

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE ESCUELA DE INGENIERIA

ESTUDIO PARAMÉTRICO DEL MODELO DE MAVROEIDIS Y PAPAGEORGIOU PARA LA SIMULACIÓN DE REGISTROS SÍSMICOS IMPULSIVOS.

FELIPE ALONSO SANCHEZ STUARDO

Tesis para optar al grado de Magister en Ciencias de la Ingeniería

Profesor Supervisor:

DIEGO LOPEZ-GARCÍA

Santiago de Chile, Octubre, 2016 © 2016, Felipe Alonso Sánchez Stuardo



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE ESCUELA DE INGENIERIA

ESTUDIO PARAMÉTRICO DEL MODELO DE MAVROEIDIS Y PAPAGEORGIOU PARA LA SIMULACIÓN DE REGISTROS SÍSMICOS IMPULSIVOS.

FELIPE ALONSO SANCHEZ STUARDO

Tesis presentada a la Comisión integrada por los profesores:

DIEGO LOPEZ-GARCÍA

JORGE CREMPIEN

ARTURO CASTILLO

YADRAN ETEROVIC

Para completar las exigencias del grado de Magister en ciencias de la Ingeniería

Santiago de Chile, Octubre, 2016

A mis Padres.

A mi familia y a todos quienes me apoyaron en este camino.

AGRADECIMIENTOS

Expreso mi agradecimiento, en primer lugar, a la Pontificia Universidad Católica de Chile, en particular al Departamento de Ingeniería Estructural y Geotécnica por darme la oportunidad de desarrollar mis intereses académicos y adquirir nuevos conocimientos que sin duda me serán de gran utilidad en mi vida profesional.

Especial agradecimiento al profesor Diego López-García, por su tiempo y su excelente disposición en todo momento para aclarar dudas, inquietudes y guiarme no solo en el proceso de titulación, sino que en toda mi permanencia en el postgrado.

INDICE GENERAL

DED	ICAT	ГОRIAii
AGR	ADE	CIMIENTOSiii
INDI	CE I	DE TABLASviii
INDI	CE I	DE FIGURASix
RES	UME	N xv
ABS	TRA	CTxvi
1.	INT	RODUCCIÓN1
2.	FOR	2 RMULACIÓN DEL PROBLEMA
	2.1	Motivación
	2.2	Características de los sismos impulsivos
	2.3	Hipótesis de la Tesis
	2.4	Objetivos de la tesis
3.	VIB	RACIONES 12
	3.1	Perturbaciones del medio
		3.1.1 Ondas
		3.1.2 Ondas Mecánicas
		3.1.3 Longitud de Onda 14
		3.1.4 Oscilación
		3.1.5 Elongación
		3.1.6 Amplitud
		3.1.7 Frecuencia
		3.1.8 Periodo
		3.1.9 Velocidad de Propagación

	3.2	Vibraciones Determinísticas y Aleatorias	. 16	
		3.2.1 Análisis de señales determinísticas	. 17	
		3.2.2 Análisis de señales estocásticas	. 22	
		3.2.3 Importancia del análisis espectral	. 24	
		3.2.4 Valor Medio Cuadrático	. 25	
		3.2.5 Densidad Probabilística	. 26	
		3.2.6 Función de Correlación	. 27	
		3.2.7 Función de densidad de potencia espectral	. 27	
		3.2.8 Utilidad de la Función de densidad de potencia espectral	. 28	
		3.2.9 Coherencia e Incoherencia de Señales	. 30	
4.	METODOLOGÍA Y CONSIDERACIONES PARA LA MODELACIÓN			
	DE	SISMOS IMPULSIVOS	31	
	4.1	Descripción de la modelación de sismos impulsivos	. 31	
		4.1.1 Duración	. 32	
		4.1.2 Frecuencia	. 32	
		4.1.3 Energía	. 33	
		4.1.4 Intensidad	. 34	
	4.2	Excitaciones de Fuente Lejana	. 35	
	4.3	Excitaciones de Fuente Cercana (Sismo Impulsivo)	. 38	
	4.4	Tipos de aleatoriedad	. 39	
		4.4.1 Distribuciones Continuas	. 39	
		4.4.2 Distribución Normal	40	
		4.4.3 La Distribución Uniforme	42	
5.	FOI	RMULACIÓN DE SISMOS IMPULSIVOS SEGÚN MAVROEIDIS		
	ΥP	APAGEORGIOU	45	
	5.1	Modelación de Mavroeidis y Papageorgiou	. 45	
	5.2	Generación de un registro sísmico impulsivo sintético	. 52	
	5.3	Metodología para la obtención de sismos impulsivos según Mavroeidis		
		y Papageorgiou	. 52	

	5.4	Parámetros adoptados para la modelación de sismos impulsivos de	:
		Mavroeidis y Papageorgiou	56
		5.4.1 Definición de parámetros	56
		5.4.2 Criterio y valores adoptados	57
		5.4.3 Parámetros para la respuesta lineal y no lineal	59
	5.5	Procesamiento computacional de datos e iteraciones	60
	5.6	Caracterización de resultados	62
6.	RES	SULTADOS OBTENIDOS	65
	6.1	Espectros de Pseudo-Aceleración y Factor de Desplazamiento	
		Inelástico	65
		6.1.1 Pulso Sinusoidal Completo	66
		6.1.2 Pulso Media Sinusoide	84
	6.2	Gráficos de valores medios	102
		6.2.1 Respuesta Elástica	102
		6.2.2 Respuesta Inelástica	105
7.	ANALISIS DE RESULTADOS 1		118
	7.1	Análisis de valores extremos	118
		7.1.1 Pulso Sinusoidal Completo, aleatoriedad leve (Figuras 6-1	
		a 6-10)	118
		7.1.2 Pulso Sinusoidal Completo, aleatoriedad alta (Figuras 6-11	
		a 6-18)	120
		7.1.3 Pulso Media Sinusoide, aleatoriedad leve (Figuras 6-19	
		a 6-28)	121
		7.1.4 Pulso Media Sinusoide, aleatoriedad alta (Figuras 6-29	
		a 6-36)	121
	7.2	Análisis de valores medios	122
		7.2.1 Respuesta Elástica	122
		7.2.2 Respuesta Inelástica	123
8.	CO	NCLUSIONES	125
	8.1	Consideraciones Generales	125

8	8.2	Resumen Final	
REFEI	REN	ICIAS	
BIBLI	OG	RAFÍA	

INDICE DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1-1: Sismos impulsivos medidos alrededor del mundo. Parte 1	9
Tabla 1-2: Sismos impulsivos medidos alrededor del mundo. Parte 2	9
Tabla 4-1: Resumen Iteraciones	61

INDICE DE FIGURAS

Figura 1-1: Modelación de un sistema estructural típico
Figura 1-2: Esquema del método "Specific Barrier Model". (Papageorgiou and
Aki 1983)
Figura 1-3: Fenómeno de subducción (Fundamental Concepts of Earthquake
Engineering.Roberto Villaverde.2009)7
Figura 2-1: Parámetros de una onda mecánica14
Figura 3-1: Clasificación de las señales vibratorias17
Figura 3-2: Señales vibratorias determinísticas
Figura 4-1: Cálculo de la Intensidad de Arias (Bozorgnia and Campbell 2004)35
Figura 4-2: Modelos Kanai-Tajimi y Clough-Penzien
Figura 4-3: Función de Densidad Normal
Figura 4-4: Función de densidad Uniforme
Figura 4-5: Función distribución de probabilidades
Figura 5-1: Pulsos de velocidad. (Mavroeidis y Papageorgiou,2003) 46
Figura 5-2: Variaciones de v y γ . (Mavroeidis y Papageorgiou,2003)
Figura 5-3: Variaciones de v y γ . (Mavroeidis y Papageorgiou,2003)
Figura 5-4: Parámetros obtenidos para caracterizar diversos sismos impulsivos.
Mavroeidis y Papageorgiou (Mavroeidis y Papageorgiou,2003) 51
Figura 5-5: Registro sintético de alta frecuencia.(Mavroeidis y Papageorgiou,2003) 54
Figura 5-6: Registro sintético de baja frecuencia.(Mavroeidis y Papageorgiou,2003) 55

Figura 5-7: Registro sintético impulsivo resultante. (Mavroeidis y Papageorgiou, 2003).55

Figura 5-8: Pulso de velocidad de medio seno. Primera fila es la componente
Incoherente, segunda fila es la componente Coherente y la tercera fila es el
registro de velocidad Sintético Resultante58
Figura 5-9: Pulso de velocidad seno completo. Primera fila es la componente
Incoherente, segunda fila es la componente Coherente y la tercera fila es el
registro de velocidad Sintético Resultante58
Figura 5-10: Espectro de Pseudo-Aceleración
Figura 5-11: Factor de desplazamiento inelástico
Figura 6-1: Componente coherente determinística
Figura 6-2: Componente coherente determinística: factor de desplazamiento
inelástico R = 3 (arriba) y R = 8 (abajo)67
Figura 6-3: Aleatoriedad leve en parámetro y de la componente coherente
Figura 6-4: Aleatoriedad leve parámetro \mathbf{y} de la componente coherente : factor de
desplazamiento inelástico, R = 3 (arriba) y R = 8 (abajo) 69
Figura 6-5: Aleatoriedad leve en parámetro v: de la componente coherente70
Figura 6-6: Aleatoriedad leve parámetro ${f v}$ de la componente coherente: factor de
desplazamiento inelástico, R = 3 (arriba) y R = 8 (abajo)71
Figura 6-7: Aleatoriedad leve en parámetro To de la componente coherente
Figura 6-8: Aleatoriedad leve parámetro To de la componente coherente: factor de
desplazamiento inelástico, R = 3 (arriba) y R = 8 (abajo)73
Figura 6-9: Aleatoriedad leve en parámetro Tp de la componente coherente
Figura 6-10: Aleatoriedad leve parámetro Tp de la componente coherente: factor de
desplazamiento inelástico, R = 3 (arriba) y R = 8 (abajo)75
Figura 6-11: Aleatoriedad alta en parámetro y de la componente coherente

Х

Figura 6-12: Aleatoriedad alta parámetro y de la componente coherente: factor de	
desplazamiento inelástico R = 3 (arriba) y R = 8 (abajo)	77
Figura 6-13: Aleatoriedad alta en parámetro v de la componente coherente	78
Figura 6-14: Aleatoriedad alta parámetro v de la componente coherente: factor de	
desplazamiento inelástico, R = 3 (arriba) y R = 8 (abajo)	79
Figura 6-15: Aleatoriedad alta en parámetro To de la componente coherente8	30
Figura 6-16: Aleatoriedad alta parámetro To de la componente coherente: factor de	
desplazamiento inelástico, R = 3 (arriba) y R = 8 (abajo)	31
Figura 6-17: Aleatoriedad alta en parámetro Tp de la componente coherente	32
Figura 6-18: Aleatoriedad alta parámetro Tp de la componente coherente: factor de	
desplazamiento inelástico, R = 3 (arriba) y R = 8 (abajo)8	33
Figura 6-19: Componente coherente determinística	34
Figura 6-20: Componente coherente determinística: factor de desplazamiento	
inelástico, R = 3 (arriba) y R = 8 (abajo)8	35
Figura 6-21: Aleatoriedad leve en parámetro y de la componente coherente8	36
Figura 6-22: Aleatoriedad leve parámetro y de la componente coherente: factor de	
desplazamiento inelástico, R = 3 (arriba) y R = 8 (abajo)	37
Figura 6-23: Aleatoriedad leve en parámetro v de la componente coherente	38
Figura 6-24: Aleatoriedad leve parámetro v de la componente coherente: factor de	
desplazamiento inelástico, R = 3 (arriba) y R = 8 (abajo)	39
Figura 6-25: Aleatoriedad leve en parámetro To de la componente coherente9) 0
Figura 6-26: Aleatoriedad leve parámetro To de la componente coherente: factor de	
desplazamiento inelástico, R = 3 (arriba) y R = 8 (abajo)9	ə 1

xi

xii
Inelástico (R=3) - Imagen aumentada respecto de la anterior 107
Figura 6-42: Pulso Sinusoidal Completo: valores medios del Factor de Desplazamiento
Inelástico (R=3)106
Figura 6-41: Pulso Sinusoidal Completo: valores medios del Factor de Desplazamiento
de Pseudo-Aceleración105
Figura 6-40: Pulso Media Sinusoide: desviación standard de ordenadas espectrales
Figura 6-39: Pulso Media Sinusoide
de Pseudo-Aceleración103
Figura 6-38: Pulso Sinusoidal Completo: desviación standard de ordenadas espectrales
Figura 6-37: Pulso Sinusoidal Completo 102
desplazamiento inelástico, R = 3 (arriba) y R = 8 (abajo) 101
Figura 6-36: Aleatoriedad alta parámetro Tp de la componente coherente: factor de
Figura 6-35: Aleatoriedad alta en parámetro Tp de la componente coherente 100
desplazamiento inelástico, R = 3 (arriba) y R = 8 (abajo),99
Figura 6-34: Aleatoriedad alta parámetro To de la componente coherente: factor de
Figura 6-33: Aleatoriedad alta en parámetro To de la componente coherente
desplazamiento inelástico, R = 3 (arriba) y R = 8 (abajo)97
Figura 6-32: Aleatoriedad alta parámetro v de la componente coherente: factor de
Figura 6-31: Aleatoriedad alta en parámetro v de la componente coherente96
desplazamiento inelástico, R = 3 (arriba) y R = 8 (abajo)95
Figura 6-30: Aleatoriedad alta parámetro y de la componente coherente: factor de
Figura 6-29: Aleatoriedad alta en parámetro y de la componente coherente
desplazamiento inelástico, R = 3 (arriba) y R = 8 (abajo)93
Figura 6-28: Aleatoriedad leve parámetro Tp de la componente coherente: factor de

Figura 6-43: Pulso Sinusoidal Completo: desviación standard del Factor de	Э
---	---

Desplazamiento Inelástico (R=3)108
Figura 6-44: Pulso Sinusoidal Completo: valores medios del Factor de Desplazamiento
Inelástico (R=8)109
Figura 6-45: Pulso Sinusoidal Completo: valores medios del Factor de Desplazamiento
Inelástico (R=8) - Imagen aumentada respecto de la anterior110
Figura 6-46: Pulso Sinusoidal Completo: desviación standard del Factor de
Desplazamiento Inelástico (R=8)111
Figura 6-47: Pulso Media Sinusoide: valores medios del Factor de Desplazamiento
Inelástico (R=3)112
Figura 6-48: Pulso Media Sinusoide: valores medios del Factor de Desplazamiento
Inelástico (R=3) - Imagen aumentada respecto de la anterior 113
Figura 6-49: Pulso Media Sinusoide: desviación standard del Factor de Desplazamiento
Inelástico (R=3)114
Figura 6-50: Pulso Media Sinusoide: valores medios del Factor de Desplazamiento
Inelástico (R=8)115
Figura 6-51: Pulso Media Sinusoide: valores medios del Factor de Desplazamiento
Inelástico (R=8) - Imagen aumentada respecto de la anterior116
Figura 6-52: Pulso Media Sinusoide: desviación standard del Factor de Desplazamiento
Inelástico (R=8)117
Figura 7-1: De izquierda a derecha se observan gráficos para pulso Media Sinusoide
y Sinusoidal Completo respectivamente, considerando espectros elásticos
medios

Figura 7-2: De izquierda a derecha y de arriba abajo gráficos del Factor de

Desplazamiento Inelástico para pulso Sinusoidal Completo considerando	
R=3 y 8, pulso Media Sinusoide con R=3 y 8 respectivamente, consideran	do
gráficos inelásticos medios12	24

RESUMEN

El objetivo fundamental del presente trabajo consiste en el análisis aleatorio de los parámetros de Mavroeidis y Papageorgiou, con el fin de determinar la influencia que estos valores tienen en la generación de sismos impulsivos sintéticos y como estos afectan en mayor o menor medida la respuesta del sistema. Para el análisis paramétrico es necesario la definición de aleatoriedad alta y leve lo que se representa por las distribuciones uniforme y normal respectivamente, definido lo anterior se procede a la obtención de espectro de aceleración y gráficos del factor de desplazamiento inelástico (Cd v/s Tn) para cada variable en análisis y por cada tipo de aleatoriedad asignada, determinando así que parámetros son mayormente determinantes a la hora de generar un sismo impulsivo utilizando el procedimiento descrito en el documento "Mathematical Representation of Near-Fault Ground Motion" de Mavroeidis y Papageorgiou, en donde se postula que los registros sísmicos sintéticos son producto de la superposición de una componente coherente (utilizando los parámetros en estudio) y una componente incoherente (modelada en este trabajo mediante el modelo de Kanai-Tajimi modificado), dando origen a un sismo de fuente cercana (sismo impulsivo) que puede ser de gran utilidad para evaluar la respuesta estructural de edificaciones ubicadas en zonas sísmicas propensas a eventos impulsivos.

La gran cantidad de iteraciones tiene como objetivo generar muestras representativas del comportamiento del parámetro en análisis, es por ello que además de las curvas medias, se incluye el análisis de los valores extremos (máximos, mínimos y desviaciones estándar) con el fin de analizar cada variación que los parámetros de la componente coherente genera en la respuesta final del sistema. Del análisis se obtendrá que parámetros como; Tp y el factor de modificación de la respuesta (R) son preponderantes y muy influyentes en la forma del registro obtenido y en la respuesta tanto elástica como inelástica del sistema en estudio.

Palabras Claves: Sismos de fuente cercana, espectros de respuesta elásticos, espectros de respuesta inelásticos, Mavroeidis y Papageorgiou, señales estocásticas.

ABSTRACT

The main objective of this work is the random analysis of parameters of Mavroeidis and Papageorgiou, in order to determine the influence that these values have in generating impulsive synthetic earthquakes and how they affect in greater or lesser measure the system response. Parametric analysis requires the definition of high and low ramdomness which is represented by the Uniform and Normal distributions respectively, it already defined proceeds to obtain acceleration spectrum and graphics of inelastic displacement ratio (Cd v / s Tn) for each variable in analysis and for each type of assigned randomness, and thereby determine which parameters are greater important factors at the time to generate an impulsive earthquake using the procedure described in "Mathematical Representation of Near-Fault Ground Motion" of Mavroeidis and Papageorgiou (2003), where it is postulated that synthetic seismic records are the result of the superposition of a coherent component (using the parameters under study) and an incoherent component (modeled in this study using the Kanai-Tajimi Modified Model), giving origin to an Near-Fault Ground Motion (impulsive earthquake) that may be useful to assess the structural response of buildings located in proned areas to impulsive seismic events.

The large number of iterations have the goal to generate representative behavior of the parameter analysis, is for that, in addition to the mean curves, analysis of extreme values (maximum, minimum and standard deviations) is included in order to analyze each change of the parameters of the coherent component generates in the final system response. The analysis will show that parameter as Tp, and the Modification Factor Response (R) are dominant and very influential in the form of the obtained registration, elastic response and the inelastic system under study.

Keywords: Near-fault ground motion, elastic response spectra, inelastic response spectra, Mavroeidis and Papageorgiou, stochastic signals.

1. INTRODUCCIÓN

El estudio de las vibraciones, ya sean inducidas por sismos, maquinarias u otra fuente de perturbación, es primordial para el diseño estructural. Particularmente en nuestro país, en donde la acción sísmica controla el diseño de estructuras en casi todo el territorio, el análisis exhaustivo de las aceleraciones provenientes de sismos de mediana intensidad y terremotos es obligatorio para predecir la respuesta estructural que tendrán edificaciones tanto existentes como proyectadas.

Actualmente existe variada bibliografía correspondiente al estudio dinámico de estructuras, considerando sismos de gran intensidad registrados tanto en el extranjero como en nuestro país. Para el caso en particular de los sismos impulsivos ocurre que debido a su corta duración son muchas veces despreciados, siendo que tal impulso puede ser importante en la respuesta de una estructura ya que debido al corto periodo de solicitación la estructura no tiene el tiempo suficiente para desarrollar amortiguamiento y una ductilidad adecuada. En la presente investigación se analiza la formulación matemática de sismos impulsivos de Mavroeidis y Papageorgiou (Mavroeidis and Papageorgiou 2003) considerando aleatoriedad en su formulación, lo que es bastante realista en la práctica ya que el fenómeno vibratorio tiene muchas variables, supuestos y condiciones, y es muy susceptible a cualquier tipo de cambio en tales características.

2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

2.1 Motivación

Cada año, en algún lugar del planeta ocurre por lo menos un evento sísmico de magnitud importante, el cual nos recuerda que vivimos en un planeta dinámico que está en constante movimiento. Es primordial entonces para el desarrollo de la ingeniería estructural entender el fenómeno que produce tal solicitación en una estructura. Está muy arraigado en la conciencia de un ingeniero estructural relacionar las vibraciones con el fenómeno físico producto del movimiento de placas tectónicas que las produce, es decir, asignar un espacio físico de ruptura y considerar placas de la corteza terrestre las cuales debido a su movimiento colisionan o se traslapan una sobre otra generando una tensión interna que al liberarse genera vibración, lo que llamamos comúnmente sismo. Cabe, por lo tanto, cuestionarse si esta dependencia espacio-evento no es inherente a la formulación matemática de sismos, es decir, si es posible aislar este problema de la geotectónica o la sismología, llevando el problema plenamente al universo numérico y aleatorio, como por ejemplo cuando se modela un problema estructural típico (Figura 1-1) en donde cada parámetro involucrado, ya sea rigidez, amortiguamiento, masa o fricción se modela por un sistema equivalente que permite el análisis netamente matemático. Utilizando este mismo razonamiento, para el problema que involucra eventos sísmicos se busca obviar las variables del entorno, concentrándose en una formulación matemática que sea invariante del medio en que se encuentre el proceso modelado, es decir, obtener un modelo genérico del proceso estocástico en análisis.



Figura 1-1 Modelación de un sistema estructural típico

Es dentro de este contexto donde el modelo de Mavroedis y Papageorgiou cobra significado, puesto que a pesar que parte de su modelación matemática permite obtener registros sísmicos sintéticos asociados a un lugar físico determinado (Figura 1-2), se puede acotar y definir dicha modelación tal que se obvien tales factores y se trabaje un modelo netamente probabilístico.



Figura 1-2 Esquema del método "Specific Barrier Model" (Papageorgiou and Aki 1983)

Utilizando la modelación de Mavroedis y Papageorgiou se observa que el registro sísmico obtenido no es más que el resultado de la superposición de una componente incoherente (la cual tiene incorporada aleatoriedad) y una componente coherente, la cual es en esencia determinística y cuyos parámetros son definidos según las características que se le quiera dar al sismo sintético resultante. De lo último nace una gran pregunta, base para el desarrollo de la presente tesis: ¿qué pasaría si se agrega aleatoriedad a esta componente? ¿se debería, por lo tanto, introducir aleatoriedad en todos sus parámetros o solo a los más influyentes? Estas y otras interrogantes revelan la gran incertidumbre que existe en torno a la influencia que tienen los parámetros de la componente coherente en la formulación matemática que permite obtener el registro sísmico sintético, es así como en la presente investigación se pretende determinar si uno o varios de los parámetros que definen la formulación matemática de la componente coherente del Modelo de Mavroeidis y Papageorgiou son determinantes en la obtención del registro sintético obtenido, incluso cuestionándose si en realidad es necesario o no incluir aleatoriedad en los parámetros.

2.2 Características de los sismos impulsivos

Antes de alejarse de la física que involucra el fenómeno de generación de sismos impulsivos es necesario caracterizar dicho movimiento (de cualidades especiales) y analizar los registros medidos instrumentalmente.

Desde el descubrimiento de Chile en 1536 que se reportan eventos sísmicos de magnitudes importantes. Nuestro país posee una rica cultura sísmica que lo ha llevado a posicionarse como uno de los países con mayores estándares sísmicos en sus construcciones, lo que lo deja muy bien posicionado en el ámbito de la Ingeniería Civil y más precisamente en el área de la Ingeniería Sísmica. Ejemplos de grandes sismos

reportados en crónicas de la época son por ejemplo el sismo de Mayo de 1647 en la ciudad de Santiago, el gran sismo de 1751 en Concepción, el terremoto de 1835 en Concepción y Talcahuano. A ellos puede sumarse el terremoto y maremoto de Arica en 1868.

En el siglo XX, ya con instrumentos de medición más precisos, se mencionan el terremoto de Valparaíso en 1906, el sismo de Atacama en 1922 y el terremoto de Talca en 1928, pero ninguno tan importante en términos de magnitud y devastación como el Terremoto de Valdivia de 1960, considerado hasta el día de hoy como el más fuerte movimiento registrado en el mundo, con magnitud 9,6 en la escala de Momento. Este evento telúrico devastó las provincias de Cautín, Valdivia, Osorno, Llanquihue y Chiloé. Además, al situarse su epicentro en el mar en las cercanías de Valdivia, el sismo fue acompañado por un tsunami que provocó una sucesión de enormes olas que arrasaron las ciudades costeras cercanas.

En la década siguiente las zonas norte y central fueron afectadas por un terremoto grado 7,75 en la escala de Richter. El movimiento, registrado el 8 de julio de 1971 a las 23:04 horas, afectó desde Antofagasta a Valdivia, con mayor intensidad en Illapel, Los Vilos, Combarbalá y La Ligua.

Ya en 2007 se produjeron los terremotos de Aysén y de Tocopilla, que pese a no dejar un gran número de víctimas causaron enormes pérdidas materiales.

En la última década dos eventos de magnitud considerable han afectado a nuestro país. El primero es el ocurrido en febrero de 2010 con una magnitud 8.8 grados en la escala Richter, convirtiéndose en el segundo más destructivo en la historia de nuestro país, y posteriormente el terremoto de Septiembre de 2015 cuya magnitud alcanzó los 7.9 grados. Es por lo anterior que Chile ha aprendido en base a la experiencia cómo enfrentar eventos de esta envergadura, fortaleciendo sus códigos de diseño sísmico y materializando estructuras sismorresistentes. Lo anterior involucra un enorme trabajo de análisis y comprensión tanto de las causas que provocan los terremotos como de los efectos en la estructuras, lo que conlleva obligatoriamente el análisis de los registros sísmicos medidos en nuestro país para determinar sus características. Sin embargo los terremotos antes mencionados presentan una característica en común: son eventos de una duración considerable, en donde la liberación de energía se lleva a cabo en un lapso de tiempo prolongado. Por lo tanto para el objetivo de la presente tesis, que se centra principalmente en el análisis de sismos impulsivos, no representan un parámetro para formular matemáticamente su comportamiento debido a que no son sismos "impulsivos".

La principal razón por la cual en Chile no ocurren sismos impulsivos es que los sismos registrados en nuestro país son en su gran mayoría sismos subductivos que liberan la energía de manera gradual y a una profundidad considerable. En particular para los sismos subductivos, la teoría de tectónica de placas postula que la placa oceánica se desplaza bajo la placa continental, y debido a este movimiento se acumula tensión en la superficie de contacto entre ambas, la que se libera repentinamente provocando terremotos (Figura 1-3).



Figura 1-3 Fenómeno de subducción (Villaverde 2009)

Para que ocurran sismos impulsivos la liberación de energía debe realizarse en un tiempo relativamente corto y a poca profundidad, lo que caracteriza a los sismos provocados por fallas corticales. Estas fallas son de características más superficiales que las subductivas (lo que representa una de las causas de porqué a los sismos impulsivos se les llame sismos de fuente cercana), involucran menos energía (y por lo tanto su magnitud Richter es menor), pero alcanzan un peak de velocidad considerable debido al poco tiempo de duración (lo que representa la gran diferencia con los sismos de fuente lejana).

Un ejemplo de falla cortical en Chile es la falla de San Ramón, en donde no se ha registrado actividad sísmica en los últimos 10000, lo que no significa que pueda activarse en cualquier momento. Por esta razón, tal falla representa un potencial peligro para la ciudad de Santiago, ya que si se activa podría generar sismos de carácter

impulsivo de magnitud 6 o 7 grados Richter, los que serían importantes en términos de impacto sobre las estructuras cercanas debido a las características de superficialidad y elevados peak de velocidad que poseerían el pulso sísmico.

A nivel mundial existe variada documentación sobre eventos impulsivos. Desde el siglo XX se cuenta con la ayuda de instrumentos más sofisticados de medición y la incorporación de un mayor número de estaciones de medición, y se han podido medir una gran cantidad de sismos impulsivos. En las Tablas 1-1 y 1-2 se muestran algunos de los más importantes sismos impulsivos registrados en el mundo.

					Closest Fault Distance
No.	Location	Date	M _w	Station	(km)
1	Parkfield, CA, USA	27-Jun-66	6.20	C02	0.1
2	San Fernando, CA, USA	09-Feb-71	6.55	PCD	3.0
3	Gazli, USSR	17-May-76	6.80	KAR	3.0
4	Bucharest, Romania	04-Mar-77	7.27	BRI	190.0
5	Tabas, Iran	16-Sep-78	7.11	TAB	1.2
6	Coyote Lake, CA, USA	8-Jun-79	5.63	GA6	1.2
7	Imperial Valley, CA, USA	15-Oct-79	6.50	E04	6.0
				E05	2.7
				E06	0.3
				E07	1.8
				EMO	1.2
8	Mexicali Valley, Mexico	9-Jun-80	6.37	VCT	3.0
9	Morgan Hill, CA, USA	24-Apr-84	6.15	HAL	2.0
10	Palm Springs, CA, USA	8-Jul-86	6.09	NPS	4.0
				DSP	6.4
11	Whittier Narrows, CA, USA	10-Oct-87	5.93	DOW	16.4
				NWK	15.7
12	Superstition Hills, CA, USA	24-Nov-87	6.40	PTS	0.7
				ELC	13.6
13	Loma Prieta, CA, USA	17-Oct-89	6.90	LGP	3.0
				STG	8.3
14	Sierra Madre, CA, USA	28-Jun-91	5.56	COG	9.4

Tabla 1-1 Sismos impulsivos medidos alrededor del mundo. Parte 1 (Mavroeidis and Papageorgiou 2003)

Tabla 1-2 Sismos impulsivos medidos alrededor del mundo. Parte 2 (Mavroeidis and Papageorgou 2003)

No.	Location	Date	M _w	Station	Closest Fault Distance (km)
15	Erzincan, Turkey	13-Mar-92	6.63	ERZ	2.0
16	Landers, CA, USA	28-Jun-92	7.20	LUC	1.1
17	Northridge, CA, USA	17-Jan-94	6.70	JFA	5.2
				RRS	6.0
				SCG	5.1
				SCH	5.0
				NWS	5.3
18	Aigion, Greece	15-Jun-95	6.33	AEG	6.0
				AEG	6.0
19	Izmit, Turkey	17-Aug-99	7.40	ARC	14.0
				SKR	3.1
				YPT	2.6
				GBZ	11.0
				GBZ	11.0
20	Chi-Chi, Taiwan	20-Sep-99	7.60	TCU052	0.8
				TCU068	0.2
				TCU075	0.6
				TCU076	2.3
				TCU129	1.5

En las tablas anteriores se resumen la ubicación del sismo impulsivo, la fecha del acontecimiento, la magnitud en la escala de momento y la distancia de la estación a la falla. Se puede verificar que ninguno de los sismos listados supera los 8 grados Richter, lo que no significa que no hayan provocado un gran daño en las estructuras cercanas. En realidad algunos de ellos fueron muy devastadores debido precisamente a la cercanía con la zona de ruptura.

2.3 Hipótesis de la Tesis

La hipótesis de la presente tesis consiste en que la inclusión de aleatoriedad en cada parámetro de la componente coherente perteneciente a las ecuaciones matemáticas de la formulación de registros impulsivos dados por Mavroeidis y Papageorgiou tiene directa incidencia en la obtención de registros sintéticos distintos y por lo tanto, en la variación en la respuesta sísmica lineal y no-lineal de estructuras sujetas a registros impulsivos.

2.4 Objetivos de la tesis

El objetivo general de la presente tesis consiste en analizar la influencia de la aleatoriedad de los parámetros del modelo de Mavroeidis y Papageorgiou en la respuesta sísmica lineal y no-lineal de estructuras sujetas a registros impulsivos. Para lo anterior se modelarán matemáticamente registros impulsivos considerando diferentes niveles de aleatoriedad en los parámetros de la componente coherente del modelo de Mavroeidis y Papageorgiou, con lo cual se obtienen distintos comportamientos que se deben analizar para determinar qué factores influyen en mayor medida en la generación sintética de registros. El objetivo de esta tesis también incluye la obtención y análisis de espectros de respuesta, que son finalmente la herramienta que se utiliza para diseñar estructuras.

Con este fin se elabora un programa computacional que permita realizar múltiples iteraciones del modelo matemático de Mavroeidis y Papageorgiou considerando diversos grados de aleatoriedad. Se analiza la influencia de la aleatoriedad leve y alta, considerando distribuciones normal y uniforme como distribución representativa de cada caso. Se analizará cada uno de los 5 parámetros que describen la formulación matemática de la componente coherente, pero solo 4 de ellos se analizarán estocásticamente (se asumirá un valor constante del parámetro A en todas las iteraciones), y se generarán gráficos de respuesta tanto elástica como inelástica que sean representativos de la totalidad de las muestras analizadas.

El análisis se realizará mediante simulaciones Monte Carlo considerando 1000 simulaciones en cada caso estudiado, es decir se realizarán 1000 iteraciones cada vez que se varíe estocásticamente un parámetro y por cada tipo de aleatoriedad seleccionada. Se generarán espectros elásticos e inelásticos de los sismos impulsivos generados sintéticamente mediante la formulación de Mavroeidis y Papageorgiou. En cada caso estudiado (es decir, para cada parámetro y para cada tipo de aleatoriedad) se analizarán tanto el valor medio como los valores máximos y mínimos, y también el valor medio más/menos una desviación estándar. Al analizar todos los resultados debería evidenciarse qué parámetros son los más influyentes en la respuesta del sistema, y por lo tanto cuáles ellos deben ser caracterizados con más precisión a la hora de generar registros sintéticos impulsivos que permitan obtener espectros de respuesta idóneos para el diseño estructural de edificaciones.

3. VIBRACIONES

3.1 Perturbaciones del medio

Antes de introducir el modelamiento matemático de sismos impulsivos es preciso entender cómo el desarrollo de la ciencia ha llevado a la comprensión de los fenómenos que generan vibración, y cómo la aleatoriedad muchas veces es un factor preponderante en la configuración de dichas vibraciones.

En el siglo XVI Galileo Galilei, ayudado de un péndulo, descubrió que las partículas pueden "oscilar", es decir, el movimiento que describe el cuerpo recorre la misma trayectoria cada determinado tiempo. Cuando un cuerpo con este movimiento se desplaza, origina un movimiento ondulatorio. Con sus experimentos, Galileo descubrió los principios básicos del Movimiento Harmónico Simple.

La materia y la energía están íntimamente relacionadas. La primera está representada por partículas y la segunda por "ondas", aunque hoy en día esa separación no está tan clara. En el mundo subatómico, por ejemplo, la electricidad está constituida por electrones y estos presentan este doble comportamiento (onda-partícula).

3.1.1 Ondas

El tipo de movimiento característico de las ondas se denomina movimiento ondulatorio. Su propiedad esencial es que no implica un transporte de materia de un punto a otro, es decir, lo que avanza y progresa no es la partícula sino la perturbación que se transmite de unas a otras. El movimiento ondulatorio supone únicamente un transporte de energía y de cantidad de movimiento. En cualquier punto de la trayectoria de propagación de una onda se produce un desplazamiento periódico (oscilación) alrededor de una posición de equilibrio. Puede ser una oscilación de moléculas de aire (como en el caso del sonido que viaja por la atmósfera), de moléculas de agua (como en las olas que se forman en la superficie del mar) o de porciones de una cuerda o un resorte. En todos estos casos las partículas oscilan en torno a su posición de equilibrio y sólo la energía avanza de forma continua. Estas ondas se denominan mecánicas porque la energía se transmite a través de un medio material sin ningún movimiento global del propio medio. Las únicas ondas que no requieren un medio material para su propagación son las ondas electromagnéticas; en ese caso las oscilaciones corresponden a variaciones en la intensidad de campos magnéticos y eléctricos. En las ondas longitudinales el medio se desplaza en la dirección de propagación, por ejemplo el aire se comprime y expande en la misma dirección en que avanza el sonido. En las ondas transversales el medio se desplaza en ángulo recto a la dirección de propagación, por ejemplo las ondas en un estanque avanzan horizontalmente, pero el agua se desplaza verticalmente.

Los terremotos generan ondas de los dos tipos (y también de otros) que avanzan a distintas velocidades y con distintas trayectorias. Estas diferencias permiten determinar el epicentro del sismo.

3.1.2 Ondas Mecánicas

Las propiedades del medio influirán decisivamente en las características de las ondas. Así, la velocidad de una onda dependerá de la rapidez con la que cada partícula del medio sea capaz de transmitir la perturbación a su compañera. Los medios más rígidos dan lugar a velocidades mayores que los más flexibles, lo mismo sucede con los medios más densos respecto de los menos densos.

Ningún medio material es perfectamente elástico. Las partículas que lo forman en mayor o menor grado rozan entre sí, de modo que parte de la energía que se transmite de unas a otras se disipan en forma de calor. Esta pérdida de energía se traduce y considera dentro de la modelación como un amortiguamiento.



Una onda mecánica se compone de la siguiente manera (figura 2-1):

Figura 3-1 Parámetros de una onda mecánica

3.1.3 Longitud de Onda

Es la distancia entre dos puntos iguales correspondientes a dos ondas sucesivas, se expresa en unidades de longitud (metros, centímetros, kilómetros, etc.).

3.1.4 Oscilación

Se lleva a cabo cuando un punto en vibración ha tomado todos los valores positivos y negativos.

3.1.5 Elongación

Es la distancia en dirección perpendicular de un punto de la onda a la línea o posición de equilibrio.

3.1.6 Amplitud

Es la distancia entre el punto más alejado que alcanza una partícula vibrante y su posición de equilibrio. La amplitud es la máxima elongación.

3.1.7 Frecuencia

Es el número de veces que se presenta un fenómeno periódico en la unidad de tiempo, es decir, el número de ondas que pasan por segundo. La unidad en la que se mide la frecuencia es el hertz (Hz).

$$1 \text{ Hz} = 1/\text{s}$$
 (3.1)

3.1.8 Periodo

Tiempo que tarda un cuerpo que tiene un movimiento periódico en efectuar un ciclo completo de su movimiento, se mide en segundos.

El periodo y la frecuencia son reciprocas, es decir, se relacionan matemáticamente mediante la siguiente expresión:

$$f = \frac{1}{T} \tag{3.2}$$

3.1.9 Velocidad de Propagación

Desplazamiento de una onda en una unidad de tiempo. Si el periodo (T) es el tiempo en que el punto considerado tarda en realizar una oscilación, podemos decir que la onda ha avanzado una distancia λ en un tiempo, es decir:

$$V = \lambda/T$$
 (3.3)

pero como el periodo T es igual a 1/f la expresión anterior se puede representar de la siguiente manera:

$$V = \lambda f \tag{3.4}$$

La velocidad con que se propague un fenómeno ondulatorio depende de la naturaleza del medio en que se realiza la propagación. Así, la velocidad del sonido no es la misma en el aire que en el agua o que en el acero, ni tampoco la velocidad de la luz en la misma en el vació que en el agua, aire o vidrio.

3.2 Vibraciones Determinísticas y Aleatorias

Una vibración comúnmente se analiza como una señal que para el análisis probabilístico se divide en 2 tipos; Determinísticas y Aleatorias.

La siguiente imagen esquematiza la separación que existe entre los 2 tipos de señales.



Figura 3-2: Clasificación de las señales vibratorias.

Las señales determinísticas son aquellas que representan fenómenos que pueden ser descritos analíticamente de manera exacta mediante una expresión matemática relativamente sencilla. Las señales aleatorias o estocásticas en cambio, presentan un comportamiento que no es posible describirlo analíticamente con una expresión explícita simple, sin embargo, cuando una señal estocástica se observa durante un largo periodo de tiempo puede verse cierta regularidad y puede ser descrita en términos de probabilidades y promedios estadísticos.

3.2.1 Análisis de señales determinísticas

Las señales vibratorias se representan a través de la función analítica

$$\mathbf{X} = \mathbf{x}(\Omega, \mathbf{t}) \tag{3.5}$$

en donde la señal puede presentarse como suma de funciones analíticas elementales

 $\Phi_{k}(t)$; K = 0, 1, 2, 3, ..., cuyas propiedades son previamente conocidas:

$$x(t) = \sum_{K=0}^{\infty} C_K \varphi_K(t)$$
(3.6)

En la expresión anterior los términos C_k son llamados los coeficientes de la descomposición.

Las funciones elementales analíticas $\phi_k(t)$; K = 0, 1, 2, 3, ..., dentro del intervalo de tiempo $[t_0, t_0+T]$ en el cual se hace el análisis de la señal vibratoria deben cumplir además con la condición de ortogonalidad y normalización, esto significa que el producto escalar entre las funciones cumple con la condición:

$$\int_{t_0}^{t_{0+T}} \varphi_{\kappa}(t) \varphi_{e}(t) dt = \begin{cases} C_{\kappa} = 1, & \text{si } \mathbf{K} = e \\ 0, & \text{si } \mathbf{K} \neq e \end{cases}$$

$$(3.7)$$

La condición de ortogonalidad define la independencia lineal entre las funciones analíticas y la condición de normalización define la posibilidad de que se pueden emplear como unidades estructurales elementales. Estas dos condiciones son análogas a las condiciones de ortogonalidad y normalización de los vectores unitarios con los cuales se construye el sistema de coordenadas ortogonal. Si se usa esta analogía la transformación estructural de la señal vibratoria puede ser considerada como representación de x(t) en forma de vector C, con componentes C0, C1, C2,... en un sistema de coordenadas ortogonales construido con los vectores unitarios.

Los coeficientes Ck de cada vector C representan su proyección sobre el eje correspondiente. Analíticamente el producto escalar a través del cual se obtienen los coeficientes Ck toma la siguiente forma:

$$C_{K} = \int_{t_{0}}^{t_{0+T}} \chi(t) \varphi_{k}(t) dt \qquad (3.8)$$

La elección de la forma de las funciones analíticas se define a través de las propiedades buscadas, como por ejemplo minimizar el error promedio cuadrático de un número finito de elementos (n):

$$g^{2}(t) = \left[x(t) - \sum_{K=0}^{\infty} C_{K} \varphi_{K}(t) \right]^{2} \Rightarrow \min$$
(3.9)

Se ha demostrado que el error mínimo del promedio cuadrático de toda función periódica se minimiza al descomponerla en serie de Fourier de funciones trigonométricas de la forma:

1,
$$\cos \omega_0 t$$
, $\cos 2\omega_o t$, $\cos 3\omega_0 t$,..., $\cos K\omega_0 t$
y $sen\omega_0 t$, $sen2\omega_o t$, $sen3\omega_o t$,..., $senK\omega_o t$
(3.10)

Usando la fórmula de Euler

$$e^{i\infty} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$
 (3.11)

La serie de funciones trigonométricas puede escribirse en forma compleja a través de las funciones:

$$1, e^{i\omega_0 t}, e^{i2\omega_0 t}, e^{i3\omega_0 t}, ..., e^{iK\omega_0 t}$$
(3.12)
En términos de la configuración de señales la más simple es la señal periódica armónica, la cual puede describirse como una función dependiente del tiempo t:

$$x(t) = \operatorname{Asen}\left(\omega_0 \mathbf{t} + \theta\right)$$
(3.13)

donde:

A: Amplitud

ω₀: Frecuencia angular

Θ: Fase

La frecuencia angular se relaciona con el periodo natural de vibración mediante la siguiente expresión:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \tag{3.14}$$

Las señales armónicas satisfacen la condición de periodicidad: x(t) = x(t+T), por lo tanto dichas señales periódicas se pueden desarrollar en serie de Fourier:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{K=1}^{\infty} \left[a_K \cos(K \,\omega_0 t) + b_K \sin(K \,\omega_0 t) \right]$$
(3.15)

Las señales no periódicas pueden tratarse como periódicas para $T \rightarrow \infty$, en este caso la serie de Fourier se transforma en integral de Fourier, los coeficientes de Fourier se convierten en una serie de valores Ck formando el espectro discreto en una función continua llamada densidad del espectro complejo.

La integral del cuadrado de un proceso cualesquiera x(t) en el intervalo de tiempo T/2 es:

$$E = \int_{-T/2}^{T/2} \chi^{2}(t) dt$$
 (3.16)

Si además se busca el límite de esta expresión se obtiene:

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{E}{T} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \chi^2(t) dt$$
(3.17)

Por lo tanto, para la transformada de Fourier se tendrá:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi^{2}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| C^{\bullet}(\omega) \right|^{2} d\omega$$
(3.18)

La igualdad puede escribirse en la forma reducida siguiente:

$$dE = \left| \mathbf{C}^{\bullet}(\omega) \right|^2 d\omega \quad \Rightarrow \quad \left| \mathbf{C}^{\bullet}(\omega) \right|^2 = \frac{dE}{d\omega}$$
(3.19)

Entonces el cuadrado del módulo de la densidad espectral compleja representa la distribución de la energía de la señal en frecuencias. Con el desarrollo de sistemas computacionales de mayor velocidad de procesamiento de datos se ha desarrollado el algoritmo computacional Transformada Rápida de Fourier (FFT) que permite la obtención de estos parámetros en un lapso de tiempo reducido y con un menor uso de recurso computacional, agilizando el análisis y comprensión de las señales vibratorias.

De los párrafos anteriores se verifica que el estudio de señales determinísticas está controlado principalmente por la característica de periodicidad que posean (Figura 3-2),

las cuales definen el tipo de señal y la dificultad que tendrá el análisis para definir su comportamiento.



Figura 3-3: Señales vibratorias determinísticas.

3.2.2 Análisis de señales estocásticas

En la gran mayoría de los sistemas reales las señales están acompañadas de efectos aleatorios relacionados con las características del medio que las rodea. Este conjunto de señales son del grupo de señales no determinísticas o aleatorias, por ejemplo las vibraciones que determinan el estado vibratorio de las máquinas rotatorias tienen una distribución que se define a través del Teorema del Límite Central (Teorema de Lyapunov), en el cual se postula que la suma de una gran cantidad de eventos linealmente independientes tiene una distribución de probabilidad cercana a la normal.

Para poder describir una vibración aleatoria teóricamente se necesita un espacio de tiempo observable infinito que es imposible en la práctica, por lo que solo se utilizan tiempos finitos debido a que tiempos observados muy largos serán un modo de descripción muy inconveniente en términos de modelación y caracterización de una cantidad de valores dados. Es por esto último que se han creado métodos que se

fundamentan en la mecánica estadística y en la teoría de comunicaciones que utilizan conceptos como distribución de probabilidad, densidades y espectro de frecuencias.

Las señales aleatorias no pueden ser descritas por una expresión matemática explícita como las señales determinísticas y deben ser estudiadas a partir de criterios estadísticos por el gran número de posibles formas de respuestas que tienen los sistemas dinámicos reales como reflejo de las diferentes acciones de excitación sobre ellos. En la dependencia de cómo sea la respuesta del sistema aleatorio éstos pueden emitir señales aleatorias estacionarias (cuando sus características estadísticas no dependen del tiempo).

$$x(t) = \text{const}, \ \sigma_x(t) = \text{const}$$
 (3.20)

 $\overline{x}(t)$: Valor medio de los datos calculados

 $\sigma_{x}(t)$: Desviación estandar de los datos calculados

Además las señales estacionarias se pueden dividir en ergódicas y no ergódicas. Las ergódicas son aquellas cuyas características estadísticas coinciden promediándolas. De lo contrario son denominados no ergódicas. Esta clasificación es de gran importancia, ya que permite calcular las propiedades de un fenómeno mediante el estudio de una sola muestra.

Si se pretende analizar una señal estocástica, se debe tener presente que existen dos técnicas de análisis estocástico, las cuales son:

- Técnicas basadas en el dominio del tiempo
- Técnicas basadas en el dominio de la frecuencia.

3.2.3 Importancia del análisis espectral

La modelización de los procesos estocásticos en el dominio del tiempo se apoya en el cálculo de los coeficientes de autocovarianza y autocorrelación, que se expresan en función del retardo entre observaciones estudiadas. Los estudios en el dominio del tiempo se encuentran con el problema de que en dos dimensiones no existe una única definición de distancia, por lo que el fenómeno del retardo provoca una complejidad muy elevada. Dadas las dificultades para describir completamente procesos espaciales a partir de las técnicas en el dominio del tiempo, el análisis espectral ofrece un procedimiento de análisis espacial diferente. La aplicación de este tipo de análisis permite la distribución de la variable por medio de la "función de densidad espectral". Se aplica la Transformada de Fourier para pasar al dominio de la frecuencia (cambio de sistema de referencia), donde el fenómeno de retardo pierde su importancia:

$$\mathcal{F}[x(t-a)](\xi) = \mathcal{F}[x(t)](\xi-a)$$
(3.21)

Con a y $\xi \in \mathbb{R}$.

Cuando los procesos aleatorios son estacionarios y ergódicos se usan cuatro funciones estadísticas importantes para describir el comportamiento de una variable estocástica:

- 1. Valor medio cuadrático
- 2. Función de densidad de probabilidad
- 3. Función de correlación
- 4. Función de densidad de potencia espectral

3.2.4 Valor Medio Cuadrático

El valor medio cuadrático se puede determinar mediante la siguiente ecuación:

$$\overline{\chi}^{2} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \chi^{2}(t) dt$$
(3.22)

El valor medio estadístico se define como:

$$\boldsymbol{\mu}_{x} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \boldsymbol{X}(t) dt$$
(3.23)

También se define la varianza como:

$$Var = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} \left(x(t) - \mu_{x} \right)^{2} dt$$
 (3.24)

y la desviación estándar, la cual representa la medida de la distribución de los valores instantáneos alrededor del valor medio, está dada por:

$$\sigma_x^2 = \text{Var} = \overline{x^2} - \mu_x^2$$
 (3.25)

Si el valor medio de la señal es cero, entonces la desviación estándar será solo función de los valores cuadráticos de la señal recibiendo el nombre de Raíz Media Cuadrática (RMS) que es una medida muy utilizada para determinar el comportamiento dinámico de un sistema.

$$\boldsymbol{\sigma}_{x} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{0}^{T} \boldsymbol{\chi}^{2}(t) dt} = \sqrt{\overline{\boldsymbol{\chi}^{2}}}$$
(3.26)

Así, para un intervalo de tiempo de medición T el valor RMS reflejará la energía que es liberada por la oscilación como función de su amplitud.

3.2.5 Densidad Probabilística

En el estudio de procesos continuos como las vibraciones aleatorias estacionarias es conveniente tratar el concepto de densidad probabilística en lugar de probabilidad sencillamente. La densidad probabilística se define como la probabilidad de encontrar valores de amplitudes instantáneas dentro de un intervalo de amplitud.

Normalmente la probabilidad no tiene dimensión, pero la densidad probabilística sí tiene una forma de dimensión. Matemáticamente formulada la densidad probabilística a un nivel de amplitud especificado es:

$$p(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x) - P(x + \Delta x)}{\Delta x}$$
(3.27)

En la expresión anterior p(x) es la densidad probabilística, P(x) es la probabilidad de que cualquier amplitud instantánea exceda el valor x, $P(x + \Delta x)$ es la probabilidad de ocurrencia de que los valores de amplitudes instantáneas excedan el nivel $x + \Delta x$ y Δx es el tamaño del intervalo.

Al graficar el valor de p(x) para todos los valores de x, se puede obtener una curva de densidad probabilística que tiene la característica de que su integración desde un valor x₁ a x₂ dará inmediatamente la probabilidad de ocurrencia de amplitud instantánea de valores en dicho intervalo (x₂ - x₁) independientemente de la magnitud de x₁ y x₂. Es una ventaja presentar datos probabilísticas en forma de densidad probabilística porque permite comparar directamente los datos entre experimentos independientemente del tamaño del intervalo de la amplitud utilizado en el experimento.

3.2.6 Función de Correlación

Aunque la densidad probabilística sea una descripción de señal muy útil y muestra excelente información sobre cómo las amplitudes instantáneas son distribuidas en una señal vibratoria, no muestra información sobre el contenido de frecuencias del proceso estudiado. Para obtener más información descriptiva, se utiliza la función de autocorrelación, Rxx (Ţ). Esta función se define de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{R}_{xx}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \boldsymbol{x}(t) \cdot \boldsymbol{x}(t-\tau) dt$$
(3.28)

donde x (t) es la magnitud del proceso vibratorio en un momento instantáneo arbitrario t, y $x(t + \tau)$ es la magnitud del mismo proceso observado un tiempo después.

3.2.7 Función de densidad de potencia espectral

Como se mencionó anteriormente, un proceso físico puede representarse en el dominio del (t) o en el dominio de la frecuencia (ω). Existe una relación directa entre ambas representaciones a través de la transformada de Fourier y su inversa:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

(3.29)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$
(3.30)

Si se aplica la transformada de Fourier a la función de autocorrelación (anteriormente definida) de una señal estocástica, se obtiene la siguiente expresión:

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$
(3.31)

La cual corresponde a la llamada Función de densidad de potencia espectral de la señal. Se aprecia que $S_{xx}(\omega)$ es una función real porque $R_{xx}(\tau)$ es par y la parte imaginaria de $S_{xx}(\omega)$ es nula, lo que se representa en las siguientes expresiones:

$$i\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{R}_{xx}(\tau) sen(\omega\tau) d\tau = 0$$
(3.32)

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau$$
(3.33)

Las frecuencias negativas no tienen sentido físico y es por esto que se usa la densidad espectral:

$$S_{xx}(\omega) = 2\int_{0}^{\infty} R_{xx}(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau, \quad \text{con} \quad \omega > 0$$
(3.34)

De la teoría de integrales de Fourier es además conocido que $R_{xx}\left(\tau\right)$ puede escribirse como:

$$\boldsymbol{R}_{xx}(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \boldsymbol{S}_{xx}(\omega) \boldsymbol{e}^{-i\omega\tau} d\omega, \quad \text{con } \omega > 0$$
(3.35)

3.2.8 Utilidad de la Función de densidad de potencia espectral

Integrando el espectro complejo se tiene la siguiente expresión de P:

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}_{xx}(\omega) d\omega$$
 (3.36)

Derivando la expresión y despejando la función de densidad espectral se tiene:

$$S_{xx}(\omega) = 2\pi \frac{dP}{d\omega}$$
(3.37)

Por lo tanto, la densidad espectral de la señal estocástica caracteriza la distribución de la potencia de la señal para una frecuencia dada.

Si se considera un mayor número de procesos estocásticos se tiene

$$S_{xy}^{*}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$
(3.38)

También es válida la relación inversa:

$$\boldsymbol{R}_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{S}_{xy}^{*}(\omega) \boldsymbol{e}^{i\omega\tau} d\omega \qquad (3.39)$$

De la última relación se puede concluir que si los procesos estocásticos son estadísticamente independientes, es decir, $R_{xy}(\tau) = 0$ la densidad espectral conjunta debe ser igual a cero para cualquier valor de ω .

La transformación de las señales estocásticas se hace por descomposición en series de funciones ortogonales evaluando la entropía de las señales.

La entropía puede ser entendida como un concepto físico que se relaciona con el grado de desorden de un sistema, la cual cuantifica el grado de irregularidad presente en la señal. Por ejemplo, si una señal es perfectamente regular o predecible, su entropía es mínima, en caso opuesto, si la señal es extremadamente compleja, irregular o impredecible, su entropía es máxima.

Teóricamente todo tipo de vibración estocástica que se encuentra en la práctica es no estacionaria porque sus propiedades estadísticas varían con el tiempo. Sin embargo, desde el punto de vista ingenieril, esta variación es tan lenta que muchas veces se puede considerar como estacionaria para efectos de análisis.

3.2.9 Coherencia e Incoherencia de Señales

El análisis de coherencia permite relacionar causa y efecto entre dos señales vibratorias estimando la relación lineal que existe entre ellas. En el caso que se obtenga $R_{xy}(\tau) = 0$ para todo valor de τ , significa que x e y son incoherentes, también si $R_{xy}(0) = 0$ se tendrá que las señales x e y son ortogonales.

Lo anterior es muy importante ya que en el capítulo posterior se analizará la formulación de Mavroeidis and Papageorgiou, en donde está muy diferenciada la modelación matemática tanto de la componente coherente como incoherente del registro sintético generado.

4. METODOLOGÍA Y CONSIDERACIONES PARA LA MODELACIÓN DE SISMOS IMPULSIVOS

A continuación se presentan la modelación matemática que conlleva trabajar con sismos impulsivos y los tipos de aleatoriedad utilizados. Además se presenta el modelo de Mavroedis y Papageorgiou caracterizando los parámetros de la componente coherente, los cuales serán analizados incorporando aleatoriedad. Finalmente se presenta y define la aleatoriedad utilizada necesaria para realizar las iteraciones posteriores.

4.1 Descripción de la modelación de sismos impulsivos

La modelación de sismos, sean estos impulsivos o no, está gobernada principalmente por el análisis en tiempo y en frecuencia de la vibración. Al tratar la perturbación como una señal, se puede filtrar ya sea en el dominio temporal como en el dominio frecuencial haciendo uso de herramientas matemáticas como la transformada de Fourier (para el análisis en frecuencia), además de múltiples integraciones que dan como resultado la obtención de una señal dentro del rango de valores deseado.

Si bien son la aceleración, la velocidad y el desplazamiento los parámetros que comúnmente se utilizan en el análisis estructural, es necesario entender que estos valores son la respuesta que experimenta un sistema de un grado de libertad al ser excitado en este caso por un sismo, por lo que estos parámetros no son inherentes a la señal, sino más bien representan una consecuencia de ella.

Para el análisis de señales vibratorias se deben considerar los siguientes parámetros fundamentales que describen su comportamiento:

- Duración
- Frecuencia

- Energía
- Intensidad

4.1.1 Duración

Sin duda, los sismos impulsivos de caracterizan por su corta duración, lo cual no significa que no puedan ser registrados. De hecho la señal medida presenta elevados peak tanto de aceleración como de velocidad. Lo anterior es consecuencia del fenómeno que genera la perturbación, ya que una vez que ocurre la ruptura en una falla dada el proceso tarda algún tiempo a partir del inicio hasta su terminación. Al tiempo transcurrido durante la ruptura se le llama duración de la fuente. Al iniciarse la ruptura se generan las primeras ondas sísmicas las cuales viajan a través del medio en todas direcciones, dichas ondas se reciben en la superficie y es recién en este punto cuando se comienzan a percibir los efectos del sismo. Al continuar el fenómeno sísmico se siguen generando ondas que se recibirán en tiempos posteriores en el sitio donde se encuentra el aparato de medición, sin embargo la duración de los efectos de estas ondas no corresponde únicamente a la duración en la fuente, sino que a ésta se añaden otras circunstancias como los rebotes o reverberaciones de las ondas en las capas superficiales. Es por ello que la duración de los efectos puede ser mayor que la duración de la fuente, dependiendo del sitio en el que se reciben las ondas sísmicas (la distancia a la fuente y las condiciones propias del terreno del sitio). Por lo tanto la duración del sismo en el sitio de recepción es variable de sitio a sitio.

4.1.2 Frecuencia

El contenido de frecuencia es muy importante para analizar el sismo, ya que permite analizar sus propiedades sin considerar efectos temporales como el desfase de las ondas sísmicas. Los sismos en general presentan contenidos de frecuencias altas y bajas, las cuales muchas veces son filtrados para obtener una señal tal que sea representativa o cumpla ciertas características particulares necesarias para el análisis. Además es en el dominio de frecuencia en donde la señal es limpiada de ciertos valores que no pertenecen a la señal o que entorpecen y dificultan el análisis, lo que es llamado comúnmente ruido. No es extraño, por lo tanto, verificar que la gran mayoría de las formulaciones matemáticas que pretenden caracterizar señales se basan principalmente en el análisis en frecuencia.

En general los registros de tipo impulsivo tienen su principal contenido de frecuencias en valores relativamente bajos, provocando así cierta susceptibilidad de daño en estructuras de período largo. En este contexto se hace propicio analizar y caracterizar solicitaciones de Fuente Cercana (impulsivas) para predecir el comportamiento de las estructuras sujetas a dichas perturbaciones.

4.1.3 Energía

En términos de modelación de sismos la energía con la cual se origina y desencadena la vibración es un parámetro importante. Por ejemplo, por muy cerca que un sismo se origine respecto de una estación de medición, si éste no cuenta con una energía importante liberada muchas veces puede pasar desapercibido y solo representa lo que se denomina un sismo instrumental, el cual no es perceptible sino por medio de equipos sismológicos.

No es por lo tanto extraño notar que es la energía el parámetro con el cual comúnmente se caracterizan los sismos, lo cual permite construir una escala sismológica y así clasificar cada evento según la energía liberada.

Lo anterior, sin embargo, no significa que a largo plazo las vibraciones con poca energía no sean destructivas. De hecho constantes ciclos de vibraciones pueden generar fatiga del material, lo que representa un aspecto a considerar en el diseño de estructuras sometidas a numerosos ciclos de perturbación.

4.1.4 Intensidad

Si bien la energía liberada es la componente fundamental para reflejar cuantitativamente el carácter destructivo que puede tener un sismo, también es necesario verificar el tiempo en que dicha energía es liberada. La intensidad refleja cuanta energía es liberada por unidad de tiempo, lo que representa un parámetro de importancia debido a que muestra que los sismos impulsivos pueden liberar gran cantidad de energía en poco tiempo, característica importante de la impulsividad que poseen los sismos de fuente cercana.

Existen numerosas formas de medir la intensidad de los sismos. Una de las más reconocidas a nivel mundial y que entrega mucha información es la Intensidad de Arias, la cual fue propuesta por el reconocido investigador chileno Arturo Arias en 1970 (Arias 1970). Dicha formulación define la intensidad como la energía por unidad de peso disipada por una familia de osciladores de un grado de libertad, cuyas frecuencias están distribuidas normalmente, para un sismo y amortiguamiento dados. La deducción de su expresión matemática considera como modelo estructural el oscilador de un grado de libertad con amortiguamiento viscoso. La expresión es la siguiente:

$$I_{A} = \frac{\pi}{2g} \int_{0}^{t_{0}} \ddot{u}_{g}^{2}(\tau) d\tau$$
(4.1)

donde τ es la variable temporal, \ddot{u}_g es la aceleración del suelo durante el movimiento sísmico y t₀ es la duración total del movimiento, cuya definición queda supeditada a la duración de la fase fuerte, al total del registro acelerográfico, o al criterio de quien calcula. En la mayoría de los casos t₀ se considera como la duración total del registro figura 4-1.



Figura 4-1 Cálculo de la Intensidad de Arias (Bozorgnia and Campbell 2004).

Analizando los parámetros anteriormente definidos es casi intuitivo deducir que la modelación matemática de sismos debe contener y considerar tanto la duración, como la frecuencia y la energía.

Numerosas modelaciones enfrentan el problema de distintos puntos de vista. Mientras algunas se concentran en el filtrado de la señal en el dominio de la frecuencia, otras introducen a su modelación numerosos parámetros empíricos que dificultan muchas veces aislar la modelación de factores externos.

Existe una gran diferencia entre los distintos criterios de modelación de sismos. La más importante consiste principalmente en identificar si se pretende modelar sismos de fuente lejana o sismos de fuente cercana (impulsivos), ya que el tratamiento matemático es distinto.

4.2 Excitaciones de Fuente Lejana

Estas excitaciones pueden ser modeladas como un proceso aleatorio no estacionario. En el caso de modelos no separables el contenido de frecuencia es función del tiempo, es decir, cambia instante a instante. En el caso de modelos separables, en cambio, el contenido de frecuencia no cambia con el tiempo (sólo la amplitud de la excitación es función del tiempo). La función de densidad de potencia espectral de una excitación de tipo separable está dada por la siguiente expresión:

$$S_{\ddot{U}_g}(t,\omega) = [f_e(t)]^2 S_g(\omega)$$
(4.2)

De la expresión anterior se identifican los siguientes parámetros:

1) Sg(ω): Función de densidad de potencia espectral estacionaria

En la presente tesis se adoptará el modelo de Kanai-Tajimi modificado, también conocido como modelo de Clough y Penzien (Clough and Penzien 1993) y cuya expresión es la siguiente:

$$S_{g}(\omega) = \left[\frac{\omega^{4}}{\left(\omega_{f}^{2} - \omega^{2}\right)^{2} + 4\xi_{f}^{2} \omega^{2} \omega_{f}^{2}}\right] \left[\frac{\omega_{g}^{4} + 4\xi_{g}^{2} \omega^{2} \omega_{g}^{2}}{\left(\omega_{g}^{2} - \omega^{2}\right)^{2} + 4\xi_{g}^{2} \omega^{2} \omega_{g}^{2}}\right] S_{0}$$
(4.3)

Los parámetros que componen la expresión anterior son los siguientes:

S₀ : Factor de intensidad de la excitación.

 ω_g : Frecuencia filtro que caracteriza al suelo (filtro de Kanai-Tajimi).

 ξ_g : Amortiguamiento filtro que caracteriza al suelo (filtro de Kanai-Tajimi). Los parametros $\omega_f y \xi_f$ determian la caida de la densidad espectral hacia un valor nulo en la zona de muy bajas frecuencias. f_e(t): Es una función de modulación del tiempo, la cual describe la evolución en el tiempo de la densidad de potencia espectral.

Para la representación matemática de $f_e(t)$ se utiliza la siguiente expresión:

$$f_{e}(t) = a t^{b} e^{-ct}$$
(4.4)

Dónde se definen los parámetros a, b y c de la siguiente forma:

$$a = \left(\frac{e}{\varepsilon T_{D}}\right)^{b}$$

$$b = -\frac{\varepsilon \ln \eta}{1 + \varepsilon (\ln \varepsilon - 1)}$$

$$c = \frac{b}{\varepsilon T_{D}}$$
(4.5)

El parámetro T_D es el tiempo de duración del registro, además $\ \eta \ y \ \epsilon \ son \ constantes \ del modelo.$

La siguiente figura (Figura 4-2) muestra el modelo de Kanai Tajimi y el de Kanai Tajimi Modificado (indicado como Clough – Penzien en la Figura 4-2).



Figura 4-2 Modelos Kanai-Tajimi y Clough-Penzien.

4.3 Excitaciones de Fuente Cercana (Sismo Impulsivo)

En este estudio este tipo de excitación es modelada a partir del procedimiento indicado por Mavroeidis y Papageorgiou. A los fines de analizar la posible influencia del tipo de pulso en la respuesta estructural, se consideran 2 tipos de pulsos de velocidad: uno cuya forma corresponde a la media sinusoide y otro cuya forma corresponde a una sinusoide completa.

Se debe tener presente que la modelación considera las señales como procesos aleatorios no estacionarios, en donde la componente incoherente (asociada a la alta frecuencia) y la componente coherente (asociada a la baja frecuencia) se relacionan mediante superposición tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia para generar el registro sintético de fuente cercana.

La componente incoherente (alta frecuencia) puede modelarse de distintas formas, por ejemplo, Mavroeidis y Aki postulan una modelación llamada "Specific Barrier Model" la cual es adoptada en (Halldorsson et al 2011) para caracterizar y generar sismos según su distancia al epicentro, pero en la presente tesis se utilizará la modelación de excitaciones de fuente lejana anteriormente definida debido a que se consideran modelos más generales no asociados a ningún sitio en particular. En resumen, La generación de sismos impulsivos mediante el procedimiento de Mavroeidis y Papageorgiou implica la suma de la componente incoherente (de por si aleatoria que se modelará según Kanai-Tajimi Modificado) y una componente coherente (en la cual se variaran sus parámetros en forma aleatoria siendo este el objetivo principal de la presente tesis).

La componente coherente (baja frecuencia) se generará utilizando el modelo de Mavroeidis y Papageorgiou, lo que se detallará en extenso en capítulos posteriores.

4.4 Tipos de aleatoriedad

Una de las consideraciones fundamentales en la presente memoria es la incorporación de aleatoriedad en los parámetros de la componente coherente en el modelo de Mavroeidis y Papageorgiou, por lo cual es necesario analizar y definir el tipo de aleatoriedad a usar.

Se define primero un valor determinístico del parámetro, es cual es constante en todas las simulaciones. Por otro lado se define la aleatoriedad del valor del parámetro, el cual variará entonces en cada simulación. Por tratarse de valores continuos, se trabajara con distribuciones de probabilidad continuas.

4.4.1 Distribuciones Continuas

Función de Distribución

Una variable continua puede tomar infinitos valores dentro de un determinado rango. Existen diversos tipos de funciones de distribución de probabilidades, las más utilizadas son:

- Distribución Uniforme
- Distribución Normal
- Distribución Exponencial
- Distribución Chi-Cuadrado
- Distribución T-Student
- Distribución F

Para la presente tesis se adoptaran 2 tipos de aleatoriedad correspondiente a funciones de distribución continuas. Por un lado se selecciona la distribución Normal con un coeficiente de variación pequeño para representar una aleatoriedad leve o suave de la variable. Por otro lado se selecciona la distribución Uniforme para representar el comportamiento aleatorio alto o marcado de la variable en estudio.

4.4.2 Distribución Normal

La distribución normal es la más común entre todas las distribuciones de probabilidad utilizadas en Estadística y tiene importantes aplicaciones en la caracterización de variables asociadas a los elementos de una población.

Una justificación de la frecuente aparición de la distribución normal es el Teorema del Límite Central que establece que cuando los resultados de un experimento son debidos a un conjunto muy grande de causas independientes que actúan sumando sus efectos, siendo cada efecto individual de poca importancia respecto al conjunto, es esperable que los resultados sigan una distribución normal.

En resumen, la distribución normal es de suma importancia en estadística por tres razones principales:

- 1. Numerosas variables continuas de fenómenos aleatorios tienden a comportarse probabilísticamente como una distribución normal.
- 2. Es el límite al que convergen tanto variables aleatorias continuas como discretas.
- 3. Proporciona la base de la inferencia estadística clásica debido a su relación con el teorema del límite central.

Se representa una variable aleatoria que sigue una distribución normal con parámetros μ y σ^2 de la siguiente forma:

$$X \to N(\mu, \sigma^2) \tag{4.6}$$

Además su función de densidad es de la forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$\forall x \in \Re \text{ siendo } \sigma \succ 0 \text{ y } \mu \in \Re$$

$$(4.7)$$

en donde R es el conjunto de los números reales. Como se puede observar, la familia de distribuciones normales depende de los parámetros μ y σ^2 , que coinciden con la media y la varianza respectivamente.

La función de distribución se obtiene al integrar la función de densidad:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{2}} dx$$
(4.8)

La siguiente figura (figura 4-4) muestra la forma de la función de densidad normal.



Figura 4-3 Función de Densidad Normal.

4.4.3 La distribución uniforme

Esta distribución se caracteriza principalmente por el hecho que todos los intervalos de igual longitud en su rango son igualmente probables. El dominio está definido por dos parámetros, a y b, que son sus valores mínimo y máximo. La distribución es a menudo escrita en forma abreviada como U(a,b).

Diremos que la variable aleatoria X se distribuye uniforme en un intervalo [a,b] cuya función de densidad es la siguiente.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \le x \le b \\ 0 & en \text{ otro } caso \end{cases}$$
(4.9)

Representando gráficamente la función anterior se tiene:



Figura 4-4 Función de densidad Uniforme.

Su función de distribución será:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \ x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & si \ a \le x \le b \\ 1 & si \ x > b \end{cases}$$
(4.10)

y su representación gráfica:



Figura 4-5 Función distribución de probabilidades.

La media de esta variable es:

$$E(X) = \int_{a}^{b} x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} x \, dx = \frac{b+a}{2}$$
(4.11)

La varianza la calculamos a través de los momentos no

$$E(X^{2}) = \int_{a}^{b} x^{2} \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} x^{2} dx = \frac{b^{2} + ab + a^{2}}{3}$$
(4.12)

5. FORMULACIÓN DE SISMOS IMPULSIVOS SEGÚN MAVROEIDIS Y PAPAGEORGIOU

Como se mencionó anteriormente el sismo impulsivo sintético se compone de una componente incoherente (alta frecuencia) y una componente coherente (baja frecuencia), en donde la componente incoherente se modela como un proceso aleatorio no estacionario, Gaussiano, de media cero y separable, mientras que la componente coherente se modela según la formulación matemática utilizando los parámetros dados por Mavroeidis y Papagorgiou.

5.1 Modelación de Mavroeidis y Papageorgiou

La formulación está basada en el análisis de un gran número de registros medidos en todo el mundo (alrededor de 165), la gran mayoría medidos a menos de 20 km de la falla. De ellos menos de la mitad exhibieron fuertes pulsos de velocidad, en general el fenómeno físico que incrementa la intensidad del sismo es la propagación de la onda en dirección de ruptura y con una velocidad aproximadamente igual a la velocidad de onda de corte (principal causa de los pulsos de velocidad observados en regiones cercanas a la zona de ruptura).

Para el modelo de Mavroeidis y Papageorgiou fue necesario calibrar la formulación con el fin de representar de mejor forma la mayor cantidad de eventos sísmicos impulsivos considerados en la investigación. La siguiente figura (Figura 5-1) muestra los diversos tipos y formas de pulsos de velocidad considerados en la formulación de Mavroeidis Y Papageorgiou.



Figura 5-1 Pulsos de velocidad. (Mavroeidis and Papageorgiou 2003)

Para el análisis de las ondas producidas por el sismo se utiliza la teoría de señales. Existen variadas formulaciones matemáticas para describir el comportamiento de las ondas, pero pocas son usadas en la práctica debido a que se buscan formulaciones que necesiten el menor número de parámetros de entrada y sean representativas de la mayor parte de los registros. Además, es deseable que sea una función tal que puedan obtenerse su transformada de Fourier y sus características espectrales.

Las siguientes formulaciones entregan expresiones analíticas para la caracterización de ondas, según diversos parámetros de entrada:

Gabor

$$f(t) = Ae^{-(2\pi f_P / y)^2 t^2} \cos[2\pi f_P t + v]$$
(5.1)

Berlage

$$f(t) = AH(t)t^{n} e^{-(2\pi f_{P}/y)t} \cos[2\pi f_{P}t + v]$$
(5.2)

Rayleigh Generalizado

$$f(t) = A(-1)^{k} \frac{e^{t(v+\pi/2)}}{\left(i + \frac{2\pi f_{p}t}{k}\right)^{k+1}}$$

Donde:

(5.3)

$$f_{R(t)} = \operatorname{Re}\{f(t)\} \text{ or } f_t(t) = -\operatorname{Im}\{f(t)\}$$

Kupper

$$f(t) = A \left[\sin\left(m\frac{\pi t}{T}\right) - \frac{m}{m+2} \sin\left((m+2)\frac{\pi t}{T}\right) \right]$$
(5.4)

De las anteriores funciones la función de Gabor es la que mejor se adecua a las necesidades de modelación, tanto por describir el comportamiento de la onda como por el reducido número de parámetros necesarios para formularla: A, fp, v y γ que representan la Amplitud de la señal, frecuencia predominante, fase y una constante oscilatoria (asociada al número de oscilaciones, parámetro instrumental más que un parámetro propio de la fuente), respectivamente.

Para efectos de representar de mejor manera las señales registradas, la función de Gabor es modificada, particularmente se reemplaza su envolvente Gaussiana por otra envolvente.

La función queda

$$f(t) = A \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi f_p}{\gamma}\right) \right] \cos(2\pi f_p t + \nu)$$
(5.5)

Debido a este cambio, es necesario limitar el tiempo de análisis t tal que se cumpla lo siguiente:

$$-\frac{\gamma}{2f_P} \le t \le \frac{\gamma}{2f_P} \tag{5.6}$$

Además, el periodo harmónico de la señal resultante debe ser más pequeño que el coseno añadido, por lo tanto se debe cumplir:

$$\frac{1}{f_P} < \frac{\gamma}{f_P} \Longrightarrow \gamma > 1 \tag{5.7}$$

Es importante verificar la variación de v y γ puesto que de estos parámetros se puede definir si la señal tendrá una forma simétrica o anti simétrica.

En las siguientes figuras (figuras 5-2 y 5-3) se muestra la variación en el comportamiento de la señal al variar v entre 0 y 180° y γ entre 1 y 2,5.

	Normalized	Normalized	Normalized	Normalized	Normalized	Normalized
v	Acceleration	Velocity	Displacement	Acceleration	Velocity	Displacement
0°	\sim	\sim	~	\sim	\sim	~
10°	\sim	\sim	~	\sim	\sim	~
20°	\sim	\sim	~	\sim	\sim	~
30°	\sim	\sim	~	\sim	\sim	~
40°	\sim	\sim	~	\sim	\sim	~
50°	\sim	\sim	~	\sim	\sim	~
60°	\sim	\sim	~	\sim	\sim	~
70°	\sim	\sim	~	\sim	\sim	\sim
80°	\sim	\sim	~	\sim	\sim	\sim
90°	\sim	\sim		\sim	\sim	\sim
100°	\sim	\sim		\sim	\sim	\sim
110°	\sim	\sim		\sim	\sim	\sim
120°	\sim	\sim	\sim	\sim	\sim	\sim
130°	\sim	\sim	~	\sim	\sim	\sim
140°	\sim	\sim	~	\sim	\sim	\sim
150°	\sim	\sim	~	\sim	\sim	\sim
160°	\sim	$\mathbf{\hat{v}}$	\sim	\sim	\sim	~
170°	\sim	\sim	\sim	\sim	\sim	\sim
180°	<u>ه</u> ل کړ					~
	10 0 10	10 0 10	10 0 10	10 0 10	10 0 10	10 0 10
		γ≈1.0			γ = 1.5	

Figura 5-2 Variaciones de v y γ . (Mavroeidis and Papageorgiou 2003).

0 °	\sim	\checkmark	~~	$\sim \sim$	\sim	~~
10°	\sim	\checkmark	~~	\sim	\sim	~~
20°	\sim	\sim	~~	~~~	\sim	~~~
30°	\sim	\sim	\sim	\sim	\sim	\sim
40°	\sim	\sim	\sim	\sim	\sim	~~
50°	\sim	\sim	~~	~~~	\sim	\sim
60°	\sim	\sim	\sim	$\sim \sim$	\sim	\sim
70°	\sim	\sim	~	~~~	~~	~~~
80°	\sim	\sim	~	\sim	\sim	\sim
90°	\sim	\sim	~	\sim	\sim	~~~
100°	\sim	\sim	~	\sim	\sim	\sim
110°	\sim	\sim	\sim	\sim	\sim	~~~
120°	\sim	\sim	\sim	\sim	~~	~~~
130°	\sim	\sim	\sim	\sim	\sim	~~
140°	\sim	\sim	\sim	\sim	~~	~~~
150°	\sim	\sim	~	\sim	\sim	\sim
160°	\sim	\sim	\sim	\sim	\sim	~~~
170º	\sim	\sim	\sim	\sim	~~	~~
180°			<u></u>	1		
	10 0 10	~ 20	10 0 10	10 0 10	10 0 10 v=25	10 0 10
		1 - 2.0			1 - 2.5	

Figura 5-3 Variaciones de v y γ . (Mavroeidis and Papageorgiou 2003)

Se aprecia que para $v = 0^{\circ}$ y $v = 180^{\circ}$ se obtiene un pulso simétrico, mientras que para $v = 90^{\circ}$ se obtiene un pulso antisimétrico,

Además de la observación de los parámetros v y γ es importante notar que la amplitud de la velocidad es independiente de f_p, lo que representa un dato a considerar para la posterior modelación de la componente coherente.

Para que la función de Gabor sea representativa y caracterice el pulso sísmico es necesario calibrarla. Para ello se utilizaron registros y se buscaron valores de los parámetros A, f_p , v, γ y T_o. (donde T_o es el lapso hasta que ocurre el peak de velocidad)

No.	Location	Station	Component*	A	7	ν (°)	$f_{\rm P} ({\rm Hz})$	t_0 (sec)
1	Parkfield, CA, USA	C02	SN	60.0	1.700	100.0	0.500	4.100
2	San Fernando, CA, USA	PCD	SN	115.0	1.600	180.0	0.680	3.000
3	Gazli, USSR	KAR	Rad	45.0	2.900	70.0	0.238	8.400
4	Bucharest, Romania	BRI	SN	62.0	2.400	200.0	0.470	3.830
5	Tabas, Iran	TAB	SP	104.0	2.200	180.0	0.190	12.400
6	Coyote Lake, CA, USA	GA6	SN	48.0	1.550	315.0	1.000	2.600
7	Imperial Valley, CA, USA	E04	SN	71.0	1.900	305.0	0.225	6.100
		E05	SN	84.0	1.900	300.0	0.255	6.600
		E06	SN	96.0	2.100	265.0	0.260	6.350
		E07	SN	79.0	2.100	25.0	0.275	6.100
		EMO	SN	78.0	2.300	0.0	0.340	4.950
8	Mexicali Valley, Mexico	VCT	SN	80.0	1.500	270.0	0.270	11.550
9	Morgan Hill, CA, USA	HAL	SN	38.0	1.750	130.0	1.150	10.450
10	Palm Springs, CA, USA	NPS	SN	60.0	1.700	170.0	0.800	2.890
		DSP	SN	21.0	2.000	80.0	0.600	2.520
11	Whittier Narrows, CA, USA	DOW	SN	29.0	2.200	220.0	1.200	5.350
		NWK	SN	20.0	2.100	200.0	1.350	4.300
12	Superstition Hills, CA, USA	PTS	SN	112.0	1.800	237.0	0.445	12.295
		ELC	SN	46.0	1.650	210.0	0.430	13.180
13	Loma Prieta, CA, USA	LGP	SN	60.0	3.000	280.0	0.310	7.600
		STG	SN	47.0	1.900	150.0	0.270	6.500
14	Sierra Madre, CA, USA	COG	Rad (filt)	9.2	2.300	260.0	1.100	2.190
15	Erzincan, Turkey	ERZ	SN	67.0	2.500	210.0	0.410	3.700
16	Landers, CA, USA	LUC	SN	100.0	1.210	55.0	0.170	10.500
17	Northridge, CA, USA	JFA	SN	87.0	2.300	100.0	0.330	4.120
		RRS	SN	142.0	1.700	20.0	0.800	2.430
		SCG	SN	93.0	2.500	0.0	0.340	3.650
		SCH	SN	80.0	2.300	0.0	0.330	3.770
		NWS	SN	94.0	1.700	200.0	0.370	4.770
18	Aigion, Greece	AEG	Long	44.5	1.450	75.0	1.400	3.840
10		AEG	Tran	61.0	1.200	205.0	1.480	4.340
19	Izmit, Turkey	ARC	SN	41.0	1.380	225.0	0.140	14.700
		SKR	SP	67.0	1.023	5.0	0.105	9.000
		YPT	SP (first pulse)	35.0	1.550	90.0	0.190	9.150
		0.07	SP (second pulse)	91.5	1.050	10.0	0.137	12.050
		GBZ	SN	34.5	2.200	220.0	0.210	6.600
		GBZ	SP	28.0	1.800	85.0	0.165	4.900
20	Chi-Chi, Taiwan	TCU052	SN	225.0	1.048	190.0	0.079	35.400
		100068	SN	332.0	1.055	190.0	0.082	36.300
		1000/5	SN	105.0	1.200	220.0	0.170	28.500
		TCU0/6	SN	70.0	1.088	200.0	0.175	27.280
21	Kata Inc. I	ICU129	SN SN (Correction)	52.0	1.090	200.0	0.130	27.100
21	Kobe, Japan'	KOB	SIN (first pulse)	85.0	1.550	270.0	1.000	/.600
			SN (second pulse)	75.0	1.700	270.0	1.100	8.400
			SN (third pulse)	45.0	2.000	70.0	0.500	9.300

La siguiente figura (Figura 5-4) muestra los parámetros obtenidos de A, f_p , v, γ y T_o para la función de Gabor según el sismo que se quiere representar.

Figura 5-4 Parámetros obtenidos	para caracterizar	diversos	sismos	impulsivos.	(Mavroeidis	and			
Papageorgiou 2003)									

De lo anterior, se deducen varias conclusiones, una muy importante es que no necesariamente Tp coincide con el periodo correspondiente al peak del espectro respuesta de pseudovelocidad, aunque puede darse en muchos casos.

El parámetro Tp está asociado principalmente a la magnitud del sismo. Si se asume que la duración del pulso es independiente de la distancia fuente-estación, para estaciones localizadas en un radio de 10 km de la falla el periodo del pulso y la magnitud se pueden relacionar mediante la siguiente expresión.

$$\log T_P = -2.9 + 0.5 \,\mathrm{M}_{\mathrm{W}} \tag{5.8}$$

5.2 Generación de un registro sísmico impulsivo sintético

Como se dijo anteriormente el sismo impulsivo, también llamado sismo de fuente cercana, se compone de la superposición tanto en el dominio del tiempo como en el de frecuencia de una componente incoherente (modelada con Kanai-Tajimi Modificado) y una coherente (procedimiento descrito en Mavroeidis and Papageorgiou (2003)).

5.3 Metodología para la obtención de sismos impulsivos según Mavroeidis y Papageorgiou

En primer lugar se debe definir la magnitud del sismo que se quiere generar, para lo cual se utiliza la expresión que relaciona la magnitud con el periodo, obteniéndose f_p (Ecuación 4-24).

Además de los parámetros anteriormente definidos se introduce el parámetro T_0 el cual representa el lapso de tiempo en que el pulso presenta su peak.

Como resultado el modelo de Mavroeidis y Papageorgiou entregará un registro de aceleración de la componente coherente (Ecuación 4-25) el cual puede ser integrado para obtener la velocidad y el desplazamiento.

$$a(t) = \begin{cases} -\frac{A\pi f_P}{\gamma} \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{2\pi f_P}{\gamma}(t-T_0)\cos\left[2\pi f_P(t-T_0)+\nu\right]\right) \\ +\gamma\sin\left[2\pi f_P(t-T_0)+\nu\right]\left[1+\cos\left(\frac{2\pi f_P}{\gamma}(t-T_0)\right)\right] \end{bmatrix} \end{cases} T_0 - \frac{\gamma}{2f_P} \le t \le T_0 + \frac{\gamma}{2f_P} \quad \gamma > 1 \\ 0, \text{ otherwise} \end{cases}$$

$$(5.9)$$

Por lo tanto para el modelo de Mavroedis y Papageorgiou es de vital importancia definir con antelación los parámetros de A, fp, v, γ y T_o que se utilizarán para generar la componente coherente del registro de aceleración, puesto que diferentes valores darán como resultado diferentes sismos sintéticos.

A continuación se resumen los pasos necesarios para obtener el registro sintético impulsivo.

- Para la componente incoherente del registro de aceleración Mavroeidis y Papageorgiou se utiliza el modelo de Kanai Tajimi modificado.
- Obtener la componente coherente con los parámetros antes definidos (5 parametros).
- Calcular las transformadas de Fourier de los registros de aceleración sintéticos (coherente e incoherente).
- Restar el espectro de amplitud de Fourier del registro sintético coherente con el espectro de amplitud de Fourier del registro sintético incoherente

- 5) Generar un registro de aceleración sintético con el Espectro de Amplitud de Fourier obtenido en el paso anterior, además debe coincidir con la fase de la transformada de Fourier del registro incoherente.
- 6) Superponer los registros generados. Se obtendrá el registro impulsivo desfasado en el tiempo tal que el peak en la envolvente coincide con el tiempo en que el frente de onda llega a la estación.

La siguientes figuras (5-5, 5-6 y 5-7) muestran un ejemplo de la obtención de registros de aceleración, velocidad y desplazamiento para la componente incoherente (asociado a la alta frecuencia), coherente (asociado a la baja frecuencia) y el sismo impulsivo resultante de la superposición de ambas componentes.



Figura 5-5 Registro sintético de alta frecuencia (componente incoherente) (Mavroeidis and Papageorgiou 2003)



Figura 5-6 Registro sintético de baja frecuencia (componente coherente) (Mavroeidis and Papageorgiou 2003)



Figura 5-7 Registro sintético impulsivo resultante (Mavroeidis and Papageorgiou 2003)

Finalmente se evidencia la ventaja que presenta este método sobre otros que producen registros sintéticos debido a la utilización de parámetros como f_p y A que aparecen explícitamente en la ecuación, lo que permite variarlos y por lo tanto variar las características del sismo. Representa una gran ventaja si se requiere el registro para fines específicos y evaluar, por ejemplo, la sensibilidad estructural frente a sismos de fuente cercana de diferentes magnitudes. Sin embargo no se puede olvidar que este método fue calibrado utilizando los registros de fuente cercana anteriormente descritos, por lo que se debe reconocer que el comportamiento de sismos impulsivos futuros no está cien por
ciento predicho por esta modelación y siempre existe la posibilidad de que el sismo real se comporte de manera un poco distinta al sismo sintético simulado.

5.4 Parámetros adoptados para la modelación de sismos impulsivos de Mavroeidis y Papageorgiou

A continuación se detalla el rango de valores que se considerarán en la presente tesis para la obtención de la componente coherente del modelo de Mavroeidis y Papageorgiou.

5.4.1 Definición de parámetros

Existen 5 parámetros que definen completamente la formulación de la componente coherente del sismo impulsivo, ellos son;

- A: Amplitud del pulso de velocidad del sismo.
- f_p: Frecuencia predominante del pulso
- v: Ángulo de fase
- y: Carácter oscilatorio asociado a la cantidad de ciclos
- T_o: Es el instante de tiempo en el cual se produce el máximo de la envolvente del pulso.

5.4.2 Criterio y valores adoptados

A continuación se explica el criterio utilizado para la elección de los valores de los parámetros de la formulación de la componente coherente considerados en la presente tesis.

- El parámetro To no tiene mayor incidencia en el análisis, debido a que solamente define el tiempo en que el pulso de velocidad presenta su peak.
- El parámetro A es designado según comparación de múltiples registros de pseudovelocidad de sismos de fuente cercana, corresponde a un valor cercano al PGV (peak ground velocity) de los sismos impulsivos. Considerando el promedio entre los registros de fuente cercana medidos, se concluye que A debe tener un valor constante y por lo tanto no sujeto a aleatoriedad igual a 100 cm/s.
- Del anterior análisis, se evidencia que v le otorga al pulso de velocidad la característica de representar un medio seno o un seno completo. Debido a esta característica este parámetro es muy importante y decisivo en la presente tesis, puesto que según el rango de valores en que se defina v se estará trabajando con un sismo impulsivo distinto (Figuras 5-8 y 5-9). Se deduce que valores entre el rango -π/2≤ v ≤ π/2 con media 0 produce un pulso de velocidad de medio seno y con valores en el rango π/2 ≤ v ≤ 3π/4 con media π/2 se obtiene un pulso de velocidad sinusoidal completo.



Figura 5-8 Pulso de velocidad de medio seno: componente incoherente (arriba), componente coherente (medio) y registro de velocidad sintético resultante (abajo)



Figura 5-9 Pulso de velocidad seno completo: componente incoherente (arriba), componente coherente (medio) y registro de velocidad sintético resultante (abajo)

- Como se observó anteriormente, los valores de γ dependen de la variación que experimenta v y viceversa. Por lo tanto, valores en el rango 1 ≤ γ ≤ 1.5 con media 1.25 se utilizan para el pulso de velocidad de medio seno y valores en el rango 1 ≤ γ ≤ 2 con media 1.5 se obtiene un pulso de velocidad sinusoidal completo.
- Para ambos pulsos se considerará To en el rango entre 3 a 9 seg con media 6 seg
- También para ambos pulsos se considerará Tp en el rango entre 1.0 y 3.0 seg con media 2.0 seg.

5.4.3 Parámetros para la respuesta lineal y no lineal

Para la respuesta lineal se realiza el siguiente procedimiento:

1) Se genera un registro sintético impulsivo con una duración de 30 seg.

2) Se obtiene el espectro de respuesta considerando un sistema de 1 gdl, para lo cual se resuelve la ecuación de movimiento del sistema considerando como excitación el sismo sintético generado. Se consideran los siguientes valores:

- Amortiguamiento $(\xi) = 0.05$
- Periodo: entre 0 a 4 seg
- Intervalo entre periodos: 0,05 seg

Para la respuesta no lineal se resolverá la ecuación de movimiento considerando un sistema elastoplástico perfecto. La respuesta no lineal será caracterizada en términos de la relación de desplazamiento inelástico Cd, definida como la respuesta de

desplazamiento de un sistema inelástico dividida por la respuesta de desplazamiento del correspondiente sistema lineal.

En este ítem se introduce el Factor de Modificación de Respuesta (R) como el factor preponderante a la hora de considerar la no linealidad en la obtención de espectros de respuesta, ya que permite reducir la intensidad de las cargas elásticas usadas para el diseño a niveles inelásticos.

El Factor de Modificación de Respuesta consta del efecto simultáneo de 3 parámetros: ductilidad, sobre resistencia y redundancia. Se asocia con cada parámetro un componente del factor R, que se puede definir de la siguiente forma:

$$R = R\mu \cdot R\Omega \cdot R\rho \tag{5.10}$$

En la presente memoria se utilizará el factor R que representa solo el efecto de la ductilidad, por lo tanto arbitrariamente se consideraran los siguientes valores de R;

- R=3
- R=8

5.5 Procesamiento computacional de datos e iteraciones.

Debido a la existencia de aleatoriedad, se necesita un número determinado de iteraciones para que un gráfico sea representativo y en donde se pueda inferir alguna conclusión sobre la influencia que tiene la variable en estudio. De hecho, la aleatoriedad se agrega para determinar la influencia de los parámetros en la obtención final del registro sintético, ya sean aceleraciones, velocidades, desplazamientos y espectros de respuesta tanto elásticos como inelásticos. Al utilizar un programa de programación computacional es necesario optimizar tanto el número de bucles que retardan la iteración como también el número de matrices a utilizar teniendo en cuenta que se trata de 1000 iteraciones por parámetro, por cada nivel de aleatoriedad y por cada factor de modificación de la respuesta (R), lo que significa que en promedio la obtención de gráficos para cada parámetro tarda alrededor de 8 horas.

A modo de resumen, la siguiente tabla (Tabla 4-1) esquematiza el plan de trabajo necesario para obtener todos los gráficos en la presente tesis. Cabe recordar que la respuesta inelástica a cada pulso es además analizada para R=3 y R=8 en forma diferenciada.

PULSO I	PULSO II
(velocidad de la componente coherente ≈	(velocidad de la componente coherente ≈
Sinusoidal Completo)	Media Sinusoide)
La componente coherente es determinística (el mismo pulso en todos los registros sintéticos)	La componente coherente es determinística (el mismo pulso en todos los registros sintéticos)

Tabla 5-1 Resumen Iteraciones.



5.6 Caracterización de resultados

De acuerdo a lo anteriormente descrito se obtendrán 1000 curvas para cada parámetro en estudio según la aleatoriedad y la ductilidad analizada.

A modo de ejemplo, las siguientes figuras (5-10 y 5-11) muestra tanto la obtención de espectros de respuesta elásticos como gráficos Cd v/s Tn para el caso particular Pulso Sinusoidal Completo, Aleatoriedad Alta, R=8 y variación aleatoria del parámetro γ de la componente coherente.



Figura 5-10 Espectro de Pseudo-Aceleración (evaluación parámetro γ).



Figura 5-11 Factor de desplazamiento inelástico (evaluación parámetro γ).

6. **RESULTADOS OBTENIDOS**

A continuación se presentan los gráficos obtenidos tanto para la respuesta elástica como inelástica, es decir, se analizan los espectros de respuesta elásticos y los gráficos Cd v/s Tn para cada variable en particular.

La presentación de los resultados obtenidos tendrá el siguiente orden:

Se presentan los espectros de respuesta elásticos y los gráficos Cd v/s Tn, considerando las 1000 iteraciones, en donde se muestran en el mismo grafico curvas que representan el valor máximo, el valor mínimo, el valor medio, el valor medio más una desviación estándar y el valor medio menos una desviación estándar, con el fin de mostrar el comportamiento de la curva media respecto a los valores extremos.

Posteriormente se aísla solo la curva media de cada gráfico, mostrándolas todas en un solo gráfico correspondiente a la forma sinusoidal del pulso de velocidad utilizado para la generación del sismo impulsivo, con lo que se pretende distinguir el comportamiento medio entre parámetros y cuál o cuáles de ellos son los más influyentes a la hora de obtener espectros tanto elásticos como inelásticos.

8.2 Espectros de Pseudo-Aceleración y Factor de Desplazamiento Inelástico

Se presentan los resultados obtenidos considerando las 1000 iteraciones con el fin de mostrar el comportamiento del valor medio respecto a los valores extremos.



6.1.1 Pulso Sinusoidal Completo

Figura 6-1 Componente coherente determinística



Figura 6-2 Componente coherente determinística: factor de desplazamiento inelástico, R = 3 (arriba) y R = 8 (abajo)



Figura 6-3 Aleatoriedad leve en parámetro y de la componente coherente



Figura 6-4 Aleatoriedad leve parámetro y de la componente coherente: factor de desplazamiento inelástico, R = 3 (arriba) y R = 8 (abajo)



Figura 6-5 Aleatoriedad leve en parámetro ν de la componente coherente



Figura 6-6 Aleatoriedad leve parámetro v de la componente coherente: factor de desplazamiento inelástico, R = 3 (arriba) y R = 8 (abajo)



Figura 6-7 Aleatoriedad leve en parámetro To de la componente coherente



Figura 6-8 Aleatoriedad leve parámetro To de la componente coherente: factor de desplazamiento inelástico, R = 3 (arriba) y R = 8 (abajo)



Figura 6-9 Aleatoriedad leve en parámetro Tp de la componente coherente



Figura 6-10 Aleatoriedad leve parámetro Tp de la componente coherente: factor de desplazamiento inelástico, R = 3 (arriba) y R = 8 (abajo)



Figura 6-11 Aleatoriedad alta en parámetro γ de la componente coherente



Figura 6-12 Aleatoriedad alta parámetro y de la componente coherente: factor de desplazamiento inelástico, R = 3 (arriba) y R = 8 (abajo)



Figura 6-13 Aleatoriedad alta en parámetro v de la componente coherente



Figura 6-14 Aleatoriedad alta parámetro v de la componente coherente: factor de desplazamiento inelástico, R = 3 (arriba) y R = 8 (abajo)



Figura 6-15 Aleatoriedad alta en parámetro To de la componente coherente



Figura 6-16 Aleatoriedad alta parámetro To de la componente coherente: factor de desplazamiento inelástico, R = 3 (arriba) y R = 8 (abajo)



Figura 6-17 Aleatoriedad alta en parámetro Tp de la componente coherente



Figura 6-18 Aleatoriedad alta parámetro Tp de la componente coherente: factor de desplazamiento inelástico, R = 3 (arriba) y R = 8 (abajo)



6.1.2 Pulso Media Sinusoide

Figura 6-19 Componente coherente determinística



Figura 6-20 Componente coherente determinística: factor de desplazamiento inelástico,

R = 3 (arriba) y R = 8 (abajo)



Figura 6-21 Aleatoriedad leve en parámetro y de la componente coherente



Figura 6-22 Aleatoriedad leve parámetro y de la componente coherente: factor de desplazamiento inelástico, R = 3 (arriba) y R = 8 (abajo)



Figura 6-23 Aleatoriedad leve en parámetro v de la componente coherente



Figura 6-24 Aleatoriedad leve parámetro v de la componente coherente: factor de desplazamiento inelástico, R = 3 (arriba) y R = 8 (abajo)



Figura 6-25 Aleatoriedad leve en parámetro To de la componente coherente



Figura 6-26 Aleatoriedad leve parámetro To de la componente coherente: factor de desplazamiento inelástico, R = 3 (arriba) y R = 8 (abajo)


Figura 6-27 Aleatoriedad leve en parámetro Tp de la componente coherente



Figura 6-28 Aleatoriedad leve parámetro Tp de la componente coherente: factor de desplazamiento inelástico, R = 3 (arriba) y R = 8 (abajo)



Figura 6-29 Aleatoriedad alta en parámetro y de la componente coherente



Figura 6-30 Aleatoriedad alta parámetro y de la componente coherente: factor de desplazamiento inelástico, R = 3 (arriba) y R = 8 (abajo)



Figura 6-31 Aleatoriedad alta en parámetro v de la componente coherente



Figura 6-32 Aleatoriedad alta parámetro v de la componente coherente: factor de desplazamiento inelástico, R = 3 (arriba) y R = 8 (abajo)



Figura 6-33 Aleatoriedad alta en parámetro To de la componente coherente



Figura 6-34 Aleatoriedad alta parámetro To de la componente coherente: factor de desplazamiento inelástico, R = 3 (arriba) y R = 8 (abajo)



Figura 6-35 Aleatoriedad alta en parámetro Tp de la componente coherente



Figura 6-36 Aleatoriedad alta parámetro Tp: de la componente coherente: factor de desplazamiento inelástico, R = 3 (arriba) y R = 8 (abajo)

6.2 Gráficos de valores medios

Se presentan los resultados considerando solo las curvas medias de los gráficos anteriormente obtenidos.

6.2.1 Respuesta Elástica



Figura 6-37 Pulso Sinusoidal Completo



Figura 6-38 Pulso Sinusoidal Completo: desviación standard de ordenadas espectrales de Pseudo-Aceleración.



Figura 6-39 Pulso Media Sinusoide



Figura 6-40 Pulso Media Sinusoide: desviación standard de ordenadas espectrales de Pseudo-Aceleración.

6.2.2 Respuesta Inelástica

A continuación se muestran gráficos inelásticos en parejas, en donde se visualiza el mismo gráfico con ordenadas de 0 a 10 y de 0 a 3, lo que permite distinguir de mejor manera las variaciones que experimentan las curvas sobre todo en la zona de altas frecuencias, además se muestra la desviación estándar graficada para cada forma sinusoidal del pulso de velocidad y por cada tipo de parámetro en análisis, con el fin de identificar la dispersión que sufren las curvas en análisis.



Figura 6-41 Pulso Sinusoidal Completo: valores medios del Factor de Desplazamiento Inelástico (R=3)



Figura 6-42 Pulso Sinusoidal Completo: valores medios del Factor de Desplazamiento Inelástico (R=3) - Imagen aumentada respecto de la anterior



Figura 6-43 Pulso Sinusoidal Completo: desviación standard del Factor de Desplazamiento Inelástico (R=3)



Figura 6-44 Pulso Sinusoidal Completo: valores medios del Factor de Desplazamiento Inelástico

(R=8)



Figura 6-45 Pulso Sinusoidal Completo: valores medios del Factor de Desplazamiento Inelástico (R=8) - Imagen aumentada respecto de la anterior



Figura 6-46 Pulso Sinusoidal Completo: desviación standard del Factor de Desplazamiento Inelástico (R=8)



Figura 6-47 Pulso Media Sinusoide: valores medios del Factor de Desplazamiento Inelástico

(R=3)



Figura 6-48 Pulso Media Sinusoide: valores medios del Factor de Desplazamiento Inelástico (R=3) - Imagen aumentada respecto de la anterior







Figura 6-50 Pulso Media Sinusoide: valores medios del Factor de Desplazamiento Inelástico



Figura 6-51 Pulso Media Sinusoide: valores medios del Factor de Desplazamiento Inelástico (R=8) - Imagen aumentada respecto de la anterior



Figura 6-52 Pulso Media Sinusoide: desviación standard del Factor de Desplazamiento Inelástico (R=8).

7. ANALISIS DE RESULTADOS

A continuación se analizan los resultados obtenidos en el siguiente orden;

1°) Análisis de valores extremos.

2°) Análisis de gráficos medios.

Es importante notar que los valores extremos dependen del número de simulaciones (a mayor número de simulaciones mayores valores extremos debido a que se consideran procesos Gaussianos), pero que con suficientes valores (desde 1000 iteraciones en adelante) se presentan una estabilidad en los valores medios, razón por la cual se adoptó este valor en la presente tesis.

7.1 Análisis de valores extremos

7.1.1 Pulso Sinusoidal Completo, aleatoriedad leve (Figuras 6-1 a 6-10)

Respuesta elástica:

- El máximo valor de aceleración se obtiene con aleatoriedad en el parámetro v
- Las ordenadas espectrales que resultan de la aleatoriedad de los parámetros γ,
 v, To son muy similares entre sí, pero difieren de las que resultan de la aleatoriedad en el parámetro Tp. En este último caso se observa que las ordenadas espectrales disminuyen a partir de 1,5 seg, pero con un mayor número de curvas visibles, lo cual no se observa en los casos anteriores.

- En la zona de periodos altos se observa que las ordenadas espectrales tienden a decrecer en forma exponencial. También se observa la similitud que existe entre los valores correspondientes a la aleatoriedad de los parámetros v y To.
- La aleatoriedad en el parámetro Tp genera mayores valores de desviación estándar, el espectro correspondiente a valores medios más una desviación standard es claramente visible en la zona de periodos mayores a 1,5 seg.

Respuesta Inelástica (R = 3).

- Los valores de Cd que resultan de la aleatoriedad de los parámetros γ, v, To son muy similares entre sí, pero difieren de los que resultan de la aleatoriedad en el parámetro Tp. En este último caso se observa que los valores de Cd disminuyen a partir de 1,5 seg, lo cual no se observa en los casos anteriores.
- Los valores de Cd que resultan de la aleatoriedad del parámetro Tp presentan mayores valores de desviación estándar en la zona de periodos cortos.
- En la zona de periodos mayores a 1,5 seg los valores máximos de Cd son más o menos constantes y ligeramente iguales a la unidad.

Respuesta inelástica (R = 8).

- Los valores de Cd que resultan de la aleatoriedad en los parámetros γ, ν, To y Tp son similares entre sí.
- En general, los valores de Cd convergen más rápidamente a la unidad que los correspondientes a R = 3.

7.1.2 Pulso Sinusoidal Completo, aleatoriedad alta (figuras 6-11 a 6-18).

Respuesta elástica:

- El máximo valor de aceleración se obtiene con aleatoriedad en el parámetro v
- Las ordenadas espectrales que resultan de la aleatoriedad en el parámetro Tp presentan una dispersión significativamente mayor.
- En la zona de periodos altos se observa que las ordenadas espectrales tienden a decrecer en forma exponencial. También se observa la similitud que existe entre los valores correspondientes a la aleatoriedad de los parámetros v, To.

Respuesta Inelástica (R = 3):

- Los valores de Cd que resultan de la aleatoriedad en los parámetros γ, v y To son similares entre sí.
- Los valores de Cd que resultan de la aleatoriedad en el parámetro Tp presentan una dispersión significativamente mayor.

Respuesta Inelástica (R = 8).

- Los valores de Cd que resultan de la aleatoriedad en los parámetros γ, v y To son similares entre sí, pero difieren de los que resultan de la aleatoriedad en el parámetro Tp.
- En general, los valores de Cd convergen más rápidamente a la unidad que los correspondientes a R = 3.
- Los valores de Cd que resultan de la aleatoriedad en el parámetro Tp presentan una dispersión significativamente mayor.

7.1.3 Pulso Media Sinusoide, aleatoriedad leve (figuras 6-19 a 6-28).

Respuesta Elástica

- El máximo valor de aceleración se obtiene con aleatoriedad en el parámetro Tp.
- Las ordenadas espectrales que resultan de la aleatoriedad de cada parámetro son similares entre sí, pero las que resultan de la aleatoriedad del parámetro Tp presentan una mayor desviación estándar.

Respuesta Inelástica (R = 3).

• Los valores de Cd que resultan de la aleatoriedad de cada parámetro son similares entre sí.

Respuesta Inelástica (R = 8).

- Los valores de Cd que resultan de la aleatoriedad en los parámetros γ, ν y To son similares entre sí, pero difieren de los que resultan de la aleatoriedad en el parámetro Tp.
- En general, los valores de Cd convergen más rápidamente a la unidad que los correspondientes a R = 3.
- Los valores máximos de Cd resultan de la aleatoriedad del parámetro Tp.

7.1.4 Pulso Media Sinusoide, aleatoriedad alta (figuras 6-29 a 6-36).

Respuesta Elástica

- El máximo valor de aceleración se obtiene con aleatoriedad en el parámetro y.
- Las ordenadas espectrales que resultan de la aleatoriedad de los parámetros γ y v son similares entre sí.
- Las ordenadas espectrales que resultan de la aleatoriedad en el parámetro Tp presentan una dispersión significativamente mayor.

Respuesta Inelástica (R = 3).

- Los valores de Cd que resultan de la aleatoriedad en los parámetros γ y To son similares entre sí.
- Los valores de Cd que resultan de la aleatoriedad en el parámetro Tp presentan una dispersión significativamente mayor.

Respuesta Inelástica (R = 8).

- Los valores de Cd que resultan de la aleatoriedad en los parámetros γ, v y To son similares entre sí.
- Los valores de Cd que resultan de la aleatoriedad en el parámetro Tp presentan una dispersión significativamente mayor.

7.2 Análisis de valores medios

7.2.1 Respuesta Elástica

A continuación se comparan en una misma figura los espectros de respuesta medios correspondientes a cada uno de los pulsos considerados en este trabajo.



Figura 7-1. Comparación entre espectros de respuesta medios: Pulso Media Sinusoide (izquierda) y Pulso Sinusoidal Completo (derecha)

Se observa claramente que sólo la aleatoriedad en el parámetro Tp resulta en diferencias apreciables en el espectro de respuesta. Cuando la aleatoriedad es alta las diferencias no son sólo cuantitativas sino también cualitativas en la forma espectral.

7.2.2 Respuesta Inelástica

A continuación se comparan en una misma figura los valores medios del factor de desplazamiento inelástico Cd correspondientes a cada uno de los pulsos y a cada uno de los valores de R considerados en este trabajo.



Figura 7-2. Valores medios del Factor de Desplazamiento Inelástico: (arriba) Pulso Media Sinusoide, R = 3 (izquierda) y R = 8 (derecha); (abajo) Pulso Sinusoidal Completo, R = 3 (izquierda) y R = 8

Se observa claramente que sólo un grado alto de aleatoriedad en el parámetro Tp resulta en diferencias apreciables en los valores medios de Cd, en especial cuando el valor de R es relativamente pequeño.

8. CONCLUSIONES

8.2 Consideraciones Generales

De acuerdo a los efectos de la generación del sismo propiamente tal, se aprecia que los registros impulsivos se generan a partir de la determinación del pulso de velocidad utilizado para la generación del sismo, ya sean estos de forma media sinusoidal o sinusoidal completa, lo que no significa que este hecho sea influyente en la obtención de la respuesta del sistema.

Como se mencionó anteriormente, los valores γ dependen de la variación que experimenta v y viceversa, esta relación entre las variables es fundamental para definir si se simula el sismo con un pulso de velocidad medio seno o seno completo. Las consecuencias de la decisión de utilizar pulso de velocidad medio seno o seno completo se evidencia tanto en los gráficos elásticos como inelásticos, aunque a simple vista se ven gráficos parecidos, analizando con mayor detención se visualiza que tanto los valores máximo como valores medios son diferentes para cada caso.

La zona de baja frecuencia (periodos altos) muestra que los espectros decaen en forma aproximadamente exponencial de diferentes formas, lo que infiere que el comportamiento para periodos altos no depende de la componente incoherente, sino más bien de los valores que se adopten para la generación de la componente coherente. Debido a que el sismo es resultado de la superposición tanto en tiempo como en frecuencia de una componente coherente y una componente incoherente es evidente que los espectros de pseudo-aceleración reflejan los efectos que ambas componentes aportan a la respuesta. Para altas frecuencias se verifican marcados peak de pseudo-aceleración, los cuales validan la suposición inicial, la cual se fundamenta en la idea que por tratarse de sismos impulsivos, las aceleraciones son marcadas y elevadas para valores de periodos bajos, pero que descienden rápidamente para periodos más altos.

No existe una relación directa entre un parámetro en particular y el peak del espectro de pseudo-aceleración. Si se analizan todos los espectros elásticos se verifica que los máximos valores no corresponden a la aleatoriedad de una sola variable en particular sino más bien los máximos valores se obtienen para diferentes variables para cada caso en análisis, por lo que no se puede concluir una relación directa entre un parámetro de la componente coherente del modelo de Mavroeidis y Papageorgiou y el máximo valor de pseudo-aceleración.

El valor de A igual a 100 cm/s es básicamente adoptado para comparar gráficos en una misma escala, debido principalmente a que si se adoptan valores mayores, es el pulso de velocidad el que cambia, lo que se traduce en que los espectros aumentarán en su magnitud, es decir, se espera un desplazamiento vertical en las curvas de los espectros obtenidos, por lo que se perdería la incidencia real de la variación de los parámetro en estudio.

Las distribuciones de probabilidad para la asignación de los parámetros, ya sean estas aleatoriedades altas o bajas, generan diversos efectos en la obtención de espectros tanto elásticos como inelásticos. La influencia que la aleatoriedad alta presenta mayormente en la visualización de mayor cantidad de gráficos (mayor valor de la desviación estándar), pero que en términos de máximo y mínimos y de valores medios no es un parámetro mayormente influyente en comparación con aleatoriedad leve, excepto en los gráficos obtenidos para el parámetros Tp, en donde es evidente que la respuesta es sensible no solo al tipo de aleatoriedad sino también al factor de modificación de la respuesta y en menor medida a la forma del pulso de velocidad de la componente coherente simulada.

Respecto de los espectros elásticos se verifica la marcada tendencia a obtener mayores valores para altas frecuencias y menores valores para periodos altos, lo que refleja el carácter impulsivo del sismo y de la respuesta del sistema.

De acuerdo a lo expuesto en las curvas del Factor de Desplazamiento Inelástico (Cd v/s Tn), es claro apreciar que el factor de modificación de la respuesta (R) es fundamental a la hora de obtener curvas mayor o menormente marcadas, ya que para un mayor valor de R las curvas se vuelven más suaves y con menos oscilaciones lo que demuestra que para sismo impulsivos un sistema altamente dúctil presentará desplazamientos máximos que rápidamente se asemejan al valor de fluencia, lo que se traduce que para periodos bajos del sistema (altas frecuencias) se tendrá mayor vulnerabilidad a los efectos del sismo impulsivo. Este efecto disminuye conforme aumenta el periodo natural del sistema, lo que
permite considerar la alternativa de aumentar el periodo natural del sistema para el caso en que se necesite prevenir efectos negativos provenientes de las aceleraciones de registros de fuente cercana.

Los gráficos determinísticos muestran que los valores adoptados son una aproximación al valor medio de las curvas tanto elásticas como inelásticas. Si bien en muchas ocasiones no se ajustan en gran medida a gráficos de parámetros tales como Tp, es posible establecer que con tales valores se pueden obtener espectros de respuesta bastante cercanos a los valores medios obtenidos para la variación de parámetros aleatorios considerando una variabilidad leve y R = 3.

Si bien el valor To genera espectros relativamente parecidos a los producidos por γ y v, presenta la característica principal de ser un parámetros que no infiere en mayor medida en la respuesta del sistema. Es más bien un parámetro introducido para definir el tiempo en que el pulso de velocidad presenta su peak, por lo tanto se evidencia que si To varía entre 3 y 9 segundos (valores característicos para sismos impulsivos), el desplazamiento horizontal de los espectros es casi imperceptible, por lo que no representa un parámetro que influye en demasía en la respuesta del sistema.

La alta variabilidad que presentan los gráficos pertenecientes al análisis aleatorio del valor Tp permite concluir lo enormemente preponderante que es este parámetro para la obtención de espectros de respuesta. Si se visualizan los espectros elásticos, tanto valores medios como desviaciones estándar, es fácil evidenciar la alta variabilidad en la obtención de gráficos y como la curva media no puede reflejar el comportamiento que cada curva en particular tiene por separado, más bien representa una mala aproximación de una iteración debido precisamente al desplazamiento tanto vertical como horizontal que presentan los espectros. Para los gráficos inelásticos, independiente de la aleatoriedad y el factor de modificación, se visualiza una mayor oscilación entre valores máximos y mínimos para frecuencias altas, lo que muestra la alta influencia que tiene el parámetro Tp tanto en la respuesta elástica como inelástica.

Los gráficos de desviación estándar, tanto elásticos como inelásticos muestran claramente la alta variabilidad que presenta el parámetro Tp comparada con los otros parámetros en análisis, lo que demuestra lo altamente sensible que es el sismo sintético generado respecto de la variación de este parámetro.

Finalmente se puede concluir que los factores que mayormente influyen en la obtención de espectros de respuesta tanto elásticos como inelásticos utilizando el Modelo de Mavroeidis y Papageorgiou para la simulación de la componente coherente son;

- El Periodo predominante del pulso de la componente coherente (Tp)
- El Factor de modificación de la respuesta (R)

En menor medida y aunque no representa un parámetro sino más bien la distribución probabilística de la variable en estudio, la aleatoriedad alta, representada por la distribución Uniforme, genera una tendencia a evidenciar efectos apreciables en la obtención de los registros obtenidos, tanto en la respuesta elástica como inelástica del sistema.

8.2 Resumen Final

En este trabajo se analizó la influencia de la aleatoriedad de los parámetros de la componente coherente del modelo de Mavroeidis y Papageorgiou para la generación de registros sintéticos de tipo impulsivo. La respuesta elástica fue evaluada en términos de espectros de respuesta de pseudo-aceleración, y la respuesta inelástica de sistemas perfectamente elastoplásticos fue evaluada en términos del factor de desplazamiento inelástico. Los resultados obtenidos permiten deducir las siguientes conclusiones:

- La única aleatoriedad relevante en la respuesta elástica *media* es la del parámetro Tp: sólo cuando el grado de aleatoriedad es alto, y sólo en períodos "intermedios" (i.e, periodos entre 0,5 a 2 segundos.).
- En la *dispersión* de la respuesta elástica, en cambio, no sólo es relevante la aleatoriedad del parámetro Tp sino también la del parámetro γ: no sólo cuando el grado de aleatoriedad es alto sino también cuando es pequeño, y no sólo en períodos intermedios sino también en períodos largos.

- La única aleatoriedad relevante en la respuesta inelástica *media* es también la del parámetro Tp: sólo cuando el grado de aleatoriedad es alto, y sólo en un intervalo relativamente pequeño de períodos intermedios.
- En la *dispersión* de la respuesta inelástica la única aleatoriedad relevante es, una vez más, la del parámetro Tp: sólo cuando el grado de aleatoriedad es alto, sólo cuando el valor de R es pequeño, y sólo en períodos intermedios.
- Todas las conclusiones anteriores son esencialmente independientes de la forma del pulso de velocidad.

REFERENCIAS

Arias A (1970): A measure of earthquake intensity. In: *Seismic Design for Nuclear Power Plants*, Hansen RJ (ed.). MIT Press, Cambridge, USA.

Bozorgnia Y, Campbell KW (2004): Engineering Characterization of Ground Motion. In: *Earthquake Engineering - From Engineering Seismology to Performance-Based Engineering*, Bozorgnia Y, Bertero VV (eds.). CRC Press, Boca Raton, USA.

Clough RW, Penzien J (1993): *Dynamics of structures*. 2nd edition, McGraw-Hill, New York, USA.

Halldorsson B, Mavroeidis GP, Papageorgiou AS (2011): Near-fault and far-field strong ground motion simulation for earthquake engineering applications using the Specific Barrier Model. *Journal of Structural Engineering*, **137** (3), 433-444.

Mavroeidis GP, Papageorgiou AS (2003): A mathematical representation of near-fault ground motions. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **93** (3), 1099-1131.

Papageorgiou AS, Aki K (1983): A Specific Barrier Model for the quantitative description of inhomogeneous faulting and the prediction of strong ground motion, Part I. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **73** (3), 693-722.

Villaverde R (2009): *Fundamental Concepts of Earthquake Engineering*. CRC Press, Boca Raton, USA.

BIBLIOGRAFÍA

Biggs J.M. (1964): Introduction to Structural Dynamics. Mc.Graw Hall. USA.

Charles Ebeling. (1997): An Introduction to Reliability and Maintainability Engineering, Mc Graw-Hill USA.

Chopra A. (2014): *Dynamics of Structures*. 4^a Ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Devore Jay L. (2008): *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias*. 7^a Ed. Cengage Learning, México.

Harris Cyril M. (2002): Shock and Vibration Handbook. 5ª Ed. McGraw-Hill, USA.

Hurty W.C. and M.F. Rubinstein. (1964): *Dynamics of Structures*. 5^a Ed, Prentice Hall, New Jersey.

Meirovich Leonard. (1975): Elements of Vibration Analysis. McGraw-Hill, USA.

Newland David Edward. (1993): An Introduction to Random Vibrations, Spectral & Wavelet Analysis.3era Edición, Longman. London.

Spiegel Murray R. (2009): Estadística. 4ª Ed. McGraw-Hill, Madrid.

Thomson W. (1965): Vibration Theory and Applications. Prentice Hall, New Jersey.

Thomson W.T. (1983): Teoría de Vibraciones: Aplicaciones. Prentice Hall, México.