



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

DERIVACIÓN DE ESTRATEGIA ÓPTIMA GLOBAL DE LEYES DE CORTE UTILIZANDO CONTROL ÓPTIMO

JÜRGEN CHRISTIAN UHLMANN MELLAFE

Tesis para optar al grado
de Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Profesores supervisores:

JUAN IGNACIO GUZMÁN BARROS

JOHN ELVIN TILTON

Santiago de Chile, Septiembre, 2015

© 2015, Jürgen Christian Uhlmann Mellafe



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

DERIVACIÓN DE ESTRATEGIA ÓPTIMA GLOBAL DE LEYES DE CORTE UTILIZANDO CONTROL ÓPTIMO

JURGEN CHRISTIAN UHLMANN MELLAFE

Tesis presentada a la Comisión integrada por los profesores:

JUAN IGNACIO GUZMÁN BARROS

JOHN ELVIN TILTON

JOSÉ JOAQUÍN JARA DONOSO

JUAN LUIS YARMUCH GUZMÁN

PEDRO GAZMURI SCHLEYER

Para completar las exigencias del grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Santiago de Chile, Septiembre, 2015

“Lo que importa verdaderamente en la vida no son los objetivos que nos marcamos, sino los caminos que seguimos para alcanzarlos”

Peter Bamm

AGRADECIMIENTOS

Estoy profundamente agradecido de mucha gente que me ha apoyado a través del desarrollo de esta tesis. Primero quisiera agradecer a mis profesores supervisores, los cuales marcaron mi carrera por sus capacidades y motivaciones. A Juan Ignacio por la confianza que deposito en mí y por demostrarme que a través de esfuerzo y trabajo es posible generar cambios relevantes en la industria. Su apoyo, tanto en lo personal como en lo profesional, fue clave para el exitoso desarrollo de esta tesis. De la misma manera, le agradezco a John Tilton por su cercanía, dedicación y entrega desinteresada a lo largo de estos años en la universidad.

Me gustaría agradecer a la comisión evaluadora, y en especial al profesor Juan Luis Yarmuch por sus consejos y dedicación.

También quisiera agradecer a mi familia, y especialmente a mi madre, pilar fundamental en mi vida. Ella siempre ha sido un modelo de esfuerzo y resiliencia, por lo cual tiene toda mi admiración. Su amor y apoyo incondicional es lo que me han permitido alcanzar progresivamente todos mis sueños y metas.

Gracias a Isidora por su amor, por estar siempre conmigo, por darme ánimo en los momentos más difíciles y por creer en mí, especialmente cuando yo no lo hacía.

Gracias a mi hermano-primo Pablo por ser mi partner y mejor amigo durante todos estos años.

Finalmente, quisiera agradecer al Encuentro Nacional de Ingeniería Matemática 2015 por permitirme presentar esta tesis, en el marco de desarrollos aplicados a la industria.

INDICE GENERAL

	Pág.
DEDICATORIA.....	ii
AGRADECIMIENTOS	iii
INDICE DE TABLAS	vi
INDICE DE FIGURAS	vii
RESUMEN.....	viii
ABSTRACT	x
 1. INTRODUCCIÓN	 1
1.1 Concepto de ley de corte	1
1.2 Estado del arte	3
1.3 Deficiencias en las investigaciones	5
1.4 Hipótesis y objetivos	6
1.5 Organización del documento.....	7
 2. MODELAMIENTO.....	 9
2.1 Proceso de planificación minera	9
2.2 Formulación del modelo minero	11
 3. MÉTODO DE RESOLUCIÓN.....	 15
3.1 Teoría de control óptimo	15
3.2 Algoritmo de resolución.....	16
3.2.1 Concepto subyacente	17
3.2.2 Formulación	18
 4. DERIVACIÓN DE LA POLÍTICA ÓPTIMA	 22
4.1 Definiciones preliminares	22
4.2 Etapa independiente	23
4.3 Etapa cooperativa	24
4.3.1 Dentro del sub-problema	25
4.3.2 Fuera del sub-problema	27

4.4	Sistema FIDE general.....	27
5.	CASO DE APLICACIÓN	29
5.1	Mina con dos fases	29
5.1.1	Definiciones preliminares	29
5.1.2	Etapas independiente	30
5.1.3	Etapas cooperativa.....	33
5.1.4	Sistema FIDE	34
5.2	Resultados numéricos para una mina ficticia de cobre	35
5.3	Análisis de sensibilidad.....	42
6.	CONSIDERACIONES FINALES.....	47
6.1	Supuestos, limitaciones y extensiones	47
6.2	Conclusiones	49
	BIBLIOGRAFÍA.....	52
	ANEXOS.....	55
	ANEXO A: Ilustración del concepto de fases.....	56
	ANEXO B: El principio de Pontryagin para varias condiciones de término	57
	ANEXO C: Código matlab para resolución numérica	61
	ANEXO D: Carta de ingreso del paper a revista ISI “Resources Policy”	67

INDICE DE TABLAS

	Pág.
Tabla 5-1: Parámetros para mina de cobre ficticia.....	36
Tabla 5-2: Sensibilidad de ratio de reservas iniciales (S_1^0/S_2^0)	43
Tabla 5-3: Sensibilidad de ratio entre capacidad mina y planta (K_m/K_p)	45
Tabla 5-4: Sensibilidad de tasa descuento (r).....	46
Tabla B-1: Condiciones necesarias para control óptimo.....	59

INDICE DE FIGURAS

	Pág.
Figura 2-1: Análisis circular de las etapas de la planificación minera tradicional, basado en Dagdelen (2001).....	10
Figura 3-1: Descripción conceptual del algoritmo de resolución	18
Figura 3-2: Ilustración gráfica del algoritmo de resolución para una mina de tres fases.....	21
Figura 5-1: Política de leyes de corte para el escenario 2	38
Figura 5-2: Superficie de soluciones reales para escenario 1	39
Figura 5-3: Política de leyes de corte para periodo de transición del escenario 1	41
Figura 5-4: Ritmos de extracción para periodo de transición del escenario 1	41
Figura A-1: Ilustración de fases para una mina a rajo abierto.....	56
Figure D-1: Carta de ingreso del paper a revista ISI “Resources Policy”.....	67

RESUMEN

En esta tesis se determina una política de leyes de corte óptima global dentro de un espacio de soluciones no acotado por las decisiones tomadas en las etapas de la planificación minera relacionadas, tal como lo hace la teoría tradicional de leyes de corte al optimizarla separadamente de la estrategia de producción. Elaboramos y empleamos un algoritmo basado en control óptimo para derivar matemáticamente un sistema de ecuaciones Funcional-Integral-Diferencial, el cual determina endógenamente la estrategia de consumo de reservas para una mina a rajo abierto dividida en fases, esto es dónde (con qué secuenciamiento), cuánto (a qué tasa de extracción) y cómo (con qué ley de corte) extraer desde cada fase. Las consecuencias para la mina son un mayor VPN y una estrategia operacional distinta a la obtenida con la teoría tradicional. En particular, se muestra el valor generado por realizar periodos de traslape entre fases de la manera óptima, utilizando leyes de corte y ritmos de extracción distintos a los que se utilizarían en una operación individual de fases, lo que permite adelantar el procesamiento del material de altas leyes y combinarlo de manera de enviar una menor porción de lastre desde las fases con mayores leyes. Conclusiones relevantes son que el periodo de transición es menos valioso cuando las reservas iniciales de las fases con menores leyes son mucho mayores que las reservas iniciales de las fases con mayores leyes, que hay un nivel intermedio de la proporción entre la capacidad mina y la capacidad planta que maximiza el valor de la transición de fases, y que a mayor tasa de descuento, el periodo de traslape se adelanta, extiende e intensifica su ritmo de extracción en las fases de mayores leyes.

Palabras Claves: Ley de corte óptima, óptimo global, estrategia de consumo de reservas, control óptimo.

ABSTRACT

In this thesis a global optimum cut-off grade policy is determined within a solution space not limited by the decisions taken in its interrelated mine planning stages, as it does the traditional cut-off grade theory to separately optimize the cut-off grade with the production scheduling. We develop and employ an optimal control based algorithm to derive mathematically a Functional-Integro-Differential Equation system, which determines endogenously the reserves consumption strategy for an open pit mine divided into phases, this means, where (of which phase), how much (with what extraction rate) and how (with what cut-off grade) to extract from each phase. The consequences for the mine are a higher NPV and a different operational strategy from that obtained with the traditional theory. In particular, it is shown the value generated by performing overlap periods between phases in the optimal way, using different cut-off grades and extraction rates to those used in the individual phase operation, which allows to advance the processing of higher grade material and to combine it in order to send a smaller portion of waste from the higher grade phases. Key insights are that the transition period is less valuable when initial reserves of lower grades phases are much greater than initial reserves of higher grade phases, that there is an intermediate level of the proportion between the mine capacity and the plant capacity that maximizes the phases transition value, and that the higher the discount rate, the overlap period anticipates, extends and intensifies its extraction rate in the higher grades phases.

Keywords: Optimal cut-off grade, global optimum, reserves consumption strategy, optimal control.

1. INTRODUCCIÓN

1.1 Concepto de ley de corte

Las operaciones mineras extraen material desde depósitos minerales para posteriormente procesar una porción del material que les permita producir productos vendibles en mercados globales. En esta definición es central el concepto de depósito mineral, debido a que estos tienen características únicas que justifican analizar las estrategias para operaciones mineras desde perspectivas muy diferentes a la de la mayoría de las industrias.¹

La concentración de *commodity* de interés en el mineral, o ley, es una de las principales características de la calidad en los depósitos.² La ley es heterogénea, y por tanto se hace necesario definir el concepto de ley de corte, el cual distingue la concentración mínima que justifica económicamente la extracción, procesamiento y comercialización. El material con un contenido sobre la ley de corte es considerado mineral y es procesado para producir un *commodity* mineral vendible, y el resto del material es acumulado como lastre. La posibilidad de alterar la ley de corte permite adaptar la operación ante condiciones geológicas, técnicas y económicas cambiantes, lo que impacta significativamente a la operación y economía de un proyecto minero. Cambiar la ley de corte afecta principalmente la

¹ MacKenzie (1987) argumenta que hay 4 principales características de los depósitos que justifican el estudio de la economía minera de manera distintiva: Son inicialmente desconocidos (deben ser descubiertos), fijos en tamaño (no son renovables), variables en calidad (deben ser extraídos utilizando nueva tecnología), y fijos en localización (se ubican en lugares remotos y necesitan ser trasladados a mercados intermedios y de usos finales).

² Otras características de la calidad de los depósitos son la mineralogía, dureza y contenido de impurezas, entre otros.

tasa de producción de producto vendible, el tamaño de las reservas, los costos operativos y la vida de la mina, por lo que encontrar la política óptima de leyes de corte toma trascendental importancia en el diseño, operación y valorización.

Tradicionalmente las leyes de corte han sido escogidas utilizando criterios “marginalistas”, o break-even, los que aseguran que cada unidad procesada cubra sus costos marginales. Aunque esto es correcto desde el punto de vista de la teoría económica clásica,³ a una empresa de recursos agotables solo le asegura la maximización del flujo de caja, pero no le permite alcanzar el máximo valor presente neto del activo minero (Tilton y Guzmán, 2016). La discordancia con la teoría clásica se origina de la inherente agotabilidad de los recursos minerales y del costo de oportunidad que le impone el valor temporal del dinero, incluso en los mercados minerales competitivos.⁴

Una mina con stock de reservas agotable se comporta distinta de otras empresas. El primero en discutirlo en profundidad fue Hotelling (1931), quien muestra que el equilibrio estático de la teoría económica tradicional es inadecuado para una industria en la que el mantenimiento indefinido de una tasa estable de producción es una imposibilidad física, y por tanto los problemas de activos agotables no pueden evitar el uso de la optimización dinámica. Sin embargo, Kenneth Lane fue

³ La teoría económica clásica establece que las empresas maximizan su valor presente neto expandiendo su producción hasta que su costo marginal es igual al ingreso marginal. En mercados competitivos el ingreso marginal es igual al precio de mercado.

⁴ Considerando el hecho de que en algunos mercados existen productores minerales con la habilidad para manipular el precio, se puede concluir rápidamente que estos no son mercados competitivos. Sin embargo, Tilton and Guzmán (2016) argumentan que lo más relevante es considerar si existe o no incentivo para ejercer poder de mercado. En el mercado del cobre, por ejemplo, concluye que no existen suficientes incentivos y por tanto se puede considerar como un mercado competitivo.

el primero en focalizar este concepto en la determinación de una política de leyes de corte óptima (Lane, 1964), al notar que procesar todo el material marginalmente rentable trae consigo un importante costo de oportunidad, ya que se pospone el procesamiento de material de mejor calidad (medida exclusivamente por su ley) para tiempos futuros. Posteriormente, Lane desarrolla sus ideas en el libro “The Economic Definition of Ore” (Lane, 1988), donde explica que mientras más se pospongan las potenciales ganancias del material de mayor ley, más serán descontadas. Entonces una ley de corte marginal impone un costo de oportunidad debido al valor temporal del dinero. Bajo una resolución vía programación dinámica (Bellman, 1957), Lane establece que el determinar una estrategia de leyes de corte óptimas resulta justamente en un balance entre reducir el costo de oportunidad, aumentando la producción de commodity vendible, con el de aumentar el material enviado a botadero y la tasa de agotamiento de las reservas.

1.2 Estado del arte

Desde el trabajo precursor de Kenneth Lane, la optimización de leyes de corte ha sido tratada por varios autores, y actualmente continua siendo un activo campo de investigación. Algunos trabajos han buscado resolver el problema utilizando otros métodos o enfoques de resolución dinámicos. Yi y Sturgul (1988) lo resuelven vía control óptimo, Gu et al. (2010) utilizan programación dinámica y Bascetin y Nieto (2014) incorporan un factor que reduce la cantidad de iteraciones al método de Lane.

Mientras que otros han intentado adaptar el enfoque original a una mayor cantidad de situaciones prácticas. Osanloo y Ataei (2003) presentan un algoritmo para depósitos con múltiples metales, Asad (2005) adapta el modelo para una mina con *stockpiles* y Gholamnejad (2014) incorpora costos de rehabilitación.

La industria ha adoptado lentamente y con dificultades la utilización de políticas o estrategias de leyes de corte optimizadas en vez de criterios de leyes de corte marginales y/o constantes en el tiempo, por lo que algunos papers como Minnitt (2004) y Gu et al. (2010) se han propuesto mostrar el aumento de valor generado en minas reales. El primero aplica directamente la teoría de Lane en un depósito de oro del tipo Witwatersrand, mientras que Gu et al. lo realizan para una mina de cobre subterránea en África.

Sin embargo, el precio de la mayoría de los minerales es altamente volátil, por lo que tomar decisiones asumiendo que las predicciones de precios son acertadas no les permite conciliar los valores concretados en la práctica y los pronosticados teóricamente.⁵

En esta línea, algunas de las investigaciones han incorporado incertidumbre en la optimización. Krautkraemer (1988) es el primero en considerar un precio estocástico para optimizar el valor de una mina, a través de la ley de corte. De manera de obtener soluciones analíticas, el depósito que utiliza es simplificado a una geometría y distribución de mineral-ley en particular (por lo que no es de interés para aplicaciones reales). Otros desarrollos con precios estocásticos de la

⁵ Para el caso del cobre la experiencia de los últimos años indica que generalmente el precio pronosticado no está si quiera dentro de un rango tolerable para el precio real (Lay, 2009).

época fueron realizados por Sagi (2000), Mardones (1993), Shinkuma (2000) y Cairns y Van Quyen (1998), sin embargo fallan en determinar una política de leyes de corte. Más recientemente, desarrollos de interés han sido realizados por Johnson et al. (2010) y Thompson y Barr (2014) al modelar el depósito de una forma más realista y coherente con las prácticas mineras actuales. Johnson et al. (2010) divide el depósito en bloques, y Thompson y Barr (2014) consideran una mina a cielo abierto dividida en una serie de fases.⁶

1.3 Deficiencias en las investigaciones

Las investigaciones posteriores a Lane se han basado en su trabajo original, estableciéndose como la teoría tradicional de optimización de leyes de corte. Estas se han realizado desde perspectivas muy distintas, pero con una tendencia natural a asimilarse cada vez más a la realidad, incorporando progresivamente las complejidades técnicas, económicas y geológicas encontradas en la práctica. No obstante, todos los trabajos realizados hasta la actualidad han optimizado las leyes de corte como un proceso aislado del resto de la planificación minera, asumiendo que el resto de las etapas están pre-definidas y que, de alguna manera, fueron determinadas óptimamente. Este supuesto limita considerablemente el espacio de soluciones factibles y por tanto su optimalidad. Tal como King (2004) señala, suponer que las etapas de planificación minera estratégica se realizan por separado elimina toda garantía de alcanzar un máximo valor presente neto.

⁶ Las fases son esencialmente una sub-división del *pit* final que define los sectores de explotación. En la Figura A-1 del Anexo A se muestra una ilustración de un *pit* con 3 fases.

La gran falencia en los modelos actuales subyace en que la optimización depende totalmente del secuenciamiento de fases y ritmo de extracción utilizados, por lo que el VPN y estrategias óptimas pueden ser significativamente diferentes dependiendo de las condiciones predeterminadas. Para un secuenciamiento y ritmo de extracción distinto la estrategia debe ser totalmente distinta. Mientras el secuenciamiento, ritmos de extracción y leyes de corte determinadas son llamadas óptimas, en ningún caso se puede decir lo mismo de su combinación. Más aún, que sean óptimas por separado no asegura que se acerquen o asimilen a las estrategias que maximizan el valor de toda la operación en su conjunto.

1.4 Hipótesis y objetivos

Es necesario integrar las etapas de la planificación que son relevantes para la optimización de leyes de corte. De lo contrario, se alcanza solamente una optimalidad local, de acuerdo a un espacio de soluciones posibles acotado por las decisiones exógenas a la optimización, tales como el secuenciamiento y ritmos de extracción utilizados.

Con el objetivo de reformular el problema, de manera de maximizar el valor de toda la operación minera, se desarrolla un modelo dinámico global, para lo que proponemos optimizar de forma conjunta el secuenciamiento, ritmo de extracción y ley de corte. De esta forma, buscamos determinar endógenamente la estrategia de consumo de reservas.⁷

⁷ La estrategia de consumo de reservas debe indicar exhaustivamente cómo consumir los recursos mineros, lo cual implica indicar la fase desde donde se debe extraer, la cantidad de material que se debe extraer y

El problema definido de esta manera es, sin embargo, bastante complejo. Por esto, optamos por no incorporar la mayoría de las consideraciones prácticas incorporadas a través de la evolución de las investigaciones, tales como *stockpiles*, capacidades de mina y planta flexibles, múltiples depósitos y precios con incertidumbre. Consecuentemente, no pretendemos reflejar fielmente el VPN que alcanzaría la operación, sino que plantear un sistema que permita extraer reglas operacionales óptimas globales para el secuenciamiento, tasas de extracción y leyes de corte, y que sean aplicables a minas reales. Utilizando una aplicación numérica a una mina de cobre ficticia, mostramos cual es el beneficio de usar este enfoque con respecto a la teoría tradicional de optimización de leyes de corte.

El problema de optimización es abordado con un algoritmo basado en control óptimo, el cual fue especialmente diseñado para deducir un sistema de ecuaciones functional-integral-diferencial (sistema FIDE) que puede ser resuelto numéricamente.⁸ En nuestro conocimiento este sistema no tiene precedentes en la literatura y sobre este nuevo modelo, esperamos reiniciar el desarrollo de investigaciones en una línea correcta.

1.5 Organización del documento

Esta tesis está organizada como sigue. Primero, la sección 2 formula y describe el modelo minero planteado para una optimización de leyes de corte desde una perspectiva global. Sección 3 describe el algoritmo de optimización diseñado.

que parte de ese material debe ser procesado y cual no. Esto queda totalmente determinado por el secuenciamiento, tasa de extracción y ley de corte utilizada en cada una de las fases.

⁸ Por sus siglas en inglés, *Functional-Integral-Differential Equation system*.

Sección 4 deriva el sistema FIDE que resuelve el problema. Sección 5 ilustra el modelo y el algoritmo para una mina con dos fases en operación, y ejemplifica los resultados numéricos para una mina de cobre ficticia. Sección 6 discute los principales supuestos, limitaciones y extensiones del modelo, además de exponer las principales conclusiones.

2. MODELAMIENTO

De modo de sentar las bases para el modelo propuesto, en esta sección primero se provee de una descripción general del proceso de planificación minera comúnmente utilizado al optimizar leyes de corte, el cual consiste en una serie de optimizaciones, o heurísticas,⁹ las que no necesariamente garantizan un óptimo global. Posteriormente se plantea el modelo matemático, el cual considera una integración de las etapas de la planificación inmediatamente relacionadas con la determinación de una política de leyes de corte, de modo de alcanzar un óptimo para toda la operación.

2.1 Proceso de planificación minera

De acuerdo al esquema propuesto por Dagdelen (2001), la planificación minera es un proceso de múltiples etapas que consiste en determinar sucesivamente la capacidad de la mina, costos de producción, *pit* final, diseño de fases, estrategia de leyes de corte y estrategia de producción.¹⁰ El proceso es circular, y además incluye sub-ciclos entre los costos de producción y el *pit* final, y entre la estrategia de leyes de corte y la estrategia de producción, tal como se muestra en la Figura 2-1. Cada ciclo o sub-ciclo, debe ser optimizado recursivamente hasta obtener un valor aceptable, y en ningún caso óptimo, para la operación en su conjunto.

⁹ El diseño de fases, por ejemplo, se realiza comúnmente a través de reglas de operación empíricas.

¹⁰ La estrategia de producción está compuesta por el secuenciamiento de fases y determinación de la tasa de extracción.

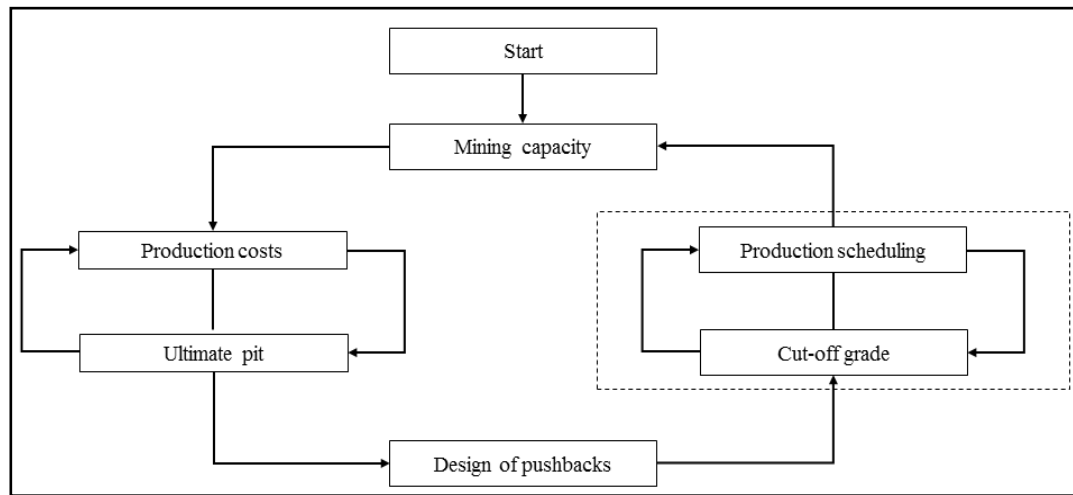


Figura 2-1: Análisis circular de las etapas de la planificación minera tradicional, basado en Dagdelen (2001)

En base a esto, la literatura desarrollada permite determinar una estrategia de leyes de corte óptima para una estrategia de producción predefinida, o equivalentemente para un secuenciamiento de fases y ritmo de extracción predefinidos. En consecuencia, para encontrar el óptimo global sería necesario probar todas las posibles combinaciones de estas etapas. Sin embargo, la cantidad de combinaciones es muy grande y aumenta rápidamente con la cantidad de fases diseñadas, más aún, al considerar las posibilidades de operación de fases simultáneamente, las combinaciones se vuelven infinitas.¹¹ De esta manera, buscar la mejor estrategia con este método difícilmente conduce a un óptimo global.

¹¹ El traslape entre dos fases, por ejemplo, se puede producir en cualquier momento antes del agotamiento de la fase en operación. Cada una de estas posibilidades de traslape en distintos instantes de tiempo constituye una combinación, lo que en tiempo continuo se traduce en infinitas combinaciones.

2.2 Formulación del modelo minero

Elaboramos un modelo matemático que representa la operación de una mina a cielo abierto en tiempo continuo, la cual se encuentra dividida en n fases sin orden predeterminado de extracción (en el Anexo A se detalla el concepto de fases). Esto quiere decir que no tienen un orden definido de explotación.

En este modelo se busca optimizar el sub-ciclo de leyes de corte y estrategia de producción (recuadro al lado derecho de la Figura 2-1), de manera de determinar simultáneamente dónde (de qué fase), cuánto (a qué tasa de extracción) y cómo (con qué ley de corte) extraer cada fase.

De este modo, el objetivo de la mina consiste en maximizar su valor presente neto, a través de una estrategia de consumo de reservas óptima en el tiempo, para lo que la empresa minera debe seleccionar sus ritmos de extracción, $q(t) = \{q_1(t), \dots, q_n(t)\}$, leyes de corte, $G(t) = \{G_1(t), \dots, G_n(t)\}$, y tiempos de agotamiento, $T = \{T_1, \dots, T_n\}$, en cada una de sus fases, en orden de consumir sus reservas, $S(t) = \{S_1(t), \dots, S_n(t)\}$.

Los ritmos de extracción son funciones continuas en el tiempo que van entre 0 y 1, y que permiten racionar la capacidad total de extracción de la mina entre las distintas fases (esto se expresa más adelante, en las restricciones mineras del problema, (2.9) y (2.10)). De igual modo, las leyes de corte son funciones continuas que representan la cantidad mínima de *commodity* que debe enviarse a la planta de procesamiento por cada unidad de material extraído en cada fase. Los tiempos de agotamiento son variables que definen el instante en que cada fase no

tiene más reservas para explotar. Por último, las reservas son funciones continuas que representan la cantidad de material en cada fase.

Se considera una mineralización heterogénea, por lo que cada fase i tiene asociada una función densidad y distribución de leyes estacionaria, $f_i(g)$ y $F_i(g)$. Así, la ley media de una fase queda expresada en la ecuación (2.1) y la ley media para toda la operación en (2.2).

$$\bar{g}_i(t) = \frac{\int_{G_i(t)}^1 g f_i(g) dg}{\int_{G_i(t)}^1 f_i(g) dg} \quad (2.1)$$

$$\bar{g}(t) = \frac{\sum_{j=1}^n (K_p q_j(t)) \bar{g}_j(t)}{K_p} = \sum_{j=1}^n q_j(t) \frac{\int_{G_i(t)}^1 g f_i(g) dg}{\int_{G_i(t)}^1 f_i(g) dg} \quad (2.2)$$

Sea r la tasa de descuento relevante para el proyecto, $p(t)$ el precio del *commodity*, R la recuperación metalúrgica. Además se supone que C_p el costo de procesamiento, C_m el costo mina, K_p capacidad de procesamiento de la planta y K_m capacidad de extracción de la mina, son los mismos para cada fase.¹²

Entonces, debemos determinar que parte del material va a ser procesado, de acuerdo a los ritmos de extracción y leyes de corte escogidos. Esto es el mineral en la fase i , $O_i(G_i(t), q_i(t))$, representado en (2.3) por la parte de la distribución que se encuentra sobre la ley de corte multiplicada por el material extraído. El resto de material o lastre, $W_i(G_i(t), q_i(t))$, representado en (2.4) por la porción de la

¹² Este supuesto se comporta bastante bien para la recuperación, costos de procesamiento y capacidad planta, no obstante el costo mina debería variar a través de las fases (según su profundidad) y la capacidad mina debería variar en el mediano plazo (por compra/venta de equipos). El modelo podría utilizar valores distintos para cada fase y en el tiempo, sin complejizar el método de resolución, sin embargo, utilizamos parámetros constantes para simplificar la exposición del modelo.

distribución bajo la ley de corte multiplicada por el material extraído, va irreversiblemente a botadero.

$$O_i(G_i(t), q_i(t)) = \left(\int_{G_i(t)}^1 f_i(g) dg \right) q_i(t) K_m = \left(1 - F_i(G_i(t)) \right) q_i(t) K_m \quad (2.3)$$

$$W_i(G_i(t), q_i(t)) = \left(\int_0^{G_i(t)} f_i(g) dg \right) q_i(t) K_m = \left(F_i(G_i(t)) \right) q_i(t) K_m \quad (2.4)$$

De esta manera, la optimización del valor de la mina queda expresado por

$$\max_{q(t), G(t), T} \left[\sum_{j=1}^n \left(\int_0^{T_j} e^{-rt} \left(p(t) R O_j(G_j(t), q_j(t)) \bar{g}_j(G_j(t)) \right) dt \right) - \int_0^{\text{Argmax}_j[T_j]} e^{-rt} (C_p K_p + C_m K_m) dt \right] \quad (2.5)$$

,¹³ sujeto a restricciones geológicas, mineras y de procesamiento.

Las restricciones geológicas surgen de la no renovabilidad de los recursos. Se tiene una cantidad limitada de reservas y estas disminuyen con la producción, lo que se expresa en las ecuaciones (2.6) y (2.7). Además, a medida que los costos unitarios asociados a la extracción y procesamiento sean menores que el precio, siempre será conveniente extraer todas las reservas,¹⁴ lo que es expresado en (2.8).

$$S_i(0) = S_i^0 \quad (2.6)$$

$$\dot{S}_i(t) = -K_m q_i(t) \quad (2.7)$$

$$S_i(T_i) = 0 \quad (2.8)$$

La mina restringe los ritmos de extracción utilizados en cada una de las fases disponibles, al mismo tiempo que requiere que ocupen toda la capacidad mina por unidad de tiempo. Esto es expresado en las ecuaciones (2.9) y (2.10).

¹³ A pesar de que el VPN de todas las fases es medido desde el tiempo cero, estas pueden empezar en cualquier momento de acuerdo a la activación de su variable de ritmo de producción.

¹⁴ Considerando que los parámetros son constantes, el precio es mayor que los costos en cualquier instante de tiempo.

También es posible restringir a una máxima cantidad de fases activas simultáneamente, lo cual es proporcional al número de equipos de carguío presentes en la mina. Adicionalmente, existen restricciones de precedencia entre fases, las cuales se asocian a su espacialidad.

$$0 \leq q_i(t) \leq 1 \quad (2.9)$$

$$\sum_{j=1}^n q_j(t) = 1 \quad (2.10)$$

Por último, se restringe a que la planta de procesamiento debe ser completamente llenada por el mineral extraído en las fases,¹⁵ lo que es expresado en la ecuación (2.11).

$$\sum_{j=1}^n O_j(G_J(t), q_j(t)) = K_p \quad (2.11)$$

Entonces el problema es maximizar el VPN expresado en (2.5), a través de las leyes de corte, ritmos de extracción y tiempos de agotamiento, sujeto a las restricciones en (2.6) - (2.11).

¹⁵ El *stripping ratio* o porción lastre-mineral para cada fase está definido por $\frac{w_j(G_J(t))}{o_j(G_J(t))}$, por lo que la ecuación (2.10) junto a la (2.11) son equivalentes a fijar un *stripping ratio* constante de $\frac{\sum_{j=1}^n w_j(G_J(t))}{\sum_{j=1}^n o_j(G_J(t))} = \frac{K_m - \sum_{j=1}^n o_j(G_J(t))}{\sum_{j=1}^n o_j(G_J(t))} = \frac{K_m}{K_p} - 1$ para toda la mina.

3. MÉTODO DE RESOLUCIÓN

3.1 Teoría de control óptimo

El modelo resulta en un problema de optimización dinámico en tiempo continuo, debido a que el valor en un periodo dado no solo se ve afectado por las decisiones contemporáneas, sino que también por lo realizado en el pasado. Este efecto se produce a través de las reservas, las cuales se reducen a lo largo de la vida de la mina dependiendo de la estrategia de consumo utilizada en el pasado.

El método de optimización dinámica continua que mejor se adapta al modelo propuesto es el de control óptimo, debido a que no está restringido a soluciones interiores, sino que también permite encontrar soluciones en los límites,¹⁶ permitiendo visualizar mejor que otros métodos a los problemas que involucran restricciones en las derivadas (Kamien y Schwartz, 2012).

En la teoría de control óptimo las variables son divididas en dos clases: las variables de estado y las de control. Las variables de control deben ser funciones continuas por partes en el tiempo, que estén sujetas a elección en la función objetivo y que tengan un efecto en el valor de las variables de estado de interés. Por otra parte, el movimiento de las variables de estado es gobernado por ecuaciones diferenciales (Chiang, 1992). En otras palabras, las variables de control influyen a la función objetivo directamente por su propio valor, e indirectamente, a través del impacto en la evolución de la variable de estado.

¹⁶ En este sentido, control óptimo es análogo a las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker, y el cálculo de variaciones es análogo al cálculo clásico.

Particularmente en este problema, las reservas son variables de estado, y tanto las leyes de corte como los ritmos de extracción son variables de control. Como tal, estas influyen el VPN y constituyen precisamente la estrategia de consumo de reservas.

Las condiciones necesarias de primer orden en control óptimo, conocidas como el principio del máximo de Pontryagin (Pontryagin et al., 1962),¹⁷ se encuentran detalladas en el Anexo B. Estas transforman el problema de optimización dinámica restringido a uno irrestricto, para lo cual usa una función Hamiltoniano. Luego establecen que en el óptimo las variables de control, variables de estado y variables de coestado deben satisfacer simultáneamente: las ecuaciones de estado, ecuaciones adjunta, condiciones de optimalidad y condiciones de transversalidad.

18

3.2 Algoritmo de resolución

Aun considerando la mencionada aplicabilidad de control óptimo, el VPN de este problema se compone por una suma de funcionales con tiempos finales distintos para cada fase y que deben ser determinados endógenamente, por lo que no es posible de resolver directamente vía métodos de optimización dinámica,¹⁹ ya que estos métodos permiten encontrar solo un tiempo inicial y final por optimización.

¹⁷ El principio del máximo será utilizado en valor corriente, ya que permite obtener un set de ecuaciones diferenciales autónomas.

¹⁸ Las variables de coestado son las funciones multiplicadores de las que se vale el Hamiltoniano para incorporar las restricciones del problema.

¹⁹ Calculo de variaciones, control óptimo y programación dinámica.

3.2.1 Concepto subyacente

Considerando que cada fase tiene distintos tiempos finales e iniciales, el problema planteado es complejo y se asemeja a un juego dinámico diferencial cooperativo,²⁰ debido a que la apertura y cierre de la fase, ritmo de extracción y ley de corte pueden maximizar el valor de cada fase dinámicamente, pero al tener sectores independientes de la mina en el tiempo y restricciones comunes para la mina, planta y recursos, esto significa maximizar todo en forma simultánea con un inherente *trade-off* entre las fases, por el valor temporal del dinero. Desde esta perspectiva, las fases actúan de manera independiente para maximizar su valor, sin embargo, todas deben “cooperar” para maximizar el valor del proyecto en simultaneo, compitiendo por recursos y capacidades limitadas. Desafortunadamente, las condiciones de optimalidad requeridas en un juego dinámico cooperativo son determinadas en base a los mismos métodos de optimización dinámica, los cuales no pueden encontrar un equilibrio para más de un tiempo final y/o inicial endógeno. No obstante, el razonamiento subyacente aun es útil, debido a que indica la factibilidad de analizar el comportamiento de cada fase de manera separada, para luego utilizar sus resultados simultáneamente en una optimización del problema general.

²⁰ No es exactamente un juego, ya que mientras el valor de toda la mina no aumente, las fases no tienen ningún incentivo para desviar su comportamiento con el único objetivo de aumentar su valor (Yeung y Petrosjan, 2006).

3.2.2 Formulación

Desarrollamos un algoritmo de resolución, expresado conceptualmente en la Figura 3-1. Este consiste en desagregar el problema en todos los posibles escenarios, C_k , los cuales representan una posible secuencia de operación. Los escenarios se encuentran conformados por una secuencia de sub-problemas, P_l , los cuales representan la operación de un número de fases simultáneamente.²¹

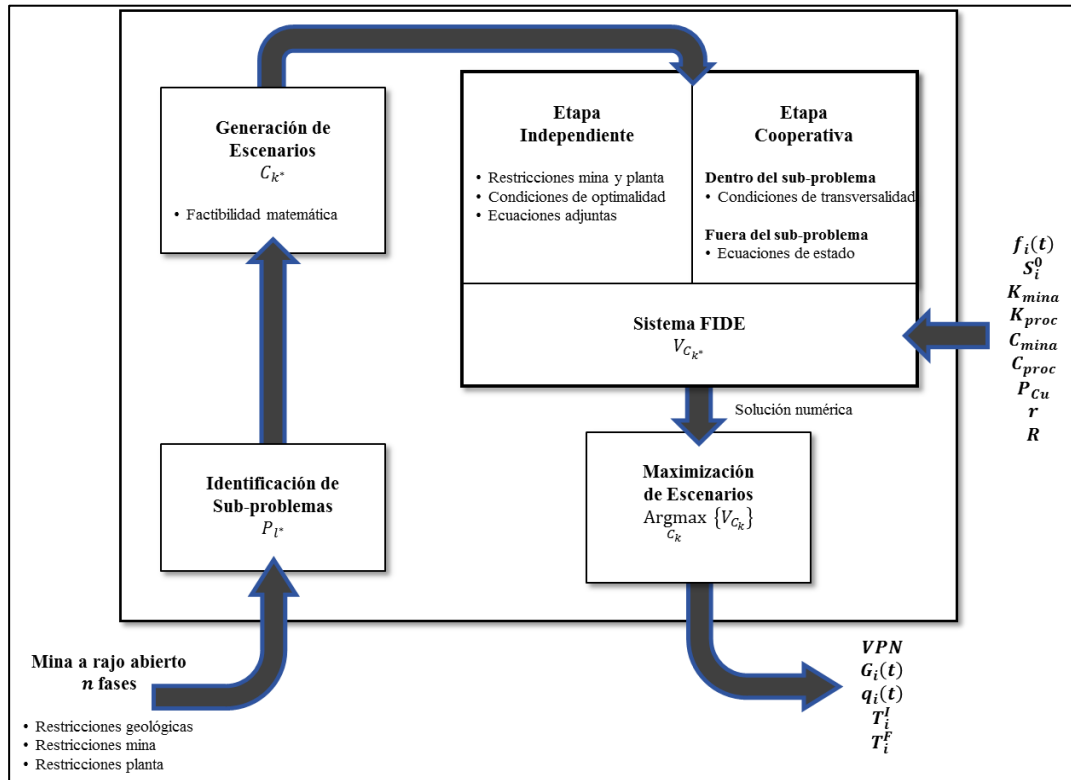


Figura 3-1: Descripción conceptual del algoritmo de resolución

²¹ Nos referimos a los escenarios con la notación $C_k = \{\{P_a\}, \dots, \{P_b\}\}$ para indicar la secuencia de sub-problemas en su respectivo orden. Por ejemplo, si la mina tiene dos fases, un escenario posible es empezar operando la fase 1, luego ambas fases simultáneamente y finalmente la fase 2. Cada una de estas etapas es un sub-problema.

Los escenarios permiten plantear los sub-problemas, los cuales son de menor complejidad que el problema original. El beneficio de optimizar los sub-problemas por separado es que cada uno de estos tiene solo un tiempo inicial y final a determinar, y por tanto es posible resolverlos vía control óptimo.

Es relevante notar que la eficiencia del algoritmo depende del número escenarios evaluados, por lo que es importante definir el número mínimo de escenarios requeridos. Uno de los supuestos detrás del planteamiento es que una vez empezada la extracción de una fase, esta se debe extraer hasta su agotamiento, por lo que existen escenarios que no son posibles de construir matemáticamente.²² Además, hay escenarios que se encuentran contenidos en otros.²³

En cada escenario las variables óptimas quedan determinadas por una optimización vía control óptimo de cada sub-problema en 2 etapas: independiente y cooperativa.

La etapa independiente considera a cada sub-problema de manera aislada respecto al resto de sub-problemas. Incorpora las restricciones de utilización de mina y planta (ecuaciones (2.9), (2.10) y (2.11)), y requiere el cumplimiento de las condiciones de optimalidad y ecuaciones adjuntas. Estas permiten obtener un

²² Por ejemplo, el escenario compuesto por $\{\{\text{fase 1}\}, \{\text{fases 2 y 3}\}, \{\text{fases 1 y 2}\}\}$ no es posible, debido a que las fases se explotan hasta su agotamiento, por lo que no es posible volver a ella a través del sub-problema que extrae las fases 1 y 2 simultáneamente.

²³ Por ejemplo, el escenario compuesto por $\{\{\text{fase 1}\}, \{\text{fase 3}\}, \{\text{fase 2}\}\}$ es redundante, debido a que se encuentra contenido en el escenario compuesto por $\{\{\text{fase 1}\}, \{\text{fase 1-3}\}, \{\text{fase 3}\}, \{\text{fase 1-2}\}, \{\text{fase 2}\}\}$. Si es que los tiempos finales e iniciales entre $\{\text{fases 1-3}\}$ y $\{\text{fases 1-2}\}$ fueran los mismos, es equivalente a que estos sub-problemas no estuvieran en el escenario.

valor, V_{P_l} , para el sub-problema, dependiente de sus tiempos iniciales y finales, T_l^I y T_l^F .

Las variables que permiten la etapa cooperativa son los tiempos iniciales y finales de cada sub-problema, los cuales conectan a los sub-problemas. La etapa cooperativa pone al sub-problema en el contexto del escenario al considerarlo como parte de la secuencia, por lo que dentro de cada sub-problema es posible generar las condiciones de transversalidad (las que dependen del sub-problema posicionado antes y después), y fuera de estos se generan las condiciones de agotabilidad (por las que entre todas las fases deben extraer la totalidad de las reservas), expresadas en las ecuaciones (2.6), (2.7) y (2.8). En esta etapa, el VPN de los otros sub-problemas son considerados como un valor terminal.²⁴

De la resolución de estas dos etapas en simultáneo, se obtiene un sistema Funcional-Integral-Diferencial (FIDE) desde el que podemos determinar las variables óptimas de cada sub-problema, y con esto el valor del escenario, V_{C_k} .

Finalmente, se evalúan todos los escenarios definidos para los sub-problema identificados, donde la estrategia óptima queda determinada por el escenario que entrega el mayor valor presente neto. La Figura 3-2 presenta una ilustración gráfica del algoritmo de resolución para una mina con tres fases.

²⁴ Un valor terminal es un término que depende solamente de la posición final de las variables, y no de su trayectoria. En control óptimo pueden excluirse del Hamiltoniano, pero deben utilizarse en las condiciones de transversalidad.

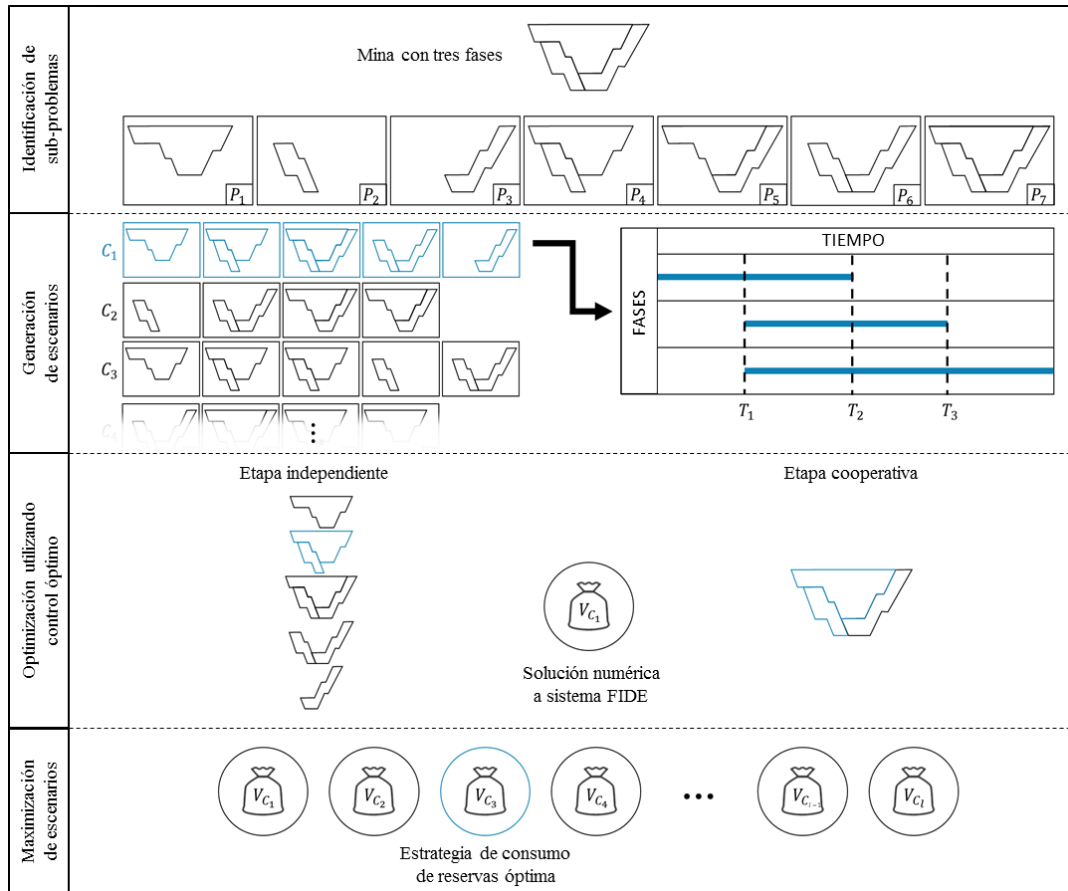


Figura 3-2: Ilustración gráfica del algoritmo de resolución
para una mina de tres fases

4. DERIVACIÓN DE LA POLÍTICA ÓPTIMA

En esta sección aplicamos el algoritmo de resolución en el modelo minero, de modo de obtener un sistema de ecuaciones que encuentre la estrategia de consumo de reservas óptima para una mina genérica.

4.1 Definiciones preliminares

Sea C_k^* uno de los escenarios posibles para la operación a cielo abierto, compuesta por una secuencia de l sub-problemas, y donde $M(\cdot)$ es una función que mapea desde los sub-problemas hasta su orden dentro del escenario, $\{1, 2, \dots, l\} \subset \mathbb{N}$. Entonces para P_{l^*} , un sub-problema en el que se encuentran $m \leq n$ fases en operación simultánea, ubicado en la h -ésima posición del escenario, $M(l^*) = h$, y que empieza en el tiempo $T_{l^*}^I$ y termina en $T_{l^*}^F$, su VPN es igual a (4.1).

$$\max_{q(t), G(t), T} \left[\left(\int_{T_{l^*}^I}^{T_{l^*}^F} \sum_{j=1}^m e^{-rt} \left(p(t) RO_j(G_j(t), q_j(t)) \bar{g}_j(G_j(t)) \right) dt \right) - \int_{T_{l^*}^I}^{T_{l^*}^F} e^{-rt} (C_p K_p + C_m K_m) dt \right] \quad (4.1)$$

Antes de aplicar el método de optimización dinámica es importante señalar que a pesar de que las leyes de corte y tasas de extracción son variables de control, ya que su selección futura depende de su selección en el presente, solamente las tasas de extracción poseen una ecuación de estado que define su cambio dinámicamente. Las leyes de corte varían dinámicamente, pero considerando que la distribución de las leyes es estacionaria, estas no poseen una ecuación de estado.²⁵

²⁵ Si la distribución de leyes cambiara en el tiempo, lo haría respecto a la ley de corte seleccionada, generando su propia ecuación de estado.

A continuación, presentamos la etapa independiente y cooperativa. En la primera se trata al sub-problema de manera aislada, y en la segunda como consecuencia de ser parte de una secuencia definida por el escenario en el que se encuentra.

4.2 Etapa independiente

La etapa independiente se encuentra sujeta a restricciones de utilización planta y mina, expresadas en (4.4) y (4.5), y en el óptimo debe cumplir con las condiciones de optimalidad y ecuaciones adjuntas, expresadas en (4.6) y (4.7).

El Hamiltoniano en valor corriente utilizado en (4.6) se encuentra expresado en (4.2). En este es necesario señalar que los costos son considerados como un valor terminal, expresados en (4.3), debido a que no dependen de variables de control y/o variables de estado.

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^m \left(p(t) R O_j \left(G_j(t), q_j(t) \right) \bar{g}_j \left(G_j(t) \right) \right) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \left(-q_j(t) K_m \right) \quad (4.2)$$

$$\varphi(T_l^I, T_l^F) = \frac{c_p K_p + c_m K_m}{\rho} \left(e^{-r T_l^F} - e^{-r T_l^I} \right) \quad (4.3)$$

$$\sum_{j=1}^m q_j(t) = 1 \quad (4.4)$$

$$\sum_{j=1}^n O_j \left(G_j(t), q_j(t) \right) = K_p \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial q_i} = 0 \quad (4.6)$$

$$\dot{\lambda}_i(t) = r \lambda_i(t) - \frac{\partial \hat{H}}{\partial S_i} = r \lambda_i(t) \quad (4.7)$$

En la ecuación (4.7), $\lambda_i(t)$ es la variable de coestado en valor corriente y representa el valor marginal de las reservas restantes de la fase i en el tiempo. Es

por esto que se asociada al precio de las reservas no explotadas o, como es llamado en la literatura de recursos agotables, costos de uso (Tilton, 2003).²⁶

De esta manera, el Hamiltoniano representa una vista general e instantánea del problema, ya que el primer término representa al flujo de caja adquirido por la estrategia de consumo de reserva utilizada, y el segundo término representa al flujo futuro perdido como resultado de su producción actual. La maximización del VPN se lleva a cabo a través de la maximización del Hamiltoniano en (4.6), lo que significa un *trade-off* entre estos dos efectos.

4.3 Etapa cooperativa

Tal como se señalamos en la sección 3.2.2, en la etapa cooperativa se requiere que el sub-problema satisfaga condiciones y restricciones como parte del escenario, para lo que se necesita saber qué sub-problemas están localizados antes y después en la secuencia del escenario.

La conexión entre los sub-problemas se realiza a través de sus tiempos de inicio y término. El tiempo inicial del sub-problema analizado es igual al tiempo final del sub-problema anterior, y el tiempo final del sub-problema analizado es igual al tiempo inicial del sub-problema posterior. Esto se expresa en las ecuaciones (4.8) y (4.9), donde la función inversa de $M(\cdot)$ indica cuál sub-problema está situado en la posición señalada en su argumento.

²⁶ Los costos de uso son equivalentes al valor presente neto de los ingresos futuros que la mina pierde como resultado de incrementar su producción actual en una unidad.

$$T_l^I = T_{M^{-1}(h-1)}^F \quad (4.8)$$

$$T_l^F = T_{M^{-1}(h+1)}^I \quad (4.9)$$

Esto permite definir las condiciones dentro y fuera del sub-problema.

4.3.1 Dentro del sub-problema

Las condiciones para la optimización cooperativa dentro del sub-problema son las de transversalidad, expresadas en (4.10), (4.11), (4.12) y (4.13).

$$\lambda_i(T_l^I) = 0 \quad (4.10)$$

$$\lambda_i(T_l^F) = 0 \quad (4.11)$$

$$\hat{H}(T_l^I) = \frac{\partial \varphi(T_l^I, T_l^F)}{\partial T_l^I} + \sum_{\forall l^* \neq l} \frac{\partial V_{P_{l^*}}(T_{l^*}^I, T_{l^*}^F)}{\partial T_l^I} \quad (4.12)$$

$$\hat{H}(T_l^F) = - \frac{\partial \varphi(T_l^I, T_l^F)}{\partial T_l^F} - \sum_{\forall l^* \neq l} \frac{\partial V_{P_{l^*}}(T_{l^*}^I, T_{l^*}^F)}{\partial T_l^F} \quad (4.13)$$

Las condiciones de transversalidad (4.10) y (4.11) indican que la función de coestado de la fase deben ser cero en los tiempos finales e iniciales, sin embargo, estas deben satisfacerse solamente si anticipadamente no se conoce la cantidad de reservas al inicio y/o final del sub-problema, lo que depende del sub-problema precedente y subsecuente en el escenario.²⁷ En otras palabras, el sub-problema debe extraer desde y hasta el momento en que cualquier unidad adicional de reservas no genere valor.

²⁷ Por ejemplo, para el sub-problema {fase 1-2} en el escenario {{fase 1}, {fases 1-2}, {fases 2-3}}, se sabe con exactitud que las reservas de la fase 1 al final del sub-problema serán cero, ya que no continuar con la fase 1 significa que se agotó. De manera análoga, se conoce la cantidad de reservas de la fase 2 al inicio del sub-problema, ya que se acaba de empezar su extracción en este escenario.

La condición de transversalidad en (4.12) indica que el Hamiltoniano en el tiempo inicial debe ser igual a la derivada del valor terminal respecto al tiempo. Similarmente, la condición (4.13) indica que el Hamiltoniano en el tiempo final debe ser igual al valor negativo de la derivada del valor terminal respecto al tiempo. Estas condiciones deben satisfacerse solamente si de antemano los tiempos iniciales y/o finales no se conocen con precisión y significan que el sub-problema debe operar desde y hasta el instante en que el flujo de caja general, esto es el ganado en el presente menos el perdido en el futuro debido a la operación actual, compense exactamente al valor terminal extra generado o destruido.²⁸ El Hamiltoniano es justamente el precio sombra de extender los límites de integración en una pequeña cantidad (Kamien y Schwartz, 2012).

Cabe notar que el valor terminal, $\varphi(T_{l^*}^I, T_{l^*}^F) + \sum_{\forall l \neq l^*} V_{P_l}(T_l^I, T_l^F)$, se compone de dos términos. El primero son los, ya mencionados, costos de procesamiento y extracción, y el segundo es la suma del valor de los otros sub-problemas. Este último es una función de los tiempos finales e iniciales de sus respectivos sub-problemas, los cuales no pueden determinarse en las optimizaciones individuales, ya que se presenta un *trade-off* entre su propio valor y el valor del resto de los sub-problemas.

²⁸ La diferencia de signo entre la condición para el tiempo final e inicial se debe a que tienen movimientos opuestos respecto al valor terminal. Mientras el tiempo final disminuye, el costo de operación disminuye y el valor del resto de los sub-problemas aumenta, por lo cual el valor terminal aumenta. En cambio, cuando el tiempo inicial disminuye, el costo de operación aumenta y el valor del resto de los sub-problemas disminuye, por lo que el valor terminal disminuye.

4.3.2 Fuera del sub-problema

La etapa cooperativa fuera del sub-problema abarca todo el escenario, razón por la cual se encuentra sujeta a las ecuaciones de estado, expresadas en (4.14), (4.15) y (4.16), las que indican que entre todos los sub-problemas, o análogamente entre todas las fases, deben consumir todas las reservas. También se encuentra sujeta a los tiempos finales e iniciales del escenario, expresados en (4.17) y (4.18), donde el tiempo final es el resultado de haber extraído las reservas de todas las fases.²⁹

$$\dot{S}_i(t) = -K_m \sum_{l=1}^n q_l(t) \quad (4.14)$$

$$S_i(0) = S_i^0 \quad (4.15)$$

$$S_i(T_i) = 0 \quad (4.16)$$

$$T_{M^{-1}(1)}^I = 0 \quad (4.17)$$

$$T_{M^{-1}(L)}^F = \frac{\sum_{j=1}^n S_j^0}{K_m} \quad (4.18)$$

4.4 Sistema FIDE general

Las ecuaciones (4.4) - (4.7) de la etapa independiente de los sub-problemas, las ecuaciones (4.8) - (4.13) de la optimización cooperativa dentro de los sub-problemas y las ecuaciones (4.14) - (4.18) de la etapa cooperativa fuera de los sub-problemas, forman un sistema Funcional-Integral-Diferencial no lineal,³⁰ o sistema

²⁹ El costo y precio son considerados constantes, por lo que a medida que el costo sea menor que el precio siempre lo óptimo es consumir toda la envolvente de reservas.

³⁰ (4.5) y (4.6) son ecuaciones integrales, (4.7) y (4.14) son ecuaciones diferenciales, (4.12) y (4.13) son ecuaciones funcionales, y el resto de ecuaciones del sistema son algebraicas. Es importante señalar que hay ecuaciones que pueden ser expresadas de diferentes formas, y por tanto pueden corresponder a más de un tipo de ecuaciones. Es por esto que fueron clasificadas de acuerdo a su forma más simple: algebraica, funcional, diferencial o integral, en ese orden.

FIDE, el que posiblemente no se pueda resolver analíticamente en la mayoría de los casos de interés, pero que queda completamente determinado por las funciones a encontrar, es decir leyes de corte, ritmos de extracción y tiempos de transición entre fases (los cuales definen la secuencia de fases).

En nuestro conocimiento, este sistema no ha sido planteado, ni resuelto matemáticamente en el pasado. El sistema representa una corrección importante a la base del planteamiento tradicional de optimización de leyes de corte, y simultáneamente permite determinar la estrategia óptima de secuenciamiento, transición y extracción. Esto es la estrategia de consumo de reservas óptima.

5. CASO DE APLICACIÓN

Para ilustrar el método de resolución, sistema FIDE y resultados numéricos, en esta sección resolvemos el problema para el caso de una mina con dos fases, y posteriormente aplicamos el sistema encontrado en una mina ficticia de cobre.

5.1 Mina con dos fases

5.1.1 Definiciones preliminares

Para una operación con dos fases, el objetivo consiste en maximizar el VPN en (5.1) sujeto a (5.2) - (5.7).

$$\max_{q_1(t), q_2(t), G_1(t), G_2(t), T_1, T_2} \left[\int_0^{T_1} e^{-rt} (p(t)RO_1(G_1(t), q_1(t))\bar{g}_1(G_1(t))) dt + \int_0^{T_2} e^{-rt} (p(t)RO_2(G_2(t), q_2(t))\bar{g}_2(G_2(t))) dt - \int_0^{\text{Argmax}_{\{1,2\}}[T_1, T_2]} e^{-rt} (C_p K_p + C_m K_m) dt \right] \quad (5.1)$$

$$\dot{S}_1(t) = -K_m q_1(t), \dot{S}_2(t) = -K_m q_2(t) \quad (5.2)$$

$$S_1(0) = S_1^0, S_2(0) = S_2^0 \quad (5.3)$$

$$S_1(T_1) = 0, S_2(T_2) = 0 \quad (5.4)$$

$$0 \leq q_1(t) \leq 1, 0 \leq q_2(t) \leq 1 \quad (5.5)$$

$$q_1(t) + q_2(t) = 1 \quad (5.6)$$

$$O_1(G_1(t), q_1(t)) + O_2(G_2(t), q_2(t)) = K_p \quad (5.7)$$

Tal como mencionamos en la sección 3.2, el VPN es una suma de funcionales con tiempos finales distintos y endógenos, T_1 y T_2 .

Al aplicar el algoritmo de resolución es necesario identificar todas las posibles combinaciones de fases, es decir que solamente se opere en una fase, P_1 y P_3 , y que operen ambas fases simultáneamente, P_2 .

Los escenarios son C_1 y C_2 , en los cuales se parte operando en una de las fases, luego en ambas simultáneamente y finalmente en la otra fase, es decir $C_1 = \{\{P_1\}, \{P_2\}, \{P_3\}\}$ y $C_2 = \{\{P_3\}, \{P_2\}, \{P_1\}\}$. A continuación se resuelve C_1 , ya que C_2 es análogo, y todo otro escenario es redundante o imposible de construir.

5.1.2 Etapa independiente

En el primer sub-problema de C_1 , el cual va desde el tiempo T_1^I a T_1^F y solo opera la fase 1, se debe maximizar (5.8) sujeto a (5.9) y (5.10).

$$\max_{q_1(t), G_1(t)} \left[\int_{T_1^I}^{T_1^F} e^{-rt} (p(t)RO_1(G_1(t), q_1(t))(G_1(t)) - C_p K_p - C_m K_m) dt \right] \quad (5.8)$$

$$q_1(t) = 1 \quad (5.9)$$

$$O_1(G_1(t), q_1(t)) = K_p \quad (5.10)$$

Los tiempos T_1^I y T_1^F en (5.8) son parámetros en esta etapa, no obstante, son determinados endógenamente en la etapa cooperativa. Este caso es bastante simple, y su estrategia queda inmediatamente determinada por el ritmo de extracción en (5.11) y (5.12) a partir de (5.9) y la ley de corte en (5.13) a partir de (5.10).

$$q_1(t) = 1 \quad (5.11)$$

$$q_2(t) = 0 \quad (5.12)$$

$$G_1(t) = F_1^{-1} \left(1 - \frac{K_p}{K_m} \right) \quad (5.13)$$

Obtenemos un valor para el VPN de esta etapa dependiente de T_1^I y T_1^F , denominado $V_{P_1}(T_1^I, T_1^F)$. De manera análoga para el tercer sub-problema, el que va desde el tiempo T_3^I a T_3^F y solo operase la fase 2, obtenemos la estrategia en (5.14), (5.15) y (5.16), además de $V_{P_3}(T_3^I, T_3^F)$.

$$q_1(t) = 0 \quad (5.14)$$

$$q_1(t) = 1 \quad (5.15)$$

$$G_2(t) = F_2^{-1} \left(1 - \frac{K_p}{K_m} \right) \quad (5.16)$$

Es importante observar que hasta ahora las estrategias encontradas para los sub-problemas 1 y 2 no son óptimas propiamente tal, sino que son las únicas estrategias factibles considerando su restricción mina, restricción planta y características del sub-problema.

Luego, debemos resolver de manera independiente P_2 utilizando el valor de los sub-problemas P_1 y P_3 como valores terminales, $V_{P_1}(T_1^I, T_1^F) + V_{P_3}(T_3^I, T_3^F)$. Esto ocurre simultáneamente en ambas fases, por lo que se debe maximizar el VPN en (46).

$$\max_{q_1(t), q_2(t), G_1(t), G_2(t)} \left[\int_{T_2^I}^{T_2^F} e^{-rt} \left(p(t)R \begin{pmatrix} O_1(G_1(t), q_1(t))\bar{g}_1(G_1(t)) + \\ O_2(G_2(t), q_2(t))\bar{g}_2(G_2(t)) \end{pmatrix} - (C_p K_p + C_m K_m) \right) dt \right] + V_{P_1}(T_1^I, T_1^F) + V_{P_3}(T_3^I, T_3^F) \quad (5.17)$$

La ecuación (5.7) debe satisfacer las restricciones de la mina y de la planta en (5.6) y (6.7), expresadas en (5.18) y (5.19),³¹ además de las condiciones de optimalidad y ecuaciones adjuntas, expresadas en (5.21) y (5.22).

$$q_2(t) = 1 - q_1(t) \quad (5.18)$$

$$G_2(t) = F_2^{-1} \left(\frac{K_m - K_p - q_1(t) K_m F_1(G_1(t))}{(1 - q_1(t)) K_m} \right) \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial q_1} = \left[\begin{array}{c} p(t)R \left(\left(\frac{\partial O_1}{\partial q_1} \right) \bar{g}_1(G_1(t)) + \left(\frac{\partial O_2}{\partial G_2} \frac{\partial G_2}{\partial q_1} \right) \bar{g}_2(G_2(q_1(t), G_1(t))) \right) \\ + \left(\frac{\partial O_2}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial q_1} \right) \bar{g}_2(G_2(q_1(t), G_1(t))) \\ + O_2(G_2(q_1(t), G_1(t)), q_2(q_1(t))) \left(\frac{\partial \bar{g}_2}{\partial G_2} \frac{\partial G_2}{\partial q_1} \right) \\ - \lambda_1(t) K_m + \lambda_2(t) K_m \end{array} \right] = 0 \quad (5.20)$$

$$\lambda_1(t) = e^{r(t-T_2^I)} \lambda_1(T_2^I) \quad (5.21)$$

$$\lambda_2(t) = e^{r(t-T_2^I)} \lambda_2(T_2^I) \quad (5.22)$$

La condición de optimalidad en (5.20) utiliza el Hamiltoniano en (5.23), considerando a los costos como valor terminal, expresados en (5.24). Las ecuaciones adjuntas en (5.21) y (5.22) resultan de integrar (4.5).

$$\hat{H} = \left[\begin{array}{c} p(t)R \left(O_1(G_1(t), q_1(t)) \bar{g}_1(G_1(t)) + \right. \\ \left. O_1(G_1(t), q_2(q_1(t))) \bar{g}_2(G_2(q_1(t), G_1(t))) \right) \\ + \lambda_1(t) (-K_m q_1(t)) + \lambda_2(t) (-K_m q_2(q_1(t))) \end{array} \right] \quad (5.23)$$

$$\varphi(T_2^I, T_2^F) = \frac{C_p K_p + C_m K_m}{\rho} (e^{-r T_2^F} - e^{-r T_2^I}) \quad (5.24)$$

³¹ En estricto rigor, las ecuaciones (5.18) y (5.19) son las mismas que (5.6) y (5.7), simplemente despejando $q_2(q_1(t))$ y $G_2(q_1(t), G_1(t))$. Se presentan de esta manera con el propósito de simplificar la resolución numérica al expresarlas en función de otras variables.

5.1.3 Etapa cooperativa

Al optimizar los sub-problemas en el contexto del escenario, debemos considerar (5.25), (5.26), (5.27) y (5.28).

$$T_1^I = 0 \quad (5.25)$$

$$T_1^F = T_2^I \quad (5.26)$$

$$T_3^I = T_2^F \quad (5.27)$$

$$T_3^F = \frac{S_1^0 + S_2^0}{K_m} \quad (5.28)$$

Los sub-problemas P_1 y P_3 se encuentran totalmente determinados internamente, por lo que la etapa cooperativa dentro del sub-problema solo es necesaria para P_2 . Considerando que el tiempo inicial, tiempo final y reservas de P_2 en T_2^F son libres, entonces las condiciones de transversalidad son (5.29), (5.30) y (5.31). Además, de (5.22) y (5.31) obtenemos que $\lambda_2(t)$ es igual a cero.

$$\hat{H}(T_2^F) = -\frac{\partial v_{P_3}}{\partial T_2^F} - \frac{\partial \varphi}{\partial T_2^F} \quad (5.29)$$

$$\hat{H}(T_2^I) = \frac{\partial v_{P_1}}{\partial T_2^I} + \frac{\partial \varphi}{\partial T_2^I} \quad (5.30)$$

$$\lambda_2(T_2^F) = 0 \quad (5.31)$$

La etapa cooperativa fuera del sub-problema debe satisfacer (5.32) y (5.33), las cuales resultan de integrar (5.2), usando (5.3), (5.4), (5.11), (5.12), (5.14), (5.15) y (5.18).

$$K_m T_2^I + \int_{T_2^I}^{T_2^F} K_m q_1(t) dt = S_1^0 \quad (5.32)$$

$$\int_{T_2^I}^{T_2^F} K_m q_2(q_1(t)) dt + K_m (T_2^F - T_2^I) = S_2^0 \quad (5.33)$$

5.1.4 Sistema FIDE

Así obtenemos un sistema FIDE no lineal, compuesto por las 11 ecuaciones en (5.18) - (5.22) y (5.28) - (5.33), y las 11 variables a determinar. Las ecuaciones (5.19) y (5.20) son ecuaciones integrales, (5.21), (5.22), (5.32) y (5.33) son ecuaciones diferenciales, (5.29) y (5.30) son ecuaciones funcionales, y el resto de las ecuaciones del sistema son algebraicas.³² Las variables son 8 funciones, $G_1(t)$, $G_2(t)$, $q_1(t)$, $q_2(t)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $S_1(t)$, $S_2(t)$, y 3 constantes, T_2^I , T_2^F , $\lambda_1(T_2^I)$.

El sistema genera un VPN, V_{C_1} , igual a $\sum_{j=1}^3 V_{P_j}(T_j^I, T_j^F)$. De manera análoga, obtenemos el VPN para C_2 , el cual a pesar de tener los mismos sub-problemas, tiene una secuencia distinta y por tanto distintos valores para las variables a determinar, es decir, una estrategia de consumo de reservas distinta. Considerando que estos dos escenarios abarcan todas las combinaciones de operación posibles, el secuenciamiento de fases, política de leyes de corte y ritmos de extracción que maximizan el VPN de la mina son determinados por la estrategia óptima del escenario con mayor VPN. Sin embargo, como señalamos en la sección 4.3.3, el sistema no puede ser resuelto analíticamente.

³² Las ecuaciones fueron clasificadas de acuerdo a la forma más simple de expresarlas, según el orden: algebraica, funcional, diferencial o integral.

5.2 Resultados numéricos para una mina ficticia de cobre

Los resultados numéricos se ejemplifican para una mina de cobre ficticia con parámetros simplificados (ver detalles en Tabla 5-1),³³ en la cual se modela $G_1(t)$ como una función lineal para cada fase, de manera de obtener soluciones interpretables. De este modo, la estrategia óptima queda determinada por la satisfacción del sistema FIDE, variando los dos parámetros de la función lineal.³⁴

³³ Los parámetros utilizados son referenciales y arbitrarios. Utilizamos costos con valor cero, ya que mientras sean menores que el precio, no afectan el resultado ni resolución.

³⁴ α y β son los parámetros utilizados, de manera que $G_1(t) = \alpha + \beta t$.

Tabla 5-1: Parámetros para mina de cobre ficticia

Parámetro	Notación	Valor	Unidad
Reservas iniciales fase 1	S_1^0	400	Mton
Reservas iniciales fase 2	S_2^0	200	Mton
Distribución de leyes fase 1	$f_1(g)$	U[0,04; 0,1]	
Distribución de leyes fase 2	$f_2(g)$	U[0,1; 0,2]	
Capacidad mina	K_{mine}	36	Mton/year
Capacidad planta	K_{proc}	54	Mton/year
Costos mina	C_{mine}	0	US\$/ton
Costos de procesamiento	C_{proc}	0	US\$/ton
Precio del cobre	P_{Cu}	2,9	US\$/lb
Tasa de descuento	r	10	%
Recuperación metalúrgica	R	90	%

Modelar la ley de corte como una función lineal posee ventajas desde el punto de vista de la aplicabilidad y de la resolución. La primera se refiere a que es posible obtener funciones simples no solo para $G_1(t)$, sino que para todas las variables de control, $G_2(t)$, $q_1(t)$ y $q_2(t)$. En la práctica es poco razonable que el planificador siga funciones complejas al momento de modificar las leyes de corte o ritmos de extracción.

Respecto a la resolución, el utilizar una $G_1(t)$ lineal permite reducir el sistema a uno mucho más sencillo (aunque aún no lineal o posible de resolver analíticamente) en el que se debe iterar variando los parámetros de $G_1(t)$ en una grilla de 2 dimensiones.³⁵ El código de Matlab utilizado se detalla en el Anexo C.

De esta manera, se obtiene una superficie de soluciones para cada variable respecto a los parámetros de G_1 , sin embargo, no todas tienen una interpretación real. Las soluciones complejas se generan en puntos en los que el traslape de fases no es posible o destruye valor con respecto a no realizarlo.

El primer escenario ($C_1 = \{\{P_1\}, \{P_2\}, \{P_3\}\}$) presenta un VPN máximo de 144,34 MMUS\$ y el segundo escenario ($C_2 = \{\{P_3\}, \{P_2\}, \{P_1\}\}$) un VPN máximo de 172,49 MMUS\$, por lo que óptimo global se encuentra al seguir la política de leyes de corte óptima del segundo escenario, mostrada en la Figura 5-1. Este escenario no presenta soluciones reales para la transición, lo que implica explotar primero la totalidad de la fase 2 con un LOM T_2 de 3,70 años y una ley de corte G_2 constante de 0,13333, y luego la totalidad de la fase 1 con un LOM T_1 de 11,11 años y una ley de corte G_1 constante de 0,06.³⁶ Esto produce un VPN de 110,55 MMUS\$ y 61,94 MMUS\$ para P_3 y P_1 , respectivamente.

³⁵ Si se permite a $G_1(t)$ tomar cualquier forma funcional el problema se vuelve más complejo de resolver numéricamente, sin embargo, las ecuaciones que gobiernan el sistema no sufren modificaciones.

³⁶ LOM proviene de *life of mine* y representa el tiempo en que se agota la mina o la fase, dependiendo del contexto.

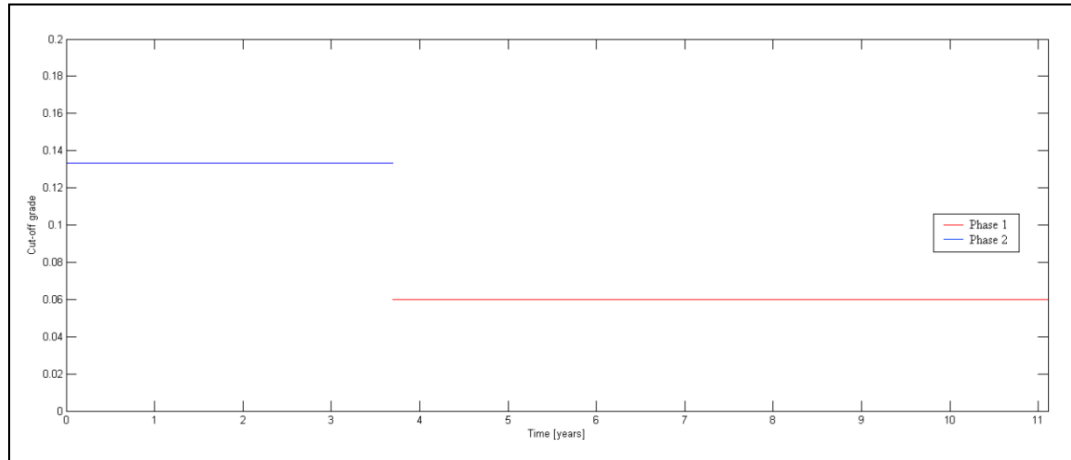


Figura 5-1: Política de leyes de corte para el escenario 2

Considerando la simplicidad de las distribuciones utilizadas, por las cuales la ley de la fase 2 es estrictamente mayor a la ley de la fase 1, parece lógico que el óptimo se encuentre en el escenario donde se comienza extrayendo la fase 2, y que en este escenario se enfoquen todos los esfuerzos en extraer la totalidad de la fase 2 antes de empezar con la fase 1. Sin embargo, de mayor interés es el escenario 1, debido a que el óptimo contempla realizar un periodo de transición de fases y por ende utilizar estrategias que desde la teoría de optimización de leyes de corte tradicional no podrían ser alcanzadas.

El escenario 1 presenta una superficie de soluciones reales para el sistema de ecuaciones propuesto, la cual se exhibe en la Figura 5-2 con respecto al VPN obtenido. Su óptimo (en el centro de la figura) resulta en un LOM T_1 para la fase 1 de 8,21 años y un LOM T_2 para la fase 2 de 11,11 años. Esto significa tiempos de transición óptimos entre $T_1^F = T_2^I$ de 6,51 años y $T_2^F = T_3^I$ de 8,21 años, es decir

una transición entre las fases 1 y 2 de 1,70 años con un VPN de 22,72 MMUS\$ (correspondiente a P_2). Además de un VPN de 82,02 MMUS\$ y 39,60 MMUS\$ para P_1 y P_3 , respectivamente. Cabe notar que las soluciones de mayor valor presente se encuentran en el entorno cercano del máximo, lo que muestra la robustez del óptimo ante pequeñas variaciones en la estrategia.

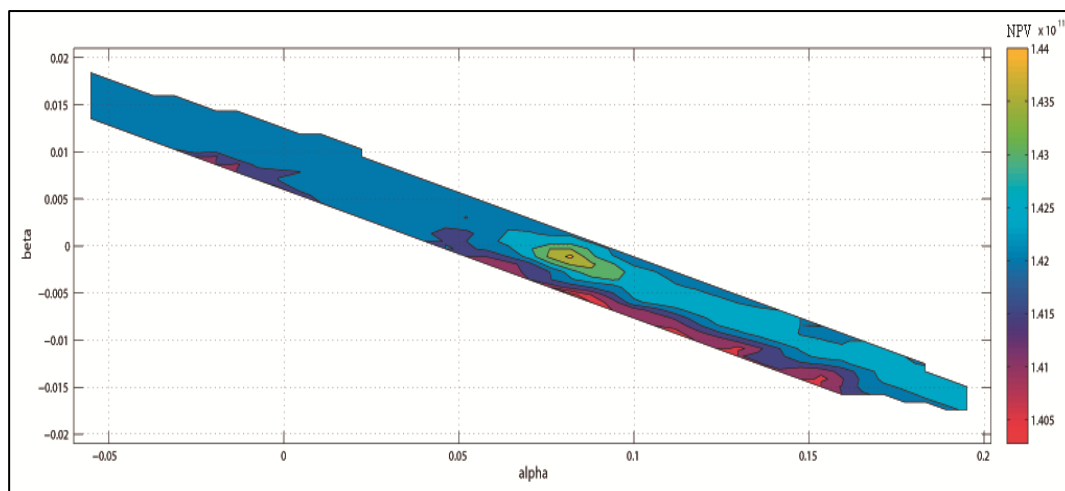


Figura 5-2: Superficie de soluciones reales para escenario 1

De existir restricciones espaciales que obliguen a iniciar la operación con la fase 1 (como ocurriría si la fase 2 se encuentra bajo ésta, por ejemplo), el óptimo global se encontraría determinado por C_1 . Esto significa realizar una transición entre las fases 1 y 2, tal como se muestra en las Figuras 5-3 y 5-4, con una ley de corte linealmente decreciente para la fase 1 desde 0,0735 hasta 0,0716, y por ende con un ritmo de extracción también decreciente (pero no lineal) desde el 53% hasta 52% de la capacidad de extracción de la mina. Además, la fase 2 presenta una ley

de corte no lineal creciente desde 0,1079 hasta 0,1124. Seguir ésta estrategia genera un sobre valor de 14,02% o 17,75 MMUS\$ por sobre los 126,59 MMUS\$ de VPN que se obtendrían de no realizar transición en este escenario, extrayendo la totalidad de la fase 1 y luego la 2, como indica la teoría tradicional.

Por otra parte, la estrategia óptima utilizando una política de leyes de corte constante (beta igual a cero) consiste en realizar una transición entre 7,05 y 7,68, con una ley de corte de la fase 1 de 0,07, una ley de corte para la fase 2 de 0,1096 y un ritmo de extracción para la fase 1 en torno a 58,56%. De este modo, el VPN total sería 140,97 MMUS\$ y el VPN de la transición 7,73 MMUS\$. Consecuentemente, el uso de ley de corte óptima variable sobre una ley de corte óptima constante representa solamente 2,40% del aumento del NPV total, sin embargo, resulta en un aumento de 193,92% del VPN de la transición, principalmente debido a su extensión 1,093 años. Esto muestra un cambio significativo en la relevancia del periodo de transición por usar una ley de corte variable.

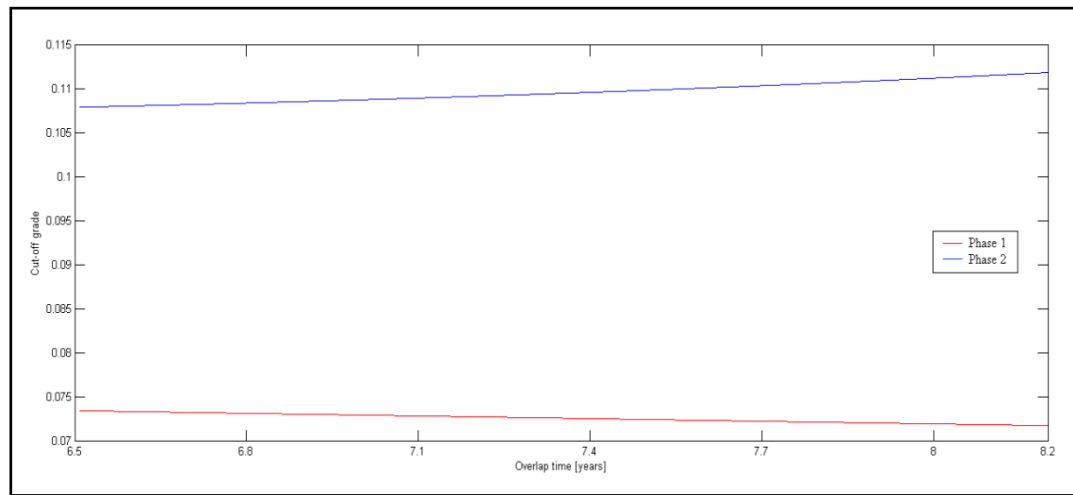


Figura 5-3: Política de leyes de corte para periodo de transición del escenario 1

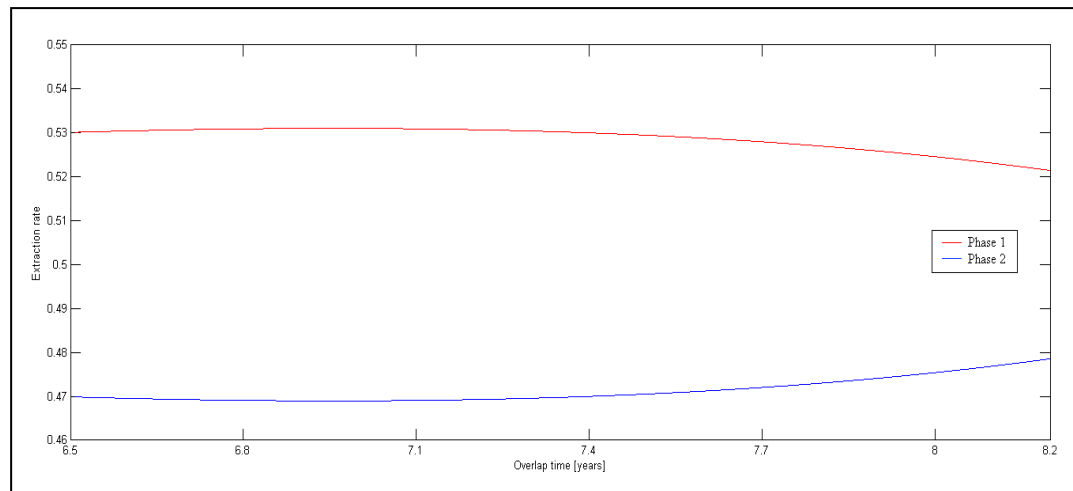


Figura 5-4: Ritmos de extracción para periodo de transición del escenario 1

En resumen, la teoría tradicional no considera un periodo de transición de fases, sino que consiste en una extracción individual de la fase 1 con una ley de corte de 0,06 hasta el año 7,41, para luego realizar una extracción individual de la fase 2

con una ley de corte de 0,13333 hasta el año 11,11. Consecuentemente, el planificador debería seguir una estrategia de consumo de reservas que no solo le permite alcanzar un VPN 14,02% mayor que el alcanzado al no determinar toda la estrategia endógenamente, sino que también involucra realizar un periodo de transición de fases con una ley de corte variable y ritmos de extracción significativamente diferentes a los utilizados en la operación individual. En este caso, el periodo de transición usa una ley de corte mayor y decreciente para la fase 1 (promedio de 0,07265 en comparación a 0,06), una ley de corte menor y creciente para la fase 2 (promedio de 0,10995 en comparación a 0,13333) y una tasa de extracción casi igualmente dividida entre las fases (52,57% para la fase 1 y 47,43% para la fase 2 en comparación a 100% para cada fase cuando son individualmente operadas). Esto le permite adelantar el procesamiento de material con mejores leyes y combinar material desde ambas fases, de manera de enviar una porción de lastre total menor desde la fase con mejores leyes (15,18% menos de lastre desde la fase 2).

5.3 Análisis de sensibilidad

Parte central de esta nueva estrategia es realizar un periodo de transición de manera óptima, por lo cual analizamos cómo se comporta el escenario 1 respecto a los parámetros geológicos, operacionales y económicos. Para esto, se evalúan 3 casos para cada parámetro.

Utilizamos el ratio entre las reservas iniciales de cada fases (S_1^0/S_2^0) como parámetro geológico. A medida que este ratio aumenta, la fase 1 se vuelve cada

vez más relevante. Es claro que aumenta la cantidad de material en la mina, y por tanto también el LOM y VPN, sin embargo, menos obvio es que el VPN de la transición disminuye en relación a los otros dos casos (ver detalle en Tabla 5-2). A pesar de que aún es conveniente adelantar la extracción de la fase 2 a través de la transición, también es necesario agotar la fase 1 para dar paso a una extracción individual de la fase 2. Luego, el ritmo de extracción de la fase 1 durante la transición aumenta en relación a los otros casos. El resto de la estrategia de consumo de reservas durante el periodo de transición, es decir la ley de corte para la fase 1 y duración de la transición, permanece sin variaciones relevantes entre los distintos casos.

Tabla 5-2: Sensibilidad de ratio de reservas iniciales (S_1^0/S_2^0)

Ratio	1,8	2,0	2,2
$T_1^F = T_2^I$	5,81 años	6,51 años	7,22 años
$T_2^F = T_3^I$	7,49 años	8,21 años	8,91 años
T_3^F	10,37 años	11,11 años	11,85 años
NPV	$1,42 \cdot 10^{11}$ MMUS\$	$1,44 \cdot 10^{11}$ MMUS\$	$1,46 \cdot 10^{11}$ MMUS\$
$NPV_{transición}$	$2,45 \cdot 10^{10}$ MMUS\$	$2,27 \cdot 10^{10}$ MMUS\$	$2,07 \cdot 10^{10}$ MMUS\$
$\overline{q_1}$	50,94%	52,57%	54,40%
$\overline{G_1}$	0,07335	0,07265	0,07195
$\overline{G_2}$	0,11025	0,10995	0,10960

El parámetro operacional utilizado es el ratio entre la capacidad mina respecto a la capacidad planta (K_m/K_p). Los resultados (ver detalles en Tabla 5-3) muestran que, a pesar de que el VPN total aumenta con este ratio, el VPN de la transición no, sino que existe cierto nivel intermedio entre la relación de capacidad mina y planta en la que la transición se vuelve más importante, aumentando su valor. Tener una capacidad mina por sobre la capacidad planta obliga a enviar una mínima cantidad de material, mayor a cero, a botadero, por lo que existen incentivos para realizar el periodo de transición, ya que este permite disminuir la cantidad de lastre generado desde la fase con mayores leyes. A medida que la relación entre las capacidades se acerca a uno, la cantidad mínima de lastre decrece, lo que convierte a la transición en una alternativa cada vez menos deseable con respecto a los casos con mayor ratio. Es por esto que el caso con ratio igual a 1,3 tiene el menor VPN para la transición.

No obstante, otra de las características de la transición de fases es que permite acelerar la explotación de material con mayores leyes, por lo que el VPN de la transición no aumenta indefinidamente con el aumento de la relación. A medida que se extrae una mayor cantidad material, se acelera el ritmo de agotamiento, por lo que existen menos incentivos para acelerar la explotación con respecto a casos con menor ratio. De lo anterior, que el mayor VPN se obtenga con un ratio de 1,5, y no con 1,7.

De manera secundaria, se puede observar que a medida que disminuye la relación, disminuyen las leyes de corte para procesar una mayor porción de material en cada

instante, lo que también disminuye el material enviado a botadero, con el consecuente aumento del VPN y LOMs.

Tabla 5-3: Sensibilidad de ratio entre capacidad mina y planta (K_m/K_p)

Ratio	1,3	1,5	1,7
$T_1^F = T_2^I$	7,65 años	6,51 años	5,53 años
$T_2^F = T_3^I$	9,20 años	8,21 años	7,04 años
T_3^F	12,82 años	11,11 años	9,80 años
NPV	$1,47 \cdot 10^{11}$ MMUS\$	$1,44 \cdot 10^{11}$ MMUS\$	$1,39 \cdot 10^{11}$ MMUS\$
$NPV_{transición}$	$1,69 \cdot 10^{10}$ MMUS\$	$2,27 \cdot 10^{10}$ MMUS\$	$2,10 \cdot 10^{10}$ MMUS\$
$\overline{q_1}$	57,45%	52,57%	66,70%
$\overline{G_1}$	0,06315	0,07265	0,07400
$\overline{G_2}$	0,10230	0,10995	0,10990

Como parámetro económico, la tasa de descuento (r) muestra que mientras mayor sea el valor de este parámetro, antes empieza el periodo de transición. Además, la transición se debe realizar a un mayor ritmo de extracción para la fase 2 (ver detalles en Tabla 5-4). Esto se explica por la necesidad de acelerar la explotación del material de mayor ley proveniente de la fase 2. Consecuentemente, se extiende el periodo de transición de modo de poder agotar la fase 1.

Tabla 5-4: Sensibilidad de tasa descuento (r)

Ratio	0,1	0,2	0,3
$T_1^F = T_2^I$	6,51 años	5,94 años	4,82 años
$T_2^F = T_3^I$	8,21 años	8,88 años	10,13 años
T_3^F	11,11 años	11,11 años	11,11 años
NPV	$1,44 \cdot 10^{11}$ MMUS\$	$0,90 \cdot 10^{11}$ MMUS\$	$0,62 \cdot 10^{11}$ MMUS\$
$NPV_{transición}$	$2,27 \cdot 10^{10}$ MMUS\$	$1,92 \cdot 10^{10}$ MMUS\$	$1,79 \cdot 10^{10}$ MMUS\$
$\overline{q_1}$	52,57%	49,89%	48,69%
$\overline{G_1}$	0,07265	0,07283	0,07390
$\overline{G_2}$	0,10995	0,11203	0,11134

6. CONSIDERACIONES FINALES

En esta sección primero discutimos los principales supuestos considerados en el modelo, de modo de evitar complejizarlo innecesariamente y así obstruir la deducción del sistema planteado. Además, se discuten brevemente algunas extensiones y mejoras que trabajos futuros deberían considerar. Posteriormente, señalamos las principales conclusiones e implicancias para la operación del sistema propuesto de manera de encontrar una política óptima global de leyes de corte.

6.1 Supuestos, limitaciones y extensiones

Simplificamos el problema bajo el supuesto que la distribución de leyes es estacionaria, lo que significa que no cambia a medida que avanza el tiempo. En cada instante de tiempo, todo el material que la distribución indique que se encuentra sobre la ley de corte es definido como mineral, y el resto es lastre. Particularmente, en el caso de aplicación numérica se utilizó una distribución uniforme para dos fases, no obstante, el planteamiento matemático es lo suficientemente flexible para poder utilizar cualquier otro tipo de distribución de leyes consistente con la realidad.³⁷

Considerando esto, alentamos a extender el caso de aplicación numérica para considerar una mayor cantidad de fases con una distribución más realista.

Para simplificar la exposición del modelo y del algoritmo de resolución, consideramos que la empresa minera es tomadora de precios y que el precio es constante. La operación tiene una recuperación metalúrgica, costos de extracción y costos de procesamiento constantes a través del tiempo y de las distintas fases. Es

³⁷ Gerst (2008) y Singer (2013) demuestran que los depósitos de cobre donde ha ocurrido aproximadamente 90% de la producción mundial de los últimos 80 años, muestran evidencia de que la distribución lognormal es el modelo más apropiado.

bastante simple extender el modelo respecto a este supuesto, entregándole funciones en vez de valores constantes en el tiempo.³⁸ El algoritmo de resolución no cambiaría y aportaría a la aceptación de la industria al asimilarse a lo que ocurre en la realidad. No obstante, en términos de la investigación, la incorporación de incertidumbre resultaría de mayor valor. En esta línea, el trabajo de Thompson y Barr (2014) tiene importantes aspectos similares en el planteamiento, como la utilización de fases, por lo cual se alienta a extender el modelo aplicando su dinámica del precio.³⁹

Un tercer supuesto relevante es que la operación minera debe utilizar toda su capacidad de mina y planta. Esto es coherente con el objetivo de planificar estratégicamente la operación sin inversiones en capacidad ociosa, aun considerando las diferencias que ocurren en la mediano y corto plazo. No obstante, de ser requerido es posible adaptar el planteamiento utilizando la restricción (6.1) para el material extraído, la cual permite activar solo una de las restricciones.

$$K_m^* = \text{Argmin} \left\{ K_P \left(1 + SR(G(t)) \right), K_m \right\} \quad (6.1)$$

Quizás la más importante extensión de este modelo resultaría de la incorporación de *stockpiles*. Estos son parte de las prácticas comunes de una operación minera y permiten trasladar material en el tiempo, aumentando el valor de la mina. Para su correcta incorporación es necesario que el modelo no restrinja al llenado de planta, ni de mina. El material extraído y el mineral procesado deberían ser determinados endógenamente, de modo que el llenado de planta y/o mina sea una implicancia del modelo y no al revés.

³⁸ El costo mina podría ser una función de la profundidad de la fase, por ejemplo

³⁹ Esto tendría consecuencias tales como no extraer todo el pit final fijado en el inicio de la operación, entre otras.

Por último, si el objetivo fuera asemejarse a la realidad de alguna operación en particular, se alienta a extender el modelo con las consideraciones ya desarrolladas en la literatura, tales como múltiples minas y plantas, multi-metales y sub-productos, entre otros.

6.2 Conclusiones

Hasta ahora la estrategia de producción y leyes de corte han sido optimizadas como etapas aisladas, lo cual conduce a valores que por separado son óptimos, pero nada asegura que se acerquen al óptimo alcanzado por la integración de ambas etapas, en cuanto a VPN y estrategias utilizadas.

En esta tesis señalamos que la derivación de una política de leyes de corte que maximice el VPN de una mina a rajo abierto dividida en fases, debe considerar endógenamente a las etapas de la planificación que están directamente interrelacionadas. Sin embargo, el problema matemático planteado de esta manera es complejo, por lo cual fue necesario diseñar un algoritmo de resolución basado en control óptimo, conducente a un sistema FIDE que puede ser resuelto numéricamente.

El sistema presentado permite no solo encontrar una política de leyes de corte globalmente óptima, sino que de modo más amplio, la estrategia de consumo de reservas, es decir, las tasas de extracción y secuenciamiento de las fases. Mostramos que a una operación minera esto le permite aumentar el valor de sus proyectos por una mejor definición de lo que es mineral, avanzando el procesamiento de material de mayor ley y combinando material de diferentes fases, al explotar cada fase cuándo

y cómo es óptimo. En el caso de aplicación se redujo el lastre enviado desde la fase con mayores leyes en 15,18%.

En la planificación minera, los problemas de determinar la estrategia de producción y leyes de corte son circulares. Una estrategia de producción individual es asociada a una estrategia de leyes de corte dada. Si el resultado no es satisfactorio, la estrategia de producción o la de leyes de corte puede ser alterada. Esto es realizado hasta que el resultado sea económicamente aceptable. Considerando esto, el beneficio de una ley de corte óptima global es que para un diseño minero dado existe solo una estrategia de leyes de corte. Esto significa que los ingenieros de planificación no necesitan probar recursivamente diferentes estrategias, ya que el óptimo puede ser obtenido directamente.

La aplicación a una mina de cobre ficticia muestra que el considerar una política de leyes de corte óptima global permite alcanzar un VPN 14,02% mayor al alcanzado utilizando la teoría tradicional de optimización de leyes de corte. Esto no solo indica que este último es un óptimo local acotado por un entorno arbitrario de la solución, sino que también implica utilizar estrategias de operación que difieren considerablemente de las conducentes a un óptimo global. En particular, elimina la opción de realizar un periodo de transición de fases de alto valor durante 1,7 años y con un VPN de 22,72 MM US\$.

Mostramos que el valor del periodo de transición, y por tanto la necesidad de este, disminuye a medida que las reservas iniciales de las fases de menores leyes son mucho mayores que las reservas iniciales de las fases con mayores leyes, también que existe un nivel intermedio entre la proporción entre la capacidad de la mina y

capacidad de la planta que hace más valiosa su realización. Además, concluimos que si, por cualquier motivo, aumenta la tasa de descuento de la operación, el periodo de transición toma mayor relevancia, adelantando su tiempo de inicio, aumentando su extensión e intensificando la tasa de extracción de reservas en las fases con mayores leyes.

Es de destacar también que usar una ley de corte variable incrementa el VPN de la mina en 2,4%, sin embargo, su mayor contribución se produce por incrementar la relevancia del periodo de transición, aumentando su VPN y duración.

El sistema de ecuaciones propuesto representa un avance con respecto a la literatura de leyes de corte óptimas anteriormente desarrollada, debido a que reestructura las bases del planteamiento hasta ahora utilizado. No obstante, las operaciones mineras son complejas, y por tanto el modelo presentado aquí debe extenderse para incorporar la extensa teoría desarrolladas en las últimas décadas, lo cual le permitiría acercar este nuevo enfoque a la realidad de operaciones actuales.

BIBLIOGRAFÍA

- Asad, M. W. A. (2005). Cutoff grade optimization algorithm with stockpiling option for open pit mining operations of two economic minerals. *International Journal of Surface Mining, Reclamation and Environment*, 19(3), 176-187.
- Bascetin A., and Nieto, A. (2014). Determination of a mining cutoff grade strategy based on an iterative factor, in: *Proceedings of the SME Annual Meeting*.
- Cairns, R., and Van Quyen, N. (1998). Optimal Exploitation and Exploitation of Heterogeneous Mineral Deposits. *Journal of Environmental Economics and Management*, 164-189.
- Chiang, A. C. (1992). *Elements of Dynamic Optimization*. McGraw-Hill, New York: New York.
- Dagdelen, K. (2001). Open pit optimization: strategies for improving economics of mining projects through mine planning. *International Mining Congress and Exhibition of Turkey* (pp. 1-6). Golden Imcet.
- Gerst, M. D. (2008). Revisiting the cumulative grade-tonnage relationship for major copper ore types. *Economic Geology*, 103(3), 615-628.
- Gholamnejad, J. (2014). Incorporation of rehabilitation costs into the optimum cut- off grade determination. *J. South Afr. Inst. Min. Metall.*
- Gu, X. W., Wang, Q., Chu, D. Z., and Zhang, B. (2010). Dynamic optimization of cutoff grade in underground metal mining. *Journal of Central South University of Technology*, 17, 492-497.
- Hotelling, H. (1931). The economics of exhaustible resources. *The journal of political economy*, 137-175.
- Johnson, P., Evatt, G., Duck, P., and Howell, S. (2010). The Derivation and Impact of an Optimal Cut-Off Grade Regime upon Mine Valuations. *Proceedings of the World Congress on Engineering 2010 Vol I*. London: WCE.
- Kamien, M. I., and Schwartz, N. L. (2012). *Dynamic optimization: the calculus of variations and optimal control in economics and management*. Courier Dover Publications.
- King, B. (2004). *Integrated Strategy Optimisation for Complex Operations, AusIMM Orebody Modelling and Strategic Mine Planning*, Perth.
- Krautkraemer, A. (1988). The cut-off grade and theory of extraction. *The Canadian Journal of Economics*, 146-160.

- Lane, K. (1964). Choosing the optimal Cut-Off Grade. *Colorado School of Mines Quarterly*, 811-829.
- Lane, K. (1988). *The Economic Definition of Ore: Cut-Off Grades in Theory and Practice*. London: Mining Journal Books.
- Lay, R. (2009). Evaluación, comparación y análisis de pronósticos de precios del cobre (Tesis de Magister, Pontificia Universidad Católica de Chile).
- Mackenzie, B. (1987). *Mineral Economics: Decision-Making Methods in the Mineral Industry*. Australian Mineral Foundation, Adelaide.
- Mardones, J. (1993). Option valuation of real assets: Application to a copper mine with operating flexibility. *Resources Policy*, 19(1), 51-65.
- Minnitt, R. C. A. (2004). Cut-off grade determination for the maximum value of a small Wits-type gold mining operation. *Journal-South African Institute of Mining and Metallurgy*, 104, 277-284.
- Osanloo, M., and Ataei, M. (2003). Using equivalent grade factors to find the optimum cut-off grades of multiple metal deposits. *Minerals Engineering*, 16(8), 771-776.
- Pontryagin, L. S., Boltyanskii, V. G., and Gamkrelidze, R. V. (1962). *EF Mishchenko The Mathematical Theory of Optimal Processes*. New York.
- Sagi, J. (2000). The interaction between quality control and production. *Innovation and Strategy, Flexibility, Natural Resources and Foreign Investment: New Developments and Applications in Real Options*. Ed: L. Trigeorgis.
- Shinkuma, T. (2000). A generalization of the Cairns -Krautraemer model and optimality of the mining rule. *Resource and Energy Economics*, 147-160.
- Singer, D. A. (2013). The lognormal distribution of metal resources in mineral deposits. *Ore Geology Reviews*, 55(Complete), 80-86.
- Thompson, M., and Barr, D. (2014). Cut-off grade: A real options analysis. *Resources Policy*, 42, 83-92.
- Tilton, J.E., (2003). *On Borrowed Time? Assessing the Threat of Mineral Depletion. Resources for the Future*, Washington, DC.
- Tilton, J.E., and Guzmán, J.I. (2016). *Mineral economics and policy*. Routledge, forthcoming.

Yeung, D. W., and Petrosjan, L. A. (2006). Cooperative stochastic differential games. Springer Science and Business Media.

Yi, R., and Sturgul, J. (1988). Analysis of Cutoff Grades Using Optimum Control. Proceedings of the Twentieth International Symposium on the Application of Computers and Mathematics in the Mineral Industries. 3, pp. 263 - 269. Johannesburg: SAIMM.

ANEXOS

ANEXO A: ILUSTRACIÓN DEL CONCEPTO DE FASES

Las fases son sub-sectores de explotación dentro de un pit final, las cuales definen la secuencia de explotación en una mina a cielo abierto. Existen una amplia gama de metodologías y criterios para definir fases operacionalmente viables.

El modelo presentado en esta tesis considera que las fases no tienen un orden predeterminado de extracción, lo que significa que el modelo debe determinar su secuenciamiento endógenamente. Adicionalmente el modelo debe permitir la posibilidad de operación de fases en simultáneo, mientras cumple las restricciones espaciales en su extracción y de la máxima cantidad de fases que puede haber en extracción simultánea.

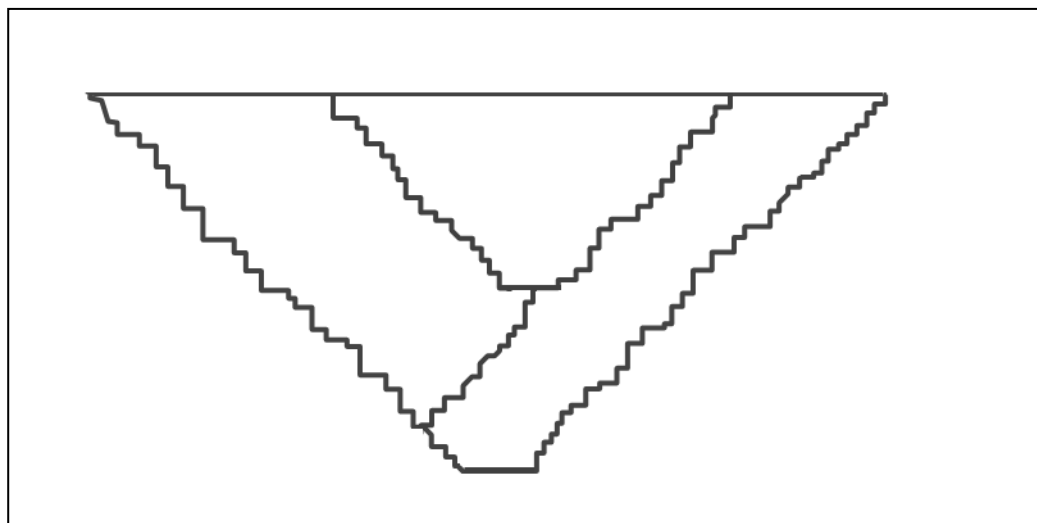


Figura A-1: Ilustración de fases para una mina a rajo abierto

ANEXO B: EL PRINCIPIO DE PONTYAGIN PARA VARIAS CONDICIONES DE TÉRMINO

Sea $u(t) = [u_1(t), \dots, u_n(t)]$ un vector de control continuo por partes y $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$ un vector de estado continuo y diferenciable por partes, definido en un intervalo de tiempo $[t_0, \dots, t_1]$, que maximizan (B.1).

$$\max_{u(t)} \left[\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt + \phi(t_1, x(t_1)) \right] \quad (\text{B.1})$$

Sujeto a las ecuaciones diferenciales en (A.2)

$$\dot{x}_i(t) = g_i(t, x(t), u(t)) \quad (\text{B.2})$$

, y condiciones de término definidas por segmentos

$$x_i(t_0) = x_i^0 \text{ (fixed), } i = 1, \dots, n \quad (\text{B.3})$$

$$x_i(t_1) = x_i^1 \text{ (fixed), } i = 1, \dots, q \quad (\text{B.4})$$

$$x_i(t_1) \text{ free, } i = q + 1, \dots, r \quad (\text{B.5})$$

$$x_i(t_1) \geq 0, \quad i = r + 1, \dots, s \quad (\text{B.6})$$

$$K(x_{q+1}(t_1), \dots, x_n(t_1), t_1) \geq 0 \quad (\text{B.7})$$

, donde

$$1 \leq q \leq r \leq s \leq n \quad (\text{B.8})$$

Se ha hecho que algunos componentes del vector de estado sean fijos en el tiempo terminal, que otros sean libres, que otros sean no negativos, y finalmente, que algunos obedezcan ciertas condiciones de desigualdad.

De acuerdo a Kamien y Schwartz (2012), el principio del máximo de Pontryagin señala que de modo que $x^*(t)$, $u^*(t)$ sean óptimos para el problema planteado, es necesario que

existan una constante λ_0 y un vector continuo $\lambda(t) = [\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)]$, donde para todo $t_0 \leq t \leq t_1$ tenemos que $(\lambda_0, \lambda(t)) \neq (0, 0)$ de modo que cada $t_0 \leq t \leq t_1$

$$H(t, x^*(t), u(t), \lambda(t)) \leq H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)) \quad (\text{B.9})$$

, donde el Hamiltoniano H es definido por

$$H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = \lambda_0 f(t, x(t), u(t)) + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(t, x(t), u(t)) \quad (\text{B.10})$$

Excepto en los puntos de discontinuidad de $u^*(t)$ se debe cumplir que

$$\dot{\lambda}(t) = - \frac{\partial H(t, x^*(t), u(t), \lambda(t))}{\partial x_i} \quad (\text{B.11})$$

Además

$$\lambda_0 = 1 \quad \text{o} \quad \lambda_0 = 0 \quad (\text{B.12})$$

, y, finalmente, deben cumplirse las condiciones de transversalidad (listadas abajo, en las ecuaciones (B.16) - (B.22)).

Siempre usaremos que $\lambda_0 = 1$, bajo el supuesto implícito de que el problema tiene una solución donde el objetivo importa. Así, es posible usar el teorema Karush-Kuhn-Tucker para el valor de $u(t)$ que provee un máximo en (B.9). De esta manera, podemos resumir las condiciones necesarias para control óptimo en las 4 tipos de condiciones de la Tabla B-1.

Tabla B-1: Condiciones necesarias para control óptimo

Tipo	Condiciones
Ecuaciones estado	$\partial H / \partial \lambda_i = \dot{x}_i \rightarrow \dot{x}_i = g_i(t, x, u)$ (A.13)
Ecuaciones adjuntas	$-\partial H / \partial x_i = \dot{\lambda} \rightarrow \dot{\lambda} =$ $-(\partial f / \partial x_i + \sum_{j=1}^n \lambda_j \partial g_j / \partial x_i)$ (A.14)
Condiciones optimalidad	$0 = \partial f / \partial u_i + \sum_{j=1}^n \lambda_j \partial g_j / \partial u_i$ (A.15)
Condiciones transversalidad	$\lambda_i(t_1) = \partial \Phi / \partial x_i$ si x_i es libre (A.16)
	$x_i(t_1) \geq 0, \lambda_i(t_1) \geq \partial \Phi / \partial x_i,$ $x_i(t_1)[\lambda_i(t_1) - \partial \Phi / \partial x_i] = 0$ (A.17)
	$\lambda_i(t_1) = \partial \Phi / \partial x_i + p \partial K / \partial x_i, p \geq 0, pK = 0,$ $i = q, \dots, n;$ (A.18)
	si $K(x_{q+1}(t_1), \dots, x_n(t_1), t_1) \geq 0$ es requerido
	$\lambda_i(t_1) = \partial \Phi / \partial x_i + p \partial K / \partial x_i, i = q, \dots, n;$ si $K(x_{q+1}(t_1), \dots, x_n(t_1), t_1) = 0$ es requerido (A.19)
	$H(t_1) = 0 \rightarrow f + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i + \Phi_t = 0$ en $t_1;$ si t_1 es libre (A.20)
	$H(t_1) \geq 0 \rightarrow f + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i + \Phi_t \geq 0$ en $t_1,$ con desigualdad estricta $t_1 < T$; si $t_1 \leq T$ es requerido (A.21)
	$\lambda_i(t_1) = \partial \Phi / \partial x_i + p \partial K / \partial x_i, f + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i +$ $\Phi_t + p \partial K / \partial t = 0, p \geq 0, pK = 0$ en $t_1,$ (A.22)

	$i = q, \dots, n;$ si $K(x_{q+1}(t_1), \dots, x_n(t_1), t_1) \geq 0$ es requerido
--	--

Usamos las condiciones de transversalidad (B.16) y (B.20), cuando las reservas (variable de estado) y los tiempos finales son libres, pero con la particularidad de que en nuestro problema el valor terminal (compuesto por los costos y el VPN de los otros sub-problemas) no depende de las reservas, entonces su derivada es cero.

ANEXO C: CÓDIGO MATLAB PARA RESOLUCIÓN NUMÉRICA

```

%% Initialization of out-loop variables

%Ore grade distribution
a = 0.04;b = 0.10;           %phase 1 distribution range
c = 0.1;d = 0.2;           %phase 2 distribution range

%Reserves and capacity
CR = 1.7;                   %capacity rate
RR = 2.0;                   %reserves rate
S2o = 200*10.^6;           %[ton] phase 2 initial reserves
S1o = RR*S2o;              %[ton] phase 1 initial reserves
Kp = 36*10.^6;             %[ton/año] plant capacity
Km = CR*Kp;                %[ton/año] mine capacity

%Grid definition
j = 1;                      %loop 1 counter
inicialalpha=-0.06;         %left alpha limit
finalalpha =0.2;           %right alpha limit
inicialbeta = -0.02;        %left beta limit
finalbeta  = 0.02;         %right beta limit
stepalpha = 0.01;          %alpha step
stepbeta = 0.001;          %beta step
alpha=inicialalpha;        %alpha initialization
k=2;
sol=0;

%Alpha iteration
while j <=(finalalpha-inicialalpha)/stepalpha+1

    i=1;                    %loop 2 counter
    beta=inicialbeta;       %beta initialization

    %beta iteration
    while i <=(finalbeta-inicialbeta)/stepbeta+1 && beta<=finalbeta

        fprintf('\n*****\n')

        %Show the current iteration parameters (alpha, beta, i, j, k)
        i
        j
        alpha
        beta
        k
        T_f_2_e=(S1o)/Km;
        T_i_2_e=(S1o)/Km-1;

        %% Mine operation parameters

        syms g1_c_2 g2_c_2 q1_2 lambda10 t T_i_2 T_f_2 T_f_3
        rho = .1;           %discount rate

```

```

P = 3*2204.62262;      %[USD/ton]  copper price (pound to ton)
Rec = .9;              %metallurgical recovery
Cp = 0;                %[USD/ton]  processing cost
Cm = 0;                %[USD/ton]  extraction (mine) cost
%phase 1 cut-off grade for the transition    period
g1_c_2 = alpha+beta*t;
%phase 2 cut-off grade for the transtion period (solving from the
    plant restriction, in order to filling the plant
g2_c_2 = .1000000000+(.1000000000*(Km-Kp-q1_2*Km*(-
.6666800000+16.6670000000*g1_c_2)))/((1-q1_2)*Km);

%% Independent optimization

% Sub-problems 1 and 3

    %Sub-problem 1 NPV (individual operation of phase 1 since 0
    to T_i_2 (sub-problem 2 initial time))
    NPV1 = 2.0000000000*10^(-7)*(-5.0001000000*10^5*Km*Kp*exp(-
1.0000000000*rho*T_i_2)*P*Rec+1.5000000000*10^5*Kp^2*exp(-
1.0000000000*rho*T_i_2)*P*Rec+5.0000000000*10^6*Cm*Km^2*exp(-
1.0000000000*rho*T_i_2)+5.0000000000*10^6*Cp*Km*Kp*exp(-
1.0000000000*rho*T_i_2)+5.0001000000*10^5*P*Rec*Kp*Km-
1.5000000000*10^5*P*Rec*Kp^2-5.0000000000*10^6*Cm*Km^2-
5.0000000000*10^6*Cp*Km*Kp)/(Km*rho);
    %Sub-problem 3 NPV (individual operation of phase 2 since
    T_f_2 (sub-problem 2 final time) to T_f_3 (sub-problem 3
    final time))
    NPV3 = -(0.5000000000e-1*(-
4.0000000000*P*Rec*Kp*Km+P*Rec*Kp^2+20.0000000000*Cm*Km^2+20.0000000000*C
p*Kp*Km))* (exp(-1.0000000000*rho*T_f_2)-1.0000000000*exp(-
1.0000000000*rho*T_f_3))/(Km*rho);
    terminalValue=NPV1+NPV3;

% Sub-problem 2

    %Coestate variables (and one of the three transversality
    conditions)
    lambda1 = lambda10*100*exp(rho*(t-T_i_2));%adjoint
    (differential equation) solved for lambda (lambda10 is the
    coestate variable at time zero)
    lambda2 = 0;%from transversality condition, because the
    reserves at transition period final time is free

    %Hamiltonian
    H = P*Rec*(q1_2*Km*(0.8333500000e-1-8.3335000000*g1_c_2^2)+(1-
q1_2)*Km*(1.0000000000-(1.0000000000*(Km-Kp-q1_2*Km*(-
.6666800000+16.6670000000*g1_c_2)))/((1-q1_2)*Km))*(.2000000000-
5.0000000000*(.1000000000+(.1000000000*(Km-Kp-q1_2*Km*(-
.6666800000+16.6670000000*g1_c_2)))/((1-q1_2)*Km))^2*(1/(1.0000000000-
(1.0000000000*(Km-Kp-q1_2*Km*(-.6666800000+16.6670000000*g1_c_2)))/((1-
q1_2)*Km))))-lambda1*Km*q1_2-lambda2*Km*(1-q1_2);

    %Sub-problem 2 NPV equation to integrate
    NPVeq = exp(-rho*t)*(P*Rec*(q1_2*Km*(0.8333500000e-1-
8.3335000000*g1_c_2^2)+(1-q1_2)*Km*(1.0000000000-(1.0000000000*(Km-Kp-

```

```

q1_2*Km*(-.6666800000+16.6670000000*g1_c_2))/((1-
q1_2)*Km))*(.2000000000-5.0000000000*(.1000000000+(.1000000000*(Km-Kp-
q1_2*Km*(-.6666800000+16.6670000000*g1_c_2))/((1-
q1_2)*Km))^2)*(1/(1.0000000000-(1.0000000000*(Km-Kp-q1_2*Km*(-
.6666800000+16.6670000000*g1_c_2))/((1-q1_2)*Km))))-Cm*Km-Cp*Kp);

%Optimality condition. We solve q1_2 (extraction rate for the
transition period) from the optimality condition
S = solve(diff(H, q1_2) == 0, q1_2)
q1_2=S(k);%We obtain two solutions, so we choose one of the
two

%We replace q1_3 in the Hamiltonian, NPV equation and phase
2 cut-off grade
H = eval(H);
NPVeq = eval(NPVeq);
g2_c_2 = eval(g2_c_2);

%% Cooperative optimization

%Convert q1_2, H and g2_c_3 to functions
q1_2 = matlabFunction(q1_2);
H = matlabFunction(H);
g2_c_2 = matlabFunction(g2_c_2);

% Transversality conditions (the other two (of the three))
eq3=matlabFunction(H(lambda10,T_f_2,T_i_2) + diff(terminalValue,
T_f_2));%transition period final time is free
eq4=matlabFunction(H(lambda10,T_i_2,T_i_2) - diff(terminalValue,
T_i_2));%transition period initial time is free

%State equations (agotability)
%Find lambda10 and sub-problems endpoint times
syms h1 h2 h3 h4 h5 h6 %gaps for write the inequations as
equations (order of the times and g2_c_2 range)
fun=@(lambda10,T_i_2,T_f_2,T_f_3,h1,h2,h3,h4,h5,h6)...
([
double((Km*T_i_2+integral(@(t)q1_2(lambda10,t,T_i_2)*Km,T_i_2,T_f_2,'Arra
yValued',true)-S1o));... %phase 1 state equation
double((integral(@(t)(1-
q1_2(lambda10,t,T_i_2))*Km,T_i_2,T_f_2,'ArrayValued',true)+Km*(T_f_3-
T_f_2)-S2o));... %phase 2 state equation
double(eq3(T_f_2,lambda10,T_i_2)
);... %transversality equation
double(eq4(lambda10,T_i_2)
);... %transversality equation
double((T_f_3 - T_f_2 - h2)
);... %times order (T_f_3>T_f_2)
double((T_f_2 - T_i_2 - h1)
);... %times order (T_f_2>T_i_2)
double((g2_c_2(lambda10,T_i_2,T_i_2) - d + h3)
);... % g2_c_2 at T_i_2 < d
double((g2_c_2(lambda10,T_i_2,T_i_2) - c - h4)
);... % g2_c_2 at T_i_2 > c

```

```

double((g2_c_2(lambda10,T_f_2,T_i_2) - d + h5)
);... % g2_c_2 at T_f_2 < d
double((g2_c_2(lambda10,T_f_2,T_i_2) - c - h6)
)); % g2_c_2 at T_f_2 > c
fun2=@(z) fun(z(1),z(2),z(3),z(4),z(5),z(6),z(7),z(8),z(9),z(10));
%vectorial form

%% Resolution of the system

x0 = [10 T_i_2_e T_f_2_e (S1o+S2o)/Km T_f_2_e-T_i_2_e
(S1o+S2o)/Km-T_f_2_e (d-c)/2 (d-c)/2 (d-c)/2 (d-c)/2]; % initial point
limitInf = [-inf 0 0 S1o/Km 0 0 0 0 0 0]; %lower limit
limitSup = [inf S1o/Km (S1o+S2o)/Km (S1o+S2o)/Km (S1o+S2o)/Km
(S1o+S2o)/Km d-c d-c d-c d-c]; %upper limit
options =
optimoptions('lsqnonlin','MaxFunEvals',500000,'MaxIter',500,'Display','fi
nal-detailed','TolFun',1e-16,'TolX',1e-
16,'PlotFcns',{@optimplotx,@optimplotresnorm,@optimplotfval}); %options
for the numerical resolution
[x, resnorm, f, output] = lsqnonlin(fun2, x0, limitInf, limitSup
,options);

%% Results

%Assign the variables
lambda10=x(1);T_i_2=x(2);T_f_2=x(3);T_f_3=x(4);

%Quadratic total error

Error_Total(i,j)=(f(1))^2+(f(2))^2+(f(3))^2+(f(4))^2+(f(5))^2+(f(6))^2+(f
(7))^2+(f(8))^2+(f(9))^2+(f(10))^2;

%Mine NPV of the iteration
NPVeq=matlabFunction(NPVeq);
MineNPV(i,j) = double(integral(@(t)NPVeq(lambda10,t,T_i_2),
T_i_2, T_f_2) + eval(terminalValue));
NPVtran(i,j)= double(integral(@(t)NPVeq(lambda10,t,T_i_2),
T_i_2, T_f_2));

%Show outputs variables
fprintf('\nOutputs :\n')
propiedad = {'lambda10','T_i_2','T_f_2','T_f_3','NPV','Total
error','g2(T_i_2)','g2(T_f_2)','q1(T_i_2)','q1(T_f_2)','g1(T_i_2)','g1(T
_f_2)','Agotal','Agota2','eq3','eq4'};
unidad =
{'[]','[años]','[años]','[años]','USD','[]','[]','[]','[]','[]','[]'
,'[ton]','[ton]','[]','[]'};
valor =
{lambda10,T_i_2,T_f_2,T_f_3,MineNPV(i,j),Error_Total(i,j),g2_c_2(lambda10
,T_i_2,T_i_2),g2_c_2(lambda10,T_f_2,T_i_2),q1_2(lambda10,T_f_2,T_i_2),q1
_2(lambda10,T_f_2,T_i_2),alpha+beta*T_i_2,alpha+beta*T_f_2,(Km*T_i_2+integ
ral(@(t)q1_2(lambda10,t,T_i_2)*Km,T_i_2,T_f_2,'ArrayValued',true))/10^6,(
integral(@(t)(1-
q1_2(lambda10,t,T_i_2))*Km,T_i_2,T_f_2,'ArrayValued',true)+Km*(T_f_3-
T_f_2))/10^6,eq3(T_f_2,lambda10,T_i_2),eq4(lambda10,T_i_2)};

```

```

fprintf('%15s %10s %10s\n','Variable','Unidad','Valor')
resultados = [propiedad; unidad; valor];
fprintf('%15s %10s %10.4g\n',resultados{:})

%Save the iteration results
M_lambda10(i,j) = lambda10;
M_T_i_2(i,j) = T_i_2;
M_T_f_2(i,j) = T_f_2;
M_T_f_3(i,j) = T_f_3;
M_q1_T_f_2(i,j) = q1_2(lambda10,T_f_2,T_i_2);
M_q1_T_i_2(i,j) = q1_2(lambda10,T_i_2,T_i_2);
M_g1T_f_2(i,j) = alpha+T_f_2*beta;
M_g1T_i_2(i,j) = alpha+T_i_2*beta;
M_g2T_f_2(i,j) = g2_c_2(lambda10,T_f_2,T_i_2);
M_g2T_i_2(i,j) = g2_c_2(lambda10,T_i_2,T_i_2);
M_beta(i,j) = beta;
M_alpha(i,j) = alpha;

%if the total error is greater than 1, so we will prove with the
other
%solution for q1_2, that is q1_3(1). In other case, we will
continue with
%the iterations
if (k==2) && ( Error_Total>1 )
    k=1;
else
    i = i + 1;
    beta=beta+stepbeta;
    k=2;
end

end

j=j+1;
alpha=alpha+stepalpha;

end

%% optimum solution graphics

%We have to find in wich coordinate is the maximum NPV, and then save the
optimal variables
%At the same time, we plot the feasible points (with error less than 1)

%Size of the grid
I=length(VPN);
J=length(VPN(I,:));
ii=1;

```

```

figure;
imax=1;
jmax=1;
firstloop=1;
while ii<=I
    jj=1;
    while jj<=J
        if Error_Total(ii,jj)<1
            %if the error is less than 1, so we plot the point
            hold on
            plot3(M_alpha(ii,jj),M_beta(ii,jj),VPN(ii,jj),'.',
'MarkerSize',10)
            hold on
            %we save the feasible point in a new array
            alpha(ii,jj)=M_alpha(ii,jj);
            beta(ii,jj)=M_beta(ii,jj);
            NPV(ii,jj)=MineNPV(ii,jj);

            %check if the point has the maximum NPV until now,
            if VPN(ii,jj)>VPN(imax,jmax)
                imax=ii;
                jmax=jj;
            end
        else
            %if the error is greater than 1, so we assign to the point a
NPV of -1
            alpha(ii,jj)=M_alpha(ii,jj);
            beta(ii,jj)=M_beta(ii,jj);
            NPV(ii,jj)=-1;
        end
        jj=jj+1;
    end
    ii=ii+1;
end

%We plot the maximum point
hold on
plot3(M_alpha(imax,jmax),M_beta(imax,jmax),VPN(imax,jmax),'.r',
'MarkerSize',10)
hold on
%Save the optimal variables and NPVs
alphamax=M_alpha(imax,jmax)
betamax=M_beta(imax,jmax)
T_i_2max=M_T_i_2(imax,jmax)
T_f_2max=M_T_f_2(imax,jmax)
T_f_3max=M_T_f_3(imax,jmax)
lambda10max=M_lambda10(imax,jmax)
NPVmax=NPV(imax,jmax)
NPVtranmax=NPVtran(imax,jmax)
q1T_f_2=M_q1_T_f_2(imax,jmax)
q1T_i_2= M_q1_T_i_2(imax,jmax)
g1T_f_2= M_g1T_f_2(imax,jmax)
g1T_i_2= M_g1T_i_2(imax,jmax)
g2T_f_2= M_g2T_f_2(imax,jmax)
g2T_i_2= M_g2T_i_2(imax,jmax)

```

**ANEXO D: CARTA DE INGRESO DEL PAPER A REVISTA ISI
“RESOURCES POLICY”**

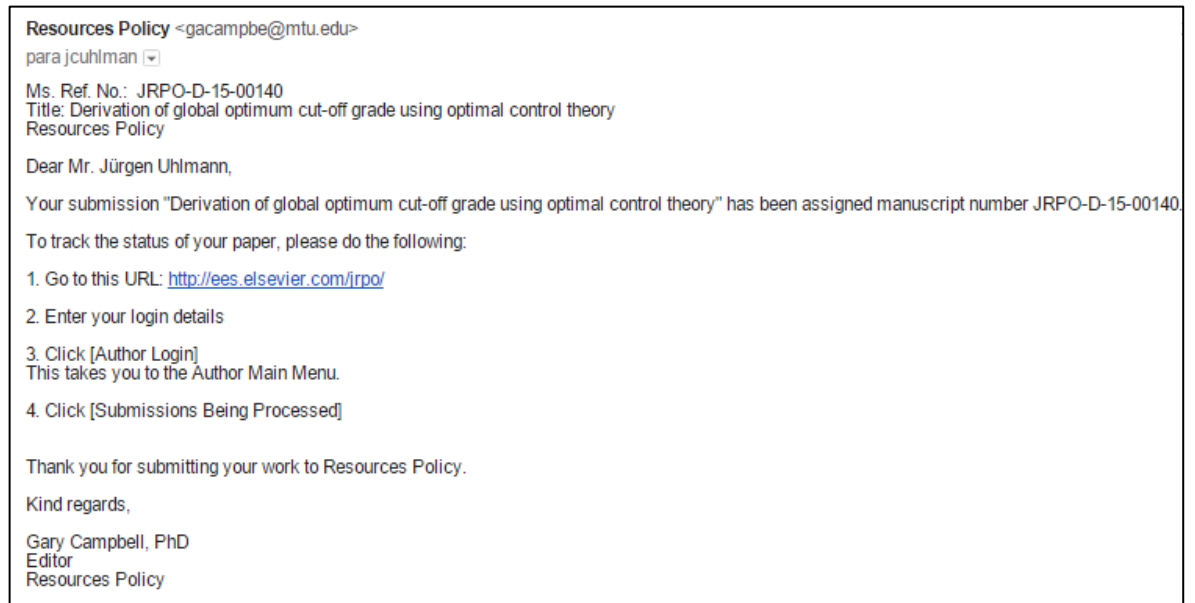


Figura D-1: Carta de ingreso del paper a revista ISI “Resources Policy”