PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

OPTIMIZACIÓN TOPOLÓGICA EN FACHADAS DE EDIFICIOS DE GRAN ALTURA BAJO MÚLTIPLES CARGAS

SERGIO CELIS HARVEY

Tesis para optar al grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Profesor Supervisor:
TOMÁS ZEGARD LATRACH

Santiago de Chile, julio, 2022

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE

ESCUELA DE INGENIERIA

OPTIMIZACIÓN TOPOLÓGICA EN FACHADAS DE EDIFICIOS DE GRAN ALTURA BAJO MÚLTIPLES CARGAS

SERGIO CELIS HARVEY

Tesis presentada a la Comisión integrada por los profesores:

TOMÁS ZEGARD LATRACH

SERGIO GUTIÉRREZ Sergio Gutiérrez

Sergio Gutiérrez (Jul 28, 2022 17:05 EDT)

SYLVIA ALMEIDA

SYLVIA REGINA MESQUITA DE ALMEIDA (Jul 28, 2022 15:46 ADT)

TOMÁS REYES

Para completar las exigencias del grado de

Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Santiago de Chile, julio, 2022

A mis Padres: Sergio Celis González y Karina Harvey Harvey, hermanos/as, amigos/as y pareja.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, agradecer a mi profesor supervisor: Tomás Zegard Latrach, por su incondicional apoyo en tiempos difíciles, como estallido social y pandemia, por sus conocimientos y experiencias entregadas. Siempre estaré muy agradecido por su motivación y meticulosidad a lo largo de mi experiencia en postgrado.

A mis padres: Sergio Celis González y Karina Harvey Harvey, quienes fueron un factor clave en el apoyo tanto moral como económico para lograr mis objetivos académicos a lo largo de toda mi carrera universitaria.

Un especial agradecimiento a mi pareja Claudia Fuenzalida González, por motivarme día a día en el transcurso de mi postgrado, por las palabras de ánimo y más aún, su constante atención y preocupación. Mi eterna serendipia.

Finalmente, me gustaría agradecer a mis compañeros/as de postgrado por su apoyo, preocupación y amistad. Especialmente a Diego Salinas González, quien siempre tuvo disposición en prestar ayuda y consejos con sus conocimientos y experiencias.

ÍNDICE GENERAL

Pág.

ÍNDICE DE TABLAS

Pág.

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMEN

Los sistemas estructurales en edificios de gran altura están fuertemente influenciados por las cargas laterales, típicamente viento y sismos. Durante la presente investigación será estudiado el desempeño estructural bajo la influencia del primero de estos casos. Además, se explorará el uso de la optimización topológica basada en la densidad con la finalidad de obtener diseños óptimos, los cuales pueden ser interpretados como un sistema estructural eficiente en su desempeño bajo ciertas restricciones.

En este contexto, el objetivo principal de la investigación es comprobar que la incorporación de la optimización estructural, en específico, la topológica, puede verificar las guías clásicas de estructuración para edificios de gran altura. Al mismo tiempo, se espera expandir el abanico conocido de diseños estructurales que resisten eficientemente las cargas laterales. Esto se logra buscando la mejor forma de distribuir espacialmente una determinada y limitada cantidad de material disponible.

Para hacerlo, en primer lugar, se implementan computacionalmente herramientas numéricas de análisis estructural en base a teoría de elementos finitos, para las cuales se modelan y calculan ejemplos, los que se comparan con los resultados teóricos para verificar su correcto funcionamiento. Posteriormente, se programa la optimización topológica, considerando simetría y repetición de patrones. La simetría y la repetición de patrones son restricciones de manufactura usualmente necesarias para que los diseños sean prácticos y aplicables a las obras de ingeniería. Una vez implementadas ambas herramientas de análisis, se modela y analizan ejemplos de edificios, para finalmente generar conclusiones en base a los resultados obtenidos.

En particular, la presente tesis valida la hipótesis planteada y se generan recomendaciones de diseño para edificios de gran altura sujetos a cargas de viento. La cuantificación realizada en esta investigación posibilitará la evaluación de estructuras óptimas desde un punto de vista de costo y desempeño.

Palabras Clave: Optimización topológica, Optimización estructural, Edificios altos, Rascacielos, Viento.

ABSTRACT

Structural systems in high-rise buildings are strongly influenced by lateral loads, typically wind and earthquakes. During the present investigation, the structural performance under the influence of the first of these cases will be studied. In addition, the use of density-based topological optimization will be explored in order to obtain optimal designs, which can be interpreted as an efficient structural system in its performance under certain constraints.

In this context, the main objective of this research is to verify that the incorporation of structural optimization, specifically topology optimization, can verify the classic structuring guidelines for high-rise buildings. At the same time, it is expected to expand the known range of structural designs that efficiently resist lateral loads. This is reached by looking for the best way to spatially distribute a certain and limited amount of available material.

To achieve this, first, a numerical structural analysis framework based on finite element theory is computationally implemented. Well-known examples are modeled and analyzed using this framework, and the results obtained are compared with the theoretical ones to verify the suitability of the framework. Subsequently, a topological optimization algorithm is added to the framework, which can take into account symmetry and repetition of patterns. These manufacturing constraints are necessary in order to obtain designs that are practical and manufacturable in building projects. Once both analysis tools have been implemented and tested, an array of tall building models are analyzed. Finally, a set of conclusions and recommendations are presented which are based on the results obtained.

This thesis validates the proposed hypothesis, and a set of design recommendations are generated for structural systems tailored at high-rise buildings subject to wind loads. The quantification carried out in this research will enable the evaluation of optimal structures from a cost and performance point of view.

Keywords: Topological optimization, Structural optimization, Tall buildings, Skyscrapers, Wind.

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Motivación

La industria de la construcción tiene un alto impacto económico, social y ambiental. Es por ello que se hace esencial el ahorro de materiales y recursos para así reducir el costo de la estructura por conceptos de ineficiencia, y a la vez, el otorgar un soporte estructural óptimo en pos de la seguridad ciudadana.

Al momento de hablar de estructuras de gran escala, los sistemas estructurales en edificios de elevada altura están gobernados por cargas laterales, típicamente viento y sismos (Ali & Moon, 2007). Esto implica que el diseño de los sistemas laterales será a menudo controlado por la rigidez en lugar de la resistencia. De hecho, Fazlur Khan, uno de los padres de los rascacielos modernos, señaló que el costo del material aumenta rápidamente con la altura de la estructura, en donde el arriostramiento lateral a causa del viento es responsable de este rápido aumento en el costo (Stafford & Coull, 1991). Por lo tanto, si se desea diseñar edificios altos más eficientes en su desempeño estructural, estos deben tener un fuerte enfoque en las cargas laterales sufridas por los mismos.

Para entender a qué está ligado este concepto de eficiencia estructural en el contexto de edificios de gran altura, primero es necesario saber que el diseño de sistemas laterales para estos a menudo se controla por la rigidez de la estructura, en lugar de su resistencia. En este escenario, se tiene que un edificio óptimo es aquel que intentará maximizar su rigidez, o equivalentemente, minimizar sus desplazamientos.

Dado que el desempeño de los edificios se ve fuertemente influenciado por su altura, existen variados sistemas estructurales acordes a cada escenario, los cuales se muestran en la Figura 1-1. En ella es posible observar una tendencia en la que los elementos estructurales son cada vez más expuestos, es decir, dicha componente se vuelve visualmente más clara para el espectador. En consecuencia, estos elementos ganan más importancia al aumentar la altura, convirtiéndose finalmente en la arquitectura de la estructura. Ejemplos concretos de esta tendencia se pueden observar en la Figura 1-2.

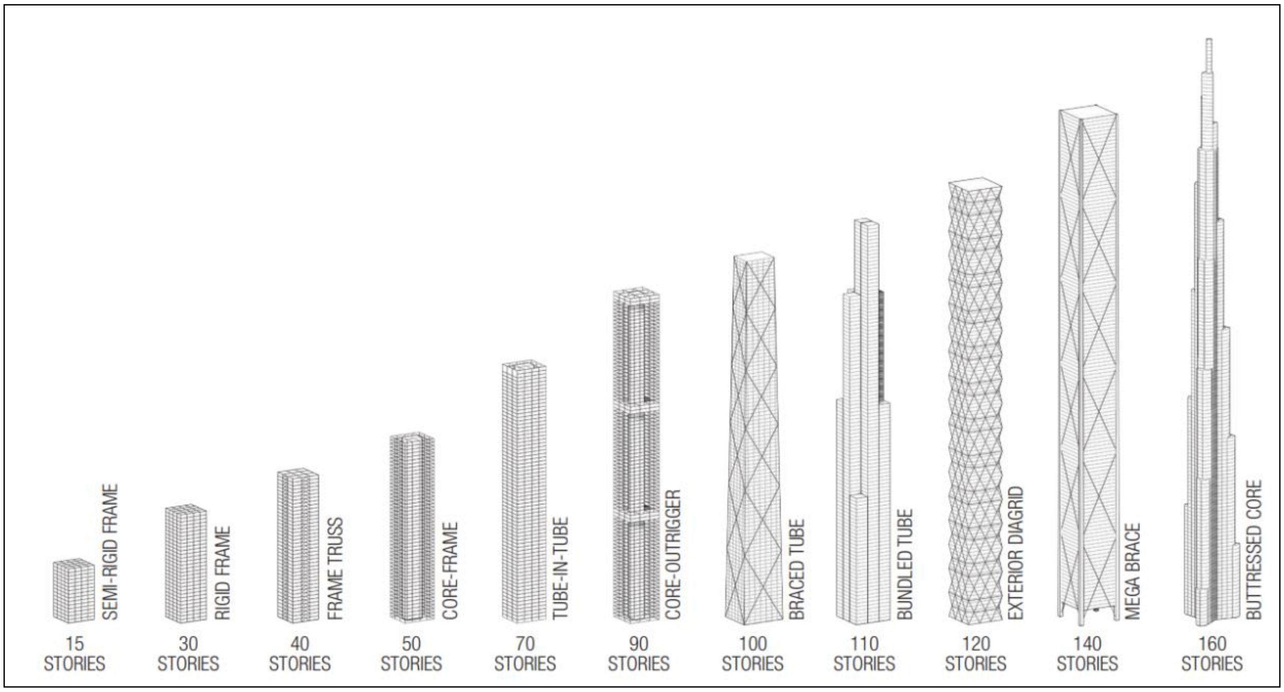


Figura 1-1: Límites de altura recomendados para sistemas estructurales en edificios (Zegard 2022, quien adaptó una figura similar de Ascher, 2011).

Es importante mencionar que la altura recomendada para los diferentes sistemas estructurales mostrados en la Figura 1-1 dependerá del material con el que se construyen, pudiendo así variar esta.

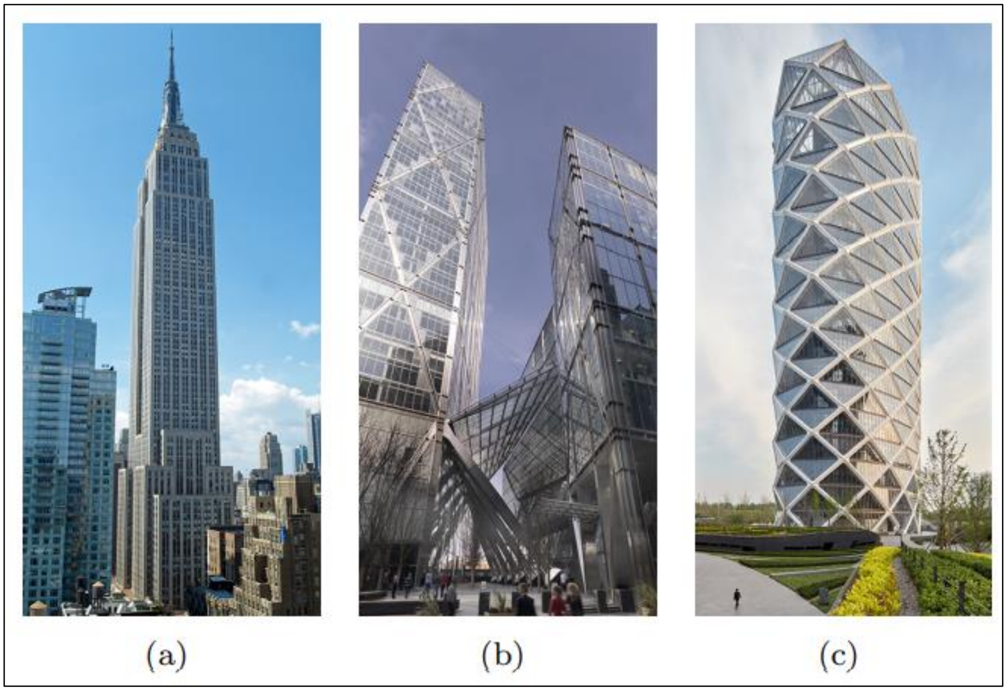


Figura 1-2: Ejemplos de edificios con diferentes sistemas estructurales:
(a) Empire State Building (381 m); (b) Bishopsgate and Broadgate Tower (178 m);
(c) Poly International Plaza (161 m).

La optimización topológica, en el contexto de la ingeniería civil, tiene como objetivo diseñar óptimamente una estructura sin ninguna predisposición de la conectividad, la forma y el tamaño de sus elementos, para así lograr el mejor rendimiento para una geometría, cargas y condiciones de soporte dadas. Dentro de la optimización topológica existe el método basado en la densidad, el cual busca responder a la pregunta: ¿cuál es la mejor disposición espacial del material (distribución) que logra el mejor rendimiento en función de algún parámetro o función medible? El rango de aplicaciones de esta metodología en ingeniería estructural es amplio: edificios, puentes, refuerzo estructural, entre otras.

La optimización topológica por el método de densidades tiene un elevado costo computacional. Es por esto que muchas de las aplicaciones e investigaciones se enfocan en problemas bidimensionales (Sigmund, 2001; Talischi, 2012; Sigmund & Maute, 2013; Tovar & Khandelwal, 2012). No obstante, la aplicación de dicha herramienta al sistema estructural lateral de un edificio de gran altura genera problemas desde un punto de vista práctico en distribución del material, dado que, si la modelación es bidimensional, no se puede modelar correctamente las contribuciones e interacciones que ocurren fuera del plano. Es decir, un análisis bidimensional no permite analizar las cargas sobre la fachada, la interacción entre miembros estructurales ortogonales entre sí (fuera del plano de análisis), ni las losas del edificio. En consecuencia, se requiere un modelo tridimensional para obtener resultados coherentes a las condiciones físicas de la estructura (Gaynor et al., 2013).

En este análisis tridimensional, y dado que la dirección de las cargas laterales a menudo se desconoce, se requiere un análisis (y optimización) que considere múltiples direcciones de carga.

En este escenario, es necesario explorar el uso de la optimización topológica basada en la densidad, considerando múltiples casos de carga (Tang et al., 2012), simetría y repetición de patrones (Almeida et al., 2010), para así obtener diseños óptimos de material, los cuales luego se pueden interpretar y racionalizar para así guiar el diseño hacia un sistema estructural eficiente para edificios de gran altura.

1.2. Objetivo

El objetivo de la presente tesis de postgrado es encontrar la distribución óptima de material dispuesto en las fachadas de edificios de gran altura, la cual está sujeta a variables restrictivas, tales como una fracción de volumen máxima disponible para los componentes estructurales, al mismo tiempo que se maximiza la rigidez, y por consiguiente disminuyen las deformaciones del edificio. Pese a que no se analizarán costos asociados, se desprende que una reducción del uso de material que resulte en un mismo (o mejor) desempeño estructural conllevará a un ahorro económico de la estructura por conceptos de eficiencia. Asimismo, y como derivación inherente del principal objetivo planteado, también se generarán conclusiones respecto a la importancia de ciertos componentes estructurales por sobre otros (núcleo, losas, muros, etc.).

Estos objetivos serán validados desde un punto de vista numérico y vía simulación computacional. En cuanto al alcance de la investigación, es importante mencionar que se centrará en la superestructura, es decir, no serán objeto de análisis las fundaciones ni la interacción suelo-estructura de esta.

1.3. Esquema y organización del documento

El resto de este documento está organizado según:

En el Capítulo 2 se presenta la metodología empleada junto a su respectiva teoría, ejemplos y conclusiones. En particular, esto es realizado tanto para el análisis estructural como para la optimización topológica, herramientas a partir de las cuales se genera la implementación computacional (llamada ClaTOP) empleada para el desarrollo de la presente investigación. Adicionalmente, se introducen los materiales utilizados en la modelación estructural, junto a sus respectivas propiedades mecánicas, así como también se describen las cargas a considerar sobre la estructura, y las combinaciones de las mismas que se consideran en el diseño; ambas acordes a las normativas vigentes.

Posteriormente, en el Capítulo 3, se presentan ejemplos de aplicación a sistemas estructurales, para los cuales se muestran sus respectivos resultados obtenidos con el método de análisis propuesto.

Finalmente, en el Capítulo 4 se resumen las principales conclusiones obtenidas en la investigación, así como también sugerencias y alcances para futuras investigaciones en el área.

2. METODOLOGÍA

Para poder analizar estructuras de interés, en primer lugar, es necesario estudiar teorías y criterios de modelación estructural. En particular, para este fin se utiliza la teoría de los elementos finitos, la cual se implementa computacionalmente en el *software* comercial Matlab®.

Posteriormente, y una vez que se puedan modelar estructuras con resultados numéricos respaldados por la teoría, se entra en el campo de la optimización estructural. Para ello, se programa computacionalmente el método de densidad utilizado en la optimización topológica, también en el *software* comercial Matlab®. Nuevamente, y con el ánimo de validar su correcta implementación, se comparan los resultados obtenidos con conocidos ejemplos disponibles en la literatura.

Finalmente, y una vez implementada la teoría base del presente trabajo investigativo, se definen las propiedades mecánicas y dimensionales de las estructuras que serán analizadas en el Capítulo 3, tales como materiales, dimensionamiento de elementos y cargas según las normativas vigentes.

En particular, el diagrama de flujo considerando este procedimiento en mayor detalle se muestra en la Figura 2-1.

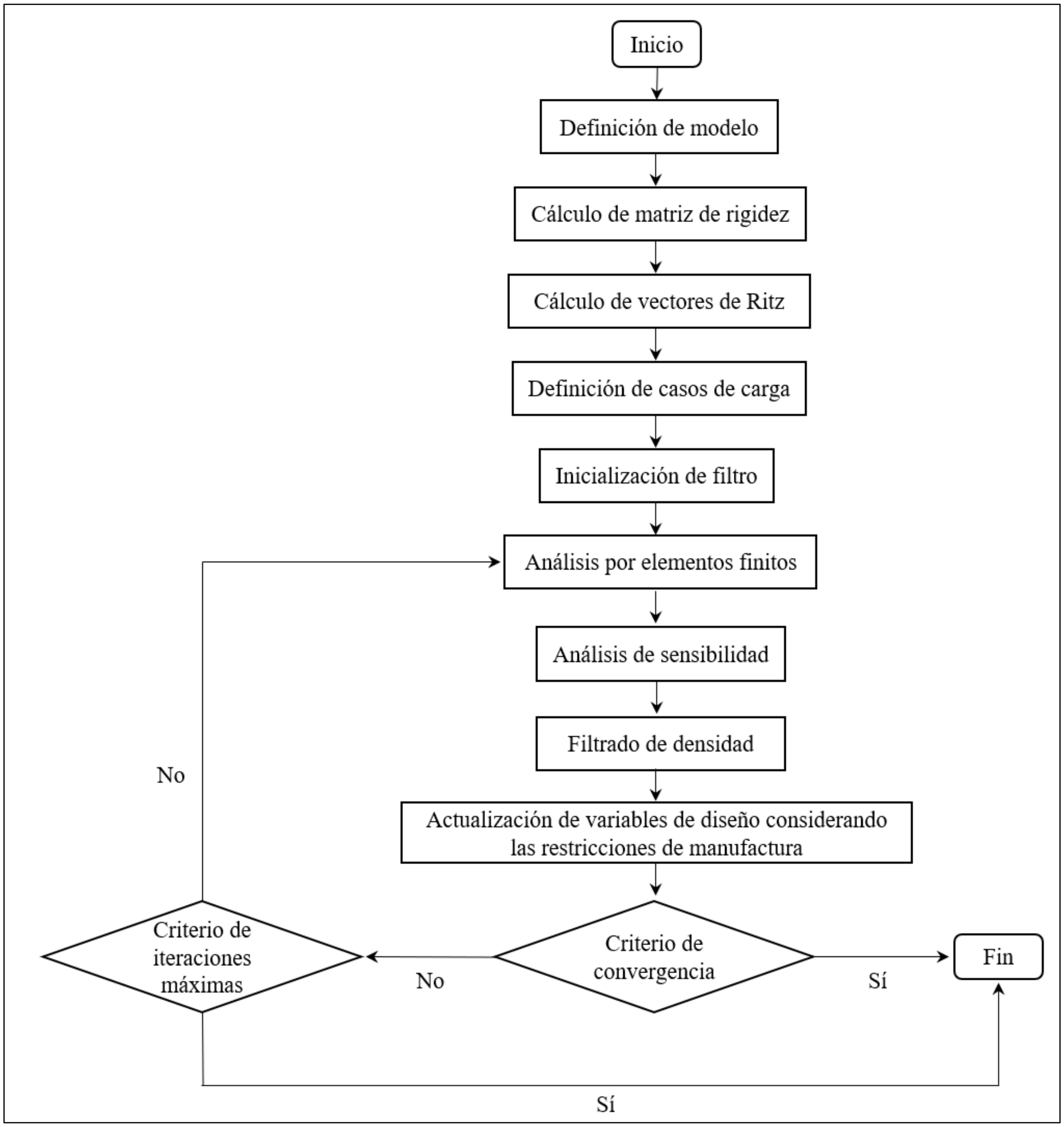


Figura 2-1: Diagrama de flujo del algoritmo de optimización topológica por el método de densidades implementado en el presente trabajo.

2.1. Formulación de Análisis Estructural

La representación de las leyes de la física y mecánica se suele expresar mediante ecuaciones diferenciales parciales. Sin embargo, para la gran mayoría de escenarios, estas no se pueden resolver mediante métodos analíticos, por lo que es necesaria una aproximación a la solución de dichas ecuaciones.

En este contexto, los métodos numéricos son una herramienta viable. En particular, y dentro de esta metodología, se tiene el análisis de los elementos finitos (*Finite Element Analysis*), el cual permite obtener la evolución en el espacio y/o tiempo de una o más variables de interés, representando así el comportamiento físico del sistema analizado (Cook, 2002; Zienkiewicz, 2013; Hughes, 2000; Oñate, 2009).

Así, este método será utilizado para obtener los desplazamientos de la estructura, al resolver la ecuación:

$$\mathbf{K}\,\mathbf{u} = \mathbf{f} \tag{2-1}$$

, en donde **K** es la matriz de rigidez global, **u** son los desplazamientos nodales y **f** es un vector de fuerzas que resulta de la aplicación de cargas sobre la estructura, todos estos términos en coordenadas globales del sistema estructural.

2.1.1. Teoría de elementos finitos

El método de los elementos finitos es una de las técnicas de solución más poderosas, versátiles y matemáticamente sólidas para modelos escritos en términos de ecuaciones diferenciales parciales (Vassilevski et al., 2020). Originalmente, se desarrolló para resolver problemas en mecánica de sólidos, sin embargo, y dada su flexibilidad de aplicación, este ha encontrado una amplia gama de usos en todas las áreas de la ciencia

(Rapp, 2017). De hecho, es uno de los métodos más usados en herramientas comerciales para la modelación, análisis y diseño estructural, mecánico, eléctrico, hidráulico, magnético y acústico, por nombrar algunos.

La aplicación de FEM requiere discretizar el dominio del problema de estudio: particionarlo en elementos individuales y relativamente pequeños, a modo de aproximar la solución del dominio completo como la unión de las soluciones locales en dichos subelementos. Es decir, el problema se basa en buscar una solución discreta utilizando un número finito de variables que aproxima la solución exacta, donde el número finito de variables está asociado a la partición del dominio completo.

La partición espacial del dominio es realizada en elementos geométricos, comúnmente triángulos o cuadriláteros para el caso bidimensional, mientras que en tetraedros, cuñas o hexaedros para el tridimensional. El tipo de elemento en particular define un sistema de interpolación para la totalidad del elemento, el que usualmente tiene como variables las magnitudes en sus nodos (comúnmente los vértices). La interpolación es una combinación lineal de dichas variables y sus respectivas *funciones de forma*, las que son específicas para cada elemento y cada variable. Naturalmente, mientras mayor discretización se posea, mejor será la aproximación a la solución exacta, ya que el espacio de soluciones posibles dentro del dominio ha crecido.

En la presente investigación se utilizarán cuadriláteros para la discretización de los modelos estructurales. En este sentido, se tiene que las funciones de forma se deben calcular de forma individual para cada elemento, dado que el dominio a integrar cambia para cada uno de ellos dependiendo de sus coordenadas. Esto supone un costo computacional elevado, en especial para el análisis de estructuras complejas, las cuales pueden tener millones de elementos en su discretización.

Es por esto que conviene utilizar una formulación isoparamétrica, la cual consiste en mapear un elemento genérico en coordenadas cartesianas (x,y) a un dominio de uso estándar (ξ,η). En particular, uno de los tipos de elementos isoparamétricos para una geometría cuadrilateral viene dada por el 'elemento padre', cuyas coordenadas son tales que (ξ,η) $\in$ [-1,1], independiente del tamaño y la forma del elemento inicial. Este mapeo al elemento isoparamétrico se ilustra en la Figura 2-2.

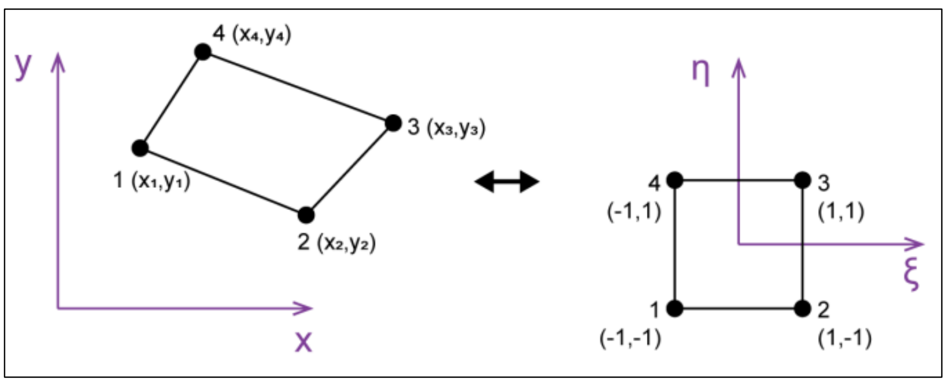


Figura 2-2: Mapeo a elemento isoparamétrico (Zegard, T. & Salinas, D., 2020).

Las funciones de forma del elemento isoparamétrico serán siempre iguales y vienen dadas por:

$$\hat{N}_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \tag{2-2}$$

$$\hat{N}_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \tag{2-3}$$

$$\hat{N}_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \tag{2-4}$$

$$\hat{N}_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \tag{2-5}$$

, donde los subíndices de cada función indican el nodo (en este caso, el vértice) al que dicha función pertenece. Estas funciones de forma son iguales a 1 en el nodo al que corresponden, mientras que su valor es 0 en los otros. Es decir, se cumple que:

$$\widehat{N}_i(\xi_i, \eta_i) = 1 \quad \forall\, i \,\epsilon\, [1, \dots, 4] \tag{2-6}$$

$$\widehat{N}_i\left(\xi_j, \eta_j\right) = 0 \quad \forall\, i \neq j \,\epsilon\, [1, \dots, 4] \tag{2-7}$$

, conocida como la condición de delta de Dirac. Además, las funciones cumplen la partición de unidad, dada por:

$$\sum_{i=1}^{4} \widehat{N}_i(\xi, \eta) = 1 \tag{2-8}$$

, que es un requisito necesario de las mismas. En el caso específico del análisis estructural y mecánico, la partición de unidad permite que el espacio de solución tenga contenido los movimientos de cuerpo rígido de la estructura; condición necesaria e importante. La condición de delta de Dirac tiene como consecuencia que las incógnitas asociadas a cada función de forma correspondan a los desplazamientos nodales.

Las mismas funciones de forma se utilizan para realizar el mapeo hacia el elemento estándar. En el caso del análisis estructural, se necesitan las derivadas de las funciones de forma en la construcción de la matriz de rigidez. Las derivadas deben estar expresadas en coordenadas cartesianas (x,y) y no en las coordenadas del elemento estándar (ξ,η), por lo que es necesario utilizar la regla de la cadena por medio de un Jacobiano de transformación. Es decir, las derivadas de las funciones de forma respecto a las coordenadas cartesianas (x,y) son:

$$\nabla \times \boldsymbol{N}^e = \boldsymbol{J}^{-1} \nabla_{\xi} \widehat{\boldsymbol{N}}^e \tag{2-9}$$

, en donde **J** es el Jacobiano:

$$\boldsymbol{J} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \tag{2-10}$$

Para el caso 2D, la inversa del Jacobiano viene dada por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{N}^e}{\partial y} \\ \frac{\partial \boldsymbol{N}^e}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{det\,(\boldsymbol{J})} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial n} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial n} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{N}^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \boldsymbol{N}^e}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{2-11}$$

Luego, para poder integrar sobre este nuevo dominio, se utiliza el método de integración numérica conocido como Cuadratura de Gauss, el cual permite integrar de forma exacta funciones polinomiales en un dominio parametrizado evaluando el polinomio en puntos específicos, denominados puntos de cuadratura. Así, se logra transformar una integral en sumatorias dentro de un dominio estándar, en donde la función evaluada en estos puntos se suma de forma ponderada acorde a coeficientes (pesos) específicos asociados a cada punto. Para esto, se tienen distintos órdenes de cuadratura, los que utilizan más o menos puntos dependiendo de la precisión numérica deseada. Las reglas de integración (órdenes de cuadratura) se resumen en la Tabla 2-1, donde ξ^* indica la posición donde evaluar la función a ser integrada, y ω es el coeficiente (peso) que debe ser usado en la sumatoria. Se debe recordar que las reglas indicadas en la Tabla 2-1 son para integrar una función entre $\xi = -1$ a $\xi = 1$.

Tabla 2-1: Reglas de integración en Cuadratura de Gauss.

Puntos	Orden	ξ^*	ω
1	1	0	2
2	3	$-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$	1, 1
3	5	$-\sqrt{\frac{3}{5}}, 0, \sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{5}{9}$
4	7	$\pm\sqrt{\frac{3+2\sqrt{6/5}}{7}}, \pm\sqrt{\frac{3-2\sqrt{6/5}}{7}}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}, \frac{18+\sqrt{30}}{36}$

Una representación de estos puntos, según el orden de integración, se muestra en la Figura 2-3.

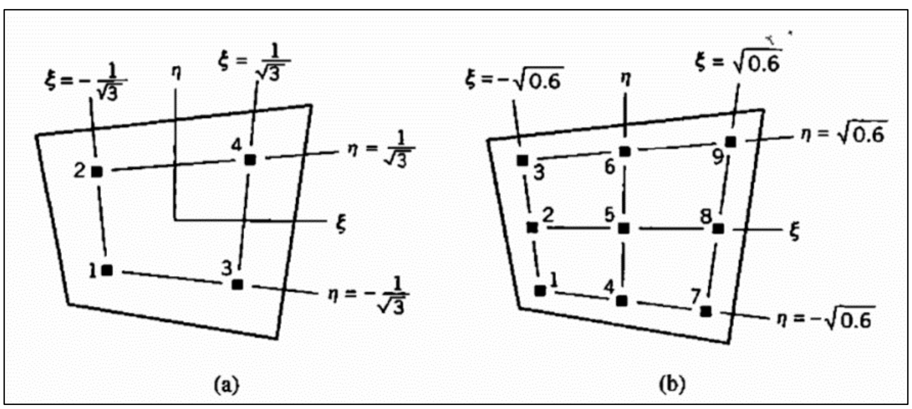


Figura 2-3: Cuadratura de Gauss: (a) Segundo orden (cuatro puntos); (b) Tercer orden (nueve puntos). (Cook, 2001)

2.1.2. Componente membrana

El elemento Q4 es un elemento bidimensional que permite captar los desplazamientos en el plano, es decir, sus desplazamientos (nodales) están todos en el plano mismo del elemento. Por ejemplo, dado un plano en coordenadas cartesianas (*x*,*y*) se logran obtener los desplazamientos de sus dos grados de libertad, uno en cada eje, dados por u y v respectivamente.

Sin embargo, y con el objetivo de obtener una mejor descripción del campo de desplazamientos del dominio espacial, en la presente investigación serán utilizados en la componente membrana elementos bilineales Q4 enriquecidos con *drilling degrees of freedom*, los cuales son conocidos como Q4D4 (Cook, 2001). Esto debido a que, a diferencia de los elementos bilineales, los elementos tipo Q4D4 pueden conectar rígidamente sus grados de libertad de giro con elementos *Plate* (o 'placa') perpendiculares entre sí, permitiendo así una modelación más adecuada y representativa de los problemas estructurales.

En este contexto, se tiene que los grados de libertad tipo *drilling* son rotacionales, cuyo vector es perpendicular al plano de análisis, siendo esta rotación representada por θ_z.

El elemento Q4D4 se obtiene condensando cinemáticamente los nodos intermedios de un Q8 (el cual posee 8 nodos), en donde se representan los dos grados de libertad asociados a un nodo ubicado en la mitad de cada lado del elemento, por la componente de giro θ en cada esquina de este, como se muestra en la Figura 2-4.

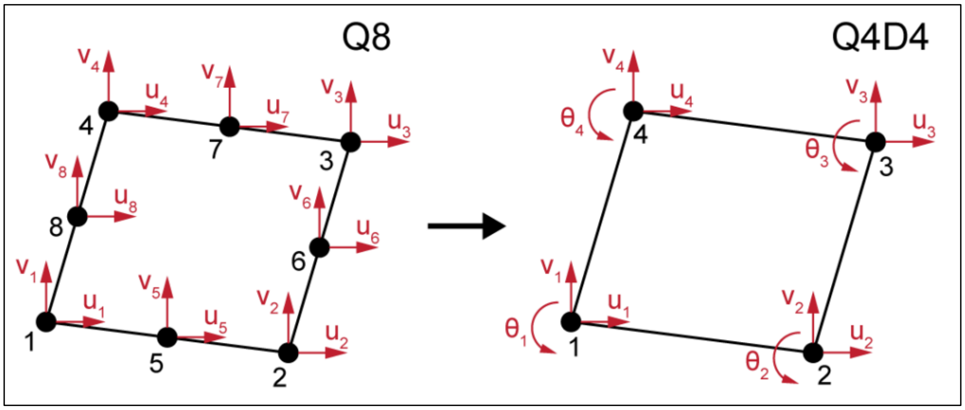


Figura 2-4: Transformación cinemática a elemento Q4D4 (Zegard, T. & Salinas, D., 2020).

Para ello, se utiliza una matriz de transformación **T** tal que cumpla:

$$\underbrace{\boldsymbol{u}_{Q8}}_{16x1} = \underbrace{\boldsymbol{T}}_{16x12} \underbrace{\boldsymbol{u}_{Q4D4}}_{12x1} \tag{2-12}$$

, la cual viene dada por:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \\ u_7 \\ v_7 \\ u_8 \\ v_8 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{(y_1-y_2)}{8} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{(y_2-y_1)}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{2} & \frac{(x_2-x_1)}{8} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{(x_1-x_2)}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{(y_2-y_3)}{8} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{(y_3-y_2)}{8} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{(x_3-x_2)}{8} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{(x_2-x_3)}{8} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{(y_3-y_4)}{8} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{(y_4-y_3)}{8} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{(x_4-x_3)}{8} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{(x_3-x_4)}{8} \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{(y_1-y_4)}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{(y_4-y_1)}{8} \\
0 & \frac{1}{2} & \frac{(x_4-x_1)}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{(x_1-x_4)}{8}
\end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{Bmatrix} \tag{2-13}$$

Así, utilizando esta matriz de transformación, se pueden obtener tanto la matriz de rigidez como el vector de fuerzas locales para el elemento Q4D4:

$$\underbrace{\boldsymbol{k}_{Q4D4}}_{12x12} = \underbrace{\boldsymbol{T}^T}_{12x16} \underbrace{\boldsymbol{k}_{Q8}}_{16x16} \underbrace{\boldsymbol{T}}_{16x12} \tag{2-14}$$

$$\underbrace{\boldsymbol{f}_{Q4D4}}_{12x1} = \underbrace{\boldsymbol{T}^T}_{12x16} \underbrace{\boldsymbol{f}_{Q8}}_{16x1} \tag{2-15}$$

Para poder hacer esta transformación, en primer lugar, se deben obtener las matrices de rigidez y vectores de fuerza locales de cada elemento, los cuales se calculan integrando sobre el dominio isoparametrizado Ω_e de cada elemento según:

$$\boldsymbol{k}_e = \int \boldsymbol{B}_e{}^T(\xi)\, \boldsymbol{D}\, \boldsymbol{B}_e(\xi)\, |det(\boldsymbol{J})|\, d\Omega_e \tag{2-16}$$

$$\boldsymbol{f}_e = \int \widehat{\boldsymbol{N}}_e{}^T(\xi)\, \boldsymbol{b}\, d\Omega_e + \int \widehat{\boldsymbol{N}}_e{}^T(\xi)\, \bar{\boldsymbol{t}}\, d\Omega_e{}^t - \boldsymbol{k}_e \boldsymbol{g} \tag{2-17}$$

, en donde $\mathbf{B}_e$ es la matriz de forma de cada elemento y viene dada por:

$$\boldsymbol{B}_e = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{N}_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \hat{N}_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \hat{N}_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \hat{N}_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \hat{N}_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \hat{N}_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \hat{N}_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \hat{N}_4}{\partial y} \\ \frac{\partial \hat{N}_1}{\partial y} & \frac{\partial \hat{N}_1}{\partial x} & \frac{\partial \hat{N}_2}{\partial y} & \frac{\partial \hat{N}_2}{\partial x} & \frac{\partial \hat{N}_3}{\partial y} & \frac{\partial \hat{N}_3}{\partial x} & \frac{\partial \hat{N}_4}{\partial y} & \frac{\partial \hat{N}_4}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{2-18}$$

, y $\mathbf{D}$ es la matriz constitutiva que cumple la relación tensión-deformación, mediante la Ley de Hooke según tensiones planas:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2-19}$$

2.1.3. Componente *Plate*

La teoría *Plate* (o 'placa') es una simplificación numérica que permite describir el comportamiento de elementos planos (elementos cuya dimensión de espesor es relativamente pequeña en comparación a sus dos dimensiones) basados en una elasticidad tridimensional como elementos sin espesor que incluyen componentes flexurales asociadas a las deformaciones fuera del plano del elemento. A modo de ejemplificación, se puede tener el caso de una mesa, losa o una hoja de papel, en donde el espesor de estos elementos juega ese rol despreciable en comparación a las otras dos dimensiones geométricas.

El elemento placa es una contraparte al comportamiento de membrana, ya que permite conocer los otros 3 grados de libertad faltantes para una completa representación del espacio de desplazamientos: el desplazamiento fuera del plano w, y los giros en x e y, dados por θ_x y θ_y respectivamente. En particular, y dado que los casos de análisis serán edificios de gran altura en los que el espesor de los muros es considerablemente menor a la altura de estos, es válida (y apropiada) la aplicación de dicha simplificación numérica.

Dentro de la teoría de placas es posible diferenciar dos grandes aproximaciones: la teoría de Kirchhoff y la teoría Reissner-Mindlin (Zienkiewicz, 2005; Cook, 2002; Hughes, 2000). La primera de estas es aplicable únicamente a placas delgadas y, en consecuencia, no considera la deformación por corte transversal, mientras que la segunda sí considera esta deformación y suele ser utilizada para modelos de placa gruesa (Zienkiewicz, 2005; Cook, 2002; Oñate, 2013), donde dichas deformaciones sí son importantes. Por la naturaleza inherente de la idealización de elementos tridimensionales a elementos planos, en ambos modelos se toma la tensión normal en la dirección del espesor como cero, es decir, se trabaja con la hipótesis de tensiones planas.

En base al comportamiento esperado de las estructuras a modelar es necesario utilizar la teoría Reissner-Mindlin, la cual puede ser entendida de forma análoga a una viga de Timoshenko, incluyendo el efecto de la deformación producida por el corte. De hecho, esta característica hace aplicable esta teoría tanto para casos de placa gruesa como también delgada, requiriendo únicamente como condición para ello la continuidad en la deflexión. Para la modelación numérica de esta componente se utilizarán elementos de cuatro nodos con el objetivo de lograr una equivalencia nodal con la componente membrana. Análogo al caso del elemento anterior, la matriz de rigidez local puede ser obtenida directamente mediante:

$$\boldsymbol{k}_e = \int \boldsymbol{B}_e{}^T(\xi)\, \boldsymbol{D}\, \boldsymbol{B}_e(\xi)\, |det(\boldsymbol{J})|\, d\Omega_e \tag{2-20}$$

No obstante, en este caso la matriz constitutiva **D** varía respecto a la mostrada en la ecuación (2-19) para la componente de membrana, dado que el fenómeno de la placa es un comportamiento flexural y donde es necesario incluir el espesor t del elemento. Luego, la matriz constitutiva para el caso de placas debe satisfacer la relación:

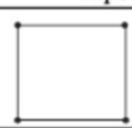
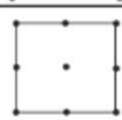
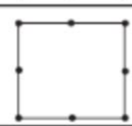
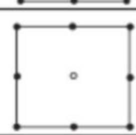
$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 & 0 & 0 \\ \nu D & D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)D}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa G t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa G t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \theta_y}{\delta x} \\ \frac{\partial \theta_x}{\delta y} \\ -\frac{\partial \theta_y}{\delta y} + \frac{\partial \theta_x}{\delta x} \\ \theta_y - \frac{\partial w}{\delta x} \\ \theta_x - \frac{\partial w}{\delta y} \end{Bmatrix} \tag{2-21}$$

, en donde $\kappa = 5/6$ es utilizado para la variación parabólica en el eje z del corte transversal, mientras que el término D es la rigidez flexural, que viene dada por:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \tag{2-22}$$

La integración reducida, integración selectiva o procedimientos equivalentes son necesarios para evitar el fenómeno denominado 'bloqueo por corte' (Cook, 2002), el cual se produce una sobrerigidez antes el corte en elementos lineales y bilineales, tales como el Q4. Este se genera por la incapacidad de estos elementos de representar adecuadamente las deformaciones producto del esfuerzo de corte. En la Figura 2-5 se presenta una tabla disponible en la bibliografía, la cual propone reglas de integración reducidas para evitar la ocurrencia de este fenómeno.

Elementos placa gruesa, integración y mecanismos

Tipo de elemento		Tipo de integración	$\mathbf{K}_f$	$\mathbf{K}_c$	Mecanismos
	Bilineal (B) 12 GDL	R	1 x 1	1 x 1	4
		S	2 x 2	1 x 1	2
		C	2 x 2	2 x 2	0
	Lagrangiano (L) 27 GDL	R	2 x 2	2 x 2	4
		S	3 x 3	2 x 2	1
		C	3 x 3	3 x 3	0
	Serendipito (S) 24 GDL	R	2 x 2	2 x 2	1
		S	3 x 3	2 x 2	0
		C	3 x 3	3 x 3	0
	Heterosis (H) 26 GDL	S	3 x 3	2 x 2	0

(R = Reducida, S = Selectiva, C = Completa)

Figura 2-5: Reglas para diferentes tipos de integración (Cook, 2002).

La integración reducida permite la aparición de modos de deformación asociados a cero energía; i.e. modos de deformación que se comportan como mecanismos y que reciben el nombre de *modos espuriosos*. Estos modos espuriosos se asemejan a los movimientos de cuerpo rígido de una estructura, con la salvedad que son un artefacto numérico producto de la integración reducida y que su vinculación (o eliminación) no es siempre posible. Los modos espuriosos podrían traer problemas en la modelación, por lo que se recomienda separar la componente flexural de la de corte en el proceso de integración y sólo subintegrar la componente de corte en la integración de la matriz de rigidez local. Es decir, se tiene que:

$$\boldsymbol{B}_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\partial \hat{N}_1}{\partial x} & 0 & 0 & -\frac{\partial \hat{N}_2}{\partial x} & 0 & 0 & -\frac{\partial \hat{N}_3}{\partial x} & 0 & 0 & -\frac{\partial \hat{N}_4}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial \hat{N}_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial \hat{N}_2}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial \hat{N}_3}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial \hat{N}_4}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \hat{N}_1}{\partial x} & -\frac{\partial \hat{N}_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \hat{N}_2}{\partial x} & -\frac{\partial \hat{N}_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \hat{N}_3}{\partial x} & -\frac{\partial \hat{N}_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \hat{N}_4}{\partial x} & -\frac{\partial \hat{N}_4}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(2-23)}$$

$$\boldsymbol{B}_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \hat{N}_1}{\partial x} & 0 & \hat{N}_1 & \frac{\partial \hat{N}_2}{\partial x} & 0 & \hat{N}_2 & \frac{\partial \hat{N}_3}{\partial x} & 0 & \hat{N}_3 & \frac{\partial \hat{N}_4}{\partial x} & 0 & \hat{N}_4 \\ \frac{\partial \hat{N}_1}{\partial y} & -\hat{N}_1 & 0 & \frac{\partial \hat{N}_2}{\partial y} & -\hat{N}_2 & 0 & \frac{\partial \hat{N}_3}{\partial y} & -\hat{N}_3 & 0 & \frac{\partial \hat{N}_4}{\partial y} & -\hat{N}_4 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(2-24)}$$

, y con ello el cálculo de la matriz de rigidez local de cada elemento puede ser reescrita como una suma de ambas componentes:

$$\boldsymbol{k}_e = \int \boldsymbol{B}_b{}^T(\xi)\, \boldsymbol{D}\, \boldsymbol{B}_b(\xi)\, |det(\boldsymbol{J})|\, d\Omega_e + \int \boldsymbol{B}_s{}^T(\xi)\, \boldsymbol{D}\, \boldsymbol{B}_s(\xi)\, |det(\boldsymbol{J})|\, d\Omega_e \qquad \text{(2-25)}$$

, donde la primera componente de integra de forma exacta, y la segunda de forma reducida. Este procedimiento recibe el nombre de *integración selectiva* y es frecuentemente utilizado en el modelamiento y análisis de problemas mecánicos y estructurales por medio del método de elementos finitos.

2.1.4. Ensamblaje del elemento *Shell*

Un elemento *Shell*, y a diferencia de las componentes membrana y *Plate*, se caracteriza por ser un elemento tridimensional. De hecho, este elemento puede ser entendido como la extensión de una placa a una superficie no plana, en donde la no coplanaridad introduce fuerzas axiales (membrana) contenidas en la superficie media del elemento, y además fuerzas de flexión y corte (Oñate, 2013). En consecuencia, los elementos *Shell* ofrecen un mayor grado de resistencia a las cargas debido al acoplamiento de estas acciones, tanto axiales como flexurales.

Dentro de esta clase de elementos existen variados tipos y formulaciones, permitiendo también que tengan geometría curva, plana o de un sólido tridimensional degenerado (proyectado) a un único plano. En este contexto, en la presente tesis será utilizado un *Shell* plano denominado 'S4', el cual proviene de la superposición de las componentes membrana y placa, utilizando como base elementos cuadrangulares Q4D4 (membrana con grados de libertad de tipo *drilling*) y elementos placa cuadrangulares P4.

Es decir, una vez obtenidos los comportamientos membrana y placa, con 3 grados de libertad cada uno, es posible ensamblarlos en un elemento más robusto con 6 grados de libertad, como se muestra en la Figura 2-6.

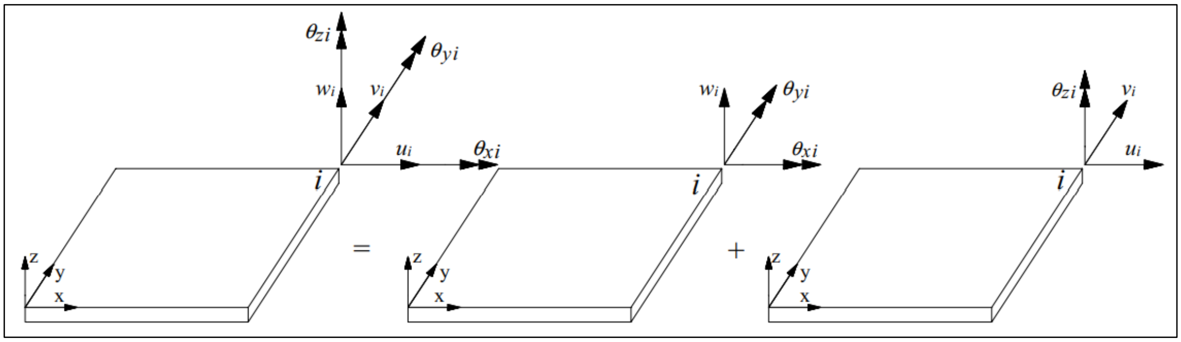


Figura 2-6: Componentes del elemento Shell (Sangtarash et al., 2020).

De esta forma, el ensamblaje de las dos componentes en la matriz de rigidez en coordenadas locales en base a las sub-matrices tanto de la membrana como de la placa en sus respectivos grados de libertad viene dado por:

$$\boldsymbol{k_e}^{\boldsymbol{i}} = \begin{bmatrix} {k_{11}}^m & {k_{12}}^m & 0 & 0 & 0 & {k_{13}}^m \\ {k_{21}}^m & {k_{22}}^m & 0 & 0 & 0 & {k_{23}}^m \\ 0 & 0 & {k_{11}}^p & {k_{12}}^p & {k_{13}}^p & 0 \\ 0 & 0 & {k_{21}}^p & {k_{22}}^p & {k_{23}}^p & 0 \\ 0 & 0 & {k_{31}}^p & {k_{32}}^p & {k_{33}}^p & 0 \\ {k_{31}}^m & {k_{32}}^m & 0 & 0 & 0 & {k_{33}}^m \end{bmatrix} \quad \forall\ i \in [1, \dots ,4] \qquad (2\text{-}26)$$

, en donde ${k_{ji}}^m$ y ${k_{ji}}^p$ son los elementos de la matriz global de la componente membrana y *Plate* para el nodo *i*, respectivamente. De esta forma, los desplazamientos nodales en función de los 6 grados de libertad de cada elemento *Shell* de 4 nodos, dados por 3 de desplazamiento y 3 de giro, se ordenan según:

$$\boldsymbol{u_i} = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \end{pmatrix} \quad \forall\ i \in [1, \dots ,4] \qquad (2\text{-}27)$$

Finalmente, para transformar las matrices de rigidez de coordenadas locales a globales es necesario definir una matriz de rotación, dada por:

$$\underbrace{\boldsymbol{T}}_{24x24} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \tag{2-28}$$

, en donde λ corresponde a una sub-matriz que contiene los cosenos directores para cada nodo. En particular, el primer eje se define como el vector director entre los nodos 1 y 2 (primer borde) del elemento; el tercer eje (normal al elemento) es el producto cruz del primer eje con el último borde, el cual debe ser normalizado; y finalmente el segundo eje se obtiene del producto cruz del tercer y primer eje ya definido.

Cada elemento debe ser luego ensamblado en la matriz de rigidez global previo a la solución del sistema. Esta investigación utilizará un método de ensamblaje directo basado en el concepto *sparse*, el cual es el más eficiente desde un punto de vista computacional en comparación a otros tipos de ensamblaje (Damhaug et al., 1993), tales como expandir las matrices de rigidez locales a coordenadas globales y luego sumar los elementos, o el uso de matrices de colocación y conectividad.

El método de ensamblaje directo mediante *sparse*, también conocido como método de colocación, en el presente caso consta de hacer un emparejamiento entre los índices de los grados de libertad con un vector generado a partir de las matrices de rigidez locales de cada elemento, para así ensamblar cada una en su respectiva posición global. Este método es especialmente útil y beneficioso para matrices cuyas entradas son en su mayoría cero, ya que la operación *sparse* trabaja únicamente con valores distintos de cero. Esto resulta en operaciones matriciales más eficientes en comparación al escenario en que también se consideren los valores nulos.

2.1.5. Ejemplos

Para verificar la correcta implementación del elemento *Shell*, se deben corroborar los resultados obtenidos con resultados teóricos disponibles en la literatura. En este escenario, los *patch test* son de especial importancia para dicho objetivo, dado que estos se definen como casos de prueba que sirven para verificar el correcto comportamiento de los distintos tipos de elementos finitos. Algunos de ellos están concebidos para resaltar o desencadenar algún tipo de falla en los modelos (específicamente en el tipo de elemento usado). En ese contexto, algunos patch test pueden activar o gatillar los *modos espuriosos* de ciertos elementos.

Al momento de la presentación de resultados, y con objetivos de visualización, se utilizará un factor de amplificación en las estructuras deformadas. Es importante indicar que esto no influye en los resultados numéricos, sino que es únicamente una componente gráfica para facilitar la visualización de los resultados.

a) Cantilever Beam

La viga en voladizo, o *cantilever beam* en inglés, consiste en una viga empotrada en un extremo mientras que en el otro está libre. En este caso en particular, este elemento estructural estará sujeto a una carga vertical de $w = -40$ uniformemente distribuida a lo alto de todo el extremo libre. En cuanto a sus propiedades mecánicas, se utilizó un módulo de Young $E = 30000$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.25$, mientras que, para sus propiedades geométricas, su largo es $L = 48$, su espesor es unitario (i.e. $t = 1$) y su alto $h = 12$.

Tanto la situación como sus resultados en el modelo de Matlab® se muestran la Figura 2-7, en donde en la Figura 2-7(a) los elementos rojos simbolizan una restricción cinemática, en este caso empotramiento, y los azules la carga distribuida. Por otro lado, en la Figura 2-7(b) se tiene que la viga azul es la posición original de ella, mientras que la roja representa su deformación.

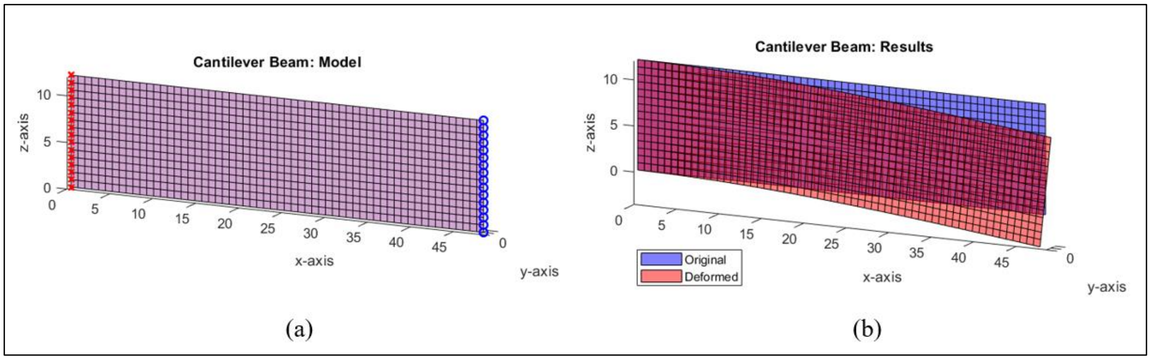


Figura 2-7: *Cantilever beam*. (a) Modelo de Matlab®; (b) Resultado de deformaciones.

El resultado teórico viene dado por 0.3558 (Felippa & Alexander, 1992), mientras que el resultado obtenido es de 0.3555. La razón entre ambas magnitudes, o también llamado factor de desplazamiento normalizado, viene dado por 0.9992, lo cual implica una diferencia de 0.081%.

Es importante notar que a medida que se discretiza o refina la malla se obtienen resultados cada vez más cercanos al teórico.

b) Twist-Strip

Twist-Strip es una viga en voladizo, empotrada en un borde y libre en el otro, que está sujeta a cargas normales al plano de igual magnitud, pero sentido contrario en sus esquinas libres. Esto induce un comportamiento torsional en la viga, es decir, este ejemplo busca desencadenar errores en los giros de la componente *Plate*.

En particular, el elemento modelado posee como propiedades: $E = 10^7$, $\nu = 0.25$, $L = 3$, $h = 1$ y un espesor $t = 0.05$, con cargas puntuales en las esquinas iguales a $P = \pm 1$.

De esta forma, la situación descrita junto a sus resultados se ilustra en la Figura 2-8.

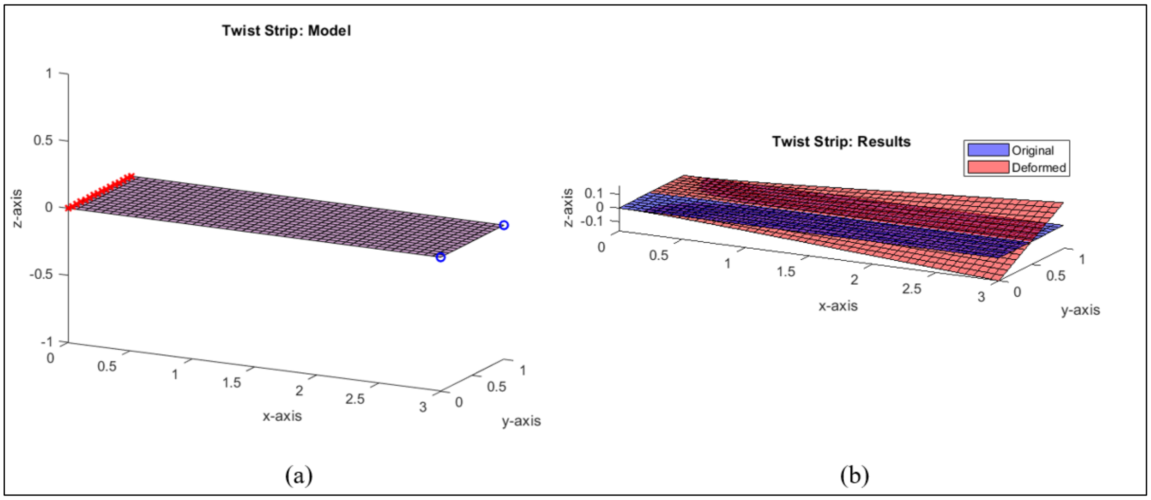


Figura 2-8: Twist-Strip. (a) Modelo de Matlab®; (b) Resultado de deformaciones.

Según la bibliografía, el desplazamiento en los nodos que están sufriendo las cargas puntuales se calcula mediante la expresión $\pm(3L - 0.6)10^{-3}$ (Cook, 2002), por lo que el resultado teórico en este caso viene dado por ± 0.00840. Por otro lado, las deformaciones obtenidas son ± 0.00843, teniendo así un factor de desplazamiento normalizado de 1.0036 y un error porcentual de 0.35%.

c) Scordelis-Lo Roof

El problema *Scordelis-Lo Roof* es uno de los ejemplos mayormente usados para estudiar el desempeño de elementos *Shell*. Este consta de una porción de cilindro sujeta a cargas gravitacionales en base a su propio peso, dada por $q = 90$ por unidad de área, estando simplemente apoyada en sus bordes curvos mediante el uso de diafragmas rígidos, mientras que no posee restricciones cinemáticas en sus bordes rectos. Esto implica que los grados de libertad traslacionales en el plano de la curva están restringidos, pero los que son normales al plano están libres.

El modelo posee un módulo de elasticidad $E = 4.32 \cdot 10^8$, coeficiente de Poisson nulo, espesor $t = 0.25$, largo $L = 50$ y un radio $R = 25$, en donde el ángulo formado del cilindro es $\alpha = 40°$. Su modelo y resultados se muestran en la Figura 2-9.

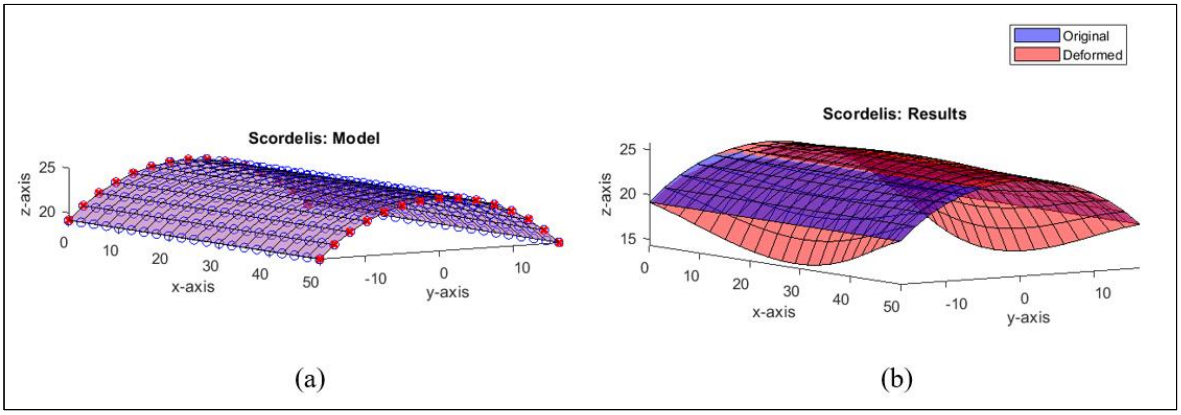


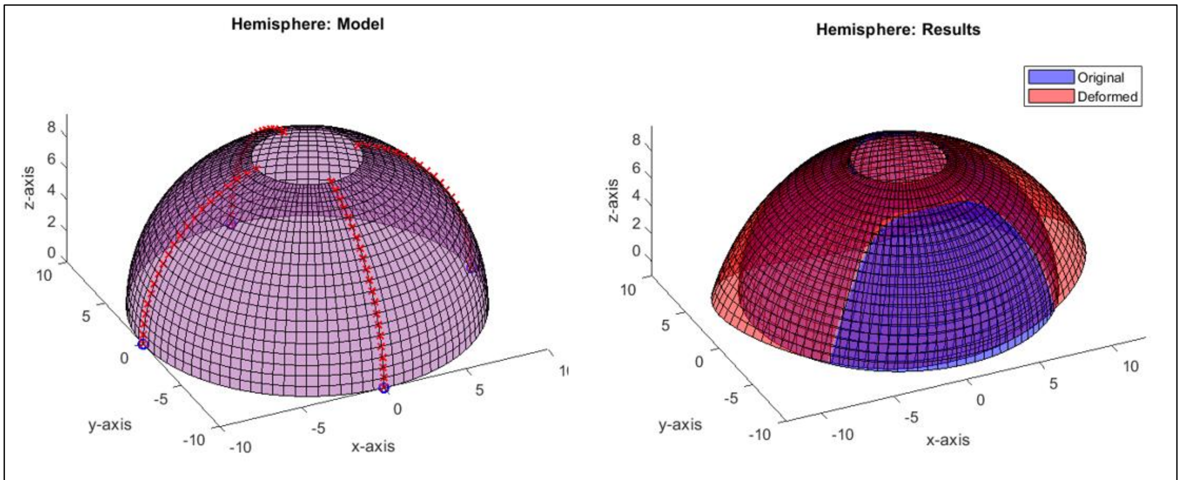
Figura 2-9: Scordelis-Lo Roof. (a) Modelo de Matlab®; (b) Resultado de deformaciones.

El resultado teórico de desplazamiento vertical es 0.3024 (Cook, 2002), mientras que el obtenido es 0.3080, logrando así una razón de respuestas igual a 1.0185 y un porcentaje de error de 1.81%.

d) Pinched Hemisphere

El problema esférico, también denominado *Pinched Hemisphere*, utiliza la simetría para modelar un cuarto de esfera que es replicada hasta lograr la geometría semiesférica. La hemiesfera tiene un agujero en el polo superior, lo que facilita la discretización del dominio. Los bordes inferiores y superiores están libres de restricciones cinemáticas, mientras que los verticales (para cada cuadrante) están restringidos ante el movimiento de cuerpo rígido. Cada cuarto de esfera posee cargas radiales en el centro geométrico dadas por $P = \pm 2$, en donde las cuatro cargas puntuales van alternando en signo a intervalos de 90° en el ecuador de ella.
En este contexto, el propósito de este problema es verificar los elementos *Shell* con doble curvatura.

En cuanto a las propiedades geométricas y mecánicas, se tiene una abertura en la parte superior e inferior con un ángulo de 18°, el radio de la esfera es $R = 10$, su espesor $t = 0.04$, $E = 6.825 \cdot 10^7$ y $\nu = 0.3$. Tanto el modelo como sus resultados se muestran la Figura 2-10.



(a) (b)

Figura 2-10: Hemisphere. (a) Modelo de Matlab®; (b) Resultado de deformaciones.

La teoría indica que el desplazamiento máximo es 0.0924 (Macneal & Harder, 1985), mientras que el obtenido es 0.0891, obteniendo una razón entre ambas magnitudes de 0.9643 y un error porcentual dado por 3.7%.

2.1.6. Conclusiones

En base a los *patch test* realizados, se puede concluir que el elemento *Shell* implementado tiene un comportamiento relativamente apropiado, con lo que se prevee que sea capaz de representar adecuadamente los sistemas estructurales que se modelarán en el Capítulo 3.

2.2. Formulación de Optimización

La optimización topológica se define como un método matemático que optimiza espacialmente la distribución de material dentro de un dominio definido, cumpliendo con restricciones previamente establecidas y minimizando una función de costo/uso predefinida (Rosinha et al., 2015). En este sentido, esta herramienta de optimización ha sido utilizada por la ingeniería civil y mecánica durante años, por ejemplo, para minimizar la cantidad de material usado y la energía de deformación de las estructuras manteniendo su resistencia mecánica (Bendsøe & Sigmund, 2002).

En particular, en la presente investigación se utilizará la optimización topológica basada en el criterio de densidad, la cual busca la distribución óptima de una cantidad limitada de material dentro de un dominio de diseño Ω_d dado. Esta configuración óptima se mide mediante una variable de 'puntuación', mejor conocida como función objetivo, la cual depende de la densidad del material ρ.

2.2.1. Función objetivo

Dentro de esta formulación, y como cualquier otro problema general de optimización, se tiene una función objetivo cuyos valores se buscan minimizar (o maximizar), sujeto a ciertas variables o condiciones restrictivas.

En el presente trabajo, la función a minimizar corresponde al *compliance*, magnitud escalar que puede ser entendida físicamente como la inversa de la rigidez del sistema ante el patrón de cargas dado. Así, se tiene que al minimizar esta variable se maximiza la rigidez estructural, conllevando a menores desplazamientos o deformaciones bajo la acción de fuerzas predefinidas.

Por otro lado, las variables restrictivas corresponden a recursos disponibles, límites físicos de las variables de diseño, y a ecuaciones de equilibrio estático y dinámico. De esta forma, la formulación matemática puede ser expresada como:

$$min_d \quad max\,(c(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{d}), \boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{\rho}))) = \sum_{i=1}^{N_{LC}} \alpha_i \boldsymbol{u}_i^T f_i \tag{2-29}$$

$$\text{Sujeto a:} \qquad \boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}}\mathbf{v} = v_f$$

$$0 \lesssim \rho_{min} \leq \rho_e \leq 1$$

$$\mathbf{Ku}_i = \mathbf{f}_i \qquad \forall\, i = [1, N_{LC}]$$

, en donde v_f corresponde al *volume fraction*, variable que es el porcentaje de volumen original de la estructura que se desea obtener como máximo en la fase sólida al término del proceso de optimización, y **v** es el vector de volumen de los elementos; la segunda restricción indica los límites físicos de la densidad: ρ_e = ρ_{min} implica un elemento vacío, y ρ_e = 1 significa un elemento sólido; finalmente, $Ku = f$ es la restricción cinemática que se debe cumplir en el proceso de optimización para todos los casos de carga a analizar N_{LC}, con su respectivo peso o importancia en el diseño, dado por α_i. Es importante notar que esta es una formulación de dos campos, también llamada formulación de densidad, en donde $\rho = H \cdot d$, es decir, el vector de densidad $\boldsymbol{\rho}$ se convierte en una función de las variables de diseño $\boldsymbol{d}$ (Sigmund & Maute, 2013).

Desde un punto de vista numérico, el sistema carecería de solución en el espacio continuo en caso de que fuese una restricción binaria de densidad, por lo que es necesario un criterio de relajo de esta variable permitiendo que varíe continuamente en el rango [ρ_{min}, 1]

(Petersson & Sigmund, 1998), en donde la cota inferior de la densidad $\rho_{min} \gtrsim 0$ evita que el problema se vuelva matemáticamente incondicionado (singularidad). Es decir, el vacío absoluto $\rho_e = 0$ es remplazado por una densidad muy pequeña ρ_{min}.

De esta forma, cada elemento tendrá asociado un desplazamiento en sus nodos, y además una densidad en su centro de masa, como se muestra en la Figura 2-11.

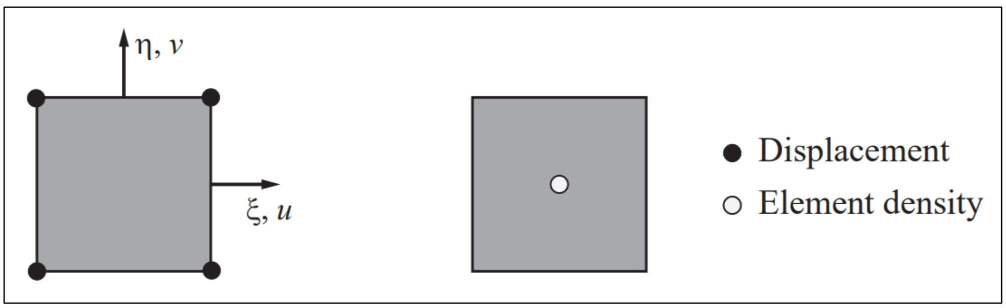


Figura 2-11: Densidad y desplazamientos en elementos finitos.

2.2.2. Filtro

La existencia y unicidad de una solución óptima en la ecuación (2-29) no es garantizada (Kohn & Strang, 1986). Además, la aproximación numérica a la solución realizada mediante el método de los elementos finitos induce problemas numéricos tales como el fenómeno de *checkerboard* (o ‘tablero de ajedrez’).

Este último consiste en la variación periódica y alternada de elementos sólidos y vacíos en la solución al problema de optimización, cuya causa es la alta rigidez por volumen generada de forma artificial a raíz del uso de elementos finitos de bajo orden y la existencia de mínimos locales en sus soluciones (Bendsøe & Sigmund, 2002). Este fenómeno se ilustra en la Figura 2-12.

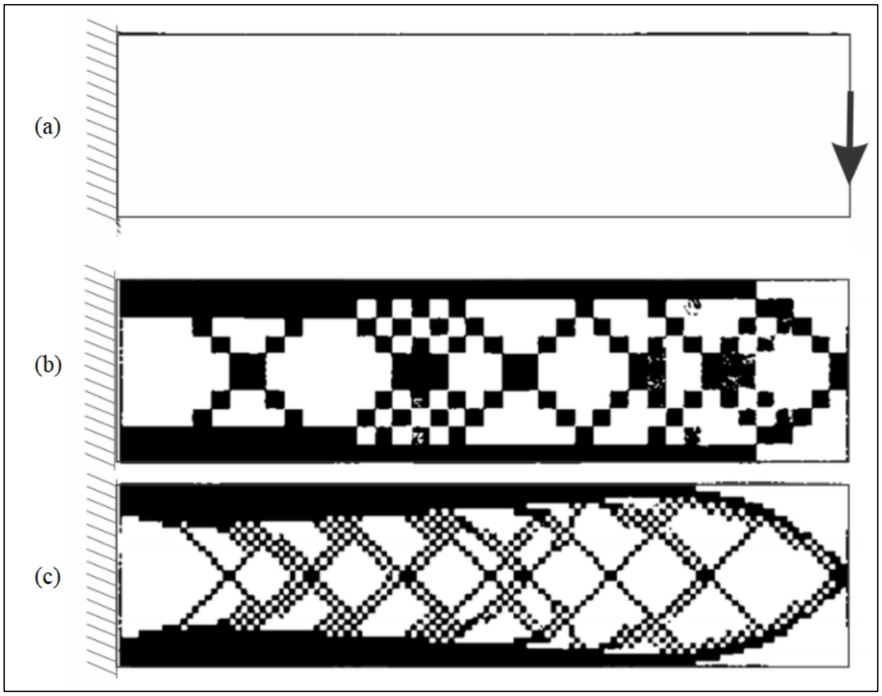


Figura 2-12: Fenómeno *checkerboard* en una viga *cantilever*. (a) Diseño del problema; (b) solución para discretización de 400 elementos; (c) solución para discretización de 6400 elementos (Bendsøe & Sigmund, 2002).

Naturalmente esta solución no tiene sentido físico, dado que los elementos no pueden estar unidos por un único punto entre ellos mediante sus nodos, sino que debe haber una continuidad del material de manufactura.

Para solucionar este problema, se impone una restricción sobre la geometría que asegura la existencia de soluciones, con una variación del gradiente correcta y una posterior convergencia a ellas mediante un filtro.

La presente investigación adoptará un filtro por densidad (Bruns & Tortorelli, 2001; Bourdin, 2001), el cual relaciona las variables de densidad y de diseño mediante un promedio ponderado de influencia de todos los elementos N_e según:

$$\rho_k = \frac{\sum_{j=1}^{N_e} \omega_{jk}\, d_j\, v_j}{\sum_{j=1}^{N_e} \omega_{jk}\, v_j} \tag{2-30}$$

Los factores de peso son obtenidos mediante una operación de convolución dada por:

$$\omega_{jk} = \begin{cases} \left[1 - \frac{dist(j,k)}{r_{min}}\right]^q & si \quad dist(j,k) < r_{min} \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases} \tag{2-31}$$

, en donde $dist(j,k)$ corresponde a la distancia entre los centroides de los elementos j y k respectivamente; q es un exponente definido por el usuario con el fin de manipular el orden en que el factor de peso decrece; y r_{min} es el radio del filtro, también definido por el usuario, que simboliza el alcance de influencia de un elemento respecto a los que lo rodean. Es importante notar que el divisor en la ecuación (2-31) garantiza la partición de unidad, tomando así la forma de un filtro de paso bajo (*low-pass filter*), y que además, el valor de la convolución es cero fuera del área de este.

En particular, el radio del filtro funciona obligando a los elementos circundantes a seguir una distribución dada por q hasta un valor nulo $\rho_e = \rho_{min}$ en el perímetro de este. Por ejemplo, dicha distribución será lineal en el caso $q = 1$. En consecuencia, su efecto es eliminar cualquier vacío dentro del área definida por r_{min}, y forzar una distribución grisácea en el decrecimiento de la densidad de los elementos, evitando así, por ejemplo, el fenómeno *checkerboard* además de fijar indirectamente un tamaño de los elementos resultantes. Una ilustración de un elemento objetivo siendo influenciado por sus elementos circundantes mediante el radio del filtro se muestra en la Figura 2-13.

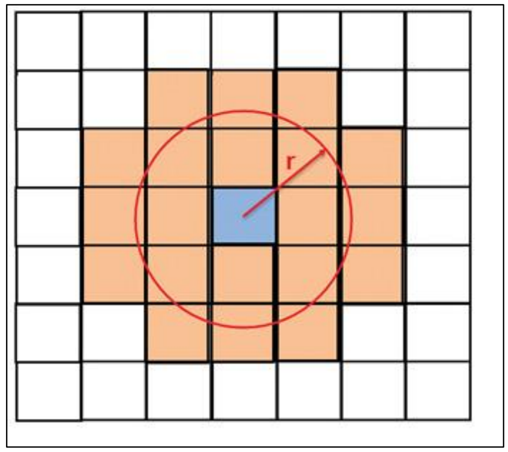


Figura 2-13: Método del filtro por densidad.

Finalmente, definiendo una matriz **H** cuyos los coeficientes son:

$$H_{pq} = \frac{\omega_{qp}\, v_q}{\sum_{j=1}^{N_e} \omega_{jp}\, v_j} \tag{2-32}$$

, entonces el filtrado se puede realizar como una operación matricial según:

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{d} \tag{2-33}$$

Debido a la gran cantidad de ceros de la matriz **H**, lo que es atribuible a la localidad del filtro (no se extiende más allá de r_{min}), es que la matriz global de filtro **H** se puede generar eficientemente mediante el método *sparse*.

2.2.3. Esquema de actualización

El problema de optimización de la ecuación (2-29) puede ser resuelto mediante diferentes metodologías, tales como criterio de optimalidad (OC), programación lineal secuencial (SLP), el método de las asíntotas móviles (Svanberg, 1987), entre otras. Por simplicidad, en la presente tesis se utilizará el método estándar del criterio de optimalidad.

Siguiendo la metodología propuesta por Bendsøe (1995), se puede formular un esquema de actualización heurístico para las variables de diseño:

$$\rho_e{}^{new} = \begin{cases} max(\rho_{min}, \rho_e - m) & si \quad \rho_e {\beta_e}^{\eta} \leq max(\rho_{min}, \rho_e - m) \\ \rho_e {\beta_e}^{\eta} & si \quad max(\rho_{min}, \rho_e - m) < \rho_e {\beta_e}^{\eta} < min(1, \rho_e + m) \\ min(1, \rho_e + m) & si \quad min(1, \rho_e + m) \leq \rho_e {\beta_e}^{\eta} \end{cases} \quad (2\text{-}34)$$

, en donde m es un límite de movimiento para las variables de diseño entre una iteración y otra, $\eta = 1/2$ es un coeficiente de amortiguamiento numérico y β_e se obtiene de la condición de optimalidad dada por:

$$\beta_e = \frac{-\frac{\partial c}{\partial \rho_e}}{\lambda \frac{\partial V}{\partial \rho_e}} \quad (2\text{-}35)$$

, con λ siendo el multiplicador de Lagrange, calculado mediante un algoritmo biseccional. Es interesante notar que en el óptimo se cumple que $\beta_e = 1$, lo que se desprende de la condición del criterio de optimalidad.

La sensitividad de la función objetivo se calcula mediante:

$$\frac{\partial c}{\partial \rho_e} = -p(\rho_e)^{p-1} \boldsymbol{u}_e^T \boldsymbol{k}_e \boldsymbol{u}_e \quad (2\text{-}36)$$

, siendo p el poder de penalización, usándose típicamente $p = 3$ (Sigmund, 2001). El resultado anterior se obtiene gracias al *método adjunto*, donde se ha eliminado la dependencia de la sensitividad respecto al término $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_e}$. Luego, por la regla de la cadena y recordando que $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{Hd}$, se utiliza el filtro para modificar la sensitividad del elemento según:

$$\frac{\widehat{\partial c}}{\partial \rho_e} = \boldsymbol{H} \frac{\partial c}{\partial \rho_e} \tag{2-37}$$

$$\frac{\widehat{\partial v}}{\partial \rho_e} = \boldsymbol{H}\, \boldsymbol{v} \tag{2-38}$$

Es importante mencionar que, para verificar la correcta implementación de las derivadas en la sensitividad, se utilizó el método de diferencias finitas. Esta es una herramienta numérica que aproxima el valor de las derivadas parciales de las ecuaciones diferenciales utilizadas. De esta forma, los resultados de ambos métodos (analítico utilizando el método adjunto y el de diferencias finitas) deben ser numéricamente idénticos para cualquier elemento, con una diferencia numérica despreciable entre ambos.

En particular, se utilizará la metodología SIMP modificada (*Solid Isotropic Material with Penalization*), la cual interpola el módulo de Young del material con un valor máximo y mínimo en el campo de diseño, dado por:

$$E(\rho) = E_{min} + \rho^p (E_0 - E_{min}) \tag{2-39}$$

, donde p es un exponente que penaliza las densidades intermedias. La penalización es necesaria para lograr una solución que mejor aproxime la solución teórica e idealmente buscada donde sólo hay variables en estado sólido o vacío. Las densidades intermedias no desaparecerán del todo, pero se verán significativamente reducidas a medida que aumenta el valor de p. Por otra parte, un exponente $p > 5$ aumenta el condicionamiento del problema, lo que hace difícil su solución desde un punto de vista numérico. Buenos resultados se han observan en la práctica para penalizaciones $p = 3$ o similares (Bendsøe & Sigmund, 2002).

2.2.4. Elementos pasivos

En algunos casos, se podría requerir que ciertos elementos tomen valores sólidos (ρ_e = 1) o vacíos (ρ_e = ρ_{min}), lo que significa que no son parte de las variables de diseño del problema de optimización.

Los primeros son conocidos como *passive-solid* (pasivos sólidos), en donde ejemplos comunes pueden ser losas, el núcleo de un edificio, y elementos generales forzados a estar dentro de una estructura, entre otros; mientras que los segundos son conocidos como *passive -void* (pasivos vacíos), como, por ejemplo: ventanas, aberturas de ascensor, agujeros en tuberías, etc.

De esta forma, el dominio geométrico de la estructura Ω corresponde a la unión del dominio de diseño Ω_d, y el dominio pasivo (no diseñable) Ω_0:

$$\Omega = \Omega_d \cup \Omega_0 \tag{2-40}$$

Para su implementación, en el esquema de actualización se impone dentro del vector de densidades $\boldsymbol{\rho}$ que los elementos pasivos sólidos tomen un valor ρ_e = 1 y los elementos pasivos vacíos un valor ρ_e = ρ_{min}.

En particular, a la hora de modelar un edificio para optimizar su fachada, se utilizarán como elementos pasivos sólidos al núcleo de la estructura y las losas, como se muestra en la Figura 2-14. Estas últimas son necesarias para modelar correctamente el comportamiento del edificio con sus respectivas cargas estáticas, además de las cargas laterales inducidas por el viento en el sistema de fachada de la estructura.

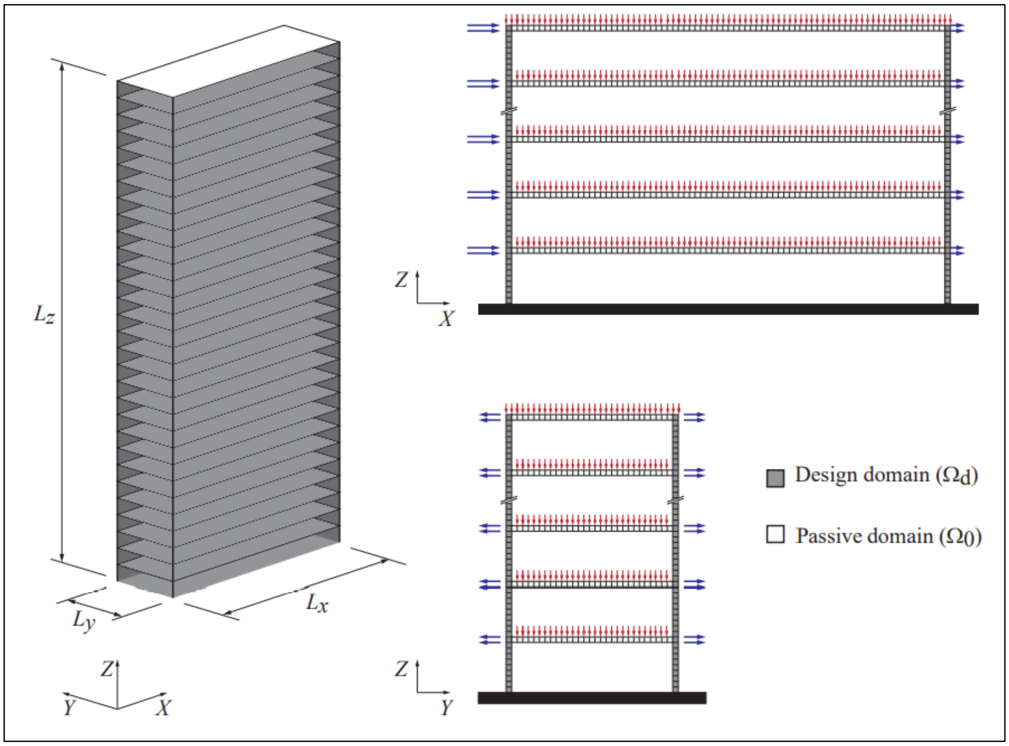


Figura 2-14: Dominios de la estructura.

2.2.5. Simetría

Controlar o forzar la capacidad de fabricación de los diseños en la optimización topológica es relevante y necesario para garantizar resultados significativos y aplicables. Esto es aún más importante si se considera la gran escala de los edificios, por lo que un criterio de diseño tal como la simetría es crítico para obtener diseños viables (Liu et al., 2005).

La simetría fuerza a que elementos distintos tengan la misma densidad. Este criterio se considera de forma axial respecto a los planos de análisis, por ejemplo, xy, xz y yz, como muestra la Figura 2-15, en donde los cuadros en rojo simbolizan el elemento base y los azules los elementos equivalentes respecto a cada plano.

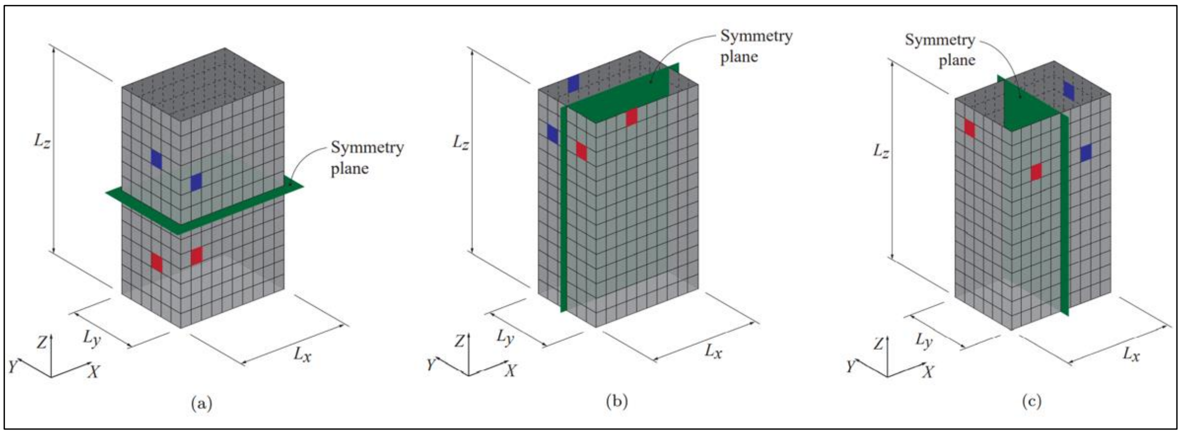


Figura 2-15: Simetría en las densidades de elementos. (a) Simetría respecto al plano xy; (b) Simetría respecto al plano xz; (c) Simetría respecto al plano yz.

Para hacer esto se impone la igualdad de densidades dentro del vector $\boldsymbol{\rho}$ en el esquema de actualización, mapeándolos a un vector más pequeño equivalente $\boldsymbol{s}$. Las relaciones en coordenadas que definen las simetrías respecto a los planos xy, xz y yz, respectivamente, vienen dadas por:

$$Si \quad \begin{cases} x_i = x_j \\ y_i = y_j \\ z_i = L_z - z_j \end{cases} \tag{2-41}$$

$$\text{entonces} \quad \rho_i = \rho_j = s_k$$

$$Si \qquad \begin{cases} x_i = x_j \\ y_i = L_y - y_j \\ z_i = z_j \end{cases} \tag{2-42}$$

$$\text{entonces} \quad \rho_i = \rho_j = s_k$$

$$Si \qquad \begin{cases} x_i = L_x - x_j \\ y_i = y_j \\ z_i = z_j \end{cases} \tag{2-43}$$

$$\text{entonces} \quad \rho_i = \rho_j = s_k$$

En particular, se aplicará simetría respecto a los planos xz y yz.

2.2.6. Repetición de patrones

Al igual que la simetría, la repetición de patrones es otra restricción geométrica disponible para lograr diseños aplicables en una estructura (Almeida et al., 2009).

Esta restricción también impone que elementos distintos tengan la misma densidad dentro del vector $\boldsymbol{\rho}$ en el esquema de actualización, mapeándolos dentro del mismo vector de equivalencia de densidad $\boldsymbol{s}$. No obstante, este criterio considera la equivalencia a lo largo de un mismo eje, como se muestra en la Figura 2-16.

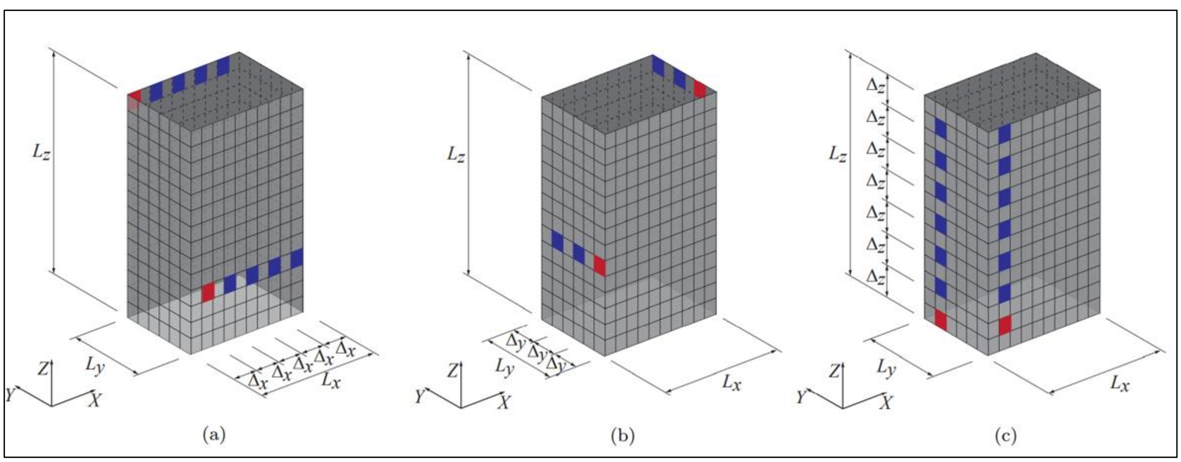


Figura 2-16: Repetición de patrones en las densidades de elementos. (a) Repetición respecto al eje x; (b) Repetición respecto al eje y; (c) Repetición respecto al eje z.

Las relaciones en coordenadas para la repetición de patrones respecto a los ejes x, y y z, respectivamente, vienen dadas por:

$$Si \quad \begin{cases} x_i = x_j + \Delta x \\ y_i = y_j \\ z_i = L_z \end{cases} \tag{2-44}$$

$$\text{entonces} \quad \rho_i = \rho_j = s_k$$

$$Si \quad \begin{cases} x_i = x_j \\ y_i = y_j + \Delta y \\ z_i = L_z \end{cases} \tag{2-45}$$

$$\text{entonces} \quad \rho_i = \rho_j = s_k$$

$$Si \quad \begin{cases} x_i = x_j \\ y_i = y_j \\ z_i = z_j + \Delta z \end{cases} \tag{2-46}$$

$$\text{entonces} \quad \rho_i = \rho_j = s_k$$

Debido a las condiciones manufactureras de una estructura como un edificio de gran altura para los casos de estudio se utilizará una repetición de patrones respecto al eje z, y de forma simultánea se hará el uso de simetría respecto a los planos xz y yz.

2.2.7. Óptimo de Pareto

Las estructuras están sujetas a variados estados de carga de forma simultánea, tales como el peso propio de ellas, las cargas generadas por el uso durante su vida útil, viento o sismos, entre otras. Estas cargas, al momento del diseño, deben ser consideradas mediante combinaciones disponibles en las normativas pertinentes.

Es por esto que se hace necesario encontrar un criterio de optimalidad que considere dicha simultaneidad de combinaciones, esto, desde el punto de vista de escenarios posibles de carga que pueden ocurrir. En este contexto, se utilizará el concepto conocido como óptimo de Pareto (Pareto, 1906).

Este último cumple condiciones de optimalidad tales que se tiene un punto de equilibrio en donde los recursos disponibles se distribuyen eficientemente, de forma que la estructura se comporta equivalentemente bien (o mal) para todos los casos de carga analizados. Es decir, no se beneficia o perjudica el desempeño de un caso por sobre otro, y cualquier cambio respecto a ese punto, mejorará la situación de un escenario al hacer que empeore la de otro.

En términos matemáticos, y considerando que se desea minimizar el valor de una función objetivo $f(x)$, un punto x^* en el espacio de diseño es denominado óptimo de Pareto si y si solo si no existe otro punto x en dicho espacio tal que:

$$f(x) \leq f(x^*) \tag{2-47}$$

, con al menos un $f_i(x) \leq f_i(x^*)$. Es importante notar que estas inecuaciones entre vectores son válidas para cada componente de cada vector (Arora, 2017), es decir, se cumple que $f_1(x) \leq f_1(x^*), \ldots, f_n(x) \leq f_n(x^*)$, con n la última componente de ellos.

2.2.8. Ejemplos

La rutina computacional desarrollada en la presente tesis de optimización topológica se autodenomina ClaTOP (*Cladding Topology Optimization*). En base a ella se replicarán ejemplos disponibles en la bibliografía con el objetivo de verificar y validar sus resultados para cada uno de ellos, además de algunos de los ejemplos presentados en la Sección 2.1.5 para los elementos *Shell*.

a) MBB Beam

El modelo *MBB-Beam* es un problema de prueba y referencia popular en la optimización topológica. Este consta de una viga simplemente apoyada sujeta a una carga gravitacional puntual en la mitad superior de ella.

Las propiedades geométricas, mecánicas y de optimización serán replicadas de la bibliografía (Sigmund, 2001). De esta forma, se tiene una viga con largo $L = 120$, un alto $H = 20$, $E = 1$, $v = 0.3$, carga unitaria $P = -1$, una fracción de volumen $v_f = 0.5$ y un tamaño de filtro dado por $r_{min} = 1.5$. El modelo computacional y la estructura optimizada en este escenario se muestran en la Figura 2-17, en donde los objetos azules simulan las cargas aplicadas en cada nodo, mientras que los rojos involucran las restricciones cinemáticas en estos.

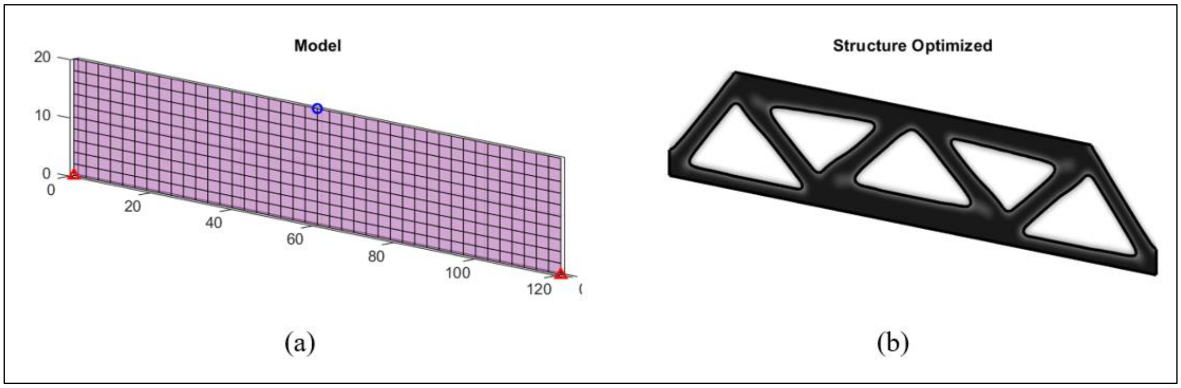


Figura 2-17: *MBB-Beam*. (a) Modelo de Matlab®; (b) Resultado de estructura optimizada.

Por otro lado, la función objetivo a lo largo de las iteraciones realizadas se ilustra en la Figura 2-18. En esta, se observa un rápido descenso de la función objetivo en las primeras iteraciones, mientras que esta se estabiliza con menor tasa de cambio para estas últimas. El algoritmo de optimización iterativo se detiene a consecuencia del criterio de parada definido como una tolerancia en el cambio de la función objetivo entre iteraciones, el cual fue definido por el usuario como 0.01. El valor obtenido de la función objetivo al término de la optimización (*compliance*) fue de $c(x) = 111.76$.

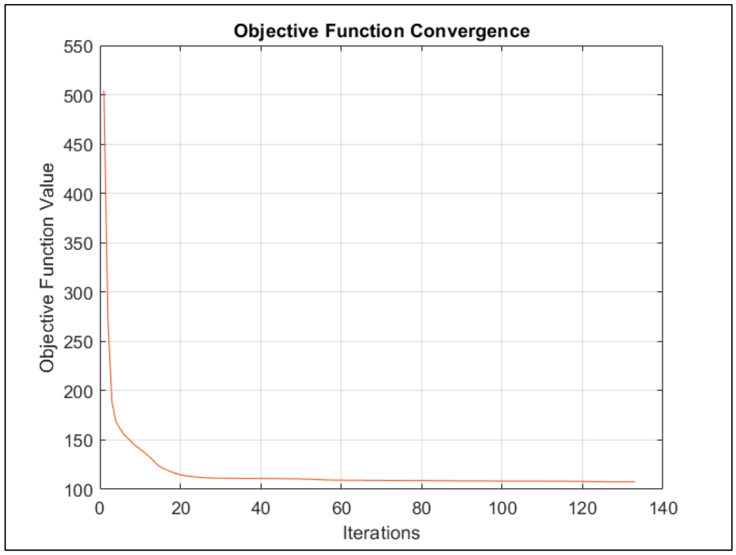


Figura 2-18: Convergencia de función objetivo para *MBB-Beam*.

Los resultados obtenidos concuerdan con los presentados en la bibliografía (Sigmund, 2001), en donde se aprecia que la distribución óptima del material simula una estructura tipo *Truss*, la cual consta de miembros organizados en triángulos conectados entre sí mediante nodos para que el conjunto general se comporte como un solo elemento estructural, como por ejemplo, una cercha.

Al momento de analizar los resultados, es importante comprender los efectos que cada parámetro de optimización tiene sobre estos. Es por esto que se utiliza el mismo ejemplo disminuyendo la fracción de volumen autoimpuesta a $v_f = 0.3$. En otras palabras, se fuerza a que la estructura óptima posea un 30% del material de manufactura disponible en la viga original. En la Figura 2-19 se muestra el resultado de óptimo de este nuevo escenario junto con el proceso de cambio y redistribución del material a lo largo de las iteraciones.

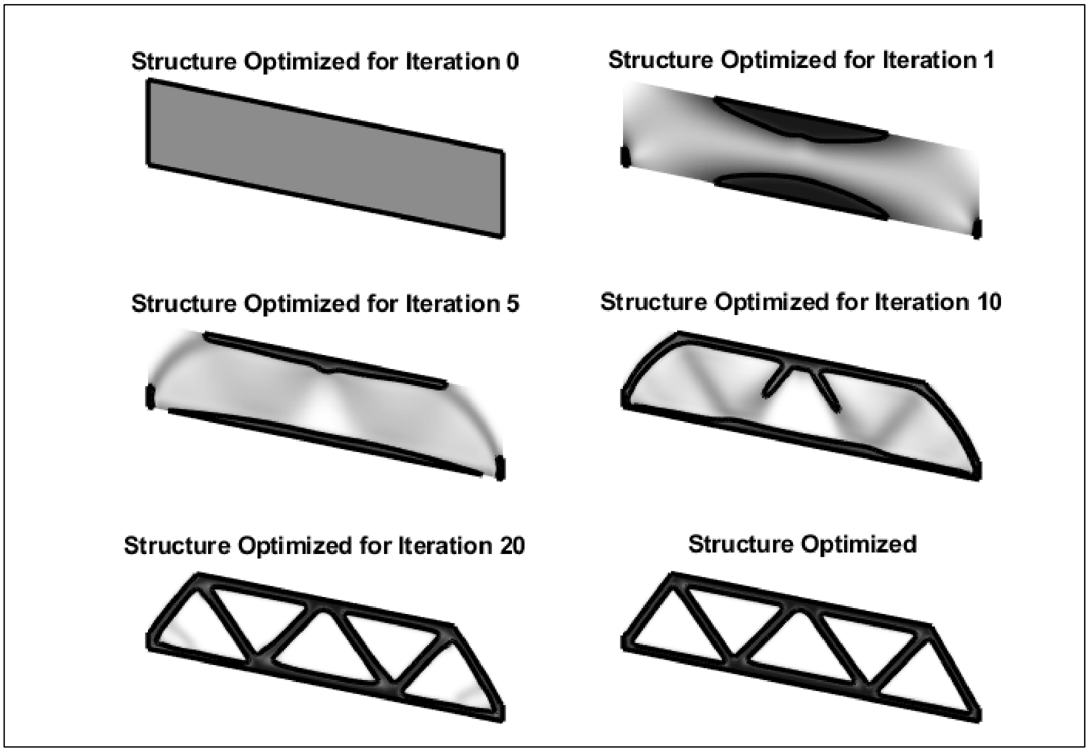


Figura 2-19: Estructura óptima en cada iteración para *MBB-Beam* con $v_f = 0.3$.

En este caso, se obtiene una distribución de material similar a la expuesta en la Figura 2-17. No obstante, se aprecia una disminución en el tamaño de los elementos como consecuencia de imponer un volumen de manufactura menor al original.

Otro parámetro influyente en la optimización topológica es el radio de filtro. Para analizar su efecto en los resultados, y con el fin de tener resultados comparables, se vuelve al ejemplo original de la Figura 2-17 (i.e, 50% de material de manufactura). Sin embargo, se modifica el parámetro de estudio, en este caso el radio de filtro, a un valor más pequeño dado por la mitad del originalmente usado, es decir, se utilizará $r_{min} = 0.75$. El resultado de la estructura óptima para este nuevo caso de estudio se ilustra en la Figura 2-20.

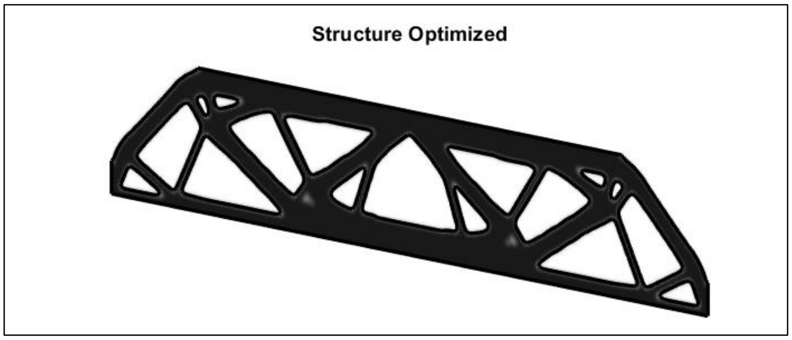


Figura 2-20: Estructura óptima para *MBB-Beam* con $r_{min} = 0.75$.

En esta última se observan elementos más finos y pequeños respecto a la solución original analizada en la Figura 2-17. De esto se desprende que al disminuir el radio de filtro se obtiene una solución con rasgos más finos y elementos más pequeños, dado que el alcance de influencia del filtro pasa-bajos es menor.

En la Figura 2-21 se muestra la convergencia de la función objetivo para este nuevo caso, en donde el valor final del *compliance* es $c(x) = 103.65$. Este es menor al obtenido para el caso original, como consecuencia de que se le permite a la estructura tener elementos más finos en los cuales se puedan distribuir de forma estructuralmente más óptima, generando así menores desplazamientos para el mismo escenario de cargas analizado.

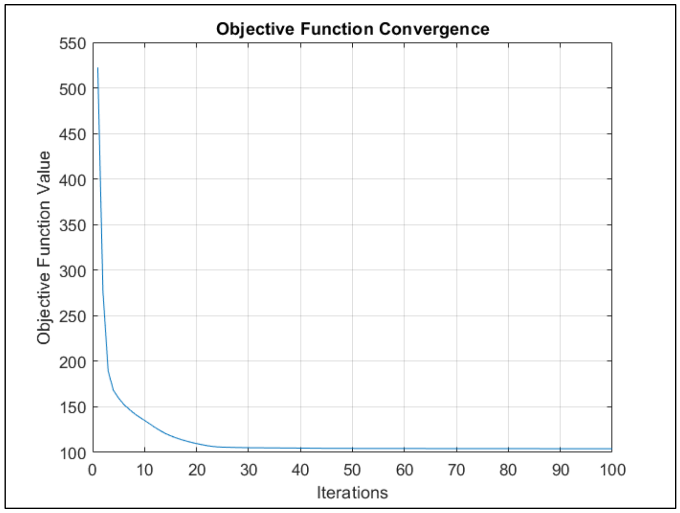


Figura 2-21: Convergencia de función objetivo para *MBB-Beam* con $r_{min} = 0.75$.

El efecto del radio de filtro sobre la estructura a lo largo de las iteraciones para este nuevo caso se muestra en la Figura 2-22. No obstante los resultados, es importante notar que un radio muy pequeño en comparación a la discretización de elementos puede derivar en estructuras óptimas inviables desde un punto de vista de fabricación industrial, por lo que se debe seleccionar este parámetro en función de la malla utilizada para obtener resultados replicables.

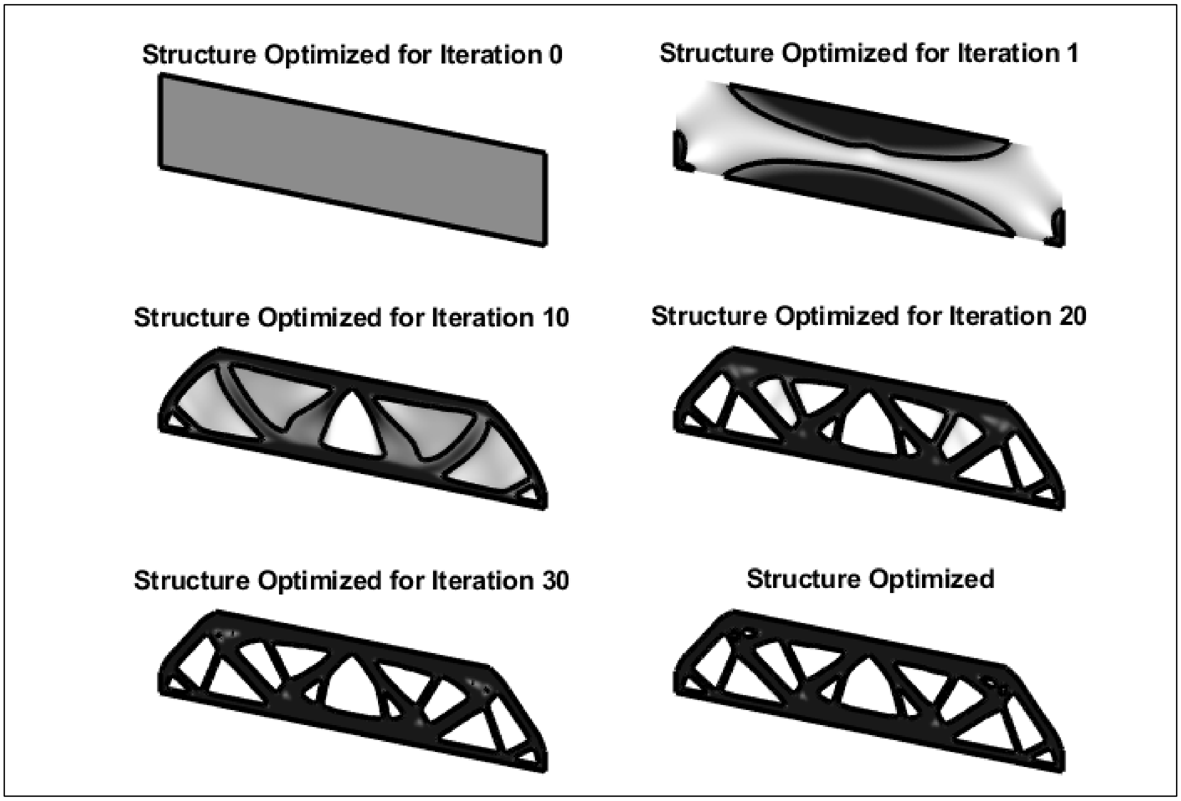


Figura 2-22: Estructura óptima en cada iteración para *MBB-Beam* con $r_{min} = 0.75$.

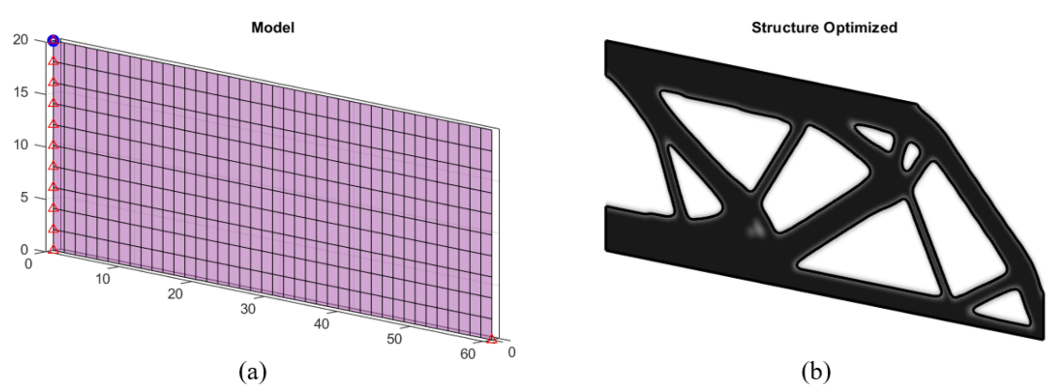
Finalmente, un resumen comparativo de los resultados obtenidos para cada caso se tiene en la Tabla 2-2. En esta, por un lado es posible apreciar que el valor de la función objetivo disminuye para el caso de un radio de filtro menor a raíz de que se logra distribuir de forma más óptima el material de manufactura con elementos de menor área. Por otro lado, el valor del *compliance* $c(x)$ obtenido es mayor para el escenario con menor fracción de volumen, debido a que los elementos en su totalidad pueden aportar una menor cantidad de rigidez al sistema al poseer menor cantidad de material de manufactura.

Tabla 2-2: Comparación de parámetros y resultados obtenidos en *MBB-Beam*.

Iteración i	$c(x)$ ($v_f = 0.5$ y $r_{min} = 1.5$)	$c(x)$ ($v_f = 0.3$ y $r_{min} = 1.5$)	$c(x)$ ($v_f = 0.5$ y $r_{min} = 0.75$)
1	522.40	2350.75	522.40
10	145.76	406.49	135.15
30	115.04	220.07	105.21
100	112.10	215.76	104.05
Óptimo	111.76	215.57	103.65

b) MBB Beam con simetría

Se utiliza el ejemplo *MBB Beam*, pero aplicando el concepto de simetría para así sólo modelar la mitad derecha de la viga. En particular, para este ejemplo se compararán los resultados con los parámetros de optimización utilizados en Polytop (Talischi et al., 2012).



(a) (b)

Figura 2-23: MBB Beam con simetría. (a) Modelo de Matlab®; (b) Resultado de estructura óptima.

En base al resultado presentado en la Figura 2-23(b), se obtiene la misma distribución de material disponible en la bibliografía. En cuanto al valor de la función objetivo, cuya convergencia se ilustra en la Figura 2-24, también se consigue el mismo valor entregado en las referencias, con un *compliance* óptimo dado por $c(x) = 203.6$.

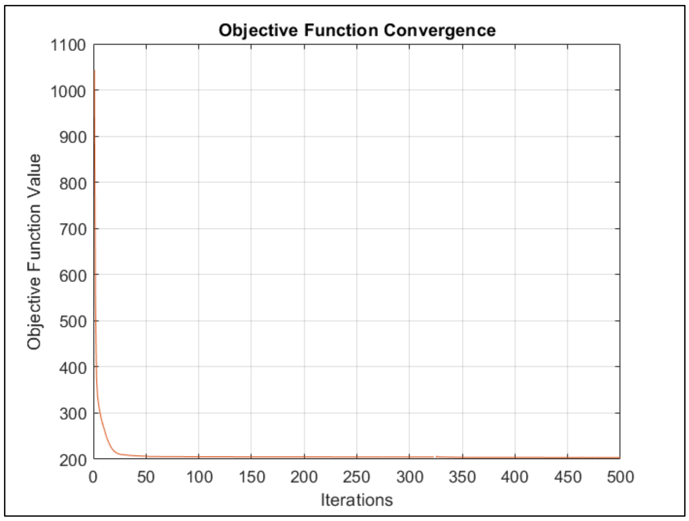


Figura 2-24: Convergencia de función objetivo para MBB Beam con simetría.

c) Cantilever Beam con carga puntual en borde libre

Para este ejemplo se utilizará una viga *cantilever*, la cual se encuentra empotrada en su lado izquierdo y sujeta a una carga puntual en el centro del extremo derecho de ella, como se muestra en la Figura 2-25(a).

Las propiedades mecánicas utilizadas son las disponibles en la bibliografía (Tovar & Khandelwal, 2012). En este escenario, utilizando ClaTOP se logra la estructura óptima mostrada en la Figura 2-25(b), cuya convergencia hacia esta se ilustra en la Figura 2-26.

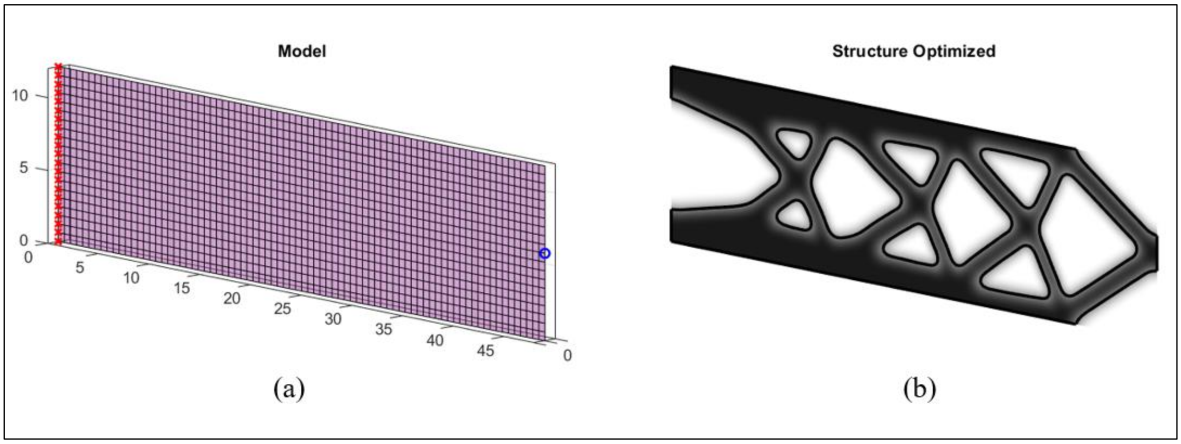


Figura 2-25: *Cantilever beam* con carga puntual en borde libre. (a) Modelo de Matlab®; (b) Estructura óptima.

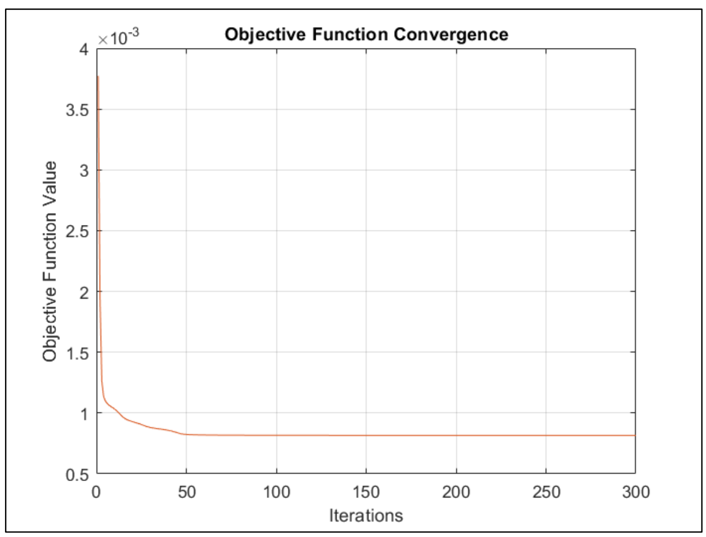


Figura 2-26: Función objetivo para *Cantilever Beam* con carga puntual en borde libre.

En particular, se logran replicar los resultados disponibles en las referencias bibliográficas (Tovar & Khandelwal, 2012), en donde se aprecia una tendencia del elemento a ubicar material simétricamente en la punta de la viga de tal forma de contrarrestar la carga aplicada en ella.

d) Viga doblemente empotrada con carga distribuida en borde superior

En el presente modelo estructural se tiene una viga empotrada en sus dos bordes, sujeta a una carga uniformemente distribuida sobre su superficie, como se muestra en la Figura 2-27(a).

Los parámetros geométricos vienen dados por un largo $L = 48$, una altura $h = 12$ y un espesor unitario. En cuanto a las propiedades mecánicas se tiene una carga total $P = -40$, en donde la viga posee $E = 30000$ y $\nu = 0.25$. Finalmente, los parámetros de optimización utilizados son $v_f = 0.5$ y $r_{min} = 1.2$.

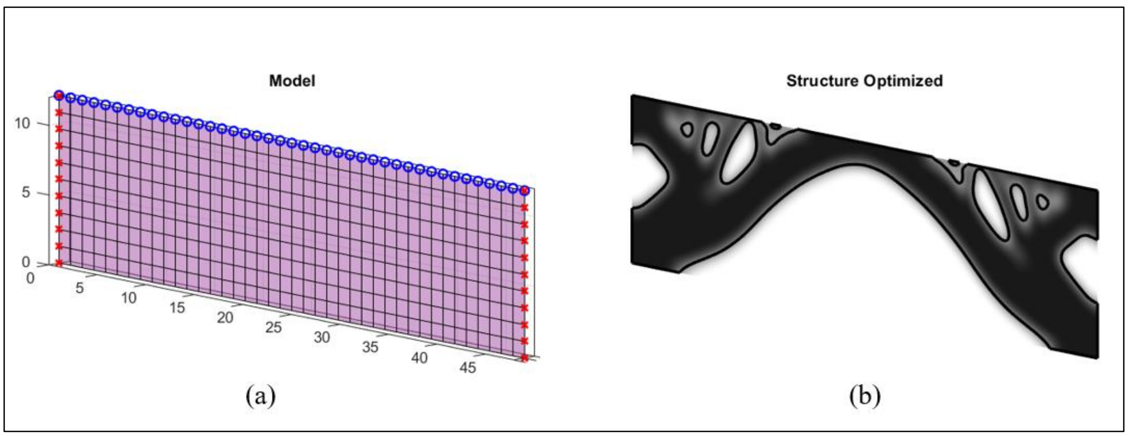


Figura 2-27: Viga doblemente empotrada con carga distribuida en borde superior.
(a) Modelo de Matlab®; (b) Estructura óptima.

En base a la estructura óptima obtenida, mostrada en la Figura 2-27(b), se observa una marcada tendencia a contrarrestar la carga aplicada en la superficie de la viga, generando una suerte de arco que busca soportar el punto medio donde tiene lugar la deflexión máxima, al mismo tiempo que provee de una estructura rígida para captar las cargas verticales y transmitirlas a los apoyos.

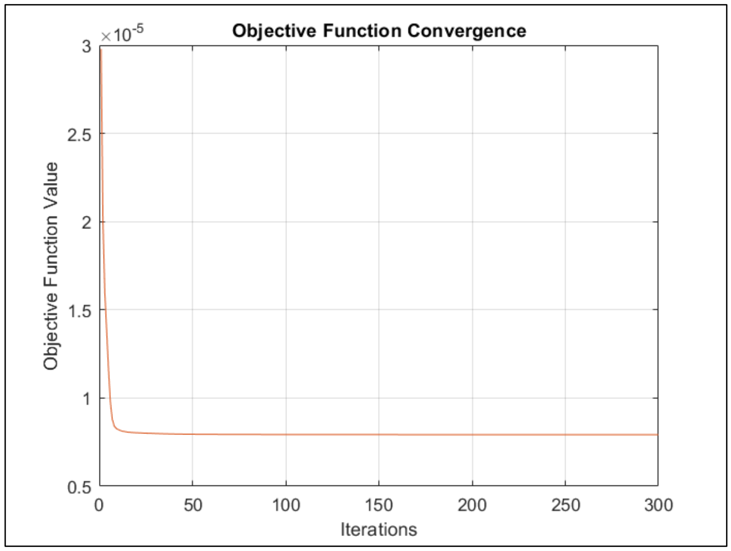


Figura 2-28: Función objetivo para viga doblemente empotrada con carga distribuida.

Por otro lado, en la Figura 2-28 se observa una convergencia marcada de la función objetivo durante las primeras iteraciones, para luego estabilizarse hasta que el parámetro de cambio tolerable sea satisfecho.

e) Twist-Strip

El ejemplo *Twist-Strip*, como fue presentado en la Sección 2.1.5, consta de una viga en voladizo que está empotrada en un borde y libre en el otro, la cual está sujeta a cargas de igual magnitud pero sentido contrario en sus extremos libres, escenario ilustrado en la Figura 2-29(a).

Para este ejemplo se utilizó una fracción de volumen del 50% del material de manufactura disponible, con un radio del filtro igual a 0.09.

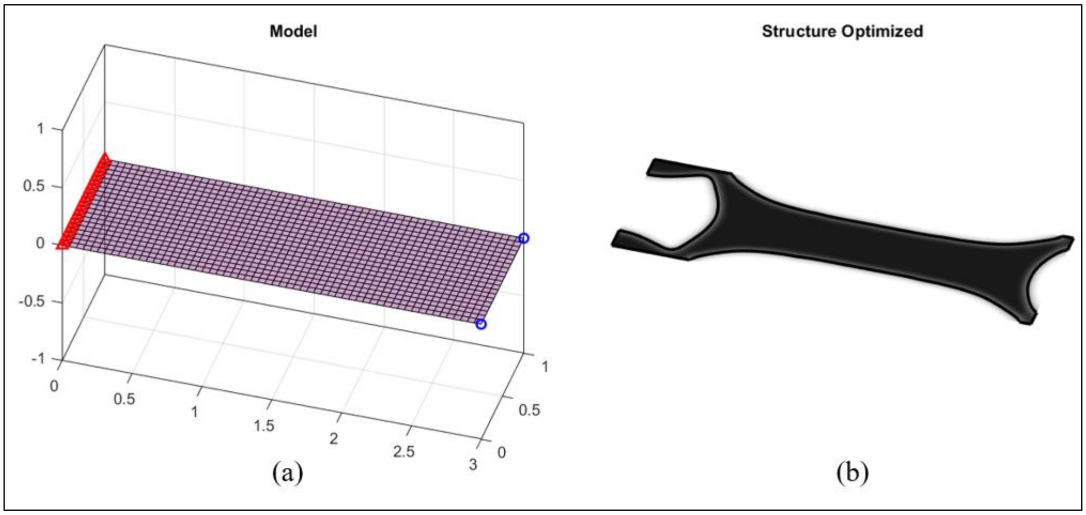


Figura 2-29: Twist-Strip. (a) Modelo de Matlab®; (b) Estructura óptima.

Al momento de buscar la distribución óptima de material se tiene que la rutina computacional privilegia aquella que contrarresta el comportamiento torsional en la viga inducido por las cargas opuestas en los extremos de esta de forma simétrica, como se muestra en la Figura 2-29(b).

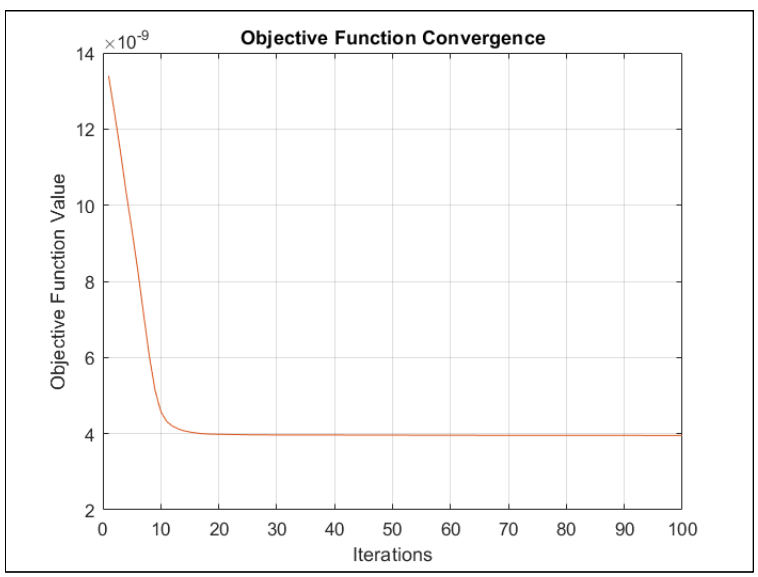


Figura 2-30: Convergencia de función objetivo para *Twist-Strip*.

En cuanto a la convergencia de la función objetivo, en la Figura 2-30 se observa que esta posee una menor tasa de cambio en comparación a los ejemplos cuyo comportamiento no era dominado por el torsional.

f) Wheel

El ejemplo *Wheel* (o 'rueda') consta de un elemento simplemente apoyado en sus dos extremos inferiores sujeto a una carga gravitacional en el centro del borde inferior de este, situación ilustrada en el modelo de la Figura 2-31(a). Este modelo se encuentra disponible en la literatura (Tovar & Khandelwal, 2012), en base a la cual se compararán los resultados en la distribución de material de manufactura y comportamiento óptimo del elemento.

El largo y altura de la sección están en razón 2:1, en donde el primero de estos parámetros es $L = 300$ y el segundo $h = 150$. Tanto el espesor, como el módulo de elasticidad y carga son unitarios, mientras que el coeficiente de Poisson viene dado por $v = 0.3$. El elemento se optimizará considerando $v_f = 0.5$ y $r_{min} = 6$, cuyo resultado de estructura óptima se muestra en la Figura 2-31(b).

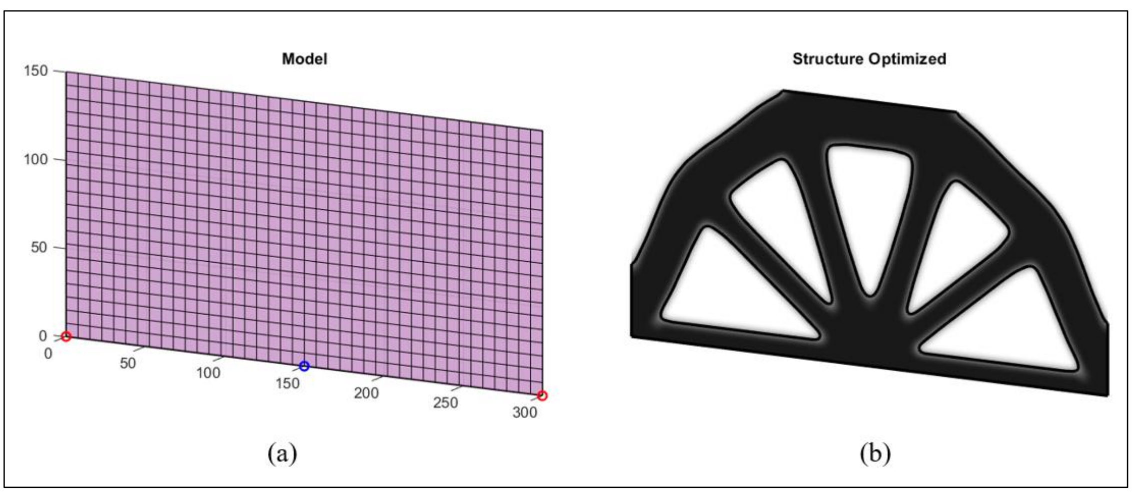


Figura 2-31: Wheel. (a) Modelo de Matlab®; (b) Resultado de estructura óptima.

Esta distribución óptima del material simula una rueda, en donde el material de manufactura se tiende a acumular en el centro del elemento donde está aplicada la carga puntual, punto desde el cual la densidad es distribuida de forma simétrica debido a la naturaleza del problema.

En cuanto a la función objetivo mostrada en la Figura 2-32 se aprecia una rápida convergencia con menor cantidad de iteraciones requeridas en comparación a casos anteriores, lo cual es debido a la simetría y simplicidad del problema.

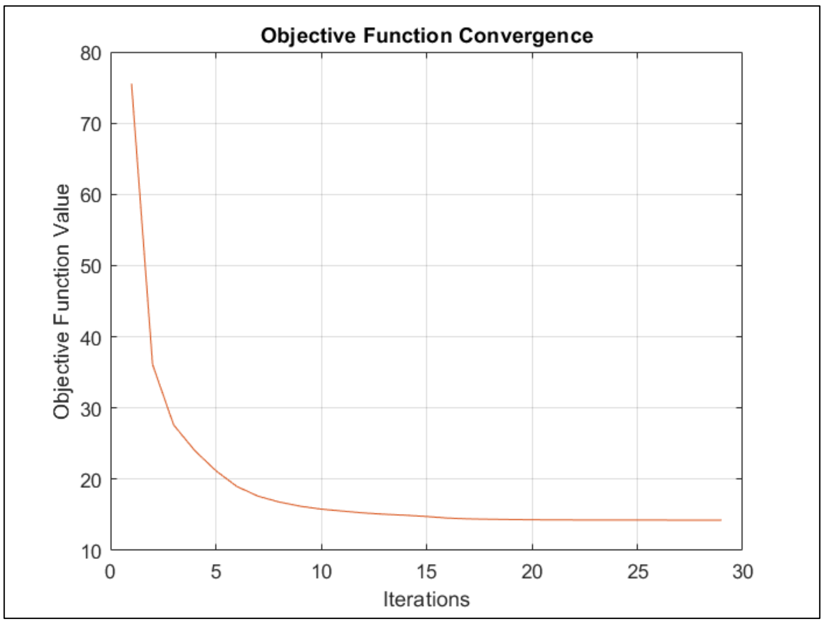


Figura 2-32: Convergencia de función objetivo para Wheel.

2.2.9. Conclusiones

En base a los ejemplos utilizados y a sus respectivos resultados se concluye que la implementación de la optimización topológica mediante la rutina ClaTOP cumple las soluciones esperadas y, en consecuencia, su uso es respaldado dentro de la presente investigación.

2.3. Materiales y Normativa

La tendencia en el uso de materiales o refuerzos cada vez más resistentes y normativas con mayores bases académicas y experimentales han permitido que los edificios puedan alcanzar mayores alturas, dado que pueden exhibir un mejor desempeño y confiabilidad estructural.

En este contexto, la selección de los materiales de construcción junto con su calidad desempeña un papel crucial a la hora de diseñar estructuras que cumplan las normativas vigentes.

En particular, los materiales para cada elemento estructural del edificio usados el presente trabajo junto a sus respectivas propiedades se resumen en la Tabla 2-3.

Tabla 2-3: Materiales empleados y sus propiedades.

Elemento	Material	Grado	f'_c $(tonf/m^2)$	Módulo de Young $(tonf/m^2)$	Módulo de Poisson	Densidad $(tonf/m^3)$	Espesor (m)
Fachada (*Spandrel*)	Hormigón Armado	G35	3500	2387519.63	0.2	2.5	0.25
Losas	Hormigón Armado	G35	3500	2387519.63	0.2	2.5	0.18
Núcleo	Hormigón Armado	G35	3500	2387519.63	0.2	2.5	0.3

Es importante notar que el espesor ha sido en base al pre-dimensionamiento hecho en el *software* comercial ETABS, considerando un edificio de 30 pisos cuyo detalle y geometría se presentará en el Capítulo 3. El procedimiento para el pre-dimensionamiento se adjunta en el Anexo A.

En cuanto a las normativas vigentes, se utilizaron: ASCE7-16 para los valores de las cargas; esta última también para las combinaciones de ellas; y DS60 para el pre-dimensionamiento de la estructura.

2.4. Cargas

Como fue mencionado, los valores y consideraciones de las cargas a utilizar fueron obtenidas de la norma estadounidense ASCE 7-16, siendo esta especialmente importante para las indicaciones en la distribución de las fuerzas de viento.

2.4.1. Carga muerta

La carga muerta D corresponde a la ejercida por el peso propio de los elementos que pertenecen a la estructura: muros, columnas, losas, etc. En este contexto, para su cálculo se consideran las densidades y espesores mostrados en la Tabla 2-3.

Además, se considera una carga muerta sobreimpuesta $SDL = 0.15\ tonf/m^2$, la cual simboliza el peso de elementos no estructurales sobre las losas.

Finalmente, también es considerada una carga CLAD = $0.15\ tonf/m^2$ perteneciente a elementos de la fachada, la cual se multiplica por la altura entre pisos, obteniéndose así una carga distribuida lineal que es asignada al borde de la losa superior de cada piso, dado que la fachada ‘cuelga’ desde este punto.

De esta forma, la carga muerta total corresponde a D + SDL + CLAD.

2.4.2. Carga viva

La carga viva L se obtiene de la Tabla 4.3-1 del código ASCE 7-16 (ASCE, 2017), dada por $L = 2.4\ kN/m^2 \approx 0.25\, tonf/m^2$ si se asume uso de oficinas. En este caso, la carga es asignada en el modelo de Matlab® como carga uniformemente distribuida sobre las losas de cada piso.

2.4.3. Carga de viento

En las estructuras que se analizarán en el Capítulo 3 se considera la carga de viento W como única carga lateral del sistema. Para su uso se basó en los capítulos 26 y 27 de ASCE 7-16 (ASCE, 2017), que considera el cálculo de la presión por velocidad del viento q_z en unidades de N/m^2 según:

$$q_z = 0.613 K_z K_{zt} K_d K_e V^2 \tag{2-48}$$

, en donde K_z corresponde al coeficiente de exposición de presión por velocidad calculada según la sección 26.10.1 de la norma; K_{zt} es el factor topográfico, el cual es unitario al considerar que no existe influencia de la topografía en el efecto del viento; K_d es el factor de direccionalidad del viento, en donde según la Tabla 26.6-1 de ASCE 7-16 tiene un valor $K_d = 0.85$; K_e es el factor por elevación del terreno y es permitido para todos los casos tomar un factor $K_e = 1$; finalmente, V es la velocidad básica del viento en m/seg, en donde según ASCE7-16 se utilizará $V = 45\ m/seg$.

Es importante notar que para el cálculo de K_z se utilizan coeficientes basados en una categoría de exposición de la estructura. En particular, se considerará una categoría de exposición al viento tipo B, en donde se asume que el edificio se encuentra en un área urbana con obstrucciones poco espaciadas. Además, se considera un factor de amortiguamiento del 2%.

Para el cálculo y asignación de las fuerzas de viento que actuarán en las distintas caras del edificio se basa en la Figura 27.3-1 de la norma ASCE 7-16, la cual se presenta en la Figura 2-33.

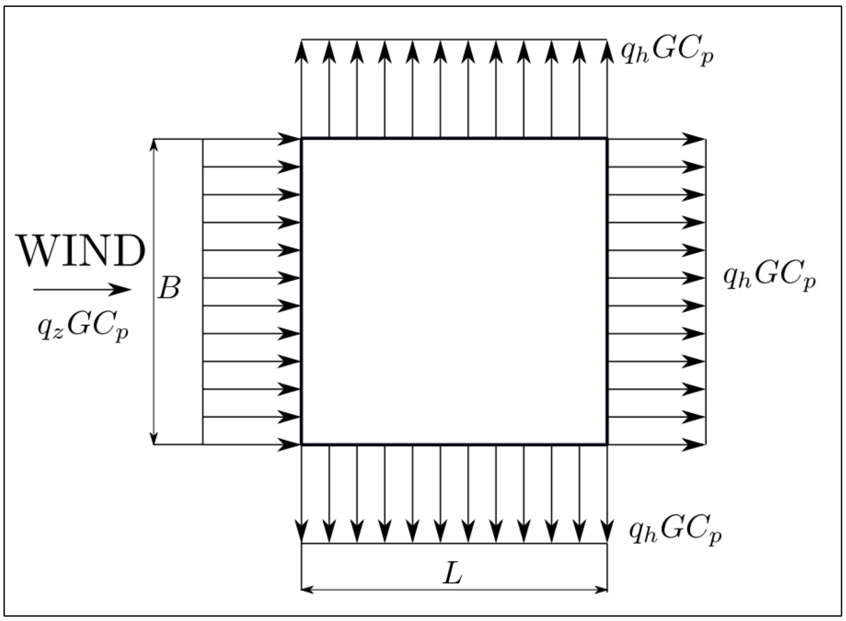


Figura 2-33: Carga de viento en la estructura (ASCE, 2017).

Según ella, la carga se debe separar entre barlovento (cara que sufre la acción directa del viento), paredes laterales (paralelas a dicha acción) y sotavento (caras paralelas al barlovento).

El coeficiente de presión sobre las paredes C_p se obtiene de la Figura 27.3-1 de la norma, cuyos valores se muestran en la Figura 2-34. Por otro lado, el factor de ráfaga G se calcula según la sección 26.11 de ASCE 7-16 en base a la clasificación del edificio, la cual depende de sus períodos. En particular, estos serán calculados mediante vectores de Ritz.

Wall Pressure Coefficients, C_p

Surface	L/B	C_p	Use With
Windward wall	All values	0.8	q_z
	0–1	−0.5	q_h
Leeward wall	2	−0.3	q_h
	≥4	−0.2	q_h
Sidewall	All values	−0.7	q_h

Figura 2-34: Coeficiente de presión sobre las paredes C_p (ASCE, 2017).

De esta forma, las cargas de viento obtenidas para cada cara del edificio a lo largo de su altura se muestran en la Figura 2-35.

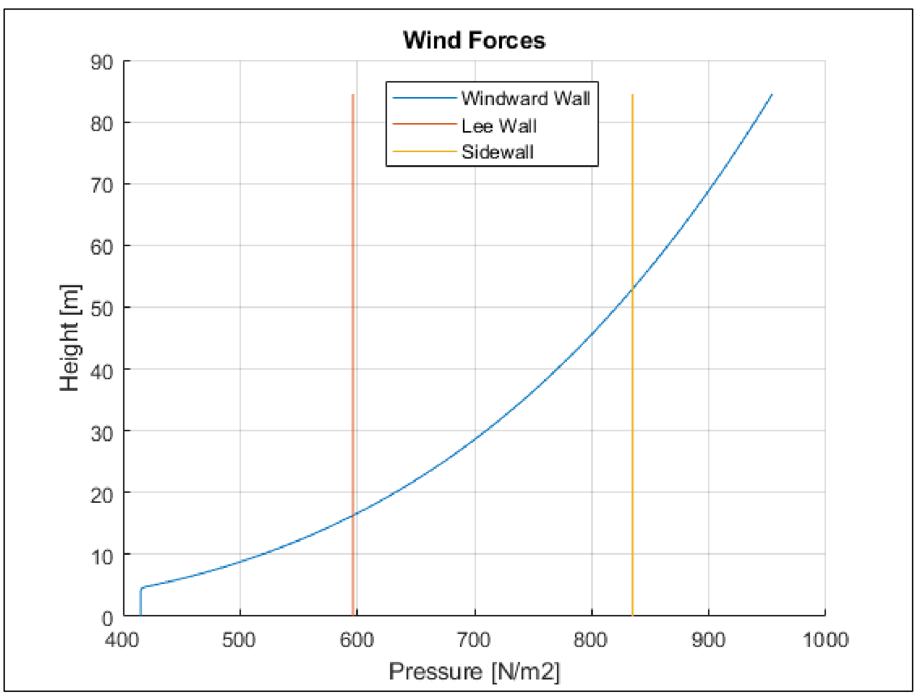


Figura 2-35: Cargas de viento sobre la estructura.

2.4.4. Combinaciones de Carga

Las combinaciones de carga utilizadas para el diseño de estructuras con sus coeficientes de mayoración/minoración se obtuvieron de la norma ASCE 7-16, y vienen dadas por:

$$1.4D \tag{2-49}$$

$$1.2D + 1.6L \tag{2-50}$$

$$1.2D + L \ \pm W \tag{2-51}$$

$$0.9D \pm W \tag{2-52}$$

, en donde el término $\pm W$ implica el análisis en dos sentidos de la carga de viento. Además, esta carga debe ser considerada de forma diferenciada en su aplicación principal tanto en el largo como en el ancho del edificio.

2.5. Período Fundamental de la Estructura

Dado que el cálculo de la carga de viento depende del período de la estructura, siendo esta clasificada como rígida o flexible, es que se hace necesario un esquema de actualización y continuación de dichas cargas a lo largo del proceso de optimización, en donde la geometría y períodos del edificio varían en las iteraciones necesarias en el proceso. En particular, la presente investigación calculará los períodos mediante los vectores de Ritz. Para ello se utiliza un método en que un vector de Ritz Ψ_i aproxima el modo natural ϕ_i de la estructura (Chopra, 2011). Un ejemplo de estas aproximaciones para los dos primeros modos en un edificio de 5 pisos se muestra en la Figura 2-36.

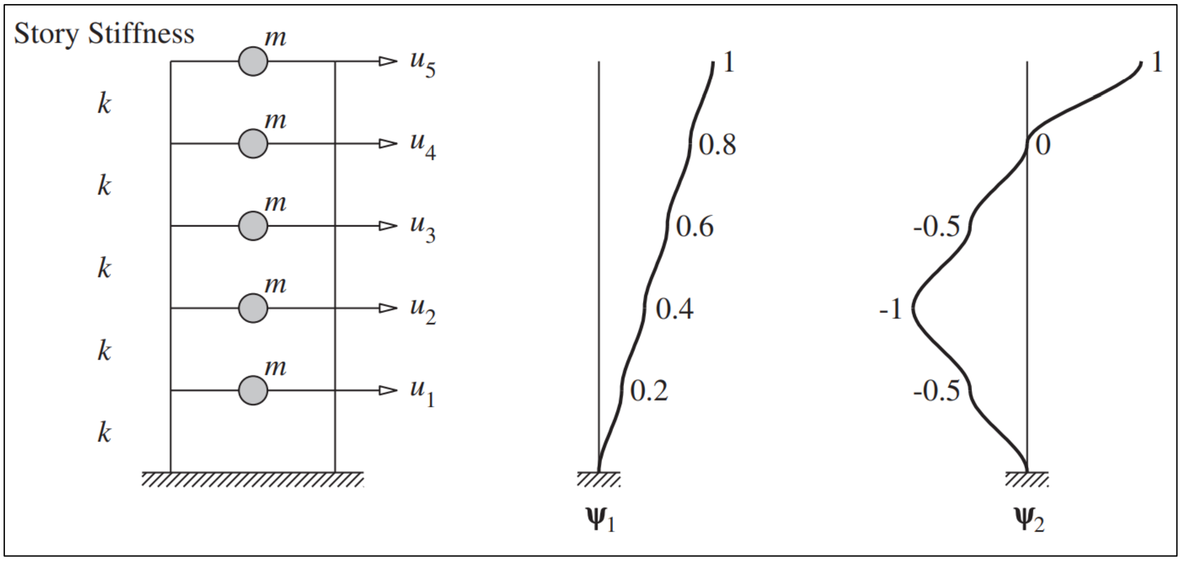


Figura 2-36: Vectores de Ritz (Chopra, 2011).

En particular, se usará la aproximación para el primer modo, la cual asume un comportamiento lineal de este. Este método es justificado desde un punto de vista de la validez de su aproximación, teniendo menor error que los modos naturales en una estructura sometida a fuerzas laterales, como se presenta en la Figura 2-37. Mayor detalle de esta aproximación se muestra en el Anexo C.

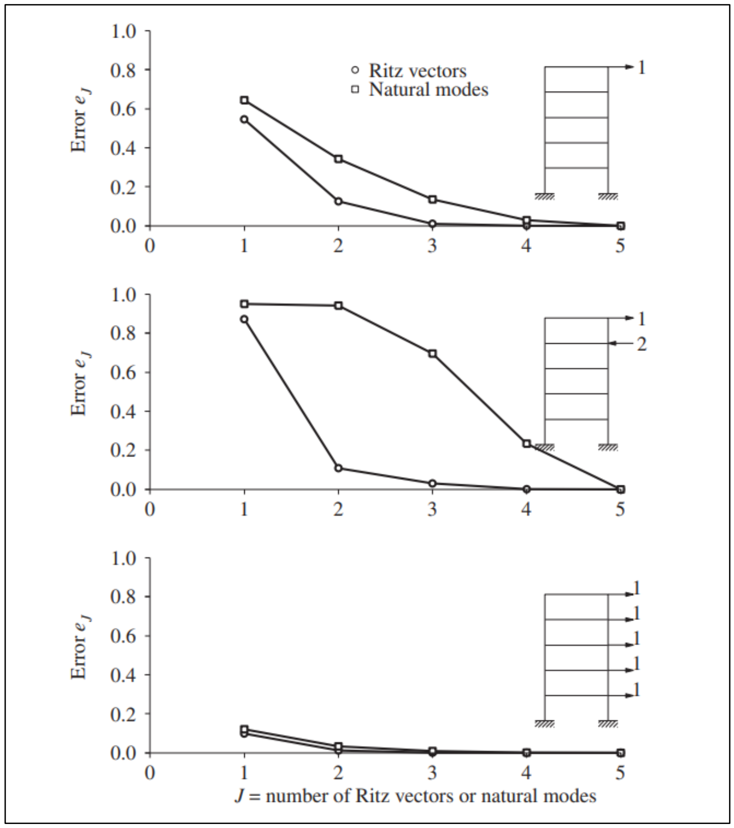


Figura 2-37: Variación del error para vectores de Ritz y modos naturales (Chopra, 2011).

Una vez obtenido el primer vector de Ritz Ψ_1 se calcula la rigidez y masa equivalente como magnitud escalar, según:

$$\hat{k} = \Psi^T \boldsymbol{K} \Psi \tag{2-53}$$

$$\hat{m} = \Psi^T \boldsymbol{M} \Psi \tag{2-54}$$

, con **K** la matriz de rigidez global y **M** la matriz de masa del sistema. Esta última se obtiene en base al peso sísmico de la estructura, cuya aproximación se obtiene del inciso 5.5.1 de la norma NCh433 y viene dado por $D + 0.25L$.

Finalmente, el período en cada dirección de la estructura se calcula mediante:

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega} \tag{2-55}$$

, con ω dado por:

$$\omega = \sqrt{\frac{\hat{k}}{\hat{m}}} \tag{2-56}$$

3. CASOS DE ESTUDIO

Una vez validado el uso tanto de las herramientas de análisis estructural como las de optimización topológica es posible combinarlas en su utilización conjunta para casos de análisis de mayor envergadura numérica. El objetivo del presente trabajo se enfoca en la generación de estructuras óptimas en las fachadas de edificios de gran altura.

3.1. Edificio de 30 Pisos Cuadrado

La primera estructura que será considerada para el análisis bajo múltiples escenarios de carga y configuraciones estructurales consta de un edificio de 30 pisos, con altura constante de $2.8\,m$ para cada uno de estos. El edificio tiene planta cuadrada, donde el largo y ancho de la misma son $L = 27\,m$ y $B = 27\,m$, respectivamente. Adicionalmente, el edificio posee de un parapeto de $0.5\,m$, dando una altura total $H = 84.5\,m$. En cuanto a sus restricciones cinemáticas, este se encuentra empotrado en toda su base. La discretización de la fachada en Matlab® (i.e. de los muros exteriores o *spandrel*) del caso descrito se muestra en la Figura 3-1, en donde las cruces rojas simbolizan las condiciones de empotramiento.

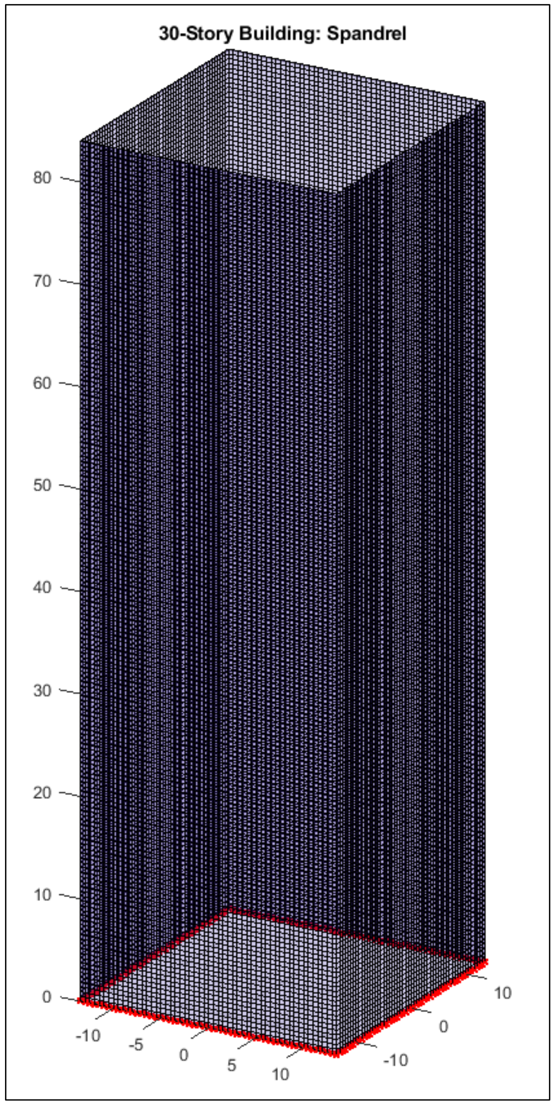


Figura 3-1: Modelo Matlab® de *spandrel* en edificio de 30 pisos.

Esta estructura puede o no poseer un núcleo de hormigón armado en su centro a lo largo de los casos de análisis que se mostrarán en la presente sección. En de existir, sus dimensiones están dadas por $9\ m$ de largo y $9\ m$ de ancho, con aberturas de $3\ m$ en los puntos medios de cada lado simulando las entradas al núcleo en cada piso. El modelo del núcleo aislado se presenta en la Figura 3-2.

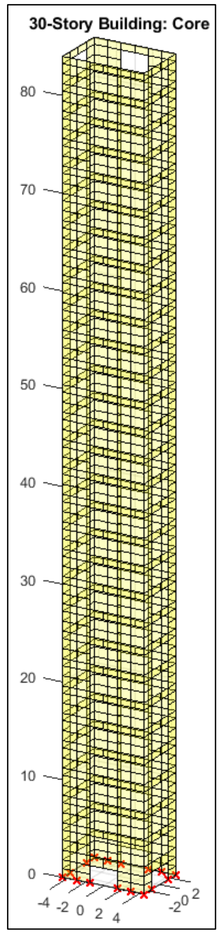


Figura 3-2: Modelo Matlab® del núcleo en edificio de 30 pisos.

Otro elemento estructural dentro de la modelación corresponde a las losas del edificio. Estas conectan el núcleo (en caso de existir) con los muros externos. La modelación de estos elementos se muestra de forma aislada en la Figura 3-3.

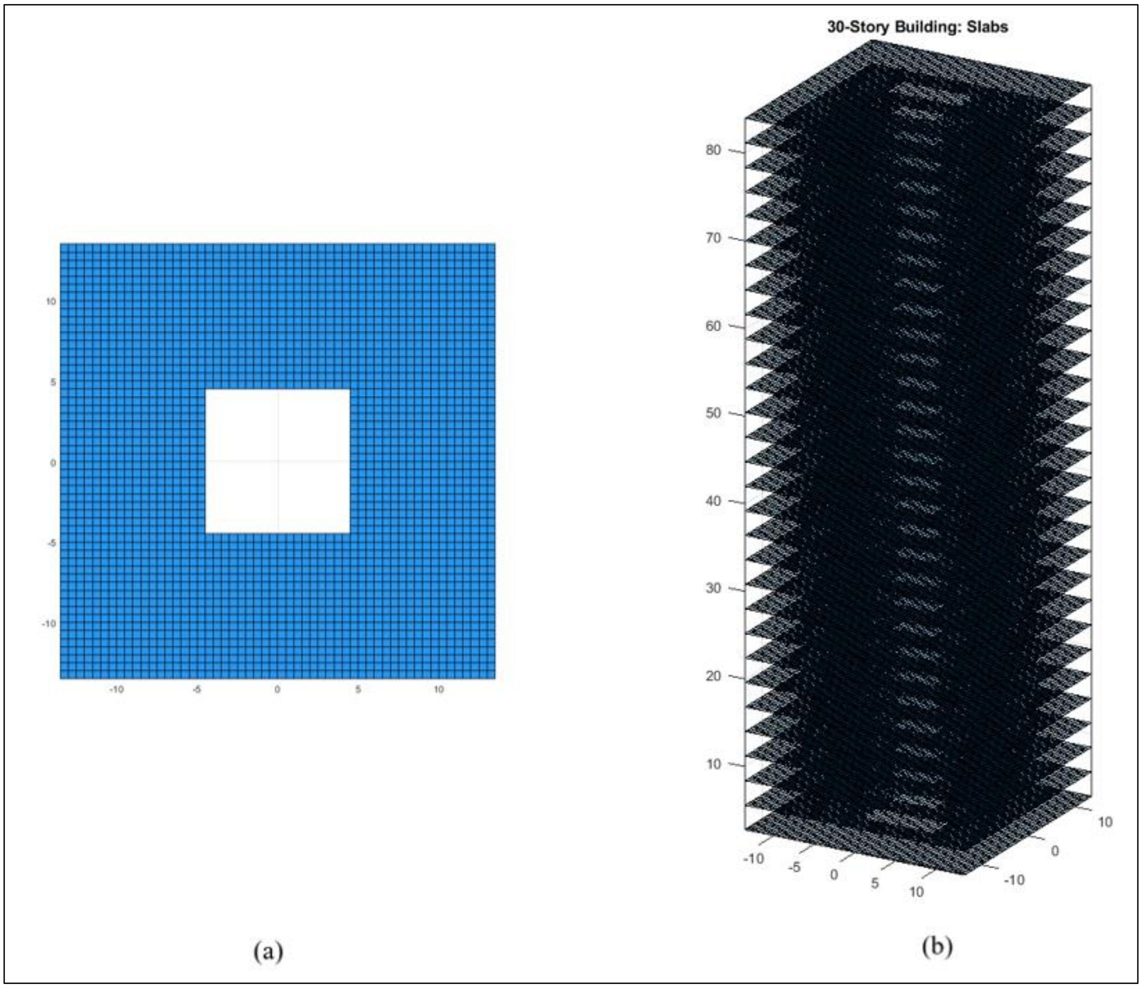


Figura 3-3: Modelo Matlab® de losas en edificio de 30 pisos. (a) Vista en planta; (b) Vista 3D.

Finalmente, dentro del proceso de modelación se tiene que la estructura en su completitud será la superposición de estas tres componentes, generando una equivalencia nodal en sus respectivas coordenadas con el objetivo de dar una continuidad numérica en el modelo. De esta forma, la estructura final que se utilizará para los casos de análisis se muestra en la Figura 3-4. En el Anexo B se realizan comparaciones entre los modelos de ETABS y Matlab® con el objetivo de validar los resultados de deformaciones obtenidas para cada uno de los casos analizados.

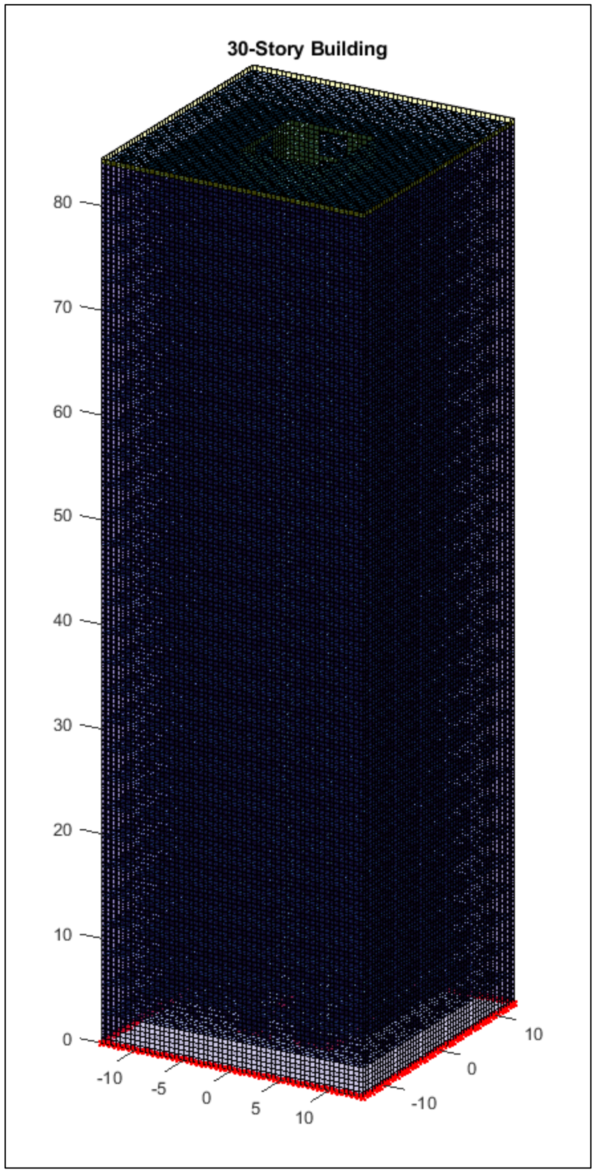


Figura 3-4: Modelo Matlab® del edificio de 30 pisos.

Respecto a las condiciones de optimización que se impondrán en la estructura para los ejemplos que serán analizados, se considerará como restricción de densidad un 20% del material de manufactura disponible en el edificio, en donde dentro de esa restricción solo se considera la existencia de elementos pasivos sólidos. Además, dado el mallado de elementos finitos realizado, se utilizará un radio de filtro $r_{min} = 1.2$ m.

Es importante mencionar que al momento de optimizar el modelo para los diferentes casos de análisis sólo se considerará como el dominio de optimización a los muros exteriores (*spandrel*). Es decir, las losas y núcleo no son parte del dominio de diseño debido a su importancia en la distribución de las cargas.

Se usará un esquema de continuación de parámetros con el objetivo de obtener resultados con mayor cantidad de elementos cuya densidad sea un valor binario, es decir, con el fin de eliminar las zonas grisáceas generadas por aproximaciones numéricas dentro del dominio de optimización. En este caso, se impusieron 400 iteraciones como máximo para cada escenario de análisis, dado que estas son suficientes para encontrar una estructura óptima sin cambios con significancia numérica. Este esquema de continuación de parámetros de optimización a lo largo de las iteraciones se resume en la Tabla 3-1. Es importante notar que el movimiento m dependerá de la fracción de volumen objetivo impuesta, con el objetivo de generar un esquema general y no de uso particular para este ejemplo.

Tabla 3-1: Esquema de continuación para parámetros de optimización.

Iteración i	Penalización p	Movimiento m
1	2	$V_f/4$
10	2.25	$V_f/4$
25	2.5	$V_f/5$
50	2.75	$V_f/5$
75	3	$V_f/6$
100	3.25	$V_f/6$
125	3.5	$V_f/7$
150	3.75	$V_f/7$
200	4	$V_f/8$
250	4.25	$V_f/9$
300	4.5	$V_f/10$

3.1.1. Cargas de viento sin núcleo

En este primer caso de análisis para el edificio de 30 pisos se buscará medir el efecto únicamente de las cargas de viento, sin considerar el peso propio de los elementos ni el aporte del núcleo. Para ello, según normativa (ASCE, 2017) se debe considerar la aplicación de esta sobre cada una de las cuatro caras del edificio. Es decir, se considera $\pm W$ tanto a lo largo como a lo ancho de la estructura de manera independiente.

Si bien este escenario supone cuatro casos de carga dados por $+W_x, -W_x$, $+W_y$ y $-W_y$, estos presentan equivalencias entre sí gracias al concepto de simetría impuesto en la geometría del edificio. De esta forma $+W_x$ es análogo a $-W_x$, mientras que $+W_y$ lo es respecto a $-W_y$. Consecuentemente, sólo serán estudiados dos casos de carga, los cuales son el viento en dirección x e y, o W_x y W_y, respectivamente.

Para encontrar la distribución óptima de material de manufactura se utilizará el óptimo de Pareto considerando estos dos escenarios de carga. De esta forma, mediante esta metodología se tendrá que el *compliance* total de la estructura dependerá de la combinación lineal de los valores independientes para cada caso de carga analizado, según:

$$c = \alpha c_1 + (1 - \alpha) c_2 \tag{3-1}$$

, en donde $\alpha \in [0,1]$ es un escalar arbitrario que simboliza el peso, proporción o importancia de cada escenario de carga. En particular, se adoptará la notación c_1 para el *compliance* del caso W_x, mientras que el valor de la función objetivo del caso W_y vendrá dado por c_2.

Finalmente, para este caso de análisis de considerará una repetición de patrones de 5 pisos y una fracción de volumen del 20%.

En cuanto a los resultados, en primer lugar, se analizará la distribución de material óptima para cada caso de carga de forma independiente. Por un lado, si se considera la carga de viento siendo aplicada únicamente a lo largo del edificio, se obtiene la distribución óptima mostrada en la Figura 3-5. Por otro lado, para el caso de carga en donde el viento proviene exclusivamente en dirección del ancho de la estructura, se logra el escenario óptimo de material mostrado en la Figura 3-6.

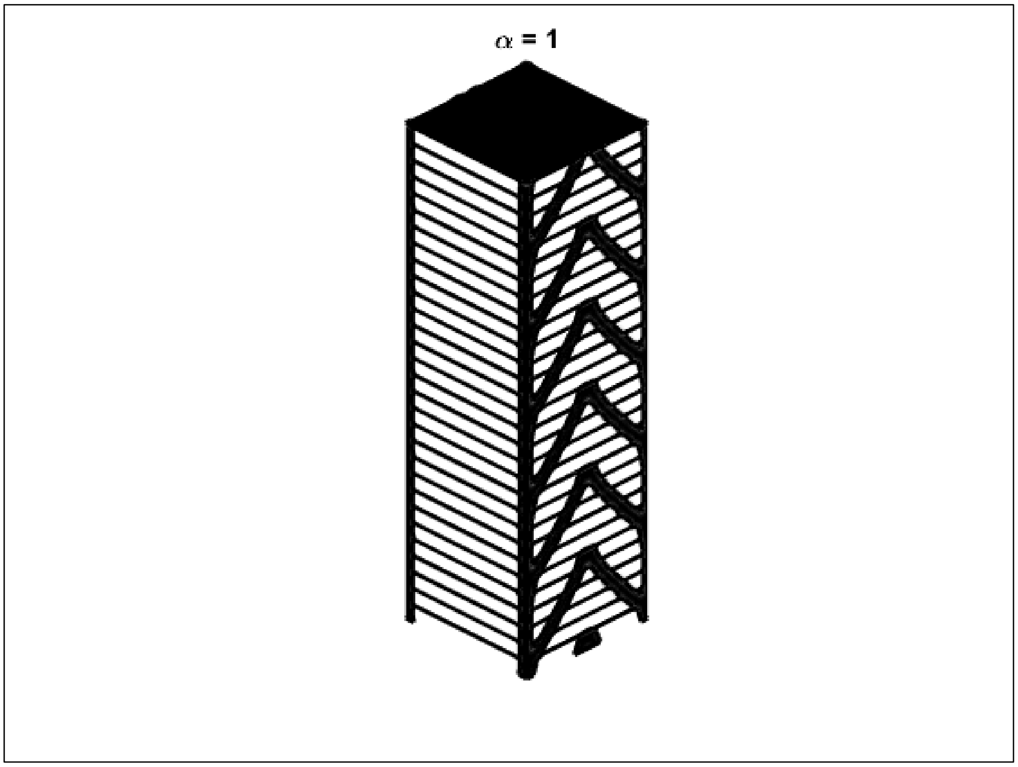


Figura 3-5: Estructura óptima para W_x.

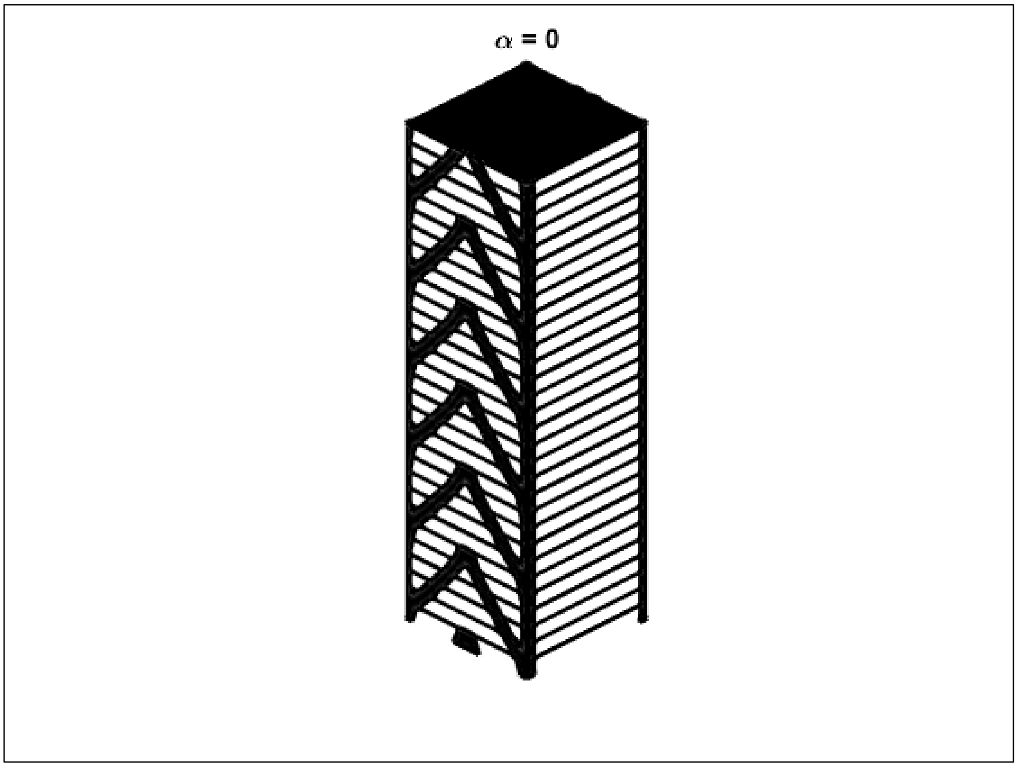


Figura 3-6: Estructura óptima para W_y.

Dado que ambas cargas son equivalentes como consecuencia de la geometría del caso analizado, se obtiene la misma disposición óptima de material para cada uno de ellos de forma independiente. En este escenario, la estructura tiende a formar columnas en los vértices del edificio, así como también una disposición tipo *chevron* en la fachada de este, distribución que minimiza el *compliance* dada la carga lateral en cada cara de la estructura. La combinación lineal óptima se da para $\alpha^* = 0.5$ según se muestra en la Figura 3-7, mientras que la disposición del material de manufactura para este punto se muestra en la Figura 3-8. Es relevante notar la simetría de los resultados; comportamiento esperable para un edificio de estructuración en planta cuadrada. El valor óptimo simboliza que el edificio se desempeña igualmente bien para cada uno de los escenarios analizados, en donde una pequeña perturbación beneficiará el comportamiento de un caso de carga en desmedro del otro.

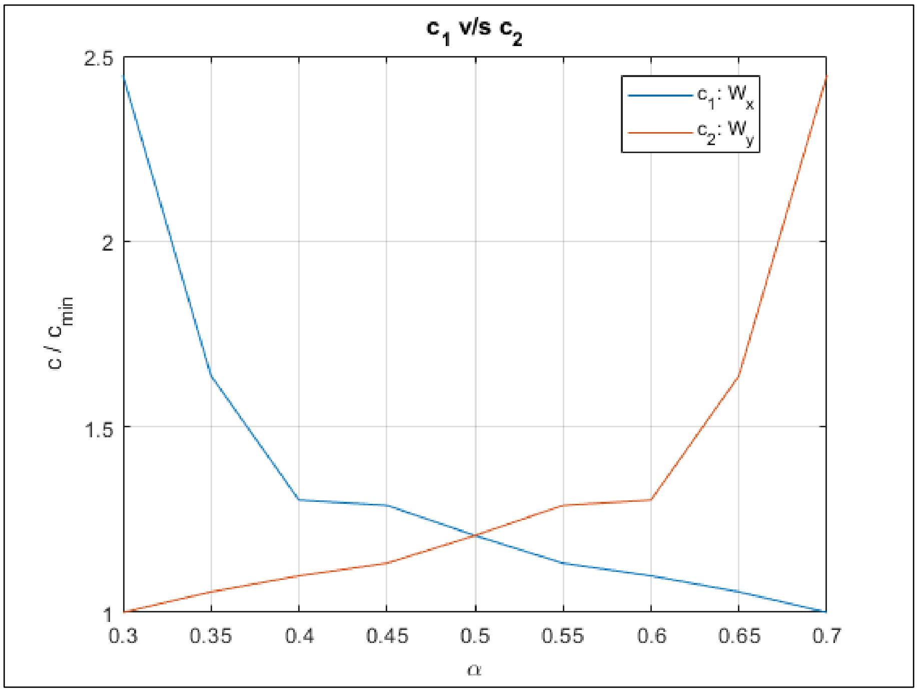


Figura 3-7: Óptimo de Pareto para W_x vs W_y.

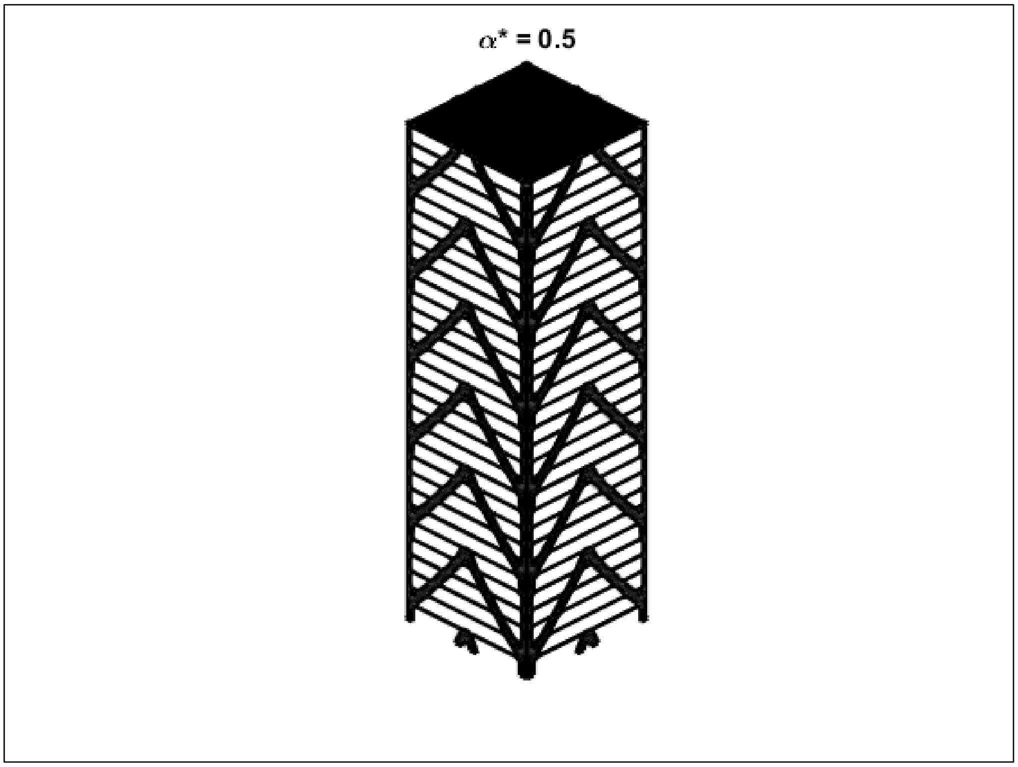


Figura 3-8: Estructura óptima para W_x vs W_y.

En este último se puede apreciar que se genera la misma distribución para ambas caras de la estructura, en donde para mantener la fracción de volumen del 20% debe generar elementos más pequeños en comparación a cada escenario de carga analizado de forma independiente. Además. es interesante notar que para el primer piso se genera una disposición que soporta únicamente las cargas transmitidas por parte de dicho piso, la cual mantiene la consistencia de repetición de patrones respecto a su ubicación para los pisos superiores.

3.1.2. Efecto del núcleo y repetición de patrones

Con el fin de inspeccionar la influencia de los distintos parámetros tanto estructurales como de optimización dentro de las distribuciones óptimas de material de manufactura, es necesario modificarlos para también entender su importancia dentro de los estados óptimos para cada caso analizado. En este sentido, se analizarán casos: (1) con núcleo, (2) al 50% de su capacidad y (3) sin él; al mismo tiempo que se modificará la repetición de patrones para cada uno de ellos. Para el caso del aporte estructural del núcleo, este se cambia mediante la modificación del espesor de este y no modificando directamente su rigidez.

Los resultados en términos de la función objetivo medible dada por el *compliance* se ilustran en la Figura 3-9.

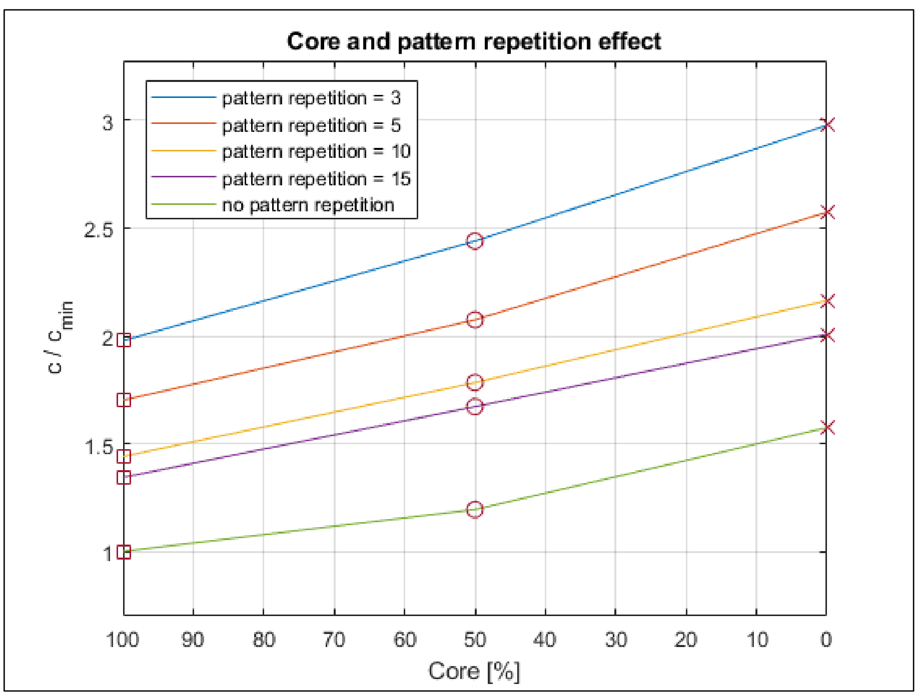


Figura 3-9: Influencia del núcleo y repetición de patrones.

En esta es posible notar que la existencia del núcleo minimiza la función objetivo, o análogamente, maximiza la rigidez de la estructura y minimiza los desplazamientos experimentados por esta. Además, la restricción de repetición de patrones resulta en un peor desempeño para el edificio debido a que reduce el espacio de soluciones posibles del problema de optimización. Dentro de este último ámbito es posible analizar en más detalle las restricciones de optimización, cuya influencia se muestra en la Figura 3-10.

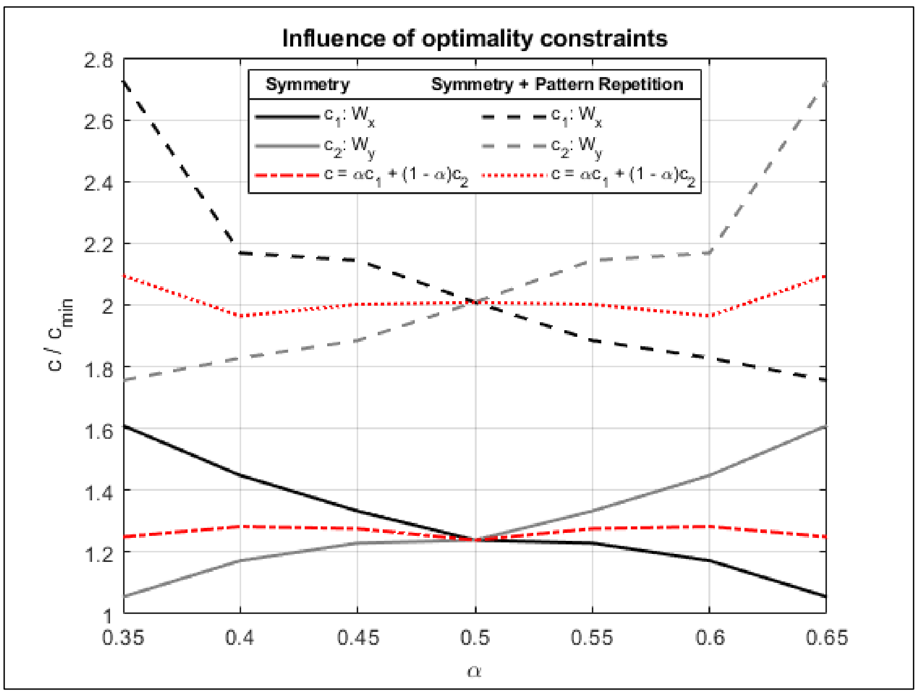


Figura 3-10: Influencia de restricciones de optimalidad.

Las restricciones geométricas impuestas dentro del dominio optimizable empeoran el comportamiento del edificio dado que se le restringe la libertad a la estructura de colocar material donde más lo necesite en pos de resistir los esfuerzos inducidos por los casos de carga analizados. No obstante, estas cumplen una función de constructibilidad, lo cual las hace importantes de considerar al momento del diseño.

En cuanto a las estructuras óptimas para cada escenario analizado, estas son presentadas y resumidas en una matriz de optimización, como se muestra en la Figura 3-11.

	Sin Núcleo	50% Núcleo	100% Núcleo
Pattern Repetition = 3			
Pattern Repetition = 5			

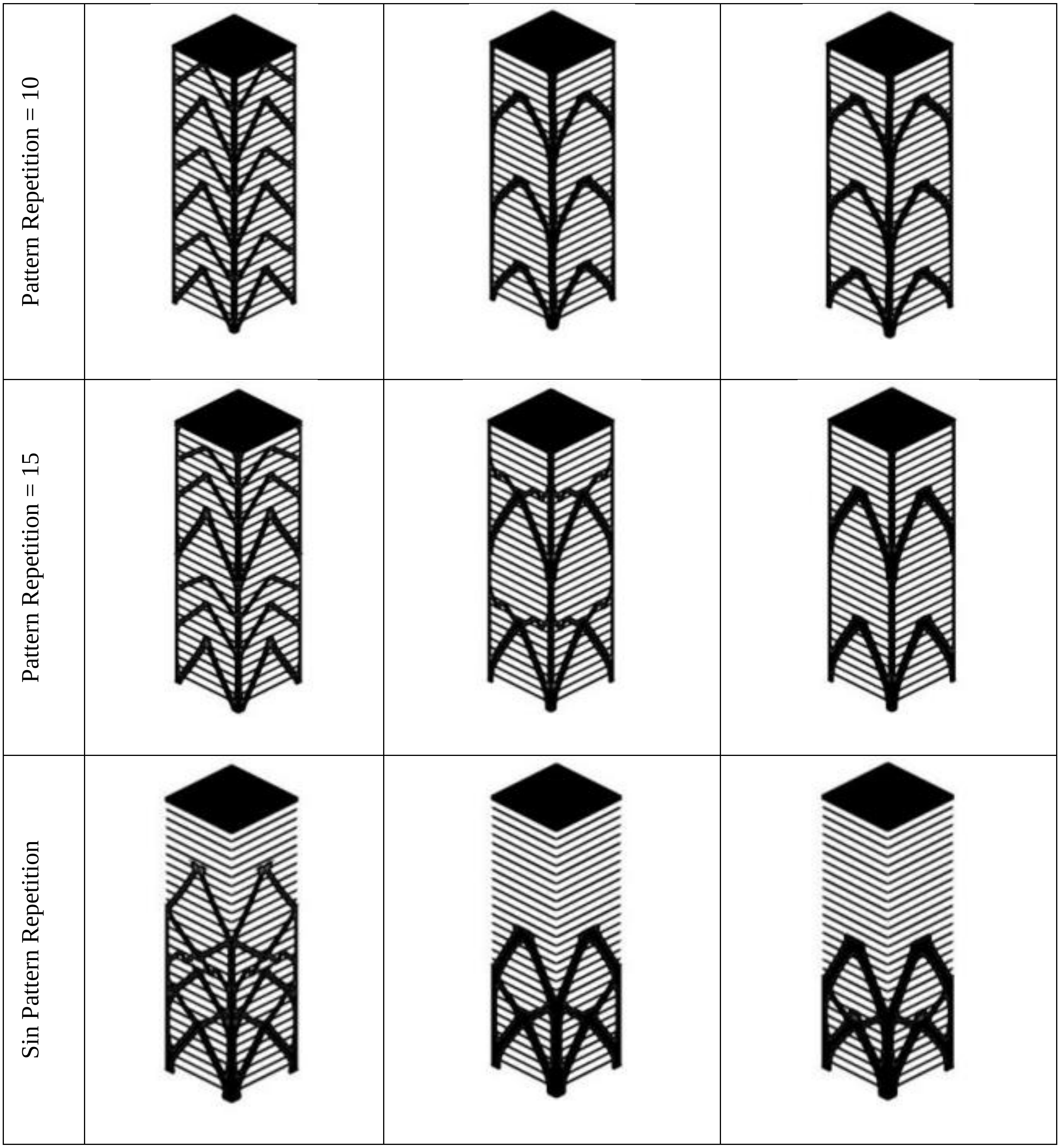


Figura 3-11: Matriz de optimización para W_x vs W_y sin núcleo de la Figura 3-8.

De esta matriz es posible observar que el núcleo se vuelve cada vez más importante en la distribución óptima del material a medida que se aumenta la cantidad de pisos para cada patrón de repeticiones. Esto es debido a que los elementos, al estar presentes en una forma menos uniforme, cobran mayor importancia al momento de distribuir las cargas a lo largo de toda la estructura.

Además, es posible notar que a medida que se libera la restricción de repetición de patrones, la disposición óptima de material tiende a ser más achatada, como consecuencia de que al igual que en una viga *cantilever*, el edificio sujeto a cargas de viento posee una predominancia del corte en la base, mientras que en el extremo en voladizo gobierna el comportamiento a flexión.

Finalmente, también es importante destacar que, para el caso en la ausencia de repetición de patrones, la fracción de volumen autoimpuesta es muy pequeña para lograr cubrir toda la fachada de forma óptima.

3.2. Edificio de 100 Pisos Cuadrado

Una vez inspeccionado el caso en que se tienen únicamente cargas laterales, es necesario estudiar las distintas combinaciones de carga exigidas por la norma (ASCE, 2017). En este se deben considerar, además de las fuerzas de viento ya estudiadas, las cargas gravitacionales, tales como: peso propio de la estructura, carga muerta sobreimpuesta y carga viva, cuyos valores y combinaciones se presentaron en el Capítulo 2.

En este contexto, y con el objetivo de obtener resultados coherentes a la influencia del viento en las estructuras, es esencial considerar un edificio que, gracias a su altura, sea afectado en forma primordial por las cargas laterales por sobre las gravitacionales.

De esta forma, la estructura mostrada en la Sección 3.1 será aumentada de 30 a 100 pisos, manteniendo su geometría cuadrada para un primer análisis de la influencia del viento en ella.

Dado este aumento en los pisos respecto al ejemplo similar mostrado en la Sección 3.1 y también a que ahora las cargas incluyen la componente estática y además estas están mayoradas según la norma, se hace necesario también aumentar la fracción de volumen con el objetivo de que haya suficiente material para poder contrarrestar los esfuerzos inducidos a la estructura. En este sentido, se restringirá a un 45% del volumen total de manufactura dentro de la región optimizable, en donde además se mantendrá una repetición de patrones de 5 pisos.

Para el análisis serán considerados dos estados de carga: $1.2D + L + W_x$ vs $1.2D + L + W_y$, dadas por la ecuación (2-51).

3.2.1. Cargas gravitacionales y laterales: Sin núcleo

El primer caso a analizar para el edificio de 100 pisos con geometría cuadrada consta de la no presencia del núcleo en su interior.

De esta forma, y utilizando los parámetros geométricos y de optimización descritos, se obtiene la distribución de material óptima mostrada en la Figura 3-12.

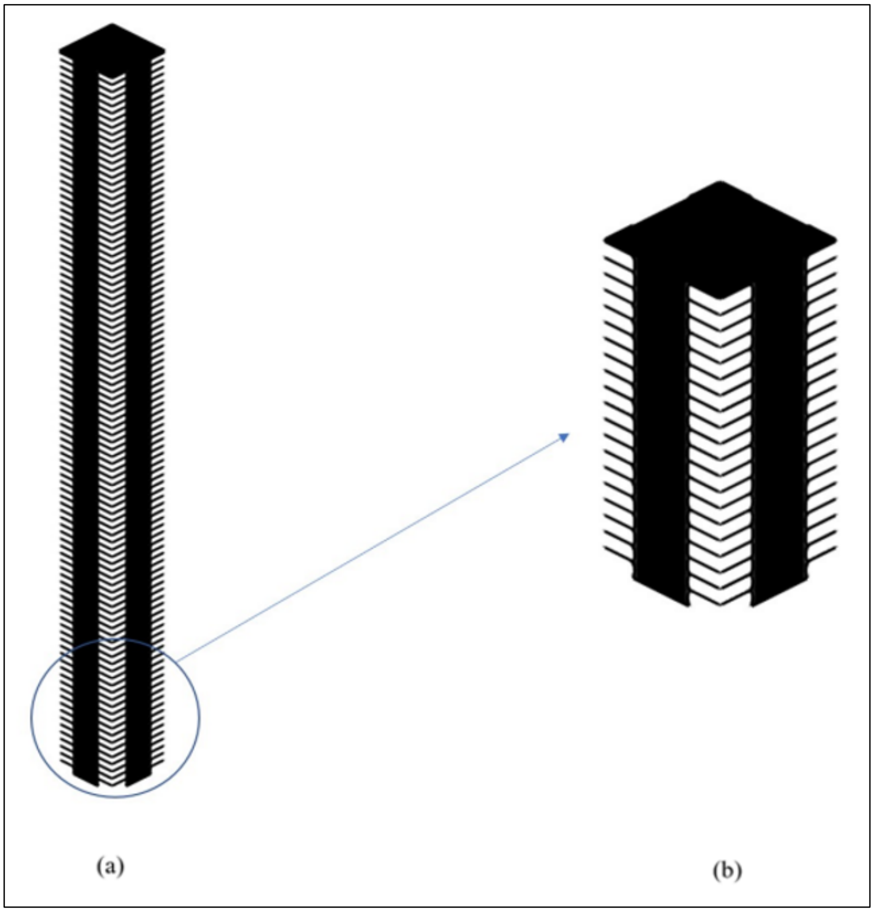


Figura 3-12: Estructura óptima para $1.2D + L + W_x$ vs $1.2D + L + W_y$ sin núcleo.
(a) Edificio completo; (b) Primeros 20 pisos.

En esta última es posible apreciar la notable tendencia de la estructura en generar al núcleo dentro de su dominio optimizable, es decir, en la fachada, corroborando y justificando su importancia dentro de la estructuración en edificios de gran envergadura.

3.2.2. Cargas gravitacionales y laterales: Con núcleo

Debido a que un edificio se comporta como una viga en voladizo al estar sometido a cargas laterales, los rascacielos o estructuras de gran altura actuales suelen estar formadas por un núcleo, el cual aporta en rigidez tanto para las fuerzas verticales como laterales, requerimiento mostrado y validado en el ejemplo de la Sección 3.2.1.

El núcleo suele ser un tubo hueco de hormigón armado ubicado en el centro del marco exterior (fachada) del edificio. Dicho núcleo consta de muros, típicamente denominados 'paredes de corte', que tienen aberturas para los accesos y salidas en cada piso. De esta forma, las cargas laterales se transfieren desde la estructura exterior hacia el núcleo a través de las losas y/o vigas.

Es por ello que, en este ejemplo, se analizará la influencia del núcleo en la distribución óptima del material de manufactura. En particular, se usarán los mismos parámetros de optimización empleado en el caso sin núcleo, siendo la única salvedad la incorporación de un núcleo de hormigón armado, cuyas dimensiones se mencionaron al comienzo del presente Capítulo, mientras que las propiedades mecánicas del mismo fueron presentadas en la Tabla 2-3 del Capítulo 2.

De esta forma, utilizando la rutina computacional ClaTOP se logra obtener la distribución óptima de material presentada en la Figura 3-13.

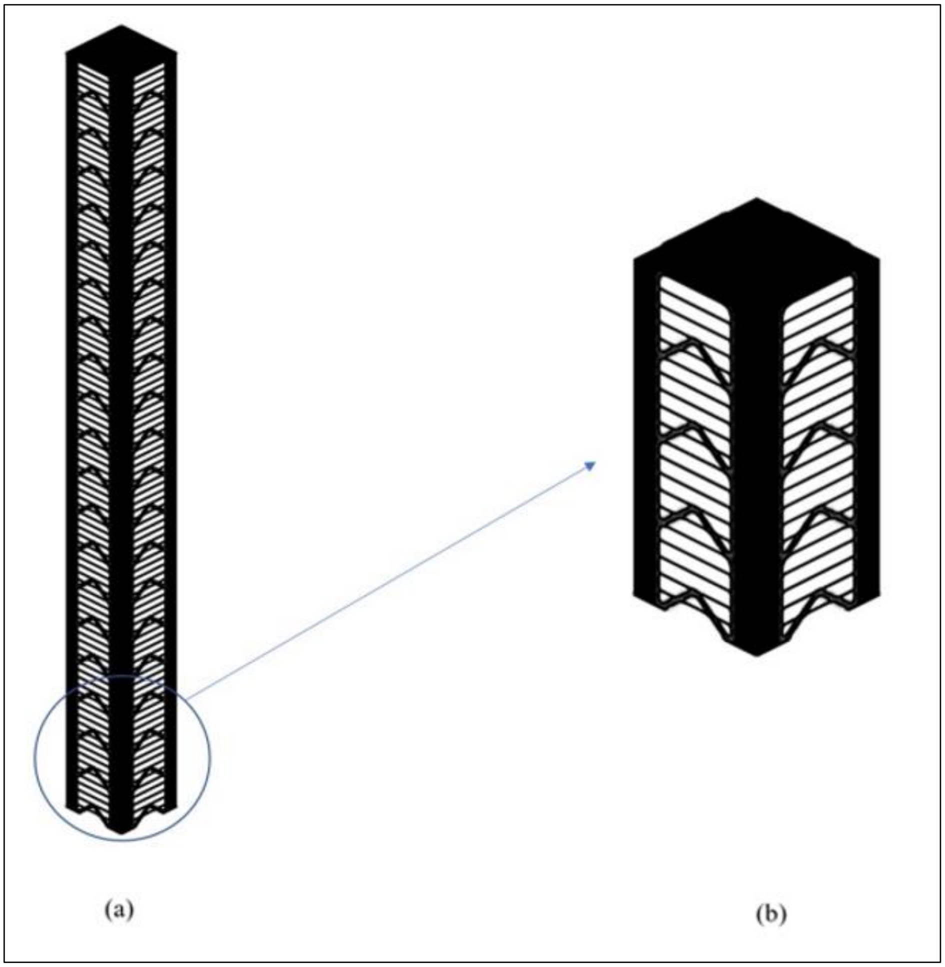


Figura 3-13: Estructura óptima para $1.2D + L + W_x$ vs $1.2D + L + W_y$ con núcleo.
(a) Edificio completo; (b) Primeros 20 pisos.

En cuanto a los resultados obtenidos se tiene que la estructura óptima varía respecto al caso sin núcleo presentado en el ejemplo precedente. Es más, de la Figura 3-13 se puede observar que el material ya no tiende a formar el núcleo en el centro, y que, al ya estar considerado dentro de la estructura, genera vigas tipo *chevron* en las zonas de cargas laterales y columnas más robustas simulando una especie de sistema de marco.

Por inspección, es posible notar que si se disminuye la fracción de volumen a un 35% se obtendrá una disposición de material tipo 'M', como se muestra en la Figura 3-14. Esto, debido a que el edificio no posee el material suficiente para generar una estructuración tipo *chevron*, la cual es la forma predominante a partir del 45% de fracción de volumen, siendo así esta la disposición ideal óptima para la combinación de cargas gravitacionales y laterales inducidas.

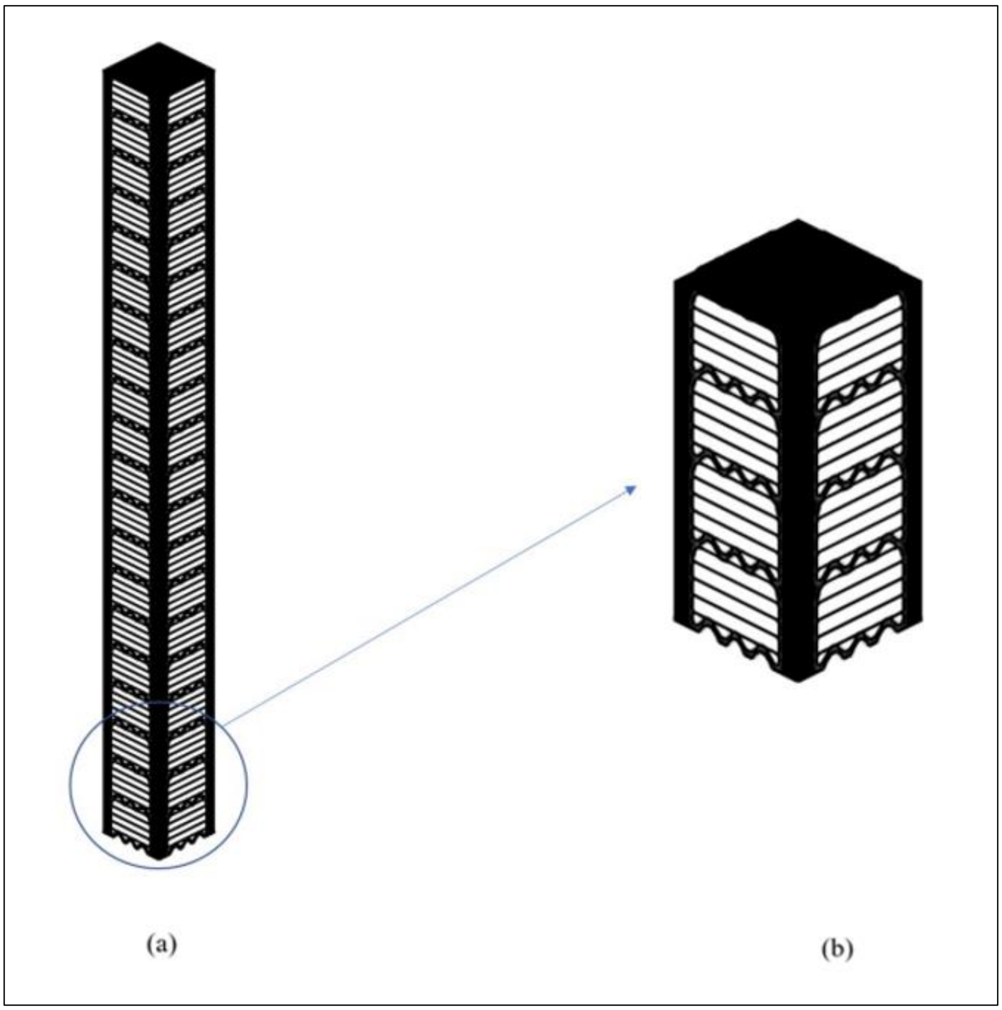


Figura 3-14: Distribución óptima de material para edificio de 100 pisos con núcleo considerando $V_f = 0.35$. (a) Edificio completo; (b) Primeros 20 pisos.

Estos resultados van en directa relación con la teoría disponible en la bibliografía (Ascher, 2011), en donde se explica y se valida la importancia de la utilización del núcleo en estructuras de gran altura con el objetivo de contrarrestar las deformaciones inducidas por las cargas laterales, tales como viento o sismos.

3.3. Edificio de 100 Pisos Rectangular con Múltiples Casos de Carga

Una vez analizados los escenarios más ideales desde un punto de vista de geometría y simplificación al momento de considerar los estados de carga, se hace necesario uno en donde dichos ideales no estén presentes. De esta forma, se mantendrá en consideración la estructura estudiada de 100 pisos, pero esta vez con una geometría rectangular en donde una cara del edificio tendrá 27 m y la otra 18 m. En consecuencia, y dado que ya no existe simetría en los estados de carga, se estudiarán 3 combinaciones dominantes:

$$1.2D + L + W_x \tag{3-2}$$

$$1.2D + L + W_y \tag{3-3}$$

$$1.2D + 1.6L \tag{3-4}$$

Por lo tanto, es necesario utilizar y comparar 3 funciones objetivo dado que se tendrán 3 campos de desplazamiento asociados a cada escenario posible de carga. A diferencia del caso en que sólo se poseían 2 de ellas, las cuales pueden ser descritas en base a un único parámetro α, en este escenario deben ser representarlas utilizando dos de estos parámetros, según:

$$c = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + (1 - \alpha_1 - \alpha_2) c_3 \tag{3-5}$$

, en donde c_1, c_2 y c_3 corresponden a los valores de la función objetivo para cada uno de los tres casos de carga de forma respectiva, mientras que α_1 y α_2 son los ponderadores utilizados en las iteraciones para las dos primeras combinaciones. Es importante notar que se ha escogido arbitrariamente representar la función objetivo total en base a los dos primeros casos de carga debido al dominio de las cargas de viento, y que estas pueden también ser descrita en términos de las otras equivalencias matemáticas existentes entre los distintos casos, como consecuencia de que los ponderadores de las tres combinaciones deben sumar la unidad. Luego, el punto óptimo se encontrará en un escenario tridimensional, en donde este corresponderá al punto de mínimo *compliance* dentro del máximo generado para cada combinación lineal.

A raíz de que las combinaciones lineales para un escenario con tres casos de carga aumentan de forma considerable respecto al escenario con dos de ellas, y en especial si se desea realizarlo con una mayor precisión (i.e., un incremento $\Delta\alpha$ entre combinaciones lineales relativamente pequeño), se hace necesario generar un algoritmo de búsqueda inteligente del punto óptimo.

Para esto, y tomando como base dos de las tres combinaciones plausibles mencionadas anteriormente, se generan las conjugaciones de coordenadas considerando una discretización relativamente grande y a la vez representativa dada por $\Delta\alpha = 0.2$, lo cual da origen a 21 posibles combinaciones lineales.

Como se mencionó anteriormente, el óptimo se ubicará en el punto mínimo dentro de los *compliance* máximos para cada combinación lineal generada. En este escenario, es posible hacer una representación en base a escala de colores de la variación de la función objetivo, lo cual permite identificar la ubicación del punto de interés, como se muestra en la Figura 3-15. Este punto, de forma preliminar, corresponde a la combinación lineal $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0.6\ y\ \alpha_3 = 0.4$.

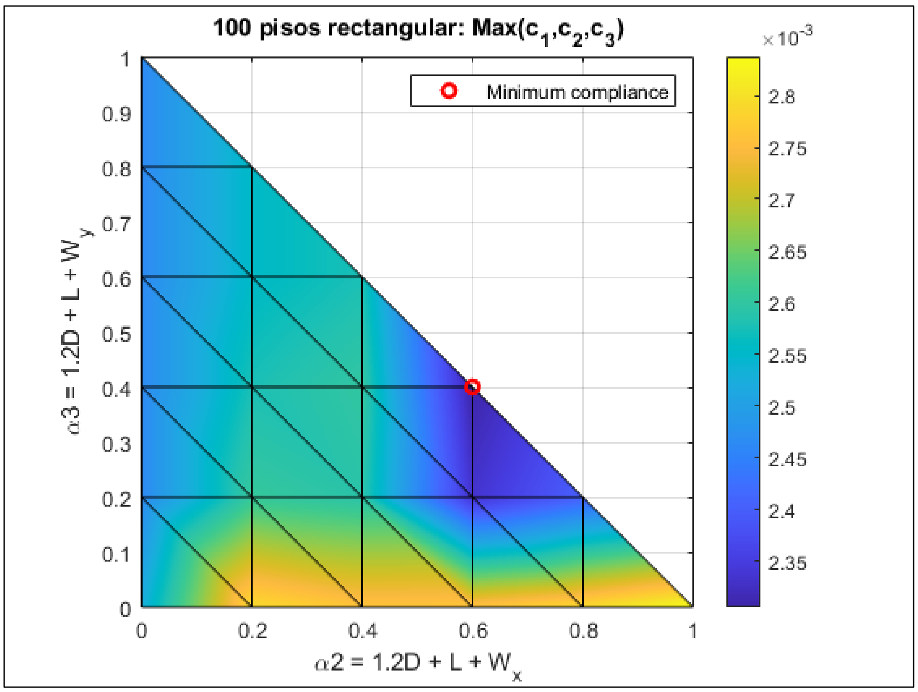


Figura 3-15: Óptimo de Pareto para $\Delta\alpha = 0.2$.

En base a esta primera aproximación es posible identificar la zona en donde estará ubicado el punto con mínimo *compliance*. Luego, y considerando $\Delta\alpha = \alpha/2$, se discretizan nuevamente todos los sub-triángulos que rodean al punto óptimo para esta primera aproximación, como se muestra en la Figura 3-16.

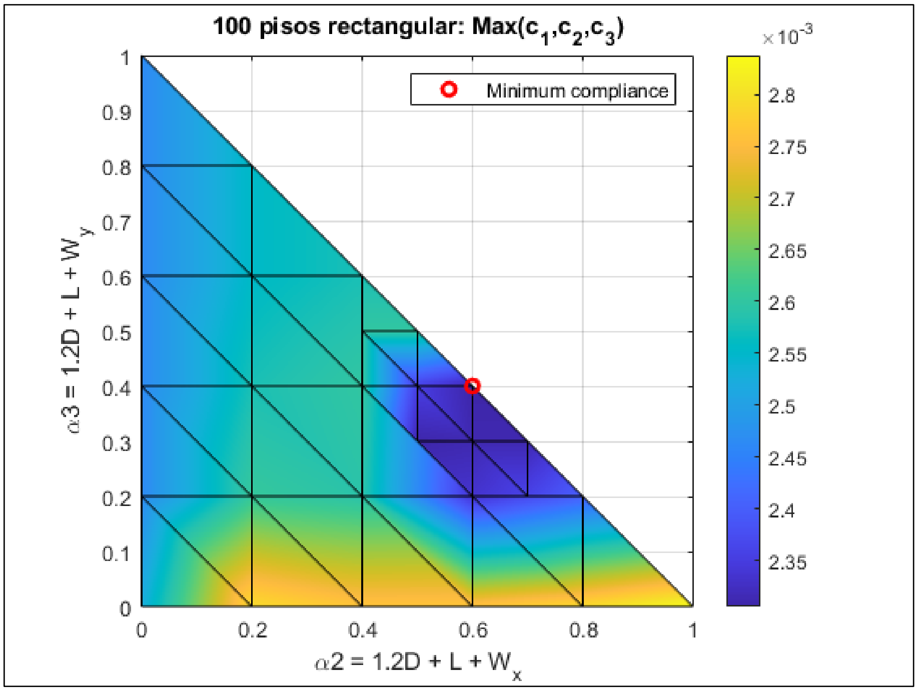


Figura 3-16: Óptimo de Pareto para $\Delta\alpha = 0.1$.

Posteriormente, nuevamente se identifica el punto con mínimo compliance y se vuelve a discretizar los triángulos contiguos a él considerando $\Delta\alpha = \alpha/2$. Este proceso se realiza en forma tal a llegar a un $\Delta\alpha$ objetivo. En el presente trabajo se refinaron las combinaciones lineales hasta una discretización $\Delta\alpha = 0.0125$, cuyo resultado se ilustra en la Figura 3-17, y su distribución óptima de material lograda se muestra en la Figura 3-18.

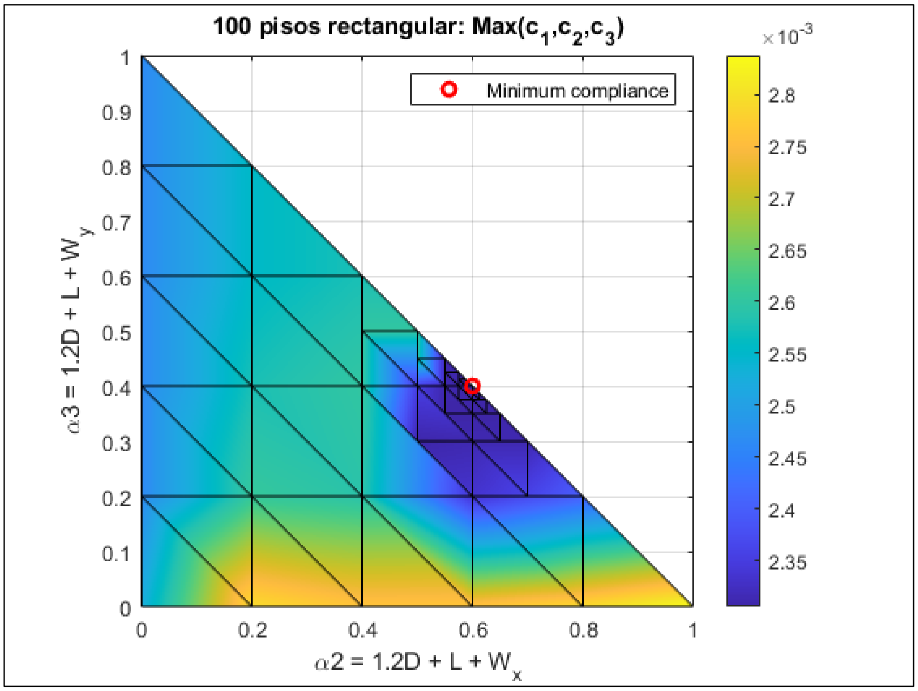


Figura 3-17: Óptimo de Pareto considerando una búsqueda inteligente.

En este caso en particular, se obtuvo que el punto óptimo no varía respecto a la discretización más gruesa empleada en primer lugar, es decir, este se encuentra en la combinación lineal $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0.6\ y\ \alpha_3 = 0.4$.

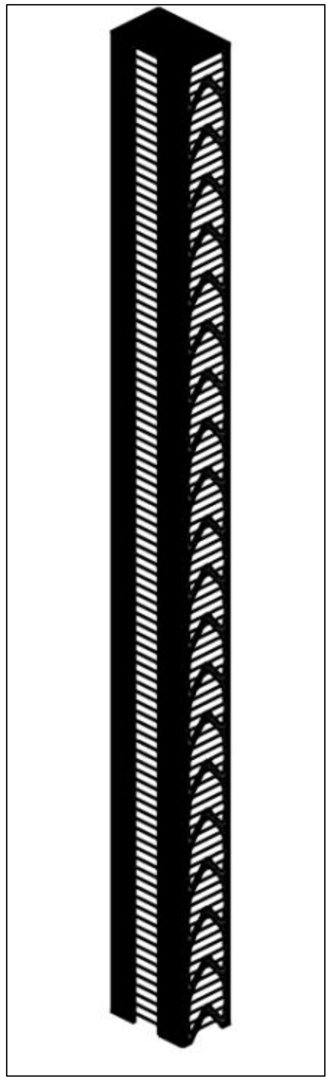


Figura 3-18: Distribución óptima de material para tres combinaciones de carga.

Es posible observar que se tiende a acumular material en forma de vigas tipo *chevron* únicamente en el lado que contrarresta la acción del viento en dirección x. Esto es debido a que el punto óptimo se ubica con una predominancia para dicho escenario de carga. Además, también es posible notar que el ponderador perteneciente a la combinación estática 1.2D + 1.6L es nulo, lo cual valida la total predominancia de las cargas inducidas por el viento frente a las cargas de naturaleza gravitacional.

En casos en donde la restricción de material de manufactura es tal que se busca maximizar el desempeño de la estructura sin incurrir en mayores costos por motivos de material, también se puede investigar la influencia que tiene la geometría del núcleo y ubicación de este.

De esta forma, se analiza el mismo escenario estudiado en la presente Sección, pero considerando una rotación del núcleo en 90° de forma tal que el eje fuerte de este coincida con el eje débil de la fachada, además de una variación en su porcentaje de aporte a la resistencia al igual que en el ejemplo de la Sección 3.1.2. Los valores de la función objetivo para las situaciones descritas se muestran en la Figura 3-19.

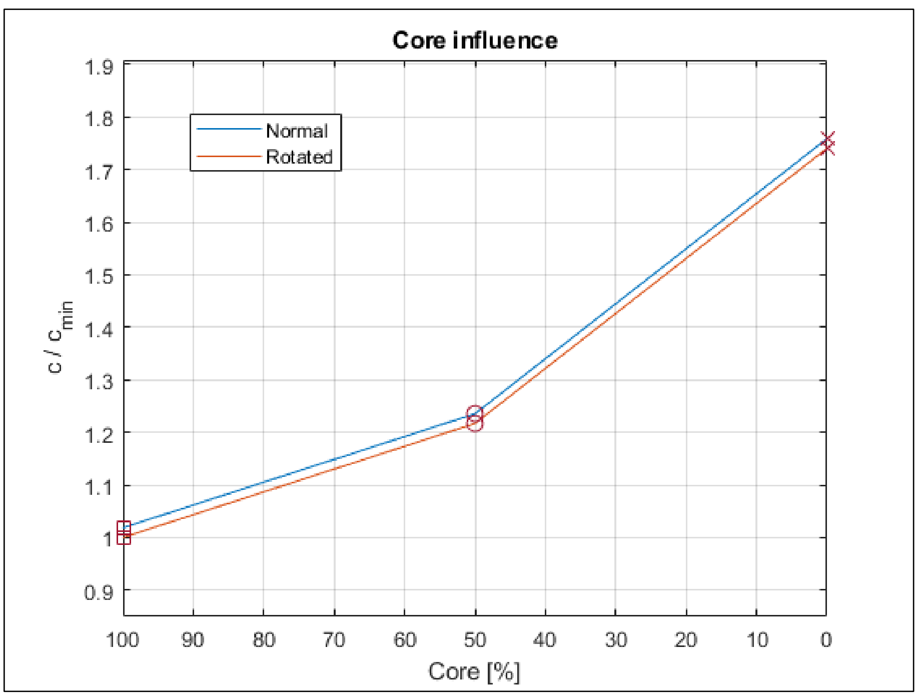


Figura 3-19: Influencia de la posición y aporte del núcleo.

Es posible observar que una rotación del núcleo disminuirá el valor de la función objetivo, es decir, maximizará la rigidez y minimizará los desplazamientos sufridos por la estructura. No obstante, dicha variación es menor a otras situaciones estudiadas, tales como cambios en las restricciones de repetición de patrones y simetría. Asimismo, se mantiene el comportamiento observado en la Sección 3.2.1, en donde la incorporación del núcleo genera un impacto mucho mayor en el desempeño del edificio.

4. CONCLUSIONES

4.1. Resumen

La presente investigación explora la optimización topológica basada en la densidad para la construcción de sistemas estructurales de gran altura sujetos a cargas de viento. En este escenario, dentro de las novedades del trabajo se encuentran: el análisis estructural tridimensional de la estructura mediante elementos tipo *Shell*, componente que es fundamental dadas las interacciones que ocurren entre los diferentes planos estructurales del edificio; además de incluir restricciones de fabricación que deben ser consideradas al momento de poder diseñar una obra que sea construible; junto con el cálculo de las cargas y sus combinaciones según la norma ASCE 7-16; en donde adicionalmente se explora la importancia del núcleo y su geometría en este tipo de estructuras.

Dentro de las conclusiones generadas a partir del trabajo realizado se tiene la inapelable necesidad de sistemas de arriostramiento laterales para contrarrestar las demandas inducidas por las cargas de viento, los cuales en forma predominante son sistemas tipo *chevron* para casos en que se posee suficiente material de manufactura para generarlos, y sistemas tipo ‘M’ para casos aquellos casos en que no es posible realizarlos. Además, se valida la importancia en la existencia del núcleo como parte fundamental de este tipo de estructuras, dado que estos son capaces de contrarrestar las demandas laterales de forma cuantiosa.

Dentro de este último ámbito, también se logró validar que una simple rotación del núcleo según la relación eje fuerte – eje débil entre este y la fachada logra una mejoría en menor medida del desempeño de la estructura, pero con la ventaja de no incurrir en mayor material de manufactura.

Finalmente, se desprende que las restricciones de manufactura tales como forzar la repetición de patrones para el material de manufactura incurren en un peor comportamiento del edificio para los escenarios analizados, sin embargo, estos son necesarios desde un punto de vista constructivo.

4.2. Posibles extensiones en trabajo futuro

Las características inherentes de los edificios de gran altura involucran construcciones subterráneas también de gran envergadura. El gran volumen de suelo que interactúa con la estructura contribuye a la respuesta dinámica que ambos (estructura y subestructura) tendrán. En consecuencia, un campo de extensión al presente trabajo puede ser considerar dicha interacción, la cual está ligada en una fuerte correlación con la ingeniería geotécnica.

Respecto al análisis estructural realizado, también se puede incluir la componente no-lineal, debido a que para efectos de la presente investigación se consideró una estructura que se comporta en el rango lineal elástico.

En la modelación del edificio se conectó el núcleo con la fachada a través de losas. Es común que además de estas se utilicen vigas de acople y *outriggers* entre ambas componentes estructurales, por lo que otro posible campo de extensión sería su incorporación y medir su aporte en el *compliance* obtenido.

Finalmente, no se incluyó el efecto de las cargas de tipo sísmicas, por lo que es importante también comprender cómo sería una estructura óptima ante la acción de terremotos. Para esto es necesario analizar la direccionalidad de dichas cargas. Además, al momento de modificar el período fundamental de la estructura durante su proceso de optimización, se modificaría también el comportamiento del edificio bajo este tipo de cargas.

BIBLIOGRAFÍA

Ali, M. (2001). *Art of the skyscraper: the genius of Fazlur Khan*. Rizzoli International Publications.

Ali, M. & Moon, S. (2007). *Structural developments in tall buildings: current trends and future prospects*. Architectural Science Review 50(3), 205-223.

Almeida, S., Paulino, G. & Silva, E. (2009). *A simple and effective inverse projection scheme for void distribution control in topology optimization*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 39 (4), 359-371.

Almeida, S., Paulino, G. & Silva, E. (2010). *Layout and material gradation in topology optimization of functionally graded structures: a globallocal approach*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 42(6), 855-858.

Amir, O. & Sigmund, O. (2013*). Reinforcement layout design for concrete structures based on continuum damage and truss topology optimization*. Structural and Multidisciplinary Optimization 47(2), 157-174.

Arora, J.S. (2017). *Introduction to optimum design: Chapter 18 – Multi-objective optimum design concepts and methods*. 4th edition, Academic Press.

ASCE. (2017). *Minimum design loads and associated criteria for buildings and other structures*. American Society of Civil Engineers.

Ascher, K. (2011). *The heights: Anatomy of a skyscraper*. Penguin Press, London, UK.

Beguini, L. Beguini, A., Katz, N., Baker, W. & Paulino, G. (2014). *Connecting architecture and engineering through structural topology optimization*. Engineering Structures 59, 716-726.

Bendsøe, M. (1989). *Optimal shape design as a material distribution problem*. Structural Optimization 1(4), 193-202.

Bendsøe, M. (1995). *Optimization of structural topology, shape and material*. Springer.

Bendsøe, M. & Sigmund, O. (2002). *Topology optimization: Theory, methods and applications*. 2nd edition. Springer.

Bobby, S., Spence, S., Bernardini, E. & Kareem, A. (2014). *Performance-based topology optimization for wind-excited tall buildings: A framework*. Engineering Structures 74, 242-255.

Bourdin, B. (2001). *Filters in topology optimization*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 50(9), 2143-2158.

Bruns, T. & Tortorelli, D. (2001). *Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms*. Comput Methods Appl Mech Eng 190(26-27), 3443-3459.

Chopra, A. (2011). *Dynamics of structures: Theory and applications to earthquake engineering*. 4th edition. Pearson.

Cook, R., Malkus, D., Plesha, M. & Witt, R. (2002). *Concepts and applications of finite element analysis*. 4th edition, Wiley.

Damhaug, A., Magne Mathisen, K. & Okstad, K.M. (1993). *The use of sparse matrix methods in finite element codes for structural mechanics applications*. Computing Systems in Engineering 4(4), 355-362.

Díaz, A. & Sigmund, O. (1995) *Checkerboard patterns in layout optimization.* Structural Optimization 10(1), 40-45.

Felippa, C. & Alexander, S. (1992). *Membrane triangles with corner drilling freedoms III. Implementation and performance evolution*. Finite Elements Anal. Des. 12, 203-239.

Houghton, E. & Carruthers, N. (1976). *Wind forces on buildings and structures: An introduction*. Wiley.

Hughes, T. (2000). *The finite element method: Linear static and dynamic finite element analysis.* 1st edition.

Isyumov, N., Fediw, A., Colaco, J. & Banavalkar, P. (1992). *Performance of a tall building under wind action*. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics 42(1-3), 1053-1064.

Kohn, R. & Strang, G. (1986). *Optimal design and relaxation of variational problems: I*. Communications on Pure and Applied Mathematics 39 (1), 113-137.

Kohn, R. & Strang, G. (1986). *Optimal design and relaxation of variational problems: II*. Communications on Pure and Applied Mathematics 39 (2), 139-182.

Kohn, R. & Strang, G. (1986). *Optimal design and relaxation of variational problems: III*. Communications on Pure and Applied Mathematics 39 (3), 353-377.

Liu, J., Parks, G. & Clarkson, P. (2005). *Topology/shape optimisation of axisymmetric continuum structures: A metamorphic development approach*. Structural and Multidisciplinary Optimization 29 (1), 73-83.

Macneal, R. & Harder, R. (1985). *A proposed standard set of problems to test finite element accuracy*. Finite Element Design (1), 3-20.

Matsui, K. & Terada, K. (2004). *Continuous approximation of material distribution for topology optimization*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 59(14), 1925-1944.

Mijar, A., Swan, C., Arora, J. & Kosaka, I. (1998). *Continuum topology optimization for concept design of frame bracing systems*. Journal of Structural Engineering 124(5), 541-550.

Ministerio de Vivienda y Urbanismo. (2011). *Requisitos de diseño y cálculo para el hormigón armado*. Decreto Supremo N°60.

Oñate, E. (2009). *Structural analysis with the finite element method. Linear statics, volume 1: Basis and solids.*

Oñate, E. (2013). *Structural analysis with the finite element method. Linear statics, volume 2: Beams, plates and shells.*

Pareto, V. (1906). *Manual of political economy*.

Petersson, J. & Sigmund, O. (1998). *Slope constrained topology optimization.* International Journal for Numerical Methods in Engineering 41 (8), 1417-1434.

Rapp, B. (2017). *Microfluidics: Modelling, mechanics and mathematics*. Elsevier.

Rosinha, I., Gernaey, K., Woodley, J. & Khühne, U. (2015). *Topology optimization for biocatalytic microreactor configurations*. Elsevier.

Sangtarash, H., Arab, H., Sohrabi, M. & Ghasemi, M. (2020). *A high-performance four-node fat shell element with drilling degrees of freedom.* Springer.

Sarkisian, M. (2016). *Designing tall buildings: Structure as architecture*. 2nd edition, Routledge, New York, USA.

Sigmund, O. (2001). *A 99-line topology optimization code written in Matlab*. Struct Multidisc Optim 21, 120-127.

Sigmund, O. (2007). *Morphology-based black and white filters for topology optimization*. Structural and Multidisciplinary Optimization 33(4-5), 401-424.

Sigmund, O. & Maute, K. (2012). *Sensitivity filtering from a continuum mechanics perspective*. Structural and Multidisciplinary Optimization 46(4), 471-475.

Sigmund, O. & Maute, K. (2013). *Topology optimization approaches*. Structural and Multidisciplinary Optimization 48(6), 1031-1055.

Stafford, B. & Coull, A. (1991). *Tall building structures: Analysis and design*, Wiley-Interscience, Hoboken, USA.

Svanberg, K. (1987). *The method of moving asymptotes: A new method for structural optimization*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 24 (2), 359-373.

Talischi, C., Paulino, G., Pereira, A. & Menezes, I. (2012). *PolyTop: a Matlab implementation of a general topology optimization framework using unstructured polygonal finite element meshes*. Struct Multidisc Optim (45), 329-357.

Tang, J., Xie, Y. & Felicetti, P. (2012). *Topology optimization of building structures considering wind loading*. Applied Mechanics and Materials, 405-408.

Tovar, A. & Khandelwal, K. (2012). *Topology optimization for minimum compliance using a control strategy*. Engineering Structures (48), 674-682.

Vassilevski, Y., Olshanskii, M., Simakov, S., Kolobov, A. & Danilov, A. (2020). *Personalized computational hemodynamics*. Elsevier.

Wang, F., Lazarov, B. & Sigmund, O. (2011). *On projection methods, convergence and robust formulations in topology optimization*. Structural and Multidisciplinary Optimization 43(6), 767-784.

Zegard, T. & Paulino, G. (2013). *Truss layout optimization within a continuum*. Structural and Multidisciplinary Optimization 48(1), 1-16.

Zegard, T. & Paulino, G. (2016). *Bridging topology optimization and additive manufacturing*. Structural and Multidisciplinary Optimization 53(1), 175-192.

Zegard, T. & Salinas, D. (2020). *IEG3110 – Elementos finitos lineales*. Pontificia Universidad Católica de Chile.

Zienkiewicz, O., Taylor, R. & Zhu, J. (2005). *The finite element method: Its basis and fundamentals*. 6th edition, Elsevier.

Zienkiewicz, O., Taylor, R. & Fox, D. (2013). *The finite element method for solid and structural mechanics*. 7th edition, Elsevier.

A N E X O S

ANEXO A: PRE-DIMENSIONAMIENTO

Para el pre-dimensionamiento de los elementos estructurales se considera únicamente la influencia de la carga axial en ellos. Esto se realizó mediante lo estipulado en el artículo 21.9.5.3 del Decreto N°60 (Ministerio de Vivienda y Urbanismo, 2011), en donde se limita la carga axial máxima sufrida por los elementos según:

$$P_u \leq 0.35\ f_c' A_g \tag{A-1}$$

Las iteraciones de diseño fueron realizadas en el *software* comercial ETABS, cuyo modelo se muestra en la Figura A-1.

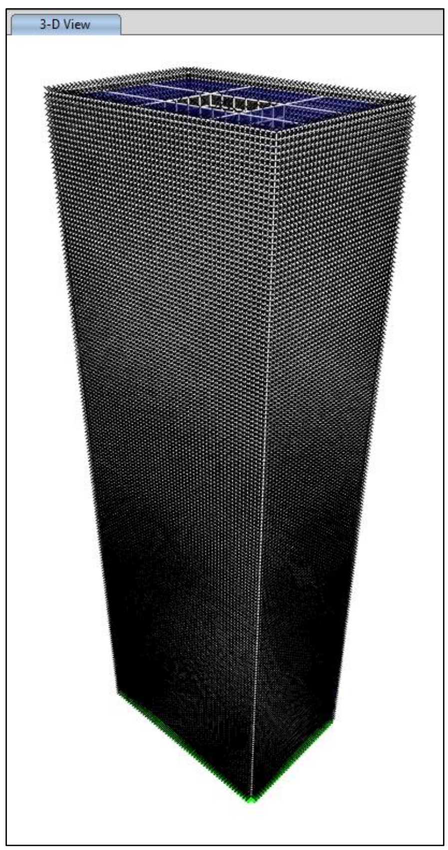


Figura A-1: Modelo de ETABS.

Es importante mencionar que para efectos del pre-dimensionamiento se utilizó una aproximación basada en la inclusión del núcleo en el diseño.

ANEXO B: COMPARACIÓN DE DEFORMACIONES ENTRE MODELOS DE ETABS Y MATLAB

Con el objetivo de validar la correcta implementación del modelo de Matlab®, este se compara con el utilizado en ETABS mediante sus deformaciones máximas para determinados casos de carga. En particular, estos casos serán analizados con la combinación $1.2D + L + W$, en donde W dependerá de la direccionalidad de viento empleada. En este sentido, el valor de las cargas utilizadas es arbitrario dado que es con fin meramente comparativo.

Es importante mencionar que al momento de presentar las deformaciones de ambos modelos se utilizará un factor de amplificación de desplazamientos, con un objetivo únicamente de percepción visual de los mismos. De esta forma, la posición original de la estructura se muestra en color azul, mientras que su deformada en color rojo. Para el caso de las cargas, estas se simbolizan de color azul en sus nodos de aplicación.

En cuanto a los resultados, se tiene que la diferencia entre las deformaciones de las losas en dirección gravitacional deriva a raíz de la discretización de cada modelo. Por un lado, en Matlab® se discretizó un con mallado más grueso, y, por otro lado, en ETABS se utilizó una malla más fina. Esta última genera un comportamiento más flexible de la estructura, obteniéndose así deformaciones ligeramente mayores para este tipo de elementos.

Tabla B-1: Comparación de resultados entre ETABS y Matlab®.

Caso (#)	Deformación Lateral Máxima ETABS (m)	Deformación Lateral Máxima Matlab® (m)	% Error (%)	Deformación Vertical Máxima ETABS (m)	Deformación Vertical Máxima Matlab® (m)	% Error (%)
1	0.06506	0.06423	1.27	0.01514	0.01488	1.75
2	0.02432	0.02385	1.93	0.01398	0.01394	0.31
3	0.05451	0.05373	1.43	0.01546	0.01526	1.32
4	0.27120	0.26832	1.06	0.03612	0.03665	1.46
5	0.02681	0.02668	0.50	0.01261	0.01293	2.47

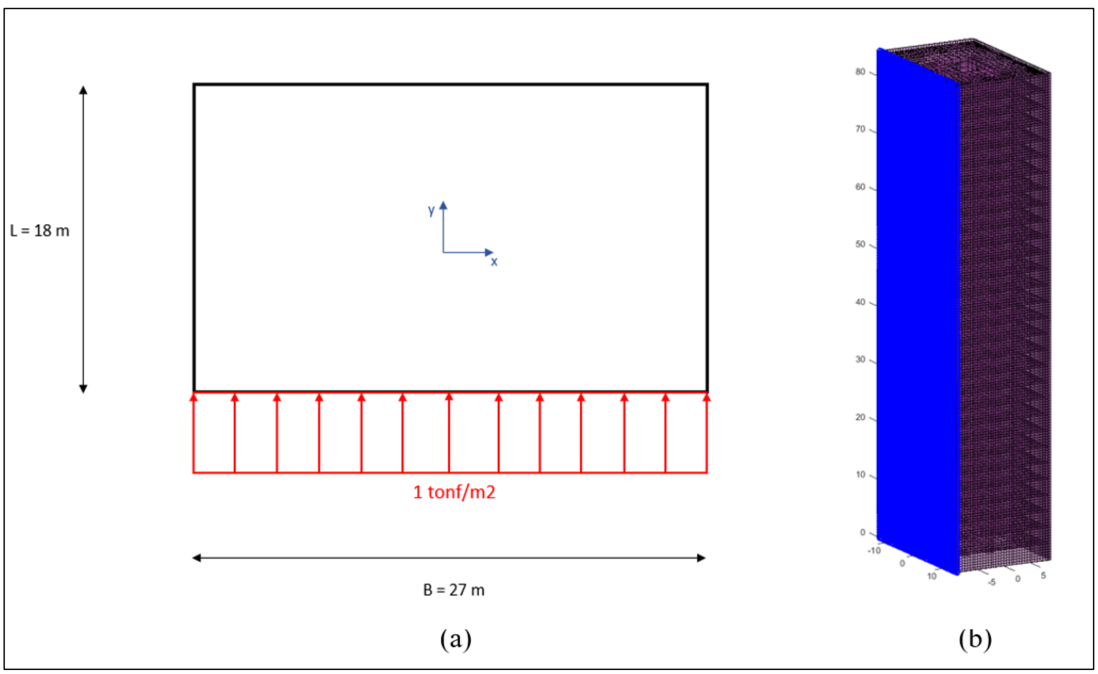


Figura B-1: Caso #1: Cargas. (a) Vista en planta; (b) Vista 3D.

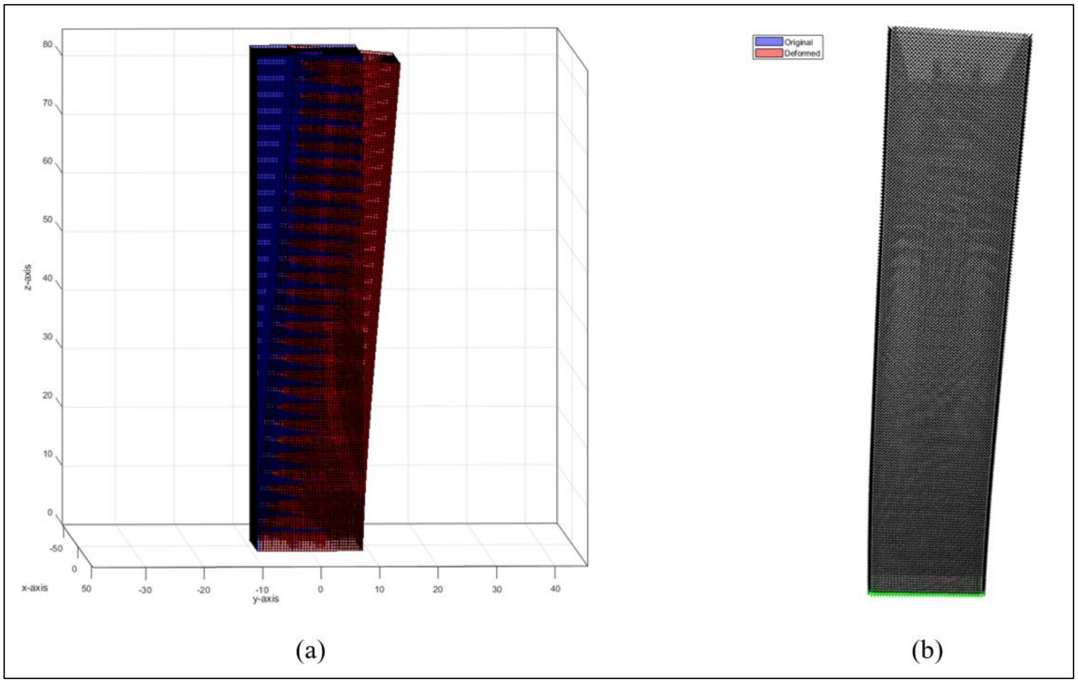


Figura B-2: Caso #1: Deformaciones. (a) Matlab®; (b) ETABS.

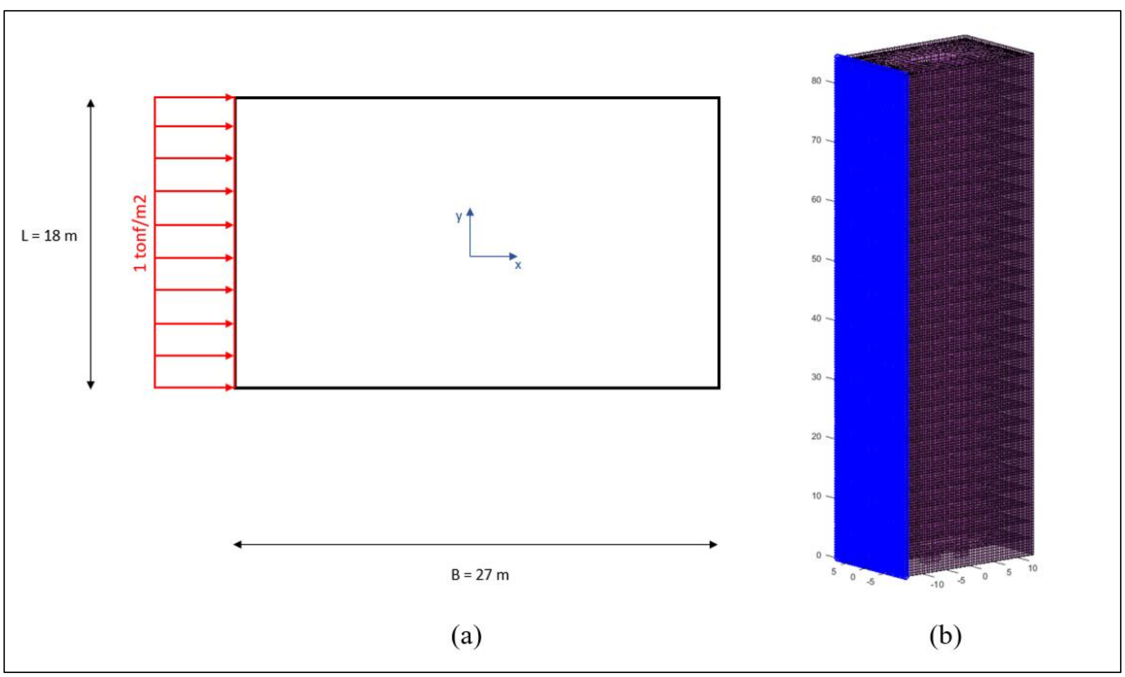


Figura B-3: Caso #2: Cargas. (a) Vista en planta; (b) Vista 3D.

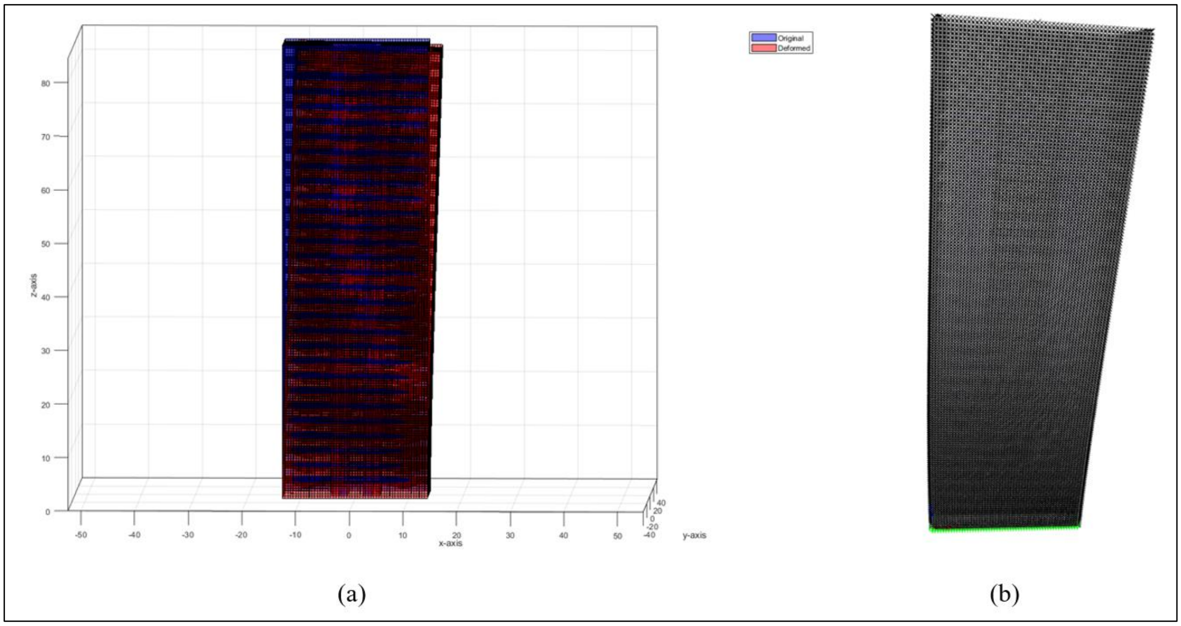


Figura B-4: Caso #2: Deformaciones. (a) Matlab®; (b) ETABS.

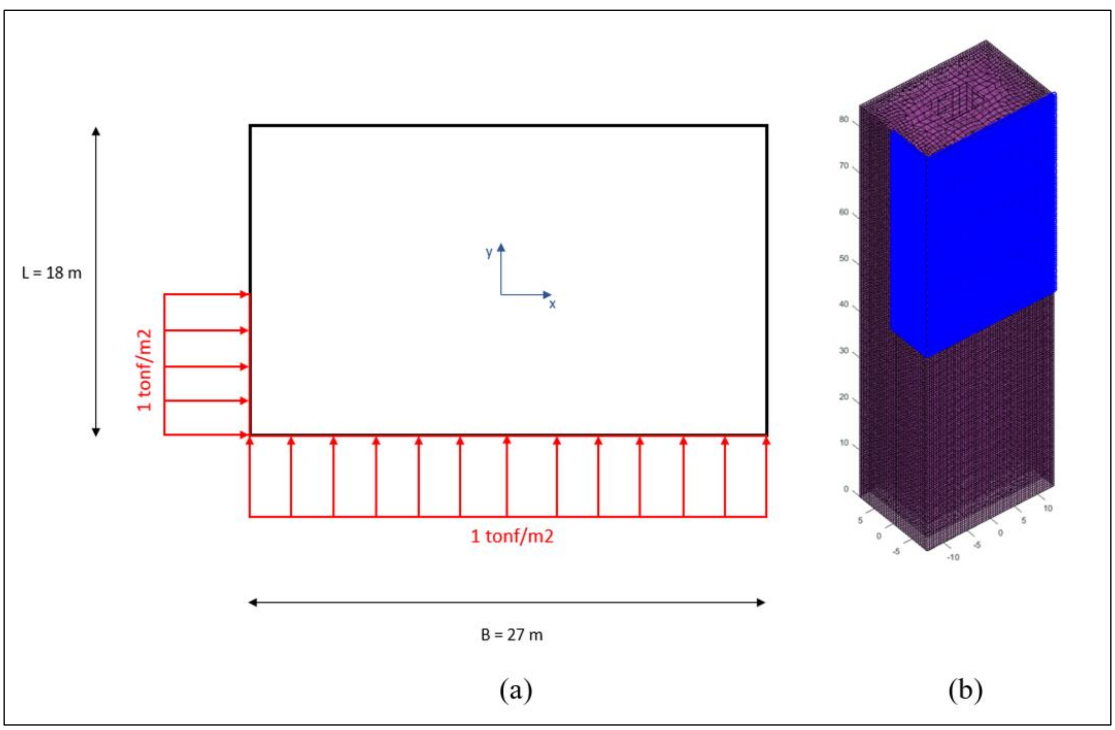
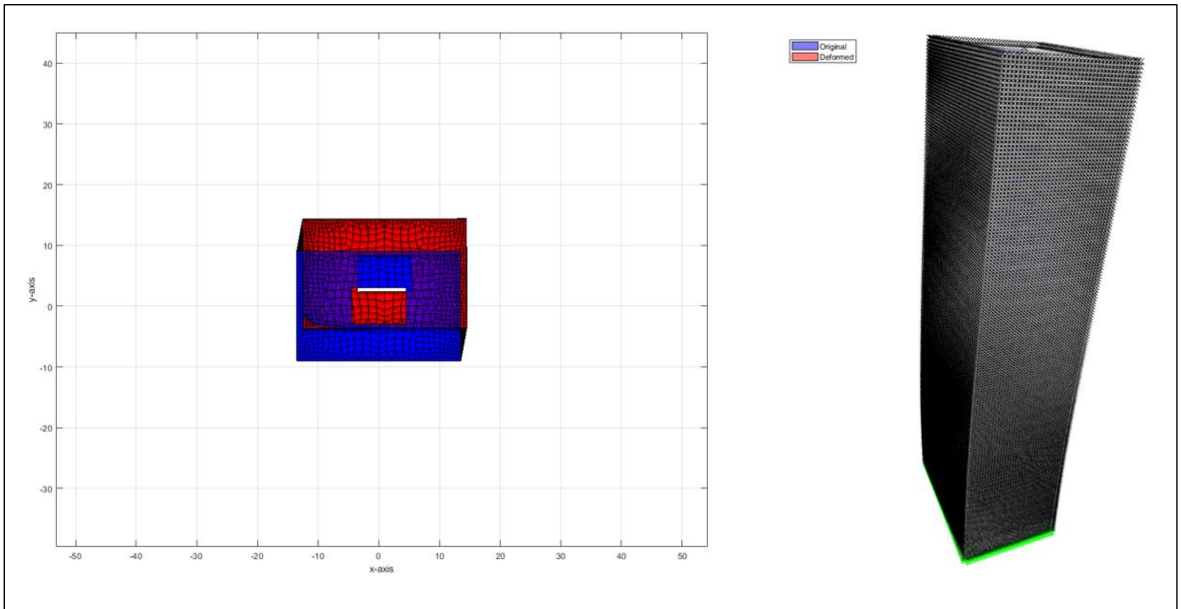


Figura B-5: Caso #3: Cargas. (a) Vista en planta; (b) Vista 3D.



(a) (b)

Figura B-6: Caso #3: Deformaciones. (a) Matlab®; (b) ETABS.

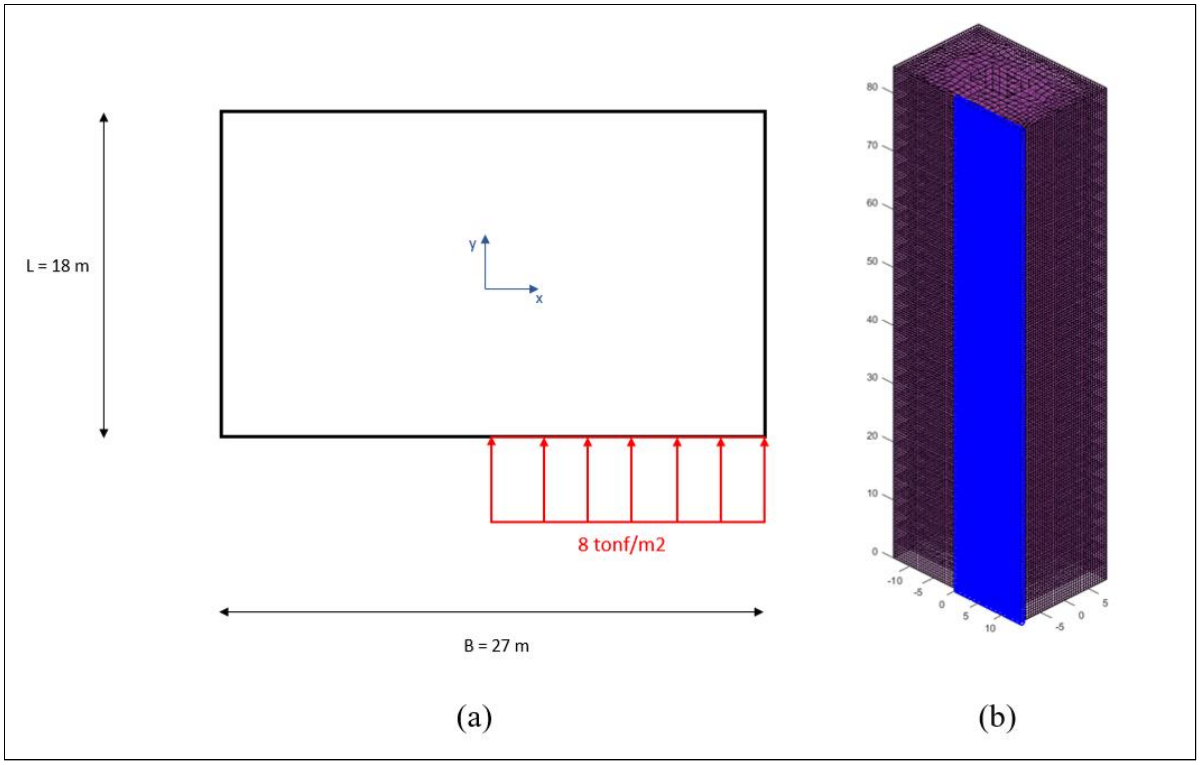


Figura B-7: Caso #4: Cargas. (a) Vista en planta; (b) Vista 3D.

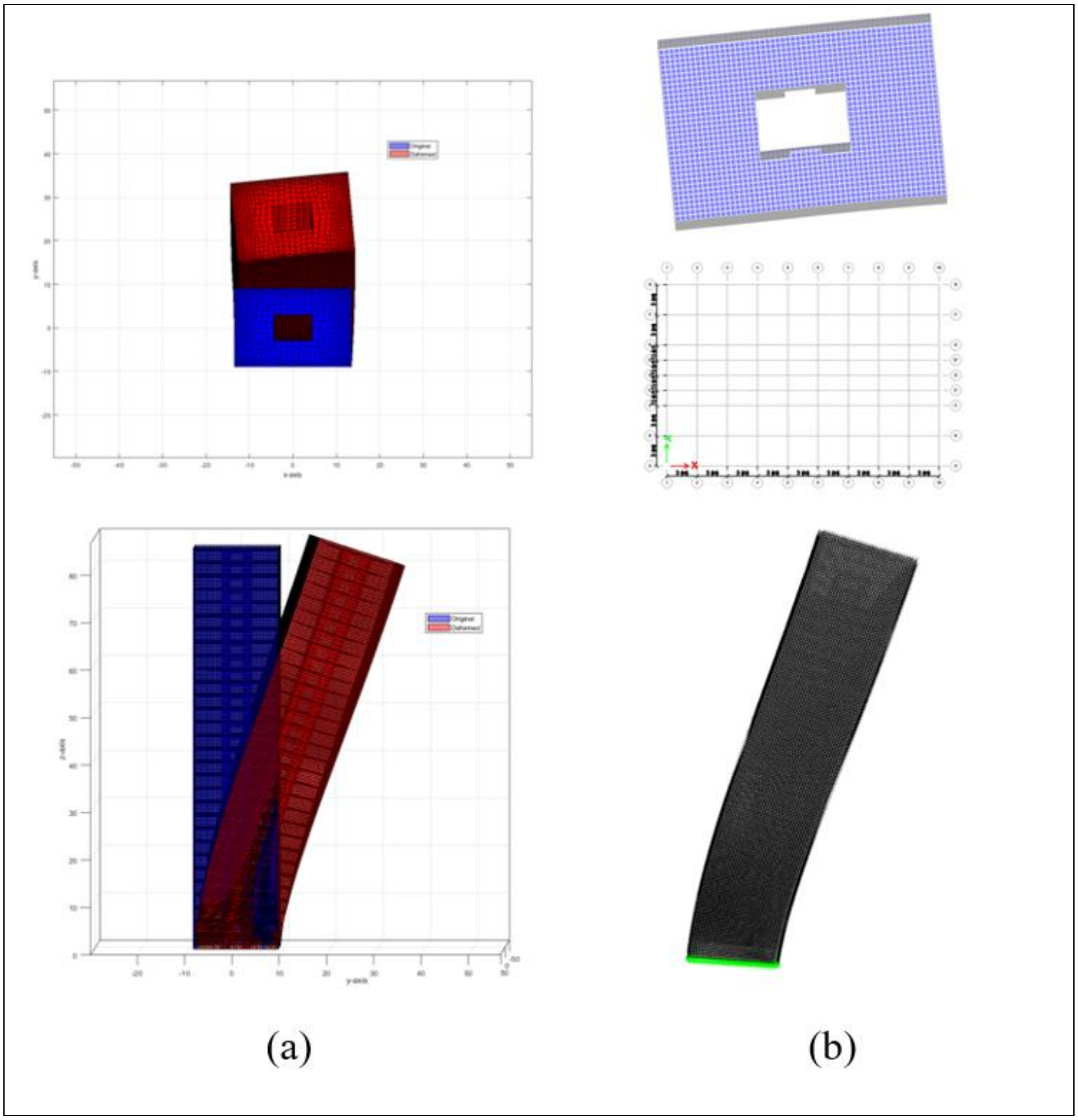


Figura B-8: Caso #4: Deformaciones. (a) Matlab®; (b) ETABS.

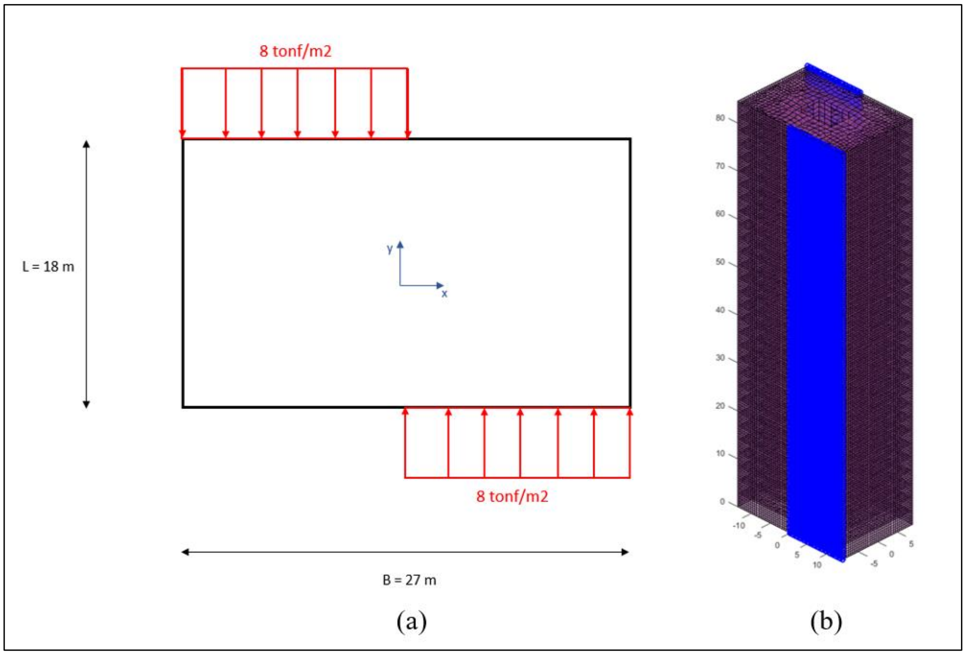


Figura B-9: Caso #5: Cargas. (a) Vista en planta; (b) Vista 3D.

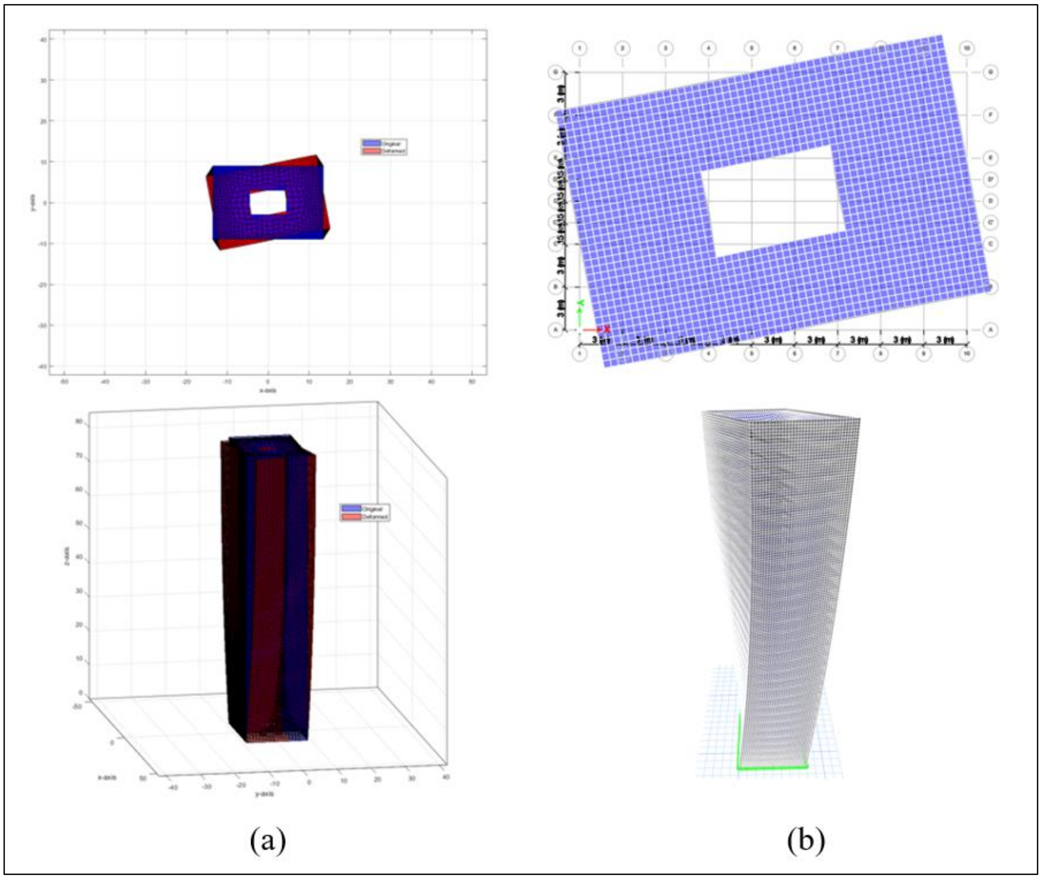


Figura B-10: Caso #5: Deformaciones. (a) Matlab®; (b) ETABS.

ANEXO C: APROXIMACIÓN DE VECTORES DE RITZ

La aproximación lineal utilizada para el primer vector de Ritz del edificio de 30 pisos implementado en Matlab® se muestra en la Figura C-1. En ella, el elemento azul representa la estructura original, mientras que la roja a la deformada siguiendo dicha aproximación modal para cada lado del edificio.

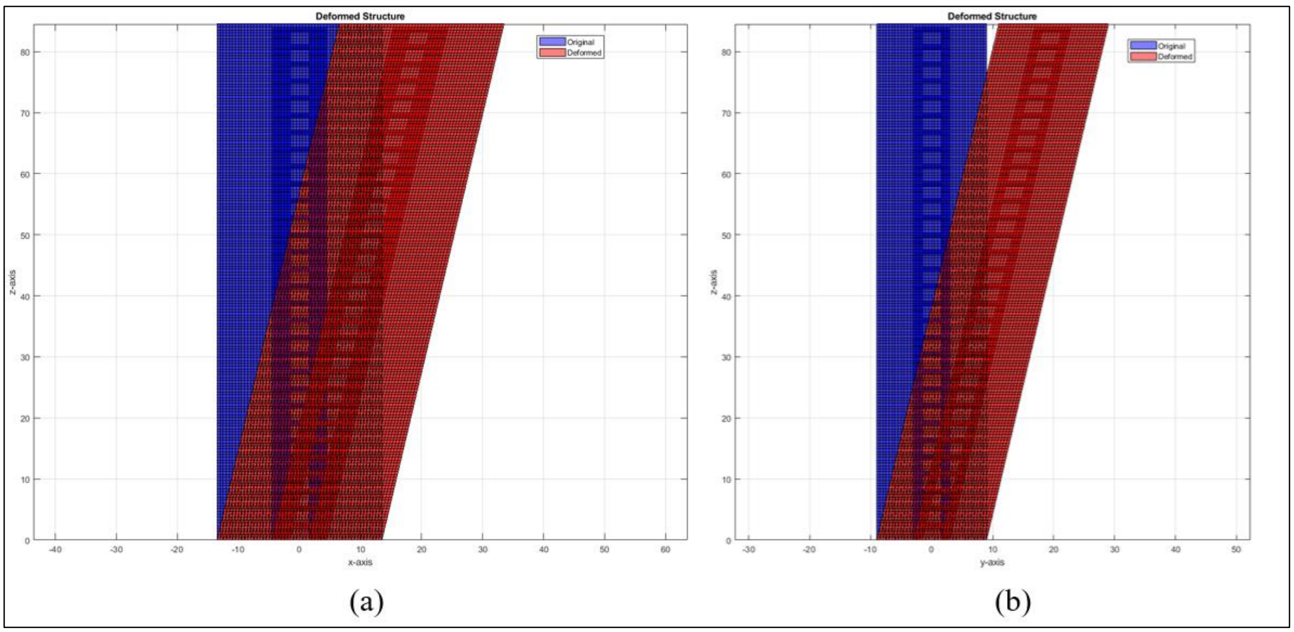


Figura C-1: Aproximación lineal del primer modo mediante vectores de Ritz.

(a) Dirección x; (b) Dirección y.