PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA

UN MÉTODO HEURÍSTICO PARA OPTIMIZAR LA OPERACIÓN DE RECOLECCIÓN A DOMICILIO DE RESIDUOS SÓLIDOS

MAXIMILIANO FELIPE GONZÁLEZ REYNALS

Tesis para optar al grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Profesor Supervisor:
ALVARO H. LORCA GÁLVEZ
MATHIAS A. KLAPP BELMAR

Santiago de Chile, Mayo 2022

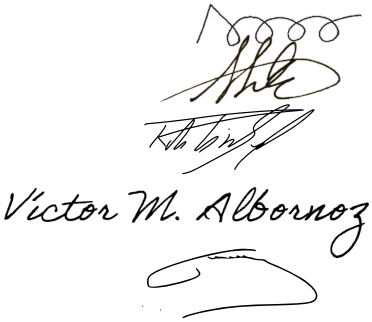
© MMXXII, MAXIMILIANO FELIPE GONZÁLEZ REYNALS

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA

UN MÉTODO HEURÍSTICO PARA OPTIMIZAR LA OPERACIÓN DE RECOLECCIÓN A DOMICILIO DE RESIDUOS SÓLIDOS

MAXIMILIANO FELIPE GONZÁLEZ REYNALS

Miembros del Comité:
ALVARO H. LORCA GÁLVEZ
MATHIAS A. KLAPP BELMAR
RICARDO GIESEN ENCINA
VÍCTOR M. ALBORNOZ SANHUEZA
EDUARDO E. AGOSÍN TRUMPER



Tesis para optar al grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Santiago de Chile, Mayo 2022

© MMXXII, MAXIMILIANO FELIPE GONZÁLEZ REYNALS

A mi familia y mis seres queridos

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quiero agradecer a mi familia y a mis seres queridos por ser un apoyo fundamental para mí. A mi Javita, que es mi motivación y fuente de inspiración en todo momento. A mi madre, Paula, por su amor infinito y su compañía en cada etapa de mi vida. A mi padre, Cristián, por acompañarme, aconsejarme y guiarme desde que tengo memoria para llegar a ser lo que soy. A mi hermana Julieta, por su cariño y paciencia. A mis tíos Guille y Mary, que me apoyaron y motivaron siempre. A mis amigos y amigas por su gran apoyo, su lealtad y los incontables momentos alegres que hemos vivido. Finalmente a la Igna, que ha sido mi pilar durante todo este proceso, por toda su paciencia, su cariño y los lindos momentos que hemos vivido.

En segundo lugar, agradezco a mis profesores supervisores, Alvaro Lorca y Mathias Klapp. La confianza, los consejos y la dedicación que me entregaron fue fundamental para poder llevar a cabo esta investigación. Agradezco al profesor Homero Larrain, por su buena disposición y por su orientación en momentos donde el horizonte se veía difuso. Agradezco también a los profesores Eduardo Agosín, Ricardo Giesen y Víctor Albornoz por formar parte de mi comisión y por sus valiosos comentarios y aportes a esta investigación.

Finalmente, agradezco a ANID por el apoyo y financiamiento parcial de esta investigación por medio del proyecto Fondecyt iniciación Nº 11190392.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

AGRADECIMIENTOS iv

ÍNDICE DE FIGURAS viii

ÍNDICE DE TABLAS x

RESUMEN xi

ABSTRACT xiii

1. INTRODUCCIÓN 1
   1.1. Contexto del estudio 1
   1.2. Motivación 2
   1.3. Objetivos de la tesis 6
   1.4. Estructura de la tesis 6

2. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA 8
   2.1. Arc Routing Problem y extensiones 9
   2.2. Node Routing Problems 10
   2.3. Problemas de ruteo de vehículos para recolección de residuos 11
   2.4. Consumo de combustible de un vehículo 14
      2.4.1. Consumo en trayectos cortos 16
      2.4.2. Consumo en trayectos largos 19
   2.5. Aproximación del costo de operación 20
   2.6. Aplicación de Geographical Information Systems (GIS) para el análisis de redes viales 21
   2.7. Clasificación de trabajos anteriores 22
   2.8. Contribución de este trabajo 24

3. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA 25
   3.1. Supuestos de modelación 26

3.2. Construcción de la representación de la red del problema 26
3.3. Parámetros y conjuntos adicionales 29
3.4. Formulación del problema 29
3.4.1. Restricciones 31
3.4.2. Función Objetivo 32
3.5. Validación del modelo 33

4. ALGORITMO DE SOLUCIÓN PROPUESTO 36
4.1. Secuenciamiento inicial de visita a segmentos de calle 36
4.2. Evaluación costo-eficiente de una secuencia de SdC: Algoritmo DP 37
4.2.1. Reducción del espacio de búsqueda 39
4.3. Mejoramiento local sobre una secuencia $\mathcal{R}$ 41
4.4. Algoritmo *Iterated Local Search* 47
4.5. Algoritmo de partición de secuencia 48
4.6. Heurística Acelerada con Partición de Secuencia 48

5. RESULTADOS COMPUTACIONALES 50
5.1. Validación de la heurística en instancias pequeñas 50
5.2. Diseño experimental 51
5.2.1. Consideraciones para el diseño experimental 56
5.3. Resultados generales 58
5.3.1. Impacto de optimizar la política de descarga ejecutada en el costo . . 63
5.3.2. Impacto de optimizar la secuencia de recolección ejecutada en el costo 65
5.3.3. Impacto de la densidad de basura por km^2 67
5.4. Análisis de sensibilidad: Caso de estudio en comuna de Providencia . . . 70
5.4.1. Impacto de la restricción de capacidad del vehículo 76
5.4.2. Impacto de la política de descarga ejecutada 78
5.5. Lecciones obtenidas a partir de la experimentación 80

6. APROXIMACIÓN DEL COSTO DE LA OPERACIÓN 83
6.1. Calidad de la aproximación del costo 85

7. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO 89
7.1. Conclusiones 90
7.2. Trabajo futuro 91

REFERENCIAS 93

Anexos 102
A. Formulación de las funciones de consumo 103
A.1. Función de consumo para trayectos largos 103
A.2. Función de consumo para trayectos cortos 103
B. Parámetros utilizados en la experimentación 105

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1 Instancia de ejemplo para el problema de recolección de residuos. 4

2.1 Ejemplo de solución al VRP-IF con un camión. 13

2.2 Perfiles de velocidad para ciclo de conducción. 17

3.1 Ejemplo de una secuencia de rutas. 25

3.2 Transformación desde grafo de calles a grafo basado en nodos. 28

3.3 Instancia real de ejemplo para el LDWCP-ADS. 34

3.4 Planificación óptima de rutas para instancia de ejemplo. 35

4.1 Eliminación de estados subóptimos en algoritmo DP. 41

4.2 Movimientos de búsqueda local entre índices i y j. 42

4.3 Perfil real y aproximado de carga acumulada en el vehículo. 44

4.4 Heurística Acelerada con Partición de Secuencia. 49

5.1 Familias de instancias construidas sobre comuna de Providencia. 53

5.2 Estructura general de una instancia tipo. 58

5.3 Segregación de costos por km servido de acuerdo a su naturaleza. 60

5.4 Métricas promedio obtenidas en la experimentación. 62

5.5 Utilización promedio del vehículo al descargar, según razón B/Q. 63

5.6 Instancias experimentales adicionales. 68

5.7 Ubicación de la comuna de Providencia en Santiago de Chile. 71

5.8 Segregación del costo por km servido: caso Providencia 74

5.9 Porcentaje de contribución al costo total según naturaleza. 75

5.10 Diferencia porcentual en costo y cantidad de descargas al relajar restricción de capacidad. 77

5.11 Sobrecosto al ejecutar una política estática versus dinámica según porcentaje ϕ. 79

6.1 Distancia de ciclo óptima z^* versus parámetros relevantes. 86

6.2 Estimación, incumbente y cota inferior del costo por km según instancia. . . . 88

ÍNDICE DE TABLAS

1.1 Consumo de combustible y distancia recorrida por ruta. 5

2.1 Consumo de combustible bajo distintos niveles de carga 20

2.2 Principales trabajos revisados. 23

4.1 Diferencia porcentual promedio entre costo real y estimación. 47

5.1 Validación de la heurística en instancias pequeñas. 51

5.2 Caracterización de instancias generadas. 54

5.3 Principales KPI estudiados. 55

5.4 Parámetros Heurística Acelerada con Partición de Secuencia. 58

5.5 Resultados generales sobre las 10 familias de instancias. 59

5.6 Costo según política de descarga ejecutada. 64

5.7 Impacto de la secuencia de recolección. 66

5.8 Impacto de la densidad vial de la red. 69

5.9 Resultados generales sobre comuna de Providencia. 72

6.1 Error porcentual $\tilde{\Delta}_C$ en la aproximación del costo por km. 87

B.1 Parámetros utilizados en diseño experimental 105

B.2 Parámetros utilizados en modelo de consumo de combustible 106

RESUMEN

En grandes ciudades, el costo de las etapas de recolección y transporte representa, aproximadamente, entre un 70% y 80% del presupuesto total para manejo de residuos. La oportunidad de reducir estos costos y planificar eficientemente la operación motiva el uso de técnicas de Investigación Operativa. Para ello, se han estudiado diversas variantes del Problema de Recolección de Residuos, en inglés *Waste Collection Problem* (WCP), que suelen modelar rutas de recolección y viajes intermedios de descarga para una flota de vehículos recolectores.

Típicamente, en la literatura especializada se asume que el costo de atravesar un segmento de calle es constante. Sin embargo, en operaciones como la recolección de residuos, el vehículo puede duplicar su peso al cargarse completamente, lo que incrementa su consumo instantáneo de combustible. En este trabajo estudiamos el problema de recolección de residuos con costos dependientes de la carga transportada, selección del sentido de tránsito en segmentos bidireccionales y posibilidad de múltiples viajes de descarga (LDWCP-ADS). Consideramos una función objetivo que minimiza costos por consumo de combustible y tiempo de operación.

Proponemos un modelo de programación lineal entera mixta que resuelve el problema en instancias pequeñas. Dada la naturaleza *NP-Hard* del problema, presentamos un algoritmo heurístico basado en *Iterated Local Search* y Programación Dinámica que permite obtener buenas soluciones al LDWCP-ADS en instancias de tamaño realista como una comuna o un barrio de una ciudad. Adicionalmente, proponemos un modelo aproximado del costo de operación, el cual puede ser resuelto analíticamente, obteniéndose una fórmula cerrada dependiente de parámetros estructurales del problema para la decisión óptima de la política de vaciamiento de carga y su costo asociado.

Para la comuna de Providencia en Santiago de Chile, verificamos empíricamente que el aumento en la densidad de basura por km^2 favorece la ejecución de una menor proporción de kilometraje muerto (correspondiente a tramos recorridos sin recolección), disminuyendo en hasta un 40% respecto a instancias similares de menor densidad. Obtenemos ahorros potenciales en costo de hasta un 1% al optimizar la secuencia de recolección en comparación a la solución al Problema del Cartero Chino, y de hasta un 46% en comparación a una secuencia no optimizada que visita consecutivamente el segmento más cercano y prioriza continuar derecho antes de ejecutar un viraje. Adicionalmente, al optimizar la política de descarga obtenemos ahorros de hasta 4.5% respecto a una política que descarga al alcanzar la capacidad máxima, y de hasta 12.4% respecto a una política que descarga al alcanzar un 50% de la capacidad. Nuestros experimentos indican que los beneficios sobre una secuencia no optimizada y/o una política estática de descarga, se obtienen principalmente cuando la razón entre el costo del combustible y del tiempo está balanceada, es decir, existe un trade-off entre operar cargado y ejecutar frecuentes viajes al vertedero.

Palabras Claves: Problema de recolección de residuos, consumo de combustible, kilometraje muerto.

ABSTRACT

In large cities, the cost of collection and transportation phases represents to approximately 70-80% of the total waste management budget. The opportunity to reduce these costs and efficiently plan the operation motivates the use of Operations Research techniques. For this purpose, several variants of the Waste Collection Problem (WCP) have been studied, which usually model collection routes and intermediate dumping trips for a fleet of collector vehicles.

Typically, the specialized literature assumes that the cost of traversing a street segment is constant. However, in waste collection operations, the vehicle can double its weight when fully loaded, which increases its instantaneous fuel consumption. In this work we study the Load-Dependent Waste Collection Problem with Arc Direction Selection (LDWCP-ADS). We consider a realistic cost function that adequately represents the operation and minimizes fuel consumption and operating time costs.

We propose a mixed integer linear programming model that solves the problem in small instances. Given the NP-Hard nature of the problem, we present a heuristic algorithm based on Iterated Local Search and Dynamic Programming that provides good solutions to the LDWCP-ADS in realistic instances such as a commune or a city neighborhood. In addition, we propose an approximate operation model, which can be solved analytically to obtain a closed formula, depending on structural parameters of the problem, for the optimal decision of the dumping policy and its associated cost.

We empirically verified for Providencia in Santiago de Chile that the increase in garbage density per km^2 favors the execution of a lower proportion of deadheads (corresponding to distances traveled without collection), decreasing by up to 40% in comparison to similar instances with lower densities. We obtain potential cost savings of up to 1% by optimizing the collection sequence compared to the Chinese Postman Problem solution, and up

to 46% compared to a non-optimized sequence that consecutively visits the nearest segment and prioritizes continuing straight ahead rather than executing a turn. In addition, by optimizing the dumping policy, we obtain savings of up to 4.5% compared to a policy that discharges when maximum capacity is reached, and up to 12.4% compared to a policy that discharges at half of capacity. Our experiments indicate that benefits over a non-optimized sequence or a static dumping policy are mainly obtained when the relationship between fuel cost and time is balanced, namely, there is a trade-off between operating heavily loaded and executing frequent drop-offs.

Keywords: Waste Collection Problem, fuel consumption, deadhead.

1. INTRODUCCIÓN

Este capítulo introduce el problema de recolección de residuos sólidos domiciliarios y detalla los alcances de este trabajo. En la sección 1.1 se contextualiza el desafío de la gestión de residuos; en la sección 1.2 se motiva y define el problema a estudiar. Además, se introduce la metodología de solución empleada; en la sección 1.3 se presenta la pregunta central de esta investigación y sus principales objetivos; y en la sección 1.4 se expone la estructura del documento.

1.1. Contexto del estudio

La gestión de residuos es una tarea que enfrentan a diario todas las ciudades del mundo y que impacta directamente en la calidad de vida de la población, por lo que es importante para cualquier administración territorial. En particular, las etapas de recolección y transporte conforman la mayor parte del costo asociado al proceso de gestión de desechos (Mofid-Nakhaee & Barzinpour, 2019). Según se expone en Tavares et al. (2009), el gasto en recolección de residuos sólidos domiciliarios puede superar el 70% del presupuesto total para gestión de desechos, la mayor parte por consumo de combustible. En términos del impacto ambiental asociado, Arancibia (2020) expone que el transporte contribuye en aproximadamente un 98% de la huella de carbono total asociada a la gestión de residuos municipales de la comuna de Providencia en Santiago de Chile, con más de 2400 toneladas de dióxido de carbono equivalente (CO2eq) generadas en el año 2018 por apenas cubrir un 2.2% del área total de la ciudad de Santiago.

Para manejar residuos, se debe tomar decisiones de asignación y mantención de flota, agendamiento de turnos de trabajo, planificación de rutas, zonas y horarios de recolección, entre otras labores de coordinación y supervisión. La complejidad y relevancia de esta labor, ha forzado a muchas autoridades a delegar dicha operación a organizaciones especialistas en gestión y recolección de residuos. Por ejemplo, la comuna de Providencia en Santiago de Chile que abarca un área de 14.3 km^2 y posee una población aproximada de

145 mil habitantes, ha tercerizado la operación del 75% de su basura a recolectar. Sus residuos son trasladados a un relleno sanitario ubicado aproximadamente a 11 km de distancia del centroide del área de cobertura (Matthei, 2017).

1.2. Motivación

Diseñar rutas de recolección de basura costo-eficientes impone una dificultad adicional, ya que extiende al problema de ruteo de vehículos, en inglés *Vehicle Routing Problem* (VRP), el cual es catalogado como un problema *NP-Hard*. Es más complejo que simplemente minimizar distancia recorrida, pues la carga se va acumulando en el vehículo a medida que recolecta, aumentando su consumo instantáneo de combustible y, por lo tanto, el costo asociado a circular por un determinado segmento de calle. Sumado a lo anterior, generalmente los vehículos poseen una capacidad de transporte de carga inferior a la demanda de la zona que deben cubrir, y deben interrumpir su recolección para realizar viajes de descarga a un vertedero comúnmente alejado del área de recolección.

Adicionalmente, en cada jornada de operación el vehículo debe recolectar la basura de cada segmento de calle de la red exactamente una vez. Para ello, en ocasiones deberá recorrer cierta distancia para reposicionarse entre dos visitas de recolección consecutivas. Esta distancia es conocida como *deadhead* o kilometraje muerto y representa una ineficiencia que en una operación costo-eficiente debiese ser minimizada.

El costo que implica circular por un segmento de calle se puede representar a partir del consumo instantáneo de combustible del vehículo. En Barth et al. (2005) y Barth and Boriboonsomsin (2009) se propone un modelo de consumo de combustible para vehículos diésel, que posteriormente es simplificado por Bektas and Laporte (2011). Este modelo estima el consumo de combustible F en litros de un vehículo al recorrer un tramo de distancia d metros a una velocidad media v metros por segundo, de la forma

$$F = A\Big(B + \frac{P_{engine}}{\eta_{engine}}\Big)\frac{d}{v} \qquad [L]\ , \tag{1.1}$$

donde A y B son parámetros propios del ambiente y del motor, respectivamente. El parámetro η_{engine} es la eficiencia del motor y P_{engine} es la potencia de tracción que requiere el motor para iniciar el movimiento del vehículo y que sigue la relación

$$P_{engine} = v(m+u)(C+a) + Dv^3 \qquad [kW] \ , \tag{1.2}$$

donde C es un parámetro asociado a características de la vía, a es la aceleración del vehículo en m/s^2, D es una constante asociada a la geometría del vehículo, m la masa del vehículo vacío y u la masa adicional que este carga, ambas en kg.

En vehículos de alta capacidad de carga u, el impacto en el consumo F es mayor. Este es el caso de camiones recolectores de basura, en los cuales la carga puede representar el 50% de su peso (Ivanič, 2007).

De (1.1), se obtiene una función de consumo lineal dependiente de la carga transportada u de la forma

$$F(u) = \alpha \cdot u + \beta \ . \tag{1.3}$$

Si se planifica la operación de recolección de basura sin considerar el impacto del esfuerzo extra que debe realizar el vehículo al circular cargado, el costo asociado podría ser significativamente mayor que el mínimo posible. Para ello se requiere una adecuada gestión de *deadheads*, que reduzca el kilometraje muerto recorrido por el vehículo cargado, y por otra parte, se necesita una política de descarga eficiente que encuentre el balance entre continuar operando cargado o pagar el costo de viajar al vertedero a descargar. De este modo, una planificación de rutas costo-eficiente debiese determinar:

(1) En qué secuencia visitar segmentos de calle de un área de servicio para recolectar su basura, y en qué sentido recorrer cada uno de ellos. Esta decisión produce *deadheads* a ser circulados a cierto nivel de carga.
(2) En qué nivel de carga de basura y en qué posición de la secuencia de recolección ejecutar una descarga al vertedero.

En el ejemplo de la Figura 1.1, se ilustra el impacto de la carga transportada en el vehículo en el consumo de combustible, y cómo afecta a la planificación eficiente de una ruta. Cada arco e representa un segmento de calle con un requerimiento de recolección q_e y distancia a recorrer l_e, que puede ser visitado en cualquier dirección. Los nodos 1 y 2 representan intersecciones y el nodo V representa el vertedero.

Si el vehículo posee capacidad para recolectar los tres segmentos sin descargar entre medio, entonces existen dos posibles rutas que comienzan y terminan en el vertedero: $V - 1 - 2 - V$ y $V - 2 - 1 - V$. Si se considera el efecto que tiene la carga extra transportada en el consumo de combustible del vehículo, expuesto en (1.1), el costo de la ruta óptima puede ser radicalmente distinto al de la ruta que minimiza distancia.

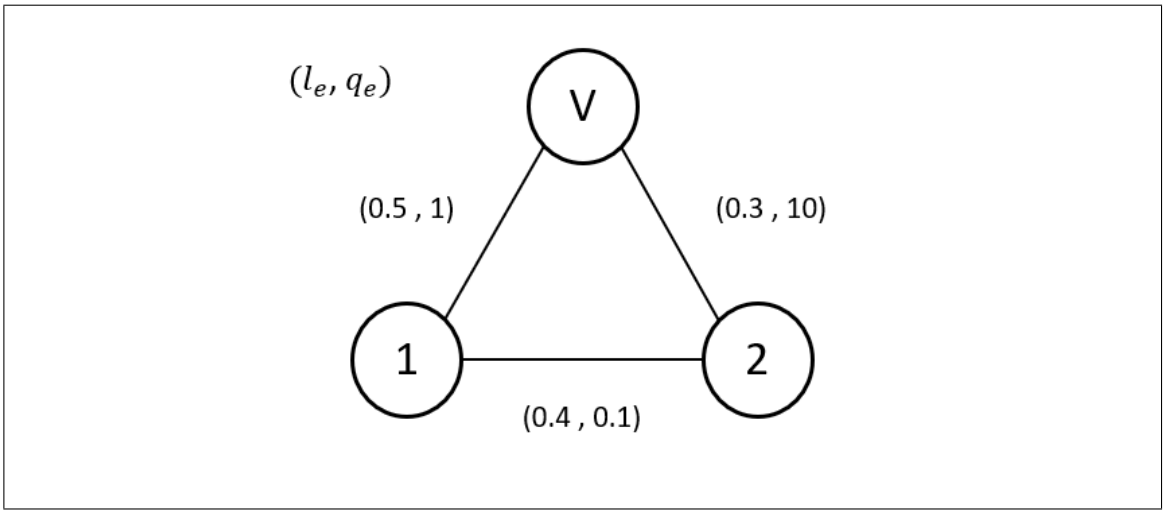


Figura 1.1. Instancia de ejemplo para el problema de recolección de residuos.

En la Tabla 1.1 se presentan los resultados para las dos soluciones posibles a este problema según ambas métricas: consumo de combustible y distancia recorrida . Notamos que ambas rutas son indiferentes en distancia recorrida. La ruta 1 visita en último lugar el arco con mayor demanda, mientras que la ruta 2 lo visita al comienzo. Esto tiene un efecto directo en el consumo, siendo la ruta 1 la que lo minimiza.

Tabla 1.1. Consumo de combustible y distancia recorrida por ruta.

Nº ruta	Secuencia	Consumo (L)	Distancia (km)
1	$V-1-2-V$	0.626	1.2
2	$V-2-1-V$	0.834	1.2

El ejemplo anterior ilustra la importancia de considerar el efecto de la carga transportada sobre el costo de circulación, pues al planificar una operación de recolección en base a métricas clásicas como minimizar distancia recorrida o tiempo de viaje, se puede llegar a una operación ineficiente en términos de costo.

La pregunta que surge a continuación es cómo escala este efecto de la carga en instancias de tamaño real y si se podría llegar al punto en que no sea conveniente seguir recolectando, a pesar de que el vehículo no haya alcanzado su capacidad máxima. En esta tesis respondemos a esa pregunta tomando como caso de estudio la operación de recolección de residuos para la comuna de Providencia, mediante de un modelo que planifica la operación minimizando una función realista de costos, que considera el costo de combustible y pago por hora asociado al salario de la tripulación.

La optimización exacta de este problema es desafiante, pues extiende al *Chinese Postman Problem with Load-Dependent Costs*, el cual es *NP-Hard* (Corberán et al., 2018). Por ello, en esta tesis proponemos un enfoque heurístico basado en tres etapas: construcción de una secuencia inicial, mejoramiento local mediante un algoritmo tipo *Iterated Local Search* y reconstrucción de la secuencia, apoyados por un algoritmo de programación dinámica (DP por su sigla en inglés), que evalúa el mínimo costo de una secuencia de recolección a segmentos de calle, escogiendo dónde realizar descargas al vertedero y el sentido de visita a cada segmento de calle. Así, se obtienen soluciones costo-eficientes en un tiempo de cómputo compatible con la práctica. Adicionalmente, validamos la

heurística propuesta en una familia de instancias realistas construidas a partir de información geográfica de OpenStreetMap (Boeing, 2017). En nuestros experimentos preliminares consideramos la utilización de un único vehículo y velocidades de circulación conocidas y distintas para los casos de recolección, *deadheading* y viajes al vertedero.

1.3. Objetivos de la tesis

La pregunta de investigación de este trabajo es: ¿Cómo planificar una operación de recolección de residuos costo-eficiente y cómo aproximar dicho costo? Para estudiar esta pregunta, se definen los siguientes objetivos específicos:

(i) Formular un problema de recolección de residuos mediante un modelo de optimización, cuya función objetivo represente de forma realista el costo de la operación. Debe considerar el impacto de la carga extra transportada en el consumo instantáneo de combustible durante las etapas de recolección y *deadheads*.

(ii) Diseñar una heurística que permita obtener soluciones costo-eficientes del modelo anterior en tiempos de cómputo reducidos.

(iii) Crear instancias que representen adecuadamente la topología de la red vial de una ciudad y así diseñar una familia de experimentos que ayuden a comprender cuáles son los parámetros del problema que impactan de mayor forma en la planificación y en la estructura de la solución.

(iv) Estimar el costo total de la operación mediante una fórmula cerrada que dependa de parámetros estructurales del problema.

1.4. Estructura de la tesis

En el capítulo 2 se presenta una revisión bibliográfica de la literatura ligada a recolección de residuos y variantes del problema. En el capítulo 3 se define el problema, su notación, parámetros, variables de decisión y supuestos. Con ello, se formula un modelo de optimización que lo representa. En el capítulo 4 se describe el método de solución heurístico

para el modelo formulado. En el capítulo 5 se presenta el diseño experimental y los principales resultados computacionales obtenidos. Además, se presenta un análisis de sensibilidad sobre parámetros relevantes del problema. En el capítulo 6 se propone un método de aproximación del costo de la operación y se discute sobre su desempeño respecto a los resultados del capítulo 5. Finalmente, en el capítulo 7 se presentan las conclusiones y lecciones obtenidas a partir de este trabajo, junto a posibles extensiones futuras.

2. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

El problema de recolección de residuos, en inglés *Waste Collection Problem* (WCP) pertenece a la familia de los *Rich Vehicle Routing Problems* (RVRP) (Caceres-Cruz et al., 2014). Estos últimos abordan situaciones y características específicas de la operación cotidiana y son extensiones del *Vehicle Routing Problem* (VRP), propuesto en el trabajo seminal de Dantzig and Ramser (1959). El VRP consiste en definir un conjunto de secuencias de visita a clientes, *i.e.*, rutas que inician y terminan en un centro de distribución (*depot*). Comúnmente, se exige que estas rutas cumplan con requerimientos de demanda por cliente visitado, capacidad máxima de transporte del vehículo y duración máxima de ruta, entre otros. Su objetivo es minimizar la distancia total recorrida.

En este capítulo se presenta el WCP y sus variantes presentes en la literatura científica. Para ello, debemos distinguir sus dos posibles formas de ser modelado (Hemmelmayr et al., 2013). La primera representa una recolección clásica, donde la basura es depositada en contenedores ubicados fuera de cada hogar. En este caso, se requiere una operación que cubra un conjunto de segmentos de calle, lo que suele modelarse como un problema de ruteo sobre arcos. La segunda alternativa conmúnmente se enmarca en el contexto de recolección de una lista de ubicaciones geolocalizadas, *e.g.*, contenedores de reciclaje, lo que suele modelarse como un problema de ruteo sobre nodos. Típicamente, existen formas de convertir un problema desde un tipo de modelación al otro, lo que describiremos a continuación.

En la sección 2.1 se describen y presentan variantes del problema de ruteo sobre arcos. En la sección 2.2 se presentan variantes del problema de ruteo sobre nodos. En la sección 2.3 se presentan problemas de ruteo de vehículos ligados a recolección de residuos, distinguiendo entre problemas modelados como ruteo sobre nodos y como ruteo sobre arcos. En la sección 2.4 se describe el modelo de estimación de consumo de combustible utilizado, distinguiendo entre trayectos cortos y trayectos largos. En la sección 2.5 se presentan

trabajos que aproximan el costo total para problemas de ruteo. En la sección 2.6 se presenta una herramienta para el análisis de información geográfica en redes viales. En la sección 2.7 se clasifica la literatura revisada y finalmente, en la sección 2.8 se presenta la contribución de esta investigación.

2.1. Arc Routing Problem y extensiones

En general, un *Arc Routing Problem* (ARP) consiste en planificar una ruta que visita un conjunto de arcos de una red a mínimo costo. Decisiones adicionales suelen estar ligadas al sentido de circulación en cada arco. Este tipo de modelos permiten representar problemas como el diseño de rutas de entrega de correspondencia, remoción de nieve, recorridos de buses escolares, recolección de basura, patrullaje policial, entre otros (Eiselt et al., 1995).

El *Chinese Postman Problem* (CPP) es el modelo ARP canónico. Su objetivo es planificar una ruta que atraviese todos los arcos de un grafo no dirigido al menos una vez, a mínimo costo. Actualmente existen algoritmos de complejidad computacional polinomial para el CPP, en función de su tamaño (Edmonds & Johnson, 1973).

Existen numerosas extensiones al CPP en las cuales se desconoce una solución con tiempo de ejecución polinomial. Ejemplos de ellas son el *Windy Postman Problem* (WPP) (Minieka, 1979), en el cual se minimiza el costo total de una ruta que cubre todos los arcos y el costo de un arco depende del sentido en el cual es atravesado; el *Mixed* CPP, en el cual algunos arcos son dirigidos y otros no dirigidos; y el *Hierarchical* CPP, donde existen relaciones de precedencia entre los arcos a cubrir y cuya aplicación práctica se da, por ejemplo, en tareas de limpieza de calles (Bodin & Kursh, 1978); y recolección de basura (Stricker, 1970).

A pesar de la vasta literatura relacionada al ruteo sobre arcos, la gran mayoría de los trabajos consideran que el costo de recorrer un arco es constante por sentido de circulación

e independiente de la carga transportada. Sin embargo, en la recolección de residuos existen situaciones donde ese supuesto falla.

Una excepción es el *Chinese Postman Problem with Load-Dependent Costs* (CPP-LC), propuesto por Corberán et al. (2018) que modela un único vehículo que debe visitar y entregar a cada arco de la red una cantidad de carga dependiente de su longitud, es decir, arcos más largos demandan más. Además, el costo de un arco también es una función de la distancia recorrida y de la carga transportada. Otra excepción es el trabajo de Lenis and Rivera (2018), que proponen el *Cummulative Capacitated Arc Routing Problem* (CCARP), donde el costo se representa mediante las toneladas-kilómetros recorridas por el vehículo, es decir, la multiplicación de la distancia recorrida por la carga del vehículo en cada arco. En este problema, la carga que lleva el vehículo impacta directamente en la estructura de solución. Por ejemplo, ya no es equivalente recorrer una ruta en uno u otro sentido, sin embargo, esta es solo una aproximación al costo total. Para más detalles, revisar Corberán et al. (2021).

2.2. Node Routing Problems

A continuación, se presentan variantes del problema de ruteo sobre nodos. En este tipo de problemas, se busca diseñar rutas eficientes que visiten un conjunto de nodos de un grafo.

El *Traveling Salesman Problem* (TSP) es el problema canónico de ruteo sobre nodos (Applegate et al., 2011). Es ampliamente estudiado en la literatura científica y consiste en diseñar una ruta que visite cada nodo de un grafo exactamente una vez, a mínima distancia total recorrida. Como se mencionó anteriormente, el VRP es una generalización del TSP en donde existen múltiples vehículos.

A pesar de que el TSP y el VRP han sido ampliamente estudiados en las últimas décadas, recientemente ha surgido un interés en los investigadores para abordar temáticas ambientales y de consumo de energía (S. Wang et al., 2020). A continuación, se presentan

algunas de estas variantes. Para más detalles, formulaciones y variantes del TSP y VRP, revisar Davendra (2010) y Toth and Vigo (2002), respectivamente.

En el *Pollution Routing Problem* (PRP), propuesto por Bektas and Laporte (2011), se extiende el clásico VRP utilizando una función objetivo que considera emisión de contaminantes y consumo de combustible, entre otros objetivos. El *Pollution Traveling Salesman Problem* (PTSP), propuesto por Cacchiani et al. (2018) es un caso particular del PRP y extiende al TSP buscando un tour hamiltoniano que minimiza el consumo de combustible. En cada arco, la función de consumo de combustible depende de la distancia recorrida, la velocidad del vehículo y la carga que este lleva. Este problema se relaciona al problema de recolección de basura, pues en ambos casos las rutas dependen de la carga que lleva el vehículo. En ciertos casos, podría no ser conveniente visitar las calles en una secuencia que minimiza la distancia o el tiempo de recorrido, pues no es el objetivo del problema.

Otra variante del TSP es el *Energy Minimization Traveling Salesman Problem* (EMTSP) propuesto por S. Wang et al. (2020) como un caso particular del *Energy Minimization Vehicle Routing Problem* (EMVRP) presentado por Kara et al. (2007) . En este problema también se busca minimizar las toneladas-kilómetros recorridas en conjunto a una representación del costo de la energía consumida.

Finalmente, el *Green Vehicle Routing Problem* (G-VRP), propuesto por Erdogan and Miller-Hooks (2012) modela la operación de vehículos propulsados por combustibles alternativos como gas natural o electricidad. Dos de las principales características de estas tecnologías son su limitada autonomía y el tiempo que tardan en ser recargados, lo que requiere modelar recargas a lo largo de la operación.

2.3. Problemas de ruteo de vehículos para recolección de residuos

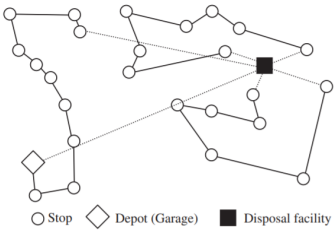
La necesidad de operar eficientemente la recolección de residuos ha motivado a investigadores a diseñar rutas de recolección mediante investigación operativa. Beliën et al. (2014) clasifican distintas variantes del problema de recolección de residuos sólidos

en función de categorías como el objetivo optimizado, el tipo de basura y los métodos de solución empleados. Ghiani et al. (2014a) presenta otra clasificación enfocada en los aspectos tácticos y estratégicos manejados en la planificación de la recolección de residuos.

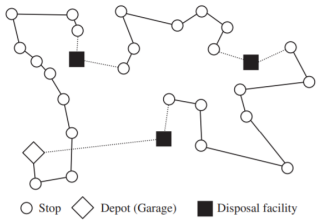
Una de las principales características que distinguen la modelación del problema de recolección de residuos domiciliarios respecto a otros problemas de ruteo vehicular, es la necesidad de determinar dónde realizar viajes de descarga intermedios al vertedero. Este requerimiento es considerado inicialmente por Beltrami and Bodin (1974) en el *Periodic VRP with Intermediate Facilities* (PVRP-IF), cuyo objetivo es planificar rutas de recolección de residuos en la ciudad de Nueva York. Schiffer et al. (2019) presenta una extensa revisión de literatura ligada a problemas con detenciones intermedias. Además de detenciones para carga y/o descarga de bienes, existen detenciones para sincronización, recarga de combustible y para descansos de la tripulación. Los autores exponen que, en problemas con detenciones para sincronizar, cargar o descargar bienes, aproximadamente un 40% de las publicaciones revisadas consideran descarga, otro 40% recarga y un 20% sincronización. Además, el 68% utiliza una modelación de ruteo sobre nodos, mientras que el restante 32% utiliza un modelo de ruteo sobre arcos. También, exponen que existe una importante diferencia en el tamaño de las instancias posibles de ser resueltas a optimalidad, con una clara superioridad de la formulación por nodos.

Dentro del enfoque basado en arcos, el *Capacitated Arc Routing Problem with Intermediate Facilities* (CARP-IF) (Ghiani et al., 2001, 2004) extiende al clásico CARP, con vehículos que pueden cargar (o descargar según el caso) su contenido en una detención intermedia, para luego continuar su operación. Diversos autores han explorado variantes basadas en arcos del WCP, donde se incorporan características realistas específicas del problema, como por ejemplo la naturaleza incierta de la generación de basura sobre un período de planificación (Tirkolaee et al., 2018b), ubicaciones diferentes para el *depot* y el vertedero (Tirkolaee et al., 2019), la utilización de camiones con múltiples compartimentos para distintos tipos de basura (Mofid-Nakhaee & Barzinpour, 2019), o la consideración del costo por emisión de contaminantes (Tirkolaee et al., 2018a; Molina et al., 2019).

El VRP-IF es la versión modelada por nodos del CARP-IF. Este problema fue abordado sobre un horizonte multiperíodo por Angelelli and Speranza (2002). Luego, Kim et al. (2006) y posteriormente Benjamin and Beasley (2010) incluyeron a dicho problema aspectos propios de un *Rich VRP* como ventanas de tiempo, pausas de descanso para la tripulación y múltiples puntos de descarga de basura. Un ejemplo de solución al VRP-IF se presenta en las Figuras 2.1a y 2.1b, donde el camión comienza su ruta en el *depot* (representado por el rombo), visita algunos clientes (representados por círculos), luego va a descargar al vertedero (representado por los cuadrados negros) y posteriormente continúa su ruta hasta visitar todos los clientes, hacer una descarga final y retornar vacío al *depot*.



(a) Un punto de descarga



(b) Múltiples puntos de descarga

Figura 2.1. Ejemplo de solución al VRP-IF con un camión. Fuente: Kim et al. (2006).

Otra variante que modela el problema como ruteo sobre nodos es el *Multi-depot VRP with inter-depot routes* (MDVRPI) propuesto por Crevier et al. (2007) en un contexto de reparto de bienes y sobre un único período. En el trabajo se proponen dos conjuntos de instancias para el MDVRPI que abarcan entre 48 y 288 nodos. Dichas instancias fueron adaptadas posteriormente por Hemmelmayr et al. (2013) para resolver el *Periodic VRP with Intermediate Facilities* (PVRP-IF), donde se planifica un patrón de visitas de recolección semanal a un conjunto de contenedores de basura. Los autores proponen un algoritmo basado en *Variable Neighborhood Search* (VNS) para el secuenciamiento de visitas y luego un algoritmo de programación dinámica para insertar viajes intermedios de descarga en la secuencia.

Al igual que en la modelación sobre arcos, en problemas de ruteo sobre nodos algunos autores han incorporado restricciones específicas en sus modelos que buscan obtener una solución más representativa de la realidad de la operación. Markov et al. (2016) proponen el *Waste Collection VRP with Intermediate Facilities*, donde estudian el impacto de operar una flota heterogénea y de escoger el *depot* donde cada vehículo finaliza su operación. Hannan et al. (2018) estudian un problema similar, pero considera una acumulación de basura en los contenedores progresiva en el tiempo de operación. Otros trabajos se han enfocado en minimizar múltiples objetivos; López-Sánchez et al. (2017) buscan minimizar tres objetivos de manera simultánea: un costo representativo de la operación, el número de vehículos utilizados y la variabilidad en el tamaño de las rutas. Por su parte, Delgado-Antequera et al. (2020) minimizan el número de rutas, el costo de cada una y buscan un balance en términos de duración y distancia recorrida por cada ruta.

Finalmente, algunos autores se han enfocado en planificar la zonificación del área de recolección (Ghiani et al., 2014b; Cortinhal et al., 2016), evidenciando que, con una adecuada sectorización, reducen la flota requerida para completar la operación y también disminuyen la distancia total recorrida en un 25% en promedio, con respecto a soluciones *benchmark* en la literatura.

2.4. Consumo de combustible de un vehículo

Estimar correctamente el consumo de combustible o de energía de un vehículo es relevante para evaluar el costo de la operación. En la literatura existen numerosos artículos donde se proponen modelos de consumo de combustible para vehículos livianos, pero no existe tanto énfasis en vehículos pesados. En Barth et al. (2005), los autores presentan un modelo que, en base a características del vehículo y de la vía, entrega como *output* la tasa de consumo instantánea de combustible por segundo.

A continuación, se presenta el modelo CMEM. Para ello, primero se define la potencia necesaria para poner en movimiento un vehículo como

$$P_{tract} = \frac{\left(M \cdot (g \cdot \sin(\theta) + g \cdot C_r \cdot \cos(\theta) + a) + 0.5 \cdot C_d \cdot A \cdot \rho_a \cdot v^2\right) \cdot v}{1000} \quad [kW] \ , \tag{2.1}$$

donde M es la masa total del vehículo en kg, que considera la suma de la masa en vacío y la carga adicional transportada, v es la velocidad en m/s, a la aceleración en m/s^2, g aceleración de gravedad en m/s^2, θ el ángulo de la vía en grados, C_d el coeficiente de arrastre, A el área frontal del vehículo en m^2, ρ la densidad del aire en kg/m^3 y C_r el coeficiente de roce.

La potencia que requiere el motor del vehículo (P_{engine}) para realizar la tracción está dada por

$$P_{engine} = \frac{P_{tract}}{\eta_{tf}} + P_{acc} \qquad [kW] \ , \tag{2.2}$$

donde η_{tf} es la eficiencia de transmisión y P_{acc} es la potencia que necesita el motor para hacer funcionar ciertos accesorios del vehículo, como por ejemplo la compresora de basura y el aire acondicionado. De este modo, la tasa de consumo de combustible F se puede aproximar de la siguiente manera

$$\frac{dF}{dt} \approx \lambda \cdot \left(k \cdot N \cdot V + \frac{P_{engine}}{\eta_{engine}}\right) \qquad \left[\frac{L}{s}\right] \ , \tag{2.3}$$

donde λ es la razón entre combustible y aire para que ocurra combustión, k es el factor de fricción del motor, N es la velocidad del motor, V es el desplazamiento del motor y η_{engine} es la eficiencia del motor. Las unidades y valores estándar utilizados en cada parámetro se encuentran en el Anexo B.

Este modelo de consumo de combustible incorpora el efecto de la velocidad de operación, nivel de carga transportada, distancia recorrida y pendientes del camino en el consumo de combustible. Requiere estimar un conjunto de valores de parámetros asociados al vehículo, por lo que se debe recurrir a valores típicamente utilizados en la literatura especializada.

En Turkensteen (2017), el autor presenta un análisis del error de subestimación del consumo de combustible que se produce al suponer que la velocidad es constante sobre un tramo. Se concluye que la aproximación es mejor si la masa y la velocidad media de circulación del vehículo son bajas y si el tráfico se encuentra en condiciones de flujo libre. De lo contrario, la estimación de consumo puede ser entre un 30% y un 40% menor que la realidad. Otros artículos presentan adaptaciones del CMEM para resolver problemas de ruteo considerando consumo de combustible. J. Wang and Rakha (2017) estiman el consumo de vehículos pesados; Suzuki (2011) busca reducir el consumo de combustible y emisiones en problemas de distribución de bienes; Brunner et al. (2021) estudian el impacto de las pendientes en la ruta sobre el consumo de combustible; y Basso et al. (2019); Fiori et al. (2016) estiman el consumo de energía de vehículos eléctricos.

A continuación, se presentan dos adaptaciones al modelo CMEM. Uno para trayectos cortos que considera etapas de aceleración y desaceleración, y otro para trayectos largos que considera velocidad constante sobre todo el tramo.

2.4.1. Consumo en trayectos cortos

Este desarrollo es una adaptación de los modelos propuestos por Basso et al. (2019) y Macrina et al. (2019) para estimar el consumo de combustible durante el proceso de recolección de basura. Para la potencia se considera la expresión (2.1), pero separando la masa total del vehículo entre su masa sin carga (m) y la carga adicional que transporta (u). Además, asume que $\theta = 0$ y, al igual que el CMEM, considera que la potencia depende, además de la carga extra, de la velocidad a la que se circula (v) y de la aceleración instantánea (a), quedando de la forma

$$P_{tract} = \frac{v}{1000} \cdot \Big((m+u)(a + g \cdot C_r) + 0.5 \cdot \rho_a \cdot C_d \cdot A \cdot v^2 \Big) \quad [kW] \ . \tag{2.4}$$

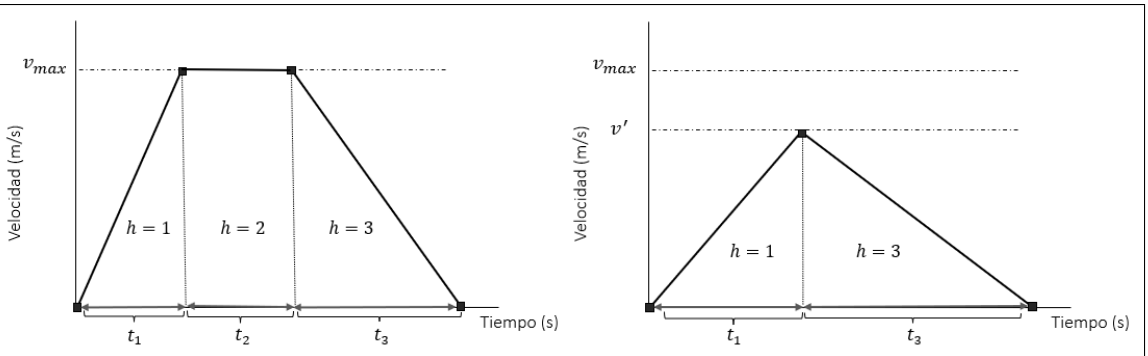
En Basso et al. (2019), los autores proponen que la operación entre una detención y la siguiente (que llamaremos ciclo), se divide en tres etapas: aceleración (etapa 1), velocidad *target* (etapa 2) y desaceleración (etapa 3). La velocidad *target* (v_{max}) corresponde a un

valor fijo que representa la velocidad máxima que el vehículo puede alcanzar durante la recolección. Así, el consumo a lo largo de un ciclo es igual a la suma de los consumos de cada etapa.

Macrina et al. (2019) expone dos categorías posibles para un ciclo (ilustradas con ejemplos en la Figura 2.2), que se distinguen por alcanzar o no la velocidad *target* en función de la longitud del tramo (d). Sea d_c la mínima distancia requerida para alcanzar dicha velocidad, dada por

$$d_c = \frac{{v_{max}}^2}{2a_1} \qquad [m]\,, \tag{2.5}$$

donde a_1 es la aceleración del vehículo durante la etapa 1 en m/s^2. Si $d > d_c$, existe tramo suficiente para alcanzar la velocidad *target* y, por tanto, se observarán las tres etapas del ciclo (Figura 2.2a). Por otra parte, si $d \leq d_c$, no se alcanzará la velocidad v_{max}, sino que el vehículo acelerará hasta una velocidad $v' < v_{max}$ y luego comenzará a desacelerar, observándose solo dos etapas en el ciclo (Figura 2.2b). Así, para un ciclo conformado por tres etapas, se define t_h como el tiempo que toma al vehículo completar cada etapa $h \in \{1, 2, 3\}$ al circular por un tramo según un Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado (MRUA). Dicho tiempo, en segundos, está dado por



(a) Caso 1: v_{max} es alcanzada

(b) Caso 2: v_{max} no es alcanzada

Figura 2.2. Perfiles de velocidad para ciclo de conducción.

$$t_h = \begin{cases} \dfrac{v_{max}}{a_h} & \text{para} \quad h \in \{1,3\} \\ \frac{1}{v_{max}} \cdot \left[d - \left(\frac{v_{max}^2}{2 \cdot a_1} + \frac{v_{max}^2}{2 \cdot a_3} \right) \right]^+ & \text{para} \quad h = 2 \end{cases} \quad [s] \ , \tag{2.6}$$

donde $[\ \bullet\ ]^+ = \max\{\bullet, 0\}$ y a_3 es la desaceleración en la etapa 3 en m/s^2. El valor asociado a las etapas $\{1,3\}$ corresponde a cuánto tarda el vehículo en acelerar hasta la velocidad *target* o frenar desde ella hasta detenerse, respectivamente. En tanto, para la etapa 2 se evalúa la distancia que el vehículo recorre a velocidad $v = v_{max}$ y luego esta se divide por dicha velocidad para obtener la duración de la etapa.

Para un ciclo de dos etapas se asume que, de los d metros correspondientes al tramo, se recorre la mitad en etapa de aceleración y la otra mitad en desaceleración. Con ello, se obtiene el tiempo en segundos asociado a cada etapa a partir de la ecuación de posición en un MRUA según

$$t_h = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{d}{a_h}} & \text{para} \quad h \in \{1,3\} \\ 0 & \text{para} \quad h = 2 \end{cases} \quad [s] \ . \tag{2.7}$$

Luego, integrando la expresión (2.3) en el tiempo correspondiente a cada etapa, se obtiene el consumo de combustible en la etapa h, mediante

$$f_h = \lambda \cdot \left(k \cdot N \cdot D + \frac{P_{tract}(u, v^*, a_h)}{\eta_{engine}} \right) \cdot t_h \qquad [L] \ , \tag{2.8}$$

donde $v^* = v_{max}$ para $h = 2$ y $v^* = \frac{v_{max}}{2}$ para $h \in \{1,3\}$, ya que $\frac{v_{max}}{2}$ es la velocidad media que lleva el vehículo durante las etapas de aceleración y desaceleración. De esta manera, el consumo total a lo largo de un ciclo está dado por

$$f = \sum_{h \in \{1,2,3\}} f_h \qquad [L] \ . \tag{2.9}$$

Este modelo asume que, en cada ciclo, el vehículo comienza y termina detenido y que, durante cada etapa, los parámetros (a excepción de la velocidad) se mantienen constantes.

2.4.2. Consumo en trayectos largos

Este modelo está basado en los trabajos de Bektas and Laporte (2011) y de Goeke and Schneider (2015) y busca estimar el consumo de combustible de un vehículo durante trayectos largos, representando por ejemplo, un viaje intermedio que realiza el vehículo para descargar en el vertedero. En este caso, se asume que los consumos asociados a aceleración y desaceleración son despreciables.

En base a lo anterior, se define la potencia mecánica (asumiendo que $a = 0$ en la ecuación (2.4)).

$$\hat{P}_{tract} = \frac{v}{1000} \cdot \Big((m+u) \cdot g \cdot C_r + 0.5 \cdot \rho_a \cdot C_d \cdot A \cdot v^2 \Big) \quad [kW]\,. \tag{2.10}$$

De manera similar al caso de trayectos cortos, se define el consumo por unidad de tiempo

$$\hat{f}(u,v) = \lambda \left(k \cdot N \cdot D + \frac{\hat{P}_{tract}}{\eta_{engine}} \right) \quad \left[\frac{L}{s} \right]. \tag{2.11}$$

Multiplicando esta expresión por el tiempo que se tarda en recorrer una distancia d a velocidad constante v, se obtiene el consumo en litros según

$$\hat{f}(d,u,v) = \lambda \left(k \cdot N \cdot D + \frac{\hat{P}_{tract}}{\eta_{engine}} \right) \frac{d}{v} \quad [L]\,. \tag{2.12}$$

La Tabla 2.1 detalla el consumo por kilómetro recorrido en trayectos cortos (f) y largos $(\hat{f})$, considerando distintos niveles de carga en un vehículo referencial de m =9 ton de masa descargado. Se consideró un trayecto de 100 m de longitud con una v_{max} =5 m/s, una velocidad constante v =15 m/s para trayectos largos y B =200 litros como la capacidad del estanque para calcular la autonomía en recolección. El resto de los parámetros se fijaron según los valores expuestos en el Anexo B.

Tabla 2.1. Consumo de combustible bajo distintos niveles de carga.

Parámetro / Carga	0 ton	5 ton	10 ton	12.5 ton
$f \quad (L/km)$	0.634	0.743	0.851	0.905
$\hat{f} \quad (L/km)$	0.184	0.223	0.262	0.282
Autonomía (km)	315	269	235	221

De la Tabla se observa que, a igual distancia recorrida, el consumo del modelo para trayectos cortos es mayor que el modelo de consumo en trayectos largos, pues incorpora el esfuerzo extra que el motor debe realizar al acelerar y frenar. En segundo lugar, el consumo crece en función del peso transportado y este consumo adicional es mayor para el primer caso. En base a lo anterior, podría haber oportunidades de ahorro en el proceso de recolección de basura si se optimizan los niveles máximos de carga a transportar.

2.5. Aproximación del costo de operación

En ocasiones, más que buscar una solución detallada al WCP, lo que realmente se requiere es estimar el costo de una operación eficiente (Franceschetti et al., 2017). Esto permite apoyar la toma de decisiones a nivel táctico y estratégico, sin tener que planificar la operación en detalle.

La mayor parte de los métodos de aproximación se centran en ruteo sobre nodos. Beardwood et al. (1959) y Daganzo (1984) desarrollaron una fórmula de aproximación asintótica para el costo óptimo de un TSP. Uno de los resultados fundamentales de estos trabajos es el denominado Teorema BHH, que en el caso bidimensional señala que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{L^*}{\sqrt{n}} \longrightarrow \beta\sqrt{A} \tag{2.13}$$

donde L^* corresponde al largo del tour de mínima distancia que visita n puntos distribuidos uniformemente sobre un área A. Por su parte, β es un parámetro dependiente de la métrica de distancia utilizada en la red.

A continuación, se presentan algunas aplicaciones de modelos de aproximación continua en problemas de ruteo de vehículos. Para mayor detalle, revisar las variantes presentadas en Franceschetti et al. (2017).

Figliozzi (2009) propone una aproximación basada en propiedades asintóticas del problema de ruteo con restricción de ventanas de tiempo (VRP-TW). Jabali et al. (2012) propone una estimación del costo operativo sobre un área circular para planificar la composición de flota utilizada en distribución de bienes en el largo plazo.

Saberi and Verbas (2012) propone un modelo de aproximación para el *Emissions Minimization VRP*, mientras que Francis and Smilowitz (2006) aproximan el costo operativo para el *Periodic Vehicle Routing Problem with Service Choice* (PVRP-SC), donde la frecuencia de visita a los nodos sobre un determinado horizonte temporal es una decisión del modelo. Ambos trabajos aproximan las variables discretas del modelo mediante funciones continuas, para luego descomponer geográficamente el problema en subregiones donde asumen que los parámetros exógenos se mantienen constantes, derivando en una fórmula de aproximación del tipo *Economic Order Quantity* (EOQ) que balancea costos.

Los trabajos que buscan aproximar el costo en problemas de ruteo sobre arcos son más escasos. Wøhlk (2008) presenta una aproximación para el CARP con garantía de no ser más de $\frac{7}{2} - \frac{3}{Q}$ veces mayor que el óptimo para instancias que satisfacen la desigualdad triangular, donde Q es la capacidad del vehículo. Por otra parte, van Bevern et al. (2017) propone un algoritmo de aproximación parametrizada para el WPP y el *Mixed* CPP.

2.6. Aplicación de Geographical Information Systems (GIS) para el análisis de redes viales

OpenStreetMap es un proyecto colaborativo de mapas digitales editables y de libre uso disponible en https://www.openstreetmap.org/. Estos mapas se crean utilizando información geográfica capturada con dispositivos GPS móviles, ortofotografías y otras fuentes libres. Boeing (2017) presenta el módulo “OSMnx”, una herramienta de recolección de

datos y análisis de redes viales para ser utilizado en el lenguaje Python. Con OSMnx se puede obtener información topológica desde OpenStreetMap de la red vial de cualquier ciudad del mundo y con ello generar instancias realistas donde evaluar la operación de un servicio de recolección de residuos.

2.7. Clasificación de trabajos anteriores

En base a la literatura revisada, se evidencia la necesidad de un modelo que apoye la planificación de una operación de recolección de residuos que: (1) esté basado en un modelo detallado de consumo de combustible, (2) considere los efectos de la carga transportada sobre el consumo en cada segmento de calle, (3) permita decidir el lugar y el nivel de carga al cual ir a descargar al vertedero, y (4) ayude a elegir el sentido de visita en calles bidireccionales. Adicionalmente, no se han desarrollado modelos de aproximación de costos de operación para dicho problema.

La Tabla 2.2 clasifica los trabajos revisados sobre recolección de residuos sólidos domiciliarios considerando las siguientes categorías, cuya denominación en inglés y abreviación se presentan entre paréntesis: posibilidad de realizar viajes intermedios de carga o descarga (*Multitrip*, MT); modelación como ruteo sobre arcos (*Arc Routing*, AR); utilización de múltiples vehículos (*Multiple Vehicles*, MV); posibilidad de escoger la dirección de circulación en cada segmento de calle (*Direction Selection*, DS); se utiliza una función de costos realista basada en un modelo detallado de consumo de combustible (*Realistic Cost Function*, RCF); considera costos dependientes de la carga transportada (*Load-Dependent Cost*, LDC); permite la descarga de residuos antes de alcanzar su capacidad máxima (*Less than Truck Load*, LTL); utiliza un sistema de información geográfica para la planificación (*Geographical Information System*, GIS); y propone un método de aproximación del costo total percibido (*Cost Approximation*, CA).

Tabla 2.2. Principales trabajos revisados.

Autores	MT	AR	MV	DS	RCF	LDC	LTL	GIS	CA
Beltrami y Bodin (1974)	✓		✓						
Ghiani et al. (2001)	✓	✓							
Angelelli y Speranza (2002)	✓		✓						
Mourao y Amado (2005)	✓	✓		✓					
Sahoo et al. (2005)		✓			✓			✓	
Del Pia y Filippi (2006)	✓	✓		✓			✓		
Kim et al. (2006)	✓		✓						
Pollacek et al. (2008)	✓	✓	✓						
Tavares et al. (2009)		*			✓	✓		✓	
Benjamin y Beasley (2010)	✓		✓						
Coene et al. (2010)			✓						
Buhrkal et al. (2012)	✓		✓						
Hemmelmayr et al. (2013)	✓		✓				✓		
Markov et al. (2016)	✓		✓	✓	✓				
Lopez-Sanchez et al. (2017)	✓		✓						
Cacchiani et al. (2018)					✓	✓			
Corberán et al. (2018)		✓		✓		✓			
Hannan et al. (2018)			✓						
Molina et al. (2019)	✓		✓		✓				
Tirkolaee et al. (2019)	✓	✓	✓	✓					
Delgado-Antequera et al. (2020)			✓						
Este trabajo	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓

Nota: Los trabajos que no aparecen marcados en la columna AR, es porque son modelados como ruteo sobre nodos, a excepción de *, que no presenta ninguno de los dos tipos de modelación.

2.8. Contribución de este trabajo

La principal contribución de este trabajo es el desarrollo de un método que permite diseñar una política de operación costo-eficiente para un servicio de recolección de residuos domiciliarios, teniendo un modelo de consumo de combustible realista. Dicho modelo debe planificar tres decisiones: (i) secuenciar las visitas de recolección sobre el conjunto de segmentos de calle; (ii) definir el sentido de recolección en cada segmento de calle bidireccional; y (iii) determinar la posición en la cual realizar los viajes de descarga al vertedero sobre la secuencia.

Para ello, planteamos un modelo de optimización multiobjetivo que considera: (i) el efecto de la carga transportada en el costo percibido al atravesar cada arco de la ruta, diferenciando entre consumos durante el proceso de recolección y durante *deadheads*; y (ii) el costo asociado a la duración temporal de las rutas, representado por el pago de remuneraciones a la tripulación.

Con lo anterior, buscamos obtener lecciones logísticas de la operación y de cómo impactan ciertos parámetros del problema en la estructura de la solución alcanzada. Adicionalmente, en este trabajo se propone la creación de instancias realistas basadas en información de OpenStreetMap, buscando representar de manera fidedigna las características de la red vial de una ciudad.

Finalmente, se propone un método de aproximación del costo total percibido por el operador por cada kilómetro de calle cuya basura fue recolectada. Este análisis se basa en una abstracción de la complejidad de la red vial y permite apoyar la toma de decisiones ligadas a la operación a nivel táctico y estratégico, sin la necesidad de resolver en detalle el problema operativo.

3. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

En este capítulo se define el *Load-Dependent Waste Collection Problem With Arc Direction Selection* (LDWCP-ADS) y se presenta un modelo de optimización *ad hoc*. En la sección 3.1 se presentan los supuestos del modelo. En la sección 3.2 se describe la transformación desde la red vial a un grafo basado en nodos. En la sección 3.3 se identifican los parámetros del modelo. En la sección 3.4, se definen las variables de decisión del modelo y luego se formula el problema de optimización lineal con variables enteras (MIP) que lo representa. Finalmente, el modelo es validado en la sección 3.5 al resolver una instancia de prueba a optimalidad.

El LDWCP-ADS busca identificar una secuencia de rutas de servicio de recolección de basura que cubre los segmentos de calle de una red. Una ruta de servicio es una sucesión de visitas a segmentos de calle para recolectar su basura. Esta ruta generalmente comienza y termina en el vertedero, a excepción de la primera que comienza en el *depot* y la última que termina en el *depot*. Cada segmento de calle es unidireccional o bidireccional. En el segundo caso, se debe decidir adicionalmente en qué dirección del segmento de calle recolectar la basura. Así, una secuencia de rutas es la concatenación de un conjunto de rutas y representa la operación completa de un vehículo en una jornada. En la Figura 3.1 se ilustra una secuencia conformada por tres rutas.

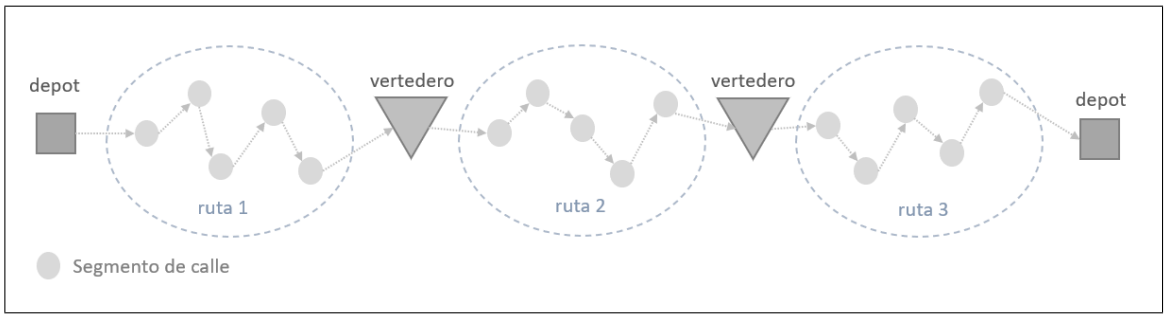


Figura 3.1. Ejemplo de una secuencia de rutas.

El objetivo del LDWCP-ADS es minimizar los costos operativos compuestos por: (i) el costo de combustible asociado a recolección de basura en un segmento de calle, en

deadheads y en viajes al vertedero, y (ii) el costo asociado al salario de la tripulación, que es representado por un cobro por unidad de tiempo operativo.

3.1. Supuestos de modelación

A continuación, se presentan los principales supuestos utilizados para modelar este problema.

(i) Se asume que el tiempo de recarga de combustible es despreciable comparado con los tiempos de recolección o bien, el vehículo posee suficiente combustible para operar durante toda la jornada.
(ii) Los segmentos de calle pueden poseer un sentido de tránsito o doble sentido. En el segundo caso se debe escoger también el sentido de recolección.
(iii) La basura en cada segmento de calle debe ser recolectada exactamente en una sola pasada y un segmento de calle nunca tendrá más basura que la capacidad del vehículo.
(iv) El vehículo recorre el *deadhead* entre recolecciones consecutivas a segmentos de calle a través de la ruta de mínima distancia.
(v) No se consideran efectos de congestión vehicular, es decir, el tiempo de viaje en *deadhead* o recolección es independiente del momento en que se realiza.

3.2. Construcción de la representación de la red del problema

Según expone Schiffer et al. (2019), poco más de dos tercios de las publicaciones revisadas utilizan una modelación por nodos en problemas de ruteo con detenciones intermedias. Además, los autores exponen que este tipo de modelación permite resolver, en promedio, instancias de mayor tamaño que siendo modeladas por arcos. Así, proponemos una transformación que permite representar los segmentos de calle del problema como nodos.

Para ello, comenzamos extrayendo desde OSMnx la red vial $H = (V, S)$, donde V representa un conjunto de ubicaciones geográficas o intersecciones y S es un conjunto de arcos dirigidos que modela sentidos de segmento de calle (SSdC). Un sentido de segmento de calle corresponde a un tramo dirigido (a, b) que une dos intersecciones $a, b \in V$ sin una intersección entre medio (Basso et al., 2019).

Adicionalmente, un segmento de calle (SdC) modela de forma no dirigida el segmento $\{a, b\}$ que puede estar asociado a uno o dos sentidos de segmento de calle, dependiendo si el tramo es unidirigido o bidirigido. El conjunto de segmentos de calle R se define como

$$R = \Big\{ \{a, b\} : a, b \in V, a < b,\ (a, b) \in S \vee (b, a) \in S \Big\}. \tag{3.1}$$

Además, definimos el conjunto S_r de sentidos de segmento de calle asociados al segmento de calle $r = \{a, b\}$ como

$$S_r = \Big\{ (a, b) \in S : \{a, b\} \in R \vee \{b, a\} \in R \Big\}, \tag{3.2}$$

y el segmento de calle r^s asociado al sentido $s = (a, b)$ como

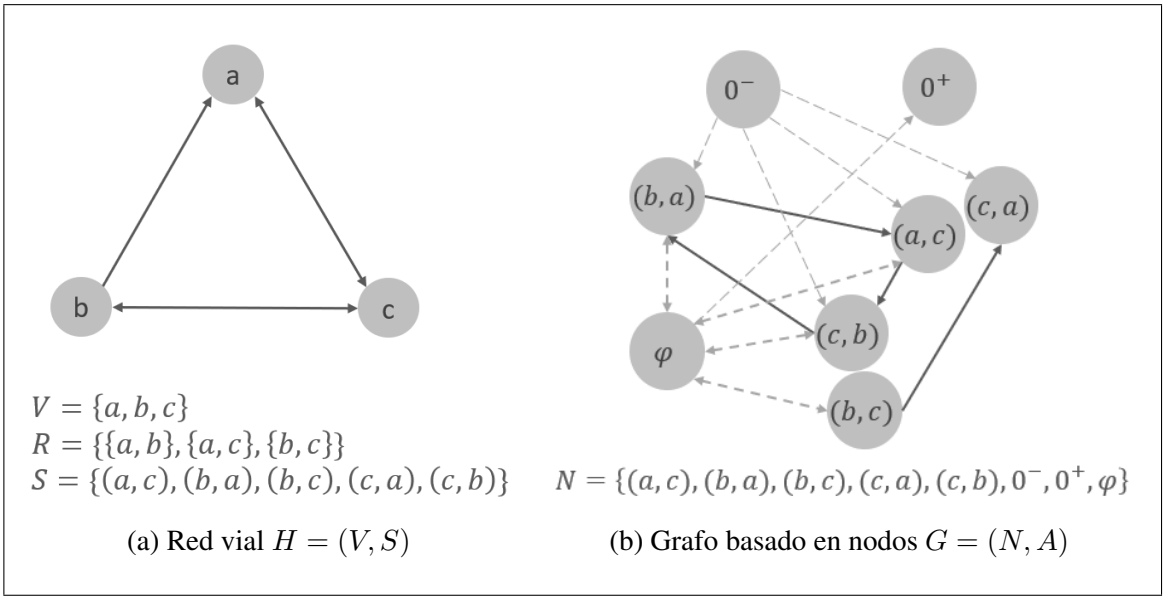
$$r^s = \Big\{ \{k, l\} \in R : \big(k = a \wedge l = b\big) \vee \big(k = b \wedge l = a\big) \Big\}. \tag{3.3}$$

Con las definiciones anteriores presentamos una transformación similar a la propuesta por Longo et al. (2006), en la cual se crea un grafo $G = (N, A)$, donde el conjunto N contiene un nodo para cada SSdC $(a, b) \in S$, que representa recolectar el segmento $r^{(a,b)}$ en dicho sentido. Adicionalmente, se añade a N un nodo "φ" que representa una visita al vertedero y los nodos $0^-, 0^+$, que representan el comienzo y final de la operación, respectivamente. Así, finalmente $N := S \cup \{0^-, 0^+, \varphi\}$. El conjunto de arcos A se define como

$$A := \Big\{ (s_1, s_2) : s_1, s_2 \in S \wedge r^{s_1} \neq r^{s_2} \Big\} \cup \Big\{ (0^-, s), (s, 0^+) : s \in S \Big\}. \tag{3.4}$$

Cada arco $\big((a,b),(k,l)\big) \in A$ representa un *deadhead* desde la intersección b hacia la k por la ruta de mínima distancia. Notamos que si $b = k$, entonces no hay distancia entre b y k. Por otra parte, un segmento de calle $r \in R$ tiene asociado una cantidad de basura a recolectar q_r, y cada sentido de segmento de calle $s \in S$ tiene asociado un largo l_s y un tiempo de servicio w_s.

En la Figura 3.2 se ejemplifica la representación del problema como un grafo basado en nodos G, donde cada nodo corresponde a un sentido de segmento de calle en la red vial H. El grafo H posee 3 segmentos de calle, 5 sentidos de segmento de calle y 3 intersecciones, nombradas con las letras $\{a, b, c\}$. Cada sentido de segmento de calle es representado por un nodo en G. En la Figura 3.2b se presenta como línea continua aquellas conexiones cuya distancia es igual a cero y por tanto, el *deadhead* no tiene costo, y en línea punteada algunas de las restantes conexiones, cuya distancia es mayor a cero.



(a) Red vial $H = (V, S)$ (b) Grafo basado en nodos $G = (N, A)$

Figura 3.2. Transformación desde grafo de calles a grafo basado en nodos.

3.3. Parámetros y conjuntos adicionales

Para cada nodo $s \in S$, se define el conjunto de arcos salientes $\delta^+(s)$ y entrantes $\delta^-(s)$ como

$$\begin{aligned} \delta^+(s) &= \left\{(s, s') \in A : s' \neq 0^+\right\} \\ \delta^-(s) &= \left\{(s', s) \in A : s' \neq 0^-\right\} \end{aligned} \tag{3.5}$$

y dos conjuntos adicionales de arcos salientes y entrantes que incluyen la salida y llegada a los *depots*

$$\begin{aligned} \hat{\delta}^+(s) &= \left\{(s, s') \in A\right\} \\ \hat{\delta}^-(s) &= \left\{(s', s) \in A\right\}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Además, se definen los siguientes parámetros:

- Q : capacidad del vehículo, en kg.
- $d_{ss'}$: distancia entre los nodos s y s' en metros, $\forall s, s' \in N$.
- v_s^{max} : velocidad *target* que se alcanza durante la recolección en el nodo $s \in S$, en metros por segundo.
- $\bar{v}_{ss'}$: velocidad media de desplazamiento durante *deadhead* en el arco $(s, s') \in A$, en metros por segundo.
- $\hat{v}_s$: velocidad media de desplazamiento en un trayecto largo (viaje desde s a φ o viceversa), en metros por segundo.
- q_r: cantidad de basura en kg a recolectar en el segmento $r \in R$.
- l_s: longitud en metros del nodo $s \in S$.
- w_s: tiempo de servicio en el nodo $s \in S$.
- c_d : costo del combustible, en $\$$ / L.
- c_t : costo del recurso humano requerido para un vehículo, en $\$$ / s.

3.4. Formulación del problema

A continuación, se representa el LDWCP-ADS por medio de un MIP. Para representar la secuencia de rutas del vehículo, se define la variable binaria $x_{ss'}$ que toma valor 1 si

y solo si el vehículo atraviesa el arco $(s, s') \in A$ en un viaje directo sin descarga al vertedero. También, basándose en la formulación compacta propuesta por Neira et al. (2020), se define la variable binaria $\hat{x}_{ss'}$ que toma valor 1 si y solo si el vehículo recolecta en s, realiza una descarga en φ y luego se dirige descargado a servir s'. Del mismo modo, se definen las variables no negativas u_a, que representa la fracción de la capacidad del vehículo cargada en el arco $a \in A$, y $\hat{u}_a$ que representa la fracción de la capacidad del vehículo cargada antes de que realice una descarga al vertedero entre los nodos que determinan el arco $a \in A$. Finalmente, se define la variable τ_s como la posición del servicio al nodo $s \in S$ en la secuencia de rutas y la variable binaria y_s que toma valor 1 si y solo si el sentido de segmento de calle $s \in S$ es visitado en la secuencia.

3.4.1. Restricciones

Se define el conjunto de operaciones factibles como todo vector $(x, \hat{x}, u, \hat{u}, \tau, y)$ que satisface las siguientes restricciones:

$$\sum_{s \in S_r} y_s = 1 \qquad \forall r \in R \quad (3.7a)$$

$$\sum_{a \in \delta^+(s)} x_a + \sum_{a \in \hat{\delta}^+(s)} \hat{x}_a = \sum_{a \in \hat{\delta}^-(s)} x_a + \sum_{a \in \delta^-(s)} \hat{x}_a = y_s \qquad \forall s \in S \quad (3.7b)$$

$$\sum_{a \in \delta^+(s)} u_a + \sum_{a \in \hat{\delta}^+(s)} \hat{u}_a - \sum_{a \in \delta^-(s)} u_a = \frac{q_{r^s}}{Q} \cdot y_s \qquad \forall s \in S \quad (3.7c)$$

$$u_a \leq x_a \qquad \forall a \in A \quad (3.7d)$$

$$\hat{u}_a \leq \hat{x}_a \qquad \forall a \in A \quad (3.7e)$$

$$\tau_s + x_{ss'} + \hat{x}_{ss'} - |R| \cdot (1 - x_{ss'} - \hat{x}_{ss'}) \leq \tau_{s'} \qquad \forall (s, s') \in A \quad (3.7f)$$

$$\tau_s \leq |R| \cdot y_s \qquad \forall s \in S \quad (3.7g)$$

$$x_{s0^+} = \hat{x}_{0^-s} = 0 \qquad \forall s \in S \quad (3.7h)$$

$$x, \hat{x} \in \{0, 1\}^{|A|} \quad (3.7i)$$

$$\tau \in \mathbb{R}_+^{|S|} \quad (3.7j)$$

$$u, \hat{u} \in \mathbb{R}_+^{|A|} \quad (3.7k)$$

$$y \in \{0, 1\}^{|S|} \quad (3.7l)$$

El conjunto de restricciones (3.7a) fuerza que todo segmento de calle sea atendido en alguno de sus sentidos exactamente una vez. El conjunto (3.7b) garantiza la continuidad de flujo del vehículo. El conjunto (3.7c) indica que el flujo de basura que el camión transporta se conserva, es decir, toda la basura que ingresa a un nodo, más la recolectada en él, es la que debe salir. Las familias (3.7d)-(3.7e) prohíben transportar basura por un arco que no es visitado por el vehículo. El conjunto (3.7f) garantiza el seguimiento de la posición

de cada servicio en la secuencia. El conjunto (3.7g) fuerza que solo los nodos visitados tengan asociada una posición dentro de la secuencia y acota el valor de dicha posición de manera similar a la formulación MTZ (Miller et al., 1960). El conjunto (3.7h) impide que se realicen viajes de descarga con el vehículo vacío y que el vehículo retorne al *depot* sin antes descargar. Finalmente, (3.7i)-(3.7l) definen la naturaleza de las variables.

La formulación propuesta no provee subtours debido a que el conjunto de variables τ define el orden de visita a segmentos de calle. Así, la familia de restricciones (3.7f) fuerza que la posición dentro de la secuencia siempre aumente en una unidad entre servicios consecutivos.

3.4.2. Función Objetivo

La función objetivo se construye a partir de las expresiones (2.9) y (2.12), como funciones lineales sobre la carga transportada u, $\hat{u}$ y la selección de arcos x, $\hat{x}$. El consumo de combustible en litros sobre un trayecto corto (*deadheads* o recolección) de longitud d, viajando a una velocidad de circulación v y llevando una carga u está dado por la función f, y el consumo sobre un trayecto largo (viaje al vertedero) de longitud d, viajando a una velocidad media v y llevando una carga u está dado por $\hat{f}$. Las funciones se definen como

$$f(d, u, v) = \alpha(d, v) \cdot u + \beta(d, v) \tag{3.8a}$$

$$\hat{f}(d, u, v) = \gamma(d, v) \cdot u + \mu(d, v). \tag{3.8b}$$

El desarrollo para obtener (3.8a) y (3.8b) se encuentra detallado en el Anexo A.

Así, la función objetivo del problema está dada por la expresión

$$F.O = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 \tag{3.9}$$

donde c_1 representa el costo de combustible asociado a recorrer *deadheads*, c_2 representa el costo asociado a viajes de ida y vuelta al vertedero, c_3 corresponde al costo de combustible asociado directamente a la recolección de basura y c_4 representa el costo por el tiempo utilizado en la operación (tiempo de recolección, deadheads y viajes al vertedero). Dichos costos se definen en base a los parámetros de las funciones (3.8a) y (3.8b) según

$$c_1 = \sum_{a \in A} c_d \cdot \Big(\alpha(d_a, \bar{v}_a) \cdot u_a + \beta(d_a, \bar{v}_a) \cdot x_a \Big) \tag{3.10a}$$

$$c_2 = \sum_{(s,s') \in A} c_d \cdot \Big(\gamma(d_{s\varphi}, \hat{v}_{ss'}) \cdot \hat{u}_{ss'} + \big(\mu(d_{s\varphi}, \hat{v}_{ss'}) + \mu(d_{\varphi s'}, \hat{v}_{ss'}) \big) \cdot \hat{x}_{ss'} \Big) \tag{3.10b}$$

$$c_3 = \sum_{s \in S} c_d \cdot \left(\left(\alpha(l_s, v_s^{max}) \cdot \sum_{a \in \delta^-(s)} u_a \right) + y_s \cdot \left(\alpha(l_s, v_s^{max}) \cdot \frac{q_{r^s}}{2} + \beta(l_s, v_s^{max}) \right) \right) \tag{3.10c}$$

$$c_4 = \sum_{s \in S} c_t \cdot w_s \cdot y_s + \sum_{(s,s') \in A} c_t \cdot \left(x_{ss'} \cdot \frac{d_{ss'}}{\bar{v}_{ss'}} + \hat{x}_{ss'} \cdot \left(\frac{d_{s\varphi}}{\hat{v}_s} + \frac{d_{\varphi s'}}{\hat{v}_{s'}} \right) \right) \tag{3.10d}$$

3.5. Validación del modelo

A continuación, se valida el funcionamiento del modelo en una instancia definida a partir de la información geográfica de un barrio en la comuna de Las Condes en Santiago de Chile, con $|R| = 18$ segmentos de calle ilustrada en la Figura 3.3. En esta instancia hay dos calles sin salida denominados "Pasaje 1" y "Pasaje 2". El origen y fin de la operación se ubica en el cuadrado gris y en cada segmento se debe recolectar 0.5 kg de basura por metro de longitud. La capacidad del vehículo es de 9 mil kg, la basura total a recolectar es de 849 kg, la longitud total de la red es de 1708 m y la distancia media entre el vertedero y el área de recolección es 8 km.

Las Figuras 3.4a y 3.4b presentan una planificación de la operación que minimiza distancia total recorrida y costo total, respectivamente. En ambos casos, las flechas continuas de color plomo indican la secuencia de recolección, mientras que las flechas gris

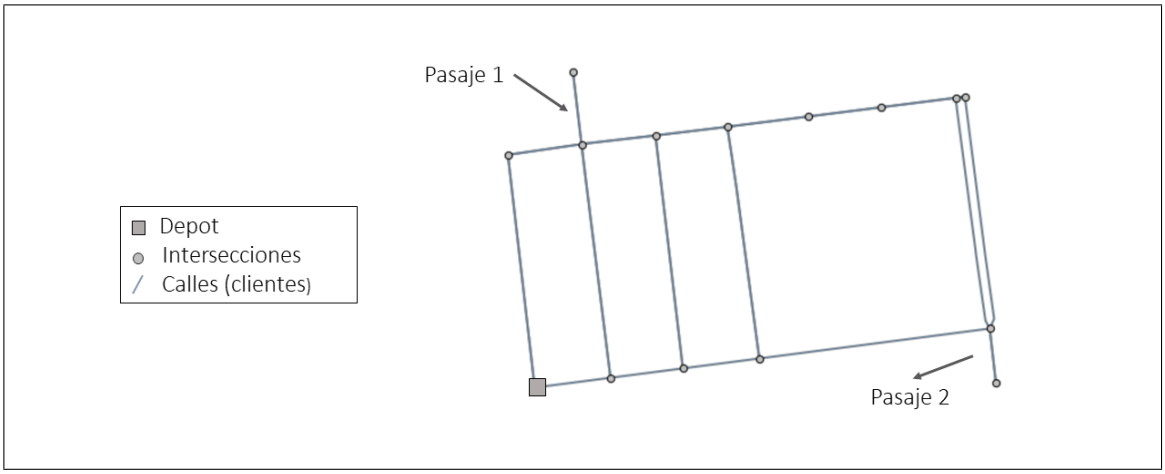


Figura 3.3. Instancia real de ejemplo para el LD-WCP-DC.

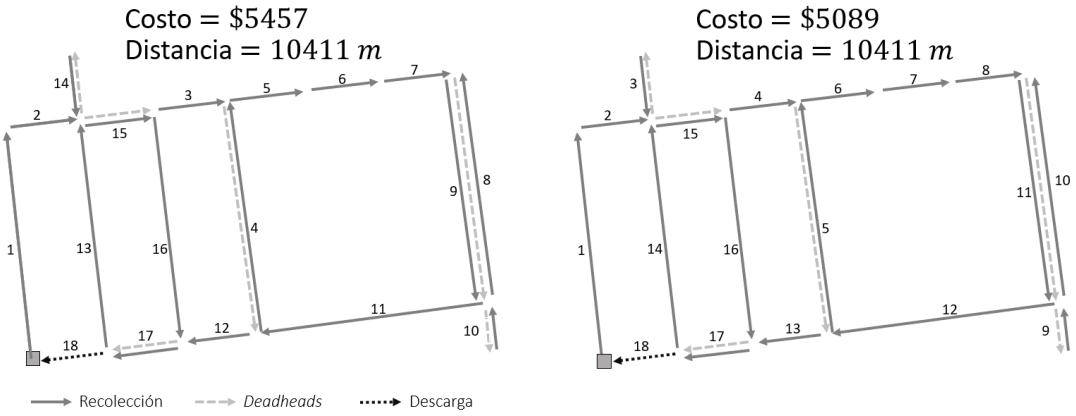
claro punteadas representan *deadheads* y la flecha negra punteada indica que luego de esa recolección se realizó un viaje de descarga al vertedero. El número sobre cada arco representa su posición en la secuencia de visita.

Las planificaciones de las Figuras 3.4a y 3.4b se diferencian en dos aspectos. El primero corresponde a la visita al "Pasaje 1", que pasa de la posición 14 a la posición 3 de la secuencia. El segundo corresponde al adelanto en la visita al "Pasaje 2", pasando de la posición 10 a la 9 en la secuencia. Estas diferencias permiten recorrer los tramos de *deadheads* a un nivel de carga inferior, ahorrando costo de combustible.

En ambas soluciones se recorre un *deadhead* total de 703 m, que sumado a los 1708 m a atender producto de la recolección y al viaje de descarga al vertedero, se obtiene un total de 10411 m. Sin embargo, al minimizar distancia el costo de la solución es de \$5457, mientras que al minimizar costos es de \$5089, lo que representa una reducción del 6.7% en comparación al primer plan. Se concluye que una gestión eficiente de *deadheads* permite reducir los costos operacionales y que minimizar distancia recorrida no garantiza una operación costo-eficiente.

Este experimento fue realizado mediante el motor de optimización Gurobi 9.1.0 en un computador con procesador AMD Ryzen 7 de 2.3 GHz y 16 GB de memoria RAM.

El tamaño de la instancia fue continuamente incrementado hasta no poder resolverse en menos de 10 horas. Así, el tamaño máximo que se logró resolver a optimalidad es de $|S| = 61$ SSdC, tardando menos de un minuto en la ejecución tanto al minimizar distancia como costo. Sin embargo, para una instancia con $|S| = 69$ SSdC, el tiempo de resolución al minimizar distancia fue de 23 segundos, mientras que al minimizar costo superó las 10 horas sin lograr alcanzar el óptimo (se obtuvo un *gap* de 0.3%). Los altos tiempos de cómputo sobre instancias considerablemente más pequeñas que las enfrentadas en la práctica, nos motiva a buscar un enfoque de solución heurístico.



(a) Planificación que minimiza distancia

(b) Planificación que minimiza costo

Figura 3.4. Planificación óptima de rutas para instancia de ejemplo.

4. ALGORITMO DE SOLUCIÓN PROPUESTO

En esta sección se propone una metodología de solución heurística para el LDWCP-ADS que permite resolver instancias de tamaño real. Se basa en un algoritmo dividido en tres etapas: (1) secuenciamiento inicial de visita a segmentos de calle, (2) mejora local mediante *Iterated Local Search*, y (3) reconstrucción de la secuencia de segmentos de calle.

En la sección 4.1 se presenta la metodología para construir una secuencia inicial de visita. En la sección 4.2 se propone un algoritmo de programación dinámica para evaluar el mínimo costo de una secuencia dada. En las secciones 4.3 y 4.4 se presentan dos algoritmos que operan en conjunto para mejorar localmente una secuencia. En la sección 4.5 se propone una metodología que acelera el mejoramiento local, particionando la secuencia en subsecuencias de menor tamaño. Finalmente, en la sección 4.6 se presenta la heurística completa que resuelve el LDWCP-ADS.

4.1. Secuenciamiento inicial de visita a segmentos de calle

Se utiliza una heurística de construcción *greedy* para obtener una secuencia inicial $\mathcal{R}_0 = \{r_1, r_2, \ldots, r_{|R|}\}$ de visita a segmentos de calle. Específicamente, adaptamos la heurística del vecino más cercano al LDWCP-ADS, considerando el sentido de visita escogido en el último SdC para determinar el próximo segmento a ser incluido. El *pseudocódigo* se presenta en el Algoritmo 1.

En el paso 1 el algoritmo inicia la secuencia a diseñar, en el paso 2 escoge un SdC cualquiera r_1. En el paso 3 escoge otro SdC r_2 tal que la distancia entre los SSdC $s \in S_{r_1}$ y $s' \in S_{r_2}$ sea mínima. En el paso 4 agrega los segmentos de calle seleccionados $r_1, r^{s'}$ al final de la secuencia. En el ciclo se escoge consecutivamente el próximo sentido s'', correspondiente al SSdC más cercano después de recorrer s', cuyo SdC asociado $r^{s''}$ aún no haya sido visitado. Luego, $r^{s''}$ se agrega al final de la secuencia y se actualiza s' como s''. Finalmente, se retorna una secuencia inicial de visita.

Algoritmo 1 Secuenciamiento inicial de segmentos de calle

Secuencia inicial $\mathcal{R}_0 \leftarrow \{\ \}$
Escoger un SdC arbitrario $r_1 \in R$
$(s, s') = \underset{\substack{s \in S_{r_1}\,;\, s' \in S_{r_2}\,;\\ r_2 \in R \setminus \{r_1\}}}{\operatorname{argmin}} d_{s,s'}$
Agregar $(r_1, r^{s'})$ al final de $\mathcal{R}_0$
while $|\mathcal{R}_0| < |R|$ **do**
    $s'' = \underset{\substack{s'' \in S_{r_2}\,;\\ r_2 \in R \setminus \mathcal{R}_0}}{\operatorname{argmin}} d_{s',s''}$
    Agregar $r^{s''}$ al final de $\mathcal{R}_0$
    $s' \leftarrow s''$
end while
return $\mathcal{R}_0$

4.2. Evaluación costo-eficiente de una secuencia de SdC: Algoritmo DP

Dada una secuencia $\mathcal{R} = \{r_1, r_2, \ldots, r_{|R|}\}$ de segmentos de calle a visitar, se debe definir en qué posición de la ruta ejecutar viajes de descarga al vertedero y cuántos viajes realizar. Adicionalmente, debemos determinar en qué sentido de circulación recolectar cada segmento de calle bidireccional. Para ello, proponemos un algoritmo de programación dinámica (DP) que determina ambas decisiones, entregando el mínimo costo $C^*(\mathcal{R})$ asociado a operar $\mathcal{R}$.

Las etapas de decisión en el Algoritmo DP corresponden a la posición i dentro de la secuencia $\mathcal{R}$, donde $i = 1, \ldots, |\mathcal{R}|$. Luego, se define el estado (s, i, j) como un vector que representa la condición existente en el vehículo al momento de llegar a recolectar el sentido de segmento de calle $s \in S_{r_i}$ de la secuencia, habiendo descargado por última vez inmediatamente antes de visitar el segmento r_j. El espacio de estados completo está dado por

$$\mathcal{E} = \{(s, i, j) : 1 \leq i \leq |\mathcal{R}|, 1 \leq j \leq i, s \in S_{r_i}\}. \tag{4.1}$$

El espacio de acciones en un estado $(s, i, j) \in \mathcal{E}$ está dado por el vector (s', z), donde $s' \in S_{r_{i+1}}$ es el sentido de recolección en la siguiente etapa y z corresponde a la decisión

de ir o no a descargar al vertedero entre la recolección de r_i y r_{i+1}, y se define como

$$z = \begin{cases} 0 & \text{Si no descarga } \Big(\text{posible solo si } b_{ij} + q_{r_i} + q_{r_{i+1}} \leq Q\Big) \\ 1 & \text{Si descarga} \end{cases} \tag{4.2}$$

donde $b_{ij} := \sum_{k=j}^{i-1} q_{r_k}$ es la basura acumulada en el vehículo al momento de comenzar a recolectar el sentido de segmento de calle s. Así, la transición desde un estado predecisión a un estado posdecisión es:

$$\underbrace{(s,i,j)}_{\text{Estado predecisión}} \longrightarrow \underbrace{(s',z)}_{\text{Acción}} \longrightarrow \underbrace{\begin{array}{ll} (s',i+1,j) & \text{si } z=0 \\ (s',i+1,i+1) & \text{si } z=1\,. \end{array}}_{\text{Estado posdecisión}} \tag{4.3}$$

Con lo anterior, se define recursivamente el *Cost-to-go* en el estado $(s,i,j) \in \mathcal{E}$ $\big($es decir, el mínimo costo futuro desde (s,i,j) en adelante$\big)$ mediante la siguiente ecuación de Bellman (Bellman, 1952)

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{s,i,j} = c^{rec}(s, b_{ij}) + \min \Big\{ & \min_{s' \in S_{r_{i+1}}} \left\{ c^{dh}(s, s', b_{ij} + q_{r_i}) + \mathcal{C}_{s',i+1,j} \right\} ; \\ & \min_{s' \in S_{r_{i+1}}} \left\{ c^{vert}(s, s', b_{ij} + q_{r_i}) + \mathcal{C}_{s',i+1,i+1} \right\} \Big\} , \end{aligned} \tag{4.4}$$

donde $c^{rec}(s,b)$ es el costo asociado a recolectar basura en el SSdC $s \in S$ comenzando con una carga b de basura, $c^{dh}(s,s',b)$ es el costo asociado a recorrer el tramo entre el fin de s y el comienzo de s' como *deadhead* cargando con b de basura, y $c^{vert}(s,s',b)$ es el costo asociado a un viaje desde el término de recolección en s al vertedero con una carga de basura b y desde el vertedero al comienzo del servicio en s' sin carga. Estos costos se definen a partir de (3.8a) y (3.8b) como

$$c^{rec}(s,b) = c_d \cdot f(l_s, b, v_s^{max}) + c_t \cdot w_s \tag{4.5a}$$

$$c^{dh}(s,s',b) = c_d \cdot f(d_{ss'}, b, \bar{v}_{ss'}) + c_t \cdot \frac{d_{ss'}}{\bar{v}_{ss'}} \tag{4.5b}$$

$$c^{vert}(s,s',b) = c_d \cdot \big(\hat{f}(d_{s\varphi}, b, \hat{v}_s) + \hat{f}(d_{\varphi s'}, 0, \hat{v}_{s'})\big) + c_t \cdot \Big(\frac{d_{s\varphi}}{\hat{v}_s} + \frac{d_{\varphi s'}}{\hat{v}_{s'}}\Big)\,. \tag{4.5c}$$

Adicionalmente, se define el costo terminal $\forall s \in S_{r_{|\mathcal{R}|}}, \forall j \leq |R| : b_{|\mathcal{R}|j} + q_{r_{|\mathcal{R}|}} \leq Q$ como

$$\mathcal{C}_{s,|\mathcal{R}|,j} = c^{rec}(s, b_{|\mathcal{R}|j}) + c^{vert}(s, 0^+, b_{|\mathcal{R}|j} + q_{r_{|\mathcal{R}|}}) \,. \tag{4.6}$$

Así, se obtiene recursivamente el mínimo costo de operar la secuencia $\mathcal{R}$ como

$$C^*(\mathcal{R}) = \min_{s \in S_{r_1}} \mathcal{C}_{s,1,1}, \tag{4.7}$$

y los vectores $x^*(\mathcal{R})$, $\hat{x}^*(\mathcal{R})$ asociados a una decisión óptima de secuenciamiento de SSdC y de elección de puntos de descarga del vehículo. Este algoritmo posee una complejidad de $\mathcal{O}(|\mathcal{R}|^2)$ operaciones.

4.2.1. Reducción del espacio de búsqueda

Si crece el tamaño de la instancia, evaluar el costo de operar una secuencia mediante DP se encarece, ya que aumenta cuadráticamente el volumen de cómputo. Proponemos una mejora para reducir el espacio de búsqueda y así evitar evaluar estados que nunca serán visitados en una solución óptima.

La mejora consiste en encontrar, para cada etapa $i = 1, \ldots, |\mathcal{R}|$, una condición suficiente para garantizar que es subóptimo viajar al vertedero. Esto sucede si una sobreestimación del costo de continuar recolectando es siempre menor o igual a una subestimación del costo de ir al vertedero y luego continuar recolectando. A continuación, se construye dicha condición:

Primero, se define el subconjunto

$$\tilde{\mathcal{E}} := \left\{ (s,i,j) \in \mathcal{E} : \mathcal{C}_{s',i+1,j} - \mathcal{C}_{s'',i+1,i+1} < c^{vert}(s, s'', 0) - c^{dh}(s, s', Q) \right\}, \tag{4.8}$$

donde $s' = \underset{\tilde{s} \in S_{r_{i+1}}}{\operatorname{argmax}} \{ c^{dh}(s, \tilde{s}, Q) + \mathcal{C}_{\tilde{s},i+1,j} \}$ es el SSdC de la etapa $i+1$ que maximiza el costo de continuar recolectando operando a máxima capacidad de carga y $s'' = \underset{\tilde{s} \in S_{r_{i+1}}}{\operatorname{argmin}} \{ c^{vert}(s, \tilde{s}, 0) + \mathcal{C}_{\tilde{s},i+1,i+1} \}$ es el SSdC de la etapa $i+1$ que minimiza el costo de ir

a descargar al vertedero operando sin carga. Tanto s' como s'' solo dependen de i y s, por lo que se pueden calcular independiente de j antes de ejecutar la recursión en el DP.

PROPIEDAD 1. *Dada una secuencia $\mathcal{R}$ de visita a SdC, todo estado $(s, i, j) \in \tilde{\mathcal{E}}$ nunca formará parte de una ruta óptima del DP.*

DEMOSTRACIÓN 1. *Comenzamos con la condición que debe cumplirse para que en el estado (s, i, j) no sea conveniente descargar: el costo de continuar recolectando debe ser inferior al costo futuro de viajar al vertedero y luego continuar recolectando*

$$c^{rec}(s, b_{ij}) + \min_{\tilde{s} \in S_{r_{i+1}}} \left\{ c^{dh}(s, \tilde{s}, b_{ij}+q_{r_i}) + \mathcal{C}_{\tilde{s},i+1,j} \right\} < c^{rec}(s, b_{ij}) + \min_{\tilde{s} \in S_{r_{i+1}}} \left\{ c^{vert}(s, \tilde{s}, b_{ij} + q_{r_i}) + \mathcal{C}_{\tilde{s},i+1,i+1} \right\}, \tag{4.9}$$

lo que equivale a

$$\underbrace{\min_{\tilde{s} \in S_{r_{i+1}}} \left\{ c^{dh}(s, \tilde{s}, b_{ij} + q_{r_i}) + \mathcal{C}_{\tilde{s},i+1,j} \right\}}_{c_{z=0}} < \underbrace{\min_{\tilde{s} \in S_{r_{i+1}}} \left\{ c^{vert}(s, \tilde{s}, b_{ij} + q_{r_i}) + \mathcal{C}_{\tilde{s},i+1,i+1} \right\}}_{c_{z=1}}. \tag{4.10}$$

Sea $c'_{z=0}$ una cota superior a $c_{z=0}$, y $c'_{z=1}$ una cota inferior a $c_{z=1}$, definidos por

$$\begin{aligned} c'_{z=0} &= \max_{\tilde{s} \in S_{r_{i+1}}} \left\{ c^{dh}(s, \tilde{s}, Q) + \mathcal{C}_{\tilde{s},i+1,j} \right\} \\ c'_{z=1} &= \min_{\tilde{s} \in S_{r_{i+1}}} \left\{ c^{vert}(s, \tilde{s}, 0) + \mathcal{C}_{\tilde{s},i+1,i+1} \right\}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Adicionalmente, sea s' el argumento que maximiza $c'_{z=0}$ y s'' el argumento que minimiza $c'_{z=1}$.

Luego, como $c_{z=0} \leq c'_{z=0}$ y $c'_{z=1} \leq c_{z=1}$, la condición $c'_{z=0} < c'_{z=1}$ implica el cumplimiento de (4.10) *e implica que no es conveniente descargar. Reordenando los términos se obtiene* (4.8)*.*

□

El resultado de la Propiedad 1 se ilustra en la Figura 4.1. El área por debajo de la recta $i = j$ corresponde al conjunto de pares (i, j) factibles, donde el triángulo blanco ubicado en el costado inferior derecho representa eventuales combinaciones que violan la restricción de capacidad del vehículo, es decir, $b_{ij} + q_{r_i} > Q$. La verificación de subóptimalidad de ir a descargar al vertedero evita la necesidad de evaluar estados pertenecientes a la franja oscura, donde el vehículo no ha acumulado suficiente basura para que sea conveniente ir a descargar.

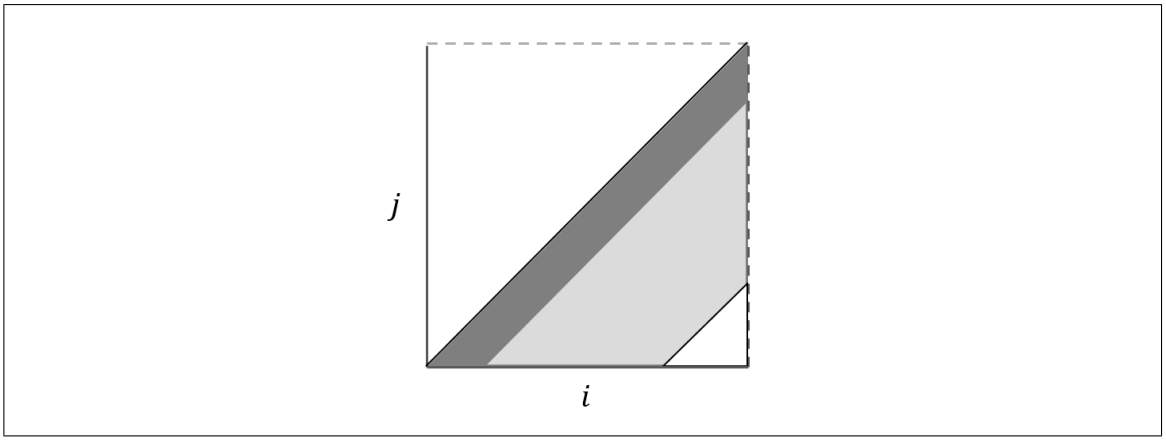


Figura 4.1. Eliminación de estados subóptimos en algoritmo DP.

4.3. Mejoramiento local sobre una secuencia $\mathcal{R}$

Para reducir el costo $C^*(\mathcal{R})$ de una secuencia de visita $\mathcal{R}$, se propone un algoritmo de búsqueda local sobre movimientos de tipo 2-opt, *swap* y k-*reinsert* (Salehipour et al., 2011), ilustrados en la Figura 4.2, donde las secuencias pre- y posmovimiento se ubican a la izquierda y derecha, respectivamente. Dentro del algoritmo, estos tres tipos de movimiento son testeados iterativamente sobre la secuencia incumbente $\mathcal{R}^*$, evaluando potenciales mejoras y actualizando $\mathcal{R}^*$ si corresponde. En el Algoritmo 2 se describe dicho proceso.

La metodología para calcular una estimación rápida $\hat{C}(\mathcal{R}')$ del costo real $C^*(\mathcal{R}')$ se divide en dos: (i) estimación del costo de trayectos cortos $\hat{C}_1(\mathcal{R}')$ (recolección y *deadheads*)

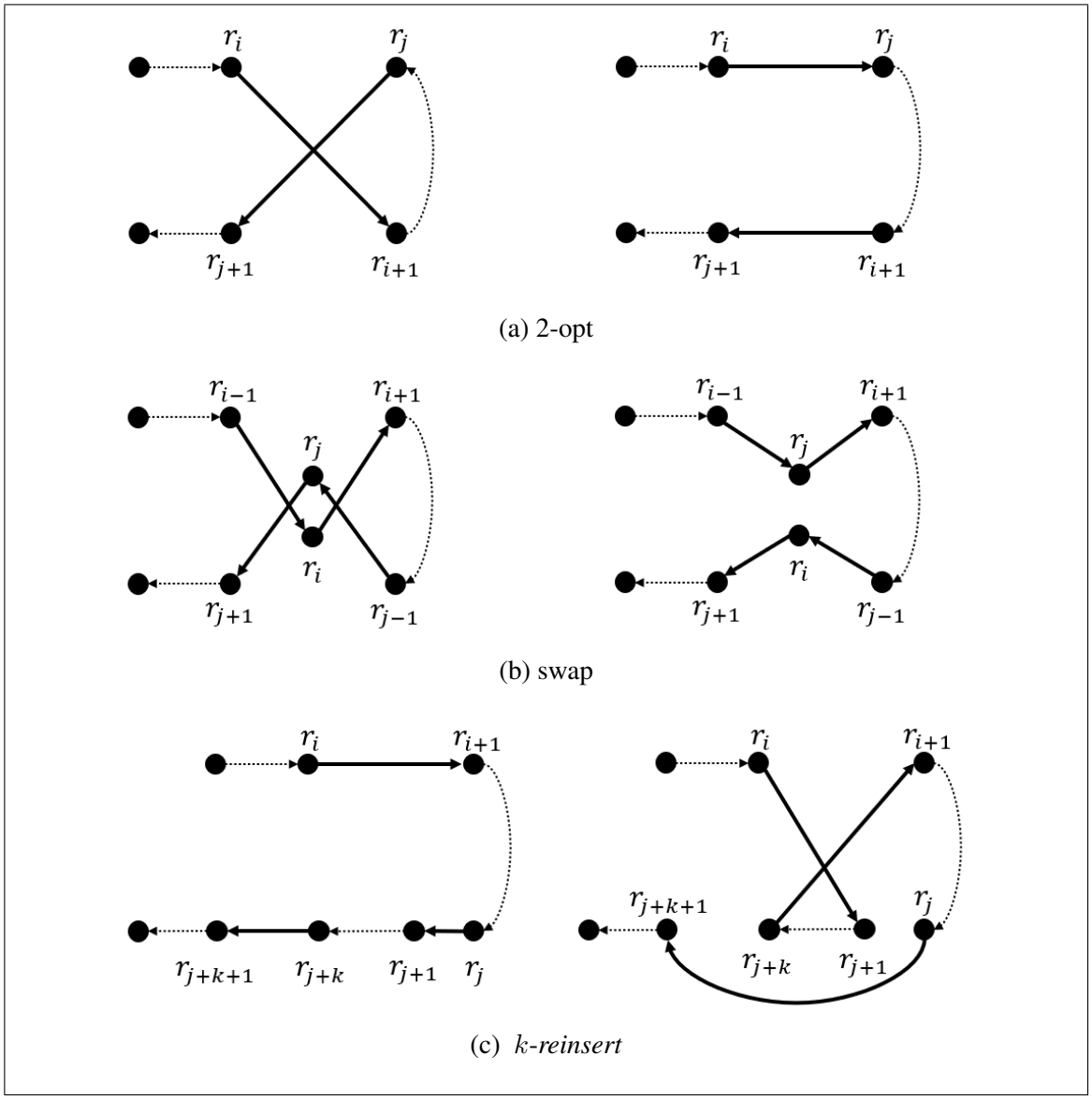


Figura 4.2. Movimientos de búsqueda local entre índices i y j.

y (ii) estimación del costo de trayectos largos $\hat{C}_2(\mathcal{R}')$ (viajes al vertedero). La estimación del costo de trayectos cortos considera que la operación se rige por una política estática de descarga, en la cual se ejecuta un viaje al vertedero cada vez que el vehículo alcanza un $\phi\,\%$ de su capacidad máxima, con $\phi \in (0, 100]$, quedando automáticamente vacío cada vez que se alcanza dicho nivel. Adicionalmente, en cada visita de recolección a un SdC se

Algoritmo 2 Búsqueda local

Input: Secuencia $\mathcal{R}$

Incumbente $I^* \leftarrow C^*(\mathcal{R})$
Mejor secuencia $\mathcal{R}^* \leftarrow \mathcal{R}$
for $i \in 1, \ldots, |\mathcal{R}| - 2$ **do**
    for $j \in i + 2, \ldots, |\mathcal{R}|$ **do**
        for $m \in \{$2-*opt*, *swap*, k-*reinsert*$\}$ **do**
            Construir $\mathcal{R}'$ aplicando m a $\mathcal{R}^*$ entre r_i y r_j
            Estimar costo real $\vartheta \leftarrow \hat{C}(\mathcal{R}')$
            i) **if** $(\vartheta \geq I^*)$ **then** continue
            ii) $I' \leftarrow C^*(\mathcal{R}')$
            iii) **if**($I' \geq I^*$) **then** continue
            iv) $\mathcal{R}^* \leftarrow \mathcal{R}'$, $I^* \leftarrow I'$
        end for
    end for
end for
return $\mathcal{R}^*, I^*$

trunca la cantidad de basura acumulada, para así forzar un menor consumo de combustible a lo largo de la operación.

Así, $\hat{C}_1(\mathcal{R}')$ se calcula evaluando, para cada segmento de calle $r_i \in \{r_1, \ldots, r_{|\mathcal{R}'|-1}\}$, el menor costo posible asociado a recolectar basura en r_i, más el mínimo costo posible por recorrer el tramo entre r_i y r_{i+1} como *deadhead*, de la forma

$$\hat{C}_1(\mathcal{R}') = \sum_{i=1}^{|\mathcal{R}'|-1} \underbrace{\min_{s \in S_{r_i}} c^{rec}\big(s, \bar{b}(i-1, \phi)\big)}_{\text{estimación costo recolección}} + \underbrace{\min_{s \in S_{r_i}, s' \in S_{r_{i+1}}} c^{dh}\big(s, s', \bar{b}(i, \phi)\big)}_{\text{estimación costo } \textit{deadhead}}, \tag{4.12}$$

donde $\bar{b}(i, \phi) := 100 \cdot \sum_{k=\sigma(i,\phi)}^{i} \left\lfloor \frac{q_{r_k}}{100} \right\rfloor$ corresponde a la basura (truncada a la centena inferior en cada SdC servido), que se acumuló en el vehículo desde la posición $\sigma(i, \phi)$, correspondiente a la última en la cual se alcanzó un $\phi\%$ de la capacidad del vehículo y definida por el siguiente problema de optimización:

$$
\begin{aligned}
\sigma(i,\phi) = \quad & \max_{j,\,n} \quad j \\
\textit{s.a} \quad & 1 \leq j \leq i \\
& \sum_{k=1}^{j-1} q_{r_k} < n \cdot \frac{\phi}{100} \cdot Q \\
& \sum_{k=1}^{j} q_{r_k} \geq n \cdot \frac{\phi}{100} \cdot Q \\
& n,\, j \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

Un ejemplo de la estimación del costo por trayectos cortos $\hat{C}_1(\mathcal{R}')$ se ilustra en la Figura 4.3, donde el eje horizontal representa el avance en la secuencia de visita a segmentos de calle y el eje vertical indica el nivel de basura acumulada en el vehículo. La línea punteada representa la operación real, mientras que la línea clara corresponde a la acumulación de basura bajo una política estática de descarga y la línea oscura corresponde a la acumulación bajo una política estática y donde se trunca la basura acumulada en cada segmento de calle visitado.

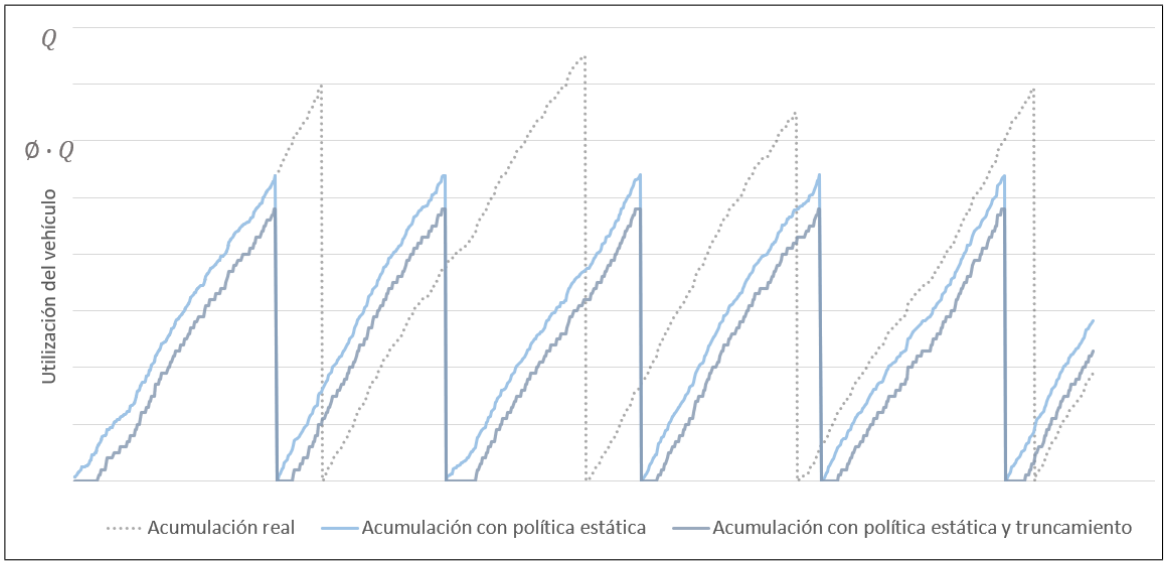


Figura 4.3. Perfil real y aproximado de carga acumulada en el vehículo.

La estimación del costo de viajes al vertedero $\hat{C}_2(\mathcal{R}')$ se calcula como el coste del mínimo número de viajes posibles, ejecutados ida y vuelta desde el nodo más cercano al vertedero. Para ello, se enuncia la siguiente propiedad.

PROPIEDAD 2. *El combustible consumido al ir a descargar al vertedero en una determinada cantidad de viajes desde un mismo punto geográfico no cambia en función de la distribución de carga entre los viajes.*

DEMOSTRACIÓN 2. *Sea* $B = \sum_{k=1}^{|\mathcal{R}'|} q_{r_k}$ *la basura total que debe ser recolectada a lo largo de una secuencia* $\mathcal{R}'$ *y sea* ψ *tal que* $B = \psi \cdot Q$*, de modo que el mínimo número de viajes de descarga a ejecutar es* $\lceil \psi \rceil$.

De acuerdo a (3.8b)*, el consumo asociado a un viaje de descarga (ida y vuelta) desde una ubicación dada, a un nivel de basura* b *está dado por* $\hat{f}(b) = \gamma \cdot b + 2 \cdot \mu$.

Supongamos que la carga se distribuye equitativamente en los viajes, es decir, se realizan $\lceil \psi \rceil$ *viajes con un nivel de basura* $\dfrac{B}{\lceil \psi \rceil}$ *en cada uno. En este caso el combustible consumido es*

$$\hat{f}_1 = \lceil \psi \rceil \cdot \left(\gamma \cdot \frac{B}{\lceil \psi \rceil} + 2 \cdot \mu \right) = \underbrace{\gamma \cdot B + 2 \cdot \mu \cdot \lceil \psi \rceil}_{\textit{Se paga } \lceil \psi \rceil \textit{ veces el costo fijo}} . \tag{4.14}$$

Si la carga se distribuye entre los viajes de distinta manera, por ejemplo, se realizan $\lceil \psi \rceil - 1$ *viajes completamente cargado (*$b = Q$*), más un viaje final con* $b = Q \cdot (\psi - \lfloor \psi \rfloor)$*, el combustible consumido es*

$$\begin{aligned}
\hat{f}_2 &= (\lceil \psi \rceil - 1) \cdot (\gamma \cdot Q + 2 \cdot \mu) + \gamma \cdot Q \cdot (\psi - \lfloor \psi \rfloor) + 2 \cdot \mu \\
&= \gamma \cdot Q \cdot (\lceil \psi \rceil - 1 + \psi - \lfloor \psi \rfloor) + 2 \cdot \mu \cdot \lceil \psi \rceil \\
&= \gamma \cdot Q \cdot \psi + 2 \cdot \mu \cdot \lceil \psi \rceil \qquad\qquad (\textit{ya que } \lceil \psi \rceil = \lfloor \psi \rfloor + 1) \\
&= \gamma \cdot B + 2 \cdot \mu \cdot \lceil \psi \rceil \\
&= \hat{f}_1.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

□

Esta demostración considera que, para un nodo s dado, se cumple que $d_{s\varphi} = d_{\varphi s}$. Sin embargo, puede ser extendida al caso donde dichas distancias son distintas, y a cualquier otra manera de distribuir la carga total B en los $\lceil \psi \rceil$ viajes.

COROLARIO 1. *Bajo las condiciones descritas en la Propiedad 1, el costo de operar la secuencia $\mathcal{R}'$ tampoco se ve afectado por la distribución de la carga entre los viajes al vertedero, pues el costo asociado al tiempo de viaje es independiente del nivel de carga transportada. Con ello, $\hat{C}_2(\mathcal{R}')$ definido por*

$$\hat{C}_2(\mathcal{R}') = \lceil \psi \rceil \cdot \left(\min_{s \in S} \left\{ c^{vert}\big(s, s, \frac{B}{\lceil \psi \rceil}\big) \right\} \right) \tag{4.16}$$

es una cota inferior al costo de ejecutar $\lceil \psi \rceil$ viajes de descarga al vertedero al operar la secuencia $\mathcal{R}'$.

Nótese que la primera parte del Corolario 1 es una consecuencia de (4.12) y la Propiedad 2. De esta manera, se aproxima el costo de operar la secuencia $\mathcal{R}'$ mediante la expresión

$$\hat{C}(\mathcal{R}') = \hat{C}_1(\mathcal{R}') + \hat{C}_2(\mathcal{R}'). \tag{4.17}$$

Para evaluar la calidad de la estimación propuesta, se calculó la diferencia porcentual entre $C^*(\mathcal{R}')$ y $\hat{C}(\mathcal{R}')$ sobre un total de 10 mil secuencias distintas para cada tamaño de secuencia $|S| \in \{100, 250, 500, 750, 1000\}$ en instancias construidas a partir de OSMnx según

$$\text{Dif}\,\% = 100 \cdot \frac{C^*(\mathcal{R}') - \hat{C}(\mathcal{R}')}{C^*(\mathcal{R}')}\,, \tag{4.18}$$

y considerando $\phi = 50\,\%$. Los resultados se presentan en la Tabla 4.1, donde se observa que $\hat{C}(\mathcal{R}')$ tiende a subestimar $C^*(\mathcal{R}')$, presentando un error de entre un 4.15 % y un 7.19 % en promedio. Esto permite evitar la evaluación exacta del costo de una importante proporción de las secuencias generadas en el algoritmo de búsqueda local.

Tabla 4.1. Diferencia porcentual promedio entre costo real y estimación.

$\|S\|$	100	250	500	750	1000
Dif %	4.15 %	7.19 %	6.31 %	6.45 %	6.74 %

4.4. Algoritmo *Iterated Local Search*

Sobre el algoritmo de búsqueda local, se propone un algoritmo basado en *Iterated Local Search* (ILS) (Lourenço et al., 2003, 2019), con perturbación aleatoria de la solución actual para explorar soluciones y evitar caer en óptimos locales. Para ello, se define un parámetro $\zeta \in [\zeta_{min}, \zeta_{max}]$ que representa el porcentaje de destrucción de una secuencia y que va en aumento al no encontrar mejoras a la solución actual. Así, cada vez que se perturba la solución, se destruye y repara aleatoriamente una porción ζ de la secuencia.

El algoritmo ILS, presentado a continuación, comienza con una secuencia $\mathcal{R}_0$ e iterativamente aplica búsqueda local según el Algoritmo 2. La secuencia $\mathcal{R}'$ corresponde a la solución obtenida luego de la perturbación aleatoria y $\mathcal{R}'^{(*)}$ la secuencia mejorada a partir de $\mathcal{R}'$.

Algoritmo 3 *Iterated Local Search*

Input: $\mathcal{R}_0, \zeta_{min}, \zeta_{max}$
1: $\zeta \leftarrow \zeta_{min}$
2: $\mathcal{R}^* \leftarrow$ Búsqueda Local $(\mathcal{R}_0)$
3: **while** $\zeta \leq \zeta_{max}$ **do**
4: $\quad \mathcal{R}' \leftarrow$ Destruir y Reparar$(\mathcal{R}^*, \zeta)$
5: $\quad \mathcal{R}'^{(*)} \leftarrow$ Búsqueda Local $(\mathcal{R}')$
6: $\quad$ **if** $C^*(\mathcal{R}'^{(*)}) < C^*(\mathcal{R}^*)$ **then**
7: $\quad\quad \mathcal{R}^* \leftarrow \mathcal{R}'^{(*)}$
8: $\quad$ **end if**
9: $\quad \zeta \leftarrow \zeta + \Delta\zeta$
10: **end while**
11: **return** $\mathcal{R}^*$

4.5. Algoritmo de partición de secuencia

La evaluación exacta por DP de $C^*(\mathcal{R})$ desde una secuencia $\mathcal{R}$ puede ser costosa para instancias de tamaño realista que superan los dos mil segmentos de calle. Por ello, proponemos incorporar una etapa de partición que divide la secuencia de SdC en un conjunto de subsecuencias, mejora localmente cada una y luego reconstruye la secuencia completa y evalúa su costo mediante DP.

Para particionar la secuencia $\mathcal{R}$, se define un parámetro $p \in (0, 1)$ que determina la carga máxima a recolectar por subsecuencia como una fracción de Q. Con ello, se obtiene una partición de subsecuencias $\{\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_L\}$ de $\mathcal{R}$. El fraccionamiento se presenta en el Algoritmo 4.

Algoritmo 4 Partición de una secuencia

Input: $\mathcal{R}$, p
$b \leftarrow 0$; $l \leftarrow 1$; $\mathcal{R}_l \leftarrow \varnothing$
for $r \in \mathcal{R}$ **do**
    if $b + q_r \leq p \cdot Q$ **then**
        $\mathcal{R}_l \leftarrow \mathcal{R}_l \cup \{r\}$
        $b \leftarrow b + q_r$
    else
        $l \leftarrow l + 1$
        $\mathcal{R}_l \leftarrow \{r\}$
        $b \leftarrow q_r$
    end if
end for
$L \leftarrow l$
return $\{\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_L\}$

4.6. Heurística Acelerada con Partición de Secuencia

Nuestra Heurística Acelerada con Partición de Secuencia (HAPS) funciona de la siguiente forma. Primero se construye una secuencia inicial de segmentos de calle mediante el Algoritmo 1. Luego, se particiona en subsecuencias $\{\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_L\}$ mediante el Algoritmo 4 y a cada subsecuencia $\mathcal{R}_l$ se le aplica el Algoritmo 3 (ILS) para mejorarla. A

continuación, se une las subsecuencias mejoradas para formar una nueva secuencia de rutas $\mathcal{R}'$, cuyo costo exacto se compara con el costo del incumbente. Este proceso se repite reduciendo el tamaño de las subsecuencias desde el parámetro p_{max} hasta p_{min}.

El pseudocódigo de la Heurística Acelerada con Partición de Secuencia se presenta en el Algoritmo 5. Adicionalmente, se presenta una ilustración gráfica en la Figura 4.4

Algoritmo 5 HAPS

Input: $p_{min}, p_{max}, \zeta_{min}, \zeta_{max}$

$\mathcal{R}^* \leftarrow$ Algoritmo 1 ; $p \leftarrow p_{max}$; $I^* \leftarrow C^*(\mathcal{R}^*)$
while $p \geq p_{min}$ **do**
    $\{\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_L\} \leftarrow$ *Particionar*$(\mathcal{R}^*, p)$
    for $\mathcal{R}_l \in \{\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_L\}$ **do**
        $\mathcal{R}_l^* \leftarrow$ *Iterated Local Search*$(\mathcal{R}_l, \zeta_{min}, \zeta_{max})$
    end for
    $\mathcal{R}' \leftarrow \bigcup_{l=1}^{L} \mathcal{R}_l^*$
    $I' \leftarrow C^*(\mathcal{R}')$
    if $I' < I^*$ **then**
        $\mathcal{R}^* \leftarrow \mathcal{R}'$
        $I^* \leftarrow I'$
    else
        $p \leftarrow p - \Delta p$
    end if
end while
return $\mathcal{R}^*, I^*$

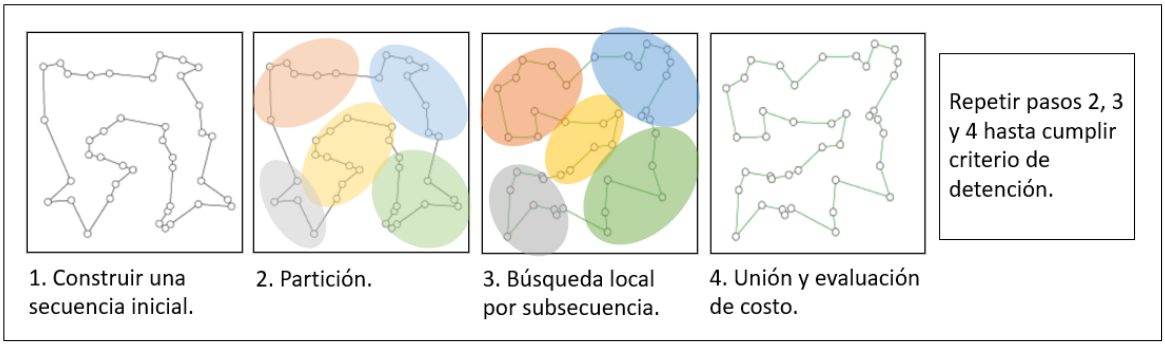


Figura 4.4. Heurística Acelerada con Partición de Secuencia.

5. RESULTADOS COMPUTACIONALES

En este capítulo validamos experimentalmente la metodología propuesta, resolviendo un set de instancias sobre redes viales reales obtenidas de la librería OSMnx de OpenStreetMap (Boeing, 2017). En la sección 5.1 se valida la heurística propuesta en instancias de tamaño pequeño. En la sección 5.2 se presenta una metodología para construir 10 familias de instancias, junto al diseño experimental. En la sección 5.3 se presentan y analizan los resultados obtenidos. En la sección 5.4 se presenta un nuevo experimento sobre una instancia de tamaño real, junto a un análisis de sensibilidad sobre dos parámetros relevantes del problema. Finalmente, en la sección 5.5 se discuten las principales lecciones obtenidas.

Los experimentos fueron ejecutados en un computador con procesador AMD Ryzen 7 de 4 núcleos, 2.3 GHz CPU y 16 GB de memoria RAM. El código fue implementado en Python 3.9.2 y se utilizó Gurobi 9.1.0 como motor de optimización.

5.1. Validación de la heurística en instancias pequeñas

Inicialmente, construimos 21 instancias a partir de topologías de entre $|S| = 19$ y $|S| = 56$ sentidos de segmento de calle, para validar la heurística descrita en el capítulo 4. El modelo propuesto en la sección 3.4 fue resuelto a optimalidad mediante el solver en cada instancia.

En este experimento se implementó la heurística descrita en la sección 4.4, es decir, sin la etapa de partición de secuencia descrita en la sección 4.5, ya que el tiempo que tarda la evaluación óptima del costo de una secuencia de dicho tamaño es de milésimas de segundo. Se consideró un vehículo de capacidad $Q = 500$ kg para forzar la ejecución de viajes intermedios al vertedero.

La Tabla 5.1 resume el desempeño de la heurística en función del tamaño de instancia $|S|$. En nuestras instancias de hasta 40 SSdC, la heurística entrega soluciones con un *gap*

promedio inferior al 1%, el cual se define como

$$gap = 100 \cdot \frac{\text{Costo heurística} - \text{Costo óptimo}}{\text{Costo óptimo}}. \tag{5.1}$$

Por otra parte, en 13 de los 21 experimentos se alcanzó una solución óptima. Finalmente, en solo dos de las instancias de entre 40 y 56 SSdC se alcanzó una solución óptima, pero la peor solución obtenida presentó un gap inferior al 2%.

Tabla 5.1. Validación de la heurística en instancias pequeñas.

% de *gap* sobre costo óptimo			
$\|S\|$	[19,30)	[30,40)	[40,56]
nº de instancias	7	7	7
Resueltas a optimalidad	6	5	2
gap promedio	0.09%	0.38%	1.13%
gap mínimo	0%	0%	0%
gap máximo	0.63%	1.44%	1.86%

5.2. Diseño experimental

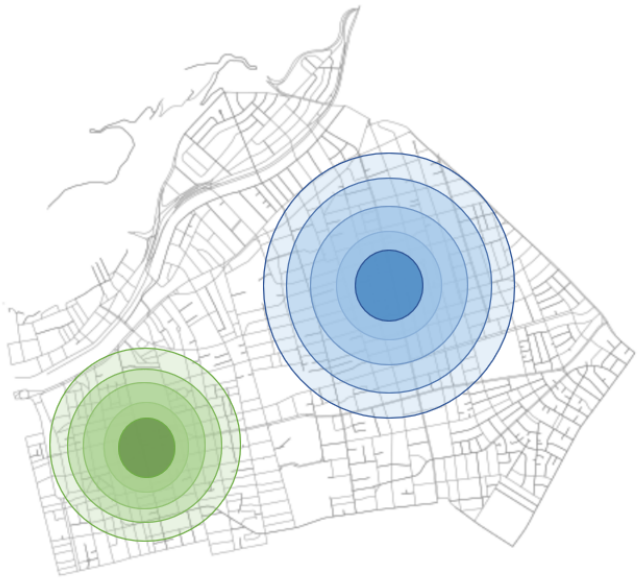
Para esta sección se construyeron 10 familias de instancias de mayor tamaño, donde cada una representa un barrio de la comuna de Providencia en Santiago de Chile. Escogimos esta zona debido a que corresponde a un área céntrica de la ciudad, donde coexisten sectores con abundantes servicios y barrios residenciales. Además, la comuna de Providencia posee una densidad poblacional que bordea los 11 mil habitantes por km^2, valor que se encuentra por sobre la densidad promedio de Santiago, que alcanza los 8200 habitantes por km^2 (BCN Chile, 2020).

Las instancias fueron construidas basándose en Boeing (2017), considerando una superficie de cobertura circular que considera una dirección central y un radio `r` que define un área sobre la cual operará el servicio de recolección. Así, cada familia generada cuenta con 5 instancias de tamaño $|S| \in \{100, 250, 500, 750, 1000\}$ sentidos de segmento de calle, escogiéndose para cada una el valor `r` que permite cumplir con el tamaño deseado.

En la Figura 5.1a se presenta los puntos céntricos de las 10 familias de instancias generadas, mientras que en la Figura 5.1b se ilustra un ejemplo de las distintas áreas cubiertas dentro de dos familias, dependiendo del radio de cada instancia. La familia de color verde se encuentra ubicada sobre una zona de mayor densidad vial, por lo que sus radios son más pequeños que en la familia de color azul. En la operación real, esta comuna cuenta con 16 camiones recolectores. Si se considera que todos son utilizados en cada jornada de recolección, cada uno cubriría en promedio 0.9 km^2, lo que corresponde a una instancia de unos 535 m de radio y aproximadamente 195 sentidos de segmento de calle.

La Tabla 5.2 resume las principales características de las instancias construidas, agrupadas por tamaño $|S|$. La columna $|R|$ indica el número medio de segmentos de calle sobre las instancias de cada tamaño. La columna `r` indica el radio promedio en metros que define las instancias de cada tamaño. La columna Densidad presenta el cuociente entre los kg de basura por recolectar y el área cubierta. Este valor es relevante como indicador de concentración de carga del área a cubrir y creemos que puede afectar al rendimiento de la operación logística.

(a) Puntos céntricos de cada familia



(b) Tamaños de instancia para dos familias representativas

Figura 5.1. Familias de instancias construidas sobre comuna de Providencia.

Tabla 5.2. Caracterización de instancias generadas.

$\|S\|$	$\|R\|$	r (m)	Densidad (ton/km^2)	Basura a recolectar (ton)	Distancia total a servir (km)
100	80	346	11.14	4.2	8.4
250	200	548	11.09	10.5	20.9
500	390	759	9.87	17.9	35.7
750	588	939	9.40	26.0	52.1
1000	780	1066	8.66	30.9	61.8

Si se considera Q =9 ton, en instancias de tamaño $|S| = 100$ la basura a recolectar es inferior a la capacidad del vehículo, por lo que se puede descargar toda la basura en un viaje al vertedero, pero no es necesariamente óptimo, ya que en ciertos casos, podría ser conveniente ejecutar un viaje intermedio de descarga adicional y así reducir costos por km recolectado al operar menos cargado en promedio.

En adelante, consideraremos soluciones asociadas a una secuencia de segmentos de calle $\mathcal{R}$ y utilizaremos de manera recurrente los conceptos de "política dinámica" y "política estática" de descarga. La primera corresponde a la política que minimiza el costo de operar $\mathcal{R}$, escogiendo a qué capacidad de basura descargar en cada viaje intermedio y cuántos viajes realizar. Esta se obtiene mediante DP y su costo está representado por $C^*(\mathcal{R})$. La segunda corresponde a la operación que descarga cada vez que se alcanza un $\phi\,\%$ de la capacidad máxima del vehículo y su costo está representado por $C^{\phi}(\mathcal{R})$.

En la Tabla 5.3 se presentan los principales indicadores críticos de la operación (KPI por su sigla en inglés) que serán estudiados en este capítulo.

Tabla 5.3. Principales KPI estudiados.

Símbolo	Descripción
$C^*_{km}(\mathcal{R}^*)$	Costo por km recolectado de la secuencia optimizada según una política dinámica de descarga.
$C^*_{km^2}(\mathcal{R}^*)$	Costo por km^2 de superficie cubierta de la secuencia optimizada según una política dinámica de descarga.
$C^\phi_{km}(\mathcal{R}^\phi)$	Costo por km recolectado de la secuencia optimizada según una política estática de descarga.
$C^*_\infty(\mathcal{R}^\infty)$	Costo de la secuencia optimizada según una política dinámica de descarga sin restricción de capacidad en el vehículo.
$\% \, dh$	Relación porcentual entre los km recorridos como *deadhead* y los km de calle recolectados.
$\bar{d}_\varphi$	Distancia media desde el inicio de un viaje de descarga hacia el vertedero.

De este modo, sobre cada instancia se computaron las siguientes soluciones:

(a) Se aplica el algoritmo HAPS, obteniendo con ello una secuencia $\mathcal{R}^*$ y su costo mínimo $C^*(\mathcal{R}^*)$.

(b) Se evalúa el costo de una solución relajada $C^*(\check{\mathcal{R}})$, donde $\check{\mathcal{R}}$ corresponde a la secuencia de visitas que se obtiene al resolver el LDWCP-ADS sobre el grafo $H' = (V, S')$, donde

$$S' = \Big\{(a,b),(b,a) : \{a,b\} \in R \vee \{b,a\} \in R\Big\}, \tag{5.2}$$

es decir, asumiendo que todos los segmentos de calle son bidireccionales. Al tratarse de una solución relajada, su costo subestima $C^*(\mathcal{R}^*)$ y sobreestima el *gap* de optimalidad.

(c) En la sección 5.3.1 se estudia el impacto en el costo de la política de descarga ejecutada. Para ello, se obtiene $\mathcal{R}^\phi$ que corresponde a la secuencia optimizada en base a una política estática de descarga. Luego, se compara $C^*(\mathcal{R}^*)$ con $C^\phi(\mathcal{R}^\phi)$ para $\phi \in \{50, 60, 70, 80, 90, 100\}$.

(d) En la sección 5.3.2 se estudia el impacto de la secuencia de visita a SdC bajo una política de descarga equivalente, comparando $C^*(\mathcal{R}^*)$ con el costo de operar dos secuencias de *benchmark*. La primera es $\tilde{\mathcal{R}}$, una secuencia no optimizada que busca representar una operación de recolección típica, y la segunda es $\mathcal{R}_{CPP}$, correspondiente a la solución del Problema del Cartero Chino que tiene como objetivo minimizar la distancia total recorrida.

5.2.1. Consideraciones para el diseño experimental

Los experimentos se realizan bajo las siguientes consideraciones:

(i) En cada segmento de calle $r \in R$, el tiempo de servicio w_s y el largo l_s son independientes del sentido en que se recorre r.

(ii) La basura a recolectar en cada segmento de calle $r \in R$ es $q_r = \rho \cdot l_s$ kg, con $s \in S_r$, donde ρ corresponde a la densidad de basura por km de segmento de calle, la cual se asignó constante en la red.

(iii) El tiempo de servicio en el nodo $s \in S$ se calcula como $w_s = \frac{l_s}{v_s^{max}}$, donde v_s^{max} es la velocidad *target* de recolección en el nodo $s \in S$.

(iv) Las velocidades de circulación son conocidas e independientes del arco en cuestión, *i.e.* $v_s^{max} = v^{max}$, $\bar{v}_{ss'} = \bar{v}$ y $\hat{v}_s = \hat{v} \quad \forall s, s' \in S$. Además, se cumple que $v^{max} < \bar{v} < \hat{v}$.

(v) El vehículo debe retornar al *depot* vacío al terminar, $i.e.$ debe ejecutar una descarga al final de la última ruta.

(vi) Cada instancia tiene como atributo el parámetro $\hat{d}$, que es una distancia representativa entre el área de recolección y el vertedero. Este se fija de manera externa al modelo según el contexto de la zona estudiada.

(vii) La potencia que consumen los accesorios del vehículo es despreciable, $i.e.$ $P_{acc} = 0$ en la ecuación (2.2).

La ubicación de los *depots* $0^+, 0^-$ y el vertedero φ se determina a partir del conjunto de intersecciones periféricas $\Upsilon := \left\{a \in V : \tilde{e}_a = \max_{a' \in V}\{\tilde{e}_{a'}\}\right\}$, definidas como aquellas cuya excentricidad $\tilde{e}$ es igual a la máxima existente en la red. La excentricidad de un punto geográfico $a \in V$ se define como la máxima distancia desde a al punto más lejano a él (Boeing, 2017) y está dada por

$$\tilde{e}_a = \max_{b \in V} \left\{ \textit{Ruta mínima}(a, b) \right\}. \tag{5.3}$$

Luego, se selecciona aleatoriamente dos puntos $a_0, a_\phi \in \Upsilon$ y se define a_0 como la ubicación de los *depots* y a_ϕ como el "punto más cercano al vertedero". Para calcular la distancia entre un nodo $s \in S$ y el vertedero (o viceversa), se evalúa la distancia de ruta mínima entre s y a_ϕ, y luego se le suma la distancia representativa $\hat{d}$, de modo que

$$\begin{aligned} d_{s\varphi} &= \textit{Ruta mínima}(s, a_\varphi) + \hat{d} \\ d_{\varphi s} &= \textit{Ruta mínima}(a_\varphi, s) + \hat{d}\,. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Asimismo, la distancia entre el depot 0^- y un nodo $s \in S$ es $d_{0^- s} = \textit{Ruta mínima}(a_0, s)$. En la Figura 5.2 se ilustra dos ejemplos: i) ruta entre un nodo $s \in S$ y el vertedero φ, y ii) ruta entre nodo inicial 0^- y un nodo $s \in S$.

Los parámetros utilizados en el modelo de consumo de combustible y en la construcción de las instancias se presentan en el Anexo B, mientras que los parámetros correspondientes al Algoritmo HAPS se presentan en la Tabla 5.4. Los valores escogidos responden a un balance esperado entre una partición de secuencia que permita evaluar

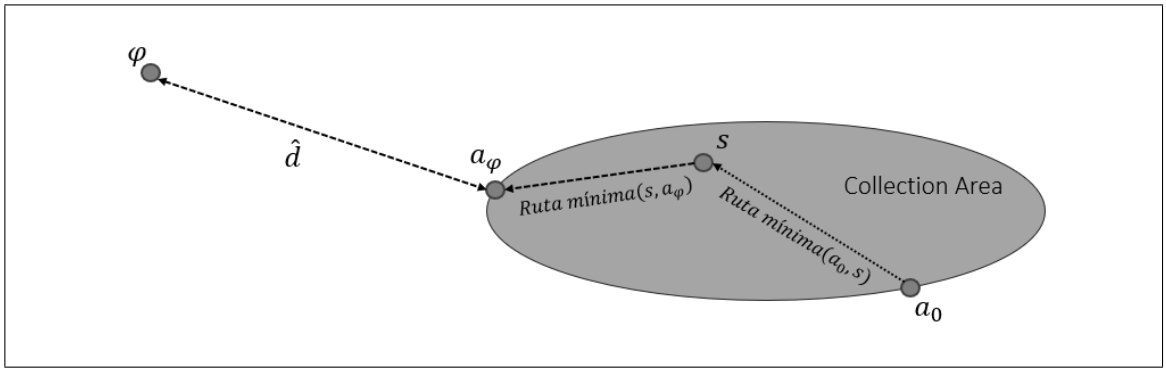


Figura 5.2. Estructura general de una instancia tipo.

rápidamente el costo de una subsecuencia mediante DP, una búsqueda local efectiva y diversificada dentro de cada subsecuencia, y un tiempo de ejecución acorde a las necesidades prácticas del problema.

Tabla 5.4. Parámetros Heurística Acelerada con Partición de Secuencia.

Parámetro	p_{min}	p_{max}	Δp	ζ_{min}	ζ_{max}	$\Delta\zeta$	ϕ
Valor	0.3	0.5	0.1	0.2	0.4	0.1	50 %

5.3. Resultados generales

En esta sección presentamos los resultados de los experimentos computacionales. En la Tabla 5.5 se presentan los resultados promedio del algoritmo HAPS por tamaño de instancia. La columna tiempo presenta el tiempo medio de ejecución de la heurística en segundos. La columna *gap* UB presenta una sobreestimación del *gap* de optimalidad, calculado como

$$gap \text{ UB} = 100 \cdot \frac{C^*(\mathcal{R}^*) - C^*(\check{\mathcal{R}})}{C^*(\mathcal{R}^*)} \,, \tag{5.5}$$

donde $\check{\mathcal{R}}$ corresponde a la secuencia definida en el punto (b) de la sección 5.2.

Tabla 5.5. Resultados generales sobre las 10 familias de instancias.

$\|S\|$	tiempo (s)	$C^*_{km}(\mathcal{R}^*)$	$C^*_{km^2}(\mathcal{R}^*)$	$\% \, dh$	$\bar{d}_\varphi$	*gap* UB
100	632	1908	42515	105 %	10629	8.9 %
250	1904	1857	41172	110 %	10876	11.5 %
500	4078	2128	41989	146 %	11151	17.0 %
750	6561	2256	42418	180 %	11709	22.3 %
1000	7832	2407	41677	215 %	11455	26.9 %

Empíricamente, se observa que el costo por distancia recolectada tiende a aumentar a medida que crece el tamaño de la instancia, pues la relación entre *deadhead* y km de calle cubiertos también aumenta. Dicho aumento en el *deadhead* se debe posiblemente a la caída de densidad de basura a recolectar en un área (evidenciada en la Tabla 5.2), pues el vehículo tiende a hacer conexiones más largas entre servicios.

Adicionalmente, observamos que el costo por km^2 de superficie cubierta es estable en función del tamaño de la instancia (en torno a los 42000 CLP), lo que indica que, a pesar de que instancias más grandes presentan mayores *deadheads*, la caída en densidad de basura a medida que aumenta la superficie cubierta compensa el sobrecosto producido por dicho *deadhead* extra. En la sección 5.3.3 se presenta un experimento adicional para comprender el efecto de la densidad de basura por km^2 en el *deadhead*.

En la Figura 5.3 se presenta el costo por km de calle cubierto, desagregado en cinco *ítems*: costo por combustible en recolección (c_{rec}), costo por combustible en *deadheads* (c_{dh}), costo por combustible en viajes de descarga al vertedero (c_{vert}), y costo por el pago asociado al tiempo del recurso humano. Este último se descompone en el costo base por el tiempo que toma atender clientes y viajar al vertedero (c^b_{time}), y costo extra por el tiempo consumido en *deadheads* (c^{dh}_{time}). Los resultados se agrupan por tamaño de instancia.

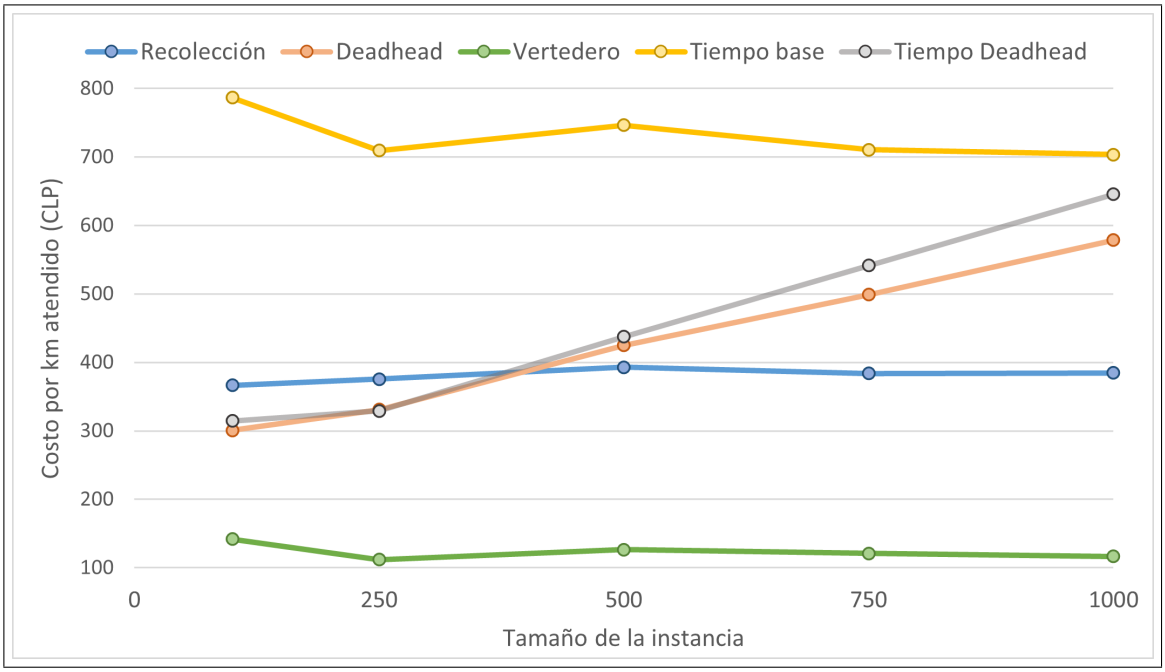


Figura 5.3. Segregación de costos por km servido de acuerdo a su naturaleza.

Se observa que c_{vert} es el ítem de menor costo por unidad de distancia recolectada. Se mantiene estable en torno a los 120 CLP, a excepción de las instancias de $|S| = 100$, donde el total de basura a recolectar es inferior a la capacidad del vehículo, por lo que el viaje final al vertedero representa una mayor proporción del costo total. Del mismo modo, c_{rec} se mantiene estable en función del tamaño de la instancia. Esto evidencia que, al agregar los costos individuales de recolectar cada segmento de calle (determinados en gran medida por el nivel de carga en el vehículo), no existen mayores diferencias entre cubrir un mayor o menor número de segmentos. Junto a lo anterior, notamos que gran parte de los costos percibidos no provienen de la recolección, sino de ineficiencias como el consumo de combustibe y tiempo al recorrer kilometraje muerto o viajar al vertedero.

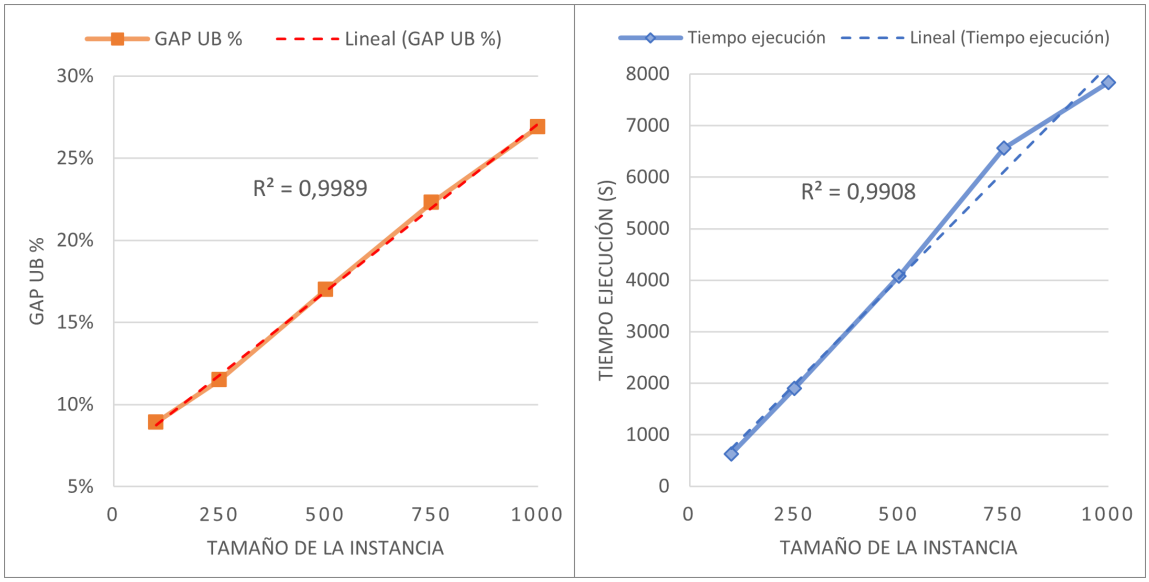
Por otra parte, vemos que tanto c_{dh} como c^{dh}_{time} aumentan conforme crece el tamaño de instancia. Como se mencionó anteriormente, esto se debe en parte al aumento de la distancia recorrida para reposicionarse entre servicios, al cubrir un área más grande y menos densa en términos de basura por recolectar. Se evidencia que, a medida que la instancia crece, dichos reposicionamientos tienden a impactar más en términos del retraso

que producen, que del consumo extra de combustible. Finalmente, c^b_{time} (en amarillo) es superior a los demás ítems en todos los tamaños de instancia y se mantiene relativamente estable para $|S| \geq 250$.

En la Figura 5.4a se presentan valores promedio para la sobreestimación del *gap* de optimalidad. Se observa un crecimiento lineal en función del tamaño de la instancia (con un coeficiente $R^2 = 0.9989$), alcanzando una media de 26.9 % en las instancias de mayor tamaño, lo que a pesar de no ser una garantía precisa, permite dimensionar la calidad de la secuencia y el costo de la operación en el peor escenario posible.

En la Figura 5.4b se presenta el tiempo medio de ejecución de la heurística, donde también se observa un crecimiento lineal en función del tamaño de la instancia (con un coeficiente de determinación $R^2 = 0.9908$), alcanzando las dos horas y 10 minutos en las instancias de mayor tamaño. Esto ocurre ya que, al aumentar el tamaño de la instancia, el número de subsecuencias generadas en la etapa de partición crece. Así, la heurística debe ejecutar un mayor número de operaciones en las etapas de búsqueda local y evaluación del costo mediante DP.

Los resultados evidencian la escalabilidad del algoritmo propuesto a problemas de tamaño real, ya que es capaz de mitigar el aumento explosivo en el tiempo de cómputo evidenciado en la sección 3.5 al incrementar progresivamente el tamaño de instancia.



(a) Sobreestimación del *gap* de optimalidad.

(b) Tiempo de ejecución de la heurística.

Figura 5.4. Métricas promedio obtenidas en la experimentación.

La Figura 5.5 presenta el porcentaje medio de carga del vehículo al momento de descargar, en función del cuociente entre la basura total por recolectar B y su capacidad Q. Este gráfico permite estudiar por qué en ciertas oportunidades es conveniente descargar en torno al 70-80% de ocupación, y en otras sobre el 90%.

Si $\frac{B}{Q} \notin \mathbb{N}$, el vehículo está forzado a realizar al menos un viaje al vertedero con un nivel de carga inferior a su capacidad. En la Propiedad 2 se demostró que el costo de viajar a descargar siempre desde un mismo punto no depende de la distribución de carga entre los viajes. Sin embargo, considerando que en la prática dichos viajes se ejecutan desde distintos puntos geográficos de la red, los resultados indican que es más conveniente distribuir el déficit de carga entre los n viajes al vertedero, que realizar $n-1$ viajes a capacidad y uno con la carga restante. Empíricamente, se obtiene que en promedio es conveniente descargar cercano al 82% de la capacidad del vehículo, equivalente a unos 7300 kg de basura.

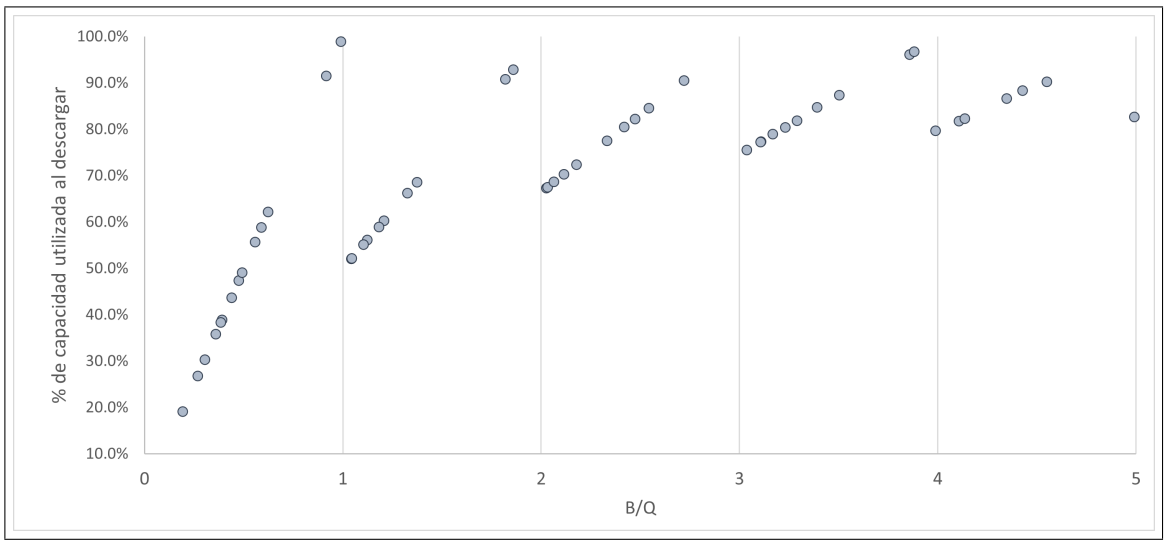


Figura 5.5. Utilización promedio del vehículo al descargar, según razón $\frac{B}{Q}$.

De la Figura, a medida que la razón $\frac{B}{Q}$ aumenta entre dos valores enteros, el vehículo tiende a descargar a un mayor nivel de utilización, pues el costo de agregar un viaje extra al vertedero es superior al de operar más cargado en promedio. Sin embargo, en ciertos casos esta desigualdad en costos se invierte. El punto ubicado en el extremo derecho del gráfico (donde $\frac{B}{Q} \approx 5$) representa una instancia donde el vehículo podría completar la operación realizando 5 viajes al vertedero (todos prácticamente a capacidad). No obstante, es más conveniente ejecutar 6 viajes a un nivel de ocupación promedio menor, cercano al 83%. En la sección 5.4 veremos que realizar el mínimo número de viajes al vertedero, con tal de utilizar al máximo la capacidad del vehículo, no siempre es una política costo-eficiente.

5.3.1. Impacto de optimizar la política de descarga ejecutada en el costo

En esta sección se estudia el impacto en el costo percibido de optimizar o no la decisión de cuántas veces descargar el vehículo y con qué nivel de basura hacerlo. En particular, se comparan las políticas de descarga estática y dinámica definidas en la sección 5.2.

En la Tabla 5.6 se presenta el costo por km recolectado y el costo por km^2 de superficie cubierta para la secuencia $\mathcal{R}^*$, optimizada según una política dinámica y para las secuencias $\mathcal{R}^\phi$, optimizadas según una política estática con $\phi \in \{50, 60, 70, 80, 90, 100\}$.

Tabla 5.6. Costo según política de descarga ejecutada.

	Costo por km					Costo por km^2				
Política	100	250	500	750	1000	100	250	500	750	1000
$\phi = 50\,\%$	1950	2087	2372	2513	2700	43451	46331	46728	47244	46711
$\phi = 60\,\%$	1908	1985	2294	2457	2630	42515	44067	45192	46192	45500
$\phi = 70\,\%$	1908	1896	2201	2371	2564	42515	42091	43360	44575	44357
$\phi = 80\,\%$	1908	1893	2172	2312	2511	42515	42025	42788	43465	43440
$\phi = 90\,\%$	1908	1906	2174	2331	2514	42515	42313	42828	43823	43492
$\phi = 100\,\%$	1908	1862	2184	2313	2516	42515	41336	43025	43484	43527
Dinámica	1908	1857	2111	2242	2407	42515	41172	41989	42418	41677

Observamos que en instancias de $|S| = 100$ SSdC, ejecutar una política estática razonablemente buena no posee diferencias respecto a la política optimizada dinámicamente, ya que la cantidad de basura a recolectar es tan pequeña que ambas políticas tienden a ser equivalentes y descargan una vez que se cubren todos los segmentos de calle.

Para $|S| \geq 250$ se observan diferencias mayores entre descargar según una política dinámica optimizada y descargar estáticamente. El mayor costo por km recolectado ocurre al descargar estáticamente a mitad de capacidad ($\phi = 50\%$), puesto que implica un mal aprovechamiento de la capacidad del vehículo y la ejecución de numerosos viajes de descarga, los cuales son costosos principalmente en términos de tiempo consumido, tal como se vio en la Figura 5.3. Luego, al aumentar el porcentaje ϕ, el costo por km tiende a decrecer, alcanzando su mínimo para $\phi = 80\%$, a excepción del caso $|S| = 250$, donde la

política que descarga al llenar el vehículo es más económica, ya que son instancias relativamente pequeñas en comparación a las demás y en algunos casos el total de basura sigue siendo inferior a la capacidad del vehículo.

Considerando las políticas estáticas, en general los menores costos se encuentran al descargar en torno al 80% de la capacidad. Bajo los parámetros utilizados, los resultados indican que optimizar la política de descarga puede generar ahorros en el costo percibido. Empríricamente, se obtuvo que cargar por competo el vehículo puede costar hasta $109 más que descargar dinámicamente por cada km de calle recolectado, y hasta $1850 más por cada km^2 de superficie cubierta.

Incluso, en caso de no contar con una herramienta para optimizar dinámicamente las descargas, operar según una política estática relativamente eficiente puede abaratar la operación. Por ejemplo, descargar al alcanzar un 80% de la capacidad genera ahorros de hasta $12 por cada km de calle recolectado, y hasta $237 por cada km^2 de superficie cubierta, respecto a descargar al 100% de capacidad. A pesar de que en ciertos casos la diferencia no es cuantiosa, en un contexto práctico deja de ser despreciable si se planifica sobre un horizonte temporal mayor. Además, este ahorro puede ser complementado con la optimización de otras decisiones del problema como la secuencia de visita a segmentos de calle, cuyo análisis se presenta a continuación.

5.3.2. Impacto de optimizar la secuencia de recolección ejecutada en el costo

En esta sección se estudia el impacto en el costo percibido de optimizar o no la decisión de secuenciar las visitas a los segmentos de calle de la red. Para ello, se construyeron dos secuencias de *benchmark* a ser comparadas con $\mathcal{R}^*$.

La primera secuencia, que llamamos "No Optimizada" y denominamos como $\tilde{\mathcal{R}}$, comienza en el *depot* y visita de manera sucesiva el SSdC más cercano al último SSdC visitado, priorizando continuar derecho antes que ejecutar un viraje a la izquierda o derecha,

en caso de existir más de un candidato cuya distancia de *deadhead* sea cero. Esta secuencia se basa en el itinerario presentado en Matthei (2017) para la operación de recolección en la comuna de Providencia. En él, se visita consecutivamente calles cercanas y, en general, se prioriza continuar derecho en calles importantes. Producto de aquello, el vehículo constantemente incurre en *deadheads* para reposicionarse y así poder servir completamente un sector. Esta secuencia es ineficiente ya que optimiza de manera miope el costo inmediato de traslado entre dos segmentos de calle consecutivos, en desmedro del costo futuro asociado a recorrer mayores distancias de *deadhead* con un alto nivel de carga.

La segunda secuencia, denominada $\mathcal{R}_{CPP}$, corresponde a la solución obtenida al resolver el Problema del Cartero Chino (CPP) sobre la red (Stricker, 1970; Minieka, 1979). Este problema tiene como objetivo minimizar la distancia total recorrida, de modo que su solución debiese tender a reducir el kilometraje de *deadhead*, pero sin considerar el efecto de la carga transportada en cada instante de la ruta, ni la política de descarga ejecutada.

En la Tabla 5.7 se presentan valores promedio por tamaño de instancia para el costo por km recolectado y el porcentaje de *deadhead* respecto a los km recolectados para la secuencia $\mathcal{R}^*$, optimizada según una política dinámica, y las secuencias $\tilde{\mathcal{R}}$ y $\mathcal{R}_{CPP}$.

Tabla 5.7. Impacto de la secuencia de recolección.

Secuencia	Optimizada		No Optimizada		Cartero Chino	
$\|S\|$	$C^*_{km}(\mathcal{R}^*)$	$\%\, dh$	$C^*_{km}(\tilde{\mathcal{R}})$	$\%\, dh$	$C^*_{km}(\mathcal{R}_{CPP})$	$\%\, dh$
100	1908	105%	2585	123%	1901	103%
250	1857	110%	2587	137%	1835	107%
500	2111	146%	2695	171%	2124	137%
750	2242	180%	3052	224%	2251	172%
1000	2407	215%	3516	286%	2423	208%

A medida que aumenta el tamaño de la instancia, en la secuencia no optimizada $\tilde{\mathcal{R}}$ se observa un aumento más pronunciado en el costo y *deadhead* por km recolectado que en la secuencia $\mathcal{R}^*$. Como se comentó anteriormente, esto se explica ya que $\tilde{\mathcal{R}}$ optimiza únicamente el costo inmediato de *deadheads*, por lo que luego de cubir un cierto número de segmentos consecutivos sin recorrer kilometraje muerto, debe incurrir en mayores *deadheads* para reposicionarse y lograr cubrir los segmentos restantes, lo que se ve expresado en una relación de 2.86 veces en instancias de $|S| =$1000 SSdC.

Por su parte, la secuencia obtenida del CPP presenta costos más similares a los de la secuencia optimizada, incluso siendo más económico por km recolectado en instancias con $|S| \leq 250$. Esto se debe a que la adecuada gestión de deadheads en instancias pequeñas tiende a ser más importante que la gestión de consumo de combustible y la política de descarga, ya que en general se realizan pocas descargas y se recolecta poca basura. Luego, notamos que a partir de $|S| = 500$ la secuencia $\mathcal{R}_{CPP}$ presenta un costo levemente superior al de la secuencia optimizada, a pesar de tener *deadheads* menores en todos los casos. Esto se produce ya que la secuencia optimizada según una política dinámica optimiza el balance entre operar cargado, ejecutar numerosos viajes al vertedero y recorrer mayores o menores *deadheads*.

A partir de este experimento se evidencia que, en instancias de tamaño realista, el algoritmo propuesto para optimizar la secuencia de recolección, la elección del sentido de visita en calles bidirigidas y la política de descarga, permite obtener soluciones costo-eficientes en comparación a secuencias que solo consideran minimizar distancia recorrida (en este caso equivalente al *deadhead*), o la decisión inmediata de traslado, sin considerar una visión global de la operación y sus costos asociados.

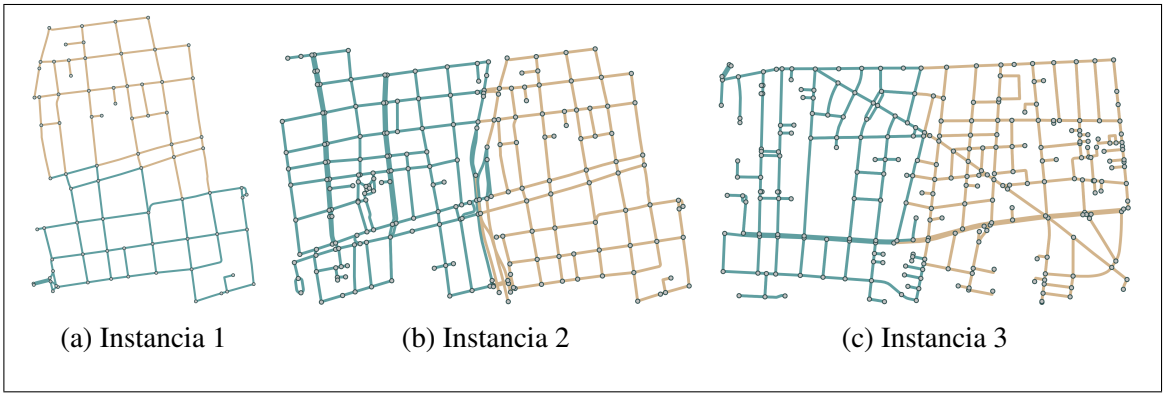
5.3.3. Impacto de la densidad de basura por km^2

La Tabla 5.5 evidencia empíricamente que el *deadhead* como porcentaje del kilometraje a atender aumenta con el tamaño de la instancia (medido en SSdC), elevando así el costo por km de la operación. Se argumentó que dicho efecto se podría producir como

una consecuencia de la caída de densidad de basura por km^2 al crecer el área a cubrir en Providencia.

A continuación, se presenta un experimento adicional para estudiar el aumento del *deadhead*, del costo por km recolectado y del costo por km^2 de superficie cubierta para instancias nuevas, construidas a partir de información topológica real de la ciudad de Santiago, en donde se separa el efecto de densidad y tamaño de la instancia. Con ello, se espera validar que el aumento del *deadhead* como porcentaje del kilometraje atendido depende de la caída de densidad y no del tamaño del problema, siendo este último un efecto espurio.

Las nuevas instancias se ilustran en la Figura 5.6. A partir de cada una de ellas se definió una versión "reducida", correspondiente a una porción menor de cobertura sobre la red original. Así, en cada subfigura la versión "grande" corresponde a la red completa, mientras que la versión reducida corresponde a los arcos pintados de color oscuro.



(a) Instancia 1 (b) Instancia 2 (c) Instancia 3

Figura 5.6. Instancias experimentales adicionales (en oscuro instancia reducida).

En la Tabla 5.8 se presenta el tamaño y densidad de las instancias, junto a los resultados obtenidos al aplicar el algoritmo HAPS sobre ellas. Para estos experimentos, se utilizaron igualmente los parámetros presentados en la Tabla 5.4 y el Anexo B.

Observamos que el costo por km recolectado decrece en los tres casos al comparar la versión reducida con la versión completa. Por su parte, el costo por unidad de superficie

cubierta decrece para la instancia 1 y aumenta para las instancias 2 y 3. Sin embargo, uno de los efectos más relevantes que se pueden desprender de este experimento es el comportamiento del *deadhead* en cada caso. En la instancia 1, la densidad cae levemente (al igual que en las instancias de la Tabla 5.2) y el *deadhead* recorrido aumenta desde un 82% a un 125% de la distancia recolectada. En tanto, para las instancias 2 y 3, en las cuales la densidad de basura aumenta con el tamaño de la red, el *deadhead* como proporción de la distancia recolectada disminuye considerablemente.

Tabla 5.8. Impacto de la densidad vial de la red.

	Instancia 1		Instancia 2		Instancia 3	
	reducida	completa	reducida	completa	reducida	completa
$\|S\|$	74	140	221	359	234	573
kg/km^2	6660	6305	5781	7647	6797	7758
$C^*_{km}(\mathcal{R}^*)$	1795	1750	2087	2006	1764	1755
$C^*_{km^2}(\mathcal{R}^*)$	24025	21971	24777	30789	24079	27151
$\%\, dh$	82%	125%	190%	150%	106%	81%

A partir de este experimento adicional se concluye que la densidad de basura por km^2 es empíricamente el *driver* que aumenta o disminuye el porcentaje de *deadhead* por km atendido, tendiendo a aumentar su proporción a medida que la densidad disminuye, lo que encarece la operación y la hace más ineficiente. La dependencia del porcentaje de *deadhead* en función del tamaño del problema es un efecto espurio, pues en las instancias presentadas en la Tabla 5.2, la densidad disminuye en función del tamaño.

5.4. Análisis de sensibilidad: Caso de estudio en comuna de Providencia

En esta sección se presentan los resultados de la experimentación sobre una instancia de tamaño real, correspondiente a la comuna de Providencia completa. La superficie de esta comuna alcanza los 14.34 km^2 y su red vial posee 3120 SSdC, cuya extensión total de segmentos de calle es de 240 km con 120 toneladas de basura a recolectar. En la Figura 5.7 se ilustra de color rojo la localización de dicha comuna dentro de la ciudad de Santiago, junto a la ubicación del punto de acopio donde se realizan las descargas de los residuos recolectados (Matthei, 2017).

El objetivo de este caso de estudio es comprender cómo impactan ciertos parámetros relevantes del problema en la estructura de las soluciones alcanzadas. Para ello, se generó una instancia para cada configuración $(\hat{d}, r_c) \in \{5, 10, 15\} \times \{0.1\,,\, 0.3\,,\, 0.5\}$, donde por simplicidad la distancia $\hat{d}$ se presenta en km y $r_c := \dfrac{c_t}{c_d}$ corresponde al ratio de costos, que se define como el valor relativo del tiempo de operación respecto al precio del combustible y se calcula utilizando $c_t = 150\,\$/min$ y modificando únicamente el valor de c_d.

Para cada combinación $(\hat{d}, r_c)$ se aplicó el algoritmo HAPS, obteniendo así la secuencia $\mathcal{R}^*$ y su costo asociado $C^*(\mathcal{R}^*)$. Adicionalmente, se optimizó el costo de la operación considerando que $Q \approx \infty$, es decir, suponiendo que no existe restricción de capacidad de carga en el vehículo, obteniéndose así la secuencia $\mathcal{R}^\infty$ y su costo $C^*_\infty(\mathcal{R}^\infty)$. El resto de los parámetros se mantuvieron de acuerdo a lo presentado en el Anexo B.

En la Tabla 5.9 se presentan los resultados experimentales sobre las nueve instancias. Las columnas $\hat{d}$ y r_c caracterizan la instancia según su distancia representativa al vertedero y su ratio de costos. La columna tiempo indica el tiempo de ejecución de la heurística en segundos. La columna $C^*_{km}(\mathcal{R}^*)$ indica el cuociente entre el costo de la solución y los km de calle servidos. La columna $\%\,dh$ indica la relación porcentual entre los km recorridos como *deadhead* y los km de calle servidos. La columna $\bar{d}_\varphi - \hat{d}$ indica la distancia promedio en km desde donde se ejecuta un viaje de descarga. Se resta la distancia representativa para que el valor sea comparable entre instancias con distinto valor

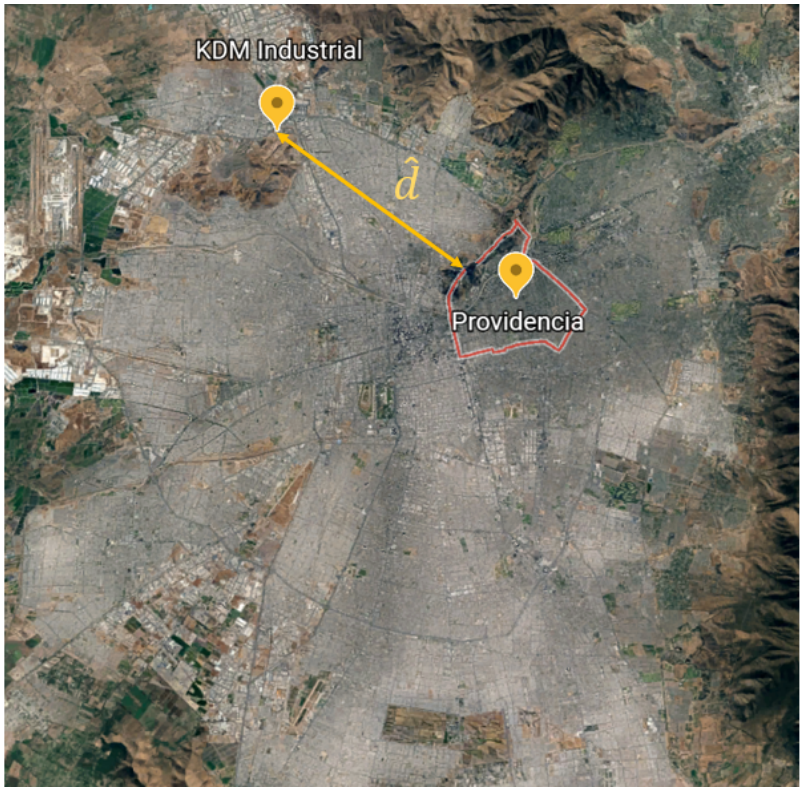


Figura 5.7. Ubicación de la comuna de Providencia en Santiago de Chile.

de $\hat{d}$. La columna "descargas" presenta el número de viajes de descarga al vertedero ejecutados y finalmente, la columna "ocupación" presenta el porcentaje medio de ocupación al descargar.

Tabla 5.9. Resultados generales sobre comuna de Providencia.

$\hat{d}$ (km)	r_c	tiempo (s)	$C^*_{km}(\mathcal{R}^*)$	$\%\, dh$	$\bar{d}_\varphi - \hat{d}$	*gap* UB	descargas	ocupación
5	0.1	19319	4799	264 %	1.99	24.5 %	19	70.0 %
5	0.3	16651	2779	285 %	1.57	27.6 %	15	88.7 %
5	0.5	16767	2405	289 %	2.55	28.6 %	15	88.7 %
10	0.1	20664	5637	288 %	2.47	27.9 %	15	88.7 %
10	0.3	16524	3043	291 %	1.62	31.3 %	15	88.7 %
10	0.5	18464	2619	295 %	2.58	32.2 %	14	95.1 %
15	0.1	17924	5979	292 %	2.64	29.9 %	15	88.7 %
15	0.3	18574	3497	299 %	1.50	31.4 %	15	88.7 %
15	0.5	18764	2663	287 %	2.75	34.1 %	14	95.1 %

De la Tabla, notamos que el tiempo de ejecución va desde las 4.6 a las 5.7 horas, lo que se condice con el aumento lineal evidenciado en la Figura 5.4b. En tanto, el costo por km servido $C^*(\mathcal{R}^*)$ para un valor fijo de $\hat{d}$ es decreciente en función de r_c ya que, a mayor ratio, el combustible es más económico, lo que reduce el costo de la operación.

Si se considera $Q = 9$ ton, el mínimo número de viajes de descarga que deben ser ejecutados es de 14. De la Tabla se observa que en solo dos casos ocurre aquello, alcanzando una ocupación media al descargar de 95.1%, mientras que en seis de los nueve casos se ejecutan 15 descargas, con una ocupación media al descargar de 88.7%. Cuando $\hat{d}$ es baja y r_c también, la solución ejecuta un mayor número de descargas. En tanto, cuando $\hat{d}$ y r_c crecen conjuntamente, la solución tiende a ejecutar el mínimo número de viajes de descarga posible.

Respecto al *deadhead* recorrido, observamos valores entre 2.6 y 3 veces la distancia recolectada, con una leve tendencia al aumento tanto en función del ratio de costos como

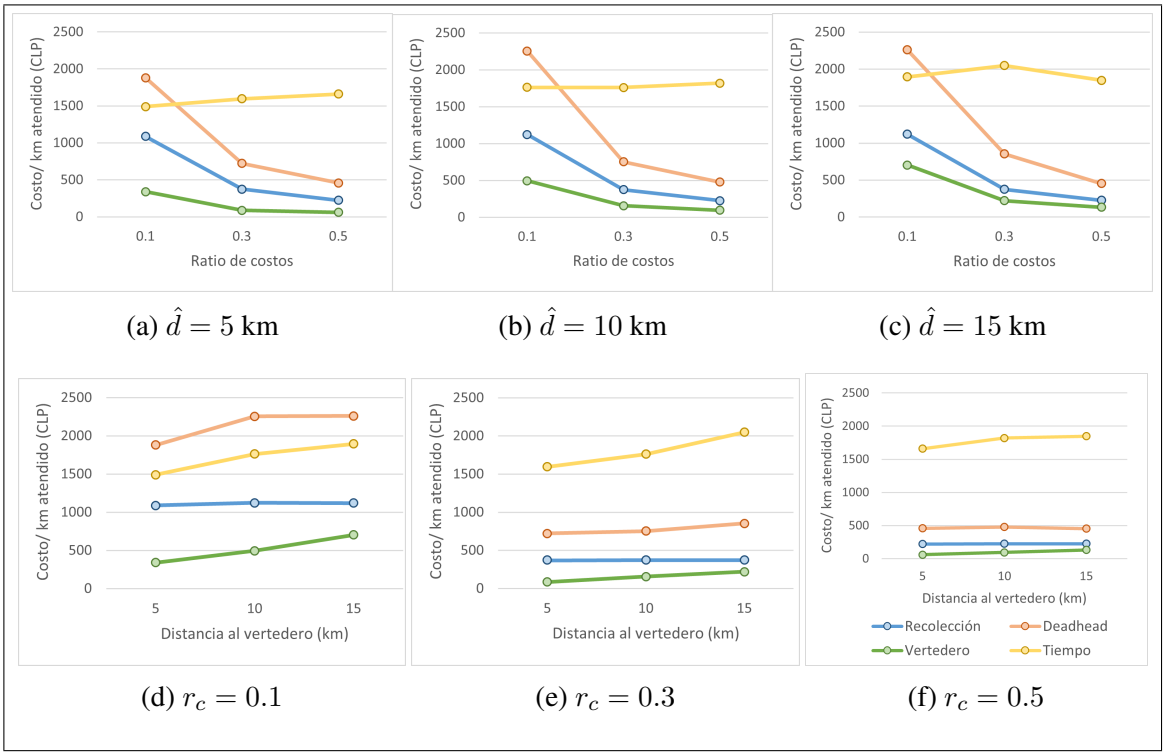
de la distancia al vertedero (en ambos casos manteniendo el otro parámetro constante). Esto ocurre ya que, al aumentar el ratio, el tiempo se torna relativamente más valioso que el combustible, mientras que al aumentar $\hat{d}$, cada viaje intermedio de descarga consume mayor cantidad de tiempo. Por ello, en ambos casos el vehículo busca reducir la frecuencia de descarga, optando por acumular más basura, lo que en implica recorrer mayor kilometraje muerto cargado y consumir más combustible, con tal de lograr una operación de menor duración.

La distancia media de descarga aumenta para ratios de costo desbalanceados, es decir, para costos relativos altos o bajos, y también cuando la distancia $\hat{d}$ aumenta. Lo anterior sugiere que al operar en una zona alejada del vertedero, o al tener un tiempo relativamente caro o barato, la solución "sacrifica" la alternativa de descargar desde puntos cercanos al vertedero, priorizando optimizar el tiempo utilizado o el consumo de combustible, según sea el caso.

La Figura 5.8 presenta la desagregación del costo por km servido, de manera similar a lo presentado en la Figura 5.3. En este caso, el tiempo total se agregó en un solo ítem para facilitar la visualización. Los costos de combustible en recolección, *deadheads* y viajes al vertedero se presentan de color azul, naranjo y verde, respectivamente. El costo por el tiempo de operación se presenta de color amarillo.

De las Figuras (a), (b) y (c), si se mantiene fijo el valor de $\hat{d}$, el costo por combustible en recolección es decreciente en r_c, al igual que el costo por combustible en *deadhead* y viajes al vertedero. Esto nuevamente ocurre ya que a ratios mayores el combustible se torna más económico y, por tanto, la operación también. Se observa que cuando $r_c = 0.1$ el costo por *deadhead* incluso supera al costo total del tiempo, evidenciando que cuando el precio del combustible es relativamente alto, la distancia al vertedero pasa a segundo plano en términos del costo percibido, importando más gestionar eficientemente los *deadheads*.

De las figuras (d), (e) y (f) vemos que al mantener constante el ratio de costos, el costo por combustible en recolección se mantiene estable función de la distancia al vertedero,



(a) $\hat{d} = 5$ km (b) $\hat{d} = 10$ km (c) $\hat{d} = 15$ km

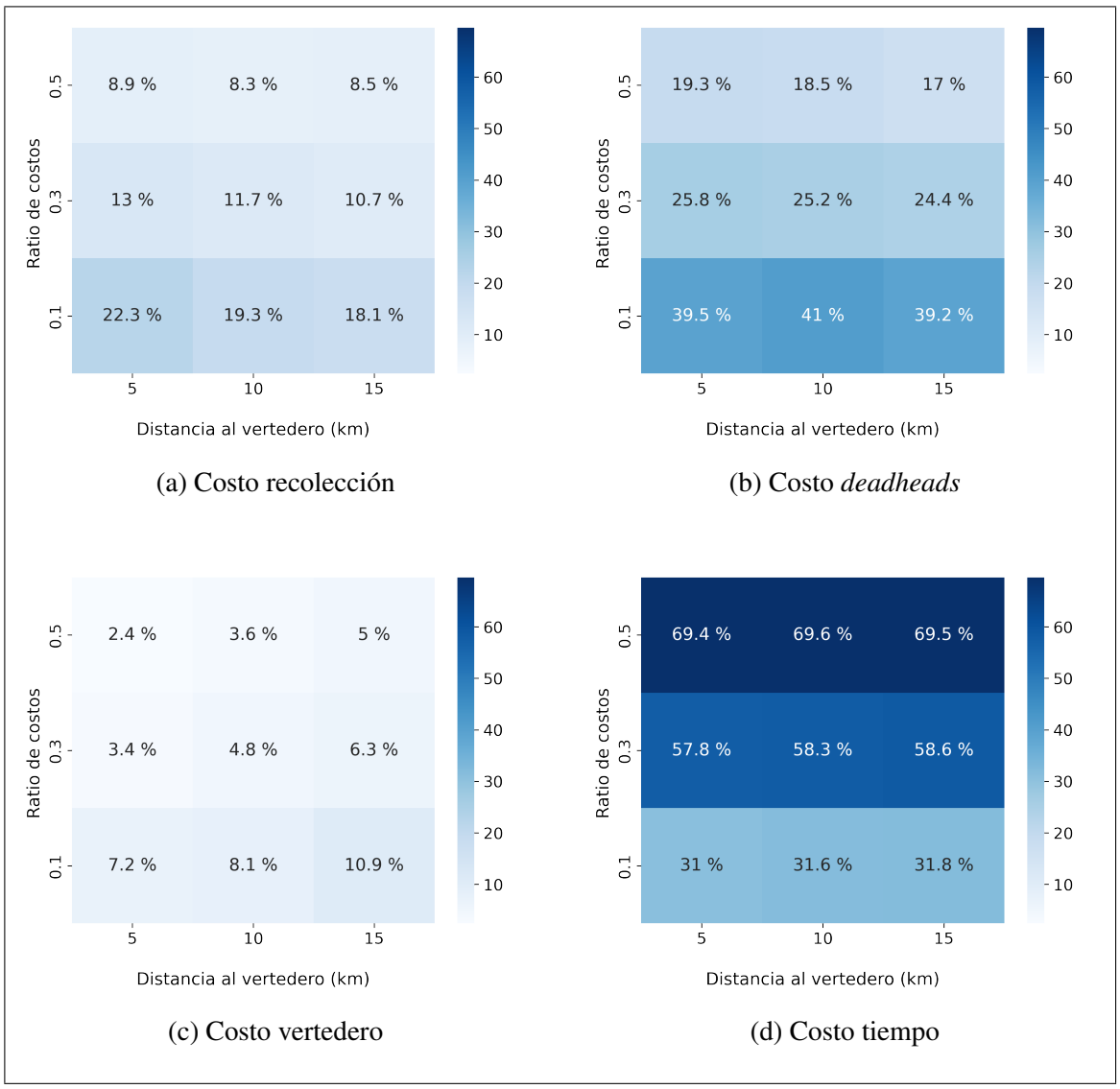
(d) $r_c = 0.1$ (e) $r_c = 0.3$ (f) $r_c = 0.5$

Figura 5.8. Segregación del costo por km servido: caso Providencia

evidenciando que $\hat{d}$ no es un parámetro influyente en este ítem. En tanto, el costo por consumo de combustible en *deadheads* y viajes al vertedero tiende a aumentar en función de $\hat{d}$. En el primer caso, tal como se vio en la Tabla 5.9, esto se debe a que la solución tiende a recorrer más kilometraje muerto a medida que aumenta $\hat{d}$. En el segundo caso, se debe a que el vehículo consume más combustible a medida que el viaje para descargar es más largo. Finalmente, el costo del tiempo de operación crece en función de la distancia al vertedero, ya que igualmente viajes más largos consumen más tiempo.

Para comprender de mejor forma cómo impacta el valor de r_c y $\hat{d}$ en la solución alcanzada, se presenta la Figura 5.9 con la descomposición porcentual del costo total según su naturaleza.

El costo de combustible por km recolectado tiende a aumentar a medida que disminuye r_c y $\hat{d}$. Para ratios bajos, el combustible es relativamente caro, de modo que cada visita de recolección a segmentos de calle genera un gasto mayor producto del efecto de la



(a) Costo recolección

(b) Costo *deadheads*

(c) Costo vertedero

(d) Costo tiempo

Figura 5.9. Porcentaje de contribución al costo total según naturaleza.

carga acumulada en el vehículo. Asimismo, al disminuir la distancia al vertedero $\hat{d}$, la recolección toma mayor protagonismo en términos relativos, lo que la hace pasar desde un valor mínimo de 8.3% a un máximo de 22.3% y favorece la ejecución de más viajes al vertedero.

El costo por combustible en *deadheads* por km aumenta en su proporción al disminuir el ratio de costos. Esto se debe a que el combustible se torna cada vez más costoso

en relación al tiempo, de modo que el kilometraje muerto comienza a impactar más en términos de consumo de combustible que de tiempo. Notamos que dicho efecto se observa a pesar de que en la Tabla 5.9 se evidenció que el *deadhead* tiende a disminuir cuando cae el ratio de costos, lo que indica que a pesar de recorrer menor distancia de *deadhead*, cada km es más costoso.

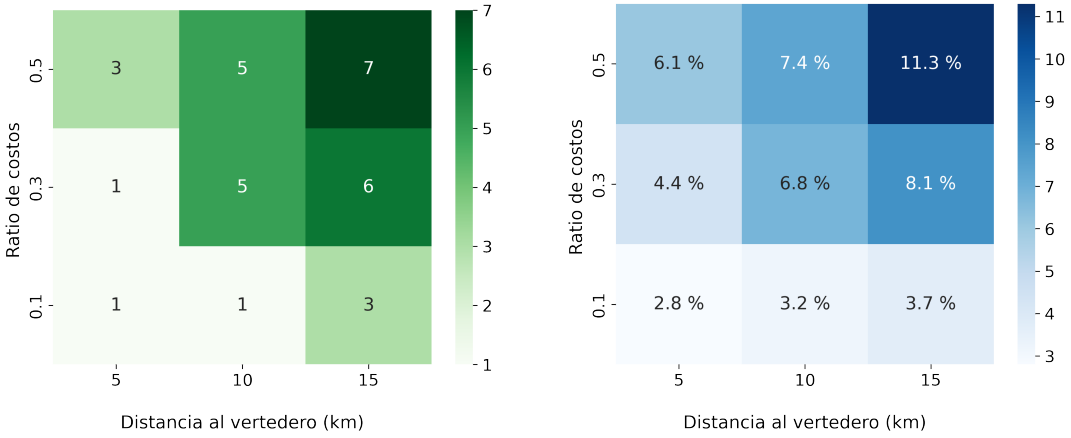
El costo por combustible al descargar en el vertedero aumenta su proporción en función de $\hat{d}$, lo que es esperable, dado que la distancia a recorrer aumenta y es conveniente descargar con menor frecuencia. En tanto, la proporción disminuye en función de r_c, lo que indica que a ratios altos, el combustible es relativamente económico y viajar al vertedero implica un costo de combustible menor dentro de la operación (no así de tiempo).

La proporción del costo por tiempo de operación aumenta claramente en función de r_c. Esto se debe a que el ratio es un factor fundamental para explicar el *trade-off* que existe entre consumo de combustible y consumo de tiempo. A medida que el ratio crece, el tiempo se torna relativamente más costoso y su proporción dentro del costo total aumenta. Finalmente, notamos que una mayor distancia al vertedero tiende a elevar levemente la proporción de este ítem, pero en menor medida que el ratio de costos.

5.4.1. Impacto de la restricción de capacidad del vehículo

En esta sección se estudia en qué medida impacta la limitación de capacidad del vehículo, tanto a nivel del costo percibido como de estructura de la solución alcanzada. En la Figura 5.10a se presenta la diferencia entre el número de descargas ejecutadas al operar $\mathcal{R}^*$ con un vehículo de capacidad limitada y el número de descargas ejecutadas al relajar la restricción de capacidad. En la Figura 5.10b se presenta la diferencia porcentual Δ_∞ entre $C^*(\mathcal{R}^*)$ y $C^*_\infty(\mathcal{R}^\infty)$, donde este útlimo corresponde al costo de operar una secuencia $\mathcal{R}^\infty$ optimizada considerando capacidad ilimitada. Dicha diferencia porcentual se define como

$$\Delta_\infty = 100 \cdot \frac{C^*(\mathcal{R}^*) - C^*_\infty(\mathcal{R}^\infty)}{C^*(\mathcal{R}^*)} \,. \tag{5.6}$$



(a) Descargas ejecutadas menos.

(b) Diferencia porcentual en costo.

Figura 5.10. Diferencia porcentual en costo y cantidad de descargas al relajar restricción de capacidad.

De la Figura 5.10a, al no existir limitación de capacidad, el número de descargas a ejecutar no está restringido inferiormente. Así, en todos los casos la solución con capacidad ilimitada ejecuta un menor número de descargas que cuando existe capacidad limitada. Sin embargo, la diferencia se acrecenta a medida que aumenta la distancia al vertedero, pues el costo fijo en tiempo de ir a descargar aumenta producto de la mayor distancia a recorrer. También se acrecenta a medida que aumenta el ratio de costos, pues el tiempo se torna más valioso respecto al costo del combustible, de modo que una solución costo-eficiente buscará ejecutar el menor número de descargas posibles, dado que cada viaje ida y vuelta implica un gasto de tiempo.

De la Figura 5.10b, la diferencia en costo aumenta conforme lo hace tanto $\hat{d}$ como r_c. Esto nuevamente se explica ya que, al aumentar el ratio, el tiempo aumenta su valor relativo. Así, al no tener límite de capacidad, el vehículo podrá ejecutar un menor número de viajes al vertedero y así reducir costos. Por otra parte, la diferencia en costos al variar $\hat{d}$ se explica de manera similar, pues el ahorro que implica cada viaje que se deja de realizar es mayor a medida que la distancia a recorrer en cada uno aumenta.

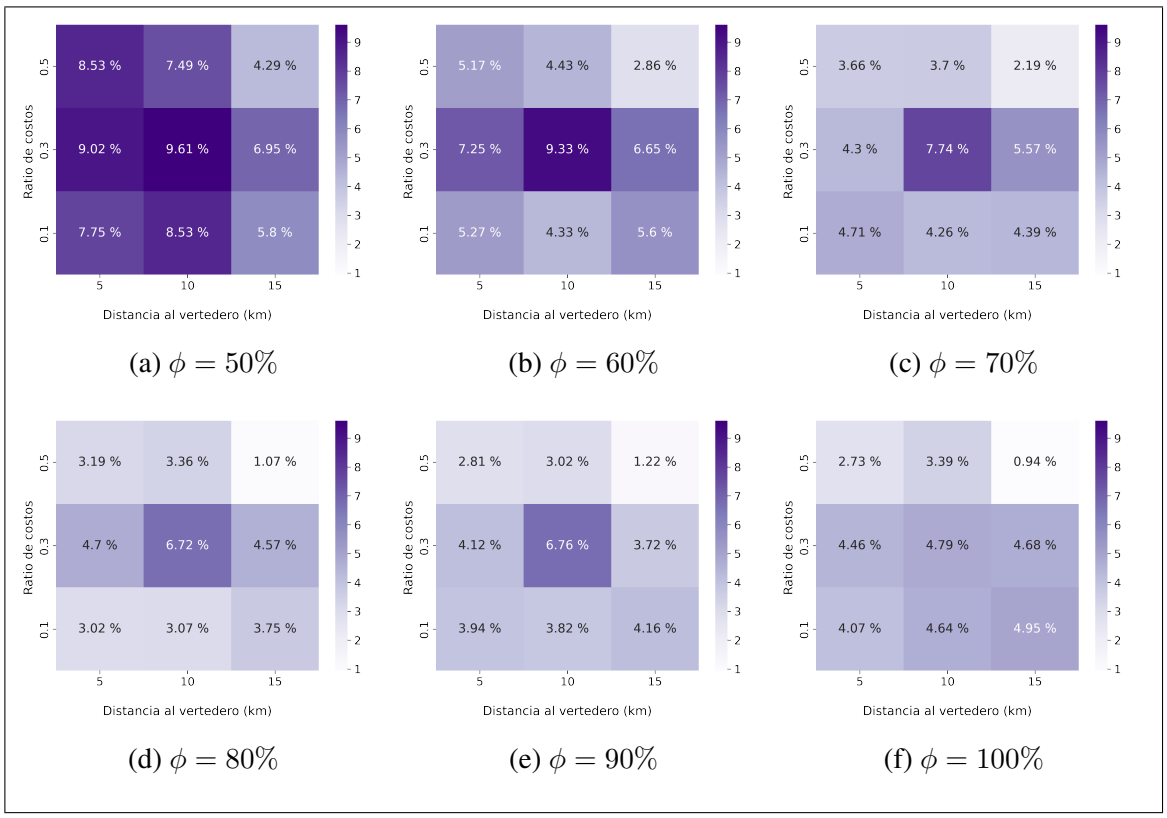
Del análisis presentado en esta sección, se concluye que existen factores externos que determinan la conveniencia de utilizar vehículos de mayor o menor capacidad en una operación de recolección. Si bien la capacidad del vehículo limita superiormente el consumo instantáneo de combustible, e inferiormente el número de viajes de descarga que deben ser ejecutados, otros factores como la distancia al vertedero o el ratio de costos inciden en cómo un tomador de decisiones debiese escoger dicha capacidad, en caso de ser posible.

Luego, ¿Cuándo sería conveniente invertir en vehículos de mayor capacidad? Cuando dicha capacidad vaya a ser realmente utilizada para lograr una operación más eficiente. A partir de los experimentos vemos que a mayores distancias al vertedero, el costo fijo de descargar es alto, por lo que se acumulará mayor cantidad de basura antes de hacerlo. Asimismo, cuando el recurso humano es costoso (*i.e.* el ratio de costos es alto), se evitará viajar frecuentemente al vertedero para así completar la operación lo más pronto posible, independiente que ello implique un mayor consumo instantáneo de combustible. En estos dos casos sería conveniente invertir en capacidad, teniendo en cuenta siempre que vehículos más grandes y con distintos atributos podrían modificar otros parámetros del modelo de consumo.

5.4.2. Impacto de la política de descarga ejecutada

A continuación, se estudia el impacto de la política de descarga ejecutada por combinación $(\hat{d}, r_c)$. La Figura 5.11 presenta la diferencia porcentual entre $C^*(\mathcal{R}^*)$ y el costo de la política estática $C^\phi(\mathcal{R}^\phi)$ con $\phi \in \{50, 60, 70, 80, 90, 100\}$.

Observamos que el sobrecosto por ejecutar una política estática varía según el umbral utilizado. A valores bajos de ϕ, la política estática se torna más ineficiente, ya que se desaprovecha la capacidad del vehículo y la oportunidad de acumular carga hasta que el consumo instantáneo de combustible supere el costo de ir a descargar. Es por ello que para $\phi \in \{50, 60\}$, el costo de la política estática llega a ser en torno a un 9% mayor que el de la política dinámica.



(a) $\phi = 50\%$ (b) $\phi = 60\%$ (c) $\phi = 70\%$

(d) $\phi = 80\%$ (e) $\phi = 90\%$ (f) $\phi = 100\%$

Figura 5.11. Sobrecosto al ejecutar una política estática versus dinámica según porcentaje ϕ.

A medida que el valor de ϕ aumenta, el sobrecosto de una política estática tiende a disminuir, ya que se aprovecha de mejor forma la capacidad del vehículo, operando en promedio más cargado, lo que a pesar de elevar el costo por km recolectado, permite viajar a descargar al vertedero con menor frecuencia. Como se discutió anteriormente, en este *trade-off* se prioriza en mayor o menor medida el tiempo de operación según su valor relativo representado en el ratio de costos, tendiendo a reducir la frecuencia de descarga a medida que dicho ratio aumenta.

Notamos que en general el sobrecosto alcanza valores altos para instancias con $r_c = 0.3$. Esto ocurre ya que en dicho caso existe un balance entre el costo del combustible y el costo del tiempo que permite al algoritmo DP optimizar con mayor holgura las decisiones de con qué frecuencia descargar, con qué nivel de carga y desde qué lugar hacerlo, generando mayores diferencias respecto a una política estática. Adicionalmente, cuando

$\hat{d}$ =10 km, la política dinámica presenta su mayor ventaja respecto a la estática en términos de costo, ya que el vertedero se encuentra suficientemente cerca como para que sea ventajoso ejecutar más del mínimo de descargas necesarias, y suficientemente lejos para que sea conveniente descargar a distintos niveles de basura en cada ocasión, dependiendo de la ubicación del vehículo al momento de iniciar su viaje de descarga.

Se concluye que el algoritmo propuesto adquiere valor en situaciones donde el ratio de costos está balanceado, es decir, existe un *trade-off* entre operar cargado y descargar frecuentemente. De lo contrario, en casos donde el vertedero se encuentra alejado o el ratio está desbalanceado (el costo del tiempo es considerablemente mayor al de combustible o viceversa), la descarga dinámica no genera grandes diferencias respecto a una política estática razonablemente buena.

5.5. Lecciones obtenidas a partir de la experimentación

En este capítulo se presentaron resultados experimentales obtenidos al aplicar el algoritmo propuesto sobre un total de 62 instancias generadas a partir de información topológica real. Empíricamente, se verificó que cuando la densidad de basura cae, el *deadhead* como proporción del kilometraje servido aumenta, lo que encarece la operación. Por otra parte, cuando la densidad de basura por km^2 aumenta, la proporción de *deadhead* disminuye, favoreciendo una operación más económica y eficiente.

Se estudió el impacto en costos de una política de descarga estática versus una política dinámica, verificando la existencia de potenciales ahorros al utilizar esta última. En base a los parámetros utilizados e instancias construidas, la política dinámica resultó ser hasta un 4.5% más económica por km servido que la política que descarga al llenar el vehículo, y un 12,4% más económica que la política que descarga al alcanzar un 50% de la capacidad. Si uno está forzado a utilizar una política estática, descargar en torno al 80% de la capacidad demostró ser una política más eficiente que operar a capacidad.

Por otra parte, se estudió el impacto en costos de optimizar o no la secuencia de recolección a segmentos de calle. Se verificó que, en instancias con densidad de basura decreciente en función del tamaño, una secuencia no optimizada presenta un aumento más pronunciado en el *deadhead* como proporción del kilometraje servido, lo que a su vez incrementa el costo operativo, presentando soluciones hasta un 46% más costosas que al operar una secuencia optimizada.

En tanto, al comparar una secuencia optimizada versus la solución del CPP se evidenció que, en instancias pequeñas, el CPP entrega soluciones del orden de un 1% más económicas por km, lo que indica que es primordial gestionar eficientemente el *deadhead*, incluso por sobre la política de descarga ejecutada. Sin embargo, a medida que el tamaño de instancia crece, optimizar de manera simultánea el costo por consumo de combustible y el costo por tiempo de operación permite alcanzar soluciones hasta 1% más económicas por km que el CPP, a pesar de recorrer mayor kilometraje de *deadhead*.

Posteriormente, la distancia al vertedero y el ratio de costos demostraron ser factores influyentes en la estructura de solución alcanzada, tanto a nivel de frecuencia de descarga como del origen de los costos percibidos por el operador. Empíricamente, se verificó que cuando el ratio de costos toma un valor bajo, *e.g.* $r_c = 0.1$, los esfuerzos debiesen apuntar a optimizar la etapa de la operación que más combustible consume: los trayectos cortos (recolección y *deadheads*). En este caso, la posibilidad de escoger el sentido de recolección se torna valiosa, pues permite gestionar eficientemente el *deadhead*. Dado que para ratios bajos, el costo por tiempo de operación no es un factor prioritario, el modelo tiende a operar a niveles bajos de carga para así disminuir el consumo instantáneo de combustible, favoreciendo la ejecución de múltiples viajes al vertedero.

Por otra parte, cuando el ratio de costos es alto, *e.g.* $r_c = 0.5$, es conveniente operar a mayores niveles de capacidad en promedio y así evitar la pérdida de tiempo producto de ejecutar frecuentes desplazamientos al vertedero, tendiendo a descargar la mínima cantidad de veces posible. En este caso, la optimización del consumo de combustible pierde

relevancia y se priorizará buscar la manera más rápida de cubrir los segmentos de calle de la red y completar la operación.

Finalmente, al relajar la restricción de capacidad, el vehículo ejecutó en promedio 3.6 viajes menos que en el caso restringido. Las principales diferencias ocurrieron en instancias con alto valor relativo del tiempo y alta distancia al vertedero por los motivos anteriormente expuestos. Respecto a la naturaleza de los costos percibidos, se observó que cuando el costo del tiempo es relativamente bajo respecto al precio del combustible, la recolección y el *deadhead* cobran mayor importancia en términos de la proporción del costo percibido, representando en conjunto cerca del 60% del costo total. Sin embargo, cuando el costo del tiempo adquiere un mayor valor relativo, el pago de salario a la tripulación pasa a dominar ampliamente a los demás ítems de costo, llevando a un segundo plano a cualquier decisión que implique invertir tiempo en favor de ahorrar combustible.

6. APROXIMACIÓN DEL COSTO DE LA OPERACIÓN

Ocasionalmente, se necesita una aproximación del costo operativo sin requerir de una solución detallada. A continuación, se propone una metodología basada en un análisis simplificado de la red vial para estimar el costo de la operación real mediante una fórmula cerrada.

El análisis supone una vía de longitud infinita que genera basura según una densidad ρ (kg/m). Así, un vehículo recolecta basura continuamente sobre esta vía durante un cierto tiempo, incrementando su peso transportado y su consumo instantáneo de combustible, hasta que decide realizar un viaje de descarga al vertedero. Se asume que la distancia entre cualquier punto de la vía y el vertedero es constante e igual a $\hat{d}$. En palabras simples, se simplifica la topología de red y se descartan las complejas decisiones de ruteo.

Bajo los supuestos anteriores, la problemática se reduce a minimizar el costo por km percibido sobre un ciclo de descarga, definido como el proceso que comienza con el vehículo vacío, y que termina con el vehículo descargado nuevamente. En esta versión simplificada del problema existe una única decisión: cuántos kilómetros de calle recolectar o equivalentemente, con qué peso cargado estar antes de ejecutar un viaje de descarga. Esta variable se representa por la letra z.

El modelo de optimización que resuelve el problema es el siguiente:

$$\min_{z} \quad \tilde{C}(\omega) = \frac{1}{z}\Big(\tilde{c}_{vert}(z) + (1+\omega)\cdot\tilde{c}_{rec}(z) + \tilde{c}_{time}(z)\Big) \tag{6.1}$$

s.t

$$\tilde{c}_{vert}(z) = c_d \cdot \left(\hat{f}(\hat{d}, \rho \cdot z, \hat{v}) + \hat{f}(\hat{d}, 0, \hat{v}) \right) \tag{6.2a}$$

$$\tilde{c}_{rec}(z) = c_d \cdot \int_0^z f(l, \rho \cdot l, \bar{v})\, dl \tag{6.2b}$$

$$\tilde{c}_{time}(z) = c_t \cdot \left(\frac{z}{v^{max}} + \frac{\omega \cdot z}{\bar{v}} + \frac{2 \cdot \hat{d}}{\hat{v}} \right) \tag{6.2c}$$

$$0 \leq z \leq \frac{Q}{\rho}\ , \tag{6.2d}$$

donde $\tilde{c}_{vert}$ representa el costo incurrido por viajes al vertedero (ida y vuelta), $\tilde{c}_{rec}$ el costo de combustible por recolección y $\tilde{c}_{time}$ el costo de tiempo del recurso humano utilizado en la operación. En la función objetivo, el costo asociado a la recolección está multiplicado por el factor $(1 + \omega)$. Al tratarse de una red simplificada, no existe kilometraje muerto, por lo que se incluye este factor que representa el costo extra asociado al *deadhead*. El parámetro ω debe ser calibrado considerando que

$$\omega = \frac{\text{distancia recorrida como } \textit{deadhead}}{\text{distancia recolectada}} \approx \frac{\sum\limits_{(s,s' \in A)} d_{ss'} \cdot x_{ss'}}{\sum\limits_{s \in S} l_s \cdot y_s}. \tag{6.3}$$

Hay dos posibles soluciones óptimas (el objetivo es convexo): i) solución interior con derivada $= 0$ o ii) solución esquina. Al derivar e igualar a cero la expresión (6.1), se obtiene analíticamente z_{min}, correspondiente al valor de z que minimiza el costo total

$$z_{min} = 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{d}}{(1+\omega) \cdot \rho \cdot \tilde{\alpha}(\bar{v})} \left(\tilde{\mu}(\hat{v}) + \frac{c^t}{c^d \cdot \hat{v}} \right)}, \tag{6.4}$$

donde $\tilde{\alpha}(v) := \dfrac{\alpha(d,v)}{d}$ y $\tilde{\mu}(v) := \dfrac{\mu(d,v)}{d}$ corresponden a los parámetros definidos en (3.8a) y (3.8b), respectivamente, divididos por la distancia recorrida d para quedar en unidades de litros/km.

Como $z_{min} \geq 0$, solo basta con cunplir que no se sobrepase $\dfrac{Q}{\rho}$, luego:

$$z^* = \min\left\{ z_{min}\,,\, \frac{Q}{\rho} \right\} = \min\left\{ 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{d}}{(1+\omega)\cdot\rho\cdot\tilde{\alpha}(\bar{v})}\left(\tilde{\mu}(\hat{v}) + \frac{c^t}{c^d\cdot\hat{v}}\right)}\,,\, \frac{Q}{\rho} \right\}. \quad (6.5)$$

La distancia óptima z_{min} aumenta de manera proporcional a $\sqrt{\hat{d}}$, pues un viaje de descarga implica recorrer mayores distancias. En tanto, z_{min} también aumenta cuando el cuociente $\frac{c_t}{c_d}$ crece, ya que el tiempo empleado en viajar al vertedero se torna más valioso. Por otra parte, observamos que a mayor valor de ω, es conveniente descargar con mayor frecuencia, ya que el costo por *deadheads* comienza a dominar a los demás ítems.

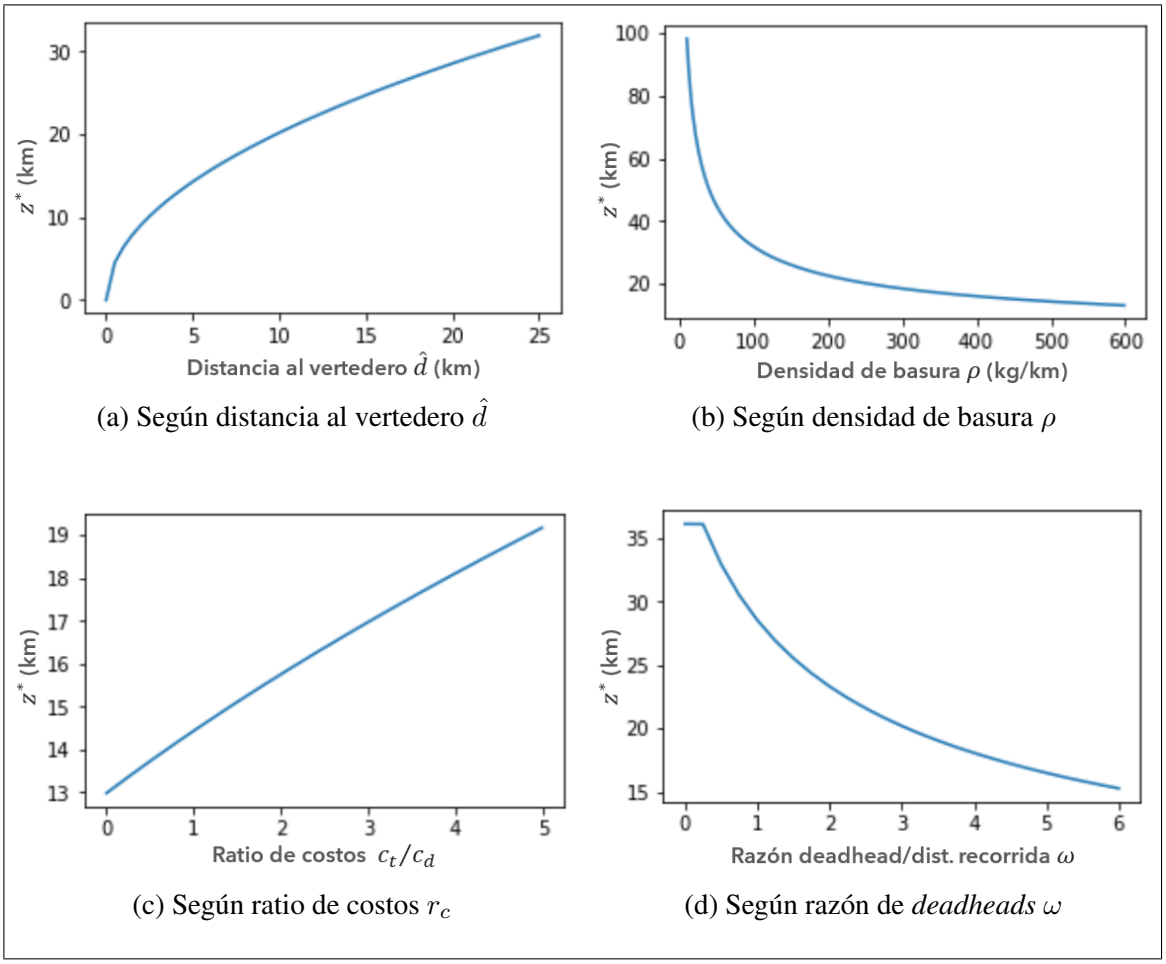
En la Figura 6.1 se grafica el comportamiento de z^* respecto a cuatro parámetros relevantes: distancia al vertedero $\hat{d}$, densidad de basura generada ρ, ratio de costos r_c y proporción entre *deadhead* y distancia recolectada ω. Para la generación de los gráficos se consideraron los siguientes valores: $\hat{d} = 10$ km, $\rho = 249$ kg/km, $r_c = 0.3$ y $\omega = 2$, y solo fueron modificados en sus respectivos gráficos (*céteris páribus*).

6.1. Calidad de la aproximación del costo

En esta sección se comparan los resultados experimentales obtenidos en la sección 5.4, para cada combinación de parámetros $(\hat{d}, r_c) \in \{5, 10, 15\} \times \{0.1\,,\, 0.3\,,\, 0.5\}$ y los resultados del modelo de aproximación de costos propuesto. La Tabla 6.1 presenta el error porcentual en la estimación, calculado según

$$\tilde{\Delta}_C = 100 \cdot \frac{C^*_{km}(\mathcal{R}^*) - \tilde{C}(\omega)}{C^*_{km}(\mathcal{R}^*)}, \quad (6.6)$$

donde $\tilde{C}(\omega)$ corresponde al valor de la función objetivo del modelo aproximado considerando una proporción de *deadheads* igual a ω. De manera preliminar, se utilizaron dos enfoques para determinar un valor de ω que sea representativo de la operación en las instancias diseñadas. El primero considera el promedio de las razones obtenidas en todos los experimentos realizados, $i.e.\ \omega = \bar{\omega}$. El segundo utiliza, para cada combinación $(\hat{d}, r_c)$, el



(a) Según distancia al vertedero $\hat{d}$

(b) Según densidad de basura ρ

(c) Según ratio de costos r_c

(d) Según razón de *deadheads* ω

Figura 6.1. Distancia de ciclo óptima z^* versus parámetros relevantes.

valor de ω asociado a la mejor solución $\mathcal{R}^*$, $i.e.\, \omega = \omega^*$. Como extensión a este trabajo, se propone calibrar empíricamente ω utilizando modelos de regresión tal como se propone en Lei et al. (2016) y Rifki et al. (2021), o separar la muestra de instancias en conjuntos de entrenamiento y prueba para evitar *overfitting* (Applegate et al., 2011).

Un valor positivo de $\tilde{\Delta}_C$ implica que el modelo aproximado subestima el valor de $C^*_{km}(\mathcal{R}^*)$, mientras que un valor negativo de $\tilde{\Delta}_C$ inplica una sobreestimación de $C^*_{km}(\mathcal{R}^*)$. Considerando que este último no tiene garantía de optimalidad, los valores negativos de $\tilde{\Delta}_C$ tienden a ser indeseables.

Notamos que únicamente cuando $(\hat{d}, r_c, \omega) = (5,\ 0.1, \bar{\omega})$, el modelo aproximado sobreestima el costo real. En todas las demás situaciones, el modelo estima un costo entre un 4.1 % y un 15.2 % inferior al incumbente. Cuando se utiliza la proporción media de *deadheads* $\omega = \bar{\omega}$, el error promedio de estimación es de un 8.2 %, mientras que al estimar considerando la proporción real de *deadhead* obtenida en los experimentos $\omega = \omega^*$, el error promedio cae a un 7.1 %.

Tabla 6.1. Error porcencual $\tilde{\Delta}_C$ en la aproximación del costo por km.

	$\omega = \bar{\omega}$			$\omega = \omega^*$		
$\hat{d}$	5 km	10 km	15 km	5 km	10 km	15 km
$r_c = 0.1$	-6.8%	4.1%	4.9%	7.8%	4.5%	4.2%
$r_c = 0.3$	4.2%	7.6%	15.2%	7.0%	7.0%	4.8%
$r_c = 0.5$	9.7%	12.4%	9.1%	9.9%	8.4%	10.1%

La Figura 6.2 grafica el error de estimación para cada instancia, utilizando $\omega = \omega^*$. Los puntos superior e inferior de cada línea representan el incumbente y la cota inferior obtenida del problema relajado, respectivamente. En tanto, el cuadrado representa la estimación del costo mediante el método de aproximación propuesto.

Se observa que en instancias con $r_c = 0.1$ la distancia entre el incumbente y la cota inferior tiende a ser superior que para ratios mayores. En general, la estimación se ubica más cerca del incumbente que de la cota. Sin embargo, en todos los casos la estimación se encuentra dentro del rango donde existe certeza que se encuentra la solución óptima, lo que la respalda como una herramienta de utilidad para obtener un costo aproximado de manera sencilla.

Finalmente, se destaca la importancia de calibrar adecuadamente el parámetro ω, pues como se vio en los diversos resultados experimentales presentados en el capítulo 5, el

deadhead es un ítem relevante dentro de la estructura de costos percibidas por el operador de recolección, de modo que mientras mejor calibrado esté dicho parámetro, más certera y confiable será la aproximación.

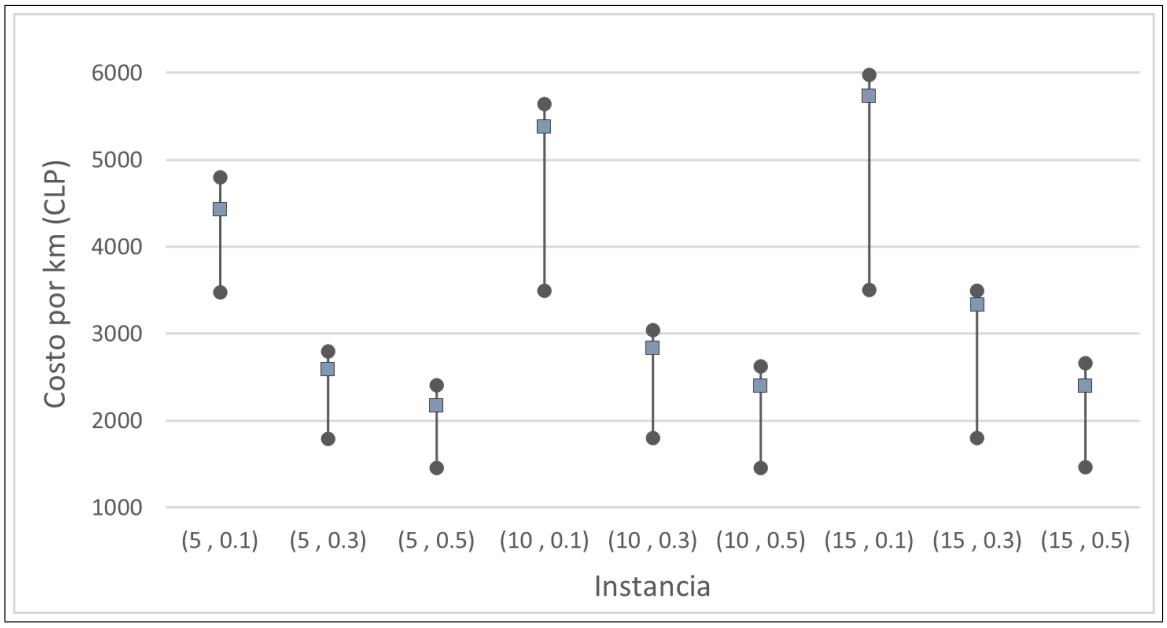


Figura 6.2. Estimación, incumbente y cota inferior del costo por km según instancia.

7. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En esta investigación se definió y resolvió el *Load-Dependent Waste Collection Problem with Arc Direction Selection* (LDWCP-ADS), un problema de recolección de residuos sólidos domiciliarios que busca representar la operación real observada en múltiples ciudades del mundo. En primer lugar, se propuso una metodología para transformar la red topológica real en un grafo basado en nodos que representa la recolección sobre segmentos de calle y diferencia el sentido en que cada segmento bidireccional es recorrido. Luego, se formuló un modelo de programación lineal entera mixta que resuelve este problema, logrando alcanzar una solución óptima en instancias pequeñas de hasta aproximadamente 60 sentidos de segmento de calle (SSdC).

Posteriormente, se presentó e implementó un método de solución heurístico basado en el concepto de *Iterated Local Search*, combinado con un algoritmo de partición de secuencia y un algoritmo para evaluar el costo de una secuencia mediante programación dinámica. Dicho método permite resolver el LDWCP-ADS en instancias de tamaño real como una comuna o una pequeña ciudad completa. Fue validado en instancias de tamaño pequeño (hasta 56 SSdC), alcanzando *gaps* de optimalidad inferiores al 2%. También fue utilizado para resolver instancias de tamaño medio-grande (entre 100 y 1000 SSdC) y de tamaño realista (cerca de 2500 SSdC), evidenciando en estas últimas un desempeño relativamente bueno, con una sobreestimación del *gap* de optimalidad de un 34.1% en el peor caso, y un tiempo de ejecución que se ajusta a las necesidades prácticas para planificar una operación de este tipo.

En la sección 7.1 se presentan las principales conclusiones respecto a los objetivos propuestos en esta investigación. Además, se plantean lecciones logísticas generales para el problema basadas en la experimentación. Finalmente, en la sección 7.2 se proponen algunas extensiones futuras a este trabajo.

7.1. Conclusiones

Considerar una función objetivo realista al momento de planificar una operación de recolección de residuos demostró ser fundamental para reducir costos. Al incorporar el efecto de la carga transportada en el costo por circular a través de un tramo, se puede generar ahorros de hasta $1109 por km recolectado con respecto a una planificación cuya secuencia no fue optimizada y de hasta $16 por km recolectado respecto a una planificación que únicamente minimiza distancia recorrida. Esto ocurre especialmente al operar vehículos cuyo cuociente entre el peso en lleno y el peso en vacío es alto. Así, una política que siempre carga el vehículo hasta su capacidad máxima podría no ser costo-eficiente bajo ciertos escenarios.

En primer lugar, se concluye que en una operación de este tipo, gran parte de los costos percibidos tienden a originarse producto de ineficiencias asociadas a la operación, como el consumo de combustible y tiempo en etapas de kilometraje muerto y viajes intermedios de descarga al vertedero. Por ello, al planificar una operación costo-eficiente se debe considerar factores como: i) distancia relativa entre la zona de recolección y el vertedero, y ii) consumo instantáneo de combustible, determinado por el nivel de carga transportada en cada tramo. Empíricamente, se evidenció que omitir o considerar erróneamente dichos factores podría alterar radicalmente la estructura de solución, y por tanto, obtener una operación menos eficiente y más costosa.

En segundo lugar, se concluye que el algoritmo propuesto afronta la complejidad combinatorial de este problema, entregando soluciones en un tiempo que crece de manera lineal en función del tamaño de la instancia resuelta. Esto permitió planificar la operación diaria completa sobre la comuna de Providencia en Santiago de Chile, en aproximadamente 5 horas.

En tercer lugar, se concluye que tanto la secuencia de visita a segmentos de calle como la política de descarga ejecutada son decisiones que debiesen ser consideradas al momento de planificar la operación. Su optimización simultánea en este trabajo permitió encontrar

un balance entre el kilometraje muerto recorrido, la utilización de capacidad promedio y la frecuencia de descarga al vertedero. Dicho balance demostró no ser trivial, y depender fuertemente de características exógenas a la operación como la densidad de basura por km^2 y la relación entre el costo del combustible y el salario por hora-hombre de la tripulación.

Finalmente, se concluye que la experimentación en base a topologías viales reales mediante OSMnx (Boeing, 2017) permitió incorporar características propias de la red y de gran importancia en los experimentos, las cuales probablemente hubiesen sido omitidas al trabajar con instancias ficticias. Esto favoreció la interpretación de efectos como, por ejemplo, el que produce la densidad vial de basura por unidad de superficie, evidenciando que bajas densidades impactan la solución aumentando el *deadhead* y altas densidades favorecen la ejecución de menores *deadheads*, lo que aumenta o disminuye el costo por km recolectado, respectivamente. La revelación de dichos efectos perimtió enriquecer el análisis y obtener lecciones logísticas reales como las presentadas en la sección 5.5.

7.2. Trabajo futuro

Como trabajo futuro, se propone extender este modelo a una planificación multi-período. Por ejemplo, definiendo patrones de visita semanal a cada calle o barrio de la ciudad y así cumplir con restricciones legales como la duración máxima de la jornada laboral, que en este trabajo no fue considerada.

También se propone considerar flota heterogénea, ya sea con múltiples vehículos diésel de distintas características o una flota mixta compuesta por vehículos diésel y vehículos eléctricos. La inclusión de vehículos eléctricos podría incorporar decisiones como cuándo y cuánta energía recargar. Considerando que dicho proceso toma un tiempo no despreciable, se presume que en este escenario la autonomía del vehículo y la duración de las rutas pasarían a jugar un rol clave en la planificación de secuencias y políticas de descarga.

Por otra parte, se propone incluir la dimensión estocástica inherente en la recolección de desechos, ya que realmente no se conoce el nivel de basura acumulada en cada calle

y su variabilidad podría afectar la operación. Así, incorporar incertidumbre en el modelo permitiría robustecer la planificación y eventualmente obtener mejores resultados en la práctica, por ejemplo, mediante políticas de descarga proactivas en función de la información que se revela durante la operación.

Finalmente, se propone extender el estudio hacia un ámbito táctico y/o estratégico de la operación. Para ello, se propone profundizar en la calibración del modelo de aproximación y posteriormente utilizarlo como *input* para la toma de decisiones de mediano y largo plazo como renovación de flota, zonificación del área de cobertura, asignación de turnos de trabajo y localización de infraestructura ligada a la red de tratamiento de residuos.

REFERENCIAS

Angelelli, E., & Speranza, M. G. (2002). The periodic vehicle routing problem with intermediate facilities. *European journal of Operational research*, *137*(2), 233 - 247. doi: 10.1016/S0377-2217(01)00206-5

Applegate, D. L., Bixby, R. E., Chvátal, V., & Cook, W. J. (2011). *The traveling salesman problem*. Princeton university press.

Arancibia, E. (2020, marzo). *Entrega de información por ley de transparencia* (Memorándum No. 5294). Dirección de Medio Ambiente, Aseo, Ornato y Mantención. Ilustre Municipalidad de Providencia.

Barth, M., & Boriboonsomsin, M. (2009). Energy and emissions impacts of a free-waybased dynamic eco-driving system. *Transportation Research Part D: Transport and Environment*, *14*(6), 400 - 410.

Barth, M., Younglove, T., & Scora, G. (2005). Development of a heavy-duty diesel modal emissions and fuel consumption model. *California Partners for Advanced Transit and Highways (PATH)*.

Basso, R., Kulcsár, B., Egardt, B., Lindroth, P., & Sanchez-Diaz, I. (2019). Energy consumption estimation integrated into the electric vehicle routing problem. *Transportation Research Part D: Transport and Environment*, *69*, 141 - 167. doi: 10.1016/j.trd.2019.01.006

BCN Chile. (2020). *Providencia, reporte comunal 2020.*

Beardwood, J., Halton, J. H., & Hammersley, J. M. (1959). The shortest path through many points. In *Mathematical proceedings of the cambridge philosophical society* (Vol. 55, p. 299 - 327).

Bektas, T., & Laporte, G. (2011). The pollution-routing problem. *Transportation Research Part B: Methodological*, *45*(8), 1232 - 1250. doi: 10.1016/j.trb.2011.02.004

Beliën, J., L. De Boeck, & J. Van Ackere. (2014). Municipal solid waste collection and management problems: A literature review. *Transportation Science*, *48*(1), 78 - 102. doi: 10.1287/trsc.1120.0448

Bellman, R. (1952). On the theory of dynamic programming. In *Proceedings of the national academy of sciences of the united states of america* (Vol. 38, p. 716).

Beltrami, E. J., & Bodin, L. D. (1974). Networks and vehicle routing for municipal waste collection. *Networks*, *4*(1), 65 - 94.

Benjamin, A. M., & Beasley, J. E. (2010). Metaheuristics for the waste collection vehicle routing problem with time windows, driver rest period and multiple disposal facilities. *Computers & Operations Research*, *37*(12), 2270 - 2280. doi: 10.1016/j.cor.2010.03.019

Bodin, L. D., & Kursh, S. J. (1978). A computer-assisted system for the routing and scheduling of street sweepers. *Operations Research*, *26*(4), 525 - 537. doi: 10.1287/opre.26.4.525

Boeing, G. (2017). Osmnx: New methods for acquiring, constructing, analyzing, and visualizing complex street networks. *Computers, Environment and Urban Systems*, *65*, 126 - 139. doi: 10.1016/j.compenvurbsys.2017.05.004

Brunner, C., Giesen, R., Klapp, M. A., & Florez-Calderón, L. (2021). Vehicle routing problem with steep roads. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, *151*, 1 - 17. doi: 10.1016/j.tra.2021.06.002

Cacchiani, V., Contreras-Bolton, C., Escobar, J. W., Escobar-Falcon, L. M., Linfati, R., & Toth, P. (2018). An iterated local search algorithm for the pollution traveling salesman problem. In (p. 83 - 91). Springer, Cham.

Caceres-Cruz, J., Arias, P., Guimarans, D., Riera, D., & Juan, A. A. (2014). Rich vehicle

routing problem: Survey. *ACM Computing Surveys*, *47*(2), 1 - 28. doi: 10.1145/2666003

Corberán, A., Eglese, R., Hasle, G., Plana, I., & Sanchis, J. M. (2021). Arc routing problems - a review of the past, present and future. *Networks*, *77*(1), 88 - 115.

Corberán, , Erdogan, G., Laporte, G., Plana, I., & Sanchís, J. M. (2018). The chinese postman problem with load-dependent costs. *Transportation Science*, *52*(2), 370 - 385. doi: 10.1287/trsc.2017.0774

Cortinhal, M. J., Mourão, M. C., & Nunes, A. C. (2016). Local search heuristics for sectoring routing in a household waste collection context. *European Journal of Operational Research*, *255*(1), 68 - 79. doi: 10.1016/j.ejor.2016.04.013

Crevier, B., Cordeau, J. F., & Laporte, G. (2007). The multi-depot vehicle routing problem with inter-depot routes. *European journal of operational research*, *176*(2), 756 - 773. doi: 10.1016/j.ejor.2005.08.015

Daganzo, C. F. (1984). The length of tours in zones of different shapes. *Transportation Research Part B: Methodological*, *18*(2), 135 - 145. doi: 10.1016/0191-2615(84)90027-4

Dantzig, G. B., & Ramser, J. H. (1959). The truck dispatching problem. *Management Science*, *6*(1), 80 - 91.

Davendra, D. (2010). *Traveling Salesman Problem: Theory and Applications*. BoD–Books on Demand.

Delgado-Antequera, L., Caballero, R., Sánchez-Oro, J., Colmenar, J. M., & Martí, R. (2020). Iterated greedy with variable neighborhood search for a multiobjective waste collection problem. *Expert Systems with Applications*, *145*, 113101. doi: 10.1016/j.eswa.2019.113101

Edmonds, J., & Johnson, E. L. (1973). Matching, euler tours and the chinese postman. *Mathematical Programming*, *5*(1), 88 - 124. doi: 10.1007/BF01580113

Eiselt, H. A., Gendreau, M., & Laporte, G. (1995). Arc routing problems, part i: The chinese postman problem. *Operations Research*, *43*(2), 231 - 242. doi: 10.1287/opre.43.2.231

Erdogan, S., & Miller-Hooks, E. (2012). A green vehicle routing problem. *Transportation research part E: logistics and transportation review*, *48*(1), 100 - 114. doi: 10.1016/j.tre.2011.08.001

Figliozzi, M. A. (2009). Planning approximations to the average length of vehicle routing problems with time window constraints. *Transportation Research Part B: Methodological*, *43*(4), 438 - 447. doi: 10.1016/j.trb.2008.08.004

Fiori, C., Ahn, K., & Rakha, H. A. (2016). Power-based electric vehicle energy consumption model: Model development and validation. *Applied Energy*, *168*, 257 - 268. doi: 10.1016/j.apenergy.2016.01.097

Franceschetti, A., Jabali, O., & Laporte, G. (2017). Continuous approximation models in freight distribution management. *Top*, *25*(3), 413 - 433. doi: 10.1007/s11750-017-0456-1

Francis, P., & Smilowitz, K. (2006). Modeling techniques for periodic vehicle routing problems. *Transportation Research Part B: Methodological*, *40*(10), 872 - 884. doi: 10.1016/j.trb.2005.12.001

Ghiani, G., Guerriero, F., Laporte, G., & Musmanno, R. (2004). Tabu search heuristics for the arc routing problem with intermediate facilities under capacity and length restrictions. *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms*, *3*(3), 209 - 223.

Ghiani, G., Improta, G., & Laporte, G. (2001). The capacitated arc routing problem with intermediate facilities. *Networks*, *37*(3), 134 - 143.

Ghiani, G., Lagana, D., Manni, E., Musmanno, R., & Vigo, D. (2014a). Operations research in solid waste management: A survey of strategic and tactical issues. *Computers & Operations Research*, *44*, 22 - 32. doi: 10.1016/j.cor.2013.10.006

Ghiani, G., Manni, A., Manni, E., & Toraldo, M. (2014b). The impact of an efficient collection sites location on the zoning phase in municipal solid waste management. *Waste Management*, *34*(11), 1949 - 1956. doi: 10.1016/j.wasman.2014.05.026

Goeke, D., & Schneider, M. (2015). Routing a mixed fleet of electric and conventional vehicles. *European Journal of Operational Research*, *245*(1), 81 - 99. doi: 10.1016/j.ejor.2015.01.049

Hannan, M. A., Akhtar, M., Begum, R. A., Basri, H., Hussain, A., & Scavino, E. (2018). Capacitated vehicle-routing problem model for scheduled solid waste collection and route optimization using pso algorithm. *Waste Management*, *71*, 31 - 41. doi: 10.1016/j.wasman.2017.10.019

Hemmelmayr, V., Doerner, K. F., Hartl, R. F., & Rath, S. (2013). A heuristic solution method for node routing based solid waste collection problems. *Journal of Heuristics*, *19*(2), 129 - 156. doi: 10.1007/s10732-011-9188-9

Ivanič, Z. (2007). Data collection and development of new york city refuse truck duty cycle. SAE Technical Paper.

Jabali, O., Gendreau, M., & Laporte, G. (2012). A continuous approximation model for the fleet composition problem. *Transportation Research Part B: Methodological*, *46*(10), 1591 - 1606. doi: 10.1016/j.trb.2012.06.004

Kara, I., Kara, B. Y., & Yetis, M. K. (2007, August). Energy minimizing vehicle routing problem. In *International conference on combinatorial optimization and applications* (p. 62 - 71). Springer.

Kim, B. I., Kim, S., & Sahoo, S. (2006). Waste collection vehicle routing problem with time windows. *Computers & Operations Research*, *36*(12), 3624 - 3642. doi: 10.1016/j.cor.2005.02.045

Lei, H., Wang, R., & Laporte, G. (2016). Solving a multi-objective dynamic stochastic

districting and routing problem with a co-evolutionary algorithm. *Computers Operations Research*, *67*, 12 - 24. doi: 10.1016/j.cor.2015.09.002

Lenis, S. A., & Rivera, J. C. (2018). A metaheuristic approach for the cumulative capacitated arc routing problem. In *Communications in computer and information science* (Vol. 916, p. 96 - 107). Springer, Cham.

Longo, H., M. P. De Aragao, & Uchoa, E. (2006). Solving capacitated arc routing problems using a transformation to the cvrp. *Computers Operations Research*, *33*(6), 1823 - 1837. doi: 10.1016/j.cor.2004.11.020

Lourenço, H. R., Martin, O. C., & Stützle, T. (2003). Iterated local search. In *(eds) handbook of metaheuristics* (Vol. 57, p. 320 - 353). Springer, Boston, MA. doi: 10.1007/0-306-48056-5_11

Lourenço, H. R., Martin, O. C., & Stützle, T. (2019). Iterated local search: Framework and applications. In *Handbook of metaheuristics* (p. 129 - 168). Springer, Cham.

López-Sánchez, A. D., Hernández-Díaz, A. G., Cortázar, F., & Hinojosa, M. A. (2017). A multiobjective grasp–vnd algorithm to solve the waste collection problem. *International Transactions in Operational Research*, *25*(2), 545 - 567. doi: 10.1111/itor.12452

Macrina, G., Laporte, G., Gerriero, F., & Pugliese, L. D. P. (2019). An energy-efficient green-vehicle routing problem with mixed vehicle fleet, partial battery recharging and time windows. *European Journal of Operational Research*, *276*(3), 971 - 982. doi: 10.1016/j.ejor.2019.01.067

Markov, I., Varone, S., & Bierlaire, M. (2016). Integrating a heterogeneous fixed fleet and a flexible assignment of destination depots in the waste collection vrp with intermediate facilities. *Transportation research part B: methodological*, *84*, 256 - 273. doi: 10.1016/j.trb.2015.12.004

Matthei, E. (2017, julio). *Entrega de información por ley de transparencia* (Memorándum

No. 15498). Dirección de Medio Ambiente, Aseo, Ornato y Mantención. Ilustre Municipalidad de Providencia.

Miller, C. E., Tucker, A. W., & Zemlin, R. A. (1960). Integer programming formulation of traveling salesman problems. *Journal of the ACM (JACM)*, *7*(4), 326 - 329. doi: 10.1145/321043.321046

Minieka, E. (1979). The chinese postman problem for mixed networks. *Management Science*, *25*(7), 643 - 648. doi: 10.1287/mnsc.25.7.643

Mofid-Nakhaee, E., & Barzinpour, F. (2019). A multi-compartment capacitated arc routing problem with intermediate facilities for solid waste collection using hybrid adaptive large neighborhood search and whale algorithm. *Waste Management & Research*, *37*(1), 38 - 47. doi: 10.1177/0734242X188011863

Molina, J. C., Eguia, I., & Racero, J. (2019). Reducing pollutant emissions in a waste collection vehicle routing problem using a variable neighborhood tabu search algorithm: a case study. *Top*, *27*(2), 253 - 287. doi: 10.1007/s11750-019-00505-5

Neira, D. A., Aguayo, M. M., R. De la Fuente, & Klapp, M. A. (2020). New compact integer programming formulations for the multi-trip vehicle routing problem with time windows. *Computers & Industrial Engineering*, *144*, 106399. doi: 10.1016/j.cie.2020.106399

Rifki, O., Garaix, T., & Solnon, C. (2021, August). An asymptotic approximation of the traveling salesman problem with uniform non-overlapping time windows. In *2021 ieee 17th international conference on automation science and engineering (case)* (p. 983 - 988). IEEE. doi: 10.1109/CASE49439.2021.9551615

Saberi, M., & Verbas, (2012). Continuous approximation model for the vehicle routing problem for emissions minimization at the strategic level. *Journal of Transportation Engineering*, *138*(11), 1368 - 1376. doi: 10.1061/(ASCE)TE.1943-5436.0000442

Salehipour, A., Sörensen, K., Goos, P., & Bräysy, O. (2011). Efficient grasp+ vnd and grasp+ vns metaheuristics for the traveling repairman problem. *4or*, *9*(2), 189 - 209. doi: 10.1007/s10288-011-0153-0

Schiffer, M., Schneider, M., Walther, G., & Laporte, G. (2019). Vehicle routing and location routing with intermediate stops: A review. *Transportation Science*, *53*(2), 319 - 343. doi: 10.1287/trsc.2018.0836

Stricker, R. (1970). *Public sector vehicle routing: The chinese postman problem* (Unpublished master's thesis). Massachusetts Institute of Technology.

Suzuki, Y. (2011). A new truck-routing approach for reducing fuel consumption and pollutants emission. *Transportation Research Part D: Transport and Environment*, *16*(1), 73 - 77. doi: 10.1016/j.trd.2010.08.003

Tavares, G., Zsigraiova, Z., Semiao, V., & Carvalho, M. G. (2009). Optimisation of msw collection routes for minimum fuel consumption using 3d gis modelling. *Waste Management*, *29*(3), 1176 - 1185. doi: 10.1016/j.wasman.2008.07.013

Tirkolaee, E. B., Alinaghian, M., Hosseinabadi, A. A. R., Sasi, M. B., & Sangaiah, A. K. (2019). An improved ant colony optimization for the multi-trip capacitated arc routing problem. *Computers and Electrical Engineering*, *77*, 457 - 470. doi: 10.1016/j.compeleceng.2018.01.040

Tirkolaee, E. B., Hosseinabadi, A. A. R., Soltani, M., Sangaiah, A. K., & Wang, J. (2018a). A hybrid genetic algorithm for multi-trip green capacitated arc routing problem in the scope of urban services. *Sustainability*, *10*(5), 1366. doi: 10.3390/su10051366

Tirkolaee, E. B., Mahdavi, I., & Esfahani, M. M. S. (2018b). A robust periodic capacitated arc routing problem for urban waste collection considering drivers and crew's working time. *Waste Management*, *76*, 138 - 146. doi: 10.1016/j.wasman.2018.03.015

Toth, P., & Vigo, D. (2002). *The vehicle routing problem*. SIAM.

Turkensteen, M. (2017). The accuracy of carbon emission and fuel consumption computations in green vehicle routing. *European Journal of Operational Research*, *262*(2), 647 - 659. doi: 10.1016/j.ejor.2017.04.005

van Bevern, R., Komusiewicz, C., & Sorge, M. (2017). A parameterized approximation algorithm for the mixed and windy capacitated arc routing problem: Theory and experiments. *Networks*, *70*(3), 262 - 278. doi: 10.1002/net.21742

Wang, J., & Rakha, H. A. (2017). Fuel consumption model for heavy duty diesel trucks: Model development and testing. *Transportation Research Part D: Transport and Environment*, *55*, 127 - 141. doi: 10.1016/j.trd.2017.06.011

Wang, S., Liu, M., & Chu, F. (2020). Approximate and exact algorithms for an energy minimization traveling salesman problem. *Journal of Cleaner Production*, *249*. doi: 10.1016/j.jclepro.2019.119433

Wøhlk, S. (2008). An approximation algorithm for the capacitated arc routing problem. *The Open Operational Research Journal*, *2*(1). doi: 10.2174/1874243200802010008

ANEXOS

A. FORMULACIÓN DE LAS FUNCIONES DE CONSUMO

A continuación, se presenta el procedimiento para estructurar la función de costos como una expresión lineal dependiente de la carga extra transportada.

A.1. Función de consumo para trayectos largos

En primer lugar, se desarrolla la expresión para el caso de trayectos largos. Para ello, se comienza con la expresión (2.12) dada por

$$\hat{f} = \lambda \cdot \left(k \cdot N \cdot D + \frac{\hat{P}_{tract}(u,v)}{\eta_{eng}} \right) \cdot \frac{d}{v} \qquad \left[L \right] . \tag{A.1}$$

Reemplazando (2.10) en $\hat{P}_{tract}(u,v)$ y definiendo $\kappa(v) = 0.5 \cdot \rho_a \cdot C_d \cdot A \cdot v^2$ se obtiene

$$\hat{f} = \lambda \cdot \left(k \cdot N \cdot D + \frac{\frac{v}{1000} \cdot \Big((m+u) \cdot g \cdot C_r + \kappa(v) \Big)}{\eta_{eng}} \right) \cdot \frac{d}{v} \, . \tag{A.2}$$

A continuación, desarrollando los paréntesis y luego agrupando las expresiones que multiplican a u se tiene

$$\hat{f} = \underbrace{\frac{\lambda \cdot d \cdot g \cdot C_r}{1000 \cdot \eta_{eng}}}_{\gamma(d,v)} \cdot u + \underbrace{\frac{\lambda \cdot d}{v} \cdot \left(k \cdot N \cdot D + \frac{v}{1000 \cdot \eta_{eng}} \cdot \Big(m \cdot g \cdot C_r + \kappa(v) \Big) \right)}_{\mu(d,v)}, \tag{A.3}$$

obtieniéndose así la estructura lineal de la expresión (3.8b),

$$\hat{f} = \gamma(d,v) \cdot u + \mu(d,v) \tag{A.4}$$

A.2. Función de consumo para trayectos cortos

Para el caso de trayectos cortos, el desarrollo es análogo al caso anterior, pero distinguiendo cada etapa del ciclo. En primer lugar, se considera la expresión (2.8) y se reemplaza (2.4) en P_{tract}. Con ello, se obtiene que para las etapas 1 y 3, respectivamente,

el consumo es

$$f_{1,3} = \lambda \cdot \left(k \cdot N \cdot D + \frac{v}{2000 \cdot \eta_{eng}} \Big((m+u)(a_{1,3} + g \cdot C_r) + \kappa(v) \Big) \right) \cdot \frac{v}{a_{1,3}} \quad \Big[L \Big]. \tag{A.5}$$

Al igual que para trayectos largos, al desarrollar paréntesis y agrupar los términos que multiplican a la carga extra u, se obtiene una expresión lineal del consumo para las etapas 1 y 3

$$f_{1,3} = \underbrace{\frac{\lambda \cdot v^2 \cdot (a_{1,3} + g \cdot C_r)}{2000 \cdot \eta_{eng} \cdot a_{1,3}}}_{\alpha_{1,3}(d,v)} \cdot u + \underbrace{\frac{\lambda \cdot v}{a_{1,3}} \left(k \cdot N \cdot D + \frac{v}{2000 \cdot \eta_{eng}} \Big(m(a_{1,3} + g \cdot C_r) + \kappa(v) \Big) \right)}_{\beta_{1,3}(d,v)}. \tag{A.6}$$

Del mismo modo, para la etapa 2, definiendo $\xi(d,v) = \frac{1}{v} \cdot \left[d - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v^2}{a^+} + \frac{v^2}{a^-} \right) \right]^+$, el consumo es

$$f_2 = \lambda \cdot \left(k \cdot N \cdot D + \frac{v}{2000 \cdot \eta_{eng}} \Big((m+u) \cdot g \cdot C_r + \kappa(v) \Big) \right) \cdot \xi(d,v) \quad \Big[L \Big]. \tag{A.7}$$

Desarrollando y agrupando la expresión al igual que en las etapas 1 y 3 se tiene

$$f_2 = \underbrace{\frac{\lambda \cdot v \cdot g \cdot C_r \cdot \xi(d,v)}{2000 \cdot \eta_{eng}}}_{\alpha_2(d,v)} \cdot u + \underbrace{\lambda \cdot \xi(d,v) \cdot \left(k \cdot N \cdot D + \frac{v}{2000 \cdot \eta_{eng}} (m \cdot g \cdot C_r + \kappa(v)) \right)}_{\beta_2(d,v)}. \tag{A.8}$$

Finalmente, sumando las expresiones correspondientes a las tres etapas (f_1, f_2, f_3) y factorizando la carga transportada u, se obtiene (3.8a)

$$\begin{aligned} f &= \Big(\alpha_1(d,v) + \alpha_2(d,v) + \alpha_3(d,v) \Big) \cdot u + \Big(\beta_1(d,v) + \beta_2(d,v) + \beta_3(d,v) \Big) \\ &= \alpha(d,v) \cdot u + \beta(d,v). \end{aligned} \tag{A.9}$$

B. PARÁMETROS UTILIZADOS EN LA EXPERIMENTACIÓN

Los parámetros utilizados en los experimentos computacionales desarrollados se presentan en la Tabla B.1.

Tabla B.1. Parámetros utilizados en diseño experimental

Parámetro	Descripción	Unidad	Valor
$\hat{d}$	Distancia representativa al vertedero	m	10000
ρ	Densidad lineal de generación de basura	$kg \cdot m^{-1}$	0.5
Q	Capacidad de carga del vehículo	kg	9000
v^{max}	Velocidad máxima en recolección (velocidad *target*)	$m \cdot s^{-1}$	5.0
$\bar{v}$	Velocidad en *deadheads*	$m \cdot s^{-1}$	$8.\bar{3}$
$\hat{v}$	Velocidad en trayectos largos	$m \cdot s^{-1}$	$13.\bar{8}$
c_d	Costo combustible	$\$ \cdot L^{-1}$	500
c_t	Costo R.R.H.H	$\$ \cdot min^{-1}$	150

En tanto, los parámetros utilizados en el modelo de estimación de consumo de combustible se resumen en la Tabla B.2.

Tabla B.2. Parámetros utilizados en modelo de consumo de combustible

Parámetro	Descripción	Unidad	Valor
λ	Razón de combustión entre combustible y aire	$L^{-1} \cdot kJ^{-1}$	$3.08 \cdot 10^{-5}$
k	Factor de fricción del motor	$kJ \cdot rev^{-1} \cdot L^{-1}$	0.2
N	Velocidad del motor	$rev \cdot s^{-1}$	33.33
D	Desplazamiento del motor	L	6.9
η_{engine}	Eficiencia motor diesel y tren de carga	-	0.387
m	Masa del vehículo vacío	kg	9000
g	Aceleración de gravedad	$m \cdot s^{-2}$	9.81
C_r	Coefiente de resistencia al rodamiento	-	0.01
C_d	Coefiente de arrastre	-	0.7
ρ_a	Densidad del aire	$kg \cdot m^{-3}$	1.2041
A	Área vertical proyectada del vehículo	m^2	8.5
a_1	Aceleración en trayectos cortos	$m \cdot s^{-2}$	0.68
a_3	Desaceleración en trayectos cortos	$m \cdot s^{-2}$	0.54