbf{R} de las rutinas de estimación y gráficas propuestas.

Capítulo 2

Medidas de Acuerdo bajo el Modelo Estructural Normal Multivariado

En varias disciplinas se tiene el problema de comparar un instrumento estándar contra otros instrumentos que miden un mismo fenómeno considerando el error de medición que tienen las observaciones. En estadística, este problema se aborda con los Modelos con Error de Medición (*MEM*), donde al menos un predictor es medido con error. En este contexto, un *MEM* estructural lineal homocedástico basado en la distribución normal multivariada es propuesto para la comparación de instrumentos. A partir de este modelo se presentan métodos de estimación y test de hipótesis para evaluar el acuerdo entre el instrumento estándar y los instrumentos alternativos. El modelo propuesto permite obtener medidas de acuerdo e inferencias sobre estos, en específico para el Coeficiente de Correlación de Concordancia y la Probabilidad de Acuerdo. Finalmente, el modelo es aplicado a dos conjuntos de datos: Capacidad Vital y Terremotos en Alaska.

2.1. Introducción

El propósito de este capítulo es establecer un modelo estructural homocedástico basado en la distribución normal multivariada y a partir de éste realizar inferencias en las medidas de acuerdo.

2.2. Modelo estructural normal multivariado

Para las unidades experimentales $i = 1, \dots, n$, sean x_i el verdadero valor del predictor x , X_i el valor observado del predictor x e Y_{ij} las respuestas observadas para $j = 1, \dots, p$. Como en Barnett (1969), Shyr y Gleser (1986), Kelly (1984) y Kimura (1992) el *MEM* multivariado puede escribirse como

$$\begin{aligned} X_i &= x_i + \epsilon_{i0} \\ Y_{ij} &= \alpha_j + \beta_j x_i + \epsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, p. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Bajo la siguiente notación

$$\mathbf{Z}_i = \begin{pmatrix} X_i \\ \mathbf{Y}_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_i = (Y_{i1} \ \dots \ Y_{ip})^T, \quad \boldsymbol{\epsilon}_i = (\epsilon_{i0} \ \epsilon_{i1} \ \dots \ \epsilon_{ip})^T,$$

los cuales son vectores aleatorios de dimensión $r = p + 1$ y

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)^T \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^T,$$

que corresponden a vectores de parámetros de dimensión p .

En notación matricial el modelo se escribe como

$$\mathbf{Z}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} x_i + \boldsymbol{\epsilon}_i \quad i = 1, \dots, n.$$

Donde se supone que

$$\boldsymbol{\epsilon}_i \sim \mathbf{N}_r(\mathbf{0}, \phi \boldsymbol{\Sigma}_0), \quad i = 1, \dots, n$$

con $\boldsymbol{\Sigma}_0$ conocido. Sin pérdida de generalidad, se puede tomar igual a la matriz identidad de dimensión r , denotada por \mathbf{I}_r .

Al igual que en el *MEM* simple, donde $p = 1$, en el *MEM* multivariado se pueden definir dos versiones: funcional y estructural. Este capítulo seguirá la versión estructural que supone x_i independiente de $\boldsymbol{\epsilon}_i$. Luego, se tiene

$$\mathbf{Z}_i \sim \mathbf{N}_r(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V}), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.2)$$

son vectores aleatorios *i.i.d.*, con

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} \mu_x \quad \text{y} \quad \mathbf{V} = \phi_x \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}^T + \phi \mathbf{I}_r = \phi_x \mathbf{b}\mathbf{b}^T + \phi \mathbf{I}_r,$$

con $\mathbf{b} = (1, \boldsymbol{\beta}^T)^T$. Desde (2.2) sigue que la función de densidad de probabilidad de \mathbf{Z}_i es dada por

$$f_z(\mathbf{z}_i, \boldsymbol{\theta}) = (2\pi)^{-r/2} |\mathbf{V}|^{-1/2} \exp\{-\delta_i/2\}, \quad (2.3)$$

donde $\delta_i(\boldsymbol{\theta}) = \delta_i = (\mathbf{z}_i - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{z}_i - \boldsymbol{\mu})$ corresponde al cuadrado de la distancia de Mahalanobis, para $i = 1, \dots, n$, y $\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{a}^T, \boldsymbol{\beta}^T, \phi^T)^T$ con $\mathbf{a} = (\mu_x, \boldsymbol{\alpha}^T)^T$ y $\boldsymbol{\phi} = (\phi_x, \phi)^T$. Notar que $\boldsymbol{\mu}$ depende de \mathbf{a} y $\boldsymbol{\beta}$ mientras \mathbf{V} depende de $\boldsymbol{\beta}$ y $\boldsymbol{\phi}$. Esto es, $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})$ y

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(\boldsymbol{\beta}, \phi).$$

2.2.1. Score y matriz de información de Fisher

En esta sección se presenta la función de log-verosimilitud para (2.3) y su función de Score.

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_i(\boldsymbol{\theta}),$$

donde $\mathcal{L}_i(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{r}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log |\mathbf{V}| - \frac{1}{2} \delta_i$ con $\delta_i = \frac{1}{\phi} \{\delta_{i1} - \gamma \delta_{i2}^2\}$, y $\delta_{i1} = (X_i - \mu_x)^2 + (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} \mu_x)^T (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} \mu_x)$, $\delta_{i2} = (X_i - \mu_x) + (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} \mu_x)^T \boldsymbol{\beta}$, $\gamma = \phi_x / (\phi_x c + \phi)$ y $c = \mathbf{b}^T \mathbf{b} = 1 + \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\beta}$

La función Score está dada por

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \mathcal{S}_i(\boldsymbol{\theta}),$$

donde $\mathcal{S}_i(\boldsymbol{\theta}) = \partial \mathcal{L}_i(\boldsymbol{\theta}) / \partial \boldsymbol{\theta} = (S_{i\mu_x}, S_{i\alpha}, S_{i\beta}, S_{i\phi_x}, S_{i\phi})^T$, con

$$\begin{aligned} S_{i\mu_x} &= \frac{\delta_{i2}}{\phi + \phi_x c}, \\ S_{i\alpha} &= \frac{1}{\phi} \{(\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} \mu_x) - \gamma \delta_{i2} \boldsymbol{\beta}\}, \\ S_{i\beta} &= -\gamma \boldsymbol{\beta} + (\mu_x + \gamma \delta_{i2}) S_{i\alpha}, \\ S_{i\phi_x} &= -\frac{1}{2} (\phi + \phi_x c)^{-1} \left\{ c - \frac{\delta_{i2}^2}{\phi + \phi_x c} \right\}, \\ S_{i\phi} &= -\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{p}{\phi} + \frac{1}{\phi + \phi_x c} \right) + \frac{1}{\phi} \left(\gamma \frac{\delta_{i2}^2}{\phi + \phi_x c} - \delta_i \right) \right\}, \end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, n$. En la sección A.3.1 se presentan los desarrollos de las derivadas parciales correspondientes al score.

La matriz de información correspondiente a la función log-verosimilitud $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})$ es

$$\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \{ \mathcal{S}_i(\boldsymbol{\theta}) \mathcal{S}_i^T(\boldsymbol{\theta}) \}, \quad (2.4)$$

donde la esperanza se toma sobre la distribución de cada \mathbf{Z}_i , para $i = 1, \dots, n$. Los errores estándar asintóticos del EMV se pueden calcular invirtiendo la matriz de información esperada (2.4). Un estimador natural para (2.4) es $\mathcal{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$.

El siguiente resultado se desprende de aplicar el teorema 2 desde Magnus y Neudecker (2007, sec. 15.3) a los parámetros del modelo propuesto.

Proposición 1. La matriz de información $\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta})$ para los parámetros $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\alpha}^T, \boldsymbol{\beta}^T, \phi^T)^T$, donde $\boldsymbol{\alpha} = (\mu_x, \alpha_1, \dots, \alpha_p)^T$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^T$ y $\phi = (\phi_x, \phi)^T$, bajo el modelo (2.2) sigue de

$$\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}} & \mathcal{I}_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}} & \mathbf{0} \\ \mathcal{I}_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}} & \mathcal{I}_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}} & \mathcal{I}_{\boldsymbol{\beta}\phi} \\ \mathbf{0} & \mathcal{I}_{\phi\boldsymbol{\beta}} & \mathcal{I}_{\phi\phi} \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}} &= \mathbf{D}_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\mu}}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{D}_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\mu}} \\ \mathcal{I}_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}} &= \mathbf{D}_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\mu}}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{D}_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\mu}} \\ \mathcal{I}_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}} &= \mathbf{D}_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\mu}}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{D}_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\mu}} + \frac{1}{2} (\mathbf{D}_{\boldsymbol{\beta}\text{vec}\mathbf{V}})^T (\mathbf{V}^{-1} \otimes \mathbf{V}^{-1}) (\mathbf{D}_{\boldsymbol{\beta}\text{vec}\mathbf{V}}) \\ \mathcal{I}_{\boldsymbol{\beta}\phi} &= \frac{1}{2} (\mathbf{D}_{\boldsymbol{\beta}\text{vec}\mathbf{V}})^T (\mathbf{V}^{-1} \otimes \mathbf{V}^{-1}) (\mathbf{D}_{\phi\text{vec}\mathbf{V}}) \\ \mathcal{I}_{\phi\phi} &= \frac{1}{2} (\mathbf{D}_{\phi\text{vec}\mathbf{V}})^T (\mathbf{V}^{-1} \otimes \mathbf{V}^{-1}) (\mathbf{D}_{\phi\text{vec}\mathbf{V}}), \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{D}_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\mu}} = \frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \boldsymbol{\alpha}^T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial \phi_x} & \frac{\partial \mu}{\partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial \mu}{\partial \alpha_p} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\mu}} = \frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial \mu}{\partial \beta_p} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{\phi\text{vec}\mathbf{V}} = \frac{\partial \text{vec}\mathbf{V}}{\partial \phi^T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \text{vec}\mathbf{V}}{\partial \phi_x} & \frac{\partial \text{vec}\mathbf{V}}{\partial \phi} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_{\boldsymbol{\beta}\text{vec}\mathbf{V}} = \frac{\partial \text{vec}\mathbf{V}}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \text{vec}\mathbf{V}}{\partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial \text{vec}\mathbf{V}}{\partial \beta_p} \end{pmatrix}$$

En nuestro caso tenemos que

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} \mu_x \quad \text{y} \quad \mathbf{V} = \phi_x \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}^T + \phi \mathbf{I}_r = \phi_x \mathbf{b}\mathbf{b}^T + \phi \mathbf{I}_r,$$

y un calculo directo nos conduce a

$$\mathbf{D}_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\mu}} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\beta} & \mathbf{I}_p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\mu}} = \mu_x \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_p \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{\boldsymbol{\beta}\text{vec}\mathbf{V}} = \phi_x (\text{vec}\mathbf{B}_1, \dots, \text{vec}\mathbf{B}_p) \text{ y } \mathbf{D}_{\phi\text{vec}\mathbf{V}} = (\text{vec}\mathbf{b}\mathbf{b}^T, \text{vec}\mathbf{I}_r),$$

con

$$\mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{e}_j^T \\ \mathbf{e}_j & \mathbf{e}_j \boldsymbol{\beta}^T + \boldsymbol{\beta} \mathbf{e}_j^T \end{pmatrix},$$

matrices $r \times r$ y el vector unitario \mathbf{e}_j de \mathbb{R}^p , para $j = 1, \dots, p$. Aquí $\mathbf{V}^{-1} = \frac{1}{\phi} (\mathbf{I}_r - \gamma \mathbf{b}\mathbf{b}^T)$, $\gamma = \phi_x / (\phi + \phi_x c)$ y $c = \mathbf{b}^T \mathbf{b} = 1 + \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\beta}$.

Finalmente, la matriz de covarianza de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ puede ser estimada por $\hat{\mathcal{I}}^{-1}/n$.

2.2.2. Estimación de máxima verosimilitud

Sean $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_r$ los valores propios de la matriz de covarianza muestral, denotada por

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{Z}_i - \bar{\mathbf{Z}})(\mathbf{Z}_i - \bar{\mathbf{Z}})^T,$$

con $\bar{\mathbf{Z}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{Z}_i/n$. Sabemos que \mathbf{S} puede ser escrita como

$$\mathbf{S} = \mathbf{G} \mathbf{D}(\mathbf{d}) \mathbf{G}^T,$$

donde \mathbf{G} es una matriz ortogonal $r \times r$ con la i -ésima columna correspondiente al i -ésimo vector propio de \mathbf{S} y $\mathbf{D}(\mathbf{d}) = \text{diag}(d_1, \dots, d_r)$, una matriz diagonal. Finalmente, la matriz \mathbf{G} es particionada como sigue:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{pmatrix},$$

donde g_{11} es un escalar y \mathbf{G}_{22} es $p \times p$. Así, los EMV están dados por Gleser (1981) y Shyr y Gleser (1986),

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\alpha}} &= \bar{\mathbf{Y}} - \bar{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}, \\ \hat{\boldsymbol{\beta}} &= \frac{\mathbf{G}_{21}}{g_{11}} \quad \text{y} \quad \hat{\phi} = \frac{1}{p} \sum_{i=2}^r d_i \end{aligned}$$

y

$$\hat{\mu}_x = \bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n \quad \text{y} \quad \hat{\phi}_x = \frac{pd_1 - \sum_{i=2}^r d_i}{p\hat{c}},$$

con $\bar{\mathbf{Y}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{Y}_i/n$, y $\hat{c} = 1 + \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \hat{\boldsymbol{\beta}}$. Alternativamente, los EMV pueden obtenerse usando el algoritmo EM, ver Kimura (1992) para la versión funcional y Bolfarine y Galea (1995) en la versión estructural.

Para estimar la varianza de los estimadores se utiliza la matriz de información observada o la esperada. Dado que el vector $\boldsymbol{\beta}$ es de interés primario en este modelo, a continuación se presenta su distribución asintótica.

Teorema 1. Bajo el modelo (2.2): $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{d} N_p(0; \Omega_\beta)$, donde

$$\Omega_\beta = \left\{ \frac{1}{1 + \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\beta} \tau_0^2} + \frac{1}{\tau_0} \right\} (\mathbf{I}_p + \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^T),$$

con $\tau_0 = \phi_x/\phi$. Este resultado sigue del Lema 1 en Shyr y Gleser (1986).

Una aplicación de este resultado, por ejemplo, es el test de Wald para probar hipótesis lineales de la forma $H_0 : \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{a}$.

2.2.3. Errores estándar asintóticos

Para evaluar los errores estándar de los estimadores de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ se recurre a la distribución asintótica de los estimadores máximo verosímiles.

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{d} \mathbf{N}_r(\mathbf{0}_r, \mathcal{I}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$$

Donde los errores estándar son obtenidos desde la diagonal $\mathcal{I}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}})/n$. Este resultado es encontrado en Lehmann y Casella (1998, Cap. 6) Teorema 5.1.

2.2.4. Pruebas de Hipótesis

El modelo propuesto (2.2) tiene por objetivo evaluar la intercambiabilidad de un instrumento estándar (X) medido con error y los instrumentos alternativos (Y_1, \dots, Y_p). Cuando $\hat{\boldsymbol{\alpha}} \approx \mathbf{0}_p$ y $\hat{\boldsymbol{\beta}} \approx \mathbf{1}_p$ se interpreta que los instrumentos son apropiadamente equivalentes. Dado que los coeficientes $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ son de primer interés, el foco estará en realizar algunas hipótesis sobre estos parámetros, utilizando la prueba de razón de verosimilitud (LRT, Likelihood Ratio Test). Específicamente, la siguiente hipótesis es considerada $H_0 : \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}_p, \boldsymbol{\beta} = \mathbf{1}_p$. El estadístico LRT está dado por

$$2\{\mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - \mathcal{L}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})\},$$

donde $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ es el estimador máximo verosímil bajo la hipótesis nula. En efecto, bajo H_0

- i) $\tilde{\mu}_x = \frac{1}{q}(\bar{X} + p\bar{Y})$, donde $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ y $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{Y}_i$, con $\bar{Y}_i = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p Y_{ij}$, $i = 1, \dots, n$.
- ii) $\tilde{\phi}_x = \frac{1}{npq} \sum_{i=1}^n (\tilde{\delta}_{i2}^2 - \tilde{\delta}_{i1})$, donde $\tilde{\delta}_{i1} = (X_i - \tilde{\mu}_x)^2 + (\mathbf{Y}_i - \tilde{\mu}_x \mathbf{1}_p)^T (\mathbf{Y}_i - \tilde{\mu}_x \mathbf{1}_p)$ y $\tilde{\delta}_{i2} = (X_i - \tilde{\mu}_x) + (\mathbf{Y}_i - \tilde{\mu}_x \mathbf{1}_p)^T \mathbf{1}_p$, para $i = 1, \dots, n$.
- iii) $\tilde{\phi} = \frac{1}{np} \sum_{i=1}^n (\tilde{\delta}_{i1} - \frac{1}{q} \tilde{\delta}_{i2}^2)$.

2.3. Medidas de acuerdo

Una de las aplicaciones del modelo estructural multivariado (2.2) es la comparación de sistemas de medición. La comparación entre instrumentos de medición que varían en precio, rapidez y otras características, como la eficiencia, ha sido de creciente interés en varias áreas como ingeniería, medicina, psicología y agricultura (por ejemplo Barnett, 1969; Shyr y Gleser, 1986; Kimura, 1992; Dunn, 2009; Carstensen, 2010; Lin *et al.*, 2012; Choudhary y Nagaraja, 2017). El principal interés es comparar diferentes formas de medir la misma cantidad desconocida x en un grupo de n unidades experimentales. En este contexto x_i es el verdadero valor de la cantidad desconocida x correspondiente a la unidad experimental i y Y_{ij} la medida observada de x obtenido con instrumento j en la unidad experimental i donde $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, p$. También se dispone de un instrumento de referencia x del que para la unidad experimental i se tiene una observación sujeta a error X_i para $i = 1, \dots, n$.

En esta sección se desarrolla las medidas de acuerdo entre el instrumento de referencia X y los sistemas de medición alternativos Y_1, \dots, Y_p .

Para asegurar un nivel de intercambiabilidad de los instrumentos se busca que la diferencia entre la referencia y los instrumentos alternativos $|X_i - Y_{ij}|$ sea pequeña, esto ocurre cuando $\alpha \approx \mathbf{0}_p$, $\beta \approx \mathbf{1}_p$ y a la vez manteniendo ϕ por debajo de ϕ_x . Dado este contexto, la medición del acuerdo permite cuantificar la concordancia y la intercambiabilidad de los instrumentos.

Bajo las consideraciones anteriores, el acuerdo puede medirse considerando los siguientes enfoques

- Error Cuadrático Medio, $E(|X - Y_j|^2)$ del que se desarrolla el Coeficiente de correlación de concordancia
- Probabilidad, $P(|X - Y_j| \leq c | X = x)$ del que se define la Probabilidad de Acuerdo o Probabilidad de Cobertura.

2.3.1. Coeficiente de correlación de concordancia

El Coeficiente de Correlación de Concordancia (*CCC*) fue propuesto por Lin (1989) en un contexto bivariado. La idea detrás de este estadístico es corregir la correlación de Pearson respecto a la diagonal ($Y = X$). El *CCC* propone una evaluación del acuerdo entre dos mediciones emparejadas, es un estadístico simple de usar con propiedades deseables como consistencia y normalidad asintótica. La siguiente definición del *CCC* es tomada de Lin (1989).

Definición 2. Considere un par de muestras independientes (Y_{1i}, Y_{2i}) para $i = 1, \dots, n$ seleccionadas de una población con media μ_1 y μ_2 y matriz de covarianza

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

El grado de concordancia entre Y_1 y Y_2 puede ser caracterizado como

$$\begin{aligned} \rho_c &= 1 - \frac{E[(Y_1 - Y_2)^2]}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2} \\ &= 1 - \frac{E[(Y_1 - Y_2)^2]}{E[(Y_1 - Y_2)^2 | Y_1, Y_2 \text{ son no correlacionadas}]} \\ &= 1 - \frac{\text{Desviación cuadrática esperada desde la línea de } 45^\circ}{\text{Desviación cuadrática esperada desde la línea de } 45^\circ, \text{ cuando } Y_1 \text{ y } Y_2 \text{ son no correlacionadas}} \\ &= \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2}. \end{aligned}$$

Un estimador de ρ_c es

$$\hat{\rho}_c = \frac{2S_{12}}{S_1^2 + S_2^2 + (\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2)^2},$$

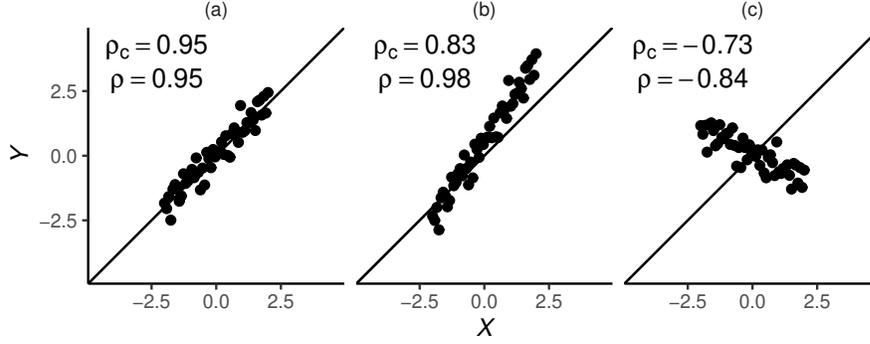


Figura 2.1: Algunos ejemplos de valores del Coeficiente de Correlación de Concordancia (ρ_c) y la Correlación de Pearson (ρ). En todos los ejemplos $\epsilon \sim N(0, 0.16)$. (a) $Y = X + \epsilon$. (b) $Y = 0.5 + 1.5X + \epsilon$. (c) $Y = -0.5X + \epsilon$.

donde

$$S_{12} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_{i1} - \bar{Y}_1)(Y_{i2} - \bar{Y}_2), \quad \bar{Y}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{ij}, \quad S_j^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_{ij} - \bar{Y}_j)^2, \quad j = 1, 2.$$

Desde Lin (1989) se tiene que $\hat{\rho}_c$ es un estimador consistente de ρ_c y distribuye asintóticamente normal con media ρ_c y varianza

$$\sigma_{\hat{\rho}_c}^2 = \frac{1}{n-2} \left[(1 - \rho^2) \rho_c^2 (1 - \rho_c^2) / \rho^2 + 4\rho_c^3(1 - \rho_c) u^2 / \rho - 2\rho_c^4 u^4 / \rho^2 \right],$$

donde ρ es el coeficiente de correlación de Pearson y $u = (\mu_1 - \mu_2) / \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}$.

En la Figura 2.1 se presenta tres realizaciones de datos bivariados donde se calculan los estadísticos *CCC* (ρ_c) y Correlación de Pearson (ρ). (a) corresponde a un alto acuerdo donde ρ_c y ρ son similares y los datos se acercan a la línea de 45°. (b) el acuerdo disminuye ya que los puntos se alejan de la diagonal, pero la correlación sigue siendo alta. (c) Cuando la relación es inversa, se tiene que ρ_c y ρ son negativos, en este caso el acuerdo se mide contra la diagonal de 135°.

En el modelo estructural, para medir el grado de acuerdo entre las variables X y Y_j en el contexto de comparación de instrumentos tenemos, $\mathbf{Z}_{ij} = (X_i, Y_{ij})^T$, $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, p$. Luego desde (2.2), sigue que la distribución marginal de \mathbf{Z}_{ij} esta dada por

$$\mathbf{Z}_{ij} \sim N_2(\boldsymbol{\mu}_j, \mathbf{V}_j), \quad (2.5)$$

donde

$$\boldsymbol{\mu}_j = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \alpha_j + \beta_j \mu_x \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{V}_j = \begin{pmatrix} \phi_x + \phi & \beta_j \phi_x \\ \beta_j \phi_x & \phi_x \beta_j^2 + \phi \end{pmatrix}$$

El *CCC* definido en Lin (1989) bajo el modelo estructural queda como

$$\rho_j = \frac{2\beta_j \phi_x}{\phi_x(1 + \beta_j^2) + 2\phi + (\alpha_j + \mu_x(\beta_j - 1))^2}. \quad (2.6)$$

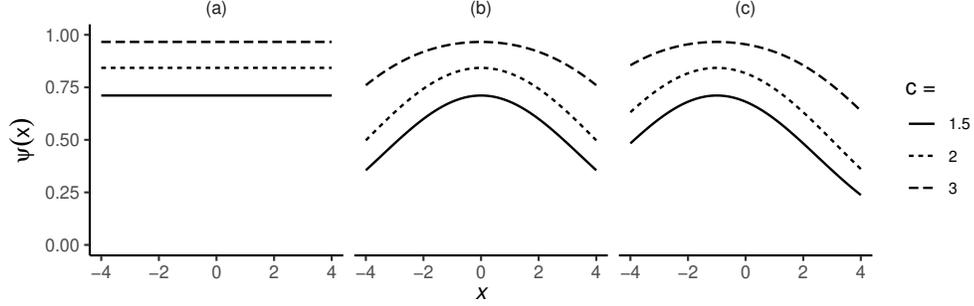


Figura 2.2: Algunos ejemplos de valores de la Probabilidad de Acuerdo según la ecuación (2.7). (a) $\alpha = 0.0$, $\beta = 1.0$, $\phi = 1.0$. Probabilidad de Acuerdo independiente de x . (b) $\alpha = 0.0$, $\beta = 1.5$, $\phi = 1.0$. Baja la Probabilidad de Acuerdo a medida que x se aleja de cero. (c) $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.5$, $\phi = 1.0$. Probabilidad de Acuerdo alta en $x = -0.5$.

Notar que si $\alpha_j = 0$ y $\beta_j = 1$ para $j = 1, \dots, p$ entonces $\rho_j = \phi_x / (\phi_x + \phi)$.

En particular, el modelo estructural Normal Bivariado es considerado como una reparametrización del modelo de Lin (1989) para evaluar el *CCC*.

2.3.2. Probabilidad de acuerdo

En la revisión realizada por Barnhart *et al.* (2007) se encuentra la definición de la probabilidad de cobertura o Probabilidad de Acuerdo (*PA*). La idea principal es medir la proporción en la población (a lo largo del verdadero valor x) donde la diferencia de las mediciones de los instrumentos estándar y alternativo sea menor a un valor de tolerancia.

En el contexto del capítulo, si el valor del predictor sin error x está dado, la *PA* se define como

$$\psi_j(x) = P(|Y_j - X| \leq c_j | X = x), \quad j = 1, \dots, p \quad (2.7)$$

donde $c_j \geq 0$ es un nivel de tolerancia aceptable definido por el experimentador.

En la Figura 2.2 se presentan tres ejemplos de realizaciones de la *PA*, según la ecuación (2.7). (a) Cuando $\alpha = 0$ y $\beta = 1$ se tiene una *PA* independiente de x , por tanto los instrumentos son intercambiables. (b) Cuando $\beta = 1.5$ la *PA* disminuye a medida que x se aleja de cero. (c) Cuando $\alpha = 0.5$ y $\beta = 1.5$ la *PA* aumenta cuando x se aleja de -0.5 donde se homologan ambos instrumentos. En todos los casos a medida que c aumenta o la tolerancia aumenta entonces la *PA* aumenta.

Además, desde (2.5) la *PA* toma la forma

$$\psi_j(x) = \Phi\left(\frac{c_j - \alpha_j - (\beta_j - 1)x}{\sqrt{2\phi}}\right) - \Phi\left(\frac{-c_j - \alpha_j - (\beta_j - 1)x}{\sqrt{2\phi}}\right),$$

donde $\Phi(x)$ denota la función de distribución acumulada para la normal estándar evaluada en x y $j = 1, \dots, p$.

Similarmente, se define la *PA* marginal como

$$\psi_j = P(|Y_j - X| \leq c_j) = \Phi \left(\frac{c_j - \alpha_j - (\beta_j - 1)\mu_x}{\sqrt{(\beta_j - 1)^2\phi_x + 2\phi}} \right) - \Phi \left(\frac{-c_j - \alpha_j - (\beta_j - 1)\mu_x}{\sqrt{(\beta_j - 1)^2\phi_x + 2\phi}} \right), \quad (2.8)$$

para $j = 1, \dots, p$. Note que si $\alpha_j = 0$ y $\beta_j = 1$, para $j = 1, \dots, p$ entonces ambas probabilidades de acuerdo coinciden.

2.3.3. Inferencia sobre las medidas de acuerdo

Tres métodos son propuestos para hacer inferencia en las medidas de acuerdo *CCC* (ρ_j ecuación 2.6) y *PA* (ψ_j ecuación 2.8): Método Delta, Bootstrap y Comparaciones múltiples. A continuación, se describen cada uno de ellos. Antes, para ahorrar notación se considere a las medidas de acuerdo como κ_j con $j = 1, \dots, p$, donde κ_j puede ser ρ_j o ψ_j indistintamente.

Método Delta. Aprovechando la continuidad de κ_j en $\boldsymbol{\theta}$ y la distribución asintótica de $\sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{d} \mathbf{N}_r(\mathbf{0}_r, \mathcal{I}^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}))$ se puede utilizar el método Delta para obtener la distribución asintótica de ambas medidas de acuerdo utilizando Teorema 8.22 de Lehmann y Casella (1998, Cap. 1). Formalmente,

$$\sqrt{n}(\widehat{\kappa}_j - \kappa_j) \xrightarrow{D} \mathbf{N} \left(0, \mathcal{G}^T \mathcal{I}^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) \mathcal{G} \right),$$

donde $\mathcal{I}^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})$ es la inversa de la matriz de información de Fisher y $\mathcal{G} = \partial\kappa_j/\partial\boldsymbol{\theta}$ es el gradiente de κ_j con respecto a $\boldsymbol{\theta}$ para $j = 1, \dots, p$, ambas matrices evaluadas en $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$.

Alternativamente, se pueden tomar transformaciones sobre κ_j para mejorar la inferencia. Por ejemplo, para la *CCC* tomar $\tanh^{-1}(\cdot)$ tal como propone Lin (1989) con tal de mejorar la normalidad asintótica y para *PA* tomar $\text{logit}(\cdot)$.

Bootstrap. Ya que las medidas de acuerdo están acotadas superiormente $\kappa_j \leq 1$ cada vez que los valores se acerquen a la cota superior se formarían intervalos de confianza asimétricos los que el Método Delta no podría capturar. Es por esto que se aplica el método Bootstrap con el fin de encontrar intervalos de confianza asimétricos. El siguiente algoritmo es aplicado:

Paso 1. Remuestrear para $i = 1, \dots, n$ desde las n muestras iniciales con repetición.

Paso 2. Estimar $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^*$ a partir del remuestreo del paso 1 y evaluar $\widehat{\kappa}_j^*$ para cada $j = 1, \dots, p$.

Paso 3. Repetir B veces desde el Paso 1 al 2. Luego sobre las B repeticiones calcular los cuantiles $\alpha/2\%$ y $(1 - \alpha/2)\%$ para $\widehat{\kappa}_j^*$.

Comparaciones Múltiples. Cuando solo dos métodos son comparados, $p = 2$, están disponibles algunos métodos asintóticos para realizar inferencia estadística. Por ejemplo, obtener una cota para un intervalo de confianza unilateral de las medidas de confianza. Esta cota es usada para determinar si los métodos tienen un acuerdo satisfactorio. En este trabajo, para *CCC* y *PA*, se puede construir una cota inferior. Sin embargo, si $p > 2$ también se pueden hacer comparaciones múltiples para cada par de instrumentos de interés. El objetivo de las comparaciones múltiples es obtener cotas simultaneas para todos los contrastes de interés con probabilidad de cobertura global $(1 - \alpha) \%$. Considerando las medidas de acuerdo κ_j se tiene por el método Delta la distribución asintótica de $\hat{\kappa}_j$, como se vio anteriormente. Si un alto valor de κ_j implica un buen acuerdo se puede calcular simultáneamente cotas inferiores. Entonces, se busca obtener los valores de l_j tal que

$$P(\hat{\kappa}_1 \geq l_1, \hat{\kappa}_2 \geq l_2, \dots, \hat{\kappa}_p \geq l_p) \geq 1 - \alpha$$

Siguiendo a Hedayat *et al.* (2009) y Choudhary y Yin (2010), sea $Z_j = (\hat{\kappa}_j - \kappa_j) / \sqrt{\text{Var}(\hat{\kappa}_j)}$ y $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_p)^T$. Se sabe que \mathbf{Z} sigue asintóticamente una distribución normal multivariada $\mathbf{N}_p(\mathbf{0}, \mathbf{R})$, donde \mathbf{R} es la matriz de varianzas covarianza de \mathbf{Z} dado por $\mathbf{R} = \mathbf{H}(\mathcal{G}^T \mathcal{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \mathcal{G})\mathbf{H}$, con $\mathbf{H} = \text{diag}(\text{Var}(\hat{\kappa}_1)^{-1/2}, \dots, \text{Var}(\hat{\kappa}_p)^{-1/2})$, una matriz diagonal $p \times p$. Notar que \mathbf{R} corresponde a la matriz de correlación de $\hat{\boldsymbol{\kappa}}$.

Sea $z_{1-\alpha} \in \mathbb{R}$ tal que $P(Z_1 \leq z_{1-\alpha}, Z_2 \leq z_{1-\alpha}, \dots, Z_p \leq z_{1-\alpha}) = P(Z_{\max} \leq z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$, donde $Z_{\max} = \max\{Z_1, \dots, Z_p\}$. A saber, $z_{1-\alpha}$ es el $(1 - \alpha) \%$ percentil de Z_{\max} . Entonces, usando las expresiones anteriores de Z_j se obtiene cotas simultaneas para κ_j (Hedayat *et al.*, 2009),

$$\kappa_j \geq \hat{\kappa}_j - z_{1-\alpha} \sqrt{\text{Var}(\hat{\kappa}_j)}, \quad j = 1, \dots, p \quad (2.9)$$

Un método para calcular el valor crítico $z_{1-\alpha}$ fue propuesto por Hothorn *et al.* (2008). Los límites (2.9) están basados en la aproximación normal de \mathbf{Z} , lo que requiere un tamaño muestral grande. Una alternativa para moderados n es usar el método bootstrap (Efron y Tibshirani, 1993; Choudhary y Yin, 2010). El algoritmo es el siguiente

- Paso 1. Simular datos remuestrados Y_{ij}^* , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, p$ desde el modelo (2.1) con $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$.
- Paso 2. Ajustar el modelo (2.2) a los datos remuestrados usando máxima verosimilitud. Sea $\hat{\boldsymbol{\theta}}^*$ el resultante EMV de $\boldsymbol{\theta}$ y $\hat{\boldsymbol{\kappa}} = (\hat{\kappa}_1^*, \dots, \hat{\kappa}_p^*)$ sea el EMV de $\boldsymbol{\kappa}$. También, sea $\text{Var}(\hat{\kappa}_j^*)$ sea la varianza asintótica de $\hat{\kappa}_j^*$. Calcular $Z_j^* = (\hat{\kappa}_j^* - \hat{\kappa}_j) / \sqrt{\text{Var}(\hat{\kappa}_j^*)}$, $j = 1, \dots, p$ y $Z_{\max}^* = \max\{Z_1^*, \dots, Z_p^*\}$.
- Paso 3. Repetir los pasos 1 a 2 al menos B veces, con el fin de obtener B muestras de Z_{\max} . Tomar el $(1 - \alpha) \%$ percentil de las muestras de Z_{\max}^* como el punto crítico $z_{1-\alpha}$.

2.4. Bondad de ajuste

Para evaluar el ajuste del modelo propuesto se contruye el gráfico de las distancias de Mahalanobis transformadas, ver Little (1988) y Lange *et al.* (1989). Sea

$$\delta_i(\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{Z}_i - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{Z}_i - \boldsymbol{\mu}), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

la distancia de Mahalanobis. Bajo el supuesto de normalidad, se sabe que $\delta_i(\boldsymbol{\theta})$ tiene una distribución χ^2 con r grados de libertad para $i = 1, \dots, n$.

Además, $\delta_i(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ tiene, asintóticamente, la misma distribución χ^2 . Usando la aproximación de Wilson-Hilferty (Johnson *et al.*, 1995, pág. 426), se tiene que

$$z_i = \frac{(\delta_i(\hat{\boldsymbol{\theta}})/r)^{1/3} - (1 - \frac{2}{9r})}{(\frac{2}{9r})^{1/2}},$$

aproxima a la distribución $N(0, 1)$.

Una forma alternativa de obtener residuos normales es usar los residuos cuantiles $r_{q,i}$ propuestos por Dunn y Smyth (1996). Aplicado al modelo se tiene $r_{q,i} = \Phi^{-1}(F(\delta_i(\boldsymbol{\theta})))$, donde $F(\cdot)$ corresponde a la función de distribución acumulada de una χ_r^2 y $\Phi(\cdot)$ es la función de distribución acumulada de una Normal estándar. Así la distribución de $r_{q,i}$ converge a una normal estándar si $\boldsymbol{\theta}$ es estimado consistentemente.

Un Q - Q plot de las distancias transformadas z_i o de $r_{q,i}$, puede ser utilizado para evaluar el ajuste del modelo estructural normal multivariado.

2.5. Hipótesis de interés

En el contexto de comparación de instrumentos usando *MEM* son de interés dos hipótesis las que serán evaluadas bajo cuatro tests. Las hipótesis de interés son:

- (i) $H_0 : \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}_p, \boldsymbol{\beta} = \mathbf{1}_p$. Supone que todos los instrumentos $j = 1, \dots, p$ son intercambia- bles con el instrumento estándar.
- (ii) $H_0 : \phi = \phi_0$. Supone un valor fijo para el error de medición.

Cuatro test son implementados para probar las hipótesis de interés: Test de Razón de Versimilitud (*LRT*), Wald (*W*), Score (*S*) y Gradiente (*G*). Los primeros tres son comparados en Buse (1982), el test Score es presentado en (Rao, 2005) y el test Gradiente es analizado en (Lemonte y Ferrari, 2012; Lemonte, 2016).

Los cuatro tests son definidos como:

$$\begin{aligned} LRT &= 2\{\mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - \mathcal{L}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})\}, \\ W &= n(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{a})^T \{\mathbf{A}\mathcal{I}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{A}^T\}^{-1} (\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{a}), \\ S &= \frac{1}{n} \mathbf{U}^T(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) \mathcal{I}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{U}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \\ G &= \mathbf{U}^T(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \tilde{\boldsymbol{\theta}}) \end{aligned}$$

donde $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ es *EMV* restringido y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ es el *EMV* irrestricto de $\boldsymbol{\theta}$. Para $H_0 : \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}_p, \boldsymbol{\beta} = \mathbf{1}_p$ la distribución asintótica de cada uno de estos estadísticos es $\chi^2(2p)$ y para $H_0 : \phi = \phi_0$ se tiene $\chi^2(1)$.

2.6. Estudio de simulación

Para determinar el nivel de significancia empírico en los test propuestos fue implementado un estudio de simulación. En un contexto de mala-especificación de la variable latente x_i y los errores de medición $\boldsymbol{\epsilon}_i$ se determinan empíricamente las inferencias realizadas para H_0 de la sección 2.5.

Las observaciones de la variable latente x_i se obtienen de tres escenarios:

(i) $x_i \sim N(\mu = 0, \sigma = 1)$

(ii) $x_i \sim t_\eta(\mu = 0, \sigma = 1, \eta = 0.25)$

(iii) $x_i \sim \text{Skew-Normal}(\chi = -1.18, \omega = 1.54, \alpha = 3.22)$

En los tres escenarios se tiene $E(X_i) = 0, \text{var}(X_i) = 1$. Particularmente, el caso t_η se logra una curtosis indeterminada y para el escenario Skew Normal una asimetría de 0.7. Las muestras de los escenarios t_η y Skew Normal fueron generadas usando los paquetes estadísticos MVT (Osorio y Galea, 2015) y sn (Azzalini, 2020) respectivamente.

En cada réplica, las simulaciones fueron jerárquicas, es decir, primero se simulan observaciones de la variable latente, x_i (según sea el escenario) y luego se generan las muestras $Y_{ij} = \alpha_j + \beta_j x_i + \epsilon_{ij}$ para $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, p$, donde $(\epsilon_{i1}, \dots, \epsilon_{ip})^T$ son simuladas desde $\mathbf{N}_p(0, \phi \boldsymbol{\Sigma}_0)$, donde $\boldsymbol{\Sigma}_0$ corresponde a la matriz identidad.

Cada escenario de x_i fue replicado 10000 veces para todas las combinaciones de $n = 100, 500, 1000$ y $p = 2, 5, 20$. La evaluación del nivel de significancia empírico de los tests LRT, Wald, Score y Gradiente para la hipótesis $H_0 : \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}_p, \boldsymbol{\beta} = \mathbf{1}_p$ al 5% de significancia se presentan en la tabla 2.1 para $\phi = 1$. Los resultados indican que el test de Wald empeora (o sea, se aleja del 5% esperado) a medida que x_i difiere de la distribución Normal y la varianza del error ϕ crece. A medida que p crece es necesario aumentar la cantidad n especialmente en el test de Wald para mantener el objetivo del 5%. Los tests LRT, Score y Gradiente tienen un buen comportamiento para la hipótesis analizada. Valores de $\phi = 0.5, 1.5$ también fueron evaluadas bajo las consideraciones anteriores llegando a resultados similares. Otras evaluaciones de las pruebas de hipótesis son presentadas en el Apéndice B.

También se exploró el impacto en el nivel de significancia al simular los errores $\boldsymbol{\epsilon}_i$ desde una t_η multivariada con parámetros $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}_{p+1}$ y $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{I}_{p+1}$. Del mismo modo, fueron simulados los tres escenarios de x_i con 10000 replicas. Los resultados son presentados en la tabla 2.2. Claramente los tests se alejan rápidamente del nivel de referencia del 5%, a pesar de aumentar n . Desde un punto de vista práctico, al realizar inferencia bajo falta de especificación en los errores de medición produce rápidamente malos resultados, lo que plantea buscar alternativas robustas en la distribución multivariante de $\boldsymbol{\epsilon}_i$.

Finalmente, el estudio contempló la hipótesis $H_0 : \phi = 1$. Así para los tres escenarios de x_i en los cuatro tests se buscó el nivel de significancia empírico. Los valores son presentados en la Tabla 2.3. Un resultado interesante es la igualdad que se logra para los test Score y Gradiente.

Tabla 2.1: Nivel de significancia empírico al 5% de los tests LRT, Wald, Score y Gradiente para la hipótesis $H_0 : \alpha_p = \mathbf{0}_p, \beta_p = \mathbf{1}_p$. Las muestras x_i fueron generadas desde la distribución normal, t_η y Skew Normal. El error de medición ϵ_i fue simulado desde una Normal multivariada con parámetro $\phi = 1.0$. Los resultados fueron obtenidos desde 10000 simulaciones.

		Normal			t_η			Skew Normal		
		2	5	20	2	5	20	2	5	20
LRT	100	5.41	5.52	5.50	5.15	5.40	5.53	4.86	5.25	5.56
	500	5.30	5.39	5.42	5.45	5.16	5.00	5.05	5.21	5.50
	1000	5.08	5.14	4.97	5.19	4.90	4.76	5.09	5.15	5.09
Wald	100	6.49	7.20	9.10	6.74	6.96	8.89	5.84	7.21	9.18
	500	5.81	5.69	5.94	5.44	5.40	6.05	5.19	5.60	6.12
	1000	5.10	5.26	5.25	5.40	5.14	5.27	5.15	5.31	5.33
Score	100	4.87	4.98	4.84	4.61	4.89	4.62	4.50	4.69	4.81
	500	5.24	5.25	5.32	5.33	5.04	4.93	5.05	5.13	5.32
	1000	4.99	5.12	4.93	5.14	4.84	4.71	5.03	5.06	5.02
Gradiente	100	5.08	5.42	5.79	4.88	5.65	6.14	4.89	5.40	5.89
	500	5.30	5.42	5.50	5.36	5.09	5.25	5.15	5.24	5.32
	1000	5.04	5.04	4.98	5.20	4.83	4.84	5.11	5.13	5.15

Tabla 2.2: Nivel de significancia empírico al 5% de los tests LRT, Wald, Score y Gradiente para la hipótesis $H_0 : \alpha = \mathbf{0}_p, \beta = \mathbf{1}_p$. Las muestras x_i fueron generadas desde la distribución normal, t_η y Skew Normal. El error de medición ϵ_i fue simulado desde una t_η multivariada con parámetros $\phi = 1$ y $\eta = 0.4$. Los resultados fueron obtenidos desde 10000 simulaciones.

		Normal			t_η			Skew Normal		
		2	5	20	2	5	20	2	5	20
LRT	100	23.73	27.00	26.93	24.22	27.45	27.60	23.99	27.27	26.55
	500	36.71	39.91	35.01	37.07	40.02	35.14	36.42	40.46	35.29
	1000	44.79	47.50	41.47	44.90	47.86	41.24	44.76	48.20	41.62
Wald	100	22.97	27.49	29.94	22.93	28.17	30.46	22.95	27.97	29.47
	500	36.34	40.61	37.12	36.77	40.61	37.70	36.43	41.41	37.55
	1000	45.23	48.32	43.01	45.17	48.67	42.63	44.74	48.82	42.96
Score	100	20.90	22.47	20.35	21.24	22.61	21.18	20.87	22.68	19.95
	500	35.45	37.82	31.86	35.81	37.64	31.98	35.36	38.36	32.12
	1000	44.04	46.17	38.93	44.24	46.42	38.91	44.00	46.75	39.21
Gradiente	100	20.97	24.35	23.96	20.80	24.79	24.68	20.81	24.22	23.43
	500	35.71	38.47	33.88	35.80	38.78	34.00	35.56	39.12	33.89
	1000	43.73	46.53	40.29	44.07	47.04	40.20	43.64	47.37	40.41

Tabla 2.3: Nivel de significancia empírico al 5% de los tests LRT, Wald, Score y Gradiente para la hipótesis $H_0 : \phi = \phi_0$. Las muestras x_i fueron generadas desde la distribución normal, t_η y Skew Normal. El error de medición ϵ_i fue simulado desde una Normal multivariada con parámetro $\phi = 1.5$. Los resultados fueron obtenidos desde 10000 simulaciones.

		Normal			t_η			Skew Normal		
		2	5	20	2	5	20	2	5	20
	p									
	n									
LRT	100	5.92	6.70	10.82	5.48	6.73	10.41	5.77	6.57	10.64
	500	4.93	5.46	6.16	5.13	5.25	6.10	5.09	5.13	6.02
	1000	5.31	5.46	5.58	5.09	4.82	5.37	5.06	5.09	5.68
Wald	100	7.73	7.93	12.12	7.90	8.00	11.69	7.45	7.87	11.81
	500	5.40	5.70	6.29	5.34	5.44	6.35	5.54	5.45	6.20
	1000	5.48	5.71	5.65	5.36	5.03	5.42	5.27	5.24	5.82
Score	100	5.24	6.10	10.14	4.48	5.99	9.84	5.07	5.89	10.08
	5000	4.86	5.35	6.06	5.02	5.19	5.98	4.95	5.11	5.88
	1000	5.34	5.43	5.47	4.92	4.76	5.30	4.92	5.06	5.59
Gradiente	100	5.24	6.10	10.14	4.48	5.99	9.84	5.07	5.89	10.08
	500	4.86	5.35	6.06	5.02	5.19	5.98	4.95	5.11	5.88
	1000	5.34	5.43	5.47	4.92	4.76	5.30	4.92	5.06	5.59

2.7. Aplicaciones

2.7.1. Datos de capacidad vital

Para ilustrar el desempeño del modelo propuesto, se aplica a un ejemplo práctico en el ámbito de detección clínica presentado en Barnett (1969). Uno de los instrumentos es estándar utilizado por un operador calificado, mientras que otro instrumento más portátil, más fácil de operar y algo más económico es utilizado por el mismo operador calificado y otro no calificado. En esta aplicación son comparados las cuatro combinaciones de instrumento-operador para la capacidad pulmonar con el fin de evaluar la precisión y calibración de los instrumentos ($r = 4$, $p = 3$ con $j = 1, 2, 3$). En un grupo homogéneo de 72 pacientes ($n = 72$ con $i = 1, \dots, 72$) y los datos son analizados en base al modelo estructural lineal propuesto. Los valores estimados de $\theta = (\mu_x, \alpha^T, \beta^T, \phi_x, \phi)$ proporcionan las medidas de sesgo y calibración de los instrumentos. En este conjunto de datos se asume la consistencia de la medición para un paciente en un instrumento dado (no hay replicas o medidas repetidas por paciente). En la Figura 2.3 se muestran las gráficas de dispersión y sus respectivas gráficas Bland-Altman para las tres versiones del instrumento/operador contra el estándar. Notar como en Y_1 y Y_2 se alejan de X mostrando diferencias por sobre cero. En la Tabla 2.4 se presentan los estadísticos descriptivos de los datos de la aplicación. Marginalmente la normalidad es rechazada para las cuatro variables cuando se usa el test de Shapiro-Wilk (datos no mostrados). Sin embargo, los test de Mardia de asimetría y curtosis no rechazan la normalidad multivariada.

Tabla 2.4: Estadísticos descriptivos del conjunto de datos Capacidad Vital en Barnett (1969).

Variable	Media	Matriz de Covarianza				Asimetría	Curtosis	Mardia
X	2246	592519				0.49	2.63	Asimetría
Y_1	2175	581453	627554			0.65	2.65	28.06
Y_2	2148	640222	682229	799034		0.51	2.50	Curtosis
Y_3	2102	605301	646178	736832	731657	0.47	2.37	1.18

En la Tabla 2.5 se presentan los EMV de θ . La bondad de ajuste se verifica en la Figura 2.4 donde el Q-Q plot indica un ajuste satisfactorio y las distancias de Mahalanobis estarían cerca del percentil 95%. Al evaluar la hipótesis de insesgadez para cada instrumento ($H_0 : \alpha_j = 0$ y $H_0 : \beta_j = 1$ por separado) usando el estadístico de Wald se tiene que solo en el primer instrumento ($j = 1$) no se puede rechazar la hipótesis ($Z_{\alpha_1=0} = -1.77$ y $Z_{\beta_1=1} = 1.15$). Este resultado también puede comprobarse al observar como el instrumento que más se ajusta a X es el primer instrumento tanto en la gráfica identidad como en la de Bland-Altman. El coeficiente de correlación de concordancia se presenta en la Figura 2.5 y en la Tabla 2.6. Como era de esperarse el primer instrumento es el que más acuerdo logra con el estándar. Notar como los intervalos de confianza con el método Bootstrap proporcionan bandas asimétricas. La Probabilidad de acuerdo marginal fue calculada para tres valores de tolerancia $c_j = 300, 350, 400$ en la Tabla 2.7 y la Figura 2.6. Nuevamente el primer instrumento logra el mayor acuerdo a los tres niveles de tolerancia c_j .

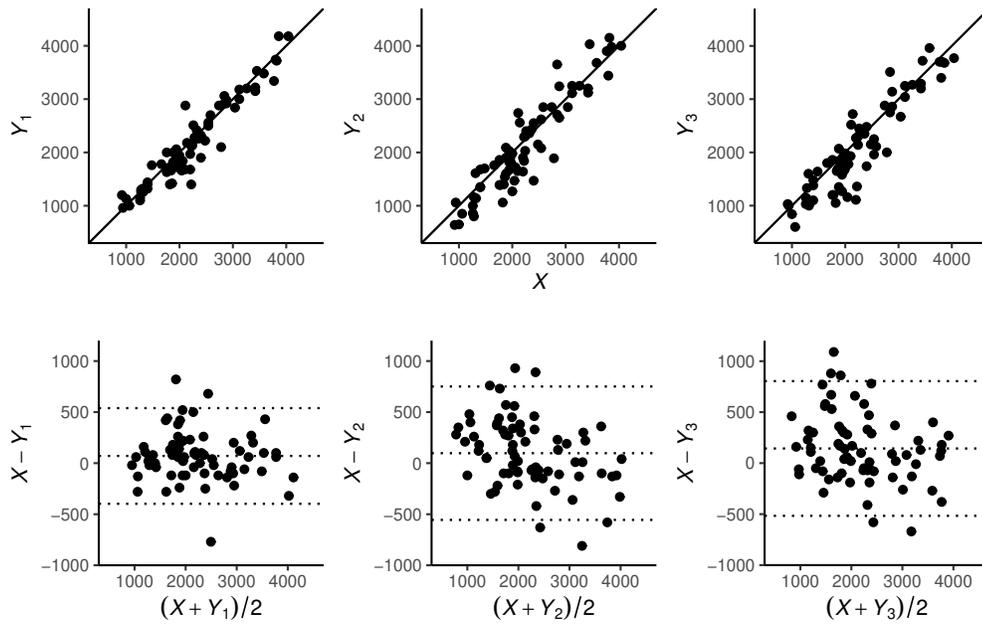


Figura 2.3: Diagramas de dispersión y gráficas de Bland-Altman para el conjunto de datos Capacidad Vital (ver Barnett (1969)). En el modelo se considera X como el instrumento estándar empleado por el operador experto, el que es comparado con las combinaciones de operador-instrumento Y_1 , Y_2 y Y_3 . Las mediciones corresponden a la capacidad pulmonar de 72 pacientes.

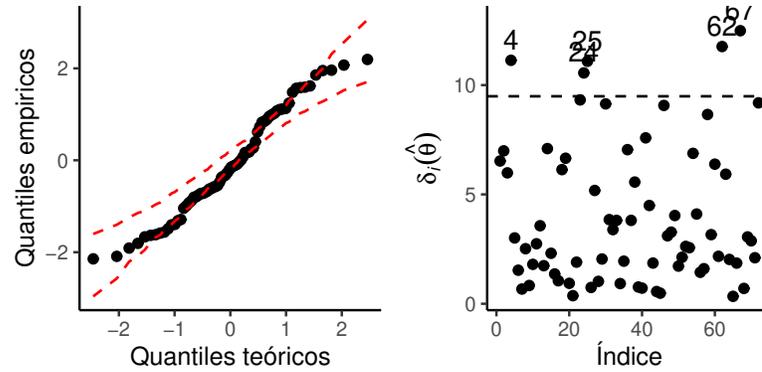


Figura 2.4: QQ -plot normal con envolvente al 95% de confianza sobre el ajuste del modelo estructural. En las distancias de Mahalanobis $\delta_i(\hat{\theta})$, la línea (— —) representa el percentil 95% de una $\chi^2(4)$. Los puntos etiquetados serían considerados como atípicos.

Tabla 2.5: Estimadores Máximo Verosímiles del modelo estructural Normal multivariado aplicado al conjunto de datos Capacidad Vital.

Variable	EMV	SE	Variable	EMV	SE	Variable	EMV	SE
$\hat{\mu}_x$	2246.11	89	$\hat{\beta}_1$	1.050	0.044	$\hat{\phi}_x$	538315	95419
$\hat{\alpha}_1$	-183.58	103	$\hat{\beta}_2$	1.185	0.047	$\hat{\phi}$	34849	3353
$\hat{\alpha}_2$	-513.75	110	$\hat{\beta}_3$	1.128	0.046			
$\hat{\alpha}_3$	-430.75	107						

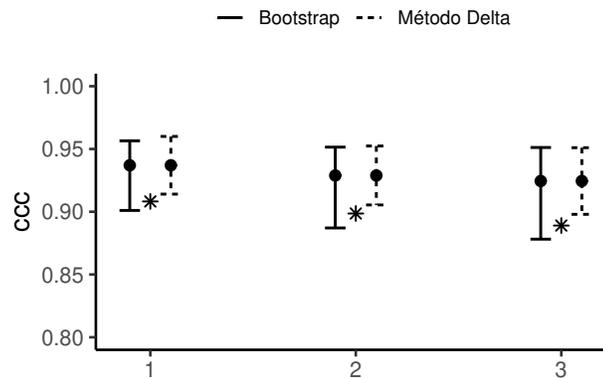


Figura 2.5: Coeficiente de Correlación de Concordancia y su intervalo de confianza al 95% obtenido por el Método Delta y por bootstrap remuestreando 300 replicas. El * corresponde al valor de la cota inferior simultánea del CCC.

Tabla 2.6: Coeficiente de Correlación de Concordancia y su intervalo de confianza al 95 % obtenido por Método Delta y por Bootstrap remuestreando 300 replicas.

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
Bootstrap	0.937 (0.901, 0.957)	0.929 (0.887, 0.951)	0.924 (0.878, 0.951)
Método Delta	0.937 (0.914, 0.960)	0.929 (0.905, 0.952)	0.924 (0.898, 0.951)

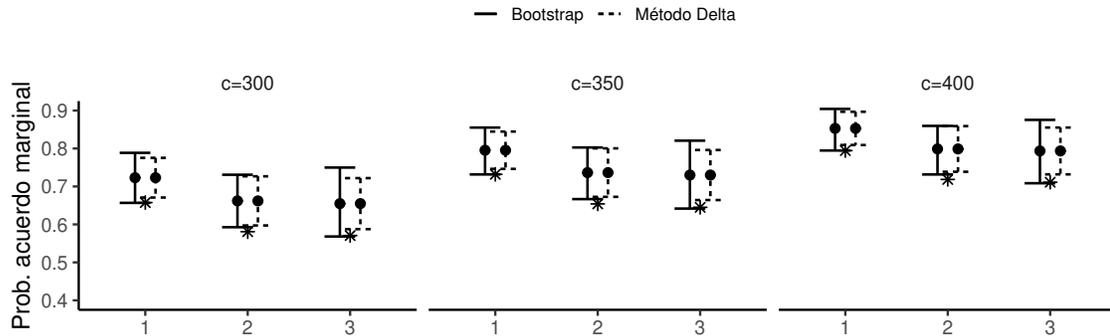


Figura 2.6: Probabilidad de Acuerdo considerando discrepancias c_j de 300, 350 y 400 con respecto al operador-instrumento de referencia X . Los intervalos de confianza al 95 % fueron obtenidos por el método Delta y por Bootstrap remuestreando 300 replicas. El * corresponde al valor de la cota inferior simultánea de la Probabilidad de Acuerdo.

Tabla 2.7: Probabilidad de Acuerdo considerando discrepancias c_j de 300, 350 y 400. Los intervalos de confianza al 95 % fueron obtenidos por Bootstrap remuestreando 300 replicas.

j	$c_j = 300$	$c_j = 350$	$c_j = 400$
1	0.72 (0.66, 0.79)	0.80 (0.73, 0.86)	0.85 (0.79, 0.90)
2	0.66 (0.59, 0.73)	0.74 (0.67, 0.80)	0.80 (0.73, 0.86)
3	0.65 (0.57, 0.75)	0.73 (0.64, 0.82)	0.79 (0.71, 0.88)

2.7.2. Datos de terremotos en Alaska

En esta sección se aplica el modelo estructural (2.1) a las magnitudes de terremotos en Alaska durante el periodo 1969 a 1978 reportados por la *National Oceanic and Atmospheric Administration's Hypocenter Data File* (Meyers y von Hake, 1976 en Ganse *et al.* (1983)). Para 62 terremotos, tres magnitudes son consideradas para las ondas de internas o de cuerpo (X), para las ondas de superficie (Y_1) y para las ondas cercanas (Y_2). En la práctica, se busca obtener una estimación de la magnitud de la onda de superficie a partir de la onda interna, ya que es más común de obtener en terremotos de baja intensidad. Los datos pueden ser encontrados en Fuller (2006, pag. 57). En la Figura 2.7 se presentan las 62 mediciones de terremotos, donde la variable X corresponde a la magnitud de la onda interna del terremoto, notar como Y_1 se desplazada de la diagonal más que su contraparte Y_2 . En la misma Figura se tiene las gráficas de Bland-Altman donde las diferencias tienden a alejarse de cero en el primer instrumento y en ambos se observa cierta tendencia en los datos. En la Tabla 2.8 se presentan los estadísticos descriptivos donde los instrumentos se presentan simétricos pero con curtosis menor a 3. Sin embargo, el test de Mardia de asimetría y curtosis multivariada indica que no se puede rechazar la normalidad multivariada.

Tabla 2.8: Descriptivos del conjunto de datos Terremotos en Alaska.

Variable	Media	Matriz de Covarianza			Asimetría	Curtosis	Mardia
X	5.21	0.212			0,12	2.21	Asimetría
Y_1	5.08	0.267	0.619		0,31	2.56	15.28
Y_2	5.24	0.226	0.406	0.405	0,44	2.72	Curtosis 1.77

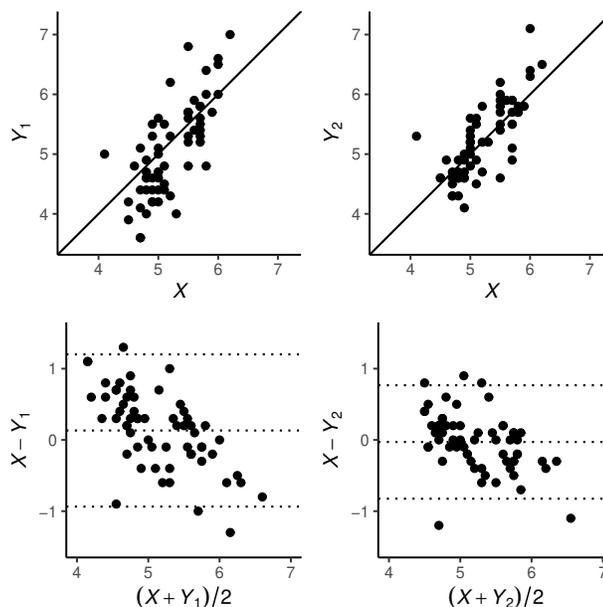


Figura 2.7: Diagramas de dispersión y gráficas de Bland-Altman para el conjunto de datos Terremotos en Alaska.

En la Tabla 2.9 se presentan los ajustes y error estándar de los EMV de θ . Al inferir sobre la insesgidez de los instrumentos, se tiene que en todos se rechaza $H_0 : \alpha_j = 0$ y $H_0 : \beta_j = 1$ cuando son tratados separadamente. En la Figura 2.8 se presentan el Q-Q plot normal y las distancias de Mahalanobis para verificar la bondad de ajuste del modelo. El envelope indica que la suposición de normalidad multivariada puede ser poco práctica para este conjunto de datos, lo que lleva a buscar una distribución más robusta. En la gráfica de distancias de Mahalanobis se presentan 3 datos influyentes 28, 54 y 60, que corresponden a valores mínimos de X o Y_1 , o bien al máximo de Y_2 .

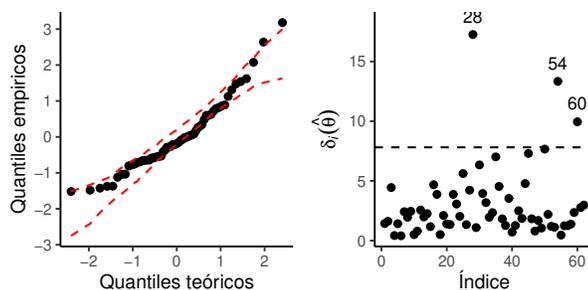


Figura 2.8: Q-Q plot normal con envelope al 95% de confianza para el ajuste del modelo estructural al conjunto de datos Terremotos en Alaska. En las distancias de Mahalanobis $\delta_i(\hat{\theta})$, la línea (---) representa el percentil 95% de una $\chi^2(3)$. Los puntos etiquetados serían considerados como atípicos.

Tabla 2.9: Estimadores máximo verosímiles del modelo propuesto sobre los datos de terremotos en Alaska.

Variable	EMV	SE	Variable	EMV	SE	Variable	EMV	SE
$\hat{\mu}_x$	5.51	0.059	$\hat{\beta}_1$	1.94	0.220	$\hat{\phi}_x$	0.14	0.037
$\hat{\alpha}_1$	-5.05	1.149	$\hat{\beta}_2$	1.52	0.183	$\hat{\phi}$	0.08	0.010
$\hat{\alpha}_2$	-2.66	0.955						

Tras detectar a los casos 28, 54 y 60 como influyentes usando las distancias de Mahalanobis (Figura 2.8) se ajusta el modelo excluyéndolos. En la Tabla 2.10 se presenta el ajuste a los datos obteniendo estimaciones más precisas mejorando tanto en los valores de verosimilitud y AIC .

En la Tabla 2.11 y en la Figura 2.9 se presentan los CCC y sus intervalos de confianza al 95% calculados usando bootstrap y el método delta. De ellos se deduce que Y_2 tiene un CCC más alto pero no significativamente distinto a Y_1 . En la Figura 2.10 se presenta la probabilidad de acuerdo y sus respectivos intervalos de confianza a 95% de cobertura individual usando Bootstrap y el método delta para las dos mediciones usando tres valores de tolerancia $c_j = 0.3, 0.4, 0.5$ los cuales se interpretan como las distancias $|X - Y_j|$ para $j = 1, 2$. Nuevamente un mayor acuerdo se produce entre la magnitud interna X y la magnitud cercana Y_2 . El error estándar tiene a estar sobrestimado con el método delta para Y_1 , mientras que para Y_2 ambos métodos presentan intervalo de confianza similares. En la Tabla 2.12 se presentan los valores de ambos métodos de intervalos de confianza.

Tabla 2.10: Comparación entre los ajustes a datos completos y al excluir los casos influyentes: 28, 54 y 60.

	Todos los casos	Casos excluidos 28-54-60
$\hat{\mu}_x$	5.21 (0.059)	5.23 (0.057)
$\hat{\alpha}_1$	-5.05 (1.149)	-5.52 (1.071)
$\hat{\alpha}_2$	-2.67 (0.955)	-2.41 (0.841)
$\hat{\beta}_1$	1.94 (0.220)	2.02 (0.204)
$\hat{\beta}_2$	1.52 (0.183)	1.46 (0.160)
$\hat{\phi}_x$	0.14 (0.037)	0.13 (0.034)
$\hat{\phi}$	0.08 (0.010)	0.06 (0.008)
$loglik$	-109.07	-85.08
AIC	232.14	184.17

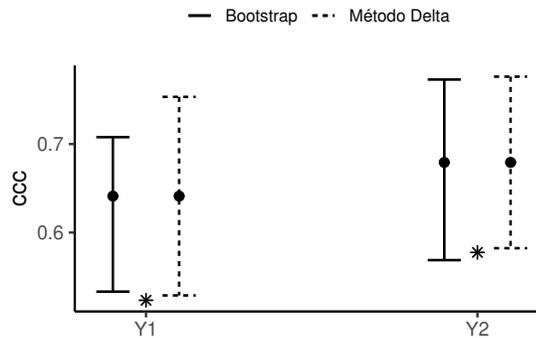


Figura 2.9: Coeficiente de correlación de concordancia (CCC). Intervalos de confianza usando Bootstrap con 300 réplicas y usando el método delta. El * corresponde al valor de la cota inferior simultánea del CCC.

Tabla 2.11: Coeficiente de Correlación de Concordancia y su intervalo de confianza al 95% obtenido el Método Delta y por Bootstrap remuestreando 300 réplicas.

	$j = 1$	$j = 2$
Bootstrap	0.641 (0.533, 0.708)	0.679 (0.569, 0.773)
Método Delta	0.641 (0.529, 0.753)	0.679 (0.582, 0.776)

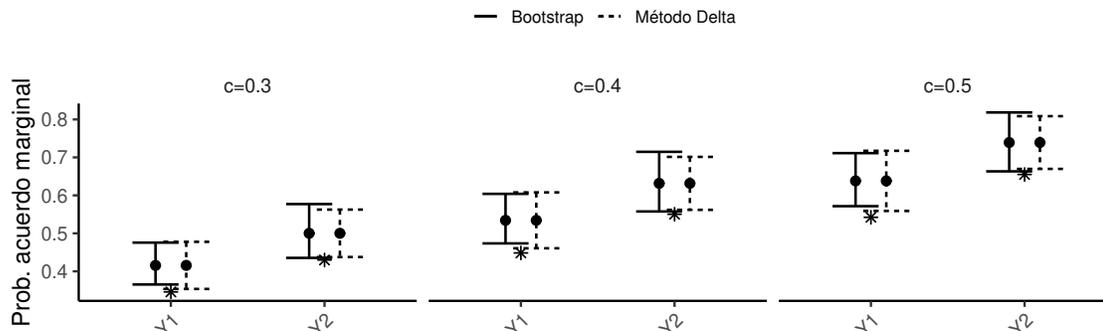


Figura 2.10: Probabilidad de Acuerdo considerando discrepancias c_j de 0.3, 0.4, y 0.5. Los intervalos de confianza al 95 % fueron obtenidos por el Método Delta y por Bootstrap remuestreando 300 replicas. El * corresponde al valor de la cota inferior simultánea de la Probabilidad de Acuerdo.

Tabla 2.12: Probabilidad de Acuerdo considerando discrepancias c_j de 0.3, 0.4, y 0.5. Los intervalos de confianza al 95 % fueron obtenidos por Bootstrap remuestreando 300 replicas.

j	$c_j = 0.3$	$c_j = 0.4$	$c_j = 0.5$
1	0.42 (0.37, 0.48)	0.53 (0.47, 0.60)	0.64 (0.57, 0.71)
2	0.50 (0.44, 0.58)	0.63 (0.56, 0.71)	0.74 (0.66, 0.82)

2.8. Discusión y conclusiones

En este capítulo se desarrolló un modelo estructural Normal multivariado para medir el acuerdo entre instrumentos incorporando error en las mediciones aplicado a las medidas CCC y PA .

Desde el enfoque clásico se desarrollaron los EMV de los parámetros del modelo estructural. Mediante el vector de Score y la matriz de información de Fisher fue posible hacer inferencias sobre los parámetros en particular buscar tests para la hipótesis de interés $H_0 : \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}_p, \boldsymbol{\beta} = \mathbf{1}_p$ y buscar intervalos de confianza mediante el método Delta para las medidas CCC y PA .

Aprovechando las propiedades de las distancias de Mahalanobis ($\boldsymbol{\delta}_i$) bajo la distribución Normal multivariada se proponen gráficas para verificar la bondad de ajuste y la detección de datos influyentes.

Un estudio de simulación fue realizado para detectar el nivel de significancia empírico de la hipótesis $H_0 : \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}_p, \boldsymbol{\beta} = \mathbf{1}_p$ para los test LRT, Wald, Score y Gradiente. Del estudio se tiene que el test de Wald necesita más datos (n) para lograr la significancia esperada a mayor cantidad de instrumentos (p). Los tests LTR, Score y Gradiente obtienen mejores comportamientos a medida que hay falta de especificación del instrumento de referencia x_i , o sea cuando su distribución se aleja de distribución Normal. Por otro lado, cuando el error de medición $\boldsymbol{\epsilon}_i$ se alejan de la distribución Normal Multivariada los tests propuestos se alejan rápidamente del nivel de significancia esperado.

El modelo estructural fue aplicado a los conjuntos de datos de Capacidad Vital (Barnett, 1969) y Terremotos en Alaska (Ganse *et al.*, 1983) mostrando un buen ajuste a supuesto de Normalidad. El modelo estructural permitió medir el acuerdo entre instrumentos considerando el error de medición de estos. El método gráfico permitió detectar datos atípicos en el conjunto de datos Terremotos en Alaska.

La estimación e inferencia fueron implementadas en rutinas de R las que son detalladas en el Apéndice C.

Capítulo 3

Medidas de Acuerdo bajo el Modelo Estructural t_η multivariado

El objetivo de este capítulo es derivar las medidas de acuerdo: Coeficiente de Correlación de Concordancia (CCC) y Probabilidad de Acuerdo (PA) desde un Modelo con Error en las Mediciones (MEM) bajo una distribución t multivariada para los errores de medición. Los MEM se han aplicado en gran medida en áreas donde los predictores contienen error en su medición y en la comparación de instrumentos. Tradicionalmente, estos modelos se han desarrollado bajo el supuesto de normalidad, por lo que extender el modelo a la distribución t sería una opción válida ya que admite colas más pesadas que la Normal y permite estimaciones robustas frente a datos atípicos. Se propone el algoritmo EM para la estimación máximo verosímil de los parámetros y se describen herramientas gráficas para la detección de observaciones atípicas y la bondad de ajuste del modelo. A modo de ilustración, se comparan las medidas de acuerdo bajo las distribuciones Normal y t multivariada en la comparación de instrumentos y en datos del tipo financiero.

3.1. Introducción

En estadística, el uso de la distribución Normal tiene una utilidad en una variedad de modelos. Sin embargo, la distribución Normal no es capaz de modelar colas pesadas haciéndola vulnerable a la presencia de datos atípicos u outliers. En la práctica es común detectar y descartar los datos atípicos, lo que produce sobreajuste y errores estándar pequeños, ya que la inferencia realizada no captura el proceso de descarte (Lange *et al.*, 1989). Varios métodos se han propuesto para manejar la presencia de datos atípicos y algunos de estos conforman la Estadística Robusta (Huber, 2009).

A continuación se presentan algunos enfoques presentados en Huber (2009, pág. 8).

- Los métodos *resistentes* son aquellos donde la estimación de un estadístico es insensible a pequeños cambios en la muestra en general o insensible a grandes variaciones en algunas observaciones.

- Los métodos *robustos* que consideran proteger la inferencia contra desviaciones de los supuestos. En especial aquellas desviaciones que están cerca o bajo los límites de detección.
- Los métodos *diagnóstico* que buscan identificar desviaciones a las suposiciones. Por ejemplo, la detección de datos atípicos es un método diagnóstico, ya que ayuda a separar los errores gruesos de la estructura principal subyacente. En este caso, los datos atípicos son revisados con un experto en la toma de datos.

Al igual que en capítulo anterior, donde se desarrolló un Modelo con Error en las Mediciones (*MEM*) bajo la distribución Normal Multivariada, en este capítulo se busca mejorar la suposición de normalidad con el uso de distribución t multivariada.

La distribución t multivariada cuenta con un parámetro que permite modelar la curtosis de los datos e incorporar en el modelo a los datos atípicos (Lange *et al.*, 1989). Manteniendo el método de estimación máximo verosímil pero incorporando errores no-normales se logra una regresión robusta a datos atípicos.

El modelo propuesto en este capítulo busca complementar los trabajos realizados previamente. Stevens *et al.* (2017) en la evaluación de la Probabilidad de Acuerdo en un diseño con réplicas incorporado un *MEM* y el supuesto de normalidad multivariante. La estimación de la Probabilidad de Acuerdo (*PA*) bajo el enfoque Bayesiano realizado por de Castro y Galea (2021). Además, extender el supuesto de normalidad aplicado por Lin (1989) para el Coeficiente de Correlación de Concordancia (*CCC*).

La distribución t empleada consiste en una reparametrización que permite mejorar en interpretabilidad pero que se limita a la existencia de los dos primeros momentos. Esta reparametrización ha sido utilizada por Leal (2016); Leal *et al.* (2019) en el estudio del *CCC*. El modelo propuesto complementa dicho estudio al incorporar el error de las mediciones.

El objetivo de este capítulo es evaluar las medidas de acuerdo: *CCC* y *PA* considerando el Modelo con Error de Medición en su versión estructural bajo la distribución t_η multivariada.

3.1.1. Distribución t_η univariada

Una variable aleatoria Z tiene distribución t univariada con ν grados de libertad si su densidad de probabilidad es

$$p_\nu(z) = \frac{\Gamma\{(\nu + 1)/2\}}{\sqrt{\pi\nu} \Gamma(\nu/2)} \left(1 + \frac{z^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}.$$

Se tiene que $E(Z) = 0$ cuando $\nu > 1$ y la $\text{var}(Z) = \frac{\nu}{\nu-2}$ cuando $\nu > 2$. Esto implica que para la existencia de los dos primeros momentos se necesita restringir el espacio paramétrico en $\nu > 2$. Para mejorar en interpretabilidad se busca que la varianza no dependa de ν y para ello se realiza la siguiente transformación $\nu \rightarrow 1/\eta$ y $Z \rightarrow Z/\sqrt{1-2\eta}$. De este modo se obtiene una distribución t_η con un espacio paramétrico restringido de $\eta \in (0, 1/2)$ con tal de asegurar los dos primeros momentos. Cuando $\eta \rightarrow 0$ tenemos en el límite la distribución Normal estándar. A modo de ejemplo se presenta en la Figura 3.1 algunos valores de $\eta = 0, 0.3, 0.45$. En la figura se nota como las colas en la distribución t_η caen más lentamente que la Normal.

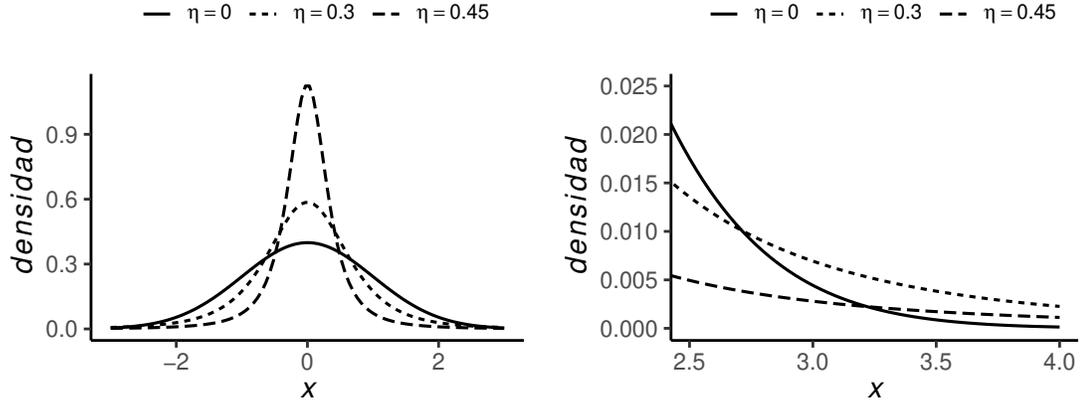


Figura 3.1: Ejemplos de la densidad t_η univariada y decaimiento de la cola derecha. Se observa como se hace más pesada la cola al acercarse $\eta \rightarrow 1/2$. Para la existencia de los dos primeros momentos $\eta \in (0, 1/2)$.

3.1.2. Distribución t_η multivariada

La distribución t_η multivariada puede ser un tanto desconocida, ya que su contraparte t_ν multivariada fue una de las primeras extensiones de la distribución Normal multivariada. Algunas aplicaciones y propiedades de la distribución t multivariada la encontramos en Lange *et al.* (1989); Lange y Sinsheimer (1993); Sutradhar (1993); Fiorentini *et al.* (2003); Kotz y Nadarajah (2004).

La distribución t_ν se define sobre un vector de variables aleatorias $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_r)$ cuando su densidad corresponde a

$$f(\mathbf{z}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Psi}, \nu) = \frac{\Gamma\{(\nu+r)/2\}}{\{\Gamma(1/2)\}^r \Gamma(\nu/2) \nu^{r/2}} |\boldsymbol{\Psi}|^{-1/2} \left(1 + \frac{(\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Psi}^{-1} (\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})}{\nu}\right)^{-(\nu+r)/2},$$

donde $E(\mathbf{Z}) = \boldsymbol{\mu}$ cuando $\nu > 1$ y $\text{cov}(\mathbf{Z}) = \boldsymbol{\Sigma} = \frac{\nu}{\nu-2} \boldsymbol{\Psi}$ cuando $\nu > 2$. Notar como la covarianza no es directamente interpretable entre los grados de libertad ν y la matriz $\boldsymbol{\Psi}$. Es por esto que tomando la transformación $\mathbf{Z} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-2\eta}} \mathbf{Z}$ donde $\eta = 1/\nu$ se mejora en interpretabilidad.

La reparametrización t_η multivariada, escrita como $\mathbf{Z} \sim t_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \eta)$, tiene como función densidad de probabilidad

$$f(\mathbf{z}) = K_r(\eta) |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} (1 + c(\eta) \delta)^{-(1/(2\eta)+r/2)}, \quad (3.1)$$

con

$$K_r(\eta) = \left(\frac{c(\eta)}{\pi}\right)^{r/2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2\eta} + \frac{r}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2\eta})}, \quad c(\eta) = \frac{\eta}{1-2\eta}, \quad \text{y} \quad \delta = (\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}).$$

Algunas propiedades de la distribución t_η multivariada se pueden obtener desde las propiedades de la t_ν multivariada (Kotz y Nadarajah, 2004, Cap. 1), las que se presentan a

continuación.

Considere un vector aleatorio $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_r)^T$ con distribución $t_r \sim (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \eta)$ cuya densidad de probabilidad es (3.1) tiene las siguientes propiedades

- (i) El vector aleatorio \mathbf{Z} independiente a $U \sim \Gamma\left(\frac{1}{2\eta}, \frac{1}{2c(\eta)}\right)$, tiene como distribución condicional

$$\mathbf{Z}|U = u \sim \mathbf{N}_r(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}/u)$$

- (ii) Para $U \sim \Gamma\left(\frac{1}{2\eta}, \frac{1}{2c(\eta)}\right)$ se tiene

$$\mathbb{E}(U^{-p}) = \left(\frac{1}{2c(\eta)}\right)^p \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2\eta} - p\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2\eta}\right)}, \quad p < \frac{1}{\eta}.$$

- (iii) $\mathbb{E}(\mathbf{Z}) = \boldsymbol{\mu}$ y $\text{cov}(\mathbf{Z}) = \boldsymbol{\Sigma}$.

- (iv) Considere la variable aleatoria $\delta = (\mathbf{Z} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Z} - \boldsymbol{\mu})$ y su versión escalada F con distribución de probabilidad

$$F = \left(\frac{1}{1 - 2\eta}\right) \frac{\delta}{r} \sim F(r, 1/\eta)$$

- (v) Transformación Lineal. Si $\mathbf{Z} \sim t_r(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \eta)$ y una transformación lineal $\mathbf{Z}^* = \mathbf{A}\mathbf{Z}$ donde \mathbf{A} es una matriz de dimensión $r \times q$ no singular ($q \leq r$), entonces la distribución de \mathbf{Z}^* sigue siendo t_η multivariada con parámetros

$$\mathbf{Z}^* \sim t_q(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}^T, \eta).$$

- (vi) Distribución Marginal. Si $\mathbf{Z} \sim t_r \sim (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \eta)$ y $\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2)^T$ es una partición donde \mathbf{Z}_1 es de dimensión $r_1 < r$ con

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{12} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}.$$

Sigue que la distribución marginal de cualquier partición \mathbf{Z}_1 mantiene una distribución

$$\mathbf{Z}_1 \sim t_{r_1}(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_{11}, \eta) \tag{3.2}$$

- (vii) En el límite de $\eta \rightarrow 0$ se recupera la distribución Normal multivariada con media $\boldsymbol{\mu}$ y covarianza $\boldsymbol{\Sigma}$.

A modo de ilustración, en la Figura 3.2 se presentan algunos ejemplos de la densidad t_η multivariada en realizaciones de $n = 10$ muestras, considerando valores de $\eta = 0, 0.30, 0.45$ y una matriz

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & 1 \end{pmatrix},$$

donde σ_{12} toma los valores 0 o 0.5. Por cada fila de la Figura 3.2 las distribuciones tienen la misma media y covarianza, pero a medida que crece η las muestras se alejan del centro y su densidad decae más lento (contornos más separados). Cuando $\eta = 0$ se recupera la densidad Normal multivariada y cuando $\eta \rightarrow 0.5$ se obtienen colas más pesadas en la distribución.

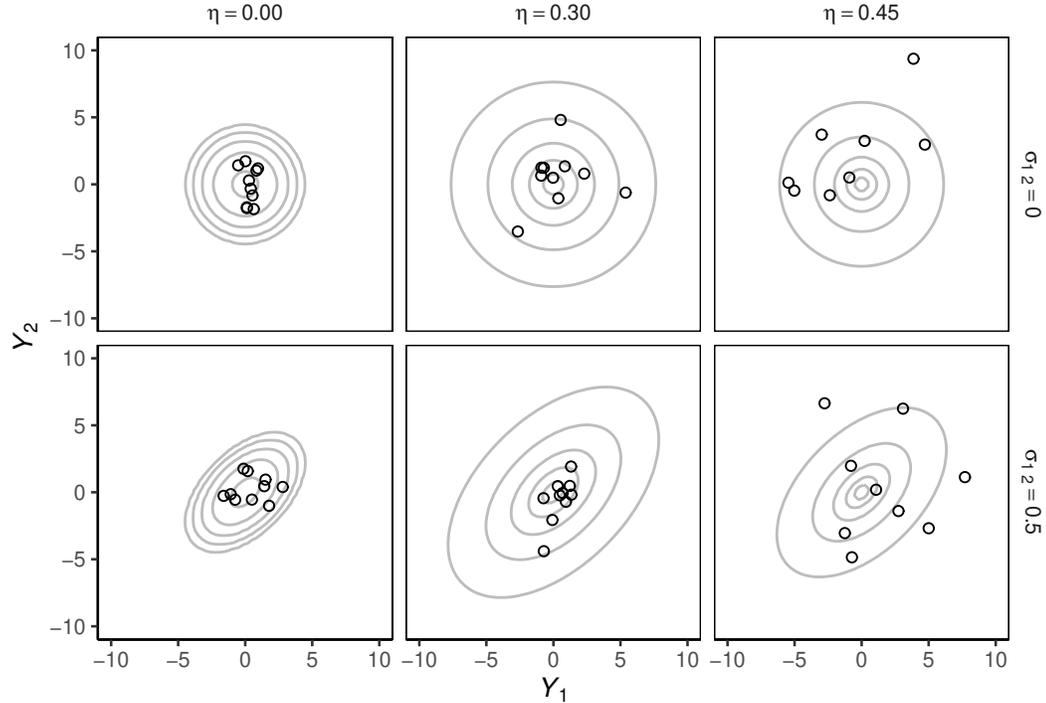


Figura 3.2: Ejemplos de los contornos de la densidad t_η multivariada. Para cada fila se obtiene la misma media y covarianza. Cuando $\eta = 0$ se obtiene la distribución Normal multivariada y a medida que $\eta \rightarrow 0.5$ se obtienen colas más pesadas.

3.2. Modelo estructural bajo la distribución t_η multivariada

Considere la unidad experimental $i = 1, \dots, n$, donde x_i corresponde al verdadero valor (medido sin error), X_i el valor observado del predictor x para la unidad experimental i y considere a Y_{ij} las respuestas observadas en la unidad i para $j = 1, \dots, p$ instrumentos distintos. Como en Barnett (1969), Shyr y Gleser (1986), Kelly (1984) y Kimura (1992) el Modelo con Error en la Mediciones (*MEM*) multivariado puede escribirse como,

$$\begin{aligned} X_i &= x_i + \epsilon_{i0} \\ Y_{ij} &= \alpha_j + \beta_j x_i + \epsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, p \end{aligned} \tag{3.3}$$

Como en el Capítulo 2, se usará la siguiente notación:

$$\mathbf{Z}_i = (X_i, \mathbf{Y}_i^T)^T, \quad \mathbf{Y}_i = (Y_{i1}, \dots, Y_{ip})^T, \quad \boldsymbol{\epsilon}_i = (\epsilon_{i0}, \epsilon_{i1}, \dots, \epsilon_{ip})^T,$$

los cuales son vectores aleatorios de dimensión $r = p + 1$,

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)^T \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^T,$$

que corresponden a vectores de parámetros de dimensión p . Luego, en notación matricial se puede escribir,

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_i &= \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} x_i + \boldsymbol{\epsilon}_i, \\ &= \mathbf{a} + \mathbf{b}x_i + \boldsymbol{\epsilon}_i, \\ &= \mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{r}_i, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{a} = (0, \boldsymbol{\alpha}^T)^T$, $\mathbf{b} = (1, \boldsymbol{\beta}^T)^T$, $\mathbf{B} = (\mathbf{b}, \mathbf{I}_r)$ y $\mathbf{r}_i = (x_i, \boldsymbol{\epsilon}_i^T)^T$, $i = 1, \dots, n$. Donde usualmente se asume que $x_i \stackrel{iid}{\sim} \mathbf{N}(\mu_x, \phi_x)$ independiente de $\boldsymbol{\epsilon}_i \stackrel{iid}{\sim} \mathbf{N}_r(\mathbf{0}, \phi \boldsymbol{\Sigma}_0)$, $i = 1, \dots, n$, con $\boldsymbol{\Sigma}_0$ conocido, el que puede ser tomado, sin pérdida de generalidad, igual a la matriz identidad de dimensión r , denotada por \mathbf{I}_r .

Según lo revisado en el Capítulo 2, el modelo Normal multivariado asume

$$\mathbf{r}_i \stackrel{iid}{\sim} \mathbf{N}_r \left(\begin{pmatrix} \mu_x \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi_x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \phi \mathbf{I}_r \end{pmatrix} \right),$$

de donde viene

$$\mathbf{Z}_i \stackrel{iid}{\sim} \mathbf{N}_r(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V}), \quad i = 1, \dots, n$$

con,

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{a} + \mathbf{b}\mu_x \quad \text{y} \quad \mathbf{V} = \phi_x \mathbf{b}\mathbf{b}^T + \phi \mathbf{I}_r.$$

Si bien es sabido que la distribución Normal es adecuada en variadas ocasiones, también es vulnerable ante la presencia de datos atípicos o datos provenientes de distribuciones de colas pesadas. Desde Lange *et al.* (1989), la distribución t multivariada ha demostrado ser una alternativa versátil para modelar datos no normales y su implementación requiere un bajo costo computacional. En este capítulo, para evaluar el acuerdo entre instrumentos de medición cuando las observaciones provienen de distribuciones no normales con colas pesadas, proponemos utilizar la distribución t_η multivariada según la parametrización de Sutradhar (1993) y Lange *et al.* (1989). Por tanto, como alternativa a la distribución Normal se asume que,

$$\mathbf{Z}_i \stackrel{iid}{\sim} \mathbf{T}_r(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V}, \eta), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.4)$$

donde la función de densidad de probabilidad es dada por,

$$f_z(\mathbf{z}_i, \boldsymbol{\theta}) = |\mathbf{V}|^{-1/2} g(\delta_i), \quad \delta_i \geq 0,$$

donde $g(\delta) = k_r(\eta)(1 + c(\eta)\delta)^{-(1+\eta r)/2\eta}$, $k_r(\eta) = (c(\eta)/\pi)^{r/2} \{\Gamma((1 + \eta r)/2\eta) / \Gamma(1/2\eta)\}$, $c(\eta) =$

$\eta/(1-2\eta)$, $0 < \eta < 1/2$; $\delta_i = (\mathbf{z}_i - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{z}_i - \boldsymbol{\mu})$ corresponde a la distancia de Mahalanobis, para $i = 1, \dots, n$ y $\boldsymbol{\theta} = (\mu_x, \boldsymbol{\alpha}^T, \boldsymbol{\beta}^T, \boldsymbol{\phi}^T, \eta)^T$ con $\boldsymbol{\phi} = (\phi_x, \phi)^T$. La distribución t_η ofrece un entorno más flexible para modelar las mediciones realizadas por los diferentes instrumentos de medición. En esta distribución se considera a η como un parámetro que permite ajustar la curtosis de la distribución y proporciona ajustes más robustos que la distribución Normal con un moderado esfuerzo computacional adicional.

3.3. Estimación máximo verosímil

3.3.1. Funciones score

El logaritmo de la función verosimilitud para el modelo (3.4) es dado por

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_i(\boldsymbol{\theta})$$

donde $\mathcal{L}_i(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{2} \log |\mathbf{V}| + \log \{g(\delta_i)\} = \log k_r(\eta) - \frac{1}{2} \log |\mathbf{V}| - \frac{1}{2\eta} (1 + \eta r) \log(1 + c(\eta)\delta_i)$ es la contribución de la i -ésima medición a la verosimilitud, con $\delta_i = \frac{1}{\phi} \{\delta_{i1} - \gamma \delta_{i2}^2\}$, y $\delta_{i1} = (\mathbf{z}_i - \boldsymbol{\mu})^T (\mathbf{z}_i - \boldsymbol{\mu})$, $\delta_{i2} = \mathbf{b}^T (\mathbf{z}_i - \boldsymbol{\mu})$, $\gamma = \phi_x / (\phi_x c + \phi)$ y $c = \mathbf{b}^T \mathbf{b}$.

La función score está dada por

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \mathcal{S}_i(\boldsymbol{\theta}),$$

donde $\mathcal{S}_i(\boldsymbol{\theta}) = \partial \mathcal{L}_i(\boldsymbol{\theta}) / \partial \boldsymbol{\theta} = (S_{i\mu_x}, S_{i\alpha}^T, S_{i\beta}^T, S_{i\phi_x}, S_{i\phi}, S_{i\eta})^T$, con

$$\begin{aligned} S_{i\mu_x} &= \omega_i \mathbf{b}^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{z}_i - \boldsymbol{\mu}), \\ S_{i\alpha} &= \omega_i (\mathbf{0}, \mathbf{I}_p) \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{z}_i - \boldsymbol{\mu}), \\ S_{i\beta} &= -\gamma \boldsymbol{\beta} + \omega_i \frac{1}{\phi} \left\{ \mu_x (\mathbf{0}, \mathbf{I}_p) (\mathbf{z}_i - \boldsymbol{\mu}) + \gamma \delta_{i2} [(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p) (\mathbf{z}_i - \boldsymbol{\mu}) - \mu_x \boldsymbol{\beta}] - \gamma^2 \delta_{i2}^2 \boldsymbol{\beta} \right\}, \\ S_{i\phi_x} &= \frac{1}{2} (\phi + \phi_x c)^{-1} \left\{ \omega_i \frac{\delta_{i2}^2}{\phi + \phi_x c} - c \right\}, \\ S_{i\phi} &= -\frac{1}{2\phi} \left\{ c p \gamma + \frac{r\phi}{\phi_x c + \phi} + \omega_i \left[\frac{\gamma \delta_{i2}^2}{\phi_x c + \phi} - \delta_i \right] \right\}, \\ S_{i\eta} &= \frac{1}{2\eta^2} \left\{ c(\eta) r - \beta(\eta) - \omega_i c(\eta) \delta_i + \log(1 + c(\eta) \delta_i) \right\}, \end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, n$, con, $\omega_i = \left(\frac{1 + \eta r}{\eta} \right) \left(\frac{c(\eta)}{1 + c(\eta) \delta_i} \right)$, $\beta(\eta) = \psi \left(\frac{1}{2\eta} (1 + \eta r) \right) - \psi \left(\frac{1}{2\eta} \right)$ y $\psi(x)$ es la función digamma.

3.3.2. Errores estándar asintóticos

La matriz de información correspondiente a la función log-verosimilitud $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})$ es

$$\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\{\mathcal{S}_i(\boldsymbol{\theta})\mathcal{S}_i^T(\boldsymbol{\theta})\},$$

donde la esperanza es tomada sobre la distribución de cada \mathbf{Z}_i para $i = 1, \dots, n$, la que puede ser estimada por

$$\hat{\mathcal{I}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{\mathcal{S}_i(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \mathcal{S}_i^T(\hat{\boldsymbol{\theta}})\}.$$

Finalmente, la matriz de covarianzas de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ puede ser estimada por $\hat{\mathcal{I}}^{-1}/n$.

3.3.3. El algoritmo *EM*

En esta sección, se muestra el uso del algoritmo *EM* para la estimación máximo verosímil de $\boldsymbol{\theta}$. En efecto, siguiendo la sugerencia de Pinheiro *et al.* (2001), se introduce la distribución t_η multivariada en el modelo estructural definido en (3.3), considerando la siguiente estructura jerárquica

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_i | x_i, u_i &\sim N_r(\mathbf{a} + \mathbf{b}x_i, u_i^{-1}\phi\mathbf{I}_r) \\ x_i | u_i &\sim N(\mu_x, u_i^{-1}\phi_x) \\ u_i &\sim G(a, b), \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde $a = 1/(2\eta)$ y $b = a - 1$. En este caso se puede tratar las variables aleatorias x_i y u_i como datos faltantes, así los datos completos serán $\{(\mathbf{Z}_i, x_i, u_i), i = 1, \dots, n\}$.

La log-verosimilitud de los datos completos basada en la representación jerárquica (3.5) está dada por

$$\mathcal{L}_c(\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{L}_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \phi) + \mathcal{L}_2(\mu_x, \phi_x) + \mathcal{L}_3(a), \quad (3.6)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \phi) &= \sum_{i=1}^n \left\{ c_{i1} - \frac{r}{2} \log \phi - \frac{u_i}{2\phi} (\mathbf{z}_i - \mathbf{a} - \mathbf{b}x_i)^T (\mathbf{z}_i - \mathbf{a} - \mathbf{b}x_i) \right\}, \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ c_{i1} - \frac{r}{2} \log \phi - \frac{1}{2\phi} [u_i (\mathbf{z}_i - \mathbf{a})^T (\mathbf{z}_i - \mathbf{a}) - 2u_i x_i (\mathbf{z}_i - \mathbf{a})^T \mathbf{b} + u_i x_i^2 \mathbf{b}^T \mathbf{b}] \right\}, \\ \mathcal{L}_2(\mu_x, \phi_x) &= \sum_{i=1}^n \left\{ c_{i2} - \frac{1}{2} \log \phi_x - \frac{u_i}{2\phi_x} (x_i - \mu_x)^2 \right\}, \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ c_{i2} - \frac{1}{2} \log \phi_x - \frac{1}{2\phi_x} (u_i x_i^2 - 2u_i x_i \mu_x + u_i \mu_x^2) \right\}, \\ \mathcal{L}_3(a) &= \sum_{i=1}^n \left\{ c_{i3} - \log \Gamma(a) + a \log(a - 1) + a \log u_i - a u_i \right\}, \end{aligned}$$

donde las constantes $\{(c_{i1}, c_{i2}, c_{i3}), \quad i = 1, \dots, n\}$ no dependen de los parámetros.

Los *EMV* de $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ y ϕ son obtenidos maximizando $\mathcal{L}_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \phi)$. Para buscar estos estimadores, se deriva parcialmente $\mathcal{L}_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \phi)$ con respecto a $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ y ϕ , para buscar donde se hacen cero. Suponga que las variables de mezcla latentes $\{u_1, \dots, u_n\}$ y $\{x_1, \dots, x_n\}$ son observables. Las derivadas parciales serán

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \phi)}{\partial \boldsymbol{\alpha}} &= \frac{1}{\phi} \sum_{i=1}^n u_i (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\alpha} - x_i \boldsymbol{\beta}) \\ \frac{\partial \mathcal{L}_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \phi)}{\partial \boldsymbol{\beta}} &= \frac{1}{\phi} \sum_{i=1}^n u_i x_i (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\alpha} - x_i \boldsymbol{\beta}) \\ \frac{\partial \mathcal{L}_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \phi)}{\partial \phi} &= \frac{1}{2\phi} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{\phi} u_i (\mathbf{z}_i - \mathbf{a} - \mathbf{b}x_i)^T (\mathbf{z}_i - \mathbf{a} - \mathbf{b}x_i) - r \right\}\end{aligned}$$

Haciendo cero estas derivadas se obtiene,

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\alpha}} &= \bar{\mathbf{Y}}_u - \bar{x}_u \boldsymbol{\beta}, \\ \hat{\boldsymbol{\beta}} &= \mathbf{S}_{xY} / S_{ux}, \\ \hat{\phi} &= \frac{1}{r n} \sum_{i=1}^n \left\{ u_i (\mathbf{z}_i - \mathbf{a})^T (\mathbf{z}_i - \mathbf{a}) - 2u_i x_i (\mathbf{z}_i - \mathbf{a})^T \mathbf{b} + u_i x_i^2 \mathbf{b}^T \mathbf{b} \right\}\end{aligned}\quad (3.7)$$

donde $\bar{\mathbf{Y}}_u = \sum_{i=1}^n u_i \mathbf{Y}_i / \sum_{i=1}^n u_i$, $\bar{x}_u = \sum_{i=1}^n u_i x_i / \sum_{i=1}^n u_i$, $\mathbf{S}_{xY} = \sum_{i=1}^n u_i (x_i - \bar{x}_u) (\mathbf{Y}_i - \bar{\mathbf{Y}}_u) = \sum_{i=1}^n u_i x_i \mathbf{Y}_i - n \bar{x}_u \bar{\mathbf{Y}}_u$, $S_{ux} = \sum_{i=1}^n u_i (x_i - \bar{x}_u)^2 = \sum_{i=1}^n u_i x_i^2 - n \bar{x}_u^2$ y $\bar{u} = \sum_{i=1}^n u_i / n$.

Similarmente,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}_2(\mu_x, \phi_x)}{\partial \mu_x} &= \frac{1}{\phi_x} \sum_{i=1}^n u_i (x_i - \mu_x), \text{ y} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_2(\mu_x, \phi_x)}{\partial \phi_x} &= \frac{1}{2\phi_x} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{\phi_x} (u_i x_i^2 - 2u_i x_i \mu_x + u_i \mu_x^2) - 1 \right\},\end{aligned}$$

igualando a cero se obtiene

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_x &= \bar{x}_u, \\ \hat{\phi}_x &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (u_i x_i^2 - 2u_i x_i \mu_x + u_i \mu_x^2).\end{aligned}\quad (3.8)$$

Finalmente

$$\frac{\partial \mathcal{L}_3(a)}{\partial a} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{a}{a-1} + \log(a-1) - \psi(a) + \log u_i - u_i \right\}, \quad \text{para } a > 1,$$

igualando a cero se obtiene

$$\frac{a}{a-1} + \log(a-1) - \psi(a) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{\log u_i - u_i\} = 0, \quad (3.9)$$

el que puede ser resuelto por algún método iterativo y $\psi(a)$ denota la función psi, que puede ser aproximada por

$$\psi(a) \approx \log a - \frac{1}{2a} - \frac{1}{12a^2}.$$

Sin embargo, los estimadores obtenidos en (3.7), (3.8) y (3.9) dependen de u_i , $\log u_i$, $u_i x_i$ y $u_i x_i^2$ para $i = 1, \dots, n$ las que son no observables. En el Paso-E del algoritmo *EM*, la esperanza condicional de la función de verosimilitud completa, (3.6), dado los parámetros estimados y los datos observados debe ser calculada. La función resultante es llamada *Q*-función. Suponga que se tiene en el paso k , donde la *Q*-función está dada por

$$Q(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\theta}^{(k)}) = E\{\mathcal{L}_c(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}^{(k)}; \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n)\}.$$

En el Paso-M, se maximiza esta nueva función objetivo para obtener estimaciones actualizadas de $\boldsymbol{\theta}^{(k+1)}$. Se puede ver que es equivalente a actualizar u_i , $\log u_i$, $u_i x_i$, y $u_i x_i^2$ para $i = 1, \dots, n$, en la función de log-verosimilitud completa (3.6), por sus estimaciones condicionales $w_{i1} = E(u_i|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{z}_i)$, $w_{i2} = E(\log u_i|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{z}_i)$, $w_{i3} = E(u_i x_i|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{z}_i)$, y $w_{i4} = E(u_i x_i^2|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{z}_i)$, respectivamente. En cada paso, los primeros tres momentos puede ser fácilmente derivados desde la distribución condicional de u dado $\mathbf{Z} = \mathbf{z}$ (Kotz y Nadarajah, 2004, sec. (1.2)). En efecto, usando los resultados de Leal (2016, págs. 122-123), estas cantidades están dadas por la ecuación (3.10),

$$\begin{aligned} w_{i1} &= \left(\frac{c(\eta)}{\eta}\right) \left(\frac{1+r\eta}{1+c(\eta)\delta_i}\right), \\ w_{i2} &= \psi\left(\frac{1+r\eta}{2\eta}\right) - \log\left(\frac{1+c(\eta)\delta_i}{2c(\eta)}\right), \end{aligned} \quad (3.10)$$

para $i = 1, \dots, n$.

Para el cálculo del otro momento condicional w_{i3} y w_{i4} para $i = 1, \dots, n$ se necesita de los siguientes resultados, los cuales siguen desde algunas propiedades básicas de la distribución Normal multivariada y alguna álgebra para simplificar.

Lema 1. Sea $\mathbf{Z}|x, u \sim N_r(\mathbf{a} + \mathbf{b}x, u^{-1}\phi\mathbf{I}_r)$, $\mathbf{Z}|u \sim N_r(\mathbf{a} + \mathbf{b}\mu_x, u^{-1}\mathbf{V})$ y $x|u \sim N(\mu_x, u^{-1}\phi_x)$, entonces

$$x|\mathbf{z}, u \sim N(\mu_x + \gamma \mathbf{b}^T(\mathbf{z} - \mathbf{a} - \mathbf{b}\mu_x), u^{-1}\phi\gamma), \quad \text{donde } \gamma = \frac{\phi_x}{\phi_x c + \phi} \quad \text{y} \quad c = \mathbf{b}^T \mathbf{b}.$$

Lema 2. Sea g_1 y g_2 funciones de u y x respectivamente. Entonces,

$$\begin{aligned} E(g_1(u)g_2(x)|\mathbf{z}) &= E\{E[g_1(u)g_2(x)|\mathbf{z}, u]|\mathbf{z}\}, \\ &= E\{g_1(u)E[g_2(x)|\mathbf{z}, u]\}. \end{aligned}$$

Usando los resultados anteriores, sigue que

$$\begin{aligned} w_{i3} &= w_{i1} \{ \mu_x + \gamma \mathbf{b}^T (\mathbf{z}_i - \mathbf{a} - \mathbf{b} \mu_x) \}, \\ w_{i4} &= \phi \gamma + w_{i1} \{ \mu_x + \gamma \mathbf{b}^T (\mathbf{z}_i - \mathbf{a} - \mathbf{b} \mu_x) \}^2, \end{aligned} \quad (3.11)$$

para $i = 1, \dots, n$. Así, en la iteración k del algoritmo *EM* se obtiene el *EMV* de $\boldsymbol{\theta}$ dado por

Paso-E Dado $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}$, usando (3.10) y (3.11) calcular w_{i1} , w_{i2} , w_{i3} y w_{i4} para $i = 1, \dots, n$.

Paso-M Use (3.7), (3.8) y (3.9) para actualizar los parámetros estimados y obtener un nuevo estimador $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k+1)}$.

Criterio de convergencia Si $\| \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k+1)} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)} \| < \varepsilon$ para ε fijar $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k+1)}$. Sino $k = k + 1$ y volver al Paso-E. Valores típicos para la constante ε son 10^{-4} o 10^{-6} .

3.3.4. Test de hipótesis

En el contexto de análisis de instrumentos los coeficiente $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ son de principal interés, es por esto que se enfocará en algunas hipótesis sobre estos parámetros usando el Test de Razón de Verosimilitud (*LRT* por sus siglas en inglés). Específicamente se considera la siguiente hipótesis

$$H_0 : \quad \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}_p, \quad \boldsymbol{\beta} = \mathbf{1}_p$$

El *LRT* está dado por

$$LRT = 2 \{ \mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - \mathcal{L}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) \}$$

donde $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ es el estimador máximo verosímil bajo la hipótesis nula. En efecto, bajo H_0 se simplifica el algoritmo *EM*,

$$\tilde{\phi} = \frac{1}{r n} \sum_{i=1}^n \{ u_i \mathbf{z}_i^T \mathbf{z}_i - 2 u_i x_i \mathbf{z}_i^T \mathbf{1}_r + u_i x_i^2 r \},$$

mientras que $\tilde{\mu}_x$, $\tilde{\phi}_x$ usando (3.8) y $\tilde{\eta}$ empleando (3.9) y se actualizan u_i , $\log u_i$, $u_i x_i$ y $u_i x_i^2$ en el paso E por sus estimaciones condicionales w_{i1} y w_{i2} (3.10), w_{i3} y w_{i4} (3.11) respectivamente bajo $H_0 : \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}_p$ y $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{1}_p$.

3.4. Bondad de ajuste

Cualquier análisis estadístico debe incluir algún indicador del ajuste a los supuestos del modelo. Siguiendo a Lange *et al.* (1989), se usará la distancia de Mahalanobis para evaluar el ajuste al modelo propuesto. En efecto, la variable aleatoria

$$F_i = \left(\frac{1}{1 - 2\eta} \right) \frac{\delta_i}{r} \sim F(r, 1/\eta), \quad i = 1, \dots, n$$

sigue una distribución exacta. Sustituyendo por el EMV tenemos $\hat{F}_i = F_i(\hat{\boldsymbol{\theta}})$, que tiene asintóticamente la misma distribución que F_i para $i = 1, \dots, n$.

Usando la fórmula de Paulson (Johnson *et al.*, 1994, pág. 337), basada en la aproximación de Wilson-Hilferty, se obtiene que

$$z_i^* = \frac{\left(1 - \frac{2\eta}{9}\right) \hat{F}_i^{1/3} - \left(1 - \frac{2}{9r}\right)}{\sqrt{\frac{2\eta}{9} \hat{F}_i^{2/3} + \frac{2}{9r}}}, \quad i = 1, \dots, n$$

aproxima a la distribución Normal estándar. Esta aproximación es notablemente precisa para $1/\eta \geq 10$. Así, un QQ -plot Normal de las distancias transformadas $\{z_1^*, \dots, z_n^*\}$ puede ser usado para evaluar el ajuste del modelo estructural bajo la distribución t_η multivariada. Cuando $\eta = 0$ las distancias transformadas son simplificadas $z_i^* = \{\hat{F}_i^{1/3} - (1 - 2/9r)\}/\sqrt{2/9r}$ y pueden usarse para evaluar el ajuste del modelo estructural bajo la suposición de normalidad. Adicionalmente las distancias de Mahalanobis pueden ser usadas para la detección multivariada de datos atípicos. En efecto, valores por sobre los valores esperados en \hat{F}_i , $i = 1, \dots, n$, identifica a casos atípicos (Lange *et al.*, 1989).

Alternativamente, se pueden usar los residuos cuantiles $r_{q,i}$ propuestos por Dunn y Smyth (1996) para obtener residuos normales. En este modelo se tiene $r_{q,i} = \Phi^{-1}(F(\cdot))$, donde $F(\cdot)$ es la función de distribución F con r y $1/\eta$ grados de libertad y $\Phi(\cdot)$ es la función de distribución acumulada de una Normal estándar. Así la distribución de $r_{q,i}$ converge a una normal estándar si $\boldsymbol{\theta}$ es estimado consistentemente.

3.5. Medidas de acuerdo

Una de las aplicaciones del modelo estructural multivariado (3.3) es la comparación de instrumentos de medición. La comparación de instrumentos de medición es necesaria para evaluar estadísticamente la equivalencia entre instrumentos cuando uno de ellos es considerado estándar y los demás varían en precio, rapidez, eficiencia u otras características que lo hacen competitivo. Tiene especial interés en las áreas de la ingeniería, medicina, psicología y agricultura (ver por ejemplo Barnett, 1969; Shyr y Gleser, 1986; Kimura, 1992; Dunn, 2009; Carstensen, 2010; Lin *et al.*, 2012; Choudhary y Nagaraja, 2017). El principal interés es comparar diferentes maneras de medir la misma cantidad desconocida x en un grupo de n unidades experimentales. En este contexto x_i es el verdadero valor de la cantidad desconocida x correspondiente a la unidad experimental i y Y_{ij} la medida observada de x obtenida con el instrumento j en la unidad experimental i , $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, p$. También se considera que un instrumento de referencia está disponible. Sea X_i la medición de x obtenida por el instrumento de referencia x para la unidad experimental i con $i = 1, \dots, n$. Esta sección se enfocará en Medidas de Acuerdo entre el instrumento de referencia X y los instrumentos de medición alternativos Y_1, \dots, Y_p .

3.5.1. Coeficiente de correlación de concordancia

Sea $\mathbf{Z}_{ij} = (X_i, Y_{ij})^T$, $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, p$. Usando la propiedad (3.2), la distribución marginal del vector aleatorio \mathbf{Z}_{ij} esta dada por

$$\mathbf{Z}_{ij} \stackrel{iid}{\sim} \mathbb{T}_2(\boldsymbol{\mu}_j, \mathbf{V}_j, \eta), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.12)$$

donde,

$$\boldsymbol{\mu}_j = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \alpha_j + \beta_j \mu_x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_j = \begin{pmatrix} \phi_x + \phi & \beta_j \phi_x \\ \beta_j \phi_x & \phi_x \beta_j^2 + \phi \end{pmatrix}, \quad \text{para } j = 1, \dots, p$$

Una medida para cuantificar el grado de acuerdo entre las variables X y Y_j corresponde al Coeficiente de Correlación de Concordancia (*CCC*) (Lin, 1989; Choudhary y Nagaraja, 2017). En este trabajo toma la forma

$$\rho_j = \frac{2\beta_j \phi_x}{\phi_x(1 + \beta_j^2) + 2\phi + (\alpha_j + \mu_x(\beta_j - 1))^2} \quad (3.13)$$

para $j = 1, \dots, p$. Notar que si $\alpha_j = 0$ y $\beta_j = 1$, para $j = 1, \dots, p$ entonces $\rho_j = \phi_x / (\phi_x + \phi)$.

3.5.2. Probabilidad de Acuerdo

Otra medida para cuantificar el grado de acuerdo entre instrumentos de medición es la Probabilidad de Acuerdo (*PA*) presentada en Barnhart *et al.* (2007) y Stevens *et al.* (2017). Sea x el verdadero valor del instrumento de referencia, entonces se define la Probabilidad de Acuerdo como

$$\psi_j(x) = P(|Y_j - X| \leq c_j | x), \quad j = 1, \dots, p$$

donde $c_j \geq 0$ es un nivel de tolerancia aceptable definido por el experimentador. Además, desde (3.12) la Probabilidad de Acuerdo toma la forma de

$$\psi_j(x) = \Phi_{\mathbb{T}}\left(\frac{c_j - \alpha_j - (\beta_j - 1)x}{\sqrt{2\phi}}\right) - \Phi_{\mathbb{T}}\left(\frac{-c_j - \alpha_j - (\beta_j - 1)x}{\sqrt{2\phi}}\right), \quad (3.14)$$

donde $\Phi_{\mathbb{T}}(x)$ denota la función de distribución acumulada de la distribución t evaluada en x para $j = 1, \dots, p$.

Similarmente, se puede definir la Probabilidad de Acuerdo marginal como

$$\psi_j = P(|Y_j - X| \leq c_j) = \Phi_{\mathbb{T}}\left(\frac{c_j - \alpha_j - (\beta_j - 1)\mu_x}{\sqrt{(\beta_j - 1)^2 \phi_x + 2\phi}}\right) - \Phi_{\mathbb{T}}\left(\frac{-c_j - \alpha_j - (\beta_j - 1)\mu_x}{\sqrt{(\beta_j - 1)^2 \phi_x + 2\phi}}\right),$$

para $j = 1, \dots, p$. Notar que si $\alpha_j = 0$ y $\beta_j = 1$ para $j = 1, \dots, p$ entonces ambas Probabilidades de Acuerdo coinciden.

3.6. Aplicaciones

3.6.1. Robustez del modelo t_η multivariado ante datos atípicos

Esta aplicación tiene como objetivo revisar la robustez del modelo estructural frente a datos atípicos u outliers. Considere un conjunto de datos con $n = 50$ observaciones, un instrumento estándar X y uno alternativo Y_1 ($p = 1$). Considere los siguientes parámetros para la generación de las muestras $\mu_x = 0$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 1$, $\phi_x = 1$ y $\phi = 1$. En la Figura 3.3 se presenta una realización donde el mayor dato en X es contaminado desde $\Delta = 0, \dots, 15$. El modelo estructural se ajusta simultáneamente bajo las distribuciones Normal y t_η según se van contaminando los datos. Asumiendo la distribución t_η el ajuste se muestra más robusto ante la contaminación de los datos difiriendo levemente con el ajuste a los datos sin contaminar. En la Figura 3.4 se presentan el Coeficiente de Correlación de Concordancia (ρ_1) y la Probabilidad de Acuerdo (ψ_1) según el grado de contaminación Δ . Hasta $\Delta \leq 5$ se tiene que ambos modelos mantienen valores similares en ambas medidas de acuerdo debido a que ϕ absorbe la contaminación. Cuando se tiene $\Delta = 1.5$ el conjunto de datos se acerca más a la normalidad multivariada.

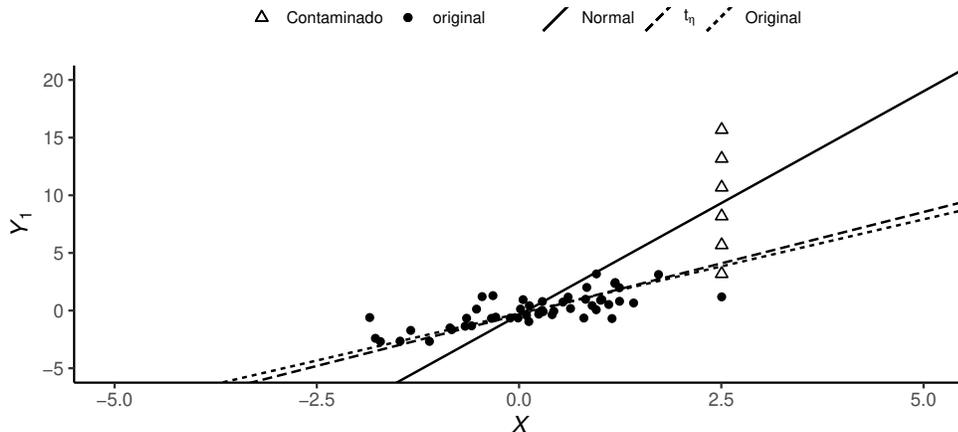


Figura 3.3: Efecto de la contaminación de un dato en la estimación de las medidas de acuerdo bajo el modelo estructural.

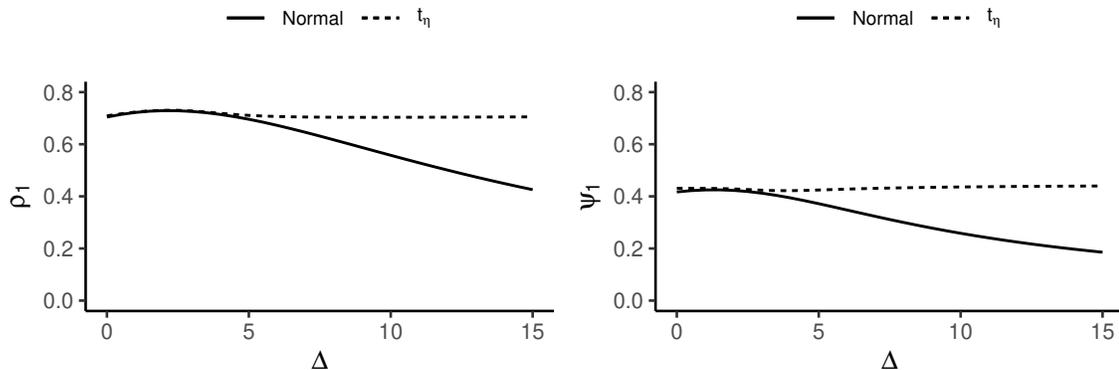


Figura 3.4: Efecto del grado de contaminación (Δ) en el Coeficiente de Correlación de Concordancia (ρ_1) y en la Probabilidad de Acuerdo (ψ_1) con $c_1 = 0.5$.

3.6.2. Conjunto de datos Chipkevitch et al. (1996)

El conjunto de datos de Chipkevitch *et al.* (1996) consiste en las mediciones del volumen testicular de 42 adolescentes usando cinco técnicas diferentes: Ultrasonido considerado como estándar (X), Método gráfico propuesto por los autores (Y_1), Medida dimensional (Y_2), Orquidómetro de Prader (Y_3) y Orquidómetro de anillo (Y_4). Este conjunto de datos fue analizado en el área de influencia local, en su aplicación los datos fueron transformados con raíz cúbica en busca de normalidad multivariada para luego aplicarlo al modelo estructural Normal multivariado (Galea-Rojas *et al.*, 2002).

En la Tabla 3.1 se presentan los principales estadísticos del conjunto de datos. Las asimetrías de Y_2 y Y_4 son significativas respecto el cero y las curtosis de las cinco variables están dentro de rango de una Normal univariada. Para probar si los datos provienen de una distribución Normal multivariada se usará el test de Mardia (Rencher y Christensen, 2012, pág. 108). El test de Mardia rechaza la Normal multivariada, principalmente por asimetría.

Tabla 3.1: Descriptivos del conjunto de datos Chipekvitch et al. (1996). El modelo considera las mediciones del volumen testicular realizadas a $n = 42$ adolescentes usando el ultrasonido como técnica de referencia X y otras cuatro técnicas alternativas: Método gráfico propuesto por los autores (Y_1), Medida dimensional (Y_2), Orquidómetro de Prader (Y_3) y Orquidómetro de anillo (Y_4).

Variable	Media	Matriz de Covarianza					Asimetría	Curtosis	Mardia
X	10.0	241.6					0.46	2.30	Asimetría
Y_1	9.0	201.5	191.6				0.67	3.01	69.26
Y_2	9.5	218.1	191.2	222.6			0.71	2.98	Curtosis
Y_3	11.5	258.9	231.9	245.1	309.0		0.63	2.97	1.60
Y_4	12.4	247.0	215.3	234.9	282.9	281.5	0.73	3.04	

En la Figura 3.5 se presentan las gráficas de dispersión y de Bland-Altman. Visualmente el método gráfico (Y_1) tiende a subestimar la medición, mientras que el uso del Orquidómetro de anillo (Y_4) lo sobreestima.

A los datos se ajusta el modelo estructural bajo las distribuciones Normal y t_η multivariada. En la Figura 3.6 y en la Tabla 3.2 se presentan los ajustes utilizando ambas distribuciones. Es claro como la distribución t_η se ajusta mejor a los datos especialmente en las colas. Ambos ajustes detectan las muestras 22, 31 y 32 como datos influyentes. El aporte de la distribución t_η es la capacidad de ponderar la contribución de cada muestra a la verosimilitud mediante los pesos w_{i1} , en la figura se puede notar como los pesos se reducen a medida que crece F_i (distancia de Mahalanobis escalada). En la Figura 3.7 y en la Tabla 3.3 se presentan las estimaciones e intervalos de confianza al 95% de la Probabilidad de Acuerdo a tres niveles de discrepancia $c_j = 3, 3.5, 4$. En general bajo la distribución t_η la Probabilidad de Acuerdo estimada es mas alta y con intervalos más cortos. Bajo ambas distribuciones el método dimensional (Y_2) es el de mayor acuerdo seguido por el método gráfico (Y_1) a pesar que visualmente tiende a subestimar. Los métodos de Prader (Y_3) y de anillo (Y_4) son los de menor acuerdo. En la Figura 3.8 y en la Tabla 3.4 se presentan las estimaciones e intervalos de confianza al 95% del Coeficiente de Correlación de Concordancia. Bajo la distribución t_η se producen estimaciones de CCC un tanto más altas y más precisas. Al igual que la PA el

método dimensional (Y_2) es el de mayor acuerdo seguido del método gráfico (Y_1). Al asumir la distribución t_η en los errores de medición, el intervalo de confianza bootstrap del método gráfico (Y_1) es mas corto siendo comparable con el método Prader (Y_3). Desde los resultados comparados se encuentra un mejor ajuste utilizando la t_η permitiendo obtener estimaciones más precisas de la PA y el CCC .

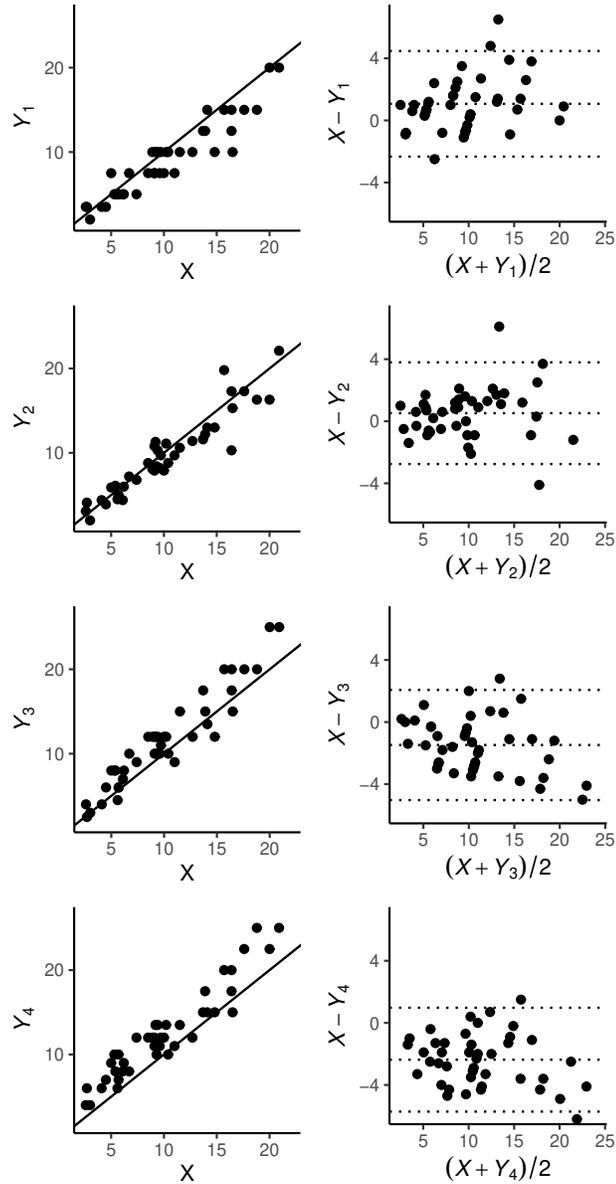


Figura 3.5: Diagrama de dispersión y gráficas de Bland-Altman para el conjunto de datos Chipekvtich et al. (1996).

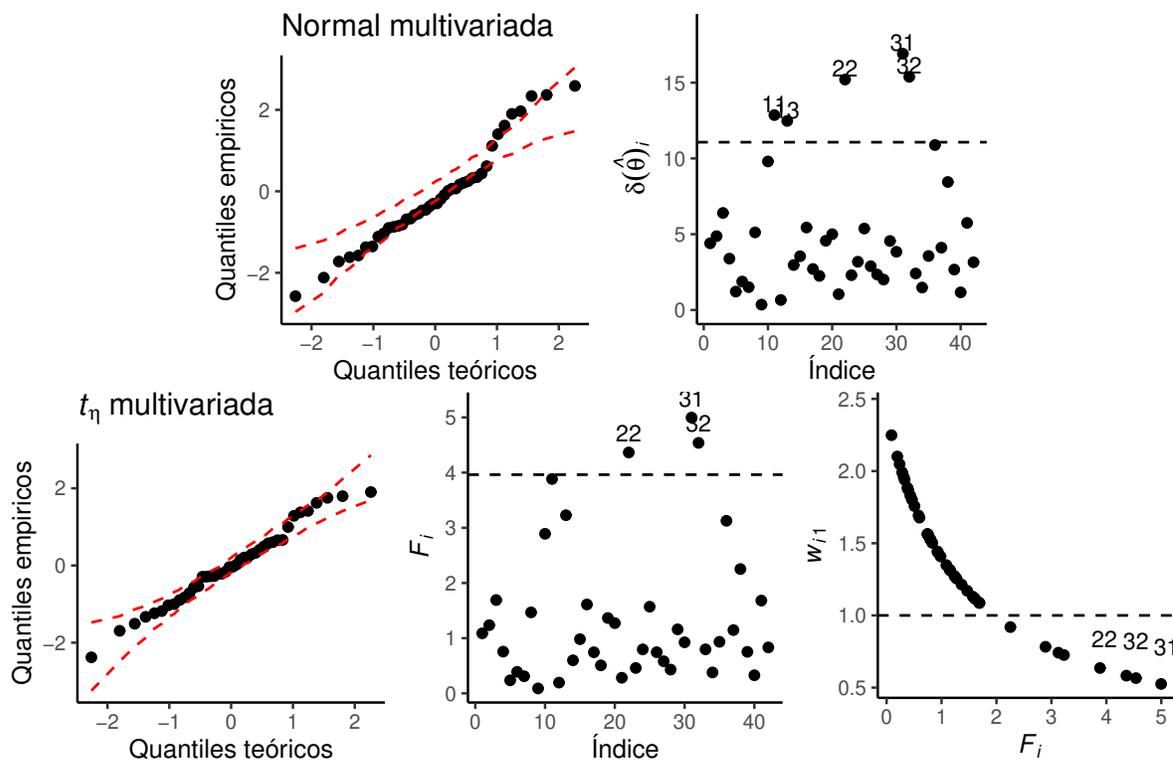


Figura 3.6: Ajuste al conjunto de datos Chipekvtch et al. (1996) asumiendo la distribución Normal y la t_η multivariada. Se puede notar como el ajuste de la t_η es más adecuado en las colas de los datos.

Tabla 3.2: Comparación de los EMV del modelo estructural bajo la suposición de Normal multivariada y t_η multivariada sobre el conjunto de datos Chipekvtch et al. (1996). Entre paréntesis un intervalo de confianza del 95 % utilizando la distribución asintótica de los EMV .

	Normal	t_η
$\hat{\mu}_x$	10.08 (8.61, 11.55)	9.05 (7.57, 10.54)
$\hat{\alpha}_1$	0.11 (-1.01, 1.24)	0.08 (-0.95, 1.11)
$\hat{\alpha}_2$	-0.03 (-1.20, 1.13)	-0.22 (-1.32, 0.89)
$\hat{\alpha}_3$	0.07 (-1.21, 1.35)	0.14 (-1.03, 1.31)
$\hat{\alpha}_4$	1.54 (0.30, 2.78)	1.55 (0.41, 2.70)
$\hat{\beta}_1$	0.88 (0.78, 0.98)	0.90 (0.79, 1.00)
$\hat{\beta}_2$	0.95 (0.85, 1.06)	0.98 (0.87, 1.10)
$\hat{\beta}_3$	1.14 (1.02, 1.25)	1.15 (1.03, 1.27)
$\hat{\beta}_4$	1.08 (0.97, 1.19)	1.09 (0.98, 1.21)
$\hat{\phi}_x$	22.26 (12.16, 32.36)	23.90 (10.63, 37.17)
$\hat{\phi}$	1.39 (1.09, 1.68)	1.41 (0.91, 1.90)
$\hat{\eta}$		0.14 (0.01, 0.28)
$loglik$	-425.22	-421.12
AIC	872.44	866.25

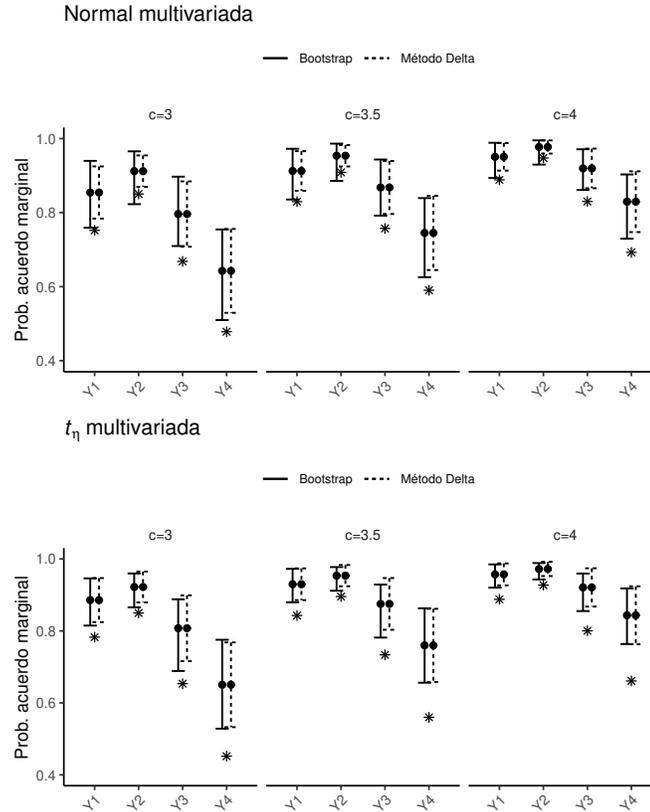


Figura 3.7: Probabilidad de Acuerdo para el conjunto de datos Chipekvitch et al. (1996) bajo las distribuciones Normal y t_η multivariadas considerando discrepancias $c_j = 3, 3.5, 4$ con respecto al método de ultrasonido X . El * indica la cota inferior simultánea para la Probabilidad de Acuerdo.

Tabla 3.3: Probabilidad de Acuerdo para el conjunto de datos Chipekvitch et al. (1996). Como discrepancia entre instrumentos se toma $c_j = 3, 3.5, 4$.

Normal			
j	$c_j = 3$	$c_j = 3.5$	$c_j = 4$
1	0.854 (0.759, 0.940)	0.912 (0.835, 0.972)	0.951 (0.894, 0.989)
2	0.912 (0.823, 0.966)	0.954 (0.886, 0.986)	0.977 (0.930, 0.995)
3	0.796 (0.710, 0.897)	0.868 (0.792, 0.943)	0.919 (0.861, 0.971)
4	0.643 (0.510, 0.754)	0.745 (0.626, 0.839)	0.830 (0.730, 0.903)
t_η			
j	$c_j = 3$	$c_j = 3.5$	$c_j = 4$
1	0.886 (0.815, 0.946)	0.930 (0.879, 0.973)	0.957 (0.920, 0.985)
2	0.922 (0.866, 0.960)	0.954 (0.912, 0.977)	0.972 (0.943, 0.989)
3	0.807 (0.689, 0.888)	0.875 (0.781, 0.929)	0.921 (0.855, 0.959)
4	0.650 (0.528, 0.775)	0.760 (0.656, 0.863)	0.843 (0.764, 0.918)

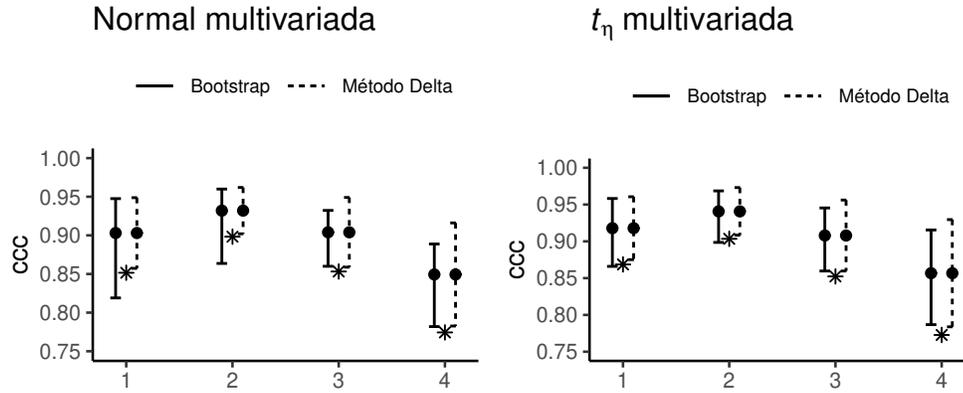


Figura 3.8: Coeficiente de Correlación de Concordancia para el conjunto de datos Chipekvitch et al. (1996) bajo las distribuciones Normal y t_η multivariadas. El * indica la cota inferior simultánea para el CCC .

Tabla 3.4: Coeficiente de Correlación de Concordancia para el conjunto de datos Chipekvitch et al. (1996) estimado en los modelos de distribución Normal y t_η multivariada e intervalos de confianza usando el método Delta y Bootstrap.

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
Normal				
Bootstrap	0.903 (0.819, 0.948)	0.932 (0.864, 0.960)	0.904 (0.860, 0.932)	0.849 (0.782, 0.889)
Método Delta	0.903 (0.857, 0.949)	0.932 (0.902, 0.962)	0.904 (0.859, 0.949)	0.849 (0.783, 0.916)
t_η				
Bootstrap	0.918 (0.854, 0.948)	0.941 (0.872, 0.961)	0.908 (0.861, 0.942)	0.857 (0.790, 0.918)
Método Delta	0.918 (0.875, 0.961)	0.941 (0.908, 0.973)	0.908 (0.860, 0.956)	0.857 (0.784, 0.930)

3.6.3. Mercado de acciones Chileno

En esta sección se aplica el modelo estructural a los retornos mensuales de cinco acciones chilenas. Dichos retornos se consideran como instrumentos, mientras que el Índice de Precio Selectivo de Acciones (*IPSA*) será el instrumento de referencia para el retorno de mercado chileno. La aplicación tiene por objetivo medir el grado de acuerdo que cada acción tiene respecto al mercado.

En la Tabla 3.5 se presentan los principales estadísticos univariados y la matriz de varianzas covarianzas del conjunto de datos. La curtosis en las cinco acciones indica colas pesadas especialmente en *SQMB* y *ENEL*. En general, se observa una asimetría positiva, a excepción de *ENEL* donde es negativa. Para probar la normalidad multivariante se recurre al test de Mardia (Rencher y Christensen, 2012, pág. 108). Ambos estadísticos del test de Mardia resultaron significativos, por tanto, se rechaza la normalidad multivariada. En la Figura 3.13 se presentan los diagramas de dispersión y las gráficas de Bland-Altman. Es notorio como los datos se alejan de la diagonal especialmente en *SQMB* y *ENEL*, mientras que las acciones que mas se acercan al *IPSA* serían *BSantander* y *Fallabela*.

Tabla 3.5: Descriptivos del conjunto de datos Acciones Chilenas. En el modelo se considera el retorno del *IPSA* como instrumento referencia X y el retorno mensual de cinco acciones como instrumentos Y_1 a Y_5 .

Variable	Media	Matriz de Covarianza						Asimetría	Curtosis	Mardia
<i>IPSA</i>	0.83%	19.79						0.26	3.45	Asimetría
<i>SQMB</i>	1.67%	22.92	93.40					0.58	6.15	270.7
<i>ENEL</i>	0.60%	18.70	17.22	48.21				-0.73	6.25	Curtosis
<i>FALABELLA</i>	1.13%	21.25	18.13	16.20	48.26			0.52	3.78	21.6
<i>BSANTANDER</i>	0.74%	14.04	13.70	12.33	12.24	30.82		0.31	3.08	
<i>LTM</i>	1.60%	27.85	30.53	28.33	25.99	19.17	88.85	0.55	3.81	

Inicialmente, se asumen para el modelo estructural las distribuciones Normal y t_η multivariada. La bondad de ajuste a los datos para cada distribución se muestra en los *QQ*-plot de la Figura 3.9. Asumiendo la distribución Normal se nota una falta de ajuste dado que las envolventes no logran contener a la muestra especialmente en una de sus colas. Por el contrario, la envolvente de la distribución t_η logra contener la muestra, gracias a la capacidad de modelar colas pesadas. Respecto a las distancias de Mahalanobis ($\delta_i(\hat{\theta})$) y su versión escalada (F_i) la distribución Normal considera como influyentes más observaciones que la distribución t_η . A pesar del buen ajuste de la distribución t_η , dos puntos son detectados como influyentes, los que corresponden a grandes variaciones del precio de la acción. Las observaciones corresponden a la observación 70 (jun/2008) donde *SQMB* sube de valor un 48 % MoM y la observación 83 (jul/2009) donde *ENEL* baja su valor un 36 % MoM. Se continua el análisis asumiendo la distribución t_η multivariada dada la evidencia a favor.

En la Tabla 3.6 se presentan los *EMV* y sus respectivos errores estándar. Usando el test de Wald no se puede rechazar la hipótesis $H_0 : \alpha_j = 0$ para cada $j = 1, \dots, p$, mientras que la hipótesis $H_0 : \beta_j = 1$ para cada $j = 1, \dots, p$ se rechaza en las acciones de *SQMB* y *LTM*. También se rechaza la hipótesis $H_0 : \eta = 0$, indicando nuevamente que la muestra no se ajusta a una distribución Normal multivariada.

Los datos del Mercado de acciones Chileno también fue analizado por Galea *et al.* (2020) bajo el modelo *CAPM* (Capital Asset Pricing Model) y la distribución t_η multivariada. A

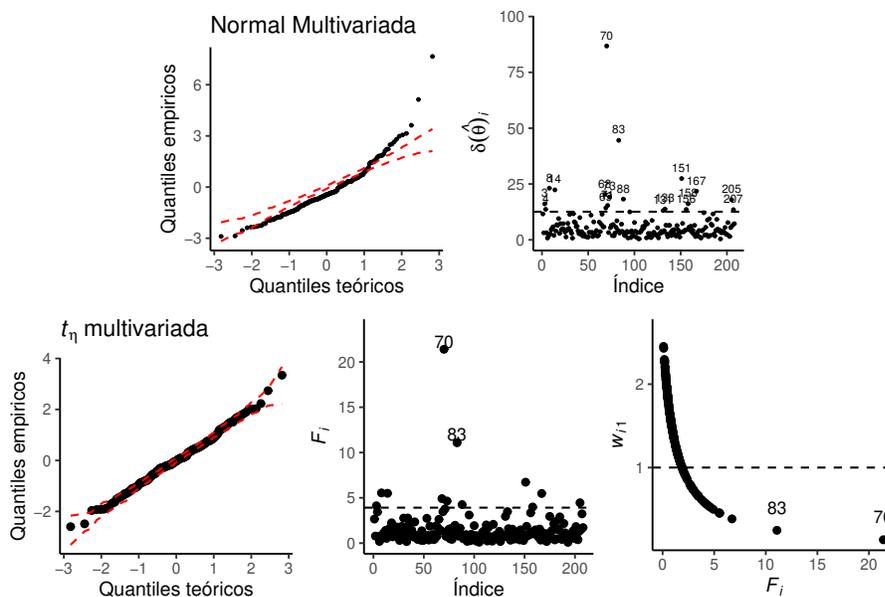


Figura 3.9: Bondad de ajuste del modelo estructural asumiendo las distribuciones Normal y t_η multivariadas aplicado en Acciones Chilenas. Se puede notar como el ajuste de la distribución t_η es más adecuado en las colas de los datos.

pesar de ser un modelo distinto al Modelo estructural de este trabajo, ambos modelos logran estimaciones similares de α , β y η . Por ejemplo, usando *CAPM* tenemos $\hat{\eta} = 0.135$ y para el modelo estructural t_η un $\hat{\eta} = 0.1453$.

En la Figura 3.10 y en la Tabla 3.7 se presentan las Probabilidades de Acuerdo. Una interpretación para la Probabilidad de Acuerdo en el contexto de esta aplicación sería la cantidad de meses en que la diferencia entre el retorno mensual una acción y el *IPSA* difiere menos de c_j % en un periodo de tiempo grande. Por ejemplo, si se emplea una diferencia en los retornos de un 3% entre *SQMB* y el *IPSA* (o sea $c_1 = 0.03$), tendría que un 32% de los meses analizados ambos retornos serían similares. Como era de esperar, al aumentar el nivel de tolerancia c_j se tiene que la Probabilidad de Acuerdo aumenta. Si al aplicar una tolerancia del 5% (o sea $c_j = 0.05$) la Probabilidad de Acuerdo solo llega al 60%, siendo *BSantander* la acción de mayor acuerdo con el *IPSA*. A modo de ejemplo, en la Figura 3.11 se presenta la Probabilidad de Acuerdo condicional (ecuación 3.14) para un barrido de valores de x (medición sin error) y $j = 1$ (*SQMB*). A medida que x se acerca a cero la probabilidad de acuerdo aumenta y para el caso de $c_j = 0.03$ se tiene que el intervalo de confianza se reduce también al acercarse al cero.

En la Figura 3.12 y en la Tabla 3.8 se presentan los valores del Coeficiente de Correlación de Concordancia. Contrariamente a la Probabilidad de Acuerdo y las gráficas de dispersión el *CCC* aparece indicando que en *BSantander* tiene el *CCC* mas bajo, esto se debe a que su $\hat{\beta}_j$ es el menor de todos y la fórmula del *CCC* (ecuación 3.13) se tiene a β_j en el numerador. El resultado de *CCC* es contraintuitivo a las gráficas de dispersión y a las Probabilidades de Acuerdo antes calculadas.

Tabla 3.6: Estimadores máximo verosímiles del modelo estructural t_η aplicado en Acciones Chilenas.

Variable	EMV	SE	Variable	EMV	SE	Variable	EMV	SE
$\hat{\mu}_x$	0.0059	0.0041				$\hat{\phi}_x$	0.0014	0.0014
$\hat{\alpha}_1$	0.0018	0.0068	$\hat{\beta}_1$	1.73	0.1773	$\hat{\phi}$	0.0031	0.0031
$\hat{\alpha}_2$	-0.0008	0.0051	$\hat{\beta}_2$	1.13	0.1388	$\hat{\eta}$	0.1453	0.0232
$\hat{\alpha}_3$	0.0018	0.0050	$\hat{\beta}_3$	1.08	0.1388			
$\hat{\alpha}_4$	-0.0009	0.1279	$\hat{\beta}_4$	0.78	0.1279			
$\hat{\alpha}_5$	-0.0018	0.1765	$\hat{\beta}_5$	1.89	0.1765			

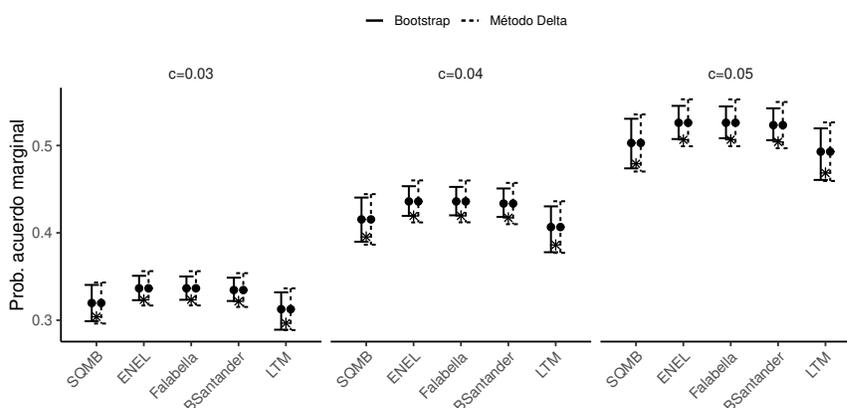


Figura 3.10: Probabilidad de Acuerdo considerando discrepancias c_j de 3%, 4% y 5% respecto del retorno mensual del *IPSA* como instrumento de referencia X . Los intervalos de confianza al 95% fueron obtenidos por el método Delta y por bootstrap remuestreando 300 replicas.

Tabla 3.7: Probabilidad de Acuerdo considerando discrepancias c_j de 3%, 4% y 5% respecto del retorno mensual del *IPSA* como instrumento de referencia X . Los intervalos de confianza al 95% fueron obtenidos por el método Delta.

j	$c_j = 0.3$	$c_j = 0.4$	$c_j = 0.5$
1	0.320 (0.299, 0.340)	0.415 (0.390, 0.440)	0.503 (0.474, 0.531)
2	0.337 (0.323, 0.351)	0.436 (0.419, 0.453)	0.526 (0.507, 0.545)
3	0.337 (0.323, 0.350)	0.436 (0.420, 0.453)	0.526 (0.508, 0.545)
4	0.335 (0.322, 0.349)	0.434 (0.418, 0.451)	0.523 (0.506, 0.543)
5	0.313 (0.289, 0.332)	0.407 (0.378, 0.430)	0.493 (0.461, 0.520)

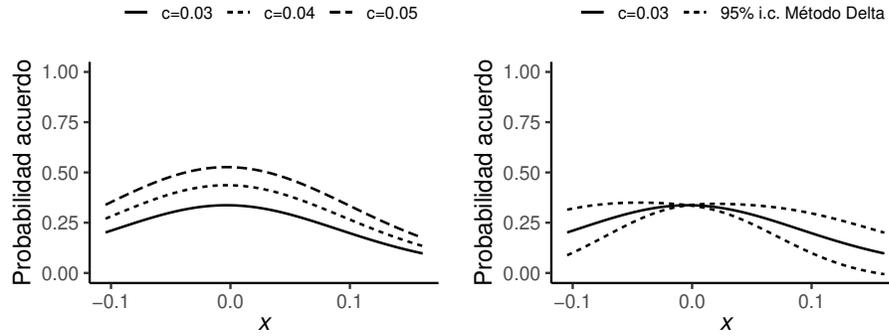


Figura 3.11: Ejemplo de la Probabilidad de Acuerdo condicionada a x . Para el retorno mensual de *SQMB* se consideran discrepancias c_j de 3%, 4% y 5% con respecto al al retorno mensual del *IPSA*, el que se hace variar en x desde -10% a 15%.

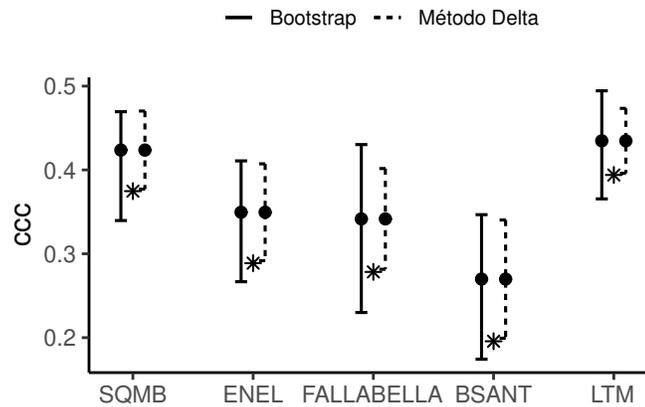


Figura 3.12: Coeficiente de Correlación de Concordancia y su intervalo de confianza al 95% obtenido por el Método Delta y por bootstrap remuestreando 300 replicas. El * representa el valor de la cota inferior simultánea del *CCC*.

Tabla 3.8: Coeficiente de Correlación de Concordancia y su intervalo de confianza al 95% obtenido por el Método Delta y por bootstrap remuestreando 300 replicas.

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$
Bootstrap	0.424 (0.340, 0.469)	0.350 (0.267, 0.411)	0.342 (0.230, 0.430)	0.270 (0.174, 0.347)	0.435 (0.366, 0.494)
Método Delta	0.424 (0.377, 0.470)	0.350 (0.292, 0.407)	0.342 (0.282, 0.402)	0.270 (0.199, 0.340)	0.435 (0.396, 0.473)

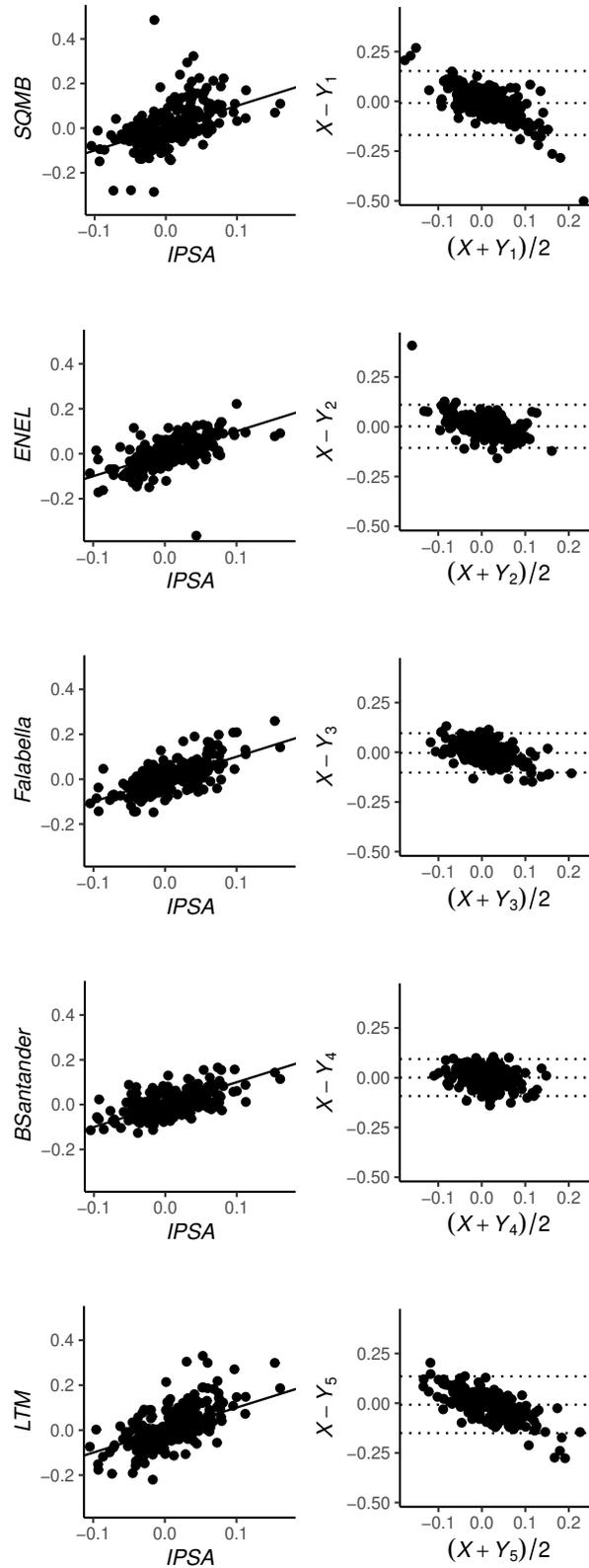


Figura 3.13: Diagrama de dispersión y gráficas de Bland-Altman para Acciones Chilenas. En el modelo se considera el retorno mensual del *IPSA* como instrumento de referencia X y los retornos mensuales de las acciones *SQMB*, *ENEL*, *Falabella*, *BSantander*, *LTM* como instrumentos Y_1 a Y_5 respectivamente.

3.6.4. Encuesta de Operadores Financieros

El Banco Central de Chile publica quincenalmente la Encuesta de Operadores Financieros (*EOF*) dirigida a las personas responsables de las decisiones financieras en la industria bancaria local, administradoras de fondos de pensiones, compañías de seguros, corredoras de bolsa, agentes de valores, fondos mutuos y entidades extranjeras que operan activamente con Chile. La encuesta consiste en preguntar las expectativas en un horizonte acotado de tiempo de algunas variables económicas como la Inflación (en variación del *IPC*), Tasa de Política Monetaria (*TPM*) y el Tipo de Cambio Dólar/Peso. Los resultados de la *EOF* están disponibles en el siguiente enlace del Banco Central

<https://www.bcentral.cl/web/banco-central/encuestas-economicas/resultados-anteriores-eof>

En esta aplicación es de interés evaluar el sesgo de los encuestados al predecir el tipo de cambio en los próximos siete días luego de recibir la encuesta (2do y 4to miércoles de cada mes). Los resultados se publican agregados en formato valor/ocurrencia. El modelo es aplicado sobre 148 encuestas disponibles desde agosto 2013 en las que se consideran el promedio ponderado (Y_1) y la mediana (Y_2) como dos instrumentos ($p = 2$) y el Dólar observado (X) como una variable medida con error, ya que es fluctuante intradía.

En la Tabla 3.9 se presentan los principales estadísticos de resumen de la *EOF*. Tanto la simetría y la curtosis univariados se encuentran cercanos de la distribución normal. Sin embargo, al considerar el Test de Mardia se rechaza la normalidad multivariada principalmente a la asimetría multivariada. En la Figura 3.14 se presenta el diagrama de dispersión de las predicciones del tipo de cambio a siete días. En la figura se observa que tanto la media ponderada (Y_1) y la mediana (Y_2) son coherentes con el Dólar Observado (X), notar un aumento de dispersión en valores cercanos a los \$700. Una vista temporal de las series es presentada en el Apéndice D.

En la Figura 3.15 se presentan los *QQ*-plot de bondad de ajuste y las gráficas de las distancias de Mahalanobis $\delta(\hat{\theta})_i$ y su versión escalada F_i . El modelo Normal multivariado se muestra poco flexible para capturar el comportamiento de las colas. Mientras que el modelo t_η logra un mejor ajuste. En ambos ajustes, las observaciones 128 (22-01-2020), 137 (31-07-2020), 141 (30-10-2020), 107 (28-08-2018) y 134 (09-06-2020) son consideradas como influyentes. Estas observaciones corresponden desviaciones cercanas a los \$20 entre las expectativas de los operadores y el valor observado siete días después. A partir de aquí el resto de los análisis será bajo la distribución t_η debido al mejor ajuste.

En la Tabla 3.10 se presentan los *EMV* del modelo estructural bajo la distribución t_η . Al aplicar un test de Wald bajo la hipótesis $H_0 : \alpha_j = 0$ y $H_0 : \beta_j = 1$ para $j = 1, 2$ se tiene que en todos los casos se acepta H_0 . Dado que $\hat{\eta} = 0.1453$ es mayor a cero entonces se está en la presencia de curtosis multivariada mayor a la normal. En la Figura 3.16 y en la Tabla 3.11 se presentan la Probabilidad de Acuerdo para discrepancias (c_j) entre el Dólar Observado (X) y el promedio ponderado (Y_1) y la mediana (Y_2) de \$5, \$7 y \$10 ($c_j = 5, 7, 10$). Como es de esperar la *PA* mejora en la medida que c_j aumenta. Por ejemplo, dentro en una ventana de tiempo grande, los operadores se acercarán al valor observado un 89% de las veces con una discrepancia de a lo mas \pm \$10. En la Figura 3.17 se presenta la *PA* condicionada a x para Y_1 . En la figura se nota como la *PA* mejora con c_j siendo casi plana debido a que $\hat{\alpha}_1 \approx 0$ y

$\hat{\beta}_1 \approx 1$ lo que la hace casi insensible al valor de x . A modo de ejemplo, se presenta también un intervalo de confianza con el método Delta para el caso de $c_1 = 5$, en la figura se muestra como el intervalo se agranda a medida que se aleja de μ_x o los \$650. Finalmente, en la Figura 3.18 y en la Tabla 3.12 se presenta el CCC para cada instrumento. Los valores alcanzan el 0.99 con intervalos de confianza estrechos lo que indica que ambos instrumentos/estadísticos tienen un alto nivel de acuerdo con el Dólar observado.

En conclusión el modelo muestra que los datos tienen colas pesadas ($\hat{\eta} > 0$) y que a pesar del alto acuerdo de los instrumentos (CCC cercano a 1) es posible determinar observaciones influyentes o atípicas principalmente por sobre-estimaciones del valor observado. También, Probabilidad de Acuerdo pudo ser interpretada como las veces en que los operadores se acercan a predecir el valor observado a distintos niveles de discrepancia en una ventana de tiempo grande.

Tabla 3.9: Descriptivos del conjunto de datos Encuesta de Operadores Financieros. En el modelo se considera el dólar observado (X), el promedio ponderado (Y_1) y la mediana (Y_2) de las expectativas a siete días del tipo de cambio contestado por los operadores financieros.

Variable	Media	Matriz de Covarianza			Asimetría	Curtosis	Mardia
X	654.04	5786			0.187	3.01	Asimetría
Y_1	653.50	5677	5626		0.143	2.99	26.07
Y_2	653.38	5669	5618	5612	0.151	3.01	Curtosis -0.41

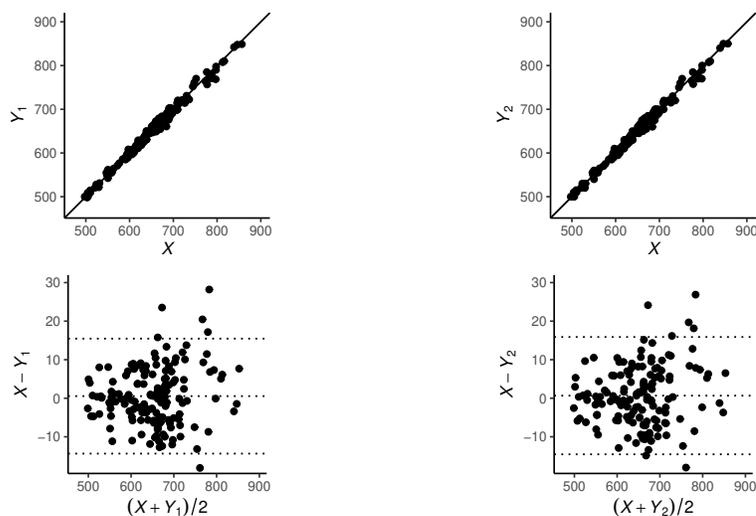


Figura 3.14: Diagramas de dispersión y gráficas de Bland-Altman para la Encuesta de Operadores Financieros. En el modelo se considera el dólar observado (X), el promedio ponderado (Y_1) y la mediana (Y_2) de las expectativas a siete días del tipo de cambio contestado por los operadores financieros.

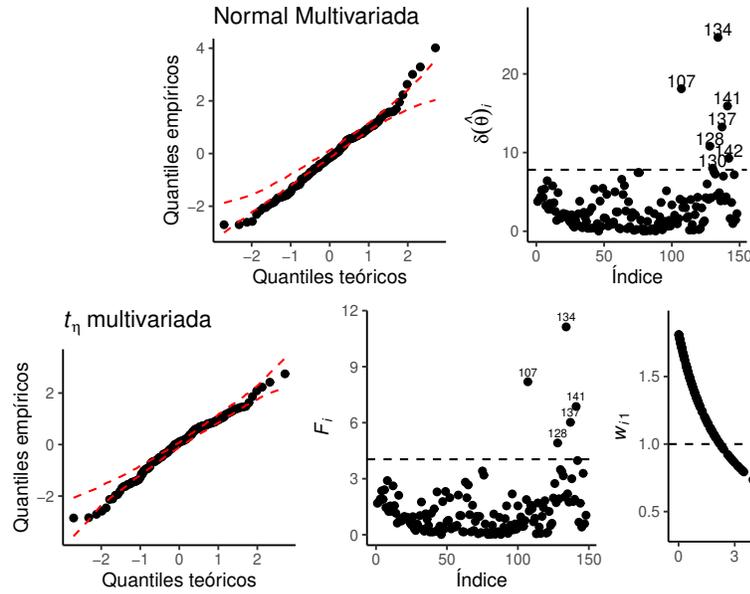


Figura 3.15: Bondad de ajuste del modelo estructural asumiendo las distribuciones Normal y t_η multivariadas aplicado en la Encuesta de Operadores Financieros. Se puede notar como el ajuste de la t_η es más adecuado en las colas de los datos.

Tabla 3.10: Estimadores máximo verosímiles del modelo estructural t_η aplicado en la Encuesta de Operadores Financieros.

Variable	EMV	SE	Variable	EMV	SE	Variable	EMV	SE
$\hat{\mu}_x$	654	6.08	$\hat{\phi}_x$	5715	775	$\hat{\phi}$	19.6	2.3
$\hat{\alpha}_1$	7.5	4.67	$\hat{\beta}_1$	0.9881	0.00722	$\hat{\eta}$	0.1234	0.045
$\hat{\alpha}_2$	8.2	4.68	$\hat{\beta}_2$	0.9867	0.00723			

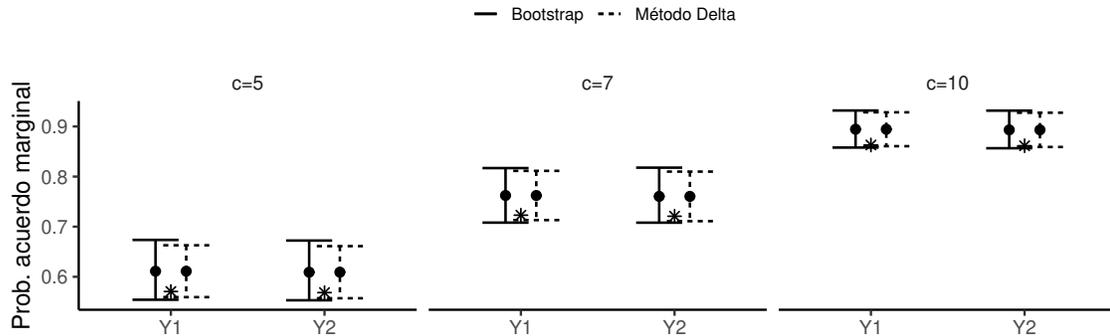


Figura 3.16: Probabilidad de Acuerdo considerando discrepancias c_j de \$5, \$7 y \$10 respecto al dólar observado X . Los intervalos de confianza al 95 % fueron obtenidos por el método Delta y por bootstrap remuestreando 300 réplicas.

Tabla 3.11: Probabilidad de Acuerdo considerando discrepancias c_j de \$5, \$7 y \$10 respecto al dólar observado X . Los intervalos de confianza al 95 % fueron obtenidos por el método Delta.

j	$c_j = 5$	$c_j = 7$	$c_j = 10$
1	0.6111 (0.5541, 0.6736)	0.7623 (0.7081, 0.8170)	0.8945 (0.8579, 0.9319)
2	0.6091 (0.5531, 0.6723)	0.7604 (0.7080, 0.8178)	0.8933 (0.8566, 0.9317)

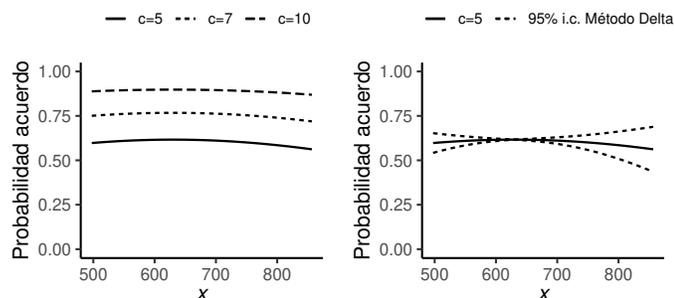


Figura 3.17: Ejemplo de la Probabilidad de Acuerdo condicionada a x . Para promedio ponderado de las estimaciones del dolar a 7 días (Y_1) se consideran discrepancias (c_j) de \$5, \$7 y \$10 respecto al dolar observado (X) el que se hace variar sin error desde los \$500 a \$850.

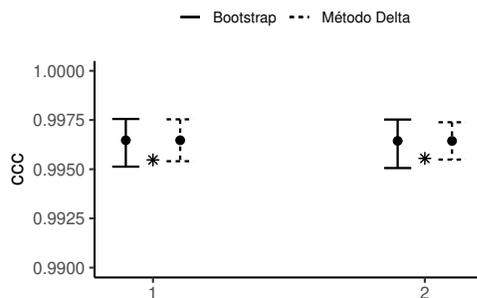


Figura 3.18: Coeficiente de Correlación de Concordancia y su intervalo de confianza al 95 % obtenido por el Método Delta y por bootstrap remuestreando 300 replicas. El * representa el valor de la cota inferior simultánea del CCC .

Tabla 3.12: Coeficiente de Correlación de Concordancia y su intervalo de confianza al 95 % obtenido por el Método Delta y por bootstrap remuestreando 300 réplicas.

	$j = 1$	$j = 2$
Bootstrap	0.9965 (0.9951, 0.9976)	0.9964 (0.9951, 0.9975)
Método Delta	0.9965 (0.9954, 0.9975)	0.9964 (0.9955, 0.9974)

3.7. Discusión y conclusiones

En este capítulo se desarrollaron las medidas de acuerdo PA y CCC considerando error de medición de los instrumentos y asumiendo la distribución t_η multivariada para los errores.

La distribución t_η multivariada es una opción razonable a la distribución Normal Multivariada, ya que permite modelar datos atípicos de forma robusta como se presentó en las tres aplicaciones. Los resultados en la contaminación de datos muestra como la distribución t_η fue capaz de evaluar las medidas de acuerdo aún con altos niveles de contaminación. Mientras que al asumir la distribución Normal las estimaciones se alejaban de los valores sin contaminar (ver sección 3.6.1). Otra ventaja de la distribución t_η es la capacidad de incorporar una curtosis superior a curtosis fija de la distribución Normal. En las aplicaciones el valor $\hat{\eta}$ fue significativamente mayor a cero indicando como los conjunto de datos se alejaban de la Normalidad multivariada.

Al aplicar el Modelo Estructural t_η multivariado se observó como las estimaciones de PA y CCC fueron algo más altas y más precisas que en el modelo Normal multivariado.

Además de la distribución t , una familia de distribuciones robustas puede aplicarse como alternativa a la distribución Normal tales como la Slash y la Normal contaminada (Lange y Sinsheimer, 1993), las que podrían ser consideradas en futuras mejoras del modelo.

Capítulo 4

Conclusiones finales y trabajo futuro

Este capítulo inicia con la presentación de la aplicación del Modelo Estructural a los datos de Monitoreo del Sueño como una de las líneas de trabajo a futuro. Luego se enumeran distintas propuestas de trabajo que pueden ser desarrolladas en otras investigaciones. Por último, se presentan las conclusiones.

4.1. Monitoreo del Sueño

La aplicación del modelo estructural a los datos de Monitoreo del Sueño muestra la necesidad de seguir explorando otras distribuciones que permitan incorporar tanto asimetría y curtosis multivarida distinta a la distribución normal.

Se inicia con la descripción del conjunto de datos y su ajuste bajo el modelo estructural t_η multivariado.

Svetnik *et al.* (2007) compara dos instrumentos de monitoreo del sueño contra uno ya establecido como estándar. El instrumento manual X (el que será considerado de referencia) es comparado contra un monitoreo parcialmente automático Y_1 y otro completamente automático Y_2 . En la Figura 4.1 se presentan los gráficos de dispersión y gráficas de Blant-Altman para los tres instrumentos. En la dispersión se aprecia una asimetría respecto a la diagonal, mientras que en la gráfica de diferencias se aprecia una asimetría respecto al promedio. Al menos tres observaciones se alejan notablemente de la tendencia. En la Tabla 4.1 se presentan los estadísticos descriptivos de los tres instrumentos. Los estadísticos univariados indican un nivel de asimetría y curtosis alejados de la normal. Respecto al supuesto de Normalidad multivariada para los tres instrumentos, esta hipótesis es rechazada al emplear el Test de Mardia ya que sus estadísticos de asimetría y curtosis son altamente significativos. Por tanto, el conjunto de datos presenta una asimetría y curtosis multivariada alejada de la normal multivariada.

Al ajustar el modelo estructural t_η multivariado (3.4) a este conjunto de datos se obtiene un estimador para η al borde del espacio paramétrico. Luego de 350 iteraciones del algoritmo EM se obtiene $\hat{\eta} = 0.48898$, mientras que la log-verosimilitud se estanca. Respecto al score asociado a η este fue de 17.13, bastante alejado de cero. Por tanto, el método no llega al óptimo siendo evidencia que la t_η con segundo momento finito no es un modelo razonable

para este conjunto de datos. En la Figura 4.2 se presenta la bondad de ajuste mediante el QQ -plot y los valores de las distancias de Mahalanobis escaladas F_i . Ambos gráficos indican una cierta falta de ajuste en una de las colas y la presencia de al menos cuatro puntos atípicos.

Este conjunto de datos también fue analizado por Leal (2016); Leal *et al.* (2019) buscando estimadores del CCC y la PA bajo el modelo t_η multivariado sin considerar el error de medición de los instrumentos llegando a un valor de η cercanos a $1/2$.

Los resultados indican que aún es necesario buscar otras distribuciones que permitan modelar datos con asimetría y curtosis distintas a la Normal multivariada.

Tabla 4.1: Descriptivos del conjunto de datos Monitoreo del Sueño. En esta aplicación se tiene el método manual X como referencia, el método parcialmente automático Y_1 y al completamente automático Y_2 como propuestas.

Variable	Media	Matriz de Covarianza			Asimetría	Curtosis	Mardia
X	2.55	0.77			-0.23	2.63	Asimetría
Y_1	2.48	0.72	0.79		0.22	2.94	36.14
Y_2	2.31	0.70	0.73	1.25	0.12	3.85	Curtosis
							16.40

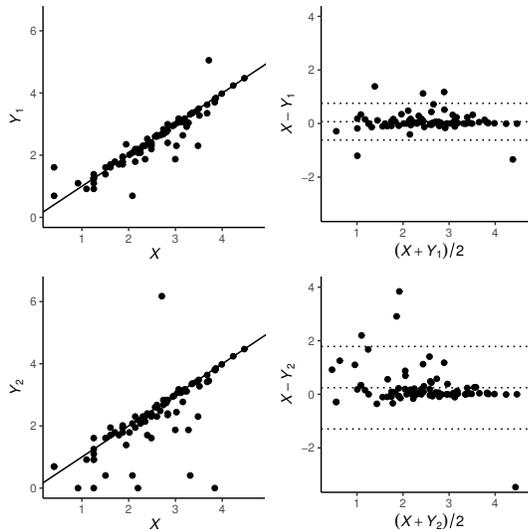


Figura 4.1: Dispersión y gráfica de Blant-Altman para los instrumentos de monitoreo del sueño.

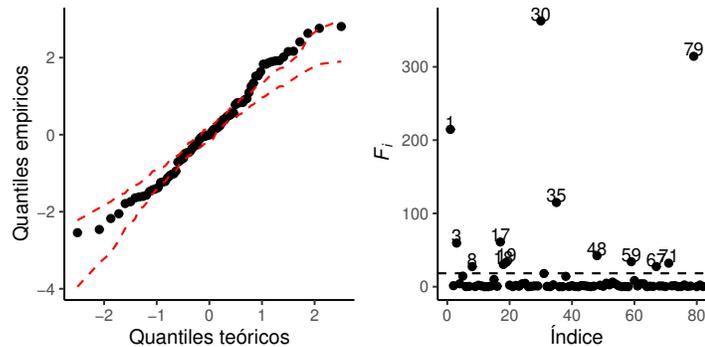


Figura 4.2: Envelope y distancias de Mahalanobis escaladas F_i aplicado al conjunto de datos de monitoreo del sueño.

4.2. Propuestas de trabajo futuro

En el contexto de las Medidas de Acuerdo bajo los Modelos con Error de Medición pueden abrirse las siguientes líneas de trabajo.

- (i) Incorporar heterocedasticidad en el modelo estructural multivariado, es decir, permitir una varianza del error distinta para cada instrumento.

Recordar en el modelo estructural multivariante

$$\mathbf{Z}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} + \boldsymbol{\epsilon}_i, \quad i = 1, \dots, n$$

donde $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)^T$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^T$ y $\boldsymbol{\epsilon}_i$ distribuye bajo alguna distribución multivariante simétrica con media $\mathbf{0}$ y matriz de covarianza $\phi\boldsymbol{\Sigma}_0$.

Se puede incorporar heterocedasticidad al modelo si se considera a

$$\boldsymbol{\Sigma}_\epsilon = \text{Diag}(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_p)$$

como la matriz de covarianza de $\boldsymbol{\epsilon}_i$. Se puede interpretar a ϕ_0 como la varianza del error de medición del instrumento estándar y ϕ_1 a ϕ_p a las varianzas del error de cada instrumento a comparar. Cuando $p \geq 2$ el modelo es identificable y cuando $p = 2$ los EMV del modelo heterocedástico se pueden encontrar en Barnett (1969).

- (ii) Considerar una distribución multivariante capaz de modelar simultáneamente colas pesadas y asimetría. Usando la notación matricial del modelo estructural Normal o t_η multivariante se tiene

$$\mathbf{Z}_i \stackrel{iid}{\sim} \mathbf{N}_r(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V}) \quad \text{ó} \quad \mathbf{Z}_i \stackrel{iid}{\sim} \mathbf{T}_r(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V}, \eta),$$

donde

$$\mathbf{Z}_i = \begin{pmatrix} X_i \\ \mathbf{Y}_i \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} \mu_x, \quad \mathbf{V} = \phi \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}^T + \phi \mathbf{I}_r.$$

En ambos modelos $\boldsymbol{\mu}$ y \mathbf{V} corresponden a la media y la matriz de covarianzas de la variable \mathbf{Z}_i .

Si se considera la distribución Skew Normal Multivariada (Azzalini y Capitanio, 1999, sec. 4.1) cuya densidad se define para $\mathbf{X} \sim \text{SN}_p(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{a})$ como

$$f(\mathbf{x}) = 2\phi_p(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}; \boldsymbol{\Omega})\Phi(\mathbf{a}^T \boldsymbol{\omega}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})),$$

donde $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_p)$ es un vector de localización, $\boldsymbol{\omega} = \text{Diag}(\omega_1, \dots, \omega_p)$ es una matriz de escalas, \mathbf{a} es un vector que controla la forma de la distribución, $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}$ es la matriz de covarianzas, \mathbf{R} es una matriz de correlaciones, $\phi_p(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}; \boldsymbol{\Omega})$ es la densidad normal p -variada con media $\mathbf{0}_p$ y matriz de covarianza $\boldsymbol{\Omega}$ y $\Phi(\cdot)$ es la función de distribución de una normal estándar. Bajo esta distribución los dos primeros momentos

serían

$$\begin{aligned} E(\mathbf{X}) &= \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\omega}(2\pi)^{1/2}\boldsymbol{\delta} \\ \text{var}(\mathbf{X}) &= \boldsymbol{\omega}(\mathbf{R} + 2\pi\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}^T)\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} - 2\pi\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{\delta} &= \frac{\mathbf{Ra}}{(1 + \mathbf{a}^T\mathbf{Ra})^{1/2}} \end{aligned}$$

En ambos momentos está la presencia del vector \mathbf{a} como un parámetro molesto, por tanto, se necesita adaptar la distribución Skew Normal a una parametrización con media $\boldsymbol{\mu}$ y matriz de covarianza \mathbf{V} para poder usarla directamente como una distribución de \mathbf{Z}_i y así incorporar asimetría en los errores de medición.

Del mismo modo, es posible incorporar asimetría y colas pesadas si se considera la distribución Skew t_ν multivariada (Gupta, 2003). Sea el vector aleatorio $\mathbf{X} \sim \text{SN}_p(\mathbf{0}_p, \mathbf{I}_p, \mathbf{a})$ y la variable aleatoria $W \sim \chi_\nu^2$, ambas independientes. Entonces la distribución conjunta de $X_j/\sqrt{W/\nu}$ para $j = 1, \dots, p$ es definida como una distribución Skew t_ν multivariada. Al igual que la distribución Skew Normal, los dos primeros momentos tienen la presencia del parámetro molesto \mathbf{a} , por tanto también es necesario una adaptación para ser usada como una distribución extendida de \mathbf{Z}_i .

- (iii) Considerar otras distribuciones propuestas por Lange y Sinsheimer (1993) como alternativa robusta a la distribución Normal multivariada. Las posibles alternativas se originan en la distribución Normal/Independiente definida a continuación.

Considere una variable aleatoria positiva U y vector aleatorio \mathbf{Z} de dimensión k con media $\mathbf{0}_k$ y matriz de covarianza $\boldsymbol{\Omega}$. Si $\boldsymbol{\mu}$ es un vector constante, entonces $\mathbf{Y} = \boldsymbol{\mu} + U^{-1/2}\mathbf{Z}$ se dice Normal/Independiente. En otras palabras, \mathbf{Y} tiene distribución Normal/Independiente si la distribución condicional de \mathbf{Y} dado $U = u$ es normal multivariada con media $\boldsymbol{\mu}$ y matriz de covarianza $u^{-1}\boldsymbol{\Omega}$.

Dependiendo de la elección de U se tiene una variedad de distribuciones. Por ejemplo, al elegir $U \sim \chi_\nu^2/\nu$ con $\nu > 0$ se obtiene la distribución t_ν -multivariada. Recordar que en el Capítulo 3 se desarrollaron las medidas de acuerdo bajo dicha distribución.

- *Slash*. Si $U \sim \text{Beta}(\nu, 1)$ entonces se obtiene la distribución Slash. La densidad de la Slash esta dada por la integral

$$\frac{\nu}{(2\pi)^{k/2}|\boldsymbol{\Omega}|^{1/2}} \int_0^1 u^{(k/2)+\nu-1} e^{-u\delta^2/2} du,$$

donde $\delta^2 = (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Omega}^{-1}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})$.

- *Normal Contaminada*. Si la variable U esta concentrada en dos puntos $\lambda < 1$ y 1 con densidad puntual de ϕ y $1 - \phi$ se obtiene la distribución Normal Contaminada. La densidad de Y está dada por la mezcla

$$\frac{1}{(2\pi)^{k/2}|\boldsymbol{\Omega}|^{1/2}} \left(\phi \lambda^{k/2} e^{-\lambda\delta^2/2} + (1 - \phi) e^{-\delta^2/2} \right)$$

- *Exponencial-Potencia*. Esta distribución no es construida a partir de U a diferencia de las propuestas anteriores, sin embargo es posible probar que pertenece al tipo Normal/Independiente. La densidad de la Exponencial-Potencia toma la forma de

$$\frac{\nu \Gamma(k/2)}{2^{(k/\nu)+1} \pi^{k/2} \Gamma(k/\nu) |\mathbf{\Omega}|^{1/2}} e^{-\delta^\nu/2}$$

Desde las propiedades de la Normal/Independiente se tiene que $\mathbf{E}(\mathbf{Y}) = \boldsymbol{\mu}$ y $\text{cov}(\mathbf{Y}) = \mathbf{E}(U^{-1})\mathbf{\Omega}$ si es que ambos momentos existen. Por tanto, nuevamente una adaptación es necesaria.

- (iv) Permitir los valores de $\eta > 1/2$ en el modelo estructural t_η multivariado realizando las modificaciones necesarias en la modificación de la distribución t_ν hacia una distribución t_η usando la transformación $Y \rightarrow Y/\sqrt{|1 - 2\eta|}$ con $\eta \neq 1/2$. De este modo se acepta, por ejemplo, una distribución Cauchy Multivariada cuando $\eta = 1$, pero se pierden los dos primeros momentos.
- (v) Explorar bajo el enfoque de Modelos con Error de Medición la medida de acuerdo *Total Deviation Index*, *TDI* propuesta por Lin (2000).

El *TDI* se define para un nivel de acuerdo o de cobertura. Sea un nivel de acuerdo $1 - \alpha$, se define el *TDI* como la discrepancia c donde la Probabilidad de Acuerdo $P(|X - Y| < c)$ encuentra la cobertura de $1 - \alpha$.

- (vi) Explorar como medida de acuerdo relativa la expresión propuesta por Anderson y Hauck (1983, 1990)

$$P\left(1 - r \leq \frac{Y}{X} \leq 1 + r\right),$$

donde X sería el instrumento de referencia, Y el instrumento alternativo y r la tolerancia relativa entre ambos instrumentos.

- (vii) Bajo el modelo lineal de efectos mixtos normal desarrollado en Choudhary y Nagaraja (2017), analizar las medidas de acuerdo con otros supuestos distribucionales. Este modelo, también conocido como Modelo de Grubbs, se supone que cada instrumento esta calibrado, o sea $\beta_j = 1$, y se suponen un efecto fijo α_j y otro aleatorio x_i dependiendo de cada sujeto.
- (viii) Estudiar transformaciones sobre las Medidas de Acuerdo. Por ejemplo, usar $\tanh^{-1}(\cdot)$ sobre *CCC* tal como propone Lin (1989) para obtener una mejor normalidad asintótica. Para el caso de la *PA* se propone usar $\text{logit}(\cdot)$.

4.3. Conclusiones finales

En este trabajo se desarrollaron herramientas de inferencia estadística para las medidas de acuerdo *CCC* y *PA* considerando error de medición en los instrumentos. El modelo propuesto consistió en un Modelo con Error de Medición (*MEM*) en su forma estructural desarrollado bajo la distribución Normal Multivariada y la t Multivariada.

Al emplear los *MEM* se profundiza en los trabajos de diagnóstico realizados por Leal (2016); Leal *et al.* (2019) en las medidas de acuerdo *CCC* y *PA* en instrumentos sin considerar error de medición.

Datos atípicos y colas pesadas en los datos son características que son difíciles de modelar con la distribución Normal. Para incorporar estas características se extendió el modelo a la distribución *t* Multivariada. Esta extensión permitió evaluar la concordancia en instrumentos de origen financiero los que generalmente tienen las características antes mencionadas.

Así es extendido el diseño original del *CCC* propuesto por Lin (1989), basado en la normal bivariada sin error de medición y también el diseño de la *PA* propuesto por Stevens *et al.* (2017) consistente en un diseño con errores de medición bajo la distribución normal multivariada y réplicas en las unidades experimentales.

Desde el enfoque clásico se obtuvieron estimadores Máximo Verosímiles de los parámetros del *MEM* estructural. En este sentido, se obtuvo expresiones para el Score, la Matriz de Información de Fisher y algunos test de interés.

Un estudio de simulación mostró como el test de Wald tiene más bajo desempeño que los tests Score, Gradiente y *LRT*, ya que necesitó más datos para lograr la significancia esperada. Este estudio, mostró como el modelo Normal empeora su desempeño en conjuntos de datos con colas pesadas o en escenarios de falta de especificación. Esto dio paso a incorporar a la distribución *t* como una opción de mejora del modelo.

También, se evaluó como al contaminar un conjunto de datos solo en el modelo bajo la distribución *t* fue capaz de reconocer la contaminación y así estimar los parámetros más cercanos a los datos originales.

En el modelo estructural *t* multivariante se recurrió al algoritmo *EM* para estimar los parámetros del modelo aprovechando los resultados obtenidos bajo la distribución normal. Estos estimadores fueron utilizados para evaluar el acuerdo entre instrumentos. Aprovechando las propiedades de los *EMV* se logró obtener estimaciones puntuales, intervalos de confianza y cotas inferiores para las medidas de acuerdo usando métodos empíricos como asintóticos.

Al desarrollar el enfoque clásico de estadística este trabajo complementa el enfoque Bayesiano desarrollado por Vidal y de Castro (2017) y de Castro y Galea (2021) para el *CCC* y la *PA*.

El modelo propuesto permitió evaluar gráficamente los datos considerados como atípicos y su bondad de ajuste. Esto gracias a la forma cerrada de la distribución de las distancias de Mahalanobis tanto en la distribución Normal como en la *t* Multivariante.

La implementación de las rutinas de estimación y las gráficas fueron empaquetadas bajo el paquete R *mvstruct*, disponible a solicitud de los autores cuya aplicación se muestran en el Apéndice C.

En el área de comparación de instrumentos, este trabajo es un aporte al proveer herramientas estadísticas que permiten incorporar el error de medición, ajuste robusto ante datos atípicos o la capacidad de modelar datos de colas pesadas, en la medición en medidas de acuerdo *CCC* y *PA*. Estas herramientas pueden considerarse como extensiones naturales de los trabajos originales de Lin (1989), Barnhart *et al.* (2007) y Stevens *et al.* (2017).

Algunas mejoras al modelo puede motivar el interés para futuras investigaciones. Por ejemplo, incorporar heterocedasticidad en los instrumentos, extender a distribuciones multivariadas asimétricas, relajar la condición de primer y segundo momento finitos, aplicar a otras medidas de acuerdo y extender la metodología al modelo de Grubbs.

Apéndice A

Distribuciones y propiedades utilizadas

A.1. Distribuciones de probabilidad

En esta sección se definirá las distribuciones de probabilidad utilizadas y algunas de sus propiedades.

A.1.1. Distribución gamma

Una variable aleatoria U tiene una distribución gamma, $U \sim \Gamma(a, b)$, si su función de densidad de probabilidad es

$$f(u) = \frac{b^a u^{a-1} \exp(-bu)}{\Gamma(a)}, \quad u > 0, a > 0, b > 0.$$

Los primeros momentos son:

$$E(U) = a/b, \quad \text{var}(U) = a/b^2 \quad \text{y} \quad E(\log(U)) = \phi(a) - \log(b),$$

donde $\psi(u) = d \log(\Gamma(u))/du$ es la función digamma.

A.1.2. Distribución Normal Multivariada

Sea $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_r)^T$ un vector aleatorio r variado que distribuye Normal Multivariado $\mathbf{Z} \sim N_r(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ tiene *f.d.p* como

$$f(\mathbf{z}) = (2\pi)^{-r/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} \exp -\frac{1}{2}(\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})$$

Si \mathbf{a} es un vector columna $q \times 1$ y \mathbf{B} una matriz $q \times r$ entonces $\mathbf{Z}^* = \mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{Z}$ tiene distribución Normal Multivariada $\mathbf{Z}^* \sim N_q(\mathbf{a} + \mathbf{B}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}^T)$.

En Magnus y Neudecker (2007, sec. 15.6) se encuentra la matriz de información para la distribución normal multivariada.

Teorema 2 (Matriz de información en la distribución normal multivariada). Sean los vectores aleatorios $\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_n$ de dimensión $r \times 1$ *i.i.d* tal que

$$\mathbf{Z}_i \sim \mathbf{N}_r(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \quad (i = 1, \dots, n),$$

donde $\boldsymbol{\Sigma}$ es definida positiva y sea $n \geq r + 1$. La matriz de información para $\boldsymbol{\mu}$ y $\text{vech}(\boldsymbol{\Sigma})$ es la matriz de dimensión $\frac{1}{2}r(r+3) \times \frac{1}{2}r(r+3)$

$$\mathcal{F}_n = n \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{2} \mathbf{D}_r^T (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) \mathbf{D}_r \end{pmatrix}.$$

Donde \mathbf{D}_r es la matriz de duplicación y $\text{vech}(\cdot)$ vectoriza una matriz simétrica eliminando los elementos supradiagonales. Para propiedades de la matriz de duplicación y $\text{vech}(\cdot)$ ver Magnus y Neudecker (2007, sec. 3.8).

A.2. Resultados de matrices

A.2.1. Matriz inversa de formas especiales

Teorema 3 (Teorema 8.3.3 en Graybill (1983)). Sea la matriz \mathbf{C} de $k \times k$ dada por

$$\mathbf{C} = \mathbf{D} + \alpha \mathbf{a} \mathbf{b}^T$$

donde \mathbf{D} es una matriz diagonal no-singular, \mathbf{a} y \mathbf{b} son vectores $k \times 1$ y α es un escalar tal que

$$\alpha \neq - \left[\sum_{i=1}^k a_i b_i / d_{ii} \right]^{-1}.$$

La inversa de \mathbf{C} es

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{D}^{-1} + \gamma \mathbf{a}^* \mathbf{b}^{*T}$$

donde $\gamma = -\alpha(1 + \alpha \sum_{i=1}^k a_i b_i d_{ii}^{-1})^{-1}$; $a_i^* = a_i / d_{ii}$; $b_i^* = b_i / d_{ii}$ y d_{ii} es la i -ésimo elemento diagonal de \mathbf{D} .

Teorema 4 (Teorema 8.4.3 en Graybill (1983)). El determinante de la matriz \mathbf{C} dada en el teorema anterior es igual a

$$|\mathbf{C}| = \alpha \left[a_1 b_1 \prod_{i \neq 1} d_{ii} + a_2 b_2 \prod_{i \neq 2} d_{ii} + \dots + a_k b_k \prod_{i \neq k} d_{ii} \right] + \prod d_{ii}$$

y también puede escribirse como

$$|\mathbf{C}| = \left[1 + \alpha \sum_j \frac{a_j b_j}{d_{jj}} \right] \prod_i d_{ii}$$

A.2.2. Matriz inversa y determinante de V

Sea la matriz

$$\mathbf{V} = \phi_x \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}^T + \phi \mathbf{I}_r = \phi_x \mathbf{b} \mathbf{b}^T + \phi \mathbf{I}_r,$$

entonces la inversa de \mathbf{V} esta dada por

$$\mathbf{V}^{-1} = \frac{1}{\phi} \left(\mathbf{I}_r - \frac{\phi_x}{\phi + \phi_x c} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \right) = \frac{1}{\phi} (\mathbf{I}_r - \gamma \mathbf{b} \mathbf{b}^T),$$

donde $c = \mathbf{b}^T \mathbf{b}$. La derivación sigue de aplicar el Teorema 8.3.3 en Graybill (1983).

El determinante de \mathbf{V} esta dado por

$$\begin{aligned} |\mathbf{V}| &= |\phi_x \mathbf{b} \mathbf{b}^T + \phi \mathbf{I}_r| \\ &= \phi^r \left[1 + \frac{\phi_x}{\phi} \mathbf{b}^T \mathbf{b} \right] \\ &= \phi^p (\phi_x c + \phi) \end{aligned}$$

donde $c = \mathbf{b}^T \mathbf{b}$. La derivación sigue de aplicar el Teorema 8.4.3 en Graybill (1983).

A.3. Derivadas

A.3.1. Score del modelo normal

Sea la función de log-verosimilitud $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_i(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathcal{L}_i(\boldsymbol{\theta}) &= -\frac{r}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log |\mathbf{V}| - \frac{1}{2} \delta_i \\ \delta_i &= \frac{1}{\phi} \{ \delta_{i1} - \gamma \delta_{i2}^2 \} \\ \delta_{i1} &= (X_i - \mu_x)^2 + (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} \mu_x)^T (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} \mu_x) \\ \delta_{i2} &= (X_i - \mu_x) + (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} \mu_x)^T \boldsymbol{\beta}, \end{aligned}$$

donde

$$\gamma = \frac{\phi_x}{\phi_x c + \phi}, \quad c = \mathbf{b}^T \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}.$$

Apéndice A. Distribuciones y propiedades utilizadas

La función de Score esta dada por

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \mathcal{S}_i(\boldsymbol{\theta})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = (S_{i\mu_x}, S_{i\alpha}, S_{i\beta}, S_{i\phi_x}, S_{i\phi})^T$$

Desarrollamos algunas derivadas de utilidad

$$\frac{\partial \delta_{i1}}{\partial \mu_x} = -2(X_i - \mu_x) - 2(\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}\mu_x)^T \boldsymbol{\beta} = -2\delta_{i2}$$

$$\frac{\partial \delta_{i2}}{\partial \mu_x} = -1 - \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\beta} = -\mathbf{b}^T \mathbf{b} = -c$$

$$\frac{\partial \delta_{i1}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = -2(\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}\mu_x)$$

$$\frac{\partial \delta_{i2}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = -\boldsymbol{\beta}$$

$$\frac{\partial c}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} (1 + \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\beta}) = 2\boldsymbol{\beta}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial c} = \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{\phi_x}{\phi_x c + \phi} \right) = \frac{-\phi_x^2}{(\phi_x c + \phi)^2} = -\gamma^2$$

$$\frac{\partial \log |V|}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} \log(\phi_x c + \phi) = \frac{\phi_x}{\phi_x c + \phi} \left(\frac{\partial c}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right) = 2\gamma \boldsymbol{\beta}$$

$$\frac{\partial \delta_{i1}}{\partial \boldsymbol{\beta}} = -2\mu_x (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}\mu_x)$$

$$\frac{\partial \delta_{i2}}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\alpha} - 2\boldsymbol{\beta}\mu_x$$

$$\frac{\partial \log |\mathbf{V}|}{\partial \phi_x} = \frac{c}{\phi_x c + \phi}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \phi_x} = \frac{\phi}{(\phi_x c + \phi)^2}$$

$$\frac{\partial \log |\mathbf{V}|}{\partial \phi} = \frac{p}{\phi} + \frac{1}{\phi_x c + \phi}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \phi} = \frac{-\phi_x}{(\phi_x c + \phi)^2}$$

$$\begin{aligned}
 S_{i\mu_x} &= \frac{\partial \mathcal{L}_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mu_x} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \delta_i}{\delta \mu_x} \\
 &= -\frac{1}{2\phi} \left(\frac{\partial \delta_{i1}}{\partial \mu_x} - 2\gamma \delta_{i2} \frac{\partial \delta_{i2}}{\partial \mu_x} \right) \\
 &= \frac{\delta_{i2}}{\phi + c\phi_x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{i\alpha} &= \frac{\partial \mathcal{L}_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \delta_i}{\delta \alpha} \\
 &= -\frac{1}{2\phi} \left(\frac{\partial \delta_{i1}}{\partial \alpha} - 2\gamma \delta_{i2} \frac{\partial \delta_{i2}}{\partial \alpha} \right) \\
 &= \frac{1}{\phi} ((\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}\mu_x) - \gamma\delta_{i2}\boldsymbol{\beta})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{i\boldsymbol{\beta}} &= \frac{\partial \mathcal{L}_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \log |V|}{\partial \boldsymbol{\beta}} - \frac{1}{2} \frac{\partial \delta_i}{\partial \boldsymbol{\beta}} \\
 &= -\gamma\boldsymbol{\beta} - \frac{1}{2\phi} \left(\frac{\partial \delta_{i1}}{\partial \boldsymbol{\beta}} - \delta_{i2}^2 \frac{\partial \gamma}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial \boldsymbol{\beta}} - 2\gamma\delta_{i2} \frac{\partial \delta_{i2}}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right) \\
 &= -\gamma\boldsymbol{\beta} + \frac{1}{\phi} (\mu_x (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}\mu_x) - \gamma^2 \delta_{i2}^2 \boldsymbol{\beta} + \gamma\delta_{i2} (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\alpha} - 2\boldsymbol{\beta}\mu_x)) \\
 &= -\gamma\boldsymbol{\beta} + \frac{1}{\phi} (\gamma\delta_{i2} - \mu_x) ((\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}\mu_x) - \gamma\delta_{i2}\boldsymbol{\beta}) \\
 &= -\gamma\boldsymbol{\beta} + (\gamma\delta_{i2} + \mu_x) S_{i\alpha}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{i\phi_x} &= \frac{\partial \mathcal{L}_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \phi_x} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \log |V|}{\partial \phi_x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \delta_i}{\partial \phi_x} \\
 &= -\frac{c}{2(\phi_x c + \phi)} + \frac{\delta_{i2}^2}{2\phi} \frac{\partial \gamma}{\partial \phi_x} \\
 &= -\frac{c}{2(\phi_x c + \phi)} + \frac{\delta_{i2}^2}{2(\phi_x c + \phi)^2} \\
 &= -\frac{1}{2} (\phi_x c + \phi)^{-1} \left(c - \frac{\delta_{i2}^2}{\phi_x c + \phi} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{i\phi} &= \frac{\partial \mathcal{L}_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \phi} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \log |V|}{\partial \phi} - \frac{1}{2} \frac{\partial \delta_i}{\partial \phi} \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{p}{\phi} + \frac{1}{\phi_x c + \phi} - \frac{1}{\phi^2} (\delta_{i1} - \gamma \delta_{i2}^2) - \frac{\delta_{i2}^2}{\phi} \frac{\partial \gamma}{\partial \phi} \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{p}{\phi} + \frac{1}{\phi_x c + \phi} + \frac{1}{\phi} \left(\frac{\gamma \delta_{i2}^2}{\phi_x c + \phi} - \delta_i \right) \right)
 \end{aligned}$$

A.4. Score del modelo t_η

Sea la función de log-verosimilitud $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})$.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_i(\boldsymbol{\theta}) \\
 \mathcal{L}_i(\boldsymbol{\theta}) &= \log k_r(\eta) - \frac{1}{2} \log |\mathbf{V}| - \frac{1 + \eta r}{2\eta} \log (1 + c(\eta) \delta_i) \\
 \delta_i &= \frac{1}{\phi} (\delta_{i1} - \gamma \delta_{i2}^2) \\
 \delta_{i1} &= (\mathbf{Z}_i - \boldsymbol{\mu})^T (\mathbf{Z}_i - \boldsymbol{\mu}) \\
 \delta_{i2} &= \mathbf{b}^T (\mathbf{Z}_i - \boldsymbol{\mu}),
 \end{aligned}$$

donde

$$k_r(\eta) = \left(\frac{c(\eta)}{\pi} \right)^{r/2} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\eta r}{2\eta}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2\eta}\right)}, \quad c(\eta) = \frac{\eta}{1-2\eta}, \quad \gamma = \frac{\phi_x}{\phi_x c + \phi}, \quad c = \mathbf{b}^T \mathbf{b} = 1 + \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\beta}$$

Una relación de utilidad

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{z}_i - \boldsymbol{\mu}) &= \mathbf{b}^T \left(\frac{1}{\phi} (\mathbf{I}_r - \gamma \mathbf{b} \mathbf{b}^T) \right) (\mathbf{z}_i - \boldsymbol{\mu}) \\
 &= \frac{1}{\phi} (\mathbf{b}^T - \gamma \mathbf{b}^T (\mathbf{b} \mathbf{b}^T)) (\mathbf{z}_i - \boldsymbol{\mu}) \\
 &= \frac{1}{\phi} (1 - \gamma c) \mathbf{b}^T (\mathbf{z}_i - \boldsymbol{\mu}) \\
 &= \frac{1}{\phi} (1 - \gamma c) \delta_{i2}
 \end{aligned}$$

Algunas derivadas de utilidad

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \eta} \log k_p(\eta) &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{r}{2} \log c(\eta) - \frac{r}{2} \log(\pi) + \log \Gamma \left(\frac{1 + \eta r}{2\eta} \right) - \log \Gamma \left(\frac{1}{2\eta} \right) \right) \\
 &= \frac{r}{2} \frac{1}{c(\eta)} \frac{\partial c(\eta)}{\partial \eta} + \psi \left(\frac{1 + \eta r}{2\eta} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1 + \eta r}{2\eta} \right) + \\
 &\quad + \psi \left(\frac{1}{2\eta} \right) \left(\frac{1}{2\eta^2} \right) \\
 &= \frac{r c(\eta)}{2\eta^2} + \psi \left(\frac{1 + \eta r}{2\eta} \right) \left(-\frac{1}{2\eta^2} \right) + \psi \left(\frac{1}{2\eta} \right) \left(\frac{1}{2\eta^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2\eta^2} \left(r c(\eta) - \psi \left(\frac{1 + \eta r}{2\eta} \right) + \psi \left(\frac{1}{2\eta} \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{i \mu_x} &= \frac{\partial \mathcal{L}_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mu_x} = -\frac{1 + \eta r}{2\eta} \frac{c(\eta)}{(1 + c(\eta)\delta_i)} \frac{\partial \delta_i}{\partial \mu_x} \\
 &= -\frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{1 + \eta r}{\eta} \right) \left(\frac{c(\eta)}{(1 + c(\eta)\delta_i)} \right)}_{\omega_i} \frac{1}{\phi} \left(\frac{\partial \delta_{i1}}{\partial \mu_x} - 2\gamma \delta_{i12} \frac{\partial \delta_{i12}}{\partial \mu_x} \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \omega_i \frac{1}{\phi} (-2\delta_{i2} - 2\gamma \delta_{i2} (-c)) \\
 &= \omega_i \frac{1}{\phi} (1 - \gamma c) \delta_{i2} \\
 &= \omega_i \mathbf{b}^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{Z}_i - \boldsymbol{\mu})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{i \boldsymbol{\alpha}} &= \frac{\partial \mathcal{L}_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = -\frac{1 + \eta r}{2\eta} \frac{c(\eta)}{(1 + c(\eta)\delta_i)} \frac{\partial \delta_i}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \\
 &= -\frac{1}{2} \omega_i \frac{1}{\phi} \left(\frac{\partial \delta_{i1}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} - 2\gamma \delta_{i12} \frac{\partial \delta_{i12}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \omega_i \frac{1}{\phi} (-2(\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} \mu_x) - 2\gamma \delta_{i2} (-\boldsymbol{\beta})) \\
 &= \omega_i \frac{1}{\phi} [(0 \ \mathbf{I}_p) (\mathbf{Z}_i - \boldsymbol{\mu}) - \gamma (0 \ \mathbf{I}_p) \mathbf{b} \mathbf{b}^T (\mathbf{Z}_i - \boldsymbol{\mu})] \\
 &= \omega_i (0 \ \mathbf{I}_p) \underbrace{\frac{1}{\phi} (\mathbf{I}_r - \gamma \mathbf{b} \mathbf{b}^T)}_{\mathbf{V}^{-1}} (\mathbf{Z}_i - \boldsymbol{\mu}_i) \\
 &= \omega_i (0 \ \mathbf{I}_p) \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{Z}_i - \boldsymbol{\mu}_i)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{i\beta} &= \frac{\partial \mathcal{L}_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \log |V|}{\partial \boldsymbol{\beta}} - \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{1 + \eta r}{\eta} \right) \left(\frac{c(\eta)}{1 + c(\eta)\delta_i} \right)}_{\omega_i} \frac{\partial \delta_i}{\partial \boldsymbol{\beta}} \\
&= -\gamma \boldsymbol{\beta} - \frac{1}{2} \omega_i \frac{1}{\phi} \left(\frac{\partial \delta_{i1}}{\partial \boldsymbol{\beta}} - \delta_{i2}^2 \frac{\partial \gamma}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial \boldsymbol{\beta}} - 2\gamma \delta_{i2} \frac{\partial \delta_{i2}}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right) \\
&= -\gamma \boldsymbol{\beta} - \frac{1}{2} \omega_i \frac{1}{\phi} \left(-2\mu_x (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} \mu_x) - \delta_{i2}^2 (-\gamma^2) (2\boldsymbol{\beta}) - 2\gamma \delta_{i2} (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\alpha} - 2\boldsymbol{\beta} \mu_x) \right) \\
&= -\gamma \boldsymbol{\beta} + \omega_i \frac{1}{\phi} \left\{ \mu_x \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_p \end{pmatrix} (\mathbf{Z}_i - \boldsymbol{\mu}) - \gamma^2 \delta_{i2}^2 \boldsymbol{\beta} + \gamma \delta_{i2} \left[\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_p \end{pmatrix} (\mathbf{Z}_i - \boldsymbol{\mu}) - \mu_x \boldsymbol{\beta} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{i\phi_x} &= \frac{\partial \mathcal{L}_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \phi_x} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \log |V|}{\partial \phi_x} - \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{1 + \eta r}{\eta} \right) \left(\frac{c(\eta)}{1 + c(\eta)\delta_i} \right)}_{\omega_i} \frac{\partial \delta_i}{\partial \phi_x} \\
&= -\frac{1}{2} \frac{c}{\phi_x c + \phi} + \frac{1}{2} \omega_i \frac{\delta_{i2}^2}{\phi} \frac{\partial \gamma}{\partial \phi_x} \\
&= -\frac{1}{2} \frac{c}{\phi_x c + \phi} + \frac{1}{2} \omega_i \frac{\delta_{i2}^2}{\phi} \frac{\phi}{(\phi_x c + \phi)^2} \\
&= \frac{1}{2} (\phi_x c + \phi)^{-1} \left\{ \omega_i \frac{\delta_{i2}^2}{\phi_x c + \phi} - c \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{i\phi} &= \frac{\partial \mathcal{L}_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \phi} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \log |V|}{\partial \phi} - \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{1 + \eta r}{\eta} \right) \left(\frac{c(\eta)}{1 + c(\eta)\delta_i} \right)}_{\omega_i} \frac{\partial \delta_i}{\partial \phi} \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{p}{\phi} + \frac{1}{\phi_x c + \phi} \right) - \frac{1}{2} \omega_i \left(-\frac{1}{\phi^2} (\delta_{i1} - \gamma \delta_{i2}^2) - \frac{\delta_{i2}^2}{\phi} \frac{\partial \gamma}{\partial \phi} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{p}{\phi} + \frac{1}{\phi_x c + \phi} \right) - \frac{1}{2} \omega_i \left(-\frac{1}{\phi} \delta_i - \frac{\delta_{i2}^2}{\phi} \left(\frac{-\phi_x}{(\phi_x c + \phi)^2} \right) \right) \\
&= -\frac{1}{2\phi} \left\{ \underbrace{p + \frac{\phi}{\phi_x c + \phi}}_{c p \gamma + \frac{r\phi}{\phi_x c + \phi}} + \omega_i \left[-\delta_i + \frac{\delta_{i2}^2 \gamma}{\phi_x c + \phi} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{i\eta} &= \frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \log k_p(\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1 + \eta r}{2\eta} \log(1 + c(\eta)\delta_i) \right) \\
 &= \frac{1}{2\eta^2} \left(r c(\eta) - \psi \left(\frac{1 + \eta r}{2\eta} \right) + \psi \left(\frac{1}{2\eta} \right) \right) \\
 &\quad - \left(-\frac{1}{2\eta^2} \right) \log(1 + c(\eta)\delta_i) - \left(\frac{1 + \eta r}{2\eta} \right) \left(\frac{1}{1 + c(\eta)\delta_i} \right) \left(\delta_i \frac{c(\eta)^2}{\eta^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2\eta^2} \left(r c(\eta) - \underbrace{\psi \left(\frac{1 + \eta r}{2\eta} \right) + \psi \left(\frac{1}{2\eta} \right)}_{-\beta(\eta)} + \right. \\
 &\quad \left. \log(1 + c(\eta)\delta_i) - \underbrace{\left(\frac{1 + \eta r}{\eta} \right) \left(\frac{c(\eta)}{1 + c(\eta)\delta_i} \right)}_{\omega_i} \delta_i c(\eta) \right) \\
 &= \frac{1}{2\eta^2} \left(r c(\eta) - \beta(\eta) - \omega_i c(\eta) \delta_i + \log(1 + c(\eta)\delta_i) \right)
 \end{aligned}$$

A.5. Distribución Condicional de $\mathbf{Z} \mid x, u$

Lema 3. Sea $\mathbf{Z} \mid x, u \sim N_r(\mathbf{a} + \mathbf{b}x, u^{-1}\phi\mathbf{I}_r)$, $\mathbf{Z} \mid u \sim N_r(\mathbf{a} + \mathbf{b}\mu_x, u^{-1}\mathbf{V})$ y $x \mid u \sim N(\mu_x, u^{-1}\phi_x)$, entonces

$$x \mid \mathbf{z}, u \sim N(\mu_x + \gamma \mathbf{b}^T(\mathbf{z} - \mathbf{a} - \mathbf{b}\mu_x), u^{-1}\phi\gamma), \quad \text{donde} \quad \gamma = \frac{\phi_x}{\phi_x c + \phi} \quad \text{y} \quad c = \mathbf{b}^T \mathbf{b}.$$

Si $f(\cdot)$ denota la *f.d.p.*, el resultado sigue de la relación

$$\begin{aligned} f(x \mid \mathbf{z}, u) &\propto f(\mathbf{z} \mid x, u) f(x \mid u) \\ &\propto \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{z} - \{\mathbf{a} + \mathbf{b}x\})^T (u^{-1}\phi\mathbf{I}_r)^{-1}(\mathbf{z} - \{\mathbf{a} + \mathbf{b}x\})\right) \exp\left(-\frac{(x - \mu_x)^2}{2u^{-1}\phi_x}\right) \\ &\propto \exp\left(-\frac{1}{2u^{-1}\phi\phi_x} \left\{ \phi_x(\mathbf{z} - \mathbf{a} - \mathbf{b}x)^T(\mathbf{z} - \mathbf{a} - \mathbf{b}x) + \phi(x - \mu_x)^2 \right\}\right) \\ &\propto \exp\left(-\frac{1}{2u^{-1}\phi\phi_x} \left\{ \phi_x(\mathbf{z} - \mathbf{a})^T(\mathbf{z} - \mathbf{a}) + \phi_x \mathbf{b}^T \mathbf{b} x^2 - 2\phi_x(\mathbf{z} - \mathbf{a})^T \mathbf{b} x + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \phi x^2 - 2\phi\mu_x x + \phi\mu_x^2 \right\}\right) \\ &\propto \exp\left(-\frac{1}{2u^{-1}\phi\phi_x} \left\{ [\phi_x \mathbf{b}^T \mathbf{b} + \phi] x^2 - 2[\phi_x(\mathbf{z} - \mathbf{a})^T \mathbf{b} + \phi\mu_x] x + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + [\phi\mu_x^2 + \phi_x(\mathbf{z} - \mathbf{a})^T(\mathbf{z} - \mathbf{a})] \right\}\right) \\ &\propto \exp\left(-\frac{\phi_x \mathbf{b}^T \mathbf{b} + \phi}{2u^{-1}\phi\phi_x} \left\{ x^2 - 2\frac{\phi_x(\mathbf{z} - \mathbf{a})^T \mathbf{b} + \phi\mu_x}{\phi_x \mathbf{b}^T \mathbf{b} + \phi} x + \frac{\phi\mu_x^2 + \phi_x(\mathbf{z} - \mathbf{a})^T(\mathbf{z} - \mathbf{a})}{\phi_x \mathbf{b}^T \mathbf{b} + \phi} \right\}\right) \end{aligned}$$

$$\gamma = \phi_x / (\phi_x c + \phi), \quad c = \mathbf{b}^T \mathbf{b}$$

$$\begin{aligned} &\propto \exp\left(-\frac{1}{2u^{-1}\phi\gamma} \left\{ x^2 - 2 \underbrace{\gamma[(\mathbf{z} - \mathbf{a})^T \mathbf{b} + \frac{\phi\mu_x}{\phi_x}]}_{\mu_x + \gamma \mathbf{b}^T(\mathbf{z} - \mathbf{a} - \mathbf{b}\mu_x)} x + \frac{\phi\gamma\mu_x^2}{\phi_x} + \gamma(\mathbf{z} - \mathbf{a})^T(\mathbf{z} - \mathbf{a}) \right\}\right) \\ &\propto \exp\left(-\frac{1}{2u^{-1}\phi\gamma} \left\{ x - [\mu_x + \gamma \mathbf{b}^T(\mathbf{z} - \mathbf{a} - \mathbf{b}\mu_x)] \right\}^2\right) \end{aligned}$$

se tiene

$$x \mid \mathbf{z}, u \sim N(\mu_x + \gamma \mathbf{b}^T(\mathbf{z} - \mathbf{a} - \mathbf{b}\mu_x), u^{-1}\phi\gamma)$$

Apéndice B

Estudio de simulación

Este apéndice presenta detalles de los resultados presentados en la sección 2.6.

B.1. Nivel de significancia empírico para la hipótesis $H_0 : \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}_p, \boldsymbol{\beta} = \mathbf{1}_p$

El objetivo del estudio de simulación es determinar empíricamente la inferencia para la hipótesis $H_0 : \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}_p, \boldsymbol{\beta} = \mathbf{1}_p$ en un contexto de falta de especificidad y así determinar empíricamente el nivel de significancia de los cuatro test propuestos: LRT, Wald, Score y Gradiente.

Tres escenarios son propuestos para la variable latente X_i

- $X_i \sim N(\mu = 0, \sigma = 1)$
- $X_i \sim t_\eta(\mu = 0, \sigma = 1, \eta = 0.25)$
- $X_i \sim SN(\mu = 0, \sigma = 1, \text{asimetría} = 0.7)$

Las muestras Skew Normal fueron generadas usando el paquete estadístico `sn` (Azzalini, 2020), con parametrización $SkewNormal(\chi = -1.18, \omega = 1.54, \alpha = 3.22)$ lo que permite una media cero, varianza uno y asimetría 0.7 .

Las simulaciones son jerárquicas, es decir, inicialmente se simulan muestras $X_i = x_i$ para luego generar las muestras $Y_{ij} = \alpha_j + \beta_j x_i + \epsilon_{ij}$ para $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, p$, donde $\boldsymbol{\epsilon}_i = (\epsilon_{i1}, \dots, \epsilon_{ip})^T$ son simuladas desde $N_p(0, \phi \boldsymbol{\Sigma}_0)$ con $\boldsymbol{\Sigma}_0$ la matriz identidad. El vector $\boldsymbol{\epsilon}_i$ es considerado como error de medición de los instrumentos y ϕ la varianza de dicho error.

Las tablas B.1 a B.3 corresponden al nivel de significancia empírico de los tests LRT, Wald, Score y Gradiente para la hipótesis $H_0 : \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}_p, \boldsymbol{\beta} = \mathbf{1}_p$ al 5% de significancia. Las muestras x_i fueron generadas desde los tres escenarios propuestos anteriormente. Complementa el estudio la evaluación del error de medición considerando una varianza $\phi = 0.5, 1.0, 1.5$. Todos los resultados fueron obtenidos a partir de 10000 simulaciones.

A modo de resumen solamente son presentados los resultados del estudio de simulación para varianza del error de medición $\phi = 1$ desde el escenario Normal en la Tabla B.1, escenario t_η en la Tabla B.2 y escenario Skew Normal en la Tabla B.3. Los resultados indican que el test

Apéndice B. Estudio de simulación

de Wald empeora (o sea, se aleja del 5% esperado) a medida que x_i difiere de la distribución Normal. A medida que p crece es necesario aumentar la muestra n especialmente en el test de Wald. Los tests Gradiente, Score y LRT tiene buen comportamiento para la hipótesis H_0 cuando esta se relaciona a los parámetros de la media del modelo.

En la Tabla B.1, donde x_i corresponde a una Normal univariada, sería el caso más favorable para los cuatro test. En los test LRT, Score y Gradiente una regla empírica sería de $n \geq 10p$ para obtener la significancia esperada del 5%. El test de Wald es el más exigente en n para llegar al nivel de significancia esperado, el que lograría con $n \geq 1000$.

En la Tabla B.2 se presentan las significancias empíricas al usar t_η para generar las muestras de x_i . En este caso, al alejarse x_i de la normalidad todos los test empeoran. El test de Wald sería el más perjudicado ya que necesita más n para alcanzar la significancia esperada.

La asimetría de x_i también afecta al desempeño de los tests. Como se muestra en la Tabla B.3 se tiene que las significancias empíricas varían respecto al caso normal en la misma medida que lo hacen las colas pesadas.

Al reducir la varianza del error de medición ϕ a la mitad respecto a ϕ_x , el test de Wald mejora respecto al caso $\phi = 1$. Los demás tests alcanzan el nivel de significancia esperado con algunas variaciones (mejorando o empeorando) respecto al escenario de $\phi = 1$.

Al considerar la varianza del error de medición $\phi = 1.5$ y la varianza del instrumento de referencia $\phi_x = 1.0$ se tiene que los test empeoran al no alcanzar la significancia esperada, especialmente en los casos de $n = 50$ y $p = 20$ donde el Test de Wald es el más perjudicado. Para otras combinaciones de n alto respecto a p se logra la significancia esperada, pero serían casos de poco prácticos.

Tabla B.1: Nivel de significancia empírico de los tests LRT, Wald, Score y Gradiente para la hipótesis $H_0 : \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}_p, \boldsymbol{\beta} = \mathbf{1}_p$ al 5% de significancia. Las muestras x_i fueron generadas desde la distribución normal con $\mu_x = 0, \phi_x = 1$ y varianza del error de medición $\phi = 1$. Los resultados fueron obtenidos desde 10000 simulaciones.

		p						
		1	2	3	5	10	15	20
	n							
LRT	50	5.41	5.72	5.66	5.93	5.85	6.39	5.99
	100	5.19	5.41	5.52	5.52	4.78	5.50	5.50
	150	5.16	5.04	5.34	5.45	5.49	4.90	5.85
	200	4.98	5.46	5.26	5.30	5.18	4.88	5.12
	500	4.62	5.30	4.83	5.39	5.33	4.94	5.42
	1000	5.25	5.08	4.96	5.14	5.32	5.17	4.97
	5000	5.05	4.95	4.63	5.14	5.16	4.83	4.70
Wald	50	7.51	8.02	8.64	9.46	10.21	11.18	12.53
	100	6.20	6.49	6.95	7.20	7.20	8.36	9.10
	150	5.84	5.66	6.32	6.73	7.17	7.07	8.07
	200	5.72	5.91	5.93	6.42	6.50	6.35	7.24
	500	4.76	5.81	5.13	5.69	5.46	5.54	5.94
	1000	5.25	5.10	5.06	5.34	5.43	5.48	5.25
	5000	4.98	5.00	4.61	5.26	5.19	4.77	4.75
Score	50	4.55	4.72	4.60	4.76	4.71	4.77	4.41
	100	4.72	4.87	4.95	4.98	4.25	4.62	4.84
	150	4.84	4.67	4.95	5.06	4.94	4.53	5.15
	200	4.78	5.17	5.02	5.04	4.83	4.59	4.79
	500	4.55	5.24	4.78	5.25	5.20	4.84	5.32
	1000	5.18	4.99	4.92	5.12	5.27	5.11	4.93
	5000	5.05	4.96	4.62	5.13	5.15	4.79	4.68
Gradiente	50	4.80	5.59	5.65	5.74	6.05	6.88	6.59
	100	4.73	5.08	5.29	5.42	5.25	5.47	5.79
	150	4.90	5.11	5.16	5.60	5.42	5.22	5.83
	200	4.76	5.40	5.42	5.25	5.33	5.22	5.33
	500	4.63	5.30	4.81	5.42	5.21	4.97	5.50
	1000	5.12	5.04	4.98	5.04	5.29	5.20	4.98
	5000	5.01	5.05	4.70	5.15	5.15	4.94	4.82

Tabla B.2: Nivel de significancia empírico de los tests LRT, Wald, Score y Gradiente para la hipótesis $H_0 : \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}_p, \boldsymbol{\beta} = \mathbf{1}_p$ al 5% de significancia. Las muestras x_i fueron generadas desde la distribución t_η con $\mu_x = 0, \phi_x = 1, \eta = 0.25$. Varianza del error de medición $\phi = 1$. Los resultados fueron obtenidos desde 10000 simulaciones.

		p						
		1	2	3	5	10	15	20
	n							
LRT	50	5.76	5.67	5.94	5.80	5.88	5.96	6.30
	100	5.09	5.15	5.34	5.40	5.59	5.91	5.53
	150	5.34	5.20	5.62	5.76	5.51	5.34	5.23
	200	5.47	5.21	5.53	5.22	5.10	5.35	5.24
	500	4.87	5.45	5.06	5.16	4.89	5.05	5.00
	1000	4.80	5.19	4.79	4.90	5.42	5.13	4.76
	5000	5.19	4.99	4.82	4.99	4.83	5.21	5.55
Wald	50	7.72	8.44	9.31	9.73	10.07	12.33	13.38
	100	5.93	6.74	6.87	6.96	7.93	8.57	8.89
	150	5.84	5.79	6.51	6.77	6.94	7.17	7.88
	200	5.75	5.99	6.04	5.83	6.33	6.90	7.01
	500	4.99	5.44	5.49	5.40	5.33	5.69	6.05
	1000	4.79	5.40	5.06	5.14	5.85	5.54	5.27
	5000	5.13	4.88	4.94	5.01	4.78	5.23	5.59
Score	50	4.74	4.78	5.00	4.79	4.46	4.59	4.56
	100	4.62	4.61	4.74	4.89	4.78	5.17	4.62
	150	5.05	4.86	5.16	5.34	4.98	4.80	4.67
	200	5.14	4.91	5.11	4.98	4.92	5.06	4.84
	500	4.76	5.33	4.96	5.04	4.70	4.87	4.93
	1000	4.74	5.14	4.79	4.84	5.36	5.09	4.71
	5000	5.18	4.97	4.83	4.96	4.83	5.19	5.53
Gradiente	50	5.22	5.35	6.10	5.74	6.61	6.69	7.36
	100	4.61	4.88	5.17	5.65	5.80	6.29	6.14
	150	5.10	5.10	5.31	5.65	5.62	5.72	5.49
	200	5.27	5.20	5.22	5.42	5.19	5.52	5.24
	500	4.99	5.36	5.12	5.09	4.85	5.13	5.25
	1000	4.85	5.20	4.78	4.83	5.36	5.30	4.84
	5000	5.23	5.01	4.94	5.04	4.86	5.25	5.57

Tabla B.3: Nivel de significancia empírico de los tests LRT, Wald, Score y Gradiente para la hipótesis $H_0 : \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}_p, \boldsymbol{\beta} = \mathbf{1}_p$ al 5% de significancia. Las muestras x_i fueron generadas desde la distribución Skew Normal con media 0, varianza 1 y asimetría 0.70. Varianza del error de medición $\phi = 1$. Los resultados fueron obtenidos desde 10000 simulaciones.

		p							
		n	1	2	3	5	10	15	20
LRT	50	5.47	5.74	5.77	6.11	5.96	6.25	5.93	
	100	5.24	4.86	5.31	5.25	5.57	5.75	5.56	
	150	5.05	4.90	5.04	5.21	4.92	5.32	5.47	
	200	5.47	5.35	4.68	5.32	5.21	5.56	5.18	
	500	4.93	5.05	4.80	5.21	4.84	5.09	5.50	
	1000	5.00	5.09	4.77	5.15	4.92	4.99	5.09	
	5000	4.95	5.11	5.17	5.26	5.19	5.15	5.22	
Wald	50	7.36	8.38	8.36	9.71	10.97	11.85	12.79	
	100	6.01	5.84	6.50	7.21	8.15	8.45	9.18	
	150	5.64	5.98	6.09	6.59	6.62	7.24	7.62	
	200	5.79	5.98	5.47	6.35	6.31	7.09	6.47	
	500	5.02	5.19	5.01	5.60	5.31	5.76	6.12	
	1000	5.05	5.15	4.86	5.31	5.08	5.14	5.33	
	5000	4.95	5.11	5.14	5.18	5.26	5.20	5.30	
Score	50	4.39	4.54	4.73	4.93	4.77	4.58	4.55	
	100	4.74	4.50	4.90	4.69	4.99	5.04	4.81	
	150	4.77	4.67	4.70	4.83	4.45	4.83	4.97	
	200	5.19	5.13	4.39	5.04	5.00	5.18	4.81	
	500	4.80	5.05	4.73	5.13	4.69	4.99	5.32	
	1000	4.95	5.03	4.76	5.06	4.82	4.94	5.02	
	5000	4.94	5.09	5.14	5.21	5.18	5.12	5.19	
Gradiente	50	4.85	5.42	5.46	6.09	6.50	6.30	7.03	
	100	4.95	4.89	5.43	5.40	5.92	6.08	5.89	
	150	4.81	4.86	5.02	5.20	4.90	5.69	5.92	
	200	5.13	5.35	4.61	5.41	5.32	5.90	5.45	
	500	4.79	5.15	4.76	5.24	4.73	5.14	5.32	
	1000	5.02	5.11	4.80	5.13	4.88	5.03	5.15	
	5000	4.96	5.08	5.19	5.25	5.17	5.06	5.15	

B.2. Falta de especificidad en ϵ_i para la hipótesis

$$H_0 : \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}_p, \boldsymbol{\beta} = \mathbf{1}_p$$

Con el objetivo de complementar el estudio de simulación de la sección anterior los valores de ϵ_i son ahora simulados desde la distribución t_η multivariada con parámetros $t_r(\mathbf{0}_r, \phi \boldsymbol{\Sigma}_0 \eta = 0.4)$ donde $\boldsymbol{\Sigma}_0$ corresponde a la matriz identidad $r \times r$. La parametrización $t_r(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \eta)$ es poco conocida, aunque es una reparametrización de la usual distribución $t_r(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Psi}, \nu)$ gana en interpretabilidad de los dos primeros momentos (Osorio y Galea, 2015). En las Tablas B.4, B.5 y B.6 se presentan los resultados del nivel de significancia empírico en los escenarios Normal, t -student y Skew Normal en los tests LRT, Wald, Score y Gradiente para la hipótesis $H_0 : \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}_p, \boldsymbol{\beta} = \mathbf{1}_p$ al 5% de significancia. Claramente los resultados de significancia empírica se alejan rápidamente de 5% esperado, esto indica desde un punto de vista práctico como las inferencias carecen de interés en casos de falta de especificación.

Tabla B.4: Nivel de significancia empírico de los tests LRT, Wald, Score y Gradiente para la hipótesis $H_0 : \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}_p, \boldsymbol{\beta} = \mathbf{1}_p$ al 5% de significancia. Las muestras x_i fueron generadas desde la distribución normal con $\mu_x = 0, \phi_x = 1$. Los ϵ_i fueron muestreados de una t_η con media $\mathbf{0}_p$, varianza del error de medición $\phi = 1$ y parámetro $\eta = 0.4$. Los resultados fueron obtenidos desde 10000 simulaciones.

		p							
		n	1	2	3	5	10	15	20
LRT	50	15.50	20.99	21.48	23.22	24.07	24.54	25.91	
	100	19.33	23.73	25.05	27.00	27.13	26.83	26.93	
	150	22.72	26.32	28.11	29.21	28.99	27.87	27.19	
	200	23.42	28.88	30.37	31.86	29.69	29.81	28.53	
	500	31.10	36.71	38.83	39.91	38.65	36.28	35.01	
	1000	36.70	44.79	46.85	47.50	47.01	43.92	41.47	
	5000	52.49	63.53	67.55	70.23	69.39	66.19	63.32	
Wald	50	15.60	21.08	22.39	24.34	26.77	28.90	29.79	
	100	19.02	22.97	25.32	27.49	29.11	29.42	29.94	
	150	21.92	26.14	28.19	30.21	31.39	30.37	30.06	
	200	22.73	29.06	30.63	32.95	31.73	32.25	31.10	
	500	30.35	36.34	39.67	40.61	40.34	38.34	37.12	
	1000	36.19	45.23	46.95	48.32	48.04	45.18	43.01	
	5000	52.32	63.60	67.91	70.34	69.96	66.82	64.55	
Score	50	13.99	16.77	16.77	17.60	16.67	16.59	16.92	
	100	18.68	20.90	21.56	22.47	21.13	20.60	20.35	
	150	22.21	24.24	25.59	25.40	24.30	22.69	21.73	
	200	23.02	26.89	27.70	28.28	25.71	24.99	23.53	
	500	30.90	35.45	37.46	37.82	35.98	33.02	31.86	
	1000	36.62	44.04	45.76	46.17	44.93	41.74	38.93	
	5000	52.48	63.35	67.34	69.81	68.60	65.33	62.47	
Gradiente	50	13.48	16.38	17.87	19.52	20.12	21.03	21.89	
	100	17.60	20.97	22.23	24.35	24.06	24.13	23.96	
	150	20.86	23.93	26.40	27.01	26.74	25.59	25.26	
	200	22.34	27.05	28.61	29.83	27.95	27.89	26.73	
	500	30.28	35.71	37.66	38.47	37.32	34.95	33.88	
	1000	36.09	43.73	45.94	46.53	45.77	42.80	40.29	
	5000	52.16	63.07	67.06	69.63	68.81	65.38	62.81	

Apéndice B. Estudio de simulación

Tabla B.5: Nivel de significancia empírico de los tests LRT, Wald, Score y Gradiente para la hipótesis $H_0 : \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}_p, \boldsymbol{\beta} = \mathbf{1}_p$ al 5% de significancia. Las muestras x_i fueron generadas desde la distribución t con $\mu_x = 0, \phi_x = 1, \eta = 0.25$. Los $\boldsymbol{\epsilon}_i$ fueron muestreados de una t_η con media $\mathbf{0}_p$, varianza del error de medición $\phi = 1$ y parámetro $\eta = 0.4$. Los resultados fueron obtenidos desde 10000 simulaciones.

		p						
		1	2	3	5	10	15	20
	n							
LRT	50	15.84	21.52	22.68	24.88	25.24	27.14	26.79
	100	19.86	24.22	25.30	27.45	27.00	27.29	27.60
	150	23.01	27.50	28.61	29.25	29.37	28.82	28.42
	200	23.38	28.69	30.95	31.44	30.49	31.01	28.82
	500	31.61	37.07	39.25	40.02	38.68	36.11	35.14
	1000	37.26	44.90	46.85	47.86	45.66	43.74	41.24
	5000	52.62	64.26	67.47	69.52	69.78	66.01	63.09
Wald	50	16.54	21.60	23.01	26.77	27.45	30.00	30.09
	100	19.51	22.93	25.42	28.17	28.71	29.77	30.46
	150	21.88	26.64	28.85	30.26	31.14	30.93	30.98
	200	23.28	28.52	31.51	32.20	32.20	32.46	31.69
	500	31.01	36.77	39.77	40.61	40.47	38.12	37.70
	1000	36.68	45.17	47.20	48.67	47.16	45.41	42.63
	5000	52.64	64.37	67.57	69.91	70.21	66.61	63.92
Score	50	14.31	17.20	16.98	18.14	17.64	18.30	18.10
	100	19.06	21.24	21.59	22.61	21.33	21.00	21.18
	150	22.53	25.18	25.89	25.48	24.53	23.27	22.91
	200	23.04	26.78	28.32	28.49	26.28	26.28	23.86
	500	31.45	35.81	37.76	37.64	36.10	32.93	31.98
	1000	37.12	44.24	45.67	46.42	43.57	41.32	38.91
	5000	52.60	64.01	67.07	68.96	69.18	65.03	61.97
Gradiente	50	13.39	16.89	17.69	19.98	20.88	22.55	22.42
	100	18.14	20.80	22.51	24.79	24.09	24.03	24.68
	150	21.36	24.97	26.28	26.93	27.07	26.52	26.28
	200	22.38	27.01	28.98	29.55	28.69	28.51	27.18
	500	30.97	35.80	38.05	38.78	37.05	34.76	34.00
	1000	36.68	44.07	45.95	47.04	44.75	42.61	40.20
	5000	52.23	63.89	66.92	69.05	69.25	65.23	62.41

Tabla B.6: Nivel de significancia empírico de los tests LRT, Wald, Score y Gradiente para la hipótesis $H_0 : \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}_p, \boldsymbol{\beta} = \mathbf{1}_p$ al 5% de significancia. Las muestras x_i fueron generadas desde la distribución Skew Normal con media 0, varianza 1 y asimetría 0.70. Los $\boldsymbol{\epsilon}_i$ fueron muestreados de una t_η con media $\mathbf{0}_p$, varianza del error de medición $\phi = 1$ y parámetro de forma $\eta = 0.4$. Los resultados fueron obtenidos desde 10000 simulaciones.

		p						
		1	2	3	5	10	15	20
	n							
LRT	50	16.01	20.68	21.61	22.95	23.71	24.59	25.50
	100	19.29	23.99	25.10	27.27	26.20	26.93	26.55
	150	22.07	26.30	28.92	29.15	28.69	28.26	27.66
	200	23.76	28.99	30.24	31.55	29.84	29.90	28.26
	500	31.43	36.42	39.02	40.46	38.28	35.40	35.29
	1000	36.71	44.76	46.70	48.20	46.37	43.95	41.62
	5000	52.27	63.35	67.58	70.15	69.08	66.43	63.21
Wald	50	16.33	20.82	22.27	24.59	26.34	27.95	29.53
	100	19.13	22.95	24.63	27.97	28.23	29.57	29.47
	150	21.33	25.97	28.81	30.04	30.73	31.09	30.83
	200	23.11	28.20	30.48	32.33	31.58	32.58	31.24
	500	30.88	36.43	39.87	41.41	39.83	37.52	37.55
	1000	36.29	44.74	47.15	48.82	47.95	45.32	42.96
	5000	52.36	63.53	67.70	70.47	69.52	66.90	64.04
Score	50	14.53	16.38	16.48	17.14	16.26	16.36	16.32
	100	18.56	20.87	21.45	22.68	20.55	20.81	19.95
	150	21.55	24.04	25.86	25.28	24.08	23.37	22.32
	200	23.38	26.79	27.80	28.26	25.62	25.02	23.44
	500	31.27	35.36	37.57	38.36	35.71	32.19	32.12
	1000	36.65	44.00	45.64	46.75	44.37	41.42	39.21
	5000	52.27	63.19	67.35	69.72	68.45	65.40	62.38
Gradiente	50	14.05	16.13	17.01	19.35	19.73	20.37	21.41
	100	17.44	20.81	22.30	24.22	23.42	24.07	23.43
	150	20.66	23.79	26.95	27.25	26.46	25.94	25.50
	200	22.45	26.76	28.65	29.62	27.96	28.02	26.18
	500	30.44	35.56	38.07	39.12	37.12	33.91	33.89
	1000	36.16	43.64	45.75	47.37	45.28	42.73	40.41
	5000	51.85	62.90	67.10	69.63	68.54	65.57	62.46

B.3. Nivel de significancia empírico para la hipótesis $H_0 : \phi = \phi_0$

En esta sección se revisa para la hipótesis $H_0 : \phi = \phi_0$ el nivel de significancia empírico en los escenarios de x_i asumiendo la distribución Normal (Tabla B.7), t_η (Tabla B.8) y Skew Normal (Tabla B.9). Los resultados indican que el estadístico de Wald es el más alejado del 5% cuando el nivel de n y p es bajo. Notar como los niveles de significancia para los estadísticos Score y Gradiente son iguales, lo que indica que ambos tests serían equivalentes en esta hipótesis.

Tabla B.7: Nivel de significancia empírico de los tests LRT, Wald, Score y Gradiente para la hipótesis $H_0 : \phi = \phi_0$ al 5% de significancia. Las muestras x_i fueron generadas desde la distribución normal con $\mu_x = 0$, $\phi_x = 1$ y varianza del error de medición $\phi = 1$. Los resultados fueron obtenidos desde 10000 simulaciones.

		p						
		1	2	3	5	10	15	20
	n							
LRT	50	6.08	6.57	7.39	8.58	11.42	12.63	15.54
	100	5.62	5.92	6.14	6.70	8.10	9.07	10.82
	150	5.81	5.81	5.61	5.77	7.18	7.56	8.42
	200	5.15	5.78	5.43	5.57	6.22	7.14	7.46
	500	5.24	4.93	4.98	5.46	5.14	5.88	6.16
	1000	4.95	5.31	4.90	5.46	5.05	5.53	5.58
	5000	5.02	4.97	4.68	4.79	4.97	4.90	4.98
Wald	50	24.78	10.14	10.57	11.48	14.11	15.27	18.58
	100	7.93	7.73	7.78	7.93	9.37	10.57	12.12
	150	7.51	7.08	6.73	6.63	8.10	8.73	9.36
	200	6.62	6.67	6.23	6.34	6.87	7.75	8.11
	500	5.78	5.40	5.36	5.70	5.42	6.11	6.29
	1000	5.17	5.48	5.05	5.71	5.13	5.68	5.65
	5000	5.00	4.97	4.79	4.96	5.04	4.90	5.10
Score	50	18.56	4.83	5.82	7.11	9.96	11.48	14.12
	100	4.67	5.24	5.25	6.10	7.50	8.33	10.14
	150	5.34	5.32	5.24	5.27	6.67	7.20	8.03
	200	4.69	5.32	4.95	5.24	5.86	6.79	7.14
	500	4.99	4.86	4.73	5.35	4.96	5.74	6.06
	1000	4.90	5.34	5.00	5.43	4.95	5.48	5.47
	5000	4.90	4.97	4.76	4.81	4.99	4.93	4.94
Gradiente	50	18.56	4.83	5.82	7.11	9.96	11.48	14.12
	100	4.67	5.24	5.25	6.10	7.50	8.33	10.14
	150	5.34	5.32	5.24	5.27	6.67	7.20	8.03
	200	4.69	5.32	4.95	5.24	5.86	6.79	7.14
	500	4.99	4.86	4.73	5.35	4.96	5.74	6.06
	1000	4.90	5.34	5.00	5.43	4.95	5.48	5.47
	5000	4.90	4.97	4.76	4.81	4.99	4.93	4.94

Tabla B.8: Nivel de significancia empírico de los tests LRT, Wald, Score y Gradiente para la hipótesis $H_0 : \phi = \phi_0$ al 5% de significancia. Las muestras x_i fueron generadas desde la distribución t_η con $\mu_x = 0$, $\phi_x = 1$, $\eta = 0.25$ y varianza del error de medición $\phi = 1$. Los resultados fueron obtenidos desde 10000 simulaciones.

		p						
		1	2	3	5	10	15	20
	n							
LRT	50	6.41	7.16	7.52	8.64	11.20	13.04	16.28
	100	5.80	5.48	6.06	6.73	8.10	9.37	10.41
	150	5.58	5.37	5.90	6.44	6.74	8.12	8.59
	200	5.39	5.52	5.48	6.17	6.07	7.31	7.71
	500	5.33	5.13	5.22	5.25	5.33	5.61	6.10
	1000	5.02	5.09	5.38	4.82	5.15	5.49	5.37
	5000	4.89	4.83	5.23	5.07	5.01	5.12	5.12
Wald	50	10.81	10.70	10.78	11.66	13.94	15.46	18.80
	100	8.18	7.90	7.60	8.00	9.34	10.84	11.69
	150	6.94	6.55	7.04	7.19	7.73	8.93	9.43
	200	6.64	6.57	6.07	6.92	6.82	8.00	8.34
	500	5.59	5.34	5.41	5.44	5.54	5.93	6.35
	1000	5.45	5.36	5.56	5.03	5.22	5.67	5.42
	5000	4.90	4.93	5.28	5.10	5.01	5.15	5.15
Score	50	4.33	5.64	5.94	7.22	9.72	11.64	14.82
	100	4.76	4.48	5.28	5.99	7.50	8.75	9.84
	150	5.02	4.94	5.33	5.92	6.36	7.62	8.08
	200	4.96	5.15	5.21	5.84	5.65	7.01	7.31
	500	5.19	5.02	5.00	5.19	5.23	5.52	5.98
	1000	4.82	4.92	5.32	4.76	5.11	5.36	5.30
	5000	4.84	4.84	5.25	5.02	5.02	5.12	5.10
Gradiente	50	4.33	5.64	5.94	7.22	9.72	11.64	14.82
	100	4.76	4.48	5.28	5.99	7.50	8.75	9.84
	150	5.02	4.94	5.33	5.92	6.36	7.62	8.08
	200	4.96	5.15	5.21	5.84	5.65	7.01	7.31
	500	5.19	5.02	5.00	5.19	5.23	5.52	5.98
	1000	4.82	4.92	5.32	4.76	5.11	5.36	5.30
	5000	4.84	4.84	5.25	5.02	5.02	5.12	5.10

Tabla B.9: Nivel de significancia empírico de los tests LRT, Wald, Score y Gradiente para la hipótesis $H_0 : \phi = \phi_0$ al 5% de significancia. Las muestras x_i fueron generadas desde la distribución Skew Normal con media 0, varianza 1 y asimetría 0.7. Varianza del error de medición $\phi = 1$. Los resultados fueron obtenidos desde 10000 simulaciones.

		p						
		1	2	3	5	10	15	20
	n							
LRT	50	6.24	7.02	7.81	8.53	10.90	13.11	15.72
	100	5.39	5.77	6.53	6.57	8.10	9.34	10.64
	150	5.32	5.55	5.39	6.26	6.66	7.91	8.70
	200	5.38	5.61	6.00	5.83	6.11	7.15	7.35
	500	5.46	5.09	5.36	5.13	5.33	5.69	6.02
	1000	5.40	5.06	4.87	5.09	5.07	5.50	5.68
	5000	5.32	5.57	4.97	5.34	5.05	5.12	4.91
Wald	50	10.87	10.36	11.16	11.31	13.89	15.55	18.45
	100	7.65	7.45	8.14	7.87	9.49	10.63	11.81
	150	6.94	7.00	6.24	6.96	7.80	8.86	9.51
	200	6.40	6.52	6.74	6.51	6.81	7.65	8.05
	500	6.03	5.54	5.79	5.45	5.69	6.06	6.20
	1000	5.66	5.27	5.13	5.24	5.24	5.57	5.82
	5000	5.41	5.70	5.01	5.37	5.09	5.11	4.91
Score	50	4.00	5.43	6.05	7.01	9.57	11.84	14.40
	100	4.18	5.07	5.63	5.89	7.31	8.73	10.08
	150	4.59	4.99	4.99	5.75	6.27	7.37	8.34
	200	5.10	5.11	5.53	5.60	5.73	6.79	7.05
	500	5.39	4.95	5.09	5.11	5.21	5.48	5.88
	1000	5.14	4.92	4.75	5.06	5.03	5.45	5.59
	5000	5.32	5.56	4.99	5.33	5.03	5.08	4.93
Gradiente	50	4.00	5.43	6.05	7.01	9.57	11.84	14.40
	100	4.18	5.07	5.63	5.89	7.31	8.73	10.08
	150	4.59	4.99	4.99	5.75	6.27	7.37	8.34
	200	5.10	5.11	5.53	5.60	5.73	6.79	7.05
	500	5.39	4.95	5.09	5.11	5.21	5.48	5.88
	1000	5.14	4.92	4.75	5.06	5.03	5.45	5.59
	5000	5.32	5.56	4.99	5.33	5.03	5.08	4.93

Apéndice C

Paquete R mvstruct

C.1. Características del paquete mvstruct

El paquete `mvstruct` implementa el modelo estructural multivariado tanto bajo las distribuciones Normal y t_η multivariada. Algunas de las rutinas implementadas son:

- Estimadores Máximo Verosimiles del modelo estructural bajo ambas distribuciones.
- Evaluación de los Score asociados a las funciones de verosimilitud.
- Evaluación empírica (mediante los scores) y analítica de la Matriz de Información de Fisher bajo la distribución Normal Multivariada.
- Algoritmo EM para el ajuste del modelo estructural bajo la distribución t_η multivariada.

C.2. Instalación del paquete mvstruct

El paquete `mvstruct` está disponible a pedido a alguno de sus autores Julio Ávila (jeavila@uc.cl) o Manuel Galea (mgalea@mat.uc.cl).

La instalación del paquete sigue de aplicar el siguiente comando luego de obtener el archivo de códigos.

```
> install.packages(ruta_al_archivo, repos = NULL, type="source")
```

C.3. Ajuste bajo la distribución Normal multivariada

En esta sección se aplica el modelo estructural bajo la distribución normal multivariada al conjunto de datos de Barnet (1969).

```
> library(mvstruct)
> library(mvtnorm)
> library(expm)
> library(ggplot2)
> theme_set(theme_bw(base_size = 11))
```

Apéndice C. Paquete R *mvstruct*

```
> options(digits=4)
> set.seed(1984)
> data(vital)
> head(vital)

      X   Y1   Y2   Y3
1 3450 3530 4030 3720
2 1310 1320 1610 1600
3 3820 3720 4150 3700
4 2110 2880 2740 2520
5 1860 1420 1540 1690
6 1940 1780 2020 1800

> obj <- mvstruct(vital[, 1], vital[, 2:4], distr = "norm")
> obj <- mle.tilde(obj)
> obj <- mle.eigen(obj)
> obj <- mle.optim(obj, trace=0, maxit = 2000, factr = 1e3,
+                 theta0 = obj$adjust$tilde$theta)

theta0: 2168 0 0 0 1 1 1 638788 42068
convergence: 0

> theta(obj)

      mu.x alpha1 alpha2 alpha3 beta1 beta2 beta3 phi.x phi
tilde 2168    0.0    0.0    0.0 1.000 1.000 1.000 638788 42068
optim 2256 -153.8 -484.7 -402.8 1.037 1.172 1.115 638788 42061
eigen 2246 -183.6 -513.8 -430.8 1.050 1.185 1.128 538315 34849

> round(score(obj), 2)

      mu.x alpha1 alpha2 alpha3 beta1 beta2 beta3 phi.x phi
tilde    0  0.01 -0.03  -0.11 -12.05 20.66 -208.9    0    0
optim    0  0.00  0.00   0.00   0.00  0.00   0.0    0    0
eigen    0  0.00  0.00   0.00   0.00  0.00   0.0    0    0

> round(loglik(obj), 2)

      loglik
tilde -2090
optim -2072
eigen -2070
```

Claramente el estimador usando `mle.eigen` obtiene un score mas cercano al vector cero. Los errores asintóticos se obtienen mediante

```
> se <- sqrt(diag(solve(obj$adjust$eigen$Ihat)))/obj$n)
> round(se, 2)
```

Apéndice C. Paquete R *mvstruct*

```
      mu.x  alpha1  alpha2  alpha3  beta1  beta2  beta3  phi.x
89.22  103.38  110.55  107.44   0.04   0.05   0.05 95419.53
      phi
3353.37
```

```
> #valores de discrepancia cj para Probabilidad de acuerdo
> cj <- c(300, 350, 400)
> obj <- bootstrap(obj, B=50, maxit = 200, trace = 0,
+               cj=cj, adjust.name = "eigen")
> obj <- envelope(obj, conf = 0.95, plot.it = FALSE,
+               method = "W-H", adjust.name = "eigen")
```

Para graficar el envelope se ejecuta

```
> ggplot( as.data.frame(obj$qqplot), aes(x=x, y=y) ) +
+   geom_point() +
+   geom_line(aes(y=upper), col="red", lty=2) +
+   geom_line(aes(y=lower), col="red", lty=2) +
+   xlab("Quantiles teóricos") +
+   ylab("Quantiles empiricos")
```

Para determinar los datos influyentes se ejecuta

```
> label <- 1:obj$n
> label[ obj$adjust$eigen$deltai < qchisq(0.95, obj$r) ] <- NA
> ggplot(mapping = aes(x=1:obj$n, y=obj$adjust$eigen$deltai, label=label )) +
+   geom_point() + xlab("Índice") +
+   ylab(expression(delta[italic(i)]( $\hat{\theta}$ ))) +
+   geom_hline(yintercept = qchisq(0.95, obj$r), lty=2) +
+   geom_text(vjust = 0, nudge_y = 0.5)
```

Las salidas del envelope y los datos influyentes se presentan en la Figura C.1.

Para el Coeficiente de Correlación de Concordancia se ejecuta

```
> ccc(obj, delta.se = TRUE, adjust.name = "eigen")
```

```
      ccc      se
rho1 0.9370 0.01173
rho2 0.9289 0.01198
rho3 0.9245 0.01355
```

Para la Probabilidad de Acuerdo se ejecuta

```
> prob.agreement(cj, j=1, obj, delta.se = TRUE, adjust.name = "eigen")
```

```
      pa      se
[1,] 0.7231 0.02669
[2,] 0.7955 0.02510
[3,] 0.8530 0.02236
```

Apéndice C. Paquete R *mvstruct*

```
> prob.agreement(cj, j=2, obj, delta.se = TRUE, adjust.name = "eigen")
```

```
      pa      se
[1,] 0.6620 0.03305
[2,] 0.7365 0.03260
[3,] 0.7989 0.03069
```

```
> prob.agreement(cj, j=3, obj, delta.se = TRUE, adjust.name = "eigen")
```

```
      pa      se
[1,] 0.6548 0.03428
[2,] 0.7301 0.03363
[3,] 0.7936 0.03147
```

Test de hipótesis $H_0 : \alpha = \mathbf{0}_p, \beta = \mathbf{1}_p$

```
> data.frame("LRT" = lrt(obj)$LRT,
+ "W"=wald(obj)$W,
+ "S"=testScore(obj)$S,
+ "G"=testGradiente(obj)$G )
```

```
      LRT      W      S      G
1 40.36 37.69 36.7 39.97
```

```
> qchisq(0.95, df=6)
```

```
[1] 12.59
```

todos los test asintóticamente distribuyen $\chi^2(6)$ y están por sobre el valor crítico considerando una confianza del 95%. Por tanto, se rechaza H_0 en todos los tests.

Para encontrar los instrumentos que se alejan de la hipótesis se evalúa un test de Wald para cada parámetro y por simplicidad el estadístico se compara con una distribución normal estándar

```
> wald.uni(obj, conf = 0.95)
```

Matriz de contraste

```
      mu.x alpha1 alpha2 alpha3 beta1 beta2 beta3 phi.x phi
[1,]  0      1      0      0      0      0      0      0      0
[2,]  0      0      1      0      0      0      0      0      0
[3,]  0      0      0      1      0      0      0      0      0
[4,]  0      0      0      0      1      0      0      0      0
[5,]  0      0      0      0      0      1      0      0      0
[6,]  0      0      0      0      0      0      1      0      0
```

H0: A*%theta = a

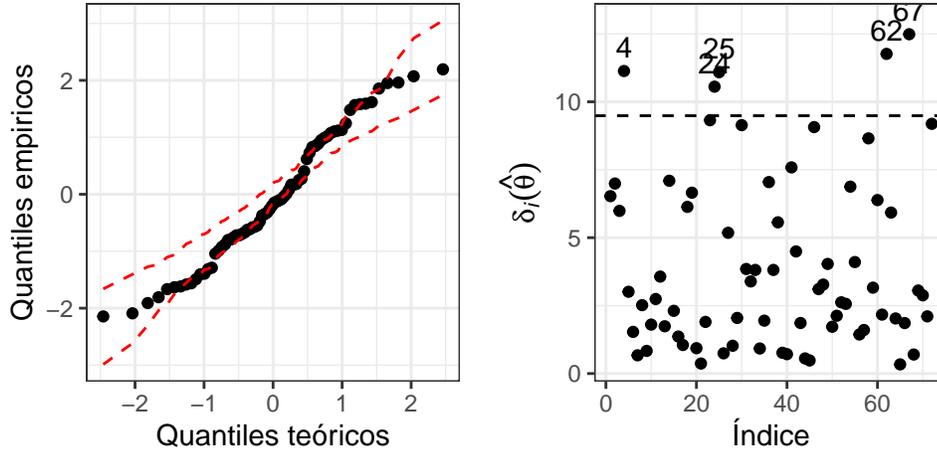


Figura C.1: Bondad de Ajuste al modelo estructural Normal multivariado para los datos vital.

	Est.	SE	a	Z	lower	upper
alpha1	-183.579	103.38341	0	-1.776	-386.2066	19.049
alpha2	-513.753	110.54943	0	-4.647	-730.4258	-297.080
alpha3	-430.752	107.44337	0	-4.009	-641.3370	-220.167
beta1	1.050	0.04378	1	1.151	0.9646	1.136
beta2	1.185	0.04682	1	3.959	1.0936	1.277
beta3	1.128	0.04550	1	2.807	1.0385	1.217

Se obtiene que en $j = 1$ no se puede rechazar $H_0 : \alpha_j = 0$ y $H_0 : \beta_j = 1$ por separado, fijarse como el 0 y el 1 están contenidos en los intervalos de confianza de α_1 y β_1 respectivamente.

C.4. Ajuste bajo la distribución t_η multivariada

El siguiente ajuste será usando los datos de

```
> data(volume)
> head(volume)
> obj <- mvstruct(X=volume[,1], Y=volume[,2:5], distr = "t.eta",
+               labels = c("X", "Y1", "Y2", "Y3", "Y4"))
> obj <- mle.eigen(obj)
> obj <- mle.tilde(obj)
> obj <- mle.optim(obj, maxit = 600, factr = 1e5)
> obj <- mle.em(obj)

> round(theta(obj), 2)
```

	mu.x	alpha1	alpha2	alpha3	alpha4	beta1	beta2	beta3	beta4	phi.x	phi	eta
tilde	9.69	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00	1.00	1.00	21.86	3.74	0.11
optim	9.05	0.08	-0.22	0.14	1.55	0.90	0.98	1.15	1.09	23.99	1.41	0.14

Apéndice C. Paquete R mvstruct

```
eigen 10.08  0.11 -0.03  0.07  1.54  0.88  0.95  1.14  1.08 22.26 1.39 0.10
em      9.05  0.08 -0.22  0.14  1.55  0.90  0.98  1.15  1.09 24.04 1.41 0.14
```

```
> round(score(obj), 3)
```

```
      mu.x  alpha1 alpha2 alpha3 alpha4  beta1  beta2  beta3  beta4
tilde 0.000 -18.624 -12.42 12.327 24.728 -210.102 -130.715 147.410 252.488
optim -0.001 -0.001  0.00  0.002  0.001  -0.009  -0.010  0.000  0.018
eigen -1.597 -0.078 -0.01  1.192 -0.140  -0.150   9.288  9.452 -2.157
em     0.000  0.000  0.00  0.000  0.000   0.000   0.000  0.000  0.000
```

```
      phi.x  phi  eta
tilde 0.000  0.00 0.001
optim 0.001  0.00 0.002
eigen 0.063 -0.74 0.000
em     0.000  0.00 0.001
```

```
> loglik(obj)
```

```
      loglik
tilde -503.9
optim -421.1
eigen -422.2
em     -421.1
```

```
> se <- sqrt(diag(solve(obj$adjust$Ioptim))/obj$n)
```

```
> round(se, 2)
```

```
      mu.x  alpha1 alpha2 alpha3 alpha4  beta1  beta2  beta3  beta4  phi.x  phi
0.76  0.53  0.56  0.60  0.58  0.05  0.06  0.06  0.06  6.82  0.25
      eta
0.07
```

```
>
```

Se elige la estimación optim

```
> cj <- c(3, 3.5, 4)
```

```
> obj <- bootstrap(obj, B=20, maxit = 500, trace = 0,
```

```
+           cj=cj, adjust.name = "optim")
```

```
> obj <- envelope(obj, conf = 0.95, plot.it = FALSE,
```

```
+           method = "F", adjust.name = "optim")
```

Para graficar el envelope se ejecuta

```
> ggplot( as.data.frame(obj$qqplot), aes(x=x, y=y) ) +
+   geom_point() +
+   geom_line(aes(y=upper), col="red", lty=2) +
+   geom_line(aes(y=lower), col="red", lty=2) +
+   xlab("Quantiles teóricos") +
+   ylab("Quantiles empiricos")
```

Apéndice C. Paquete R *mvstruct*

Para determinar los datos influyentes se ejecuta

```
> label <- 1:obj$n
> label[ obj$adjust$optim$deltai < qchisq(0.95, obj$r) ] <- NA
> ggplot(mapping = aes(x=1:obj$n, y=obj$adjust$optim$deltai, label=label )) +
+   geom_point() + xlab("Índice") +
+   ylab(expression(italic(F[i]))) +
+   geom_hline(yintercept = qchisq(0.95, obj$r), lty=2) +
+   geom_text(vjust = 0, nudge_y = 0.5)
```

Las salidas de los envelope y datos influyentes se presentan en la Figura C.2

Para el Coeficiente de Correlación de Concordancia se ejecuta

```
> ccc(obj, delta.se = TRUE, adjust.name = "optim")
```

```
      ccc      se
rho1 0.9181 0.02181
rho2 0.9409 0.01653
rho3 0.9082 0.02462
rho4 0.8571 0.03719
```

Para la Probabilidad de Acuerdo se ejecuta

```
> prob.agreement(cj, j=1, obj, delta.se = TRUE, adjust.name = "optim")
```

```
      pa      se
[1,] 0.8856 0.03125
[2,] 0.9296 0.02257
[3,] 0.9570 0.01564
```

```
> prob.agreement(cj, j=2, obj, delta.se = TRUE, adjust.name = "optim")
```

```
      pa      se
[1,] 0.9220 0.02191
[2,] 0.9535 0.01512
[3,] 0.9722 0.01013
```

```
> prob.agreement(cj, j=3, obj, delta.se = TRUE, adjust.name = "optim")
```

```
      pa      se
[1,] 0.8074 0.04672
[2,] 0.8750 0.03673
[3,] 0.9208 0.02721
```

```
> prob.agreement(cj, j=4, obj, delta.se = TRUE, adjust.name = "optim")
```

```
      pa      se
[1,] 0.6504 0.06009
[2,] 0.7598 0.05184
[3,] 0.8434 0.04110
```

Apéndice C. Paquete R *mvstruct*

Test de hipótesis $H_0 : \alpha = \mathbf{0}_p, \beta = \mathbf{1}_p$

```
> data.frame("LRT" = lrt(obj)$LRT,
+ "W"=wald(obj)$W,
+ "S"=testScore(obj)$S,
+ "G"=testGradiente(obj)$G )
```

```
      LRT      W      S      G
1 165.6 260.8 40.86 111.1
```

```
> qchisq(0.95, df=8)
```

```
[1] 15.51
```

todos los test asintóticamente distribuyen $\chi^2(8)$ y están por sobre el valor crítico considerando una confianza del 95%. Por tanto, se rechaza H_0 en todos los tests.

Para encontrar los instrumentos que se alejan de la hipótesis se evalúa un test de Wald para cada parámetro y por simplicidad el estadístico se compara con una distribución normal estándar

```
> wald.uni(obj, conf = 0.95)
```

Matriz de contraste

	mu.x	alpha1	alpha2	alpha3	alpha4	beta1	beta2	beta3	beta4	phi.x	phi	eta
[1,]	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[2,]	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[3,]	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
[4,]	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
[5,]	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
[6,]	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
[7,]	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
[8,]	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0

H0: A%*%theta = a

	Est.	SE	a	Z	lower	upper
alpha1	0.11316	0.52533	0	0.21541	-0.9165	1.1428
alpha2	-0.03478	0.56373	0	-0.06169	-1.1397	1.0701
alpha3	0.07370	0.59847	0	0.12315	-1.0993	1.2467
alpha4	1.53956	0.58455	0	2.63375	0.3939	2.6853
beta1	0.88273	0.05325	1	-2.20213	0.7784	0.9871
beta2	0.95196	0.05896	1	-0.81481	0.8364	1.0675
beta3	1.13936	0.06045	1	2.30543	1.0209	1.2578
beta4	1.08252	0.05905	1	1.39740	0.9668	1.1983

Se obtiene que para $j = 4$ se rechaza $H_0 : \alpha_j = 0$ y en $j = 1, 3$ se rechaza $H_0 : \beta_j = 1$ por separado.

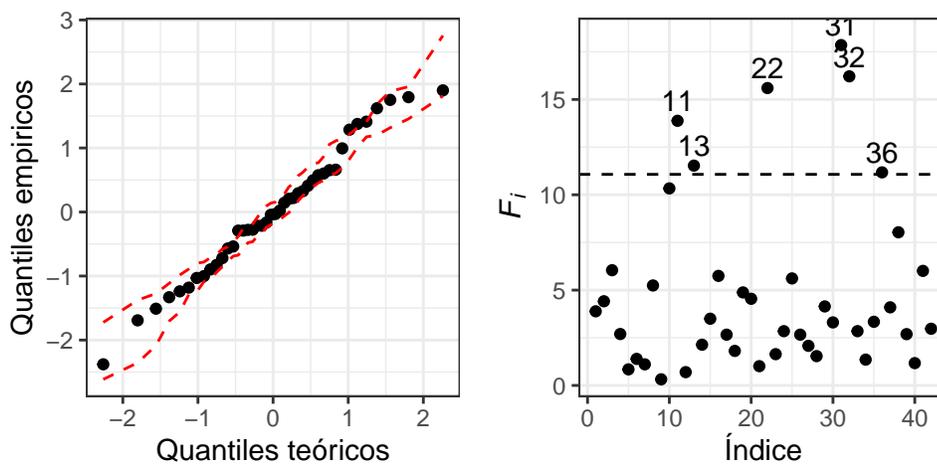


Figura C.2: Bondad de Ajuste al modelo estructural Normal multivariado para los datos vital.

Apéndice D

Conjunto de datos Acciones Chilenas

Con el fin de complementar la aplicación del modelo estructural al conjunto de datos de Acciones Chilenas presentado en la sección 3.6.3 a continuación se presentan la serie de variaciones mensuales de cinco acciones comparada contra las variaciones del *IPSA* en la Figura D.1. Una medida de concordancia sería que ambas series tengan similar variación tanto en magnitud como dirección, el caso de *ENEL*, *Falabella* y en menor medida *BSantander* tendrían esta característica. Sin embargo, *SQMB* y *LTM* presentan diferencias en algunos periodos de tiempos lo que debería ser capturado en evaluación de las medidas de acuerdo. En la Figura D.2 se presenta el valor absoluto de las diferencia entre cada una de las cinco acciones y el *IPSA*. Nuevamente, un alto acuerdo tendería a una diferencia cercana a cero o baja, las acciones de *Falabella* y *BSantander* tienen las diferencias más bajas, mientras que en *SQM* y *LTM* indicarían la posibilidad de medidas de acuerdo variantes en el tiempo.

Apéndice D. Conjunto de datos Acciones Chilenas

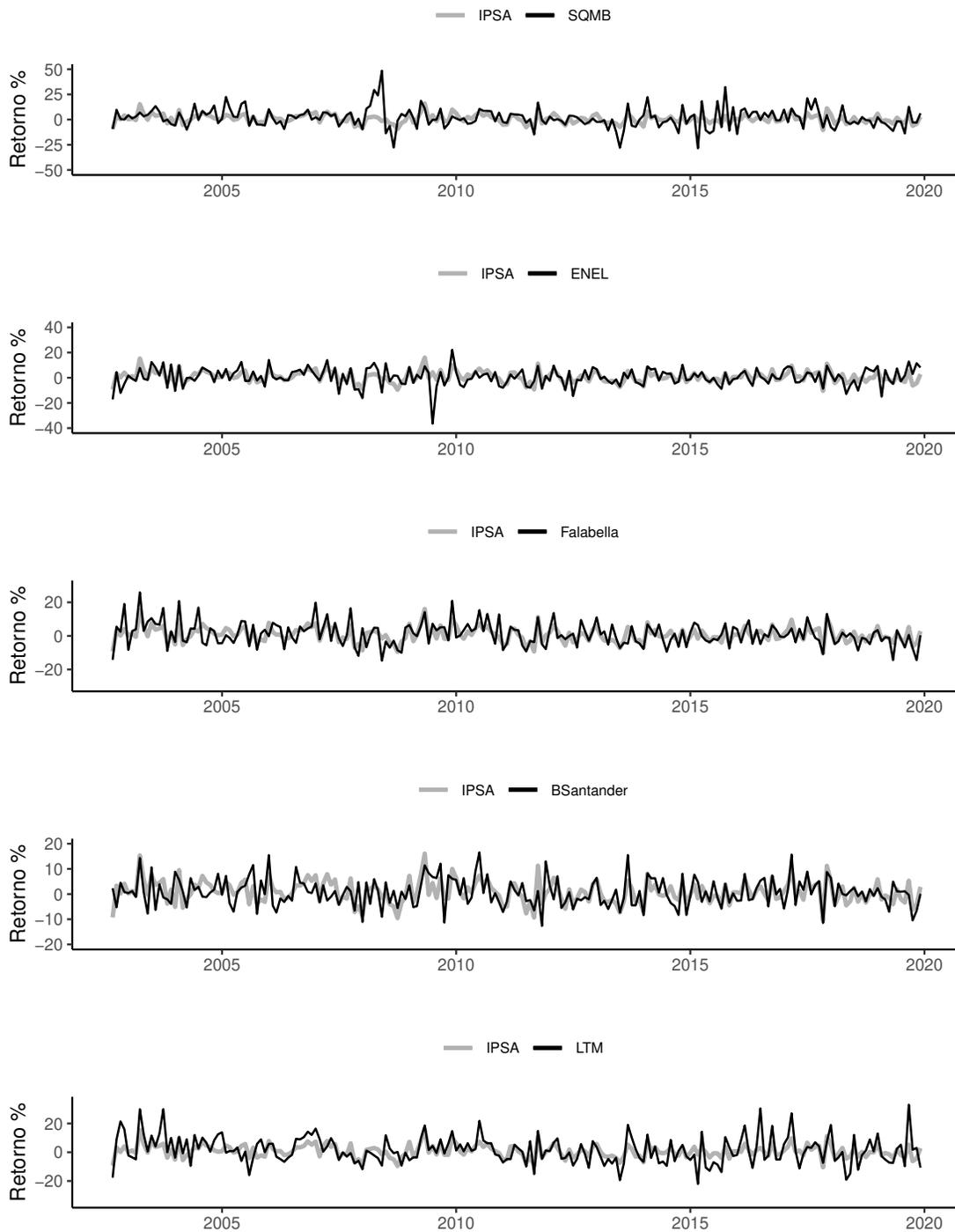


Figura D.1: Comparación en el tiempo de las series de *IPSA* y cinco acciones chilenas *SQMB*, *ENEL*, *Falabella*, *BSantander* y *LTM*

Apéndice D. Conjunto de datos Acciones Chilenas

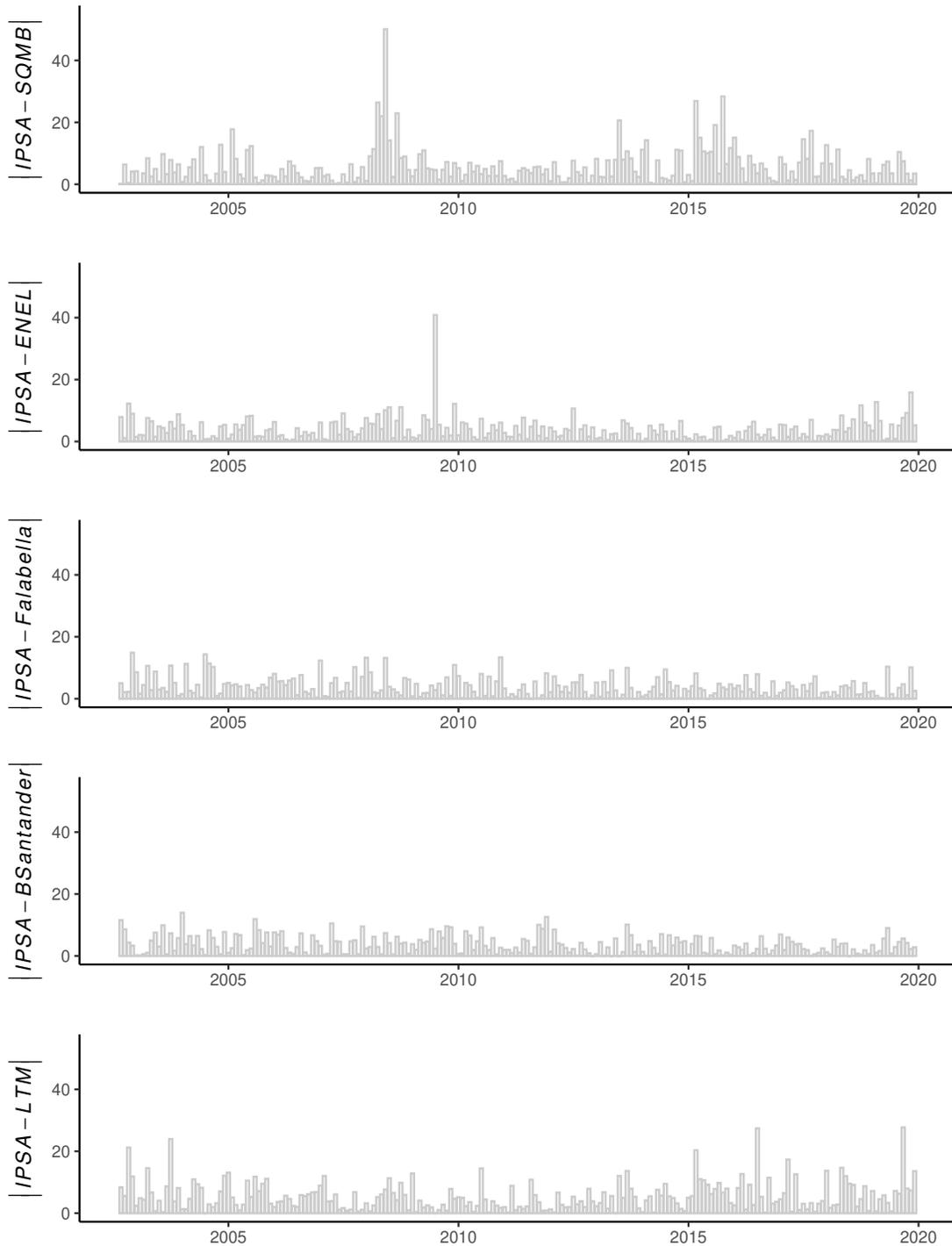


Figura D.2: Comparación en el tiempo de del valor absoluto entre las series de *IPSA* y cinco acciones chilenas *SQMB*, *ENEL*, *Falabella*, *BSantander* y *LTM*

Bibliografía

- Altman, D. G. y Bland, J. M. (1983). Measurement in medicine: The analysis of method comparison studies. *Journal of the Royal Statistical Society: Series D (The Statistician)*, 32(3):307–317.
- Anderson, S. y Hauck, W. W. (1983). A new procedure for testing equivalence in comparative bioavailability and other clinical trials. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 12(23):2663–2692.
- Anderson, S. y Hauck, W. W. (1990). Consideration of individual bioequivalence. *Journal of Pharmacokinetics and Biopharmaceutics*, 18(3):259–273.
- Azzalini, A. (2020). *The R package **sn**: The Skew-Normal and Related Distributions such as the Skew-t (version 1.6-2)*. Università di Padova, Italia.
- Azzalini, A. y Capitanio, A. (1999). Statistical applications of the multivariate skew normal distribution. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 61(3):579–602.
- Barnett, V. D. (1969). Simultaneous pairwise linear structural relationships. *Biometrics*, 25(1):129–142.
- Barnhart, H. X., Haber, M., y Song, J. (2002). Overall concordance correlation coefficient for evaluating agreement among multiple observers. *Biometrics*, 58(4):1020–1027.
- Barnhart, H. X., Haber, M. J., y Lin, L. I. (2007). An overview on assessing agreement with continuous measurements. *Journal of Biopharmaceutical Statistics*, 17(4):529–569.
- Bolfarine, H. y Galea, M. (1995). Maximum likelihood estimation of simultaneous pairwise linear structural relationships. *Biometrical Journal*, 37(6):673–689.
- Buse, A. (1982). The likelihood ratio, wald, and lagrange multiplier tests: An expository note. *The American Statistician*, 36(3a):153–157.
- Carstensen, B. (2010). *Comparing Clinical Measurement Methods: A practical guide*. Statistics in Practice. Wiley, primera edición.
- Chan, L. K. y Mak, T. K. (1984). Maximum likelihood estimation in multivariate structural relationships. *Scandinavian Journal of Statistics*, 11:45–50.

Bibliografía

- Chipkevitch, E., Nishimura, R. T., Tu, D. G., y Galea-Rojas, M. (1996). Clinical measurement of testicular volume in adolescents: Comparison of the reliability of 5 methods. *The Journal of Urology*, 156(6):2050–2053.
- Choudhary, P. K. y Nagaraja, H. N. (2017). *Measuring agreement: Models, methods, and applications*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, primera edición.
- Choudhary, P. K. y Yin, K. (2010). Bayesian and frequentist methodologies for analyzing method comparison studies with multiple methods. *Statistics in Biopharmaceutical Research*, 2(1):122–132.
- de Castro, M. y Galea, M. (2021). Bayesian inference for the pairwise probability of agreement using data from several measurement systems. *Quality Engineering*, Latest Articles:1–10.
- Dunn, G. (2009). *Statistical Evaluation of Measurement Errors: Design and Analysis of Reliability Studies*. Wiley.
- Dunn, P. K. y Smyth, G. K. (1996). Randomized quantile residuals. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 5(3):236–244.
- Efron, B. y Tibshirani, R. J. (1993). *An Introduction to the Bootstrap*. Monographs on Statistics and Applied Probability 57. Springer US, primera edición.
- Fiorentini, G., Sentana, E., y Calzolari, G. (2003). Maximum likelihood estimation and inference in multivariate conditionally heteroscedastic dynamic regression models with student t innovations. *Journal of Business & Economic Statistics*, 21(4):532–546.
- Fuller, W. (2006). *Measurement Error Models*. Wiley series in probability and mathematical statistics. Probability and mathematical statistics. Wiley.
- Galea, M., Cademartori, D., Curci, R., y Molina, A. (2020). Robust inference in the capital asset pricing model using the multivariate t -distribution. *Journal of Risk and Financial Management*, 13(6).
- Galea-Rojas, M., Bolfarine, H., y de Castro, M. (2002). Local influence in comparative calibration models. *Biometrical Journal*, 44(1):59–81.
- Ganase, R. A., Amemiya, Y., y Fuller, W. A. (1983). Prediction when both variables are subject to error, with application to earthquake magnitudes. *Journal of the American Statistical Association*, 78(384):761–765.
- Gleser, L. J. (1981). Estimation in a multivariate “errors in variables” regression model: Large sample results. *The Annals of Statistics*, 9(1):24–44.
- Gleser, L. J. (1992). The importance of assessing measurement reliability in multivariate regression. *Journal of the American Statistical Association*, 87:696–707.
- Gupta, A. (2003). Multivariate skew t -distribution. *Statistics*, 37(4):359–363.

Bibliografía

- Hauck, W. W. y Anderson, S. (1984). A new statistical procedure for testing equivalence in two-group comparative bioavailability trials. *Journal of Pharmacokinetics and Biopharmaceutics*, 12(1):83–91.
- Hedayat, A. S., Lou, C., y Sinha, B. K. (2009). A statistical approach to assessment of agreement involving multiple raters. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 38(16-17):2899–2922.
- Hothorn, T., Bretz, F., y Westfall, P. (2008). Simultaneous inference in general parametric models. *Biometrical Journal*, 50(3):346–363.
- Huber, P. J. (2009). *Robust statistics*. Wiley series in probability and statistics. Wiley, Hoboken, N.J, segunda edición.
- Johnson, N. L., Kotz, S., y Balakrishnan, N. (1994). *Continuous Univariate Distributions, Vol. 1*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley–Interscience, segunda edición.
- Johnson, N. L., Kotz, S., y Balakrishnan, N. (1995). *Continuous Univariate Distributions, Vol. 2*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley–Interscience, segunda edición.
- Kelly, G. (1984). The influence function in the errors in variables problem. *The Annals of Statistics*, 12:87–100.
- Kimura, D. K. (1992). Calibration using an EM algorithm. *Biometrics*, 48:1263–1271.
- Kotz, S. y Nadarajah, S. (2004). *Multivariate T-Distributions and Their Applications*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Lange, K. y Sinsheimer, J. S. (1993). Normal/independent distributions and their applications in robust regression. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 2(2):175–198.
- Lange, K. L., Little, R. J. A., y Taylor, J. M. G. (1989). Robust statistical modeling using the t distribution. *Journal of the American Statistical Association*, 84(408):881–896.
- Leal, C. (2016). *Coeficiente de Correlación de Concordancia bajo la distribución t -multivariada*. Tesis doctoral, Departamento de Estadística. Facultad de Matemáticas. Pontificia Universidad Católica de Chile.
- Leal, C., Galea, M., y Osorio, F. (2019). Assessment of local influence for the analysis of agreement. *Biometrical Journal*, 61(4):955–972.
- Lehmann, E. y Casella, G. (1998). *Theory of Point Estimation*. Springer Texts in Statistics. Springer-Verlag, New York, segunda edición.
- Lemonte, A. J. (2016). *The Gradient Test: Another Likelihood-Based Test*. Elsevier Science & Technology.
- Lemonte, A. J. y Ferrari, S. L. P. (2012). The local power of the gradient test. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 64(2):373–381.

Bibliografía

- Liao, J. J. Z. (2003). An improved concordance correlation coefficient. *Pharmaceutical Statistics*, 2(4):253–261.
- Lin, L. (1989). A concordance correlation coefficient to evaluate reproducibility. *Biometrics*, 45(1):255–268.
- Lin, L., Hedayat, A., y Wu, W. (2012). *Statistical Tools for Measuring Agreement*. Statistics in Practice. Wiley, primera edición.
- Lin, L., Hedayat, A. S., Sinha, B., y Yang, M. (2002). Statistical methods in assessing agreement. *Journal of the American Statistical Association*, 97(457):257–270.
- Lin, L. I.-K. (2000). Total deviation index for measuring individual agreement with applications in laboratory performance and bioequivalence. *Statistics in Medicine*, 19(2):255–270.
- Little, R. J. A. (1988). Robust estimation of the mean and covariance matrix from data with missing values. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*, 37(1):23–38.
- Magnus, J. R. y Neudecker, H. (2007). *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*. Willey, tercera edición.
- Osorio, F. y Galea, M. (2015). Statistical inference in multivariate analysis using the t -distribution. <http://mvt.mat.utfsm.cl/>.
- Pinheiro, J. C., Liu, C., y Wu, Y. N. (2001). Efficient algorithms for robust estimation in linear mixed-effects models using the multivariate t distribution. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 10(2):249–276.
- Rao, C. R. (2005). *Score Test: Historical Review and Recent Developments*, pp. 3–20. Birkhäuser Boston, Boston, MA.
- Rencher, A. C. y Christensen, W. F. (2012). *Methods of Multivariate Analysis*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, tercera edición.
- Shyr, J. y Gleser, L. (1986). Inference about comparative precision in linear structural relationships. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 14:339–358.
- Stefanski, L. (1985). The effects of measurement error on parameter estimation. *Biometrika*, 72(3):583–592.
- Stefanski, L. (2000). Measurement error models. *Journal of the American Statistical Association*, 95(452):1353–1358.
- Stevens, N. T., Steiner, S. H., y MacKay, R. J. (2017). Assessing agreement between two measurement systems: An alternative to the limits of agreement approach. *Statistical Methods in Medical Research*, 26(6):2487–2504.

Bibliografía

- Sutradhar, B. C. (1993). Score test for the covariance matrix of the elliptic t -distribution. *Journal of Multivariate Analysis*, 46(1):1–12.
- Svetnik, V., Ma, J., Soper, K. A., Doran, S., Renger, J. J., Deacon, S., y Koblan, K. S. (2007). Evaluation of automated and semi-automated scoring of polysomnographic recordings from a clinical trial using zolpidem in the treatment of insomnia. *Sleep*, 30(11):1562–1574.
- Vidal, I. y de Castro, M. (2017). Bayesian inference for agreement measures. *Journal of Biopharmaceutical Statistics*, 27(5):809–823.