



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

TRATAMIENTO DE OBSERVACIONES PERDIDAS Y EFECTO PRECIO EN SERIES DE TIEMPO PARA PRONOSTICAR DEMANDA

FABIAN ANTONIO JADUE FAGRES

Tesis para optar al grado de Magister en Ciencias de la Ingeniería

Profesor Supervisor:

JUAN CARLOS FERRER ORTIZ

Santiago de Chile, (Enero, 2014)

© 2014, Fabián Jadue

Índice

Agradecimientos	VI
Resumen	VII
Abstract	IX
1. Introducción	1
1.1. Hipótesis	3
1.2. Alcance	3
1.3. Justificación	4
2. Aprendizaje Bayesiano para Completar Series con Información Limitada	6
2.1. Introducción	6
2.2. Información Limitada y Métodos de Relleno	7
2.2.1. Cantidad de Variables Observadas	7
2.2.2. Regularidad Temporal de Observaciones	8
2.2.3. Métodos Tradicionales para Completar Series con Observaciones Per- dididas	8
2.3. Método de Aprendizaje Bayesiano para relleno de series incompletas	11

2.3.1.	Metodología	11
2.3.2.	Algoritmo	13
2.4.	Comparación Aprendizaje Bayesiano v/s metodologías tradicionales	15
2.4.1.	Construcción de las series	15
2.4.2.	Resultados	17
2.5.	Conclusiones y extensiones	23
3.	Inclusión de la Variable Precio en Pronósticos de Demanda por Atenuación Exponencial	28
3.1.	Introducción	28
3.2.	Modelo de Atenuación Exponencial y Relación Precio-Demanda	30
3.2.1.	Construcción del modelo de atenuación exponencial de Holt y Winters	31
3.2.2.	Relación precio-demanda	33
3.3.	Incorporación del efecto precio al método Holt-Winters	34
3.3.1.	Alternativas de efecto precio	34
3.3.2.	Algoritmo Holt-Winters con efecto precio	36
3.4.	Comparación HW Precio v/s HW tradicional	37
3.4.1.	Construcción de las series aleatorias	38

3.4.2. Resultados	40
3.5. Aplicación a la industria alimentaria	48
3.6. Conclusiones y extensiones	50

Índice de figuras

1.	MAPE de series rellenas para cada grupo ARIMA con elasticidad variable.	19
2.	Serie original y ajuste AB de las últimas 52 semanas de una serie incompleta particular (ARIMA(1,0,2), 29 observaciones perdidas).	23
3.	Diferencias de MAPE de HWP1 con respecto a HW para cada grupo de series ARIMA con elasticidad variable.	43
4.	Diferencias de MAPE de HWP2 a HWP5 con respecto a HW para series ARIMA(1,0,1) con elasticidad variable.	44
5.	Diferencias de MAPE de cada HWP con respecto a HW para series ARI-MA(2,0,1) con factor de efecto precio variable.	46
6.	Precio, demanda y ajustes HWP y HW, de los últimos 20 datos de la serie escogida.	48

Índice de tablas

1.	Par conjugado Poisson - Gamma, para una muestra X. Más pares conjugados en Kvam y Vidakovic 2007, p.53.	11
2.	MAPE promedio, desviaciones estándar y valores-p de pruebas t para medir significancia al comparar MAPE entre Aprendizaje Bayesiano y los demás métodos.	20
3.	MAPE promedio (desviaciones estándar entre paréntesis) y valores-p de prueba t, para medir significancia al comparar errores entre series de distintos intervalos de observaciones perdidas.	22
4.	Formas funcionales típicas para relacionar el precio y la cantidad demandada.	33
5.	Comparación de Diferencias de MAPE entre las 5 alternativas de HWP y el método tradicional y desviación estándar (entre paréntesis).	41
6.	MAPE promedio y desviación estándar (entre paréntesis) por metodología de pronósticos para series de una empresa de alimentos chilena.	49

Agradecimientos

Mediante esta nota quisiera agradecer a todos aquellos que contribuyeron en la elaboración de este trabajo, comenzando por Juan Carlos Ferrer, profesor supervisor de esta tesis. Los consejos, recomendaciones e interesantes discusiones en las reuniones, ayudaron considerablemente a que este trabajo fuera lo que es. En segundo lugar, quisiera dar las gracias a todo el equipo de Pricing UC, por su colaboración tanto motivacional, como en prestar su disponibilidad en herramientas, bases de datos y conocimientos teóricos. Dentro de Pricing UC, me gustaría agradecer especialmente a Alejandro Cataldo, por el tiempo dedicado a conversar sobre los tópicos relacionados y los consejos brindados para la elaboración de la tesis. Por último, un especial agradecimiento a mi familia, pareja y amigos, por su apoyo incondicional, que motivó a la realización de un trabajo constante y minucioso a lo largo de todos estos meses.

Resumen

La competitividad que ha alcanzado la economía en todas sus áreas (compañías manufactureras, de transportes, retailers, etc.), ha derivado en que se requiera minimizar las diversas incertidumbres presentes en los procesos de cada negocio y en que se ejecute una minuciosa planificación estratégica.

Con el fin de cumplir con lo anterior, es que estimar la demanda futura con la máxima precisión posible, se ha convertido en un procedimiento fundamental para todo tipo de planificadores. Sin embargo, los elevados costos para obtener información regular y de confianza, han generado que muchas veces la precisión de éstos no sea la deseable.

Se enfrentan en este trabajo dos problemas típicos que surgen al querer pronosticar demanda de forma precisa: i) la información poco confiable, faltante o atípica, que deriva en observaciones perdidas, y ii) la no inclusión del efecto del precio en la demanda en los modelos de pronósticos.

Se propone en un primer capítulo un algoritmo para completar series con observaciones perdidas, basados en la metodología de Aprendizaje Bayesiano, comparando su desempeño contra otros métodos tradicionales de relleno de series incompletas para distintos niveles de frecuencia de información. Ésto utilizando series de tiempo aleatorias generadas a partir de modelos ARIMA.

En un capítulo más extenso y desarrollado que el primero, se proponen diversas

alternativas para incluir la variable precio en el modelo de atenuación exponencial, debido a que ésta condiciona directamente la cantidad demandada en series elásticas y representa una variable de control para los planificadores. Se prueban las alternativas propuestas utilizando series aleatorias. Se demuestra finalmente que la inclusión del precio en los modelos de atenuación exponencial permite obtener menores errores al pronosticar series con comportamiento elástico con respecto al precio.

Abstract

The high competitiveness that has reached the industry, in general (manufacturing companies, transportation, retailers, etc.), has required minimizing uncertainties related to processes in all type of business. That is the reason why forecasting demand has become an essential procedure for all types of planners. However, the high costs to acquire regular and accurate information, have often led to bad accuracy of forecasts.

Two typical problems that arise when forecasting demand accurately, faced in this paper are: i) unreliable, missing or atypical information, which leads to missing observations, ii) the exclusion of the effect of price on demand in forecasting models.

This work contributes to the postulation of a algorithm for completing series with missed observations, based on Bayesian Learning. This method was compared with three other common alternatives for different levels of lack of information, defined based on the regularity of the observations. The comparison was executed using the Monte Carlo method, comparing the performance of the methodologies for filling series.

In this thesis we also propose several alternatives for including the price effects in exponential smoothing models, because this variable directly affects the quantity demanded and may be controlled by planners. Proposed alternatives are tested using sale and price random series generated by ARIMA models and real series of Chilean food company, showing that in elastic price elasticity series reductions can be achieved in the error of

predictions.

1. Introducción

Hoy en día, las estimaciones de demanda son la base para la planificación estratégica y financiera de la cadena de suministro en una compañía (Hasin, Ghosh y Shareef 2011). Los planes de demanda incorporan modelos matemáticos cada vez más complejos, los que se actualizan mensualmente y no anualmente como era en el pasado. La colaboración en la comunicación de información entre miembros de la cadena de suministro, permiten que ésta funcione correctamente, evitando costos asociados a variabilidad de la demanda, como el efecto látigo¹. Por estas razones, se puede decir que los pronósticos de demanda son una componente fundamental en la industria del retail y otras que dependen directamente de las ventas y la gestión de la cadena de suministros.

El pronóstico de demanda como tal es una rama ligada al concepto de *Demand Management*, que se define como la gestión y control de la demanda, sin embargo, en la industria del retail se encuentra más ligado al *Revenue Management*, ya que las herramientas que componen este concepto (como la fijación de precios y la gestión de inventarios), requieren de un adecuado pronóstico de demanda para maximizar los ingresos. Mantener los costos de inventario en el mínimo y cobrar un precio a cada consumidor lo más cer-

¹El efecto látigo o Bullwhip Effect es un fenómeno que consiste en una distorsión creciente de la demanda, producto de la incertidumbre de ésta, transmitida por los agentes participantes en la cadena de suministros. Dificulta la gestión de estas y eleva considerablemente los costos (Lee, Padmanabhan y Whang 1996).

cano posible a su disposición a pagar, es un enorme desafío para los administradores que depende plenamente de la estimación de la demanda de los productos en venta.

Para poder obtener pronósticos de demanda existen diversas metodologías: aquellos basados en la experiencia, métodos Delphi², aplicación de encuestas, métodos experimentales y análisis estadístico de datos pasados. Todos éstos buscan conocer el comportamiento de la demanda y en el mejor de los casos construir una curva de esta en relación a la variable precio. A pesar de que no existe ninguna metodología que se considere correcta por sobre las demás, es importante mencionar que ante distintas cantidades de información disponible, cada método entregará resultados con magnitudes de error distintos.

Esta investigación basará su análisis en los métodos estadísticos, como son los modelos de series temporales, presentando metodologías mejores a las existentes para diversas situaciones donde la información es limitada en cantidad o en regularidad.

Se enfrentan en este trabajo dos problemas típicos que surgen al querer pronosticar demanda de forma precisa: i) la información poco confiable, faltante o atípica, que deriva en observaciones perdidas, y ii) la no inclusión del efecto del precio en la demanda en los modelos de pronósticos. Se propone para cada caso respectivamente, una metodología basada en Aprendizaje Bayesiano para el relleno de series incompletas y diversas alternativas

²El método Delphi es una metodología de investigación multidisciplinar para la realización de pronósticos y predicciones. Se basa en la consecución de un consenso mediante la discusión de expertos (Scott 2001).

para incluir el efecto del precio en los modelos de atenuación exponencial, basadas en las distintas formas funcionales de relacionar el precio y la demanda, y el precio de referencia.

1.1. Hipótesis

La hipótesis de este trabajo es que existen mejores metodologías que las postuladas en la literatura disponible, para: i) obtener un pronóstico preciso de demanda, mediante la inclusión del efecto precio en el modelo de atenuación exponencial (Holt-Winters), y ii) completar series de tiempo de demanda con observaciones perdidas basado en un modelo de Aprendizaje Bayesiano, con el fin de obtener pronósticos más precisos, evaluando además el impacto de los distintos niveles de información faltante.

1.2. Alcance

Los aportes que se encuentran en esta tesis, se enuncian a continuación:

1. Proponer un método de pronósticos utilizando un modelo de atenuación exponencial, que permita incluir el efecto del precio en la estimación de la cantidad demandada en series de comportamiento de elasticidad-precio elástico, con el fin de obtener pronósticos más precisos a los que entrega el modelo de Holt-Winters tradicional³. Estos

³Metodología clásica para pronosticar demanda, basada en la atenuación exponencial y que incorpora efecto tendencia, de nivel y estacionalidad.

modelos permiten pronosticar basados únicamente en la cantidad vendida, sin embargo, el precio es una variable que incide directamente en ésta, y además el planificador lo conoce (es una variable controlable), por lo que su incorporación en el modelo debiese ser una buena decisión. Se espera que al incluir más información que explique a las ventas, los pronósticos tengan mayor precisión.

2. Proponer una metodología para rellenar series con datos perdidos o información faltante, basadas en Aprendizaje Bayesiano, comparando el desempeño de ésta con otros métodos tradicionales. Además se busca estudiar el impacto en precisión al completar la serie para distintos niveles de frecuencia de información.

1.3. Justificación

La competitividad que ha alcanzado la economía en general (compañías manufactureras, de transportes, retailers, etc.), ha derivado en que se requiera minimizar las diversas incertidumbres presentes en los procesos de cada negocio.

Debido a esto, han nacido poco a poco nuevas ramas de investigación en relación a la gestión de toma de decisiones, parte fundamental de cualquier empresa o administración. Se han creado un sinnúmero de métodos económicos derivados de la teoría de la empresa, la teoría de la demanda y la estimación, la producción y la teoría de los costos y estimación, la estructura de mercado y fijación de precios, la teoría de juegos, análisis de inversión y políticas gubernamentales, entre otros.

Los pronósticos de demanda permiten disminuir la atmosfera de incertidumbre que existe en torno a grandes inversiones, además de satisfacer los requerimientos de los consumidores, sin generar quiebres de stock ni excesos de inventario. Se espera que un adecuado sistema de pronósticos, impacte considerablemente en el beneficio económico de la compañía, por lo que este se ha transformado en un tema clave para los gerentes.

Algunos años atrás, las herramientas cualitativas basadas en el juicio de expertos (administradores o gerentes), eran las más utilizada para estimar la demanda, sin embargo esto ha cambiado. En los años recientes, con la mejora en las redes (sobre todo gracias al internet), el aumento del poder de las computadoras y la facilidad para transmitir la información, los métodos cuantitativos se han transformado en la metodología ideal. Estos han permitido que se obtengan pronósticos mucho más precisos, pero al mismo tiempo han elevado las inversiones que realizan las empresas para obtener información completa, sin errores ni datos perdidos. Sin embargo, muchas industrias no disponen de recursos para recabar toda la información necesaria, las restricciones del mercado impiden obtener datos confiables o simplemente el costo de implementar una metodología que lo permitiera es excesivamente alto, por lo que realizan malos pronósticos, lo que se traduce en pérdidas y una mala utilización de recursos. Esta situación, genera por ende la necesidad de estimar pronósticos precisos con la menor cantidad de información disponible.

2. Aprendizaje Bayesiano para Completar Series con Información Limitada

2.1. Introducción

El análisis del comportamiento de la demanda, requiere de la existencia de series temporales de datos continuos y homogéneos, para el máximo intervalo de tiempo posible. Sin embargo, es común que estas series posean observaciones perdidas, ya sea por fallas en los instrumentos de medición, errores de transcripción, observaciones atípicas, etc. (Barrera 2004). Estas situaciones llevan a implementar técnicas para completar series o a reformular los modelos tradicionales, apoyándose en herramientas como el Aprendizaje Bayesiano, los Filtros de Kalman, el modelo de regresión y modelos de atenuación exponencial o Box-Jenkins para datos perdidos, entre otros (Wadhwa 1996; Ding et al. 2002; Bahmani-Oskooee y Brown 2004; Kalman 1960; Sheung Chi Fung 2006; Wright 1986; Kihoro 2013).

A través de este artículo se propone una metodología para rellenar series de venta con datos perdidos, información faltante o observaciones atípicas, basada en el método de Aprendizaje Bayesiano. Se busca también estudiar la precisión de los datos rellenados, para distintos niveles de información faltante.

El artículo está estructurado de manera que en la Sección 2 se definen los grados de escasez de información y se presentan las metodologías tradicionales para rellenar series

incompletas. En la Sección 3, se propone la metodología de relleno de series basada en el Aprendizaje Bayesiano. Pruebas comparando el desempeño del Aprendizaje Bayesiano frente a otros métodos tradicionales utilizando series aleatorias, se presentan en la Sección 4. Se termina el artículo con una conclusión y las extensiones, en la Sección 5.

2.2. Información Limitada y Métodos de Relleno

En esta sección se presentan dos dimensiones relacionadas con la información limitada y el tratamiento que se les dará en este artículo.

2.2.1. Cantidad de Variables Observadas

Las compañías suelen invertir cuantiosas sumas de dinero que les permitan obtener la mayor cantidad de variable para pronósticar demanda o al menos una estimación lo más precisa posible de éstas (Hoch et al. 1995).

Se define una primera dimensión de información limitada a partir de la cantidad de variables disponibles, tanto propias como del mercado (González 2009). Se considera una situación de información limitada cuando se posee conocimiento únicamente de la historia de venta, información mínima necesaria para ejecutar un modelo de pronósticos de demanda, como Holt-Winters (Holt 1957; Winters 1960) y Box-Jenkins (Box y Jenkins 1970).

2.2.2. Regularidad Temporal de Observaciones

La segunda dimensión de información limitada que se revisará en este artículo tiene relación con la frecuencia con la que se pueden registrar datos confiables y no atípicos para una variable. Al existir periodos en los que no se logra ésto, se generan observaciones perdidas, siendo ésta otra dimensión de información limitada (González 2009). En el caso de la venta, existen periodos en los que no es posible registrar un valor fidedigno, lo que se debe a: errores de medición, el costo es muy elevado, se produjeron quiebres de stock o la observación es atípica y es conveniente eliminarla.

Una situación de información completa será aquella en la que se puede registrar la variable durante todos los periodos disponibles.

2.2.3. Métodos Tradicionales para Completar Series con Observaciones Perdidas

Se plantean en esta sección dos métodos tradicionales para completar series con información faltante: el método del valor medio y el método de predicción por regresión lineal. Los algoritmos de estos métodos se construyen bajo el supuesto que existe información conocida para el mismo periodo en alguna otra temporada, que por simplicidad se definirá como la inmediatamente anterior.

Método de Regresión Lineal (REG)

El modelo de regresión a utilizar en este trabajo asume conocida la variable independiente precio (p), la cuál es controlable por el planificador, tal como se muestra a continuación:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 p_t, \quad (1)$$

donde β_i , con $i = (1, 2)$, son los parámetros que se estiman a partir de los datos y_t y p_t , pertenecientes a los vectores Y y P , respectivamente. Estos vectores, de tamaño $(t \times 1)$, incluyen la información disponible hasta el periodo anterior al que se quiere rellenar. El planificador podrá quitar o incorporar variables independientes al modelo, según estime conveniente.

El algoritmo para completar las series se enuncia a continuación:

1. Actualización: se estiman parámetros $\hat{\beta}_i$ con la información disponible del primer año, resolviendo en forma matricial: $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$, donde $X = [1 \ P]$, matriz que incluye una columna de 1's y a la variable independiente. El superíndice T implica transponer la matriz.
2. Predicción: se pronostica si existe observación perdida, utilizando los parámetros estimados:

$$\hat{y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 p_t \quad (2)$$

3. Se actualizan los parámetros estimados todos los periodos, a medida que los vectores P e Y van incorporando nueva información.

4. Se repiten los pasos 2 y 3 durante todos los periodos disponibles.

Método del Valor Medio (MVM)

Se propone una metodología basada en el Criterio del Valor Medio, método de interpolación de Rodríguez et al. (2000). El procedimiento para completar un periodo con observación perdida es el siguiente:

1. Se busca el primer periodo anterior con una observación disponible y se registra su valor. En el caso que el periodo a completar sea el primero en la temporada, se omite este paso.
2. Se busca el primer periodo posterior con una observación disponible y se registra su valor. En el caso que no exista un periodo posterior con observación disponible o que el periodo a completar sea el último de la temporada, se omite este paso.
3. Se promedian los valores registrados en los pasos anteriores (ya sea uno o dos valores, dependiendo de las excepciones).
4. El valor obtenido en el paso 3), se promedia con el disponible para el mismo periodo en la temporada anterior y se obtiene el valor final a rellenar en la serie.

Tabla 1: Par conjugado Poisson - Gamma, para una muestra X . Más pares conjugados en Kvam y Vidakovic 2007, p.53.

Verosimilitud	Probabilidad a Priori	Probabilidad a Posterior
$X \lambda \sim Poisson(\lambda)$	$\lambda \sim Gamma(\alpha, \beta)$	$\lambda X \sim Gamma(\sum_i X_i + \alpha, \beta + 1)$

2.3. Método de Aprendizaje Bayesiano para relleno de series incompletas

2.3.1. Metodología

El proceso de Aprendizaje Bayesiano, consiste en actualizar la distribución de probabilidades de los parámetros de una variable aleatoria de un periodo al siguiente, a medida que se va incorporando nueva información (Ding et al. 2002).

La cantidad demandada, comúnmente se modela como una distribución de Poisson $X \sim Poisson(\lambda)$, debido a que ésta se asocia a la llegada de clientes. Con el fin de simplificar el proceso de actualización, ésta no debería cambiar la forma funcional de la distribución de probabilidades a priori. Al par de distribuciones (de X y su parámetro) que cumple con esta propiedad, se le conoce como par conjugado. Existen muchas instancias univariadas y multivariadas, pero la que interesa en este artículo se muestra en la Tabla 1.

Utilizando pares conjugados, el parámetro λ se modela como una distribución de probabilidades Gamma que depende de dos parámetros cualquiera α y β . Wadhwa (1996),

señala que el efecto del precio en la demanda (p) se debe incluir en la tasa de compra como una función de éste ($\lambda(p)$). Se calcula el valor esperado de la tasa de compra, $E[\lambda(p)]$, como se muestra en la ecuación (3).

$$E[\lambda(p)] = A(t)(1 - F(p|\delta)), \quad (3)$$

donde $F(p|\delta)$ es la función de distribución acumulada de precios de reserva, que es el precio máximo que está dispuesto a pagar un consumidor por un producto, con δ parámetro asociado a la distribución de tal función. $A(t)$ es el número de clientes que acude a comprar en el periodo t . Para asegurar que exista una única solución de la relación anterior, se requiere que $F(p|\delta)$ sea invertible en δ , para todo p . Una distribución que cumple con esto y representa correctamente la relación entre el precio y la demanda, es la función exponencial. Por lo tanto, siguiendo la lógica de Wadhwa (1996), la aplicación de esta metodología requiere de las siguientes consideraciones:

1. Una demanda que distribuye Poisson, con parámetro λ dependiente del precio.
2. Utilizar el par conjugado para una variable con función de verosimilitud Poisson:
 $\lambda \sim \text{Gamma}(a(p), b(p))$, con los parámetros de la distribución Gamma en función del precio.
3. La media de la distribución Gamma es $\frac{a(p)}{b(p)}$, por lo que se obtiene la siguiente relación

para un δ cualquiera, independiente de p .

$$\frac{a(p)}{b(p)} = A(t)(1 - F(p|\delta)) \rightarrow \frac{a(p)}{b(p)} = A(t)e^{-\delta p} \quad (4)$$

4. Se define el cuadrado del coeficiente de variación de una variable X , con distribución Gamma como:

$$S = \left(\frac{\sqrt{\text{Varianza}(X)}}{(\text{Esperanza}(X))} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\left(\frac{a}{b^2}\right)}}{\left(\frac{a}{b}\right)} \right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \right)^2 = \left(\frac{1}{a} \right) \quad (5)$$

Esto permite despejar a para un S cualquiera, independiente de p . Este valor, representa el nivel de incertidumbre del planificador con respecto a la tasa de compra $\lambda(p)$, que se espera no varíe con el precio.

5. Se definen los parámetros δ_0 y S_0 , los que permiten iniciar las iteraciones. Se utilizan los valores $S_0 = 0.5$ y por ende $a_0 = 2$, al igual que en Wadhwa (1996). δ_0 se estimará como el inverso del promedio de precios disponibles en la temporada anterior.

2.3.2. Algoritmo

El algoritmo para rellenar series, basado en las consideraciones anteriores, para t periodos con $t \in [0, T]$ (T , número de periodos que componen a una temporada), se presenta a continuación:

1. Calcular los parámetros a_t y b_t a partir de δ_t , S_t y p_t , mediante las siguientes rela-

ciones:

$$a_t = \frac{1}{S_t} \quad (6)$$

$$b_t = \frac{1}{S_t A(t) e^{-\delta_t p_t}} \quad (7)$$

$A(t)$, se asumirá como la cantidad vendida para el mismo periodo en la temporada anterior, sin embargo, podría definirse como una constante si el planificador así lo desea.

2. Predicción: si el periodo t posee observación perdida, se obtendrá un estimador calculado a partir de los valores esperados de las distribuciones:

$$\hat{\lambda}_t = E[\text{Gamma}(a_t, b_t)] = \frac{a_t}{b_t} \quad (8)$$

$$\hat{x}_t = E[\text{Poisson}(\hat{\lambda})_t] = \hat{\lambda}_t \quad (9)$$

3. Actualización: utilizando pares conjugados (De Groot 1970), se actualizan los parámetros:

$$a_{t+1} = a_t + x_t(p_t) \quad (10)$$

$$b_{t+1} = b_t + 1 \quad (11)$$

$$\delta_{t+1} = - \left(\frac{1}{p_t} \right) \log \left(\frac{a_{t+1}}{A(t) b_{t+1}} \right) \quad (12)$$

$$S_{t+1} = \frac{1}{a_{t+1}} \quad (13)$$

Donde $x_t(p_t)$ es la cantidad demandada (o predicción) en el periodo t para un precio p_t .

4. Repetir los pasos 1), 2) y 3) para el resto de los periodos $t \in [0, T]$.

2.4. Comparación Aprendizaje Bayesiano v/s metodologías tradicionales

Con la finalidad de comparar el desempeño de la metodología de Aprendizaje Bayesiano con las tradicionales, se realizan experimentos siguiendo la lógica del método de Montecarlo.

Para esto, se construyen 1000 series de tiempo de demanda basadas en modelos ARIMA, las que incluyen los efectos de nivel, tendencia y estacionalidad típicos en este tipo de series. Además utilizando el concepto de elasticidad precio demanda, se incluye el efecto del precio en la demanda en las series de tiempo.

La longitud de cada serie será de 104 periodos, de los cuales 52 se utilizarán para entrenar la serie y 52 para eliminar datos y comparar la precisión de los valores rellenados.

El criterio de medición de error que se utilizará es el MAPE (*mean absolute percentage error*), ya que es uno de los métodos más utilizados en la literatura (Armstrong y Collopy, 1992).

2.4.1. Construcción de las series

Para construir las series aleatorias, se toman los siguientes supuestos y consideraciones:

1. Se construye una primera componente de demanda (Q^{ARIMA}) a partir de cuatro modelos distintos $ARIMA(p, d, q)$: $(1,0,1)$, $(1,1,1)$, $(2,0,1)$ y $(1,0,2)$, escogidos de forma que representen comportamientos autoregresivos, de media móvil y de diferenciación, que para efectos de este estudio son suficientes para demostrar lo que se busca.
2. Para construir la componente asociada al efecto del precio (Q^{Precio}), se requiere en primera instancia definir un rango de elasticidad precio-demanda. En la literatura, se señala que en bienes de consumo la elasticidad precio-demanda toma valores entre 0 y -4 (Fisher, Cockburn, Griliches y Hausman 1997; Griffith, I'Anson, Hill, Lubett y Vere 2001; y Durham y Eales 2006), sin embargo, para esta investigación se acota el rango a $(-1; -4)$, por que de esta forma se elimina el comportamiento más elástico.
3. Se requiere también definir una serie de precios, para todos los periodos. P_0 corresponde al precio en el periodo inicial y se define como una variable aleatoria con distribución uniforme, que toma valores entre US\$ 1 y US\$ 100, límites escogidos con el fin de acotar el abanico de posibilidades. El precio para el resto de los periodos se construye en base a P_0 , con el fin de evitar cambios radicales. Estos toman valores entre el precio inicial y el doble de éste.
4. Finalmente, a partir de la definición de elasticidad precio-demanda (ϵ_Q^P), se construye (Q_P):

$$(Q^{Precio}) = Q_{t-1} + \frac{\epsilon_Q^P Q_{t-1} (P_t - P_{t-1})}{P_{t-1}}, \quad (14)$$

el que cumple con las características de efecto precio requeridas: ante una alza de precio éste toma valores más pequeños y ante una baja de precios toma valores más grande. variables (P_t y Q_t representan el precio y la cantidad demandada en el periodo t .

La demanda final para cada periodo t , de los 104 correspondientes a cada serie, se calcula como:

$$Q_t = Q_t^{ARIMA} + Q_t^{Precio}, \quad (15)$$

Se define 45 como el número máximo de datos faltantes, ya que se asume que si no se conoce al menos un dato cada dos meses, en realidad no se tiene conocimiento sobre la serie. El número de datos eliminados aumenta linealmente de 1 a 45 datos entre la serie 1 y la 1000.

2.4.2. Resultados

Relleno de series incompletas

Es fundamental mostrar en primera instancia, como se comporta cada método de relleno para las 1000 series considerando los distintos niveles de observaciones perdidas, con el fin de poder realizar una visión global del desempeño que muestra el AB contra sus competidores.

Para mostrar este comportamiento global, se ilustra en un gráfico de línea el MAPE

de los valores rellenados para todos los casos. En la Figura 1, se muestran los resultados por cada método, a partir de los cuatro modelos ARIMA.

Se puede observar con cierta claridad que para todos los modelos el MAPE de AB es menor al de MVM y al de REG, sin importar el número de observaciones perdidas.

Para comprobar que lo anterior se cumple en el general de las series, se realizan dos pruebas estadísticas t, una para AB y MVM y otra para AB y REG. En éstas, se comparan los MAPE promedio de todas las series para cada grupo de series ARIMA. Las hipótesis nula y alternativa para cada caso son las siguientes: $H_0 : MAPE_{AB} - MAPE_{MVM} \geq 0$ y $H_A : MAPE_{AB} - MAPE_{MVM} < 0$; y $H_0 : MAPE_{AB} - MAPE_{REG} \geq 0$ y $H_A : MAPE_{AB} - MAPE_{REG} < 0$, respectivamente.

La Tabla 2 muestra los valores promedio, las desviaciones estándar y los valores-p de cada prueba. Se puede ver que al comparar las medias de los errores entre AB y MVM existe para todos los ARIMA evidencia estadística al 5% que AB es menor, rechazando la hipótesis nula. Al comparar los MAPE de AB con los de REG, existe evidencia estadística al 10% de significancia de que $MAPE_{AB}$ es menor para los modelos ARIMA(1,0,1), ARIMA(2,0,1) y ARIMA(1,0,2).

Incidencia de un aumento en la escasez de datos

En esta sección, se estudia el impacto de un aumento en la cantidad de observaciones perdidas. Se espera, que ha medida que aumenta el número de observaciones perdidas, la

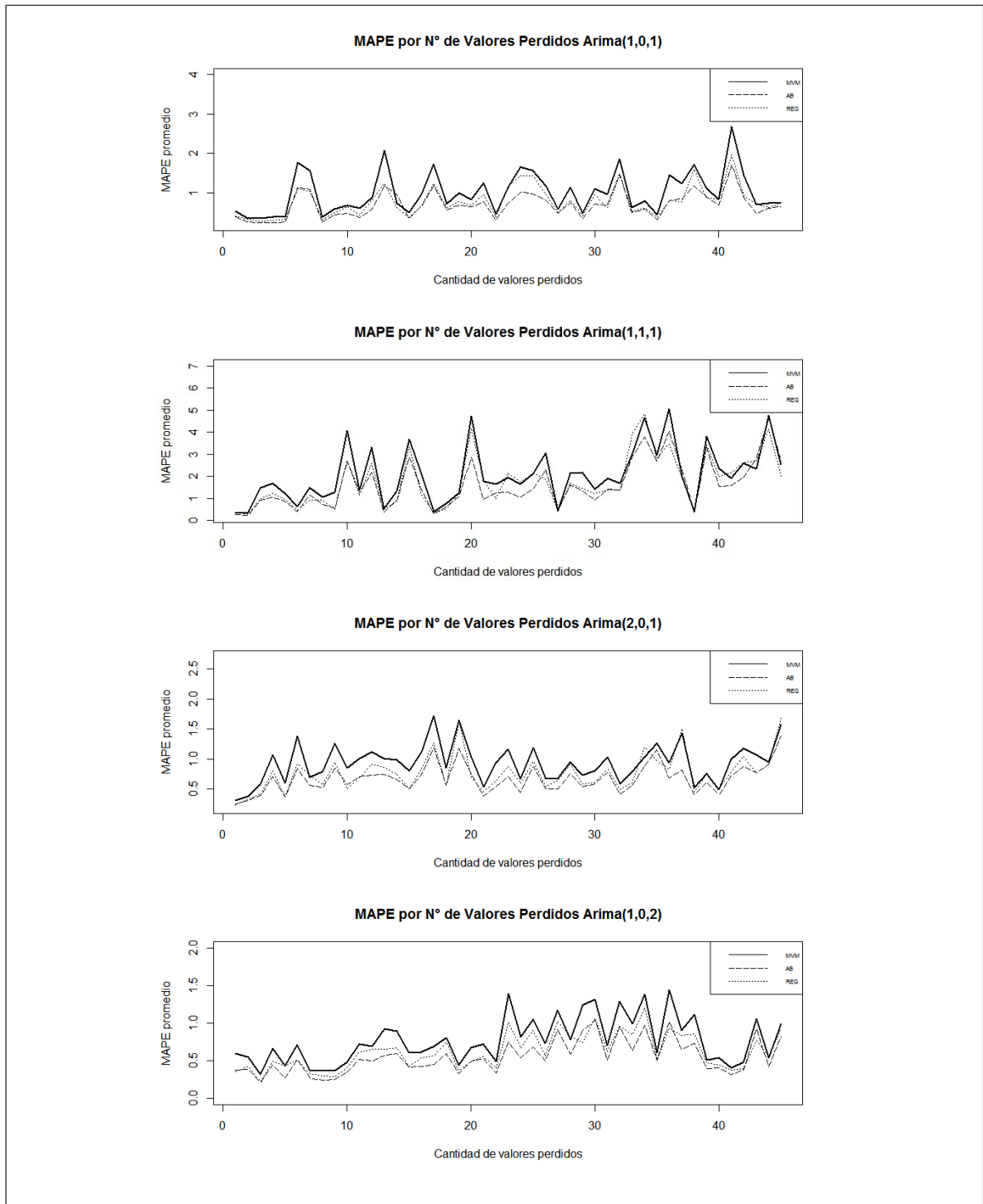


Figura 1: MAPE de series rellenadas para cada grupo ARIMA con elasticidad variable.

Tabla 2: MAPE promedio, desviaciones estándar y valores-p de pruebas t para medir significancia al comparar MAPE entre Aprendizaje Bayesiano y los demás métodos.

Modelo	Método	Promedio	Desviación Estandar	Valor-p
Arima (1,0,1)	MVM	0,95	1,99	<0,01
	REG	0,76	1,48	0,08
	AB	0,67	1,27	-
Arima (1,1,1)	MVM	2,03	5,29	0,02
	REG	1,74	4,45	0,22
	AB	1,59	3,99	-
Arima (2,0,1)	MVM	0,94	1,77	<0,01
	REG	0,77	1,49	0,05
	AB	0,67	1,24	-
Arima (1,0,2)	MVM	0,77	1,45	<0,01
	REG	0,62	1,13	0,07
	AB	0,55	1,02	-

información disponible para la actualización o aprendizaje de los métodos disminuye, por lo que el error debiera crecer.

A simple vista, en la Figura 1 se observa que existe una leve tendencia a aumentar los MAPE promedio a medida que el número de datos perdidos crece. Para comprobar estadísticamente esto, se realiza una comparación mediante una prueba t entre las medias de MAPE de las series que poseen entre 1 y 10 observaciones perdidas ($MAPE^{1-10}$) con aquellas que tienen entre 35 y 45 datos perdidos ($MAPE^{35-45}$). La hipótesis nula y alternativa son las siguientes: $H_0 : MAPE_j^{35-45} - MAPE_j^{1-10} \leq 0$ y $H_A : MAPE_j^{35-45} - MAPE_j^{1-10} > 0$, para $j = AB, MVM$ y REG .

La Tabla 3 muestra los resultados de este experimento, en los cuales se evidencia que existe una clara significancia estadística de que los MAPE crecen al aumentar el número de observaciones perdidas, rechazando la hipótesis nula en todos los casos.

Ejemplo gráfico de relleno

La intención de esta sección, es ilustrar como va completando el método de AB una serie incompleta de un caso particular, presentado en la Figura 2.

Se observa, que en general el método presenta un buen rendimiento y se ajusta cada vez con mayor precisión a medida que va actualizando sus parámetros con las nuevas observaciones.

Tabla 3: MAPE promedio (desviaciones estándar entre paréntesis) y valores-p de prueba t, para medir significancia al comparar errores entre series de distintos intervalos de observaciones perdidas.

Modelo	Método	$MAPE^{1-10}$ (SD)	$MAPE^{35-45}$ (SD)	Valor-p
Arima (1,0,1)	MVM	0,68 (1,40)	1,17 (2,53)	<0,01
	REG	0,51 (0,91)	0,93 (1,79)	<0,01
	AB	0,46 (0,91)	0,82 (1,57)	<0,01
Arima (1,1,1)	MVM	1,27 (4,01)	2,73 (5,81)	<0,01
	REG	0,94 (2,59)	2,38 (4,90)	<0,01
	AB	0,90 (2,83)	2,44 (5,16)	<0,01
Arima (2,0,1)	MVM	0,79 (1,80)	0,97 (1,63)	0,10
	REG	0,58 (1,22)	0,91 (1,63)	<0,01
	AB	0,54 (1,21)	0,74 (1,28)	0,03
Arima (1,0,2)	MVM	0,51 (0,70)	0,79 (1,58)	<0,01
	REG	0,39 (0,48)	0,65 (1,13)	<0,01
	AB	0,34 (0,49)	0,59 (0,49)	<0,01

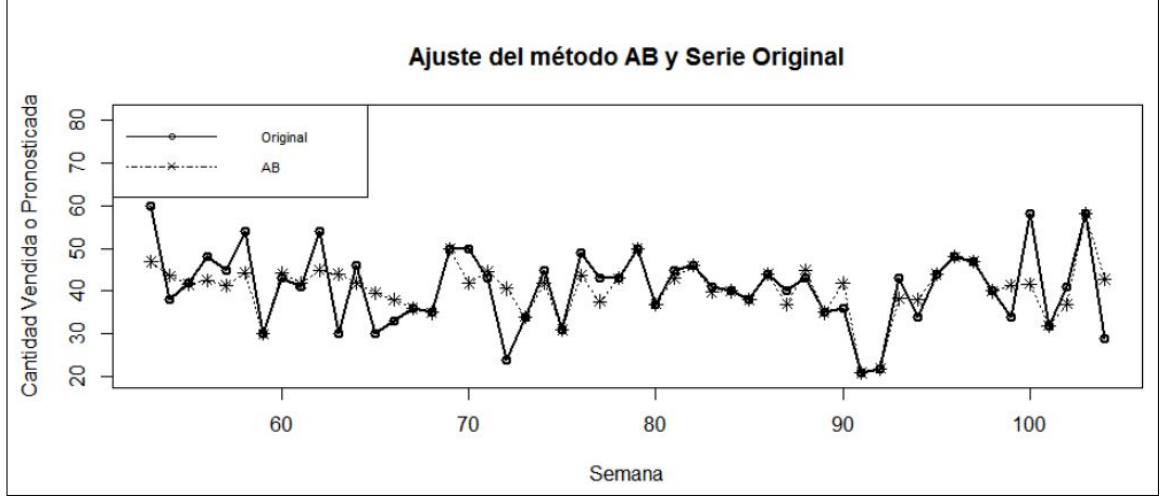


Figura 2: Serie original y ajuste AB de las últimas 52 semanas de una serie incompleta particular (ARIMA(1,0,2), 29 observaciones perdidas).

2.5. Conclusiones y extensiones

Se puede concluir en primera instancia, que el método de relleno de series incompletas basado en el Aprendizaje Bayesiano, es una alternativa competitiva al comparar su rendimiento con otras metodologías tradicionales, sin importar la cantidad de observaciones perdidas. Comparando el MAPE obtenido por Aprendizaje Bayesiano con los errores obtenidos mediante el uso del método del Valor Medio, existe evidencia estadística al 5 % de que $MAPE_{AB} < MAPE_{MVM}$ y al comparar $MAPE_{AB}$ con $MAPE_{REG}$, se observa significancia estadística al 10 % de que los errores asociados al método de Aprendizaje Bayesiano son menores, sólo para las series pertenecientes a los modelos ARIMA(1,0,1), ARIMA(2,0,1) y ARIMA(1,0,2).

Se demuestra además, que a medida que crece el número de observaciones perdidas en la serie, el MAPE promedio entre los valores rellenados por cada método y los de la serie original aumenta, lo que es consecuente con la teoría.

Algunas líneas de investigación futura que nacen a partir de este trabajo, se discuten a continuación. En esta investigación, se ha asumido que se conoce al menos un dato del mismo periodo para alguna temporada anterior, lo cual podría generalizarse. Además, existe en la literatura otro método bastante utilizado para predecir valores no observables, pero muy complejo en su formulación, los Filtros de Kalman. Sin embargo, no se encontró en la literatura un ejemplo claro de éste en relleno de series de venta, por lo que representa un campo digno de revisar con el fin de comparar su rendimiento con el del Aprendizaje Bayesiano. Por último, se han adoptado ciertas distribuciones estocásticas en las variables asociadas a AB, por lo que sería interesante analizar qué ocurre al cambiar la naturaleza de la distribución o generalizar ésta.

Referencias

AUCREMANNE, L. y DHYNE, D. (2004). How frequently do prices change? Evidence based on the micro data underlying the Belgian CPI. *Working Paper Research 44, National Bank of Belgium*.

BAHMANI-OSKOOEE, M. y BROWN, F. (2004). Kalman Filter Approach to Estimate the Demand for International Reserves. *Applied Economics*, 36(15), 1655-1668.

BARRERA, A. (2004). *Técnicas de Completado de Series Mensuales y Aplicación al Estudio de la Influencia de la NAO en la Distribución de la Precipitación en España*. San Francisco, Holden-Day.

BOX, G.E. y JENKINS, G. M. (1970). *Time Series Analysis, Forecasting and Control*. San Francisco, Holden-Day.

DE GROOT, M. H. (1970). *Optimal Statistical Decisions*. New York: McGraw-Hill.

DING, X., PUTERMAN, M. L. y BISI, A. (2002). The Censored Newsvendor and the Optimal Acquisition of Information. *Operations Research*, 50(3), 517-527.

DURHAM, C. y EALES, J. (2006). *Demand Elasticities for Fresh Fruit at the Retail Level*. Funding from the Northwest Multicommodity Marketing Research Special Grant.

- FISHER, S., COCKBURN, I., GRILICHES, Z. y HAUSMAN, J. (1997). Characteristics of Demand for Pharmaceutical Products: An Examination of Four Cephalosporins. *The RAND Journal of Economics*, 28(3), 426–446.
- GONZÁLEZ, M. P. (2009). *Técnicas de Predicción. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales*. España, Universidad del País Vasco.
- GREEN, W. H. (2003). *Econometric Analysis*. USA: New York. Prentice Hall.
- GRIFFITH, G.R., I'ANSON, K., HILL, D.J., LUBETT, R. y VERE, D.T. (2001). Previous Demand Elasticity Estimates for Australian Meat Products. *Economic Research Report*, 5.
- GUJARATI, D. (2004). *Econometría Básica*. México. McGraw-Hill inc.
- HOCH, S. J., KIM, B., MONTGOMERY, A. L. y ROSSI, P. E. (1995). Determinants of Store-Level Price. *Journal of Marketing*, 32(1), 17-29.
- HOLT, C. C. (1957). *Forecasting Seasonals and Trends by Exponentially Weighted Moving Averages*. Pittsburgh, Penn.: Carnegie Institute of Technology.
- KALMAN, R. E. (1960). A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Journal of Basic Engineering*, 81, 35-45.
- KIHORO, J. (2013). Imputation of Incomplete Non-Stationary Seasonal Time Series Data *International Institute for Science, Technology Education*, 3(12), 142-154.

KVAM, P. y VIDA KOVIC, B. (2007) *Nonparametric Statistics with Applications to Science and Engineering*. Wiley-Interscience.

MERSEREAU, D. J. (2012). Demand Estimation from Censored Observations with Inventory Record Inaccuracy. Research Paper in Process.

PINDYCK, R. S. y RUBINFELD, D. L. (1998). *Econometric Models and Economic Forecasts*. Capítulo 8. McGraw Hill, Inc.

RODRÍGUEZ, R., LLASAT, M. C y MARTÍN-VIDE, J. (2000). *Análisis de Series Temporales en Climatología: Modelización y Homogeneidad*. Edicions de la Universitat de Barcelona, Textos Docents 165. Barcelona.

RUUD, P. (2000). *An Introduction to Classical Econometric Theory*. USA: Oxford University Press.

SHEUNG CHI FUNG, D. (2006). *Methods for the Estimation of Missing Values in Time Series*. Edith Cowan University. Perth, Western Australia.

VIDA KOVIC, B. y KVAM, P. H. (2007). *Nonparametric Statistics with Applications to Science and Engineering*. New Jersey: John Wiley Sons, Inc.

WADHWA, H. K. (1996). *Models for Pricing and Inventory Management of Seasonal Products*. Doctoral Dissertation, MIT Sloan School of Management, MIT, Cambridge, MA.

WADUD, Z. (2004). Modeling and Forecasting Passenger Demand for a New Domestic Airport with Limited Data. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, 2214(1), 59-68.

WINTERS, P. (1960). Forecasting Sales by Exponentially Weighted Moving Averages. , 2214(1), *Management Science*, 6(3), 324-342.

WRIGHT, D. J. (1986). Forecasting Data Published at Irregular Time Intervals Using Extension of Holt's Method. *Management Science*, 32, 499-510.

3. Inclusión de la Variable Precio en Pronósticos de Demanda por Atenuación Exponencial

3.1. Introducción

Las predicciones de demanda son la base para la planificación estratégica y financiera de la cadena de suministro en una compañía, por lo que las empresas invierten cuantiosas sumas de dinero para obtener pronósticos con la mayor precisión posible. Esto ha llevado a que distintos investigadores a lo largo de la historia hayan abordado este problema, generando múltiples modelos de pronósticos. Entre los diversos métodos de predicción, los modelos de atenuación exponencial se han vuelto muy populares con el tiempo, debido a la baja complejidad en su aplicación y a que son auto-explicados, ya que la única información

que incorporan es la historia de venta (Maia y Carvalho 2010).

A fines de la década de los 50, los autores Holt y Winters formularon modelos de pronósticos basados en atenuación exponencial ponderada, explicando los efectos de nivel, tendencia y estacionalidad presentes en las series de tiempo (Holt 1957; Winters 1960). Desde su formulación a la fecha, estos modelos han sido analizados y modificados por muchos autores (Trigg y Leach 1967; Chatfield 1975; Gardner y McKenzie 1985; Wright 1986; Hyndman, Koehler, Snyder y Grose 2002; Maia y Carvalho 2010). Sin embargo, no se encontró ninguna investigación que haya incorporado el efecto del precio en las predicciones de demanda por atenuación exponencial.

El efecto del precio, conocido económicamente como elasticidad precio-demanda, es un indicador de gran interés para los planificadores al momento de tomar decisiones estratégicas y tácticas. Esto debido a que ante una demanda de comportamiento elástico, un cambio de precio puede ocasionar una variación significativa en las unidades demandadas, siendo fundamental que las predicciones incorporen el precio y así aprovechen esta información. La elasticidad precio-demanda de un producto es un indicador no controlable, ya que depende de factores asociados a las características del mercado (Bolton 1989a; Bijmolt, Van Heerde y Pieters 2005).

A través de este artículo se entregan alternativas para incluir el efecto del precio en el modelo de atenuación exponencial, se demuestra que estas alternativas mejoran la precisión de los pronósticos en series de demanda elástica y se evidencia que el método

de Holt-Winters con efecto precio es competitivo frente a otros métodos tradicionales de pronósticos, como la regresión, la media móvil y el método autoregresivo (AR).

El artículo está estructurado de manera que en la Sección 2 se muestra la construcción de los modelos de atenuación exponencial y las formas de relacionar el precio y la demanda. En la Sección 3, se presentan las alternativas para incorporar el efecto precio en el método tradicional y el algoritmo de predicción. En la Sección 4, se compara el desempeño del método Holt-Winters tradicional v/s los métodos de Holt-Winters con efecto precio propuestos en este trabajo. En la Sección 5, se realiza una aplicación a series reales de una importante empresa de alimentos Chilena, con el fin de medir su desempeño frente a las metodologías de pronósticos que actualmente usa la empresa. Se termina el artículo con las conclusiones y extensiones en la Sección 6.

3.2. Modelo de Atenuación Exponencial y Relación Precio-Demanda

La atenuación exponencial es un método clásico de descomposición que comprende tres etapas en las que se atenúan los siguientes efectos: 1) nivel, 2) tendencia y 3) estacionalidad. Con el resultado de estas tres etapas, se realiza finalmente la predicción. Para su operación, Holt-Winters requiere: 1) definir la extensión de una temporada (por ejemplo, un año) y de los periodos que la componen (por ejemplo, 52 semanas), 2) decidir un punto de partida y 3) iterar periodo a periodo, a partir del punto de partida definido, calculando nuevos pesos para cada efecto.

3.2.1. Construcción del modelo de atenuación exponencial de Holt y Winters

El método de atenuación exponencial original fue desarrollado por Brown (1956), para ser utilizado en gestión de inventario. El pronóstico se basa en una media móvil ponderada:

$$W_{t+1} = \alpha A_t + (1 - \alpha)W_t, \quad (16)$$

donde α es el ponderador, A_t representa el valor real de la serie en el período t , con $t = 1, 2, \dots, N$, y donde N es el número de periodos consecutivos para los que se tiene información sobre las ventas. Finalmente W_{t+1} , corresponde al pronóstico para el periodo $t + 1$.

Para incorporar los efectos de nivel (S_t), tendencia (T_t) y estacionalidad (I_t) a (1) Holt (1957) y Winters (1960), ponderan los valores de estas variables en el periodo anterior por una estimación del efecto en el periodo actual, con la intención de descomponer la demanda en cada uno de estos efectos (Williams 1987). Esto se expresa como:

$$S_t = \alpha \frac{A_t}{I_{t-L}} + (1 - \alpha)(S_{t-1} + T_{t-1}), \quad (17)$$

$$T_t = \beta(S_t - S_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1}, \quad (18)$$

$$I_t = \gamma \frac{A_t}{S_t} + (1 - \gamma)I_{t-L}, \quad (19)$$

donde α , β y γ son los coeficientes de atenuación asociados a los efectos nivel, tendencia y estacionalidad, respectivamente, cuyo valor está entre 0 y 1. L es el número de periodos

que compone una temporada y I_{t-L} corresponde al índice de estacionalidad del mismo periodo en la temporada anterior.

Dado lo anterior, el pronóstico se obtiene como la composición de todos los efectos y es:

$$W_{t+1} = (T_t + S_t)I_{t-L}, \quad (20)$$

Para la obtención de los coeficientes de atenuación, en la literatura se describen dos alternativas: 1) modelos fijos (no adaptativos) y 2) modelos adaptativos. Los fijos, estiman una vez α , β y γ , y luego mantienen constantes estos valores para el resto de los periodos; y los adaptativos, actualizan estos valores a medida que pasa el tiempo (Williams 1987).

Mentzer (1988), señala que el uso de modelos adaptativos resulta ser la forma más adecuada de trabajar con series que poseen efectos de nivel, tendencia y estacionalidad, fluctuantes a lo largo del tiempo. Como en este artículo se utilizará información de venta de bienes de consumo, que presentan comportamientos variables en el tiempo, se escogen modelos adaptativos para su tratamiento. Para la actualización de los parámetros, se usa la metodología de minimización de la suma de errores cuadráticos medios, por sobre otros criterios disponibles (Granger y Newbold 1974; Paul 2011).

Tabla 4: Formas funcionales típicas para relacionar el precio y la cantidad demandada.

Modelo	Formulación Matemática	Interpretación
Lineal	$Q = bP + a$	Un cambio en una unidad de P genera uno de b unidades en Q
Poder	$Q = aP^b$	Un 1 % de variación en P implica un cambio de b % en Q
Log-Lineal	$\log(Q) = a + bP$	Un cambio en una unidad de P genera uno de 100 % en Q
Lineal-Log	$Q = a + b \log(P)$	Un 1 % de variación en P implica un 0,01b cambio en Q

3.2.2. Relación precio-demanda

En la literatura se documentan distintas formas de incorporar el efecto del precio (P) en la cantidad demandada (Q). La más básica consiste en considerar que la relación entre el precio y la demanda es lineal. Sin embargo, en la práctica existen otras alternativas que implican por ejemplo transformar una o ambas variables en sus formas logarítmicas o utilizar potencias, como se muestra en la Tabla 1 (Gujarati 2004; Wilkinson 2005).

Tal como se observa en la Tabla 4, la variable precio (P) puede incluirse de forma directa. Sin embargo, no necesariamente debe incluirse de esta manera, ya que si se considera que los individuos compran basados en un precio de referencia, que en productos de precio variable podría representarse como el último precio observado por el consumidor (Fibich, Gavious y Lowengart 2005), se puede incorporar como una proporción del cambio de precio ($\frac{P_t}{P_{t-1}}$) o su variación porcentual ($\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$).

3.3. Incorporación del efecto precio al método Holt-Winters

Con todo lo anterior, estamos en condiciones de construir un modelo de Holt-Winters que incorpore el efecto del precio. Para esto, se calcula un índice de precios (IP_t) a través de una etapa extra en el algoritmo original, ejecutada previa a la atenuación del nivel. La incorporación de esta etapa sigue la lógica de las etapas de los demás factores, ponderando el valor del índice de precios en el periodo anterior por una estimación del efecto en el periodo actual.

3.3.1. Alternativas de efecto precio

Se formulan 5 alternativas para la etapa de atenuación del índice de precios. Estas alternativas están basadas en algunas de las relaciones precio-demanda presentadas en la Tabla 4 y en el concepto de precio de referencia. Para la construcción de los modelos se define P_t como el precio del producto en el periodo t , C como una constante libre, ϵ representa un parámetro de sensibilidad del precio a la demanda y δ como una constante de atenuación que toma valores entre 0 y 1. Los modelos de efecto precio construidos son:

HWP1: modelo log-lineal con precio de referencia

$$IP_t = \delta C e^{\epsilon \left(1 + \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}\right)} + (1 - \delta) IP_{t-1} \quad (21)$$

En este modelo se incluye el concepto de precio de referencia como variación porcentual. Se adiciona una unidad a la variación porcentual, debido a que generalmente ϵ al

ser un parámetro de sensibilidad del precio a la demanda, toma valores negativos y de esta forma ante una variación positiva del precio ($P_t - P_{t-1} > 0$), el índice tiende a ser más pequeño (lo que se condice con la teoría).

HWP2: modelo log-lineal sin precio de referencia

$$IP_t = \delta C e^{\epsilon P_t} + (1 - \delta) IP_{t-1} \quad (22)$$

El modelo HWP2 sigue la lógica del modelo HWP1, sin incluir el concepto de precio de referencia. Al no usar el concepto de precio de referencia, no se captura en el índice los cambios de precio entre un periodo y otro, lo que en series elásticas puede afectar considerablemente a la cantidad demandada, por lo que implica una cierta desventaja en productos con este comportamiento.

HWP3: modelo de poder con precio de referencia

$$IP_t = \delta C \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right)^\epsilon + (1 - \delta) IP_{t-1} \quad (23)$$

Este es un modelo de elasticidad constante, desempeñándose mejor en situaciones donde la elasticidad no varía considerablemente con el tiempo. Incluye el concepto de precio de referencia como proporción.

HWP4: modelo de poder sin precio de referencia

$$IP_t = \delta C (P_t)^\epsilon + (1 - \delta) IP_{t-1} \quad (24)$$

Este modelo sigue la lógica del HWP3, pero no incluye el precio de referencia. Al igual que HWP2, tendrá una leve desventaja al ser utilizado en series elásticas.

HWP5: modelo lin-log sin precio de referencia

$$IP_t = \delta C(1 + \ln(P_t))^\epsilon + (1 - \delta)IP_{t-1} \quad (25)$$

Este modelo posee la particularidad que la variación de Q con respecto a un cambio P es menor que en las demás alternativas, debido a que el precio está en su forma logarítmica. Se adiciona una unidad a la expresión asociada al precio $(1 + \ln(P_t))$, para evitar que tome valores negativos y ante una alza de precio el índice disminuya su valor.

3.3.2. Algoritmo Holt-Winters con efecto precio

Luego de presentar las alternativas para la etapa de atenuación del índice de precios, se señala como se ejecuta el resto del algoritmo al incluir este efecto.

Para comenzar, es importante quitar el efecto del precio en la demanda para ejecutar una correcta atenuación de cada factor, siguiendo la lógica de HW. Esto debido a que en series elásticas, una variación del precio impacta en la demanda. Para suprimir el efecto del precio en las atenuaciones de nivel e índice de estacionalidad, estas incluirán en su formulación a la demanda descompuesta por el índice de precios, lo que se expresa como:

$$\frac{A_t}{IP_t}.$$

Las ecuaciones (26) y (27), muestran las etapas de atenuación de nivel e índice de

estacionalidad, incluyendo la demanda descompuesta por el índice de precios.

$$S_t = \alpha \frac{A_t}{I_{t-L}IP_t} + (1 - \alpha)(S_{t-1} + T_{t-1}) \quad (26)$$

$$I_t = \gamma \frac{A_t}{S_tIP_t} + (1 - \gamma)I_{t-L} \quad (27)$$

La etapa de atenuación de la tendencia, se mantiene tal cómo en HW tradicional (ecuación (18)). En consecuencia, el algoritmo HWP se compone de 4 etapas de atenuación: 1) índice de precios, 2) nivel, 3) tendencia y 4) estacionalidad. De esta manera el pronóstico se obtiene como:

$$W_t = (T_t + S_t)I_{t-L}IP_t \quad (28)$$

Al ser el método HWP un algoritmo recursivo, requiere inicializar cada efecto para comenzar las iteraciones. Se considera para éste trabajo lo presentado por Chatfield (1975 y 1978) para obtener el valor inicial de los efectos de nivel, tendencia y estacionalidad. Respecto a la inicialización del precio P_0 se propone en este documento, calcular el promedio de precios en la temporada anterior a la que se aplica el método de pronósticos o utilizar el precio inmediatamente anterior al periodo en el que comienzan las iteraciones.

3.4. Comparación HW Precio v/s HW tradicional

Con la finalidad de comparar el desempeño de la metodología HW precio (HWP) con HW tradicional en series elásticas, se realizan experimentos siguiendo la lógica del método de Montecarlo.

Para esto, es necesario construir series que cumplan con ser una serie de tiempo (y poseer por tanto efectos de nivel, tendencia y estacionalidad) y con incluir el efecto del precio. Las series tendrán una longitud de 114 periodos cada una, de los cuales 104 serán para entrenar la serie y 10 para comparar la precisión de los pronósticos.

El criterio de medición de error utilizado es el MAPE (*mean absolute percentage error*), ya que es uno de los métodos más utilizados en la literatura (Armstrong y Collopy, 1992).

3.4.1. Construcción de las series aleatorias

Para construir las series aleatorias, se toman los siguientes supuestos y consideraciones:

1. Se construye una primera componente de demanda (Q^{ARIMA}) a partir de cuatro modelos distintos $ARIMA(p, d, q)$: $(1,0,1)$, $(1,1,1)$, $(2,0,1)$ y $(1,0,2)$, escogidos de forma que representen comportamientos autoregresivos, de media móvil y de diferenciación, que para efectos de este estudio son suficientes para demostrar lo que se busca.
2. Para construir la componente asociada al efecto del precio (Q_{Precio}), se requiere en primera instancia definir un rango de elasticidad precio-demanda. En la literatura, se señala que en bienes de consumo la elasticidad precio-demanda toma valores entre 0 y -4 (Fisher, Cockburn, Griliches y Hausman 1997; Griffith, I'Anson, Hill, Lubett y

Vere 2001; y Durham y Eales 2006), sin embargo, para esta investigación se acota el rango a $(-1; -4)$, por que de esta forma se elimina el comportamiento más elástico.

3. Se requiere también definir una serie de precios, para todos los periodos. P_0 corresponde al precio en el periodo inicial y se define como una variable aleatoria con distribución uniforme, que toma valores entre US\$ 1 y US\$ 100, límites escogidos con el fin de acotar el abanico de posibilidades. El precio para el resto de los periodos se construye en base a P_0 , con el fin de evitar cambios radicales. Estos toman valores entre el precio inicial y el doble de éste.
4. Finalmente, a partir de la definición de elasticidad precio-demanda (ϵ_Q^P), se construye (Q_P):

$$Q^{Precio} = Q_{t-1} + \frac{\epsilon_Q^P Q_{t-1} (P_t - P_{t-1})}{P_{t-1}}, \quad (29)$$

el que cumple con las características de efecto precio requeridas: ante una alza de precio éste toma valores más pequeños y ante una baja de precios toma valores más grande. Las variables P_t y Q_t representan el precio y la cantidad demandada en el periodo t .

La demanda final para cada periodo t , de los 114 correspondientes a cada serie, se calcula como:

$$Q_t = Q_t^{ARIMA} + Q_t^{Precio}, \quad (30)$$

3.4.2. Resultados

Para realizar la comparación entre HWP y HW, se diseñan tres experimentos que consisten en: 1) analizar la incidencia del uso de HWP por sobre HW en series elásticas, 2) observar el impacto que tiene un aumento de la elasticidad de las series en el rendimiento de HWP y, 3) analizar el impacto que tiene un cambio en la magnitud del factor precio en la precisión de las predicciones de HWP.

Incidencia del uso de HWP por sobre HW en la precisión de los pronósticos

Es fundamental verificar en primera instancia que para series elásticas, o con efecto precio, el HWP permite obtener pronósticos de menor MAPE que el HW tradicional. Para esto, se realiza un análisis estadístico comparando el rendimiento de ambas metodologías en 1000 series aleatorias para cada modelo ARIMA con efecto precio y elasticidad igual a -1 (caso límite dentro del rango definido en la sección anterior). Se escoge esta elasticidad, con la finalidad de observar como se comporta el método HWP en el caso más desfavorable (se espera que al ser menos elástico la incidencia del precio sea menor).

Para el análisis de los resultados, se utiliza una prueba t de Student para evaluar si existe una diferencia estadísticamente significativa en la media de los MAPE entre HWP_j ($j = 1, \dots, 5$) y HW, esperando que el MAPE del primero sea menor. La hipótesis nula y alternativa son las siguientes: $H_0 : MAPE_{HWP_j} - MAPE_{HW} \geq 0$; y $H_A : MAPE_{HWP_j} - MAPE_{HW} < 0$.

Tabla 5: Comparación de Diferencias de MAPE entre las 5 alternativas de HWP y el método tradicional y desviación estándar (entre paréntesis).

	HWP1	HWP2	HWP3	HWP4	HWP5
ARIMA(1,0,1)	-0,075 (0,029)	-0,033 (0,019)	-0,056 (0,025)	-0,030 (0,017)	-0,028 (0,016)
ARIMA(1,1,1)	-0,107 (0,021)	-0,047 (0,026)	-0,075 (0,018)	-0,041 (0,017)	-0,037 (0,015)
ARIMA(1,0,2)	-0,079 (0,018)	-0,033 (0,024)	-0,060 (0,017)	-0,030 (0,015)	-0,028 (0,015)
ARIMA(2,0,1)	-0,125 (0,018)	-0,055 (0,026)	-0,089 (0,016)	-0,051 (0,014)	-0,049 (0,015)

En la Tabla 5, se presentan las medias de las diferencias de MAPE entre HWP y HW. Los resultados muestran que siempre HWP obtiene menores MAPE que HW, lo que se traduce en valores negativos de $\Delta MAPE$ ($\Delta MAPE = MAPE_{HWP_j} - MAPE_{HW}$, $j = 1, \dots, 5$). Para todos los grupos de series ARIMA, se rechaza la hipótesis nula al 1 % de nivel, por lo que existe una evidente significancia estadística en este experimento.

En relación al rendimiento de cada alternativa, se destacan HWP1 y HWP3 por sobre las demás, por ser las que alcanzan menor MAPE en los pronósticos. HWP1 logra mejoras de hasta un 12 % en MAPE en relación a HW.

Impacto del cambio de elasticidad en el desempeño de HWP

Al aumentar la elasticidad de las series la variabilidad de la venta aumenta, por lo que se espera que las predicciones de HW y HWP empeoren, sin embargo, una mayor elasticidad implica una mayor incidencia del efecto precio en la venta, por lo que se quiere verificar que ante un aumento de elasticidad la diferencia entre los MAPE de las predicciones de

HWP y HW también aumente.

Para probar lo anterior, se ejecuta una simulación para 1000 series en la que la elasticidad precio-demanda disminuye linealmente de -1 a -4 desde la serie 1 a la 1000.

Los resultados del experimento se muestran en un gráfico de caja en la Figura 3. El que incluye la diferencia de MAPE (ΔMAPE) en particular para HWP1 (alternativa de mejor rendimiento) y cada grupo de series ARIMA. Para efectos visuales se agruparon las series en 10 rangos de elasticidad, de 0,3 de largo, comenzando en $(-1, 0; -1, 3)$ y terminando en $(-3, 7; -4, 0)$. Se observa por ejemplo en el gráfico (a), como a medida que se pasa del rango 1 al 10 la dispersión de la serie y la media de las diferencias de MAPE aumentan, tal como se esperaba. Este efecto se replica igualmente para el resto de los gráficos y también para las demás alternativas HWP en todos los modelos ARIMA. Se muestra por ejemplo el gráfico de caja de las cuatro alternativas restantes para el modelo $\text{ARIMA}(1, 0, 1)$ en la Figura 4.

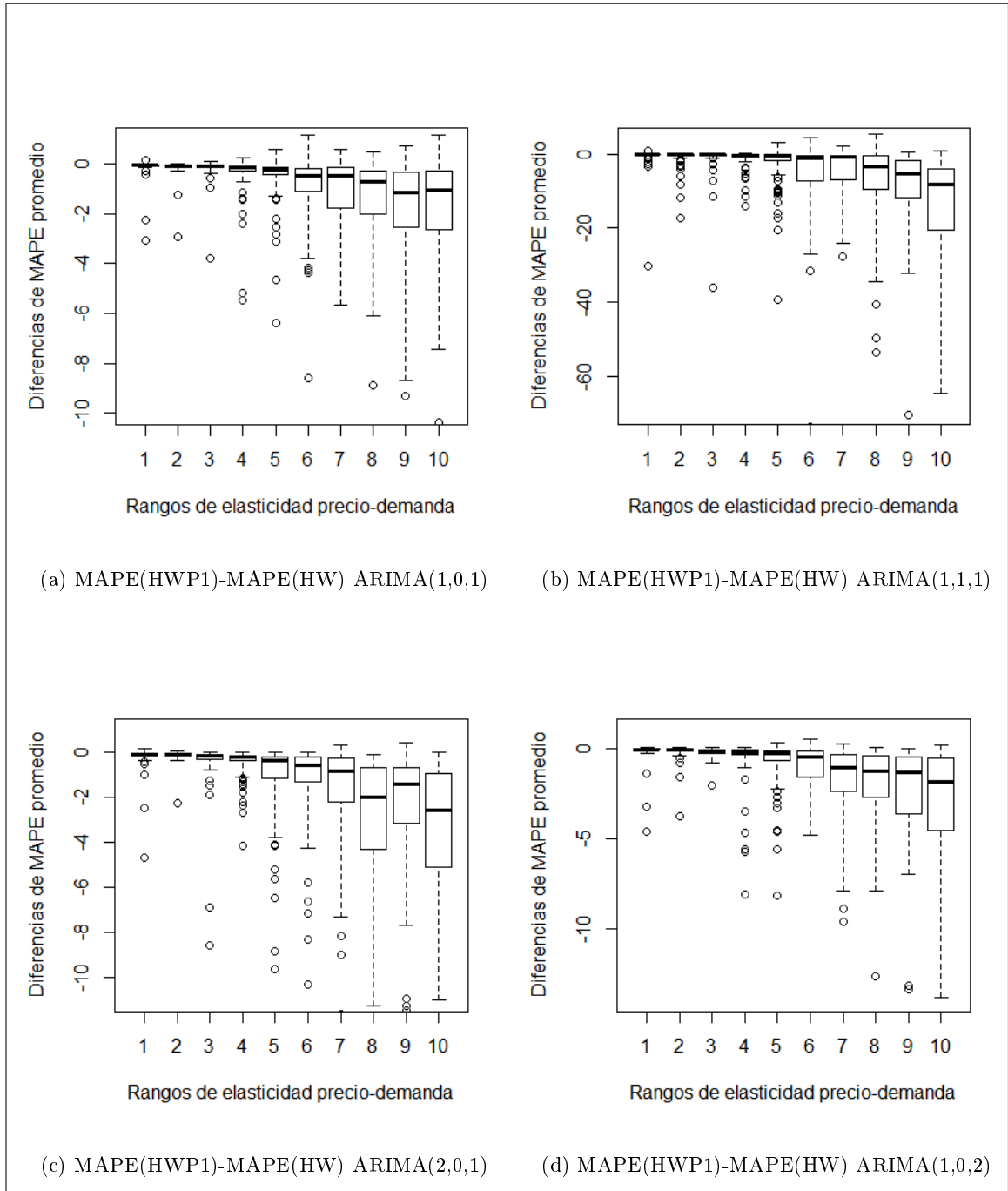


Figura 3: Diferencias de MAPE de HWP1 con respecto a HW para cada grupo de series ARIMA con elasticidad variable.

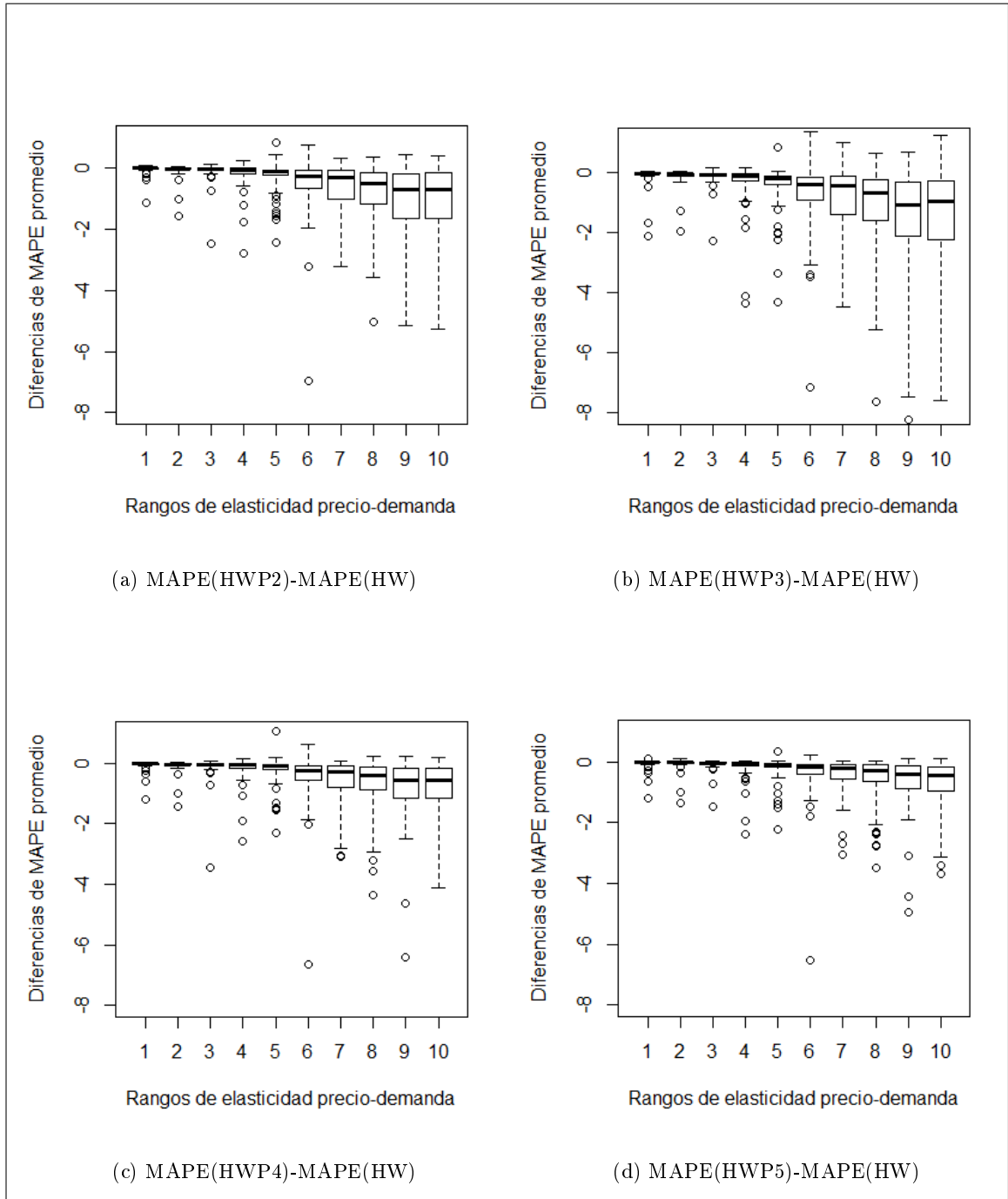


Figura 4: Diferencias de MAPE de HWP2 a HWP5 con respecto a HW para series ARI-MA(1,0,1) con elasticidad variable.

Por último, se realiza una prueba estadística en la que se comparan las medias de las diferencias de MAPE entre el grupo de 10 y el 1 para cada HWP para todos los grupos de series ARIMA. La hipótesis nula y alternativa son las siguientes: $H_0 : \Delta MAPE_{HWP_j}^{10} - \Delta MAPE_{HWP_j}^1 \geq 0$; y $H_A : \Delta MAPE_{HWP_j}^{10} - \Delta MAPE_{HWP_j}^1 < 0$. En todos los casos se rechaza la hipótesis nula al 1 % de significancia, por lo que existe evidencia estadística de que al aumentar la elasticidad crece la diferencia entre HWP y HW.

Incidencia del cambio en la magnitud del factor precio en el rendimiento de HWP

A medida que decrece el efecto precio en las series de tiempo, se espera que los errores de los pronósticos para HWP y HW se vayan acercando a los mismos valores. Es pertinente probar que este comportamiento se cumple para todas las formas de efecto precio consideradas en este trabajo.

Para esto, se construyen 1000 series aleatorias. Se fija la elasticidad de las series simuladas en -1 , pero Q_t^{Precio} que genera el efecto del precio en las series aleatorias, se multiplica por un ponderador que toma valores de 1 a 0.1, disminuyendo linealmente en intervalos de 0.1 cada 100 series, desde la serie 1 a la 1000.

Observando las diferencias de MAPE promedio en los gráficos de caja para las series ARIMA(2, 0, 1) de la Figura 5, se evidencia el efecto descrito. Por ejemplo, en el gráfico (c) las diferencias de MAPE para el ponderador 0,1 son muy cercanas a 0 y para el ponderador 0,9 superan el 0,05. Este comportamiento se replica también para las series del resto de los

modelos ARIMA.

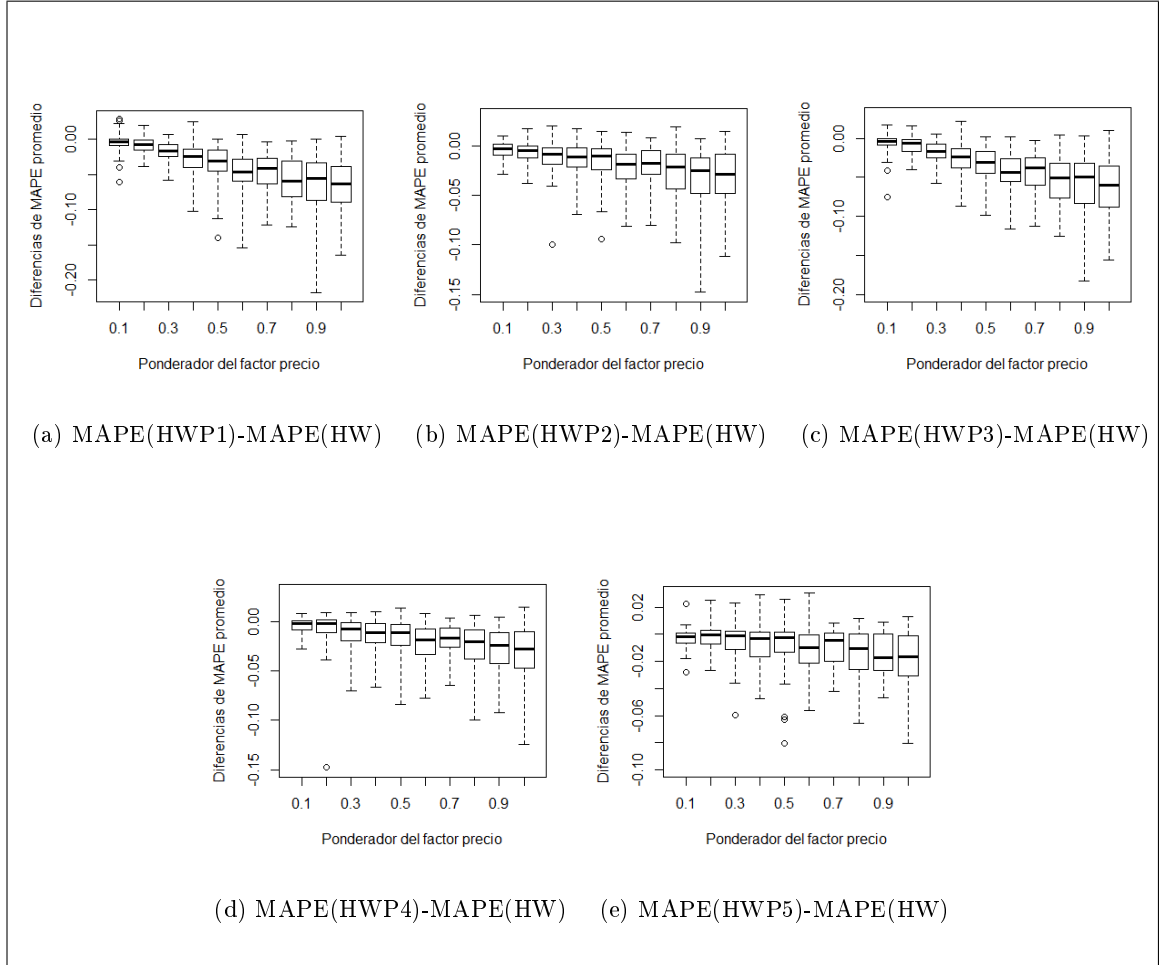


Figura 5: Diferencias de MAPE de cada HWP con respecto a HW para series ARIMA(2,0,1) con factor de efecto precio variable.

Por último, se realiza una prueba estadística en la que se comparan las medias de las diferencias de MAPE para los grupos extremos de series (aquellos con ponderador 1 y 0.1), para cada HWP y todos los modelos ARIMA. La hipótesis nula y alternativa son las siguientes:

tes: $H_0 : \Delta MAPE_{HWP_j}^{0.1} - \Delta MAPE_{HWP_j}^1 \geq 0$; y $H_A : \Delta MAPE_{HWP_j}^{0.1} - \Delta MAPE_{HWP_j}^1 <$

0. En casi todos los casos se rechaza la hipótesis nula al 1 % de significancia, salvo para las series obtenidas a partir del modelo ARIMA(1,0,2) para las que se rechaza al 5 %, por lo que existe evidencia estadística suficiente de que al disminuir el efecto del precio en la demanda, la diferencia entre HWP y HW se vuelve más pequeña.

Análisis gráfico del ajuste de datos

De los resultados mostrados en las secciones anteriores, se concluye que HWP1 logra los mejores resultados. A modo de mostrar un ejemplo ilustrativo con el fin de observar que el HWP reacciona mejor ante cambios de precio, se compara gráficamente el ajuste de HWP1 y HW tradicional para una de las series aleatorias usadas anteriormente. En la Figura 6, se muestra un gráfico de la demanda y los ajustes para las 10 últimas semanas del set de entrenamiento y las 10 semanas del set de prueba, junto con un registro de las variaciones del precio para los mismos periodos.

En general, se observa que ante un aumento de precio entre un periodo y otro (por ejemplo en las semanas 103 y 110), el efecto precio genera una caída en la demanda y el pronóstico por HWP acierta a ésta mejor que HW. El efecto contrario ocurre para disminuciones del precio en periodos consecutivos (por ejemplo en las semanas 102 y 96). Este mismo comportamiento se puede observar en cualquiera de las series.

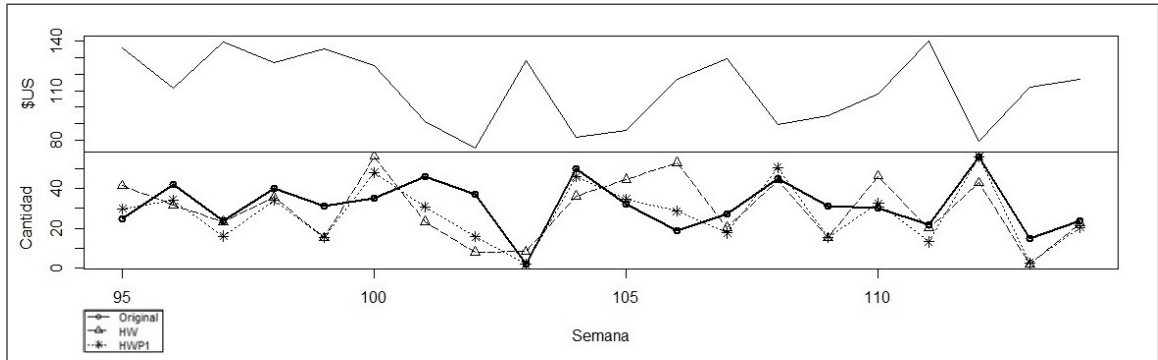


Figura 6: Precio, demanda y ajustes HWP y HW, de los últimos 20 datos de la serie escogida.

3.5. Aplicación a la industria alimentaria

A modo de observar como se desempeña el método HWP en series reales y frente a otras alternativas de pronósticos utilizadas tradicionalmente, como lo son: el método HW, el AR(1), la regresión y la media móvil, se realiza una aplicación a un caso real. Se utiliza la alternativa HWP1 en representación de HWP por ser la de mejor desempeño en las simulaciones de Montecarlo.

Para este experimento, se escoge una muestra de 1000 series de venta y precio de 108 observaciones cada una, provenientes de una importante empresa de alimentos chilena. Esta compañía trabaja con fijación de precios semanales y pronósticos de venta semanales, por lo que es aplicable a lo presentado en este documento.

El procedimiento para realizar las predicciones se mantiene para esta aplicación. Sin embargo, a pesar de que la serie se entrena con 104 observaciones, el set de prueba

Tabla 6: MAPE promedio y desviación estándar (entre paréntesis) por metodología de pronósticos para series de una empresa de alimentos chilena.

	Metodología de Pronóstico				
Indicador	HWP1	HW	Regresión	AR(1)	Media Móvil
MAPE Promedio	0,494	0,526	0,499	0,503	0,643
Desv. Estándar	0,461	0,561	1,050	1,490	2,670
MAPE Mínimo	0,041	0,036	0,019	0,038	0,044
MAPE Máximo	9,021	11,040	15,874	37,609	19,648

contempla 4 periodos hacia adelante. La elección de las series fue tal que hay series con y sin efecto, por lo que pueden existir algunas con compartamientos relativamente inelásticos, siendo esta una buena representación de la realidad.

Se observa en la Tabla 6, que HWP obtiene menores MAPE que HW y la media móvil y obtiene MAPE similares a la regresión y el AR(1). Además presenta una desviación estándar más baja que el resto de los modelos, junto con un valor máximo también menor, lo que es muy positivo. Se concluye por lo tanto que HWP es una alternativa que permite obtener bajos errores en series reales y es competitiva con otros métodos tradicionales de predicción de demanda.

3.6. Conclusiones y extensiones

En este artículo, se proponen cinco alternativas para incorporar el efecto del precio en la demanda en el método de predicciones de Holt-Winters. Estas propuestas están basadas en distintas formas funcionales de la relación entre el precio y la demanda y en el concepto de precios de referencia.

En base a los resultados obtenidos a través de los experimentos diseñados, se evidenció que todas las variantes de HWP logran una disminución en el MAPE obtenido con los pronósticos, en comparación con HW. Esto ha permitido validar que la inclusión del efecto precio en HW aplicado en series de demanda elástica, mejora la precisión de las predicciones. De entre los distintos modelos propuestos en este trabajo, se destacan las alternativas HWP1 y HWP3 por sobre las demás, por ser las de mejor rendimiento.

Se concluye que, a medida que crece la elasticidad precio-demanda de las series la magnitud de la mejora de HWP con respecto a la metodología tradicional aumenta. Se demostró también que al disminuir el factor asociado al efecto precio en la serie de tiempo, el error de los pronósticos para las metodologías con efecto precio y la tradicional comienza a ser similar.

En la aplicación a la empresa de alimentos, donde no se realizó discriminación por elasticidad, pese a su baja complejidad matemática HWP1 demostró ser competitiva frente a los métodos tradicionales de pronósticos, alcanzando un error promedio menor que el HW

y la media móvil y un error similar al de $AR(1)$ y la regresión.

Finalmente, algunas líneas de investigación futura nacen a partir de este trabajo. Existe una serie de modificaciones al Holt-Winters tradicional (Gardner, Nuvy y Dannenbring 1980; Gardner y Mackenzie 1985; Williams 1987 y Gardner 2006), para los que sería interesante probar la inclusión del efecto precio. Sería interesante también, indagar en otras alternativas de formulación del efecto precio en HW tradicional, por ejemplo no como una etapa extra sino como un factor externo al que no se aplique atenuación o utilizando una forma aún más específica del precio de referencia.

Referencias

- ARMSTRONG, J. S. y COLLOPY, F. (1992). Error Measures for Generalizing About Forecasting Methods: Empirical Comparisons. *International Journal of Forecasting*, 8(1), 69-80.
- AUCREMANNE, L. y DHYNE, D. (2004). How Frequently do Prices Change? Evidence Based on the Micro Data Underlying the Belgian CPI. *Working Paper Research 44, National Bank of Belgium*.
- AYAD, A. (2008). Optimizing Inventory and Store Results in Big Box Retail Environment. *International Journal of Retail and Distribution Management*, 36(3), 180-191.
- BOLTON, R. (1989a). The Relationship Between Market Characteristics And Promotional Price Elasticities. *Operations Research*, 8(2), 153-169.
- BROWN, R. G. (1956) *Exponential Smoothing for Predicting Demand*. Cambridge, Massachusetts: Arthur D. Little Inc.
- BROWN, R. G. (1962). *Smoothing, Forecasting, and Prediction of Discrete Time Series*. London: Chapman and Hall.
- CHATFIELD, C. (1975). *The Analysis of Time Series: Theory and Practice*. Englewood Cliffs, N.J: Prentice-Hall.
- DURHAM, C. y EALES, J. (2006). *Demand Elasticities for Fresh Fruit at the Retail Level*. Funding from the Northwest Multicommodity Marketing Research Special Grant.

FIBICH, G., GAVIOUS, A. y LOWENGART, O. (2005). The Dynamics of Price Elasticity of Demand in the Presence of Reference Price Effects. *Journal of the Academy of Marketing Science*, 33(1), 66-78.

FISHER, S., COCKBURN, I., GRILICHES, Z. y HAUSMAN, J. (1997). Characteristics of Demand for Pharmaceutical Products: An Examination of Four Cephalosporins. *The RAND Journal of Economics*, 28(3), 426-446.

GARDNER, E., NUUVY, U. S. y DANNENBRING, D. G. (1980). Forecasting with Exponential Smoothing: Some Guidelines for Model Selection. *Decision Sciences*, 11, 370-383.

GARDNER, E. S. y MCKENZIE, E. (1985). Forecasting with Exponential Smoothing: Some Guidelines for Model Selection. *Management Science*, 31, 1237-1246.

GARDNER, E. S. (2006). Exponential Smoothing: The State of the Art—Part II *International Journal of Forecasting*, 22, 637-666.

GRANGER, C. W. y NEWBOLD, P. (1974). *Economic Forecasting: The Atheist's Viewpoint* Nottingham Forecasting Project, University of Nottingham. Note 11.

GREEN, W. H. (2003). *Econometric Analysis*. USA: New York. Prentice Hall.

GUJARATI, D. (2004). *Econometría Básica*. México: McGraw-Hill inc.

HANNAN, E. y RISSANEN, J. (2012). Recursive Estimation of Mixed Autoregressive-moving Average Order. *Biometrika*, 69(1), 81-94.

HAWKINS, E. R. (1957). Methods of Estimating Demand. *Journal of Marketing*, 21(4), 428–438.

HOLT, C. C. (1957). *Forecasting Seasonals and Trends by Exponentially Weighted Moving Averages*. Pittsburgh, Pennsylvania: Carnegie Institute of Technology.

HOCH, S. J., KIM, B., MONTGOMERY, A. L. y ROSSI, P. E. (1995). Determinants of Store-Level Price. *International Journal of Forecasting*, 18, 439-454.

HYNDMAN, R. J., KOEHLER, A. B., SNYDER, R. D. y GROSE, S. (2002). A State Space Framework for Automatic Forecasting Using Exponential Smoothing Methods. *Journal of Marketing*, 32(1), 17-29.

KALEKAR, P. S. y BERNARD, P. (2004). Time Series Forecasting Using Holt-Winters Exponential Smoothing. *Kanwal Rekhi School of Information Technology*.

KAMAKURA, W. A. y BALASUBRAMANIAN, S. K. (1988). Long-Term View of the Diffusion of Durables: A Study of the Role of Price and Adoption Influence Processes Via Tests of Nested Models. *International Journal of Research in Marketing*, 5(1), 1–13.

KOPALLE, P. K., RAO R. G. y ASSUNCAO, J. L. (1996). Asymmetric Reference Price Effects and Dynamic Pricing Policies. *Marketing Science*, 15, 60–85.

- MAIA A. L. y CARVALHO, F. A. (2011). Holt's Exponential Smoothing and Neural Network Models for Forecasting Interval-Valued Time Series *International Journal of Forecasting*, 27, 740-759.
- MENTZER, J. T. (1988). Forecasting With Adaptive Extended Exponential Smoothing. *Journal of the Academy of Marketing Science*, 16(3), 62-70.
- MENTZER, J. T. y COX, J. E. (1995). Familiarity, Application, and Performance of Sales Forecasting Techniques. *International Journal of Forecasting*, 3(1), 27-36.
- NEWBOLD, P. (1983). ARIMA Model Building and the Time-Series Analysis Approach to Forecasting. *International Journal of Forecasting*, 2, 23-35.
- SCHMIDT, C. P., DHAKAR, T. y MILLER, D. (2006). Combining Moving Averages with Exponential Smoothing to Produce More Stable Sales Forecasts. *Advances in Business and Management Forecasting*, 4, 119-131.
- PAUL, S. (2011). Determination of Exponential Smoothing Constant to Minimize Mean Square Error and Mean Absolute Deviation. *Global Journal of Research in Engineering*, 11(3), 30-34.
- TRIGG, D. y LEACH, A. (1967). Exponential Smoothing with an Adaptive Response Rate. *Operational Research Society*, 18(1), 53-59.

VISWANATHAN S., WIDIARTA H. y PIPLANI R. (2009). Forecasting Aggregate Time Series with Intermittent Subaggregate Components: Top-down Versus Bottom-up Forecasting. *Journal of Management Mathematics*, 19, 275–87.

WADUD, Z. (2004). Modeling and Forecasting Passenger Demand for a New Domestic Airport with Limited Data. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, 2214(1), 59-68.

WILKINSON, N. (2005). *Managerial Economics*. USA: Cambridge, inc.

WILLIAMS, T. M. (1987). Adaptive Holt-Winters Forecasting. *Journal of the Operational Research Society*, 38(6), 553–560.

WINTERS, P. (1960). Forecasting Sales by Exponentially Weighted Moving Averages. *Management Science*, 6(3), 324-342.