



Pontificia Universidad Católica de Chile  
Facultad de Educación

**¿Cuáles son las argumentaciones disciplinares y los obstáculos  
epistemológicos que enfrenta un estudiante con talento académico?**

---

Proyecto de Magíster para obtener el grado de magíster en educación mención dificultades del aprendizaje.

Autor: Mónica Cea Meza  
Profesor Guía: Alejandro Pedreros

2015

## ÍNDICE

Resumen.....	4
Introducción.....	5
Capítulo I, Problema de investigación.....	8
1. Antecedentes y problematización.....	9
2. Problema de investigación.....	15
3. Objetivo General.....	15
4. Objetivos Específicos.....	15
5. Preguntas Orientadoras.....	16
Capítulo II, Marco teórico.....	17
1. Talento académico.....	18
1.1. Inclusión educativa y atención a la diversidad.....	19
1.2. Aclaraciones conceptuales sobre el talento.....	20
1.3. Talento académico y Talento matemático.....	21
1.4. Características de un estudiante con talento académico.....	22
1.5. Alternativas educativas y orientaciones.....	23
2. Aprendizaje matemático.....	27
2.1. Razonamiento matemático.....	27
2.2. Argumentación.....	29
2.3. Obstáculos epistemológicos y errores.....	33
Capítulo III, Metodología.....	37
1. Tipo de investigación.....	38
2. Técnica de recolección de datos.....	42
3. Instrumentos de recolección de datos.....	44
4. Procedimiento de análisis de datos.....	48

5. Validez y confiabilidad del estudio.....	54
Capítulo IV, Resultados obtenidos.....	56
1. Documentos escritos.....	57
2. Registros de audio: Grafos.....	62
3. Prueba inicial-final.....	66
4. Cuestionario.....	69
5. Evaluación general.....	83
6. Resumen de resultados (Encuesta, comentarios y entrevista).....	85
Capítulo V, Discusión y conclusiones.....	86
Referencias bibliográficas.....	96
Anexos.....	106-151

**Resumen:** El proyecto de magíster posee como propósito identificar y analizar las argumentaciones de los estudiantes con talento académico de octavo básico en un curso matemático del programa PENTA UC e identificar los obstáculos epistemológicos que pueden interferir. El diseño de investigación utiliza metodología cualitativa, es indagatorio y posee muestra intencionada. El grupo estudiado está formado por 14 estudiantes de diferentes comunas y dependencia escolar. Los instrumentos corresponden a un cuestionario final, documentos escritos y registros de audio de nueve clases que entregan información del proceso de aprendizaje de cada estudiante. La finalidad de los instrumentos es conocer las argumentaciones verbales y escritas debido a que ellas forman parte del razonamiento matemático que se externaliza y el cual, puede presentar obstáculos epistemológicos manifestados en errores matemáticos. Los resultados, obtenidos por análisis de contenido, apoyan la instrucción y ejercicio sistemático en matemática de la habilidad argumentativa considerada como una práctica social con el objetivo de transitar desde argumentaciones cotidianas hacia académicas.

**Palabras claves:** Talento académico, obstáculo epistemológico, argumentación, razonamiento matemático, error.

**Abstract:** The master's project purpose is to identify and analyze arguments made it by students with academic talent from eighth grade in a PENTA UC's mathematical course and identify epistemological obstacles that may interfere. The research design use qualitative methodology, it is investigatory nature and it has purposive sample. The study group consists of 14 students from different districts and school system. The instruments correspond to a final questionnaire, written documents and records audio from nine classes that provide information of the learning process of each student. The purpose of these instruments is to understand the verbal and written arguments because they are part of mathematical reasoning that is outsourced and which, may have epistemological obstacles manifested in mathematical errors. The results, obtained by content analysis, support instruction and exercise systematic in mathematics of argumentative skill regarded as a social practice with the aim of moving from everyday argumentation towards academic.

**Keywords:** academic talent, epistemological obstacle, mathematical reasoning, argumentation, error.

## INTRODUCCIÓN

La promoción de las prácticas inclusivas en las escuelas ha estado siendo criticada debido a que en la realidad se evidencia más bien como un discurso, el cual no trata o visualiza ciertos temas. Tal es el caso del concepto de diversidad, es decir de aquello que nos hace únicos incluso a la hora de aprender. El problema con la aplicación de este concepto en las escuelas es que constantemente se está optando por normalizar hacia el promedio, lo que en estudiantes con algún déficit y los que superan a sus pares causa que sean susceptibles a presentar cierta dificultad al aprender.

El talento académico es el concepto que se usa para denominar a los estudiantes que se destacan o diferencian a sus pares porque poseen un mayor grado de inteligencia o desempeño en todas las asignaturas o en alguna de ellas. Sin embargo, las dificultades del aprendizaje en el contexto educativo son tan diversas y únicas que incluso ellos pueden experimentarlas. Es por esta razón, que el presente proyecto de investigación fija sus lineamientos considerando que todo ser humano puede poseer una dificultad del aprendizaje y es responsabilidad de las políticas públicas, la cultura escolar y por sobretodo de los docentes, hacer algo al respecto.

En relación a los estudios que existen sobre las dificultades en el ámbito matemático asociadas al contexto de investigación, se puede mencionar que la información está asociada a la naturaleza de la matemática (contenidos) y ciertas alteraciones neurológicas (Carrillo, 2009), pero en ningún caso, hay relación directa con el tema del talento académico. Por el contrario, los estudios relacionados a las dificultades de aprendizaje del grupo objeto sólo dan algunas luces generales de las dificultades que pueden presentar los estudiantes, pero aún no existe (a nivel nacional) nada específico en el área matemática.

Por tal razón, el problema del estudio busca conocer e identificar las dificultades manifestadas en obstáculos epistemológicos que pueden presentar los estudiantes con talento académico en sus procesos argumentativos. Esto, entrega información relevante a los programas que desarrollan el talento y a la institución escolar debido a que el estudio

ofrece sugerencias sobre cómo desarrollar la habilidad argumentativa en matemática de los estudiantes con talento académico, criterios que de igual forma pueden ser aplicables a todos los estudiantes puesto a que existe un enfoque inclusivo en esta propuesta.

Los objetivos generales de este proyecto de magister consisten en identificar y analizar las *argumentaciones disciplinares* y los *obstáculos epistemológicos* que enfrenta un estudiante con talento académico de octavo básico en un curso matemático llamado *Paradojas, falacias y curiosidades matemáticas* del programa PENTA UC<sup>1</sup> dictado durante el primer semestre del año 2013. Objetivos que además son considerados dentro de los específicos debido a que ellos buscan caracterizar las *argumentaciones* usadas, identificar los *obstáculos epistemológicos* y analizar la relación entre ambos conceptos.

El estudio posee carácter indagatorio debido a que analiza una problemática a través de diferentes referentes teóricos, pero con el fin de generar nueva información en relación a la realidad educativa y al tipo de estudiantes que se atiende. Es por esto, que fue llevado a cabo por medio de la metodología cualitativa de manera descriptiva, centrado especialmente en los estudiantes. Finalmente, los datos fueron analizados a través de la técnica de análisis de contenido en base a criterios definidos en el marco teórico aplicados a un cuestionario final, documentos escritos y registros de audio de nueve clases que entregan información del proceso de aprendizaje de cada estudiante.

El presente proyecto de magíster se estructura de la siguiente manera:

Capítulo 1: Describe y explica los referentes teóricos y empíricos que orientan el estudio, problema, objetivos y preguntas.

Capítulo 2: Presenta y problematiza los principales conceptos que fundamentan este estudio como las argumentaciones, el talento académico y los obstáculos a través de diferentes autores que los han estudiado previamente.

---

<sup>1</sup> PENTA UC es un programa de estudios y desarrollo académicos de la Universidad Católica de Chile, el cual atiende a estudiantes con talento académico desde hace trece años a través de cursos que potencien sus habilidades cognitivas, afectivas y sociales.

Capítulo 3: Expone las características del diseño metodológico, los instrumentos y procedimientos de análisis que serán utilizados en este estudio.

Capítulo 4: Presenta los resultados obtenidos a través de los instrumentos aplicados y el análisis de cada uno de ellos.

Capítulo 5: Expone y explica las conclusiones en relación a las preguntas orientadoras del estudio, algunas discusiones e implicaciones relevantes en relación al tema.

En la parte final de este estudio se presentan los diferentes referentes bibliográficos y los anexos que forman parte de el.

Por último, quiero agradecer al programa PENTA UC por haberme permitido realizar esta investigación, pero de manera especial a la profesora y los estudiantes que participaron en este estudio. Gracias a ellos, mi familia, profesor y amigos por su apoyo, confianza y dedicación.

**CAPÍTULO I**  
**PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN**

## 1. ANTECEDENTES Y PROBLEMATIZACIÓN

A nivel nacional e internacional es indiscutido que en el área de matemática y en educación, el tema de la inclusión y el potenciar el razonamiento matemático son claves. Pruebas estandarizadas pueden ayudar a comprender el paradigma matemático que existe hoy, tales como TIMSS, PISA y SIMCE. Mullis (2003) establece criterios considerados por TIMSS tales como el *razonamiento matemático*, el cual consiste en la capacidad para el pensamiento lógico y sistemático que incluye justificar respuestas para demostrar o refutar, es decir argumentar.

Otro criterio que considera la habilidad argumentativa en TIMSS es el *comunicar*, el que corresponde a un conjunto de competencias que incluyen el representar, modelar e interpretar (por mencionar algunas) describiendo, explicando o justificando. En este contexto, el argumentar se establece como una dimensión global en la que intervienen contenidos matemáticos y sus procesos. Por el contrario, PISA mide más bien la funcionalidad, es decir, la utilización matemática en diferentes contextos más que el conocimiento de la disciplina como tal (Rico, 2006).

Pese a ello, el panorama del país en los estudiantes de octavo básico no es el mejor. En TIMSS (2011) los estudiantes chilenos con desempeño alto obtienen en promedio un 4%, tales estudiantes son capaces de aplicar conocimiento, comprender una variedad de situaciones relativamente complejas y explicar su razonamiento. Sin embargo, existe un 43% de los estudiantes que obtienen menos de cuatrocientos puntos (donde el rango de los resultados van de 0 - 1000). Esto quiere decir que cerca de la mitad de los estudiantes de octavo básico no son capaces de aplicar, comprender y/o explicar razonamientos matemáticos.

Situación similar ocurre con PISA (2009), donde sólo un 1,3% de los estudiantes chilenos superan las competencias matemáticas más altas en comparación al promedio OCDE

(12,7%), lo que quiere decir que muy pocos estudiantes son capaces de analizar, razonar y comunicar eficazmente la resolución de problemas matemáticos en diferentes situaciones. Es de conocimiento que resultados como estos provocan que la educación de todos los estudiantes chilenos se focalice en enseñar los temas que aparecen en estas pruebas, de hecho MINEDUC (2011) señala dentro de sus *fundamentos de las bases curriculares 2011 de educación básica* que la construcción de objetivos, habilidades y contenidos se construyen considerando los aspectos de PISA y TIMSS. Para ejemplificar, las Bases Curriculares (2013) en Chile, orientan al desarrollo del pensamiento matemático estableciendo el *argumentar y comunicar* como las habilidades centrales para comprender el razonamiento que hay detrás con actitud de reflexión y fundamentación.

Lo anterior, ejemplifica el poder que tienen las pruebas estandarizadas (incluyendo el SIMCE) en el curriculum nacional, la enseñanza de los contenidos y desarrollo de habilidades en el aula. El problema es que no son tratados con profundización ni de manera interdisciplinaria, ya que en general las instituciones escolares prefieren desarrollar más bien el “saber” –memorizando-, que el “saber hacer”. Como consecuencia, los estudiantes pierden el interés y la motivación por aprender. Ante tal situación, los más desfavorecidos son los estudiantes con talento porque la educación no tiene ningún desafío para ellos (Arancibia y col. 2012) debido a que es probable que los conocimientos bases del curriculum ya formen parte de sus conocimientos previos. Con esta información, cabe preguntarse ¿Qué es lo que está pasando realmente con la educación chilena?

Una de las posibles respuestas podría encontrarse en los conceptos de *educación especial e inclusión*, los cuales permiten comprender la realidad escolar. UNESCO (2004) presenta un informe de la educación de los estudiantes con talento en Iberoamérica, el cual explica que a finales del siglo XIX e inicios del siglo XX se establece la educación especial entendida bajo el principio de *normalización*, cuyo objetivo es que “las personas con discapacidad desarrollen su vida en los contextos comunes de la sociedad” (p. 16). Desde esta perspectiva un estudiante talentoso no sería beneficiado porque genera etiquetamientos o ideas que prevalecen en la escolaridad. Esto silencia y oculta a los estudiantes con talentos de todo tipo de intervención o políticas educativas porque existe un énfasis hacia el déficit.

Tal concepción de las dificultades fue posteriormente modificada con el concepto de *inclusión*, el cual se comprende como el no dejar a nadie fuera de la vida escolar, ni educativa, ni física ni socialmente (Jiménez y col. 1999). Sin embargo, actualmente diferentes autores llaman a que la educación sea enfocada en la atención a la diversidad, asociada a la valoración, con mirada heterogénea y visión contemporánea, es decir, llevando “a cabo prácticas inclusivas en educación accesibles a todas las personas” (Infante, 2010, p.288) debido a que todos pueden presentar barreras a la hora de desarrollarse. Por esta razón, comprender la inclusión desde lo contemporáneo se transforma en un desafío para la escuela, los profesores y la educación en general.

En el caso de un estudiante talentoso, se pueden evidenciar barreras en diferentes ámbitos, tales como: el descenso del rendimiento académico, desmotivación, excesivo grado de perfeccionismo, dificultades en sus relaciones con los demás o descenso de la autoestima (Martínez, 2011, p. 136). Tales dificultades corresponden a diferentes factores (emocionales, sociales y de conducta, falta de desafío en la escuela y trastornos de aprendizaje) que producen en los estudiantes con talento académico *underachievement*, lo que significa rendir bajo lo esperado (Salas, 2012). Lo anterior es alarmante porque un 50% de los estudiantes con talento han mostrado bajo rendimiento en diferentes estudios que se han realizado internacionalmente (Arancibia y col. 2012). Bajo este punto de vista, ¿Qué es lo que está pasando con la educación de los estudiantes con talento académico?

En primer lugar, es importante dejar en claro el concepto de *talento académico*, el cual se define como la posesión de habilidades cognitivas superiores en relación a pares. Como por ejemplo: memoria, procesos autorreguladores, velocidad de aprendizaje, flexibilidad cognitiva y preferencia por la complejidad (Shore & Kanevsky, 1993, citado en Arancibia y col. 2012). Éstas son capacidades que pueden presentarse en ámbitos generales y específicos, es decir, en una asignatura o en todas.

Una de las posibles respuestas en torno a las dificultades actuales que existen en la educación de estudiantes con talento es la teoría de la *inteligencia incremental* planteada

por Dweck (2006). La cual pone énfasis en el aprendizaje y el disfrute del desafío, más que en los logros mismos donde la importancia de la educación está más allá de los resultados, como el rendimiento y las notas de los estudiantes. Por tal razón, esta teoría posee una mirada positiva de la educación debido a que valora los logros cualitativos de las personas, el aprendizaje cooperativo y por sobretodo, genera confianza en la inteligencia (autoconcepto) que cada persona posee ya que la autora plantea que la genética no determina la inteligencia, sino que es resultado de las acciones y el entorno.

Históricamente, el tratamiento y consideración de los estudiantes talentosos se inició a nivel internacional, donde el caso más destacable es Estados Unidos. País que en la década de los sesenta se enfocó en proveer recursos hacia el diseño y ejecución de programas para este tipo de estudiantes. Los cuales fueron desarrollados en el área de ciencias y matemáticas con el fin de promover la excelencia académica y la producción científica. Lo anterior, causó conflictos dentro del país porque las personas pensaban que eran recursos que personas con altas capacidades no necesitaban. Posteriormente, esta concepción de talento fue resuelta a través del *Informe Marland* (1971), el cual define *superdotación* ya no considerando el coeficiente intelectual, sino más bien la presencia de altas capacidades asociadas a un alto rendimiento de inteligencia a nivel general o específica, de creatividad, liderazgo y artes visuales (Arancibia, 2009). En este sentido, esta perspectiva pone atención a diferentes habilidades que en la época no eran consideradas.

Por el contrario, los estudios y programas que desarrollan el talento en Chile se enfocan en estudiantes mayormente provenientes de contexto de pobreza (Arancibia, 2009) debido a que un porcentaje cercano al 90% de los talentos académicos pertenece a familias con bajos recursos (Rosso, 2005). Por lo que resulta importante promover la educación de talentos en tal situación porque finalmente son los que no pueden optar por una educación más exigente y compleja.

**Aspectos que el sistema educativo en Chile provee y/o son insuficientes:**

Lo que el sistema actualmente provee.	Lo que actualmente es insuficiente o falta dentro del sistema.
Programas de enriquecimiento (en universidades y con modalidad extra programática).	Visualizar el tema del talento en las escuelas.
Actividades extra programáticas como olimpiadas matemáticas.	Políticas públicas enfocadas en la inclusión y valoración de la diversidad.
Recursos (enfocados a financiar y dar premio al talento escolar).	Flexibilidad curricular para que el talento sea desarrollado en las escuelas.
Capacitación y trabajo con padres y profesores (desde los programas de enriquecimiento).	Generar un departamento de talentos en el MINEDUC.
Por ley se reconoce la aceleración curricular, la diversidad y la diferenciación pedagógica.	

El cuadro anterior evidencia que las políticas educativas nacionales poco a poco van considerando la atención de los estudiantes con talento académico. La cual se ha llevado a cabo por medio de recursos, Arancibia (2009) ejemplifica algunos de ellos: desde el 2007 se establece una instancia denominada “Programa de Promoción de Talentos en Escuelas y Liceos” enfocada en el financiamiento, y un premio a los talentos escolares. Sin embargo, en ambos casos, el criterio de alumno talentoso se realiza de acuerdo a notas escolares lo que no corresponde a la idea de talento como tal.

Por otro lado, dentro de la Ley General de Educación (2009), en el artículo 27 y especificado en el decreto supremo n° 332 (2011), se establece la opción de aceleración curricular para cursar un determinado curso o nivel a una edad cronológica distinta. Este aspecto no hace más que ubicar el talento desde la perspectiva de integración en el hecho de considerar su necesidad, pero no de incluirlo realmente en la educación regular.

Los estudiantes con talento académico también pueden presentar necesidades educativas a pesar de que posean habilidades cognitivas superiores en relación a sus pares, éstas pueden presentarse ante alguna situación matemática, insuficiente o errónea en su razonamiento, Lo cual es usual al enfrentarse a un conocimiento nuevo debido a que tal situación, genera ruptura cognitiva, especialmente en el pasaje de argumentación a demostración (D'Amore, 2006).

Algunas de las dificultades que se pueden encontrar en el desarrollo de la habilidad argumentativa son las *representaciones semióticas*, las que consisten en producciones constituidas por el empleo de signos o el medio para exteriorizar sus representaciones mentales. Estas representaciones son importantes porque cumplen la función de comunicación y desarrollan la actividad matemática misma debido a que “*no hay noesis*, es decir, actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto, *sin semiosis*”, es decir aprehensión o producción de una representación semiótica (Duval, 1999).

Es así que un estudiante puede presentar problemas en la *conversión*, es decir, en la transformación que hace pasar de un registro a otro y el *tratamiento*, definido como la transformación que se efectúa al interior de un mismo registro sobre los objetos matemático. Esto se explica básicamente porque existe un desconocimiento de los diferentes registros, son actividades menos espontáneas y difíciles de adquirir.

Lo anterior plantea que generar y desarrollar la argumentación no es trivial incluso, autores indican que es más bien un proceso a largo plazo en la actividad matemática escolar (Solar y col. 2009). Por esta razón, es importante detenerse a reflexionar lo que va sucediendo durante aquél proceso para que no se transformen en posibles obstáculos epistemológicos. Concepto definido por un lado, como diferentes causas de inercia que producen un estancamiento o retroceso (Bachelard, 1938) y por otro lado, un conocimiento con resultados correctos o ventajas apreciables en un determinado ámbito, pero en otro nuevo o más amplio se manifiesta falso o inadecuado (Brousseau, 2007).

En la primera definición el obstáculo radica en el pensamiento mismo y en la segunda, reside en la comunicación (D'Amore, 2006). Por esta razón, existe un foco especial dentro

de este proyecto a la argumentación y el razonamiento matemático en el contexto de estudiantes con talento académico en el PENTA UC.

El estudio de la habilidad argumentativa en un grupo de estudiantes con talento dentro del contexto de tal programa se fundamenta con el test de Raven que utilizan para seleccionar, debido a que es una prueba que mide las habilidades generales y no las características de la escolarización regular que reciben (conocimientos). Sumado a ello, se reconoce que la prueba está un poco más cargada hacia los talentos matemáticos, pero hacía un lado más bien abstracto (Cumsille, 2005), lo que permite apostar a que este tipo de estudiantes presenten mayor verbalización oral y escrita a la hora de explicitar argumentos.

## **2. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN**

¿Cuáles son las argumentaciones disciplinares y los obstáculos epistemológicos que enfrenta un estudiante con talento académico?

## **3. OBJETIVO GENERAL**

Analizar las argumentaciones disciplinares y los obstáculos epistemológicos que enfrenta un estudiante con talento académico en un curso de matemática del programa PENTA UC.

## **4. OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- Caracterizar las argumentaciones disciplinares usadas por los estudiantes con talento académico en un curso de matemática del programa PENTA UC.
  
- Identificar los obstáculos epistemológicos que enfrentan los alumnos en un curso de matemática del programa PENTA UC.

- Analizar la relación entre los obstáculos epistemológicos presentes en un curso de matemática y las argumentaciones disciplinares usadas por los estudiantes con talento académico del programa PENTA UC.

## **5. PREGUNTAS ORIENTADORAS**

- ¿Qué argumentaciones disciplinares son utilizadas por estudiantes con talento académico? ¿Cómo son expresadas dichas argumentaciones?
- ¿Cuáles son los obstáculos epistemológicos más recurrentes que enfrenta un estudiante en un curso de matemática del programa PENTA UC?
- ¿Qué relación hay entre los obstáculos epistemológicos y las argumentaciones disciplinares que se generan dentro de un curso de matemática con estudiantes con talento académico?

**CAPÍTULO II**  
**MARCO TEÓRICO**

## **1. TALENTO ACADÉMICO**

Este primer capítulo desarrolla el concepto de talento académico el cual se define como poseer habilidades cognitivas superiores en relación a pares, en un determinado contexto (Arancibia y col. 2012) y que se presenta en el 10% superior de la curva normal. Lo que en el caso chileno significa, que de una población de tres millones y medio de escolares, 350 mil tienen potencial de talento académico (Arancibia, 2009, p. 6).

La organización de este capítulo se lleva a cabo desde lo general (diversidad de estudiantes) a lo particular (estudiantes con talento académico: ideas claves, concepto y alternativas educativas). Es así que el objetivo del primer subcapítulo es desarrollar la idea de que el talento forma parte de las ideas de inclusión y diversidad en las escuelas.

El segundo punto busca aclarar la concepción de talento debido a que usualmente la sociedad asocia este concepto a la idea de ser un genio o superdotado, lo que no aporta a la idea de incluir en las escuelas.

En el tercer subcapítulo, se presentan las diferentes ideas y concepciones en relación al talento académico y matemático, para dejar en claro dentro de este estudio que no son lo mismo. En este sentido, el grupo estudiado en el contexto PENTA UC, son talentosos, pero el talento específico en un área en particular depende de cada uno y no es lo que busca desarrollar el programa como tal.

En el cuarto punto, se exponen algunas características de este tipo de estudiantes que ayudan a visualizar lo que los estudiantes indican que son capaces de realizar, todo, con un mayor énfasis en el área matemática.

El último subcapítulo, presenta alternativas educativas que permiten potenciar el talento académico y así tener algunas ideas de cómo desarrollar la habilidad argumentativa que será presentada en el siguiente capítulo.

## 1.1 INCLUSIÓN EDUCATIVA Y ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

Actualmente la educación chilena y del mundo está pasando por diferentes transformaciones o cuestionamientos que implican fundamentalmente considerar, incluir y adaptar la escuela a todos los estudiantes que se encuentren en ella. Así lo hace notar el MINEDUC (2009) en la Ley General de Educación por medio de principios que son base del sistema educativo, tales como: *Universalidad* (educación al alcance de todos); la *calidad* (objetivos generales y estándares de aprendizaje alcanzables por todos); la *equidad* (oportunidad de poseer una educación de calidad para todos y en especial a los que requieran de apoyo especial); y *diversidad* con el fin de promoverla y respetarla.

La *diversidad* se comprende como la variedad, desemejanza o gran variedad de cosas distintas (MINEDUC, 2004), esto posee la idea de distinguirse de las demás personas (Bermeosolo, 2010), lo que para algunos implica reduccionismo del tema (Matus, 2005) debido a que invisibiliza y reduce la complejidad de la que está compuesto el ser humano.

Es por esto que algunos prefieren referirse a la multiplicidad de la realidad o a la pluralidad de realidades (Devalle de Rendo y col. 2006, p.18), lo que implica considerar que cada estudiante posee sus propias necesidades educativas y se enfrenta de manera distinta a sus experiencias de aprendizaje (Blanco, 2006). Por esta razón, el objetivo de la inclusión es la diversidad (Parra, 2010; Ainscow, 2011) debido a que sus bases están en la heterogeneidad y no en la homogeneidad (Hontangas, 2010; Blanco, 2008), materializada en el acceso y participación al conocimiento y centro educativo.

Por último, la inclusión educativa y la atención a la diversidad es comprendida en el siglo XXI desde lo contemporáneo (Infante, 2010), lo que implica cambiar definitivamente el paradigma con que fue construida la cultura escolar reconociendo la diversidad actual de los estudiantes y sus necesidades educativas (Mena y col. 2012).

## 1.2 ACLARACIONES CONCEPTUALES SOBRE EL TALENTO

Al adentrarse a la definición de talento académico, es usual encontrar en diversos autores la misma regularidad: establecer diferencias o relaciones entre los términos *talento* y *superdotación* debido a que al clarificarlos se logra comprender los diferentes temas que subyacen de ellos. Como por ejemplo, la adquisición del talento donde culturalmente predomina el carácter innato debido al uso histórico que ha tenido (UNESCO, 2004).

Hay autores que tienen sus propias posturas: *talento* comprendido como mostrar una aptitud en una determinada materia y *superdotado* a la persona que logra un producto propio admitido por una comunidad científica (García, 2004). En otro caso, Fernández (2011) trabaja en torno a la idea de *alta capacidad* asociada a tres grupos: los *estudiantes con talento*, es decir los que tienen capacidad de rendimiento superior en un área concreta (López y col. 2012); los *estudiantes precoces*, que poseen un desarrollo temprano inusual para su edad; y los *superdotados* que tienen un nivel de rendimiento intelectual superior en diferentes capacidades y en cualquier área.

Sin embargo, existe una fuerte influencia de la perspectiva tradicional de *superdotación* en el concepto de talento debido a que un estudiante superdotado corresponde a una persona que posee inteligencia determinada por la genética, fija e inmutable. Lo cual es medido y establecido por el coeficiente intelectual encima de 140 en pruebas de inteligencia (Smith, 2003). Esta idea implica que la intervención educativa no es necesaria en los sujetos porque la inteligencia es inalterable.

Gagné (2009) con su Modelo De Desarrollo del Talento (MDDT) comprende el *talento* diferenciándolo a la *dotación*, donde *dotación* corresponde a las habilidades naturales en un área y *talento*, a la expresión de la destreza o habilidad ya desarrollada (Salas, 2012). El MDDT implica que una persona no puede llegar a ser talentoso sin antes haber sido dotado, pero el ser dotado no significa poseer una gran cantidad de conocimientos. Es por esta razón que el PENTA UC utiliza esta teoría para definir talento y agrega que el talento que ellos identifican es el *Potencial de talento académico* (Salas, 2012) porque es el que

requiere instrucción (Arancibia y col. 2012). Esto con el objetivo de no producir prejuicios o ideas erróneas en relación al ser talentoso, es por esto, que en este estudio se considera el talento definido desde el MDDT.

Todo lo anterior reafirma la idea de que actualmente el talento es un concepto relativo (Braliá y col. 2000; UNESCO, 2004) en relación a los ámbitos o criterios que abarca, a la identificación (Ziegler y col. 2010) y por lo tanto a las personas que son consideradas talentosas. Sin embargo, en general una persona es talentosa en comparación a su grupo de pares, en un tiempo y lugar específico (Arancibia y col. 2012). Los que pueden caracterizarse por poseer *talentos simples*, es decir, en una aptitud o competencia específica; *talentos múltiples*, que consiste en la combinación de uno o varios talentos simples; y el *talento complejo*, es decir, varios talentos con un elevado grado de desarrollo.

### **1.3 TALENTO ACADÉMICO Y TALENTO MATEMÁTICO**

El *talento académico* es un tipo específico de talento que consiste en poseer una habilidad o capacidad superior en áreas como matemática, ciencias naturales, sociales y/o humanidades (Cabrera, 2011). Es por esto, que puede ser específica o general (manifestarse en una o más áreas) y se distribuye homogéneamente en la población. Sumado a ello, se asocia a un talento complejo en el cual se combinan recursos elevados de tipo verbal, lógico y de gestión de la memoria. Por tal razón, los estudiantes con talento trabajan bien en tareas que impliquen razonamiento (Arancibia, 2009). Al contrario, el *talento matemático* consiste en una alta capacidad para el manejo de la información cuantitativa y numérica (Fernández, 2011; Sánchez, 2008; Ferrándiz y col. 2010), la representación espacial y resolución de problemas (López y col. 2012). En este sentido, este es un talento simple que puede ser parte del talento múltiple o complejo (Fernández, 2011).

En resumen, el talento matemático y académico corresponden a tipificaciones del talento. Lo que implica, en el caso de los estudiantes talentosos, la posible presencia o ausencia del talento matemático debido a que es más específico que el talento académico.

#### 1.4. CARACTERÍSTICAS DE UN ESTUDIANTE CON TALENTO ACADÉMICO

El Centro de Estudios y Desarrollo de Talentos llamado PENTA UC ha trabajado por medio de diferentes investigadores el concepto, identificación y tratamiento del estudiante con talento académico. Las características que existen son variadas dentro de la literatura, por lo tanto, sólo se mencionaran las que ayudan a comprender mayormente la performance del grupo de estudio en el contexto matemático.

En primer lugar, un estudiante con talento académico posee *habilidades analíticas* (para resolver problemas y juzgar), *creativas* (con el fin de generar problemas, ideas, preguntas) y *prácticas* (con el objetivo de aplicar y adecuar lo aprendido a distintos contextos) (González y col. 2012). Tales habilidades de un estudiante con talento académico son significativamente superiores en relación a sus pares en la manera de procesar la información y no en la acumulación de contenidos (Arancibia y col. 2005).

En relación al ámbito cognitivo, los estudiantes con talento académico no manifiestan una inteligencia idéntica: Poseen *flexibilidad cognitiva*, lo que significa visualizar y utilizar diversas estrategias frente a una tarea; y tienen *preferencia por la complejidad*, es decir, buscar actividades de complejidad progresiva y demandante (Arancibia y col. 2012). Sumado a ello, los estudiantes son capaces de establecer relaciones conceptuales en diferentes campos del conocimiento, guiar sus procesos de aprendizaje al trabajar en una tarea, presentar alta intensidad y sensibilidad emocional (Cabrera 2011).

Otras características sobre este tipo de estudiantes a la hora de aprender son la rapidez, motivación, buena memoria, profundidad, concentración frente a tareas de su interés y energía en el procesamiento de algún material. Por otro lado, son capaces de trabajar en torno a conceptos abstractos y problemas de diversas variables estableciendo relaciones entre ideas de manera intuitiva, inferencial, cuestionadora y con capacidad de observación.

Respecto a las *habilidades socioafectivas*, los estudiantes son auto disciplinados, responsables y comprometidos en las actividades que lo desafían e interesan. Además,

presentan altos niveles de energía que suelen calificar como impulsividad e hiperactividad debido a que son estudiantes que pueden frustrarse con mayor facilidad ante la inactividad (Arancibia y col. 2012) o el aburrimiento en la sala de clases.

Finalmente, un aspecto importante de ser mencionado sobre los estudiantes con talento académico es la *asincronía* (Bralić y col. 2000; Arancibia y col. 2005). El cual consiste en el desarrollo de procesos evolutivos a distinto ritmo y velocidad en las dimensiones intelectuales, sociales y emocionales (Arancibia y col. 2012, p. 281). Esto normalmente se evidencia en situaciones tales como, el poseer altas capacidades cognitivas en relación a sus pares, pero a su vez, ser tímidos y tener dificultades al establecer relaciones sociales. Otro ejemplo importante, es poseer talento académico y tener un bajo rendimiento escolar. Tales situaciones e ideas de asincronía forman parte del concepto *underachievement* que actualmente se está desarrollando, donde factores (emocionales, sociales y de conducta, falta de desafío en la escuela y trastornos de aprendizaje) producen en los estudiantes con talento académico “rendir bajo lo esperado” (Salas, 2012).

## **1.5. ALTERNATIVAS EDUCATIVAS Y ORIENTACIONES**

El concepto de *underachievement* invita a considerar desde el ámbito psicopedagógico y educativo la idea de que tanto un niño con escasa dotación intelectual, como un niño “genio” tienen el mismo derecho para crecer como personas y sacar el máximo partido de sus potencialidades debido a que ambos pueden experimentar barreras de aprendizaje y de participación (Bermeosolo, 2010, p. 348). Tales barreras pueden tratarse a través del *Modelo Diferenciado de Dotación y Talento* (MDDT) ya que propone diferentes componentes que contribuyen a la transformación de dones en talento.

Este modelo clarifica conceptos, ideas y criterios que los docentes deben considerar a la hora de trabajar con este tipo particular de estudiantes. Los profesionales deben enfocarse en desarrollar los *catalizadores intrapersonales* (rasgos y manejo de objetivos) y los *catalizadores ambientales* (aspectos físicos, sociales, culturales o económicos del medio) que se visualizan en el siguiente cuadro:

## MDDT, Gagné (2009)



Algunas de las condiciones básicas que hay que considerar a la hora de enseñar a estudiantes con talento académico, se enmarcan en el MDDT: un ambiente que de la oportunidad de aprender rápido o adecuado a sus necesidades; que potencie y desafíe; que permita la interacción, estimulación de altos niveles de pensamiento y el desarrollo de oportunidades para usarlos. Sumado a ello, es importante potenciar un clima que valore y desarrolle las habilidades intelectuales (de toma de decisiones y creatividad) y del pensamiento superior (análisis, síntesis, evaluación y metacognición).

En relación a los profesores, se les recomienda potenciar la creatividad permitiendo que los estudiantes realicen investigaciones, pruebas o exámenes distintos a los tradicionales. Sumado a ello, se les llama a desarrollar el pensamiento divergente (llevar a una conclusión desde diferentes puntos de vista); propiciar la enseñanza individualizada (Genovard y col. 2010) con enfoque inductivo, el cual genera oportunidades para aplicar y extender el conocimiento y las habilidades (Renzulli, 2010). Todo esto llevado a cabo a través de una

instrucción interdisciplinar, es decir, una enseñanza que considere el estudio de un tema en el contexto de varias disciplinas (Smith, 2003) y con práctica sistemática (Gagné, 2009; Arancibia y col. 2012).

Desde un punto de vista actitudinal y transversal, se sugiere contemplar la teoría de la *inteligencia incremental* planteada por Dweck (2006) en las escuelas y en general, en la sociedad debido a que pone énfasis en el aprendizaje y el disfrute del desafío. De tal modo, en que se valoren los logros cualitativos de las personas, el aprendizaje cooperativo y por sobretodo, la confianza en la inteligencia que cada persona posee ya que la autora plantea que la genética no determina la inteligencia, sino que es resultado de las acciones y el entorno. Desde esta perspectiva, se puede desarrollar positivamente el autoconcepto de los estudiantes a la hora de aprender.

Actualmente, el tratamiento del talento académico se lleva a cabo de dos maneras: *intraescolar* y *extracurricular*. El primer caso corresponden a diferentes modalidades que no hacen más que el estudiante este fuera del aula sin interacción con sus pares, como por ejemplo los estudios diferenciados, clases especiales dentro de la escuela regular, sala de recursos dentro del colegio, programa “pull - out” y colegios especiales. En el segundo caso, se usan modalidades como el enriquecimiento curricular y aceleramiento curricular (Tourón, 2009).

Respecto al *enriquecimiento curricular*, se define como una modalidad intra o extraescolar, esta última es realizada fuera del horario normal (usualmente en universidades) en donde se ofrece mayor diversidad, profundidad y amplitud de conocimientos (Arancibia y col. 2012). Pese a ello, el trabajo a modo intra (en el aula) permite ampliar el currículo tradicional a través de una instrucción interdisciplinar o de programas de tutorización, los que modifican el contenido y la metodología (Fernández, 2011). En este caso, se recomienda no ampliar el currículo a cursos superiores, sino que a temas que sean tratados de modo abstracto y complejo (Bralić y col. 2000; UNESCO, 2004). Esta modalidad ha sido demostrada en investigaciones como adecuada para las áreas de lenguaje y matemática (Smith, 2003) y en general, ha sido la más efectiva porque no genera desajustes físicos y sociales en la

interacción con sus pares, sin embargo, posee un alto gasto económico debido a que exige un equipo de especialistas y materiales específicos (Bermeosolo, 2010).

Por otro lado, el *aceleramiento curricular* (AC) consiste en entregar contenidos destinados a estudiantes de mayor nivel escolar, con una misma enseñanza, pero más rápida. Tales como ingresar tempranamente a la escuela o universidad, aceleración a tiempo parcial, saltar cursos (Arancibia y col. 2012) o agrupamiento de habilidades, es decir, estudiantes con resultados y habilidades comparables entre sí en una misma clase o curso (Smith, 2003). En este caso, algunos recomiendan que el AC se utilice en ciertas áreas y no en todas porque es posible que el talento no se manifieste de modo general (UNESCO, 2004). Dentro de las ventajas, es que genera economía en los medios de solución y entornos más estimulantes y motivadores (UNESCO, 2004). Sin embargo, como desventaja, está la socialización y el desarrollo emocional que podría causar una desincronía (Bemeosolo, 2010).

Una última recomendación son las *adaptaciones curriculares*, es decir, el ajuste o modificación que se realiza sobre elementos de acceso o curriculares: objetivos, contenidos, metodología y criterios de evaluación con el fin de lograr desarrollar las capacidades al máximo (Fernández, 2011, p. 98). Se puede realizar de cuatro maneras, la primera: *ampliando el currículo*, es decir, formulando un gran número de objetivos curriculares durante un periodo determinado. La segunda, *adaptando el currículo*, es decir reconfigurándolo en unidades más complejas. La tercera modalidad es usando *entrenamiento cognitivo*, es decir desarrollando esquemas de pensamiento a través de procedimientos de concienciación, planificación y verificación. La última, es el *enriquecimiento aleatorio*, donde el estudiante decide en un marco de currículo flexible y alternativo en lo que trabajará y con qué profundidad.

Finalmente, para desarrollar el talento académico en el caso particular de Chile, se recomiendan las adaptaciones curriculares (MINEDUC, 2004; 2005) y la aceleración (MINEDUC, 2009).

## **2. APRENDIZAJE MATEMÁTICO**

Este capítulo busca presentar las diferentes perspectivas sobre los conceptos implicados en este estudio: razonamiento matemático, argumentación y obstáculos. Con el objetivo de encontrar alguna relación entre ellos y su presencia en estudiantes con talento académico.

La organización de este capítulo se desarrolla desde conceptos generales a particulares: En primer lugar, el *razonamiento matemático*, el cual consiste en la capacidad de fundamentar matemáticamente, es decir con reglas que en tal contexto son validas. Es así que tal capacidad se puede evidenciar de manera oral y escrita a través de la *argumentación*, es decir, por medio de la habilidad con la cual se utilizan premisas o proposiciones (verbales o escritas) con el fin de generar justificaciones disciplinares. Sin embargo, la argumentación puede presentarse deficiente frente a ciertas situaciones educativas en las que intervienen obstáculos epistemológicos, es decir formas de conocer que ante nuevos conocimientos pueden producir dificultad o problemas.

### **2.1. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO**

El razonamiento es definido como una serie de conceptos encaminados a demostrar algo, persuadir, mover oyentes o lectores (RAE, 2001). Por tal razón, es usual encontrar dentro de la literatura ideas en torno al pensamiento lógico y la argumentación.

El razonamiento en el contexto matemático se define como un tipo de razonamiento que permite la construcción de conceptos matemáticos (Soto y col. 2010, p.170). Otros ideas señalan que es una forma de conocimiento, la cual produce información nueva a partir de otra ya conocida. Por lo tanto, es algo interno, personal, no necesariamente compartido con otros (D'Amore, 2006, p. 348).

Otros plantean que es un razonamiento o proceso de pensamiento determinado por razonamientos empíricos deductivos (Godino, 2003) que por ende, permite obtener conclusiones a partir de premisas previamente establecidas (Castro y col. 2010, p. 55;

Codina y col. 1999; Duval, 1999). En este sentido, el razonamiento matemático consiste en comunicar la fuerza de argumento a las argumentaciones que se desean justificar (Codina y col. 1999). Por esta razón, un estudiante debe ser capaz de justificar argumentos verdaderos que requieren exploración y pensamiento (Ferrándiz y col. 2010, p. 214).

Duval (1999) determina que desde una definición funcional, el razonamiento consiste en una expansión discursiva, comprendida en relación con factores de interacción social que pueden comandar o favorecer la producción (p. 178). Además, para que este discurso se reconozca como un razonamiento debe estar orientado hacia una proposición que se quiera justificar y estar centrado en el valor, lógico o epistémico (grado de fiabilidad), de esa proposición y no en su contenido (Duval, 1999, p. 181; Codina y col. 1999). Por tal razón, se establecen diferentes formas de comprender e identificar el razonamiento matemático: como el inductivo, deductivo, inferencial, el absurdo, analógico, abductivo entre otros (Castro y col. 2010); los cuales se diferencian el grado de valor disciplinar que poseen.

Por otro lado, Aberdein (2005) y Knipping (2012) establecen que el razonamiento matemático está compuesto por dos estructuras paralelas, la *argumental* que busca persuadir y la *inferencial* que ofrece una contraparte formal para los argumentos. Agregan que la práctica matemática es mucho más real cuando se lleva a cabo en la estructura argumental ya que ella no sigue reglas explícitas y depende más bien del contexto.

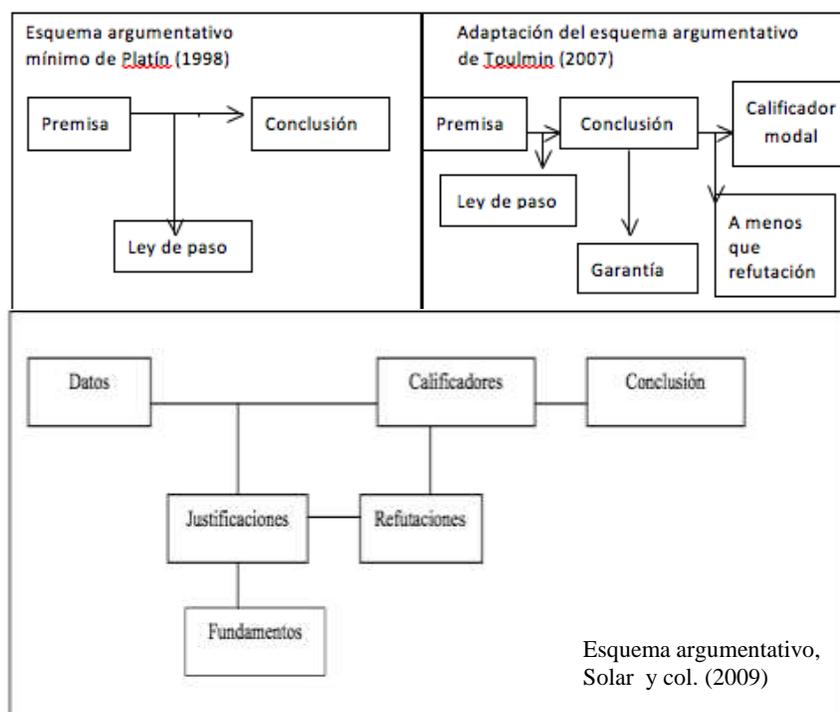
En el caso chileno, la propuesta de ajuste curricular del MINEDUC (2009) propone que el razonamiento matemático consiste en la capacidad para resolver problemas; formular conjeturas; verificar la validez de procedimientos y relaciones; y razonar bajo hipótesis. Este es un concepto que se plantea como transversal a los ejes de números, álgebra, geometría, datos y azar. Sin embargo, dentro de las Bases Curriculares (2012; 2013) se evidencia explícitamente como una habilidad que corresponde básicamente a la definición planteada anteriormente.

## 2.2. ARGUMENTACIÓN

La argumentación es una forma familiar de razonamiento que se realiza espontáneamente y tiene como propósito modificar la naturaleza o el grado de convicción que un interlocutor tiene sobre una proposición, de manera que la acepte o la rechace. Por ende, busca convencer y no probar debido a que posee restricciones de organización (Duval, 1999; Codina y col. 1999; De Gamboa y col. 2010).

Sobre esto, Cramer (2011) agrega que consiste en una acción epistémica con dos funciones: construir nuevos conocimientos y/o convencer a otros de la validez de la propia hipótesis (p. 2). Además, distingue algunos conceptos que usualmente se relacionan con la argumentación, como la explicación, de la cual establece que no busca modificar el valor epistémico del enunciado - objeto, sino que aporta nueva información. Por tal razón, se aproxima a una descripción más que a un razonamiento.

De manera similar, De Gamboa y col. (2010) plantea que existe la postura de asociar la argumentación, *justificación* y *explicación* porque parten del mismo esquema básico: paso de premisa a una conclusión (Duval, 1999). Este autor, recoge dos esquemas de argumentación; el primero de Platin (1998) y el segundo de Toulmin (2007) presentados a continuación:



En ambos esquemas (Platón y Toulmin) se plantea que la *ley de paso* corresponde a una justificación y *premisa* a los datos. Sin embargo, sobre el último esquema trabaja Solar y col. (2009) estableciendo que los *fundamentos* consisten en teorías generales, creencias y estrategias que apoyan aún más las justificaciones. Los *calificadores* son construcciones lingüísticas que permiten atenuar una demanda y los *refutadores* son los contraargumentos. Sobre estos últimos, los estudiantes no siempre alcanzan a desarrollarlos porque las argumentaciones en contextos escolares se enmarcan sólo en presentar información y no en debatir sobre la validez de la afirmaciones.

D' Amore (2006) establece que la argumentación, demostración y explicación son modalidades para producir razonamientos matemáticos. En el caso de la habilidad argumentativa y la demostración, algunos indican que se diferencian por su base lingüística y que argumentar no es demostrar (Codina y col. 1999). Por el contrario, otros autores establecen que la demostración es una práctica social de la comunidad matemática que se lleva a cabo fundamentalmente para validar el conocimiento matemático adquirido por la sociedad. En cambio, la argumentación es construida en ese determinado contexto social, se manifiesta en la práctica de la demostración y puede presentar argumentaciones no deductivas que desde el enfoque socioepistemológico debieran considerarse más, sobre todo aquellas que se construyen fuera de la escuela (Crespo, 2010). Así, pueden presentarse:

- *Argumentaciones visuales*: las cuales utilizan representaciones visuales, diagramas y otros elementos que ayuden a visualizar las propiedades que se desean demostrar.
- *Argumentaciones inductivas*: las que prueban una propiedad matemática con casos, ejemplos y contraejemplos.
- *Argumentaciones abductivas*: las que se caracterizan por la obtención de la conclusión debido a que no se realiza a partir de los datos o premisas, sino que involucra una manera de mirar e interpretar las mismas, extrayendo de ellas información significativa las que se relacionan con otros hechos que las expliquen. Por tal razón, la conclusión se enuncia a veces por medio de un “tal vez” o un “quizá” (p. 294).

- *Argumentaciones no monotónicas*: que consisten en agregar nuevas proposiciones (premisas) a un razonamiento, pero nunca se invalidan viejas conclusiones. Es por eso, que esa argumentación está asociada al sentido común o al contraejemplo.
- *Argumentaciones a conocimiento cero*: que consisten en una forma de presentar una propiedad matemática a un interlocutor, convenciéndolo de la veracidad del teorema correspondiente y de que el demostrador la conoce, no busca demostrar sino que convencer.
- *Argumentaciones gestuales*: que representan propiedades y acciones de modo no verbal.

En el caso chileno, MINEDUC (2013) establece habilidades a desarrollar en cada eje, en ellas se encuentran el *comunicar* y *argumentar* como una habilidad: El *comunicar*, lo define como la capacidad de expresar claramente ideas con el fin de comprender el razonamiento que hay detrás de cada problema resuelto o concepto comprendido. El *argumentar* se relaciona con el concepto anterior y se establece que permite a los estudiantes desarrollar actitud reflexiva y abierta al debate de sus fundamentos.

Argumentar en este estudio se comprende como un razonamiento que utiliza premisas o proposiciones para construir una justificación disciplinar. Lo cual se diferencia con la propuesta del MINEDUC desde dos puntos de vista. La primera se encuentra en la idea de que este estudio asume que hay diversos tipos de argumentación, los cuales deben llegar a ser disciplinares para que así sea desarrollada la habilidad argumentativa. En este sentido, el MINEDUC sólo le da la función comunicativa (función que este estudio también considera relevante dentro del marco teórico), lo cual es sumamente importante porque es la forma de explicitar los razonamientos de los estudiantes. Sin embargo, en la realidad educativa en el aula indica que no todo lo que se comunica son argumentos disciplinares, ahí la importancia de aprender a argumentar en matemática. Lo anterior, se relaciona con el segundo punto de vista, los elementos importantes que constituyen una argumentación (premisas), las cuales forman parte de la definición de este estudio, pero no del MINEDUC. La definición de este estudio utiliza la idea de premisa debido a que permite diferenciar la tipificación que la literatura propone respecto al concepto, con el fin de identificarlas en el

grupo de estudio. Esto en el sentido, de que el uso de premisas implica argumentar de manera disciplinar y no por la mera intuición. Probablemente, acá está el problema con la definición que el MINEDUC propone, debido a que no queda clara la manera de desarrollar la habilidad argumentativa en los estudiantes, sólo menciona la función que cumple.

Generar y desarrollar la argumentación no es trivial, incluso algunos autores indican que es más bien un proceso a largo plazo en la actividad matemática escolar (Solar y col. 2009). Donde las dificultades que presentan los estudiantes para desarrollar argumentaciones son reforzadas por las dificultades argumentativas que los mismos profesores presentan, algunas de ellas corresponden a confusión teórica y práctica entre distintos razonamientos, especialmente entre el demostrar, argumentar y explicar (De Gamboa y col. 2010). Complementando, Bruno D'Amore (2006) señala que el pasaje de la argumentación a la demostración es un pasaje que crea una ruptura cognitiva (Duval, 1999) e indica que es necesaria una didáctica explícita y reflexiva que trate esto.

La manera de desarrollar la habilidad argumentativa en los estudiantes es considerándola como una práctica social debido a que es un acto de interacción social y discusión (Duval, 1999; Llanos, 2007; Alcolea, 2013). Por esta razón, la primera recomendación es desarrollar la competencia comunicativa a través de discusiones (Durand-Guerrier y col. 2012) auténticas donde los estudiantes no se expresen por sí mismos y el profesor no controle los modos de discusión (Kuhn, 2008) con el fin de construir entre todos el conocimiento, reflexionar sobre conceptos meta-matemáticos y cultivar la actitud de razonamiento por sí solos y con sus pares (Durand-Guerrier y col. 2012).

Concretamente, lo anterior puede ser llevado al aula seleccionando tipos de problemas y manejando actividades de una manera determinada en la que el rol de los estudiantes y de los docentes permita la interacción y producción constante de argumentos. Durand-Guerrier y col. (2012, p. 364) explicita tales puntos con ejemplos específicos:

1. Tipos de problemas: abiertos y cerrados donde los estudiantes determinen la verdad o falsedad; estudio crítico de las argumentaciones de los estudiantes; discusión

sobre la base de la justificación; narración; trabajar en el desarrollo de pruebas y así sucesivamente.

2. Manejo de las actividades: Por ejemplo, debates estudiantiles; producción de trabajo escrito; uso de software, diagramas e instrumentos. Técnicas de manejo: uso de diagramas de razonamiento; discursos a meta nivel, manejo de diferentes registros semióticos, debate con toda la clase, trabajo en grupos, trabajo individual y así sucesivamente.
3. Rol de los estudiantes y docentes pertinente con el objetivo de permitir el diálogo.

### **2.3. OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS Y ERRORES**

Comprender el aprendizaje como adaptación al ambiente e ingreso en el mundo de la comunicación social significa a su vez, que es probable presentar rupturas cognitivas, asimilación y acomodamiento de conceptos, modelos, lenguaje, entre otros (D'Amore, 2006, p. 222). De esta forma se comprende un obstáculo debido a que surge por la interacción del sujeto con el medio (Brousseau, 1999), lo cual se fundamenta en que el ambiente ejercen un gran poder en la habilidad argumentativa debido a que los argumentos que los estudiantes mayormente usan son los que se construyen fuera del aula (Crespo, 2010). Lo anterior es una razón que justifica el tema de los obstáculos en este estudio.

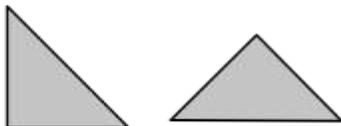
En particular, el concepto de *obstáculo epistemológico* surge desde las ciencias a través de Bachelard (1938), definido como causas de inercia que producen un estancamiento o retroceso. Desde la educación matemática, Brousseau (2007) lo define como un conocimiento con resultados correctos o ventajas apreciables en un determinado ámbito, pero en otro nuevo o más amplio se manifiesta falso o inadecuado. Sobre ambos autores se refiere D'Amore (2006) estableciendo que para Bachelard el obstáculo epistemológico radica en el pensamiento mismo y para Brousseau reside en la comunicación.

Los obstáculos se manifiestan a través de errores donde interactúan muchas variables: profesor, alumno, currículo, contexto sociocultural, entre otras (Engler y col. 2004; Abrate y col. 2006), un concepto equivocado o juicio falso (Lucchini y col. 2006) y/o un esquema cognitivo inadecuado (Del Puerto, 2006).

En general, se distinguen tres tipos de obstáculos según su naturaleza *ontogénica*, *didáctica* y *epistemológica*. En el primer caso, trata de capacidades y conocimientos insuficientes por limitaciones neurofisiológicas debidas a la edad cronológica, genéticas, de inteligencia, es decir, ligado al estudiante y a su madurez. En el segundo caso, el obstáculo surge por la elección de un proyecto, currículo, método, transposición didáctica, es decir, ligado a la actuación docente. En el último, el obstáculo se origina por la naturaleza del argumento matemático debido a que puede variar en relación a la evolución histórica (Brousseau, 1999; D'Amore, 2006). Es precisamente en este último obstáculo que se pueden presentar dificultades en relación a las argumentaciones disciplinares en el ámbito matemático.

Algunas de ellas pueden presentarse en las *representaciones semióticas* las cuales son producciones constituidas por el empleo de signos o el medio para exteriorizar sus representaciones mentales. En este sentido, la argumentación y los registros de representación semióticos son complejos porque requieren del uso de procesos cognitivos donde la mayor dificultad se da en la *conversión*, es decir, en la transformación que hace pasar de un registro a otro y el *tratamiento*, definido como la transformación que se efectúa al interior de un mismo registro sobre los objetos matemáticos (Duval, 1999). Esta dificultad en el pasaje de un sistema de representación a otro sucede porque no es un proceso trivial y se ve afectado principalmente en la práctica educativa debido a que existe una carencia en la diversidad de sistemas de representación que son presentados y desarrollados en el aula (D'Amore, 2006).

Algunos autores han trabajado en torno a la tipificación de obstáculos en matemática, a continuación se presenta una propuesta que es base para el análisis de los resultados en este estudio (Abrate y col. 2006, p. 37-38):

<b>Tipo de error Según la causa</b>	<b>Descripción</b>	<b>Ejemplo ilustrativo</b>
<b>1. Dificultades del lenguaje</b>	Errores derivados del mal uso de los símbolos y términos matemáticos, debido a una falta de comprensión semántica del lenguaje matemático.	Si $x$ denota la edad de María e $y$ la edad de Juan, la expresión que traduce al lenguaje simbólico la frase: “ <i>María tiene el doble de la edad de Juan</i> ” suele ser identificada con $2x = y$ .
<b>2. Dificultades para obtener información espacial</b>	Errores provenientes de la producción de representaciones icónicas (imágenes espaciales) inadecuadas de situaciones matemáticas.	 <p>El triángulo de la izquierda es identificado por los alumnos como un triángulo rectángulo, sin embargo, una rotación del mismo, como en el ejemplo de la derecha, lleva a que no sea identificado como tal.</p>
<b>3. Aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos</b>	Errores originados por deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos y procedimientos para la realización de una tarea matemática. Estas deficiencias incluyen la ignorancia de los algoritmos, conocimiento inadecuado de hechos básicos, procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas y dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios.	Identificación del intervalo continuo de números reales $[-2, 3]$ con el conjunto discreto $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ .
<b>4. Asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento</b>	Son errores que en general son causados por la incapacidad del pensamiento para ser flexible, es decir, para adaptarse a situaciones nuevas. Dentro de esta clase de errores se tienen:	
<b>4.1. Por perseveración</b>	Predominan los elementos singulares de un problema.	Demostrar una propiedad sobre triángulos en general, usando un triángulo rectángulo (un caso particular).

<p><b>4.2.</b> <i>De asociación</i></p>	<p>Razonamientos o asociaciones incorrectas entre elementos singulares.</p>	<p>Usar por ejemplo: <math>\sqrt{9+16} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 7</math></p>
<p><b>4.3.</b> <i>De interferencia</i></p>	<p>Cuando los conceptos u operaciones interfieren unos con otros.</p>	<p>La multiplicación de dos números negativos (<math>- * - = +</math>) interfiere en la resolución de una resta: <math>-3 - 5 = 8</math></p>
<p><b>4.4.</b> <i>De asimilación</i></p>	<p>Cuando la información es mal procesada debido a fallas de percepción.</p>	<p><math>2x - x = 2</math></p>
<p><b>5.</b> <i>Aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.</i></p>	<p>Errores producidos cuando se aplican reglas o estrategias similares en contenidos diferentes. El razonamiento por analogía sabemos que no siempre funciona en Matemática.</p>	<p>El cálculo de las raíces de <math>x^2 + x - 6 = 0</math> arroja por resultados correctos a <math>x_1 = 2</math> y <math>x_2 = -3</math>; en tanto que el cálculo de las raíces de <math>x^2 + x - 6 = -4</math> suele conducir erróneamente al mismo resultado, siendo que corresponden a <math>x_1 = 1</math> y <math>x_2 = -2</math>.</p>

Por otro lado, errores similares se han identificado en el ámbito geométrico, la mayoría son trabajados por autores como Vecino (2001); Godino y col. (2002), Franchi (2003); Blanco (2001); Radillo (2007); y Barrantes (2008).

**CAPÍTULO III**  
**METODOLOGÍA**

## 1. TIPO DE INVESTIGACIÓN

Esta investigación se llevó a cabo a través de la *metodología cualitativa*, la cual es una actividad sistemática orientada a la comprensión en profundidad de fenómenos educativos y sociales (Sandín, 2003, p.123). Aspecto que para esta investigación es crucial debido a que busca identificar un tema matemático presente en una realidad específica con el fin de establecer diferentes relaciones que ayuden a comprenderlo y así, obtener información útil para aquellos que se encuentren en una situación similar. Siempre teniendo en cuenta que cada caso y dato es único e irreplicable.

Este tipo de metodología tiene como propósito reconstruir la realidad tal como la observan los actores de un sistema social previamente definido (Sampieri, 2006, p. 9). En este sentido, los conceptos, acciones y decisiones de esta investigación se establecen y replantean constantemente según la evolución del grupo estudiado, sin ningún tipo de intervención y con el fin de interpretar críticamente lo observado debido a que eso, es un proceso gradual, constante y seguro a la hora de investigar. Pese a ello, fueron considerados algunos datos cuantitativos entregados por PENTA UC con el fin de caracterizar a los estudiantes y su contexto escolar.

Otro aspecto importante, es el carácter descriptivo del estudio, el cual busca especificar propiedades, características y rasgos importantes de un fenómeno que se analiza (Sampieri, 2006). Aspecto, que este caso en particular, se aplica al descubrir cuáles son las argumentaciones disciplinares y los obstáculos epistemológicos que cierto grupo de estudiantes puede presentar al resolver problemas matemáticos, todo esto con el fin de comprender la relación entre argumentos disciplinares construidos por los estudiantes, errores conceptuales/procedimentales y obstáculos epistemológicos.

Finalmente, el proceso de análisis fue realizado por medio del análisis de contenido el cual es definido por Ruiz (2003) como una técnica que lee e interpreta el contenido de toda clase de documentos, que posteriormente se analiza y teoriza a través de un marco y estrategia metodológica, entregando así información relativa a características personales o sociales

debido a que implica inferencia dentro del proceso. Esto permite que el estudio posea criterios de validez y confiabilidad debido a que en un análisis de contenido se determinan reglas de análisis que encuadran el trabajo (Cáceres, 2003, p.64), lo que en este estudio corresponde a las categorizaciones que se basan en el marco teórico.

En relación a los sujetos que están implicados en esta investigación, cabe mencionar que el tipo de selección es intencionada, donde sujetos particulares son expertos o relevantes como fuente de información según criterios establecidos (Bisquerra, 2014, p. 148): pertenecer al programa PENTA UC.

Lo destacable de este contexto de talento académico es que atiende a estudiantes con vulnerabilidad y estudiantes que pertenecen a establecimientos educacionales privados. Lo anterior, permite considerar una mayor diversidad de estudiantes con talento académico en los siguientes sentidos: características personales, culturales y familiares, social, escolar y de enseñanza matemática que poseen.

En particular para esta investigación, se consideraron estudiantes de octavo básico del Programa PENTA UC que hayan seleccionado y asistido a un curso matemático. El programa del curso presenta gran variedad de actividades que permiten conocer con mayor facilidad las argumentaciones de los estudiantes, tanto escritas como orales debido a que la profesora pide registros escritos de cada actividad y posteriormente realiza una puesta en común en donde los estudiantes de manera libre participan.

Cabe señalar que los estudiantes del programa PENTA UC, escogen tres opciones dentro de una variedad de cursos, de las cuales una de ellas será el curso que realizarán durante el semestre. La selección final del curso varía respecto a la asistencia de los estudiantes en sus cursos anteriores, sus intereses al elegir o no el curso dentro sus opciones, o porque los cursos llenan sus cupos y se les da otra de las opciones. Es así que de un total de aproximadamente 127 estudiantes que pertenecen a octavo básico, sólo 16 estudiantes (9 son mujeres y 7 son hombres) escogieron y/o quedaron seleccionados para realizar el curso.

Estos sujetos son seleccionados de manera previa para asistir al programa a través del Test de Matrices progresivas de Raven que mide el factor de inteligencia general. Esta es una medición que se realiza de manera escrita e individual por cada estudiante, la cual posee un total de 60 problemas que se dividen en cinco series que aumentan la dificultad entre una y otra. El resultado de este test genera información que permite caracterizar a este grupo de estudiantes de la siguiente manera:

- Todos los estudiantes, a pesar de los diferentes resultados obtenidos corresponden al 95% intelectualmente superior de los sujetos de su edad en el momento que iniciaron el proceso de ingreso al programa PENTA UC. Lo anterior se fundamenta a través de Ivanovic (2000) quién realiza un estudio de la capacidad intelectual en escolares chilenos.
  
- En la tabla 1 se evidencia que los resultados obtenidos del test que presentan los sujetos de este estudio se encuentran en el tramo de 49 a 57 respuestas correctas, concentrándose el mayor número de estudiantes en 52 soluciones de un total de 60. (6 de 16 estudiantes).

**Tabla 1: Caracterización de los estudiantes**

Estudiante	Genero	Establecimiento	Comuna	Dependencia	Raven (Respuestas correctas/ Total)	Año de ingreso	Nº de cursos matemáticos anteriores
VA	F	Escuela Básica Juan Pablo Duarte	Providencia	Municipal	52 / 60	2011	2
IA	M	Escuela Araucarias de Chile	Conchalí	Municipal	49 / 60	2011	2
MB	M	Instituto Nacional José Miguel Carrera	Santiago	Municipal	52 / 60	2011	4
PC	F	Liceo Bicentenario Talagante	Talagante	Municipal	52 / 60	2011	3
HC	M	Colegio San Francisco del Alba	Las Condes	Municipal	57 / 60	2011	2
JE	M	Escuela Millahue	Cerro Navia	Municipal	50 / 60	2011	4
GG	F	Escuela Tupahue	San Ramón	Municipal	50 / 60	2011	1
SL	M	Escuela Básica Juan Pablo Duarte	Providencia	Municipal	52 / 60	2011	3
DL	F	Colegio Pedro de Valdivia de Peñalolén	Peñalolén	Particular	57 / 60	2011	3
FM	F	Colegio María Auxiliadora De Santiago	Santiago	Subvencionado	51 / 60	2013	0
CP	M	Escuela Alivén	San Ramón	Municipal	50 / 60	2011	2
RR	F	Santa Úrsula	Vitacura	Particular	57 / 60	2013	0
VS	F	Liceo Carmela Carvajal de Prat	Providencia	Municipal	52 / 60	2011	4
BS	F	Liceo Bicentenario Talagante	Talagante	Municipal	51 / 60	2011	2
VU	F	Universitario El Salvador	Ñuñoa	Particular	56 / 60	2011	3
RV	M	Augusto D°Halmar A 47	Ñuñoa	Municipal	52 / 60	2012	1

Otro aspecto importante que se evidencia en la tabla 1, es la diversidad que se manifiesta en la comuna y en el tipo de dependencia escolar de la que cada estudiante proviene. Es así como del total de estudiantes un 81,25% corresponde a dependencia municipal, 12,5% de dependencia particular y 6,25% a dependencia subvencionada. Esto a su vez, genera una mayor diversificación en los datos al considerar la comuna de cada colegio al cual los estudiantes asisten, generándose cinco coincidencias en las siguientes comunas: Providencia, Santiago, Talagante, San Ramón y Ñuñoa. En las siguientes comunas, la frecuencia corresponde a un estudiante: Conchalí, Las Condes, Cerro Navia, Peñalolén y Vitacura.

Respecto a las coincidencias, cabe señalar que se presentan dos casos en donde dos personas pertenecen a un mismo colegio, sin embargo, esto no quiere decir que pertenezcan a un mismo curso en su escuela y todo lo que ello conlleva.

A modo general, en la tabla 1 se evidencia que este grupo de estudiantes tuvo el mismo tipo de admisión, es decir aquella en la que se aplica el test de Raven. Sin embargo, existen tres estudiantes que su año de ingreso fue diferente al total de estudiantes. Esto quiere decir que el año 2011 es el año de ingreso de la mayor parte de la muestra, lo que influye en el número de cursos matemáticos anteriores.

Es así como en la experiencia con cursos matemáticos<sup>2</sup> dentro del PENTA UC se evidencia que es variada, donde el mayor número de cursos alcanzados son cuatro, pero donde sólo tres estudiantes pertenecen a ese rango. Tres estudiantes participaron en tres cursos de la disciplina, seis estudiantes cursaron dos, dos estudiantes cursaron uno y dos estudiantes no han cursado ningún curso matemático previamente.

## **2. TÉCNICA DE RECOLECCIÓN DE DATOS**

Una de las etapas importantes dentro de toda investigación es la recolección de datos debido a que a través de ella se logra comprender la realidad. Según Sampieri (2006) dentro de una investigación cualitativa, esta es una etapa que busca obtener datos en las propias “formas de expresión” sobre percepciones, interacciones, creencias, entre otros. Es decir, el fin es obtener antecedentes donde el foco es el ser humano inmerso en su contexto natural. Esto es fundamental dentro de esta investigación debido a que los argumentos se expresan a través del lenguaje, ya sea escrito u oral, entonces se hace necesario el uso de recolección de datos que permitan conocerlos y analizarlos no con el fin de medirlos, sino para comprender y establecer diferentes relaciones respecto a la realidad estudiada.

---

<sup>2</sup> Los que dentro del programa corresponden a temáticas tales como: Programación, Geometría, Olimpiadas matemáticas, Teselaciones, Métodos de cifrado, Razonamiento matemático, entre otros.

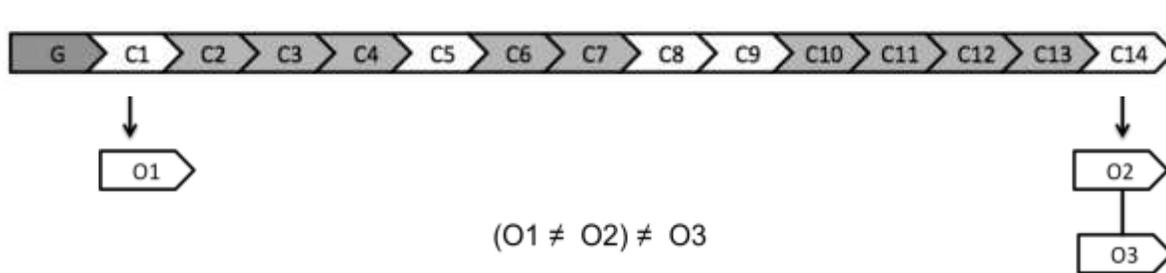
El curso contaba con catorce sesiones, de ellas se seleccionaron nueve clases (C2,C3,C4,C6,C7,C10, C11,C12 y C13), lo que se fundamenta en que aquellas fueron las que tuvieron un menor número de inasistencia (como máximo cuatro). La tabla extendida se encuentra en el anexo 1.

**Tabla 2: Objetivos de las clases seleccionadas**

Clase 1	Clase 2	Clase 3	Clase 4	Clase 5
Resolver problemas de razonamiento inductivo.	Resolver problemas de razonamiento inductivo.	Resolver problemas en busca de una solución eficiente.	Resolver problemas en busca de una solución eficiente.	Resolver situaciones paradójicas asociadas a problemas matemáticos.
Clase 6	Clase 7	Clase 8	Clase 9	
Resolver situaciones paradójicas asociadas a problemas matemáticos.	Justificar razonamientos correctos e identificar razonamientos falaces.	Justificar razonamientos correctos e identificar razonamientos falaces.	Objetivos planteados de la sesión 1 a la sesión 8.	

Se puede observar que en las nueve clases seleccionadas existen cuatro objetivos que se desarrollaron: Resolver problemas de razonamiento inductivo, resolver problemas en busca de una solución eficiente, resolver situaciones paradójicas a problemas matemáticos y justificar razonamientos correctos e identificar razonamientos falaces.

**Esquema 1: Diseño**



El esquema 1 representa el diseño del estudio y sus diferentes técnicas aplicadas a un grupo “G” escogido y autorizado previamente por el programa PENTA UC. Durante las catorce sesiones existió observación directa de tipo participante debido a que en ella el observador se pone en contacto directo con el fenómeno de interés, y a su vez, al ser participante, la verdadera identidad y el propósito del investigador se mantienen ocultos a aquellos que se observa (Marradi y col. 2007). Para los estudiantes no fue de conocimiento el rol de

investigador, sino más bien el de “ayudante” del curso, lo que facilitó una mayor verbalización en ellos. La participación consistía en guiar y motivar a los estudiantes por medio de preguntas o de una explicación más profunda, con el objetivo de obtener resultados o respuestas para cada actividad a través de una interacción llevada a cabo de manera confiable, con respeto y empatía.

Por otra parte, el análisis de contenido en base a criterios definidos en el marco teórico fue aplicado a la evaluación inicial y final (O1 y O2) del curso estudiado, su aplicación es obligatoria dentro del programa PENTA UC debido a que con ella miden el impacto o evolución de los aprendizajes de los estudiantes en los cursos. El mismo tipo de análisis se aplicó a un cuestionario final (O3), los documentos escritos y registros de audio. Estos datos se complementan con:

1. Evaluación general del PENTA UC sobre los estudiantes.
2. Encuesta y comentarios de los estudiantes sobre el curso y profesora.
3. Entrevista realizada a la profesora

En el caso 1 y 2 (evaluación general y encuesta): los datos fueron entregados por el PENTA UC. En el caso 2 (comentarios) y 3: la información fue recolectada para profundizar los datos descritos anteriormente.

### **3. INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS**

Los instrumentos de recolección de datos son un mecanismo o dispositivo que utiliza el investigador para generar la información (Yuni, 2006, p. 31), por lo tanto es una forma de operacionalizar el proceso investigativo, es decir organizar y documentar las diferentes acciones llevadas a cabo.

- Pre y post test (O1 y O2): recopilado como una fuente documental, los cuales fueron creados por la profesora del curso. Ambos instrumentos corresponden a cuatro

preguntas abiertas que apuntan a los contenidos del curso (paradojas, curiosidades y falacias, ver anexo 2).

Lo importante en ambas evaluaciones es que la profesora pide que los estudiantes expliquen cómo resolvieron los problemas (comprendido como una actividad que no se puede resolver inmediatamente). Sin embargo, entre ambos instrumentos existen algunas diferencias debido a que en algunos casos se repite la misma pregunta (2 y 4) o en otros se plantean otras con ciertas modificaciones, del problema y no del contenido que abarcan (1 y 3), decididas por la profesora debido a que hubieron inasistencias reiteradas de algunos estudiantes:

Pre test (O1)	Post test (O2)																																
<p>P1. ¿Cómo lograr que se cumpla la igualdad?</p> $\begin{array}{r} \text{RAS} \\ +\text{PAR} \\ \hline \text{ASSA} \end{array}$	<p>P1. En las siguientes igualdades el signo "+" no quiere decir "más" ¿Qué significa entonces?</p> $1 + 4 = 3$ $4 + 6 = 7$ $6 + 4 = 8$																																
<p>P2. Completa el cuadrado con números del 1 al 16, de manera que la suma de los números de las filas, columnas y diagonales sea la misma.</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>16</td><td>2</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>5</td><td></td><td>10</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>6</td><td>12</td></tr> <tr><td></td><td>14</td><td></td><td>1</td></tr> </table>	16	2			5		10				6	12		14		1	<p>P2. Completa el cuadrado con números del 0 al 15 (sin repetirlos) de manera que la suma de los números de filas, columnas y diagonales sea la misma.</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>																
16	2																																
5		10																															
		6	12																														
	14		1																														
<p>P3. Describe y explica una de las paradojas de Zenón.</p>	<p>P3. Describe y explica una de las siguientes paradojas: -Aquiles y la tortuga -La flecha -Los gemelos -El Hotel infinito.</p>																																
<p>P4. Ud. deposita \$50.000 en su banco y después hace una serie de retiros de la siguiente manera:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-Retira \$20.000, dejando un saldo de \$30.000</li> <li>-Retira \$15.000, dejando un saldo de \$15.000</li> <li>-Retira \$ 9.000, dejando un saldo de \$ 6.000</li> <li>-Retira 56.000, dejando un saldo de \$ 0</li> </ul> <p>Sumando tiene \$50.000                      \$51.000</p> <p>¿Puede ir al banco a reclamar esos 51.000? Explique por qué</p>	<p>P4. Ud. deposita \$50.000 en su banco y después hace una serie de retiros de la siguiente manera:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-Retira \$20.000, dejando un saldo de \$30.000</li> <li>-Retira \$15.000, dejando un saldo de \$15.000</li> <li>-Retira \$ 9.000, dejando un saldo de \$ 6.000</li> <li>-Retira 56.000, dejando un saldo de \$ 0</li> </ul> <p>Sumando tiene \$50.000                      \$51.000</p> <p>¿Puede ir al banco a reclamar esos 51.000? Explique por qué</p>																																

-Documentos escritos: se refiere a los registros de los estudiantes a la hora de resolver los problemas propuestos para cada contenido del curso.

En las siguientes igualdades el signo “:” no quiere decir “división” ¿Qué significa entonces?

$2:3 = 7$	$2 - (3 \cdot 3) = 2$	El divisor se triplica y se le resta al dividendo
$4:6 = 14$	$4 - (6 \cdot 3) = 14$	
$1:9 = 26$	$1 - (9 \cdot 3) = 26$	

- Cuestionario: Corresponde a diez problemas donde se pide justificar, los que fueron recuperados del Test de Matrices Progresivas de Raven, en el cual el objetivo es identificar el patrón implicado. Este Test consiste en cinco series donde la dificultad va aumentando en el número de preguntas de cada serie y a su vez, a medida que las series van aumentando. La elaboración y aplicación de este cuestionario en esta investigación se fundamenta en que es un instrumento que permite obtener evidencia del talento académico en matemática contextualizado en la habilidad argumentativa. Además, los problemas seleccionados tienen relación con el eje álgebra y patrones del currículum nacional, de esta forma no se deja de lado la matemática escolar.

**Problema:** Observa la siguiente imagen. ¿Qué debería dibujarse en  para completar la plantilla? ¿Puedes identificar algún patrón? Justifica tu respuesta.

-Registro de audio: Se refiere a la grabación del total de las clases, las cuales fueron posteriormente transcritas. La justificación de su uso se fundamenta en el concepto de argumentación, ya que la verbalización en el aula se realiza de manera natural, es decir, sin previo aviso, ahí la importancia de rescatarlos completamente (de manera literal) para que sean lo más válido posible. En este sentido, la observación permitió comprender la manera en que las argumentaciones se externalizaron en el aula.

-Encuesta: aplicada por el PENTA UC con el fin de que los estudiantes evalúen al docente y el curso en el que participaron. La encuesta consiste en cuatro partes, la primera que considera aspectos relacionados al curso, luego la profesora y finalmente se les solicita a los estudiantes escribir algunos comentarios relacionados a aspectos destacados y que se podrían mejorar dentro del curso. En las dos primeras categorías se selecciona la opción que más se acerque a lo que los estudiantes piensan, es decir asignan un número para cada pregunta que luego es promediado entre los alumnos del curso y los que pertenecen al mismo nivel, octavo básico. Cabe mencionar que esta es una encuesta que se aplica a todos los estudiantes del programa, ellos evalúan y después pueden inscribir cursos para el siguiente semestre, por lo tanto, es obligatoria y se realiza en una sala de computación.

Las preguntas correspondientes al curso son en total siete, dentro de ellas se consideran aspectos como la motivación, los contenidos, la exigencia, entre otros; y en el caso de la profesora, se evalúan aspectos como su claridad, interacción y puntualidad. Sumado a todo esto, dentro del curso se les solicitó a los estudiantes responder a tres preguntas abiertas como modo de evaluación debido a que los comentarios realizados en la encuesta necesitaban una mayor profundidad. Tales preguntas apuntaban a conocer los aspectos que a los estudiantes le parecieron buenos, malos y aquellos que les gustaría cambiar.

-Entrevista: realizada a la profesora del curso la cual se llevó a cabo en un lugar propuesto por ella. Para ello, se realizaron previamente algunas preguntas relacionadas a aspectos personales como su experiencia laboral docente y su motivación al elegir esta profesión. También se consideraron aspectos relacionados al PENTA UC como su historia dentro del programa, experiencia y concepciones, para así finalizar la entrevista conociendo

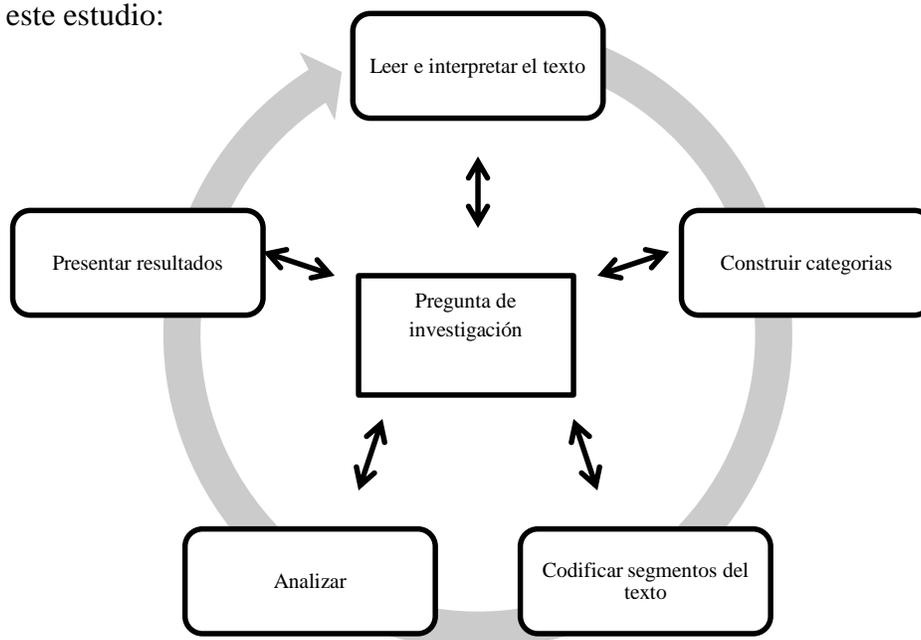
su experiencia dentro del curso estudiado, percepción de aspectos como las dificultades, potencialidades, los estudiantes y las actividades. En general, la entrevista tuvo una duración de una hora y veinte minutos.

#### 4. PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS DE DATOS

Sampieri (2006) reconoce que el procedimiento de análisis en una investigación cualitativa no sigue un orden o secuencia determinada y/o estandarizada para todos los estudios de este tipo. En este caso, se planteó de la siguiente manera:

Todos los datos recopilados fueron analizados a través del *análisis de contenido*, el cual consiste la lectura e interpretación del contenido de toda clase de documentos (Ruiz, 2012), personales o registros transformados en texto. Lo que permite encontrar respuesta a las preguntas centrales de esta investigación debido a que este análisis trata de saber lo que hay detrás de las palabras y los mensajes (Bardin, 1996) por medio de inferencias reproducibles y validas de los textos a los contextos de su uso (Krippendorff, 2003, p.18). Se rescata que este tipo de análisis sea contextualizado y de documentos, lo que aporta mucho a este estudio debido a que las argumentaciones surgen, se desarrollan y dependen de cada contexto.

Un proceso general de análisis cualitativo de contenido o de un texto posee las siguientes etapas en este estudio:



El anterior esquema proviene de Kuckartz (2014) y fue escogido porque todas las etapas son secuenciales, pero el proceso es cíclico, lo que permite volver a revisar cada una de las etapas anteriores. Además, en cada etapa existe el trabajo con la pregunta de investigación, aspecto que durante el proceso se llevó a cabo de esa manera, volviendo a las preguntas constantemente. En este estudio las etapas se realizaron de la siguiente manera:

- *Leer e interpretar el texto:* Esta es una etapa que tuvo diferentes procesos para llegar a materializar un texto. Primero dos grabadoras registraron los comentarios en todas las clases (una de las grabadoras fue ubicada en la mesa de la profesora y la otra era transportada constantemente por el investigador dentro de la sala de clases). Posteriormente, se realizó el proceso de transcripción el cual era chequeado por el audio de ambas grabadoras. Para el texto final era extenso, por lo cual, a través de la observación de clases se seleccionaron situaciones específicas que permitieran dar respuesta a las preguntas de este estudio, privilegiando situaciones donde los estudiantes estuvieran en constante diálogo con su profesora y/o pares. Por el contrario, los documentos escritos y los comentarios de la encuesta son considerados como texto debido a que en ellos se encuentran los datos por sí solos.

- *Construir categorías:* Luego de tener seleccionados los textos (transcripciones y problemas de las nueve clases seleccionadas, cuestionario, evaluación inicial-final, comentarios y entrevista transcrita) se construyeron categorías a través del marco teórico, lo que se conoce como *modelo de desarrollo de categorías deductivas*. Sin embargo, para los datos como el cuestionario, comentarios y entrevista<sup>3</sup> se utilizó el *modelo de desarrollo de categorías inductivo*, donde la construcción se realiza desde el texto (Andréu, 2001, p.24).

---

<sup>3</sup> La categorización se encuentra en el anexo 3.

Las categorías seleccionadas de manera deductiva son las siguientes:

Categorías	Subcategorías
<p><b>1.1. Explicación (E):</b> Es una declaración o exposición donde se dan una o más razones para aportar nueva información, lo cual permite tener evidencia de que el estudiante comprendió el problema.</p> <p><b>1.2. Justificación (J):</b> Probar con razones convincentes o casos particulares la veracidad o falsedad de una afirmación o procedimiento. En este sentido, no es una argumentación disciplinar y no es lo mismo que una demostración. Además, se asume que el estudiante comprende y es capaz de generar una explicación.</p>	<p><b>1.3.1. Deductiva (AD):</b> Cuando a partir de premisas que se suponen verdaderas se deduce una conclusión que debe ser verdadera.</p> <p><b>1.3.2. No Deductiva (AND):</b> Cuando la proposición o conclusión surge de las experiencias del contexto y la disciplina usando alguna de las premisas. Por lo tanto, es informal, incierta y con estatus de conjetura.</p> <p><b>1.3.3. Visual (AV):</b> Cuando se utilizan representaciones visuales, diagramas y otros elementos que ayuden a visualizar las propiedades.</p> <p><b>1.3.4. Inductiva (AI):</b> Consiste en probar una propiedad matemática con casos (ejemplos, contraejemplos o a través de la observación).</p> <p><b>1.3.5. Abductiva (AA):</b> Consiste en obtener una conclusión, no a partir de datos o premisas sino que interpretándolas o extrayendo información significativa relacionando con otros hechos que las expliquen. Es totalmente experiencial.</p>
<p><b>1.3. Argumentación:</b> Es un razonamiento que utiliza premisas o proposiciones para construir una justificación disciplinar.</p>	<p><b>1.3.6. No monotónica (ANM):</b> Consiste en agregar nuevas proposiciones o premisas a un razonamiento sin invalidar viejas conclusiones.</p> <p><b>1.3.7. A conocimiento cero (AAC):</b> Consiste en presentar una proposición matemática a un interlocutor convencándolo de la veracidad.</p>
<p><b>2. Obstáculo:</b> Es un conocimiento con resultados correctos o ventajas apreciables en un determinado ámbito, pero en otro nuevo o más amplio se manifiesta falso o inadecuado.</p> <p>*(Dentro del marco teórica se puede visualizar un ejemplo para cada uno de los obstáculos)</p>	<p><b>2.1 Del lenguaje (OL):</b> Errores derivados del mal uso de los símbolos y términos matemáticos, debido a una falta de comprensión semántica del lenguaje matemático.</p> <p><b>2.2. Aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos (OA):</b> Errores originados por deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos y procedimientos para la realización de una tarea matemática. Incluyen ignorancia de los algoritmos, conocimiento inadecuado de hechos básicos, procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas y dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios.</p> <p><b>2.3. Aplicación de reglas o estrategias irrelevantes (OR):</b> Aplicación de reglas o estrategias similares en contenidos diferentes.</p> <p><b>2.4. Incongruencia entre registros (I):</b> Cuando las unidades de cada registro no son congruentes entre sí. Esto genera un aumento en el tratamiento y/o la conversión puede resultar imposible de efectuar.</p>

	<p><b>2.5. Tratamiento (T):</b> Es una transformación de la representación al interior del registro de representación o de un sistema el cual ocasiona obstáculos. (Ejemplo: Cálculo: es tratamiento interno al registro de la escritura simbólica de cifras o letras).</p> <p><b>2.6. Para obtener información espacial (OI):</b> Proviene de la producción de representaciones icónicas (imágenes espaciales) inadecuadas de situaciones matemáticas.</p> <p><b>2.7. Asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento (OAI):</b> Son errores que en general son causados por la incapacidad del pensamiento para ser flexible, es decir, para adaptarse a situaciones nuevas.</p> <p><b>a. Por perseveración (OAIP):</b> Predominan los elementos singulares de un problema. (Ejemplo: Demostrar una propiedad general usando un caso particular).</p> <p><b>b. De asociación (OAIA):</b> Razonamientos o asociaciones incorrectas entre elementos singulares (Usar propiedades incorrectamente, ejemplo: suma de raíces cuadradas)</p> <p><b>c. De interferencia (OAI):</b> Cuando los conceptos u operaciones interfieren unos con otros (multiplicación de signos negativos interfiere en la resolución de una resta con números negativos).</p> <p><b>d. De asimilación (OAIAS):</b> Cuando la información es mal procesada debido a fallas de la percepción.</p>
<p><b>3. Registros de representación (Varettoni, 2012):</b> Es un medio de expresión que se caracteriza por signos propios y la forma en que estos se organizan debido a que a través de ellos un sujeto objetiva una idea.</p>	<p><b>3.1. Registros de representación verbal – escrito (RVD):</b> Alude a las resoluciones en lenguaje natural escrito o verbal.</p> <p><b>3.2. Registros de representación pictográfica (RPD):</b> Resolución mediante dibujos que intentan representar lo más fielmente posible los elementos involucrados en el problema.</p> <p><b>3.3. Registros de representación icónicos (RID):</b> Resolución mediante representaciones que no dan cuenta de los elementos involucrados en el problema (bosquejos, líneas, marcas, puntos, cruces, etc.)</p> <p><b>3.4 Registros de representación simbólicos (RSD):</b> Resoluciones en las que se utilizan símbolos convencionales usados por la matemática.</p>

- *Codificar segmentos del texto:* Cada frase transcrita y texto producido por los estudiantes fueron asociadas a algún tipo de categoría/subcategoría (tipo de argumento, obstáculo y registro presente), en un archivo Excel como análisis preliminar (ver anexo 4).

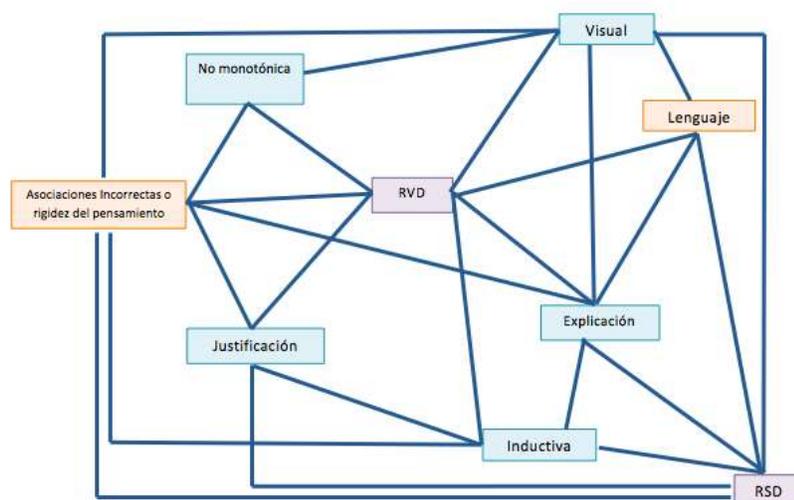
Un ejemplo de codificación en el estudio se presenta a continuación:

Nº	Texto	Argumento	Obstáculo	Registro
1	Uh, hartos intentos (es que no me da) ya pero tampoco hay que perder la paciencia.... (9, 8, 7... por que el 9 me sale mal?)ya, pero va bien,	1. Justificación 2. No monotónica	Asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento	RVD
2	por que crees que esos tienen que ir separados?	1. No monotónica 2. Visual		RVD
3	(porque la profe me dijo)	1. Justificación		RVD
4	pero por que crees tu? en comparación al 1 y al 2?	1. No monotónica 2. Visual		RVD
5	(ah, porque si junto todos los grandes no me da) esa es la idea. (3,2, el 1... 5,6,... no ya me dio mal)	1. Justificación 2. Inductiva	Asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento de tipo Asimilativa	RVD
6	como van? (no da profe) pero no importa, los demás estuvieron toda una clase en eso.	Justificación		RVD
7	Haber, escribe todos los números acá, los que tienen que ir (así) del 1 al 9 ya (9 mas 1 mas 5... 9, 8, 7...) ya, tienes que hacer combinaciones de números, anda mirando los números si es que cual te sirve más y cual no (mmm...) ya, pero quizás puedes mover los números, puedes cambiarlo de casilla... ya, pon el 9, el 8, el 7... 8, 9, 11,12,13	1. Explicación 2. Visual 3. Abductiva	Lenguaje	RSD y RPD
8	(es que no me resulta)	Justificación	Asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento	RVD
9	¿dónde no te resulta? ...	No monotónica		RVD
10...	5, 8, 9, 10... ya, 7 y 1 no pueden ir juntos porque o sino te faltaría un 7 que ya estas usando...	1. Justificación 2. Inductiva		RVD

Esta es una clase con 20 segmentos de textos o unidades de análisis obtenidos en la transcripción de la clase, pero sólo se presentan la mitad de ellos con el fin de explicitar el proceso llevado a cabo: Se segmentó el texto completo considerando que su división permitiera adjudicar más de una subcategoría para las categorías de argumento, obstáculo y registro para poder realizar en la etapa siguiente el análisis de similitud (aplicado sólo a los registros de audio). Por otro lado, las oraciones o frases que están dentro de un paréntesis, fueron externalizadas por los estudiantes y las que no poseen paréntesis, son textos que pertenecen a la profesora y/o ayudante.

- *Analizar:* Esta etapa se llevó a cabo de dos maneras, la primera con gráficos o tablas apoyados teóricamente para los documentos escritos, entrevista, cuestionario,

evaluación inicial-final y encuesta. La segunda, por medio de *análisis de similitud*, el cual consiste en revelar los aspectos comunes existentes entre dos o más elementos cuando un mayor número de sujetos lo tratan de una misma manera (Latorre, 2001, p. 49). Lo cual se realizó en los registros de audio, donde cada codificación fue procesada con un programa que genera un esquema a modo de grafos, los cuales permiten visualizar la presencia de relaciones entre las categorías y subcategorías. Como el siguiente ejemplo:



El Registro verbal-escrito (RVD) da cuenta de un argumento centrado en la justificación-explicación e inducción caracterizado por incorporar nuevas proposiciones o premisas (argumento no monotónico) al razonamiento que permite comprobar el procedimiento realizado o la conclusión obtenida. Al mismo tiempo, el razonamiento del estudiante incorpora representaciones o diagramas que permiten el uso de argumentos visuales y así abordar los problemas planteados con presencia de obstáculos por asociaciones incorrectas o rigidez de pensamiento al construir la justificación a través de contraejemplos o argumentar la respuesta al problema en función de premisas.

- *Presentar resultados*: Esta es una etapa que corresponde al siguiente capítulo de este informe, para ello, se utilizó el resultado final de cada texto (grafos, gráficos y tablas) debido a que esto permite visualizar las relaciones entre cada categoría y subcategoría para así relacionarlo a su vez con el marco teórico de este estudio y el contexto propiamente tal.

## 5. VALIDEZ Y CONFIABILIDAD DEL ESTUDIO

Autores como Bisquerra (2014) y Sampieri (2006) establecen que la validez y confiabilidad dependen del investigador en el sentido de decidir utilizar criterios equivalentes o no a la investigación cuantitativa. En este caso en particular, es así como serán considerados los siguientes conceptos y su manera de proceder:

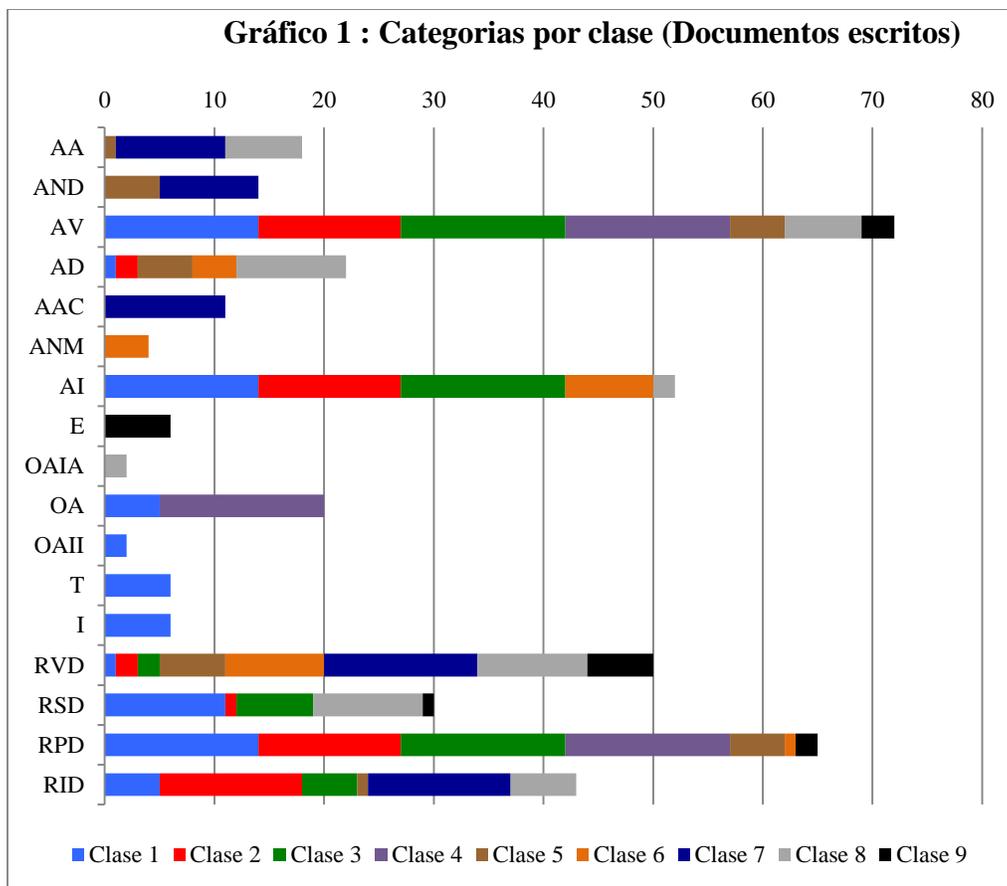
- **Credibilidad:** Consiste en el valor de verdad de la investigación, es decir que los resultados se ajusten a la realidad (Bisquerra, 2014, p. 289) y sean capaces de capturar el significado completo y profundo de las experiencias de los participantes (Sampieri, 2006, p. 665). Para ello se realizó una observación persistente y prolongada, en este caso, al total de clases utilizando *triangulación de datos* a través de observación (contexto), entrevista a la profesora y diferentes tipos de documentación realizada por los estudiantes vinculada al objetivo central del estudio.
- **Dependencia o Confiabilidad:** Corresponde a la consistencia de los datos (Bisquerra, 2014, p. 290) o el grado en que diferentes investigadores recolectan datos similares en el campo, efectúan los mismos análisis y generan resultados equivalentes (Sampieri, 2006, p. 665). Es así que dentro del estudio se utilizó un programa computacional para el análisis de los datos; *dependencia interna* donde diversos investigadores (al menos dos) generan temas similares con los mismos datos. En este caso el estudio se llevó a cabo en todo momento por una persona, pero todos los datos y el proceso en general se llevó a cabo bajo la supervisión del profesor guía, lo que corresponde a una *auditoria externa*. Por otro lado, otros aspectos que permiten visualizar este concepto dentro del estudio corresponden a los diferentes procesos que se han explicitado con anterioridad, algunos como: Perspectiva teórica y diseño del estudio, criterio de selección de los participantes, rol del investigador, herramientas para recolectar datos y sus métodos de análisis.

- **Transferencia:** Consiste en la posibilidad de que la información obtenida pueda aplicarse a otros contextos similares (Bisquerra, 2014; Sampieri, 2004). En este caso, el objetivo del estudio no es la generalización, pero contribuye generando una pauta y mayores conocimientos respecto a los estudiantes con talento académico. Esto se puede evidenciar en la descripción y recolección exhaustiva del contexto (Entrevista, documentos escritos, cuestionarios, encuesta y observación).
- **Confirmabilidad:** Consiste en proporcionar información lo más consensuada posible, encaminada hacia la objetividad y neutralidad (Bisquerra, 2014, p. 290). Para ello, se utiliza la *auditoria externa* y la *triangulación de los datos*. Junto a ello, todo tipo de afirmación dentro del estudio posee marcos de referencia señalados cuando corresponde.

**CAPÍTULO IV**  
**RESULTADOS OBTENIDOS**

## 1. DOCUMENTOS ESCRITOS<sup>4</sup>

Los documentos escritos identifican el tipo de registro, argumento y obstáculo que los estudiantes utilizaron en las diferentes actividades planteadas en el curso, las cuales se evidencian en el gráfico 1:



Los estudiantes con talento académico se aproximan al conocimiento de manera intuitiva (Arancibia y col. 2012) lo que se verifica en el gráfico 1: en todas las clases existe un mayor uso (el doble del promedio) del argumento visual (AV) e inductivo (AI). Esto principalmente porque los problemas estaban asociados a probar la veracidad o falsedad de afirmaciones, propiedades y/o conjeturas.

<sup>4</sup> Ver análisis preliminares de las clases en el anexo 4.1 y ejemplos en el 4.2 (Clase 2,7 y 8 analizadas y Clase 3 y 5 descritas)

Cabe destacar que el argumento no monotónico (ANM) y la explicación (E) son categorías con menor frecuencia, lo cual evidencia la no construcción de argumentaciones a partir de premisas o nuevas proposiciones sin invalidar viejas proposiciones.

En las tres primeras clases se destaca la utilización de registros RSD, RPD y RID, lo cual refleja la necesidad de trabajar con diferentes registros de representación al resolver problemas no rutinarios en matemática debido a que a través de ellos se construyen conceptos matemáticos (Duval, 1999; Socas, 1997; D'Amore, 2002) y se desarrollan capacidades matemáticas esenciales (Socas, 1997). Por último, la utilización de registros RSD, RPD y RID en las tres primeras clases coincide con la construcción de argumento inductivo y la utilización del argumento visual, lo cual evidencia la dificultad que implica resolver problemas matemáticos caracterizados por un razonamiento inductivo y de alta demanda cognitiva en matemática.

Respecto a los obstáculos epistemológicos, el gráfico 1 evidencia que los documentos escritos presentan obstáculos por aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos (OA), asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento de interferencia (OAI) y asociativa (OAI), tratamiento (T) e incongruencia entre registros (I). Sin embargo, sólo el primero de ellos se presenta en dos clases, lo cual no sucede con los otros cuatro obstáculos debido a que sólo se producen en una clase en particular.

La presencia de obstáculos, se evidenció durante la observación de clases en relación a la quinta expresión del problema de la clase 1 (ejemplo 1c)<sup>5</sup>, donde habían distintas respuestas posibles. Una de ellas, es de un estudiante quien reconoció una cierta regularidad en relación al uso de paréntesis, lo cual le permitió manejar el orden de las operaciones en expresiones con operaciones combinadas (su respuesta, será usada como la esperada):

$$\{((((((1*2) +3) -4) +5) :6) +7) :8\} =1$$

---

<sup>5</sup> Ver el análisis completo en el anexo 4.2

*Estudiante 1:* Paréntesis, paréntesis...

*Profesora:* No, no importa, es que si no hay paréntesis, entonces se asume que parte de aquí para allá. Entonces sería... dos por uno...dos. Menos tres... menos uno. Mas cuatro... tres. Más cinco... ocho. Más seis...catorce.

*Estudiante 2:* Hay divisiones...

*Estudiante 1:* Pero hay divisiones ¿propiedad de operación o no?

*Profesora:* Debiera ser que cuando uno no pone paréntesis, que partiera por la multiplicación o la división, pero lo que ellas están haciendo, que puede ser porque se lo enseñaron así, es de aquí para allá, entonces aquí vamos en el catorce, dividido siete... dos. Más ocho... diez. Menos nueve... 1. ¿Sí? Entonces lo que están haciendo es seguir el orden estricto de aquí para allá. No hay que complicarse con eso porque depende del profe de matemática y la escuela que tenga, si estudio con los franceses o con los ingleses, va a poner más o menos paréntesis y va a hacer la operatoria de una u otra manera, lo importante es que lo entiende y que el profe después lo entienda... porque aquí no ponemos nota, pero en los colegios si.

La situación anterior, evidencia que hubieron dos estudiantes que reflexionaron de manera crítica sobre el obstáculo que otro estudiante declaraba (asociación incorrecta o rigidez del pensamiento de interferencia y tratamiento) a través del orden incorrecto a la hora de desarrollar operaciones combinadas en matemática que impliquen multiplicación y división. La consecuencia de situaciones como esta es generar, ya sea a corto o largo plazo, confusiones en los estudiantes respecto a lo que es matemáticamente permitido. Es decir a que el obstáculo persista debido a que el dialogo evidencia que además hubo obstáculo didáctico, es decir con el proceso de enseñanza (Brousseau 1999; D' Amore, 2006) debido a que la manera de tratar esta situación no logra hacer comprender y modificar el error.

Por otro lado, la información recopilada a través de los documentos escritos permite generar un criterio para seleccionar los problemas analizados<sup>6</sup> y grafos que se presentarán, lo cual se explica a través del capítulo de metodología, el cual presentó los objetivos de

---

<sup>6</sup> Ver análisis en el anexo 4.2

cada una de las clases seleccionadas, en ellas se logran distinguir cuatro grandes objetivos matemáticos:

**Tabla 3: Resumen de la tabla 2 de Objetivos**

Objetivo de la clase	Razonar inductivamente	Aplicar destrezas	Argumentar	Evaluar el curso
Nº de la clase	1,2,3	4	5,6,7,8	9

La tabla 3 presenta los objetivos que se encontraron en las nueve clases analizadas, los cuales corresponden al razonamiento inductivo, aplicación de destrezas, argumentación y evaluación del curso. Sin embargo, el razonamiento inductivo y la argumentación fueron aplicados en un mayor número de clases (la nº 1, 2, 3, 5, 6, 7 y 8). Estos dos objetivos fueron asociados al análisis de documentos escritos materializado en gráficos (ver anexo 5) y resumidos a continuación:

**Tabla 4: Resumen de categorías de las clases**

Clase nº	1	2	3	Clase nº	5	6	7	8
	(F)	(F)	(F)		(F)	(F)	(F)	(F)
Categoría				Categoría				
Argumento inductivo	14	13	15	Argumento deductivo	0	4	9	10
Registro de representación verbal-escrito (RVD)	1	2	2	Argumento no deductivo	0	0	0	0
Registro de representación simbólico (RSD)	11	1	7	Argumento abductivo	6	4	10	7
Registro de representación pictórico (RPD)	14	13	15	Registro de representación verbal-escrito (RVD)	6	9	14	10
Registro de representación icónico (RID)	5	13	5	Registro de representación simbólico (RSD)	0	0	0	0
				Registro de representación pictórico (RPD)	5	1	0	10
				Registro de representación icónico (RID)	1	0	13	6

La tabla 4 evidencia que el objetivo de la sesión 1, 2 y 3 está relacionado con resolver problemas de razonamiento inductivo, frente a lo cual los estudiantes debieron resolver cuadrados mágicos, problemas aritmético-algebraico y problemas de operatoria aritmética en el conjunto de los números enteros. En relación a las respuestas de los estudiantes, los resultados muestran que el proceso de razonamiento inductivo se enmarca en el uso de argumentos inductivos donde todas las clases poseen una frecuencia (F) mayor o igual a 10, lo que se reitera con el RPD. Sin embargo, hay algunos registros de representación que se presentan en algunas de las clases con una frecuencia (F) mayor o igual a 10: RSD en la clase 1 y RID en la clase 2.

Por otro lado, el objetivo de la sesión 5, 6, 7 y 8 dice relación con resolver problemas de paradojas y falacias matemáticas, frente a lo cual los estudiantes debieron analizar, discutir, justificar conjeturas utilizando la tabla de verdad de lógica de proposiciones, resolver y crear paradojas y/o falacias,. En relación a las respuestas de los estudiantes, los resultados muestran que el proceso argumentativo se enmarca en el uso de argumentos deductivos, no deductivos y abductivos, donde sólo algunas clases presentan frecuencia (F) mayor que o igual a 10: Argumento deductivo en la clase 8 y argumento abductivo en la clase 7. En el caso de los registros de representación con frecuencia (F) mayor o igual a 10, se encuentran: RVD en la clase 7 y 8; RPD en la clase 8 y RID en la clase 7.

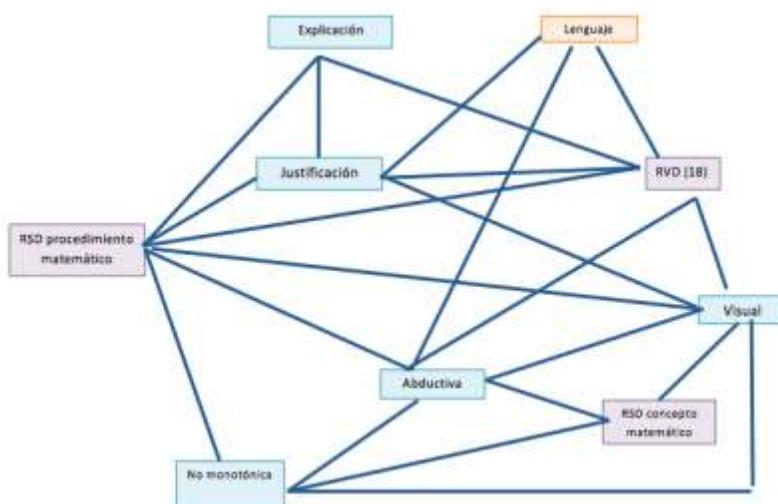
Es así que el criterio final de selección de clases para los documentos escritos y los arboles de similitud son: la clase nº 1 y 2 que representan las clases con el objetivo de razonar inductivamente. Por el otro lado, la clase nº 7 y 8 que poseen el objetivo de argumentar. La razón de elegir tales clases se debe a que presentan dos registros de representación semiótico con una frecuencia mayor o igual a 10 y al menos un argumento con frecuencia mayor o igual a 10 en la sesión. Esto se fundamenta en que la comprensión (integral) de un contenido conceptual está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación (Duval citado en Socas, 1997).

## 2. REGISTROS DE AUDIO<sup>7</sup>:

Los registros de audio permiten comprender el contexto del estudio y evidenciar los obstáculos que enfrentaron los estudiantes, los argumentos usados y registros. Estos resultados se diferencian con los documentos escritos debido a que los registros de audio forman parte de la oralidad de los estudiantes, que por ende, se manifiestan de manera espontánea, con tiempo limitado para pensar y desarrollar sus ideas.

### -Clase 1:

#### Árbol de similitud sesión 1



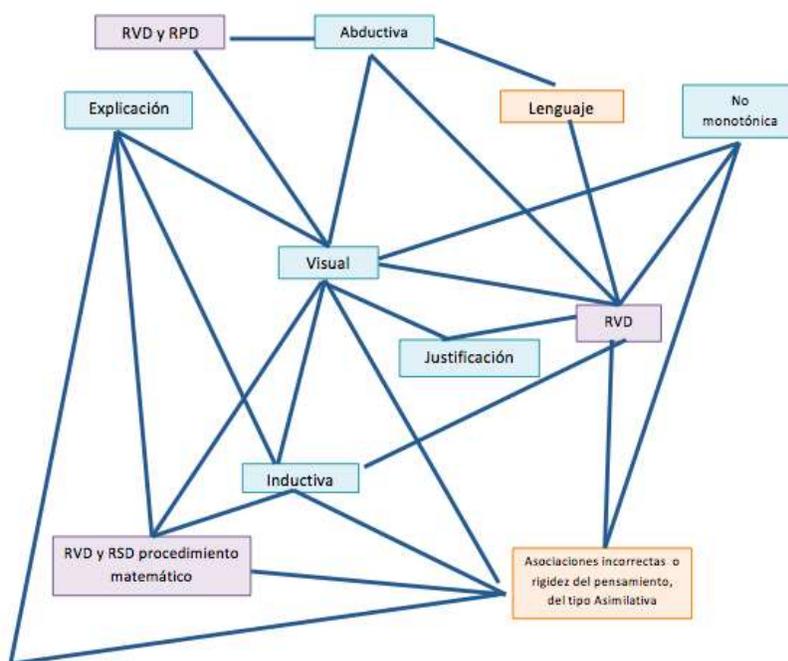
El árbol de similitud de la sesión 1 muestra tres nodos atractores que dicen relación con la utilización de argumentos de tipo abductivo que buscan justificar los procedimientos matemáticos formulados en registros de representación RSD, y además, la verbalización de la explicación o justificación se realiza con argumentos del tipo visual, pero con algunas dificultades relacionadas al lenguaje. Al mismo tiempo, cabe destacar que los estudiantes al resolver problemas de razonamiento inductivo (problemas de regularidades y generalizaciones, operatoria en  $\mathbb{Z}$  y uso de paréntesis) utilizan nuevas proposiciones o premisas para justificar y/o explicar el procedimiento realizado, lo cual implica un primer nivel para lograr construir una argumentación disciplinar propiamente tal. No obstante, la

<sup>7</sup> Los análisis preliminares de las nueve clases se encuentran en el anexo 4.3 y los otros análisis de similitud en el anexo 4.4

relación explicación-justificación presente en el grafo muestra que los estudiantes logran comprender el enunciado del problema y logran probar con casos particulares la veracidad o falsedad del procedimiento utilizado, pero queda en evidencia que los estudiantes logran construir una argumentación abductiva y no disciplinar, lo cual confirma que los razonamientos abductivos suelen presentarse en situaciones de resolución de problemas (Crespo, 2010).

**-Clase 2:**

Árbol de similitud sesión 2

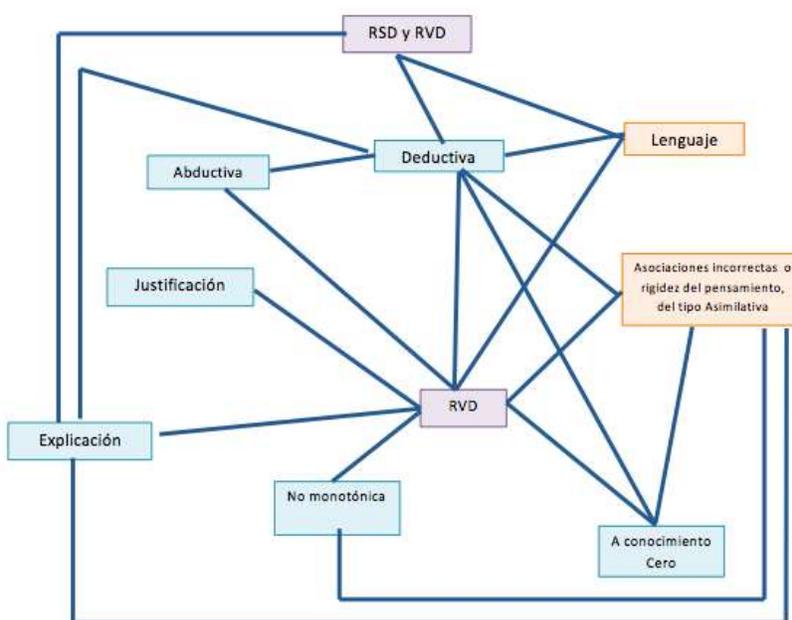


El árbol de similitud de la sesión 2 muestra cinco nodos atractores que dicen relación con la explicación del problema, argumentos inductivo y visuales, registros de representación RVD y asociaciones incorrectas o rigidez de pensamiento como obstáculo. Específicamente, la explicación dada por los estudiantes está apoyada en la argumentación visual con el registro de representación RVD, lo cual permite progresar hacia la construcción de una justificación a partir de argumentos inductivos y de argumentos deductivos (Hanna citado en Crespo, 2010) puesto a que implícita o explícitamente existen al menos dos registros de representación semiótico. Lo anterior tiene directa relación con los registros RSD de los procedimientos matemáticos realizados por los estudiantes al

resolver los diferentes problemas de razonamiento inductivo. Finalmente, cabe señalar que los argumentos inductivos y los procedimientos escritos y verbalizados por los estudiantes estaban enmarcados en asociaciones incorrectas o de rigidez de pensamiento, lo cual se presenta como un obstáculo a la hora de buscar la solución de cada problema de figuras mágicas. Aspecto que se fundamenta en que en general, los estudiantes no son conscientes de las limitaciones que posee un esquema inductivo (Crespo, 2010) y/o al mismo tiempo infieren y aplican propiedades relacionadas a otros problemas (Abrate y col. 2006).

**-Clase 7:**

Árbol de similitud sesión 7

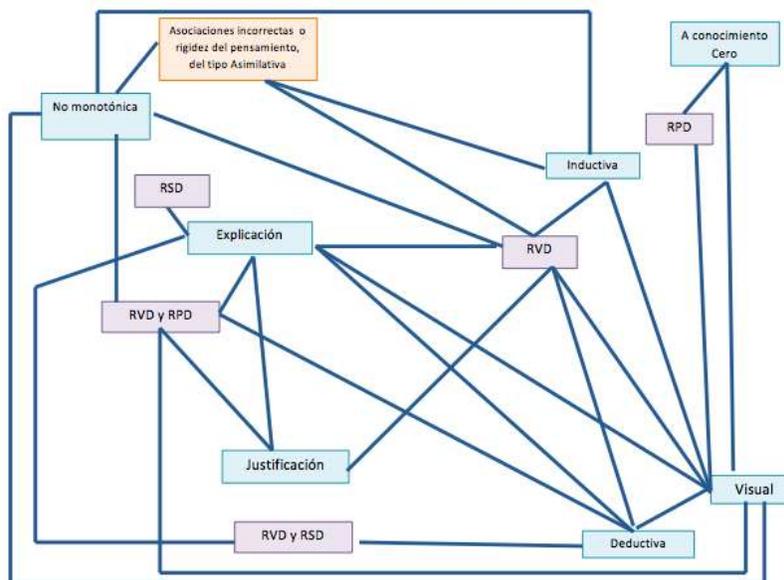


El árbol de similitud de la sesión 7 muestra tres nodos atractores que dicen relación con argumentos deductivos, registros de representación RVD y asociaciones incorrectas o rigidez de pensamiento como obstáculo. En particular, el grafo muestra que el análisis y justificación de una falacia matemática conlleva el uso de argumentos deductivos, es decir, los estudiantes utilizan premisas para señalar la veracidad o falsedad de la afirmación o proposición aritmética/algebraica. Al mismo tiempo, la verbalización de dichos proceso de análisis disciplinares de la falacia matemática están relacionados con las tres etapas propias de aprendizaje del proceso de demostración: explicación, justificación y argumentación (Duval, 1999). No obstante, el grafo muestra que los estudiantes al justificar la veracidad o

falsedad de la falacia recurren a los argumentos abductivos (Crespo, 2010), establecen asociaciones incorrectas o realizan una argumentación a conocimiento cero, la que usualmente genera confusiones (Crespo, 2010). Esto confirma que todo proceso de demostración implica anticipar dificultades u obstáculos epistemológicos propios del aprendizaje de la matemática.

**-Clase 8:**

Árbol de similitud sesión 8

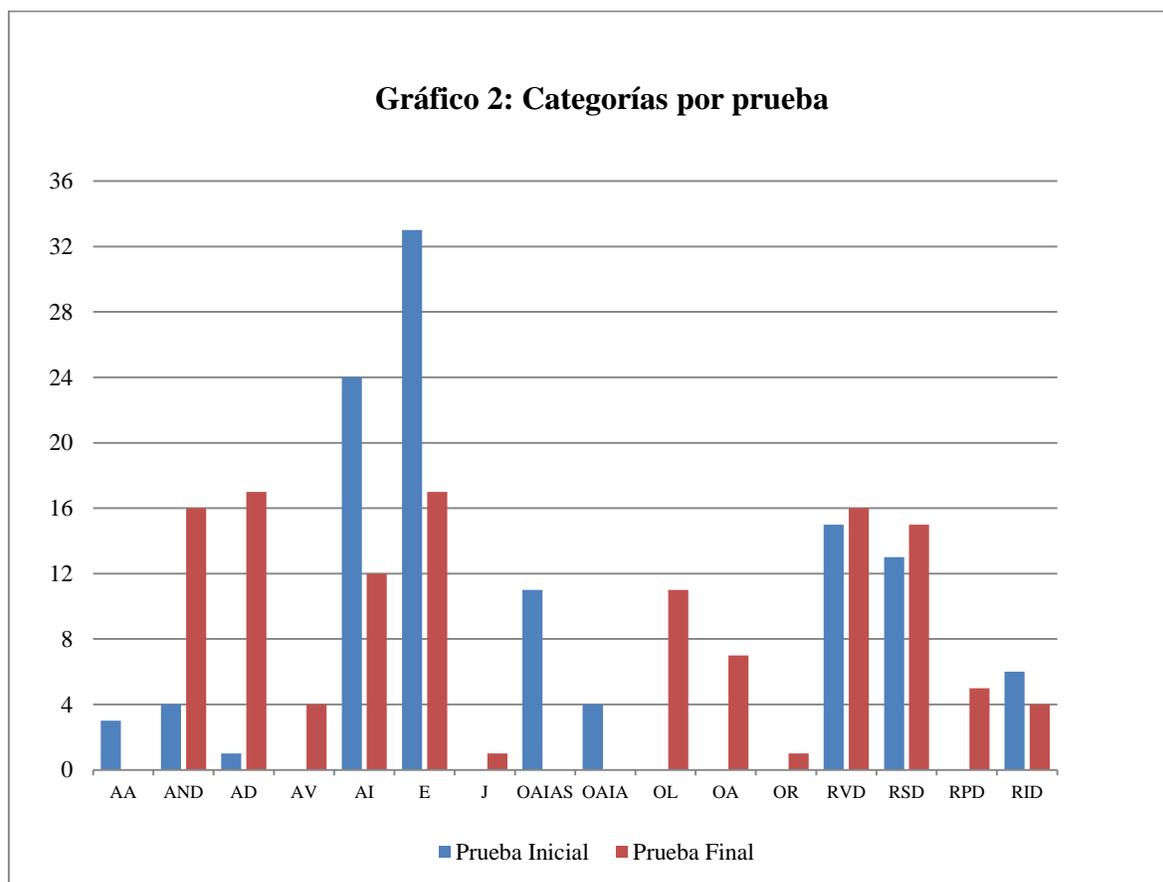


El árbol de similitud de la sesión 8 muestra cuatro nodos atractores que dicen relación con los argumentos deductivo y visual, registro RVD y explicación. Específicamente, los estudiantes relacionan el argumento deductivo y visual con la verbalización de argumentos inductivos o explicaciones, lo cual evidencia un proceso de comprobación a través de casos particulares de la veracidad o falsedad de la falacia matemática. Por otra parte, cabe señalar que los argumentos visuales utilizados por los estudiantes están tensionados con la argumentación no monotónica y la argumentación a conocimiento cero, lo cual explicita la necesidad de construir una justificación disciplinar a partir de nuevas premisas y no refutar solamente la falacia con una proposición o propiedad confirmado por los obstáculos de asociaciones incorrectas o rigidez de pensamiento, lo que recalca la dificultad disciplinar que implica desarrollar razonamiento inductivo (Crespo, 2010) como un generador de nuevas premisas para validar o refutar, en este caso particular, falacias matemáticas.

### 3. PRUEBA INICIAL-FINAL<sup>8</sup>

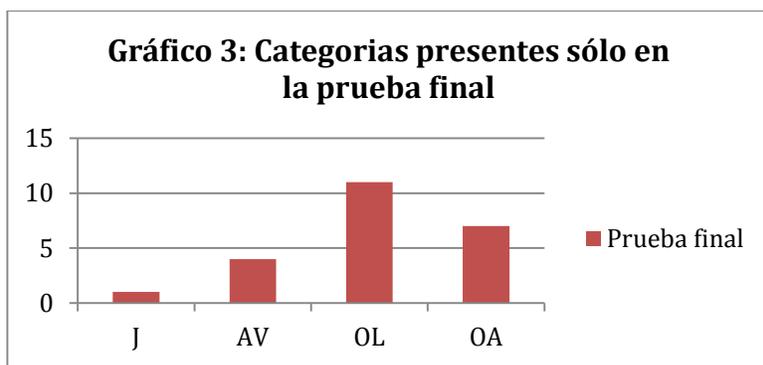
En relación a la aplicación, en ambas evaluaciones el desarrollo tuvo como tiempo límite una hora y media, la profesora entregó y leyó cada pregunta para que los estudiantes tuvieran la oportunidad de realizar preguntas. Pese a ello, en la prueba inicial los estudiantes resolvieron su prueba durante el tiempo total y en la última hubo un caso en particular en que pasaron 10 minutos y el estudiante ya había terminado de resolver todos los problemas obteniendo el máximo porcentaje de la evaluación.

A continuación se presenta una serie de gráficos que evidencian la presencia de argumentos, obstáculos y registros usados por los estudiantes (siguiendo ese mismo orden), pero que en su representación son contrastados debido a que no se busca saber la presencia total, sino que las diferencias que hubieron entre una evaluación y la otra, ya que de esta manera se puede evidenciar si hubo o no cambio en los estudiantes.



<sup>8</sup> El análisis preliminar se encuentra en el anexo 4.5 y los ejemplos por problema en el anexo 4.6

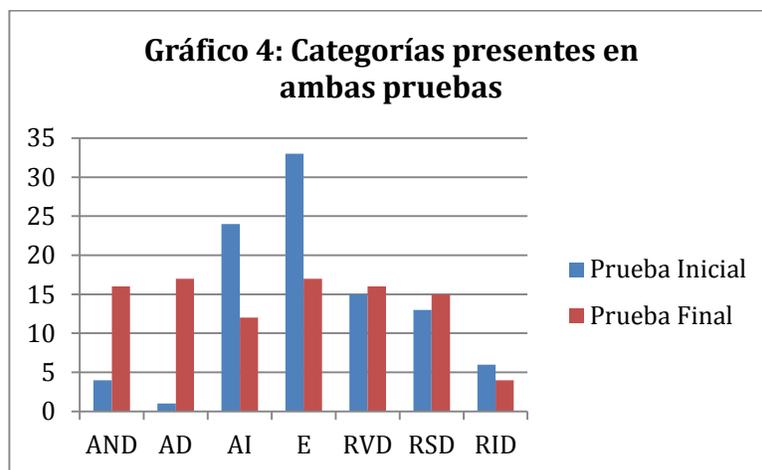
En relación a los argumentos construidos y los registros utilizados por los estudiantes en un periodo de cinco meses, el gráfico 2 permite visualizar que los argumentos abductivos (AA) junto con los no son utilizados por los estudiantes en la prueba final. En este contexto, cabe destacar que el argumento inductivo (AI), deductivo (AD), no deductivo (AND), las explicaciones (E) y los registros de representación verbal-escrito (RVD), simbólico (RSD) e icónico (RID) son utilizados por los estudiantes en ambas pruebas caracterizadas por problemas de alta demanda cognitiva, lo cual verifica la necesidad de potenciar el razonamiento inductivo como un eje articulador de la construcción de conocimiento matemático escolar y de manera especial en estudiantes con talento académico (Renzulli, 2010).



Para dejar en claro las diferencias entre ambas pruebas, el gráfico 3 presenta las categorías encontradas sólo en la prueba final. Es así como en la prueba final el argumento visual (AV) y la justificación (J) corresponden a argumentos que surgen a través de las experiencias matemáticas que los estudiantes vivieron dentro del curso, esto reafirma la presencia de flexibilidad cognitiva en estudiantes con talento académico (Arancibia y col. 2012) y el efecto que la instrucción (clases) tuvieron en los estudiantes.

Pese a ello, aparecen nuevos obstáculos: lenguaje (L) y aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos (OA). Lo cual se explica en el hecho de que incluso estudiantes talentosos presentan “discapacidad” proveniente de sus contextos culturales y lingüísticos (Smith, 2003) debido a que ellos no se caracterizan por acumular contenidos, sino que se

distinguen por la forma en la que procesan la información (Arancibia y col. 2005), ahí la importancia de la experiencia y práctica sistemática en matemática.



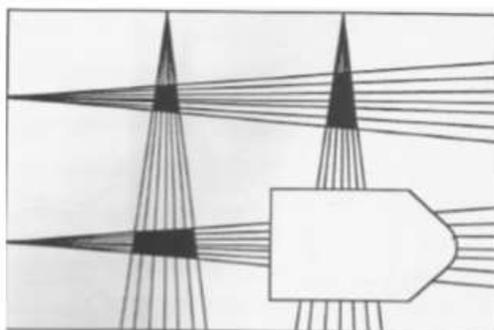
El gráfico 4 evidencia que las explicaciones (E) y el uso de argumento inductivo (AI) disminuyen entre una prueba y otra, e incluso, el argumento abductivo (AA) deja de estar presente en la evaluación final, lo cual quiere decir que los estudiantes dejaron de probar casos, usando en la última evaluación las estrategias que fueron presentadas en el curso para desarrollar los problemas.

Finalmente, el argumento deductivo (AD) y no deductivo (AND) aumentaron considerablemente en la prueba final debido a que los estudiantes sabían en su mayoría cómo resolver los ejercicios y/o problemas, esto ayudó a que pudieran utilizar premisas o datos de manera implícita o explícita, lo cual se evidenció en el problema número cinco que trata una situación en la cual se presenta una serie de retiros y saldos de dinero que se suman, provocando una diferencia de \$1.000 en el total de ellos. Es así que en este problema, los estudiantes concluían que “se resta la cantidad que uno saca, no la que va quedando”, esto evidencia comprensión, pero uso de premisas de manera implícita. Sin embargo, la conclusión no evidencia justificación disciplinar o no disciplinar, ni tampoco identificación del error dentro del problema. En este sentido, se comprende que alcanzar un nivel en los estudiantes enfocado en la justificación o un argumento deductivo no es trivial (D’ Amore, 2006), sino que más bien es un proceso que requiere tiempo y práctica.

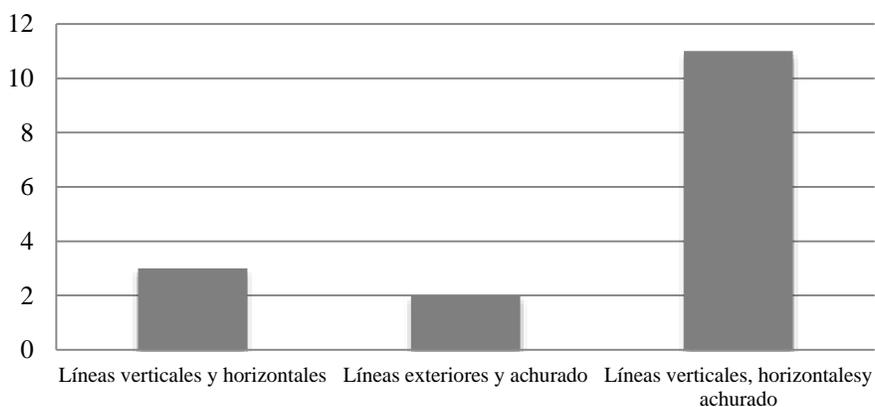
#### 4. CUESTIONARIO:

Con el objetivo de conocer otro contexto argumentativo es que se aplicó un cuestionario a los estudiantes, el cual posee diez problemas rescatados del test de matrices progresivas de Raven. A continuación se presenta cada problema como imagen para comprender la descripción de los gráficos que evidencian el tipo de respuesta generada por los estudiantes y las justificaciones que utilizaron.

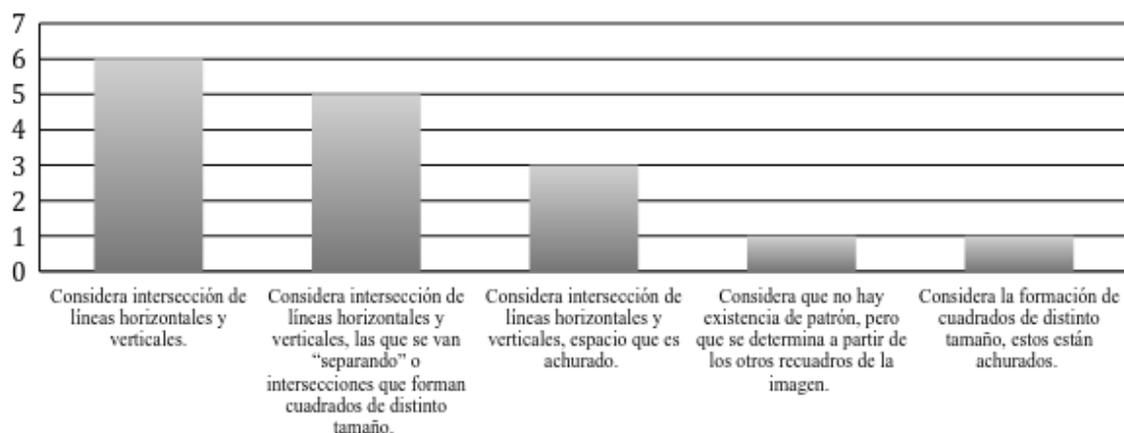
Problema 1 – patrón:



**Problema 1: Tipo de respuesta**

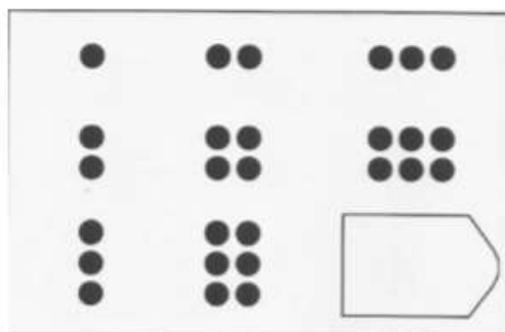


### Problema 1: Justificaciones de los estudiantes

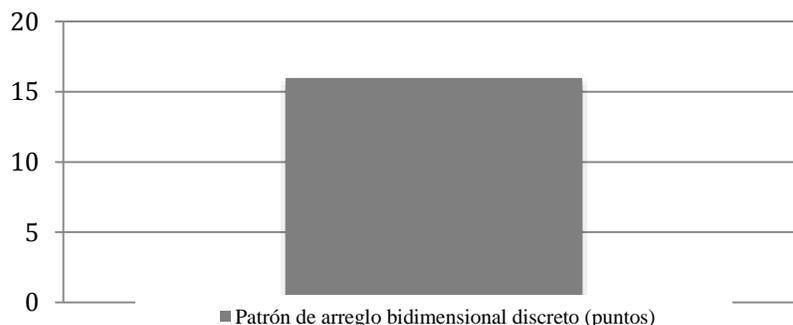


Los resultados de la pregunta 1 muestran que los estudiantes describen correctamente el patrón construyendo “la intersección de líneas verticales y horizontales” correspondientes. Al mismo tiempo, cabe destacar que la justificación dada por los estudiantes respecto del patrón identificado, se caracteriza por la correcta descripción del Registro RPD en un registro RVD. Lo anterior confirma la necesidad del cambio de registro de representación (Duval, 1999) al resolver un problema de matemática. No obstante a lo anterior, hay dos justificaciones correctas que dicen relación con la descripción del RPD a partir de las figuras geométricas que se conforman al “construir la figura” del patrón solicitado.

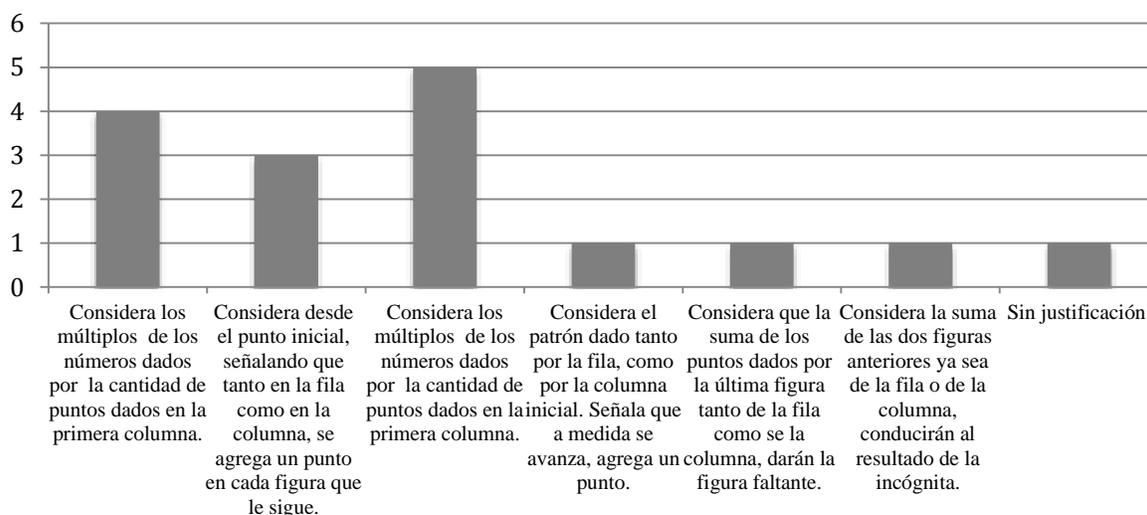
### Problema 2 – patrón:



### Problema 2: Tipo de respuesta

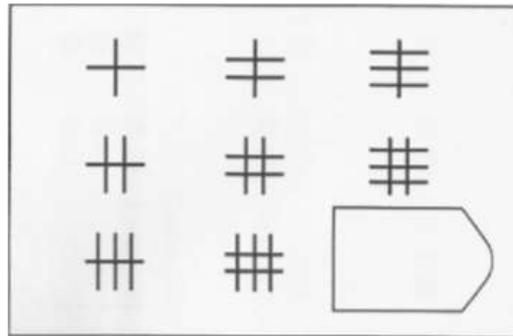


### Problema 2: Justificaciones de los estudiantes

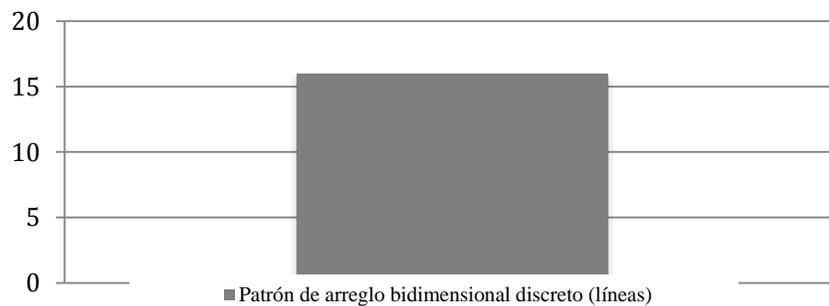


Los resultados de la pregunta 2 muestran que los estudiantes construyen correctamente el arreglo bidimensional discreto de 3 x 3 puntos. Al mismo tiempo, cabe destacar que la multiplicidad de justificaciones dada por los estudiantes respecto del arreglo bidimensional discreto se caracterizan por la correcta descripción del Registro RID en un registro RVD, lo que evidencia comprensión del problema (Duval citado en Socas, 1997). No obstante a lo anterior, cabe señalar que solamente un estudiante no presenta justificación del arreglo bidimensional discreto construido.

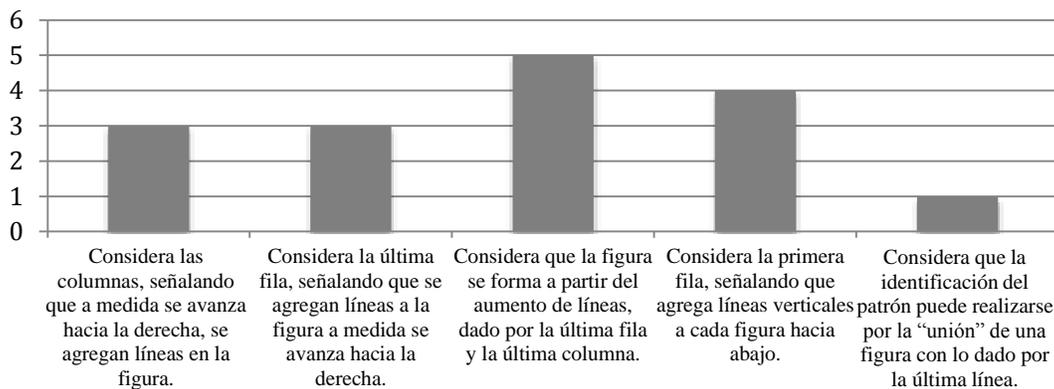
**Problema 3 – patrón:**



**Problema 3: Tipo de respuesta**



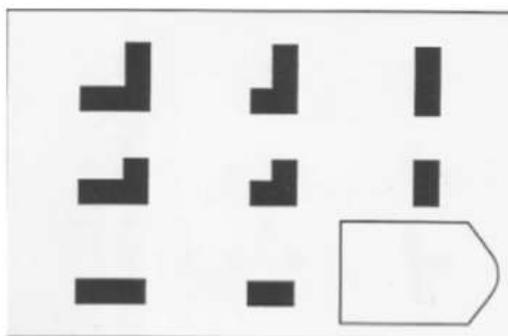
**Problema 3: Justificaciones de los estudiantes**



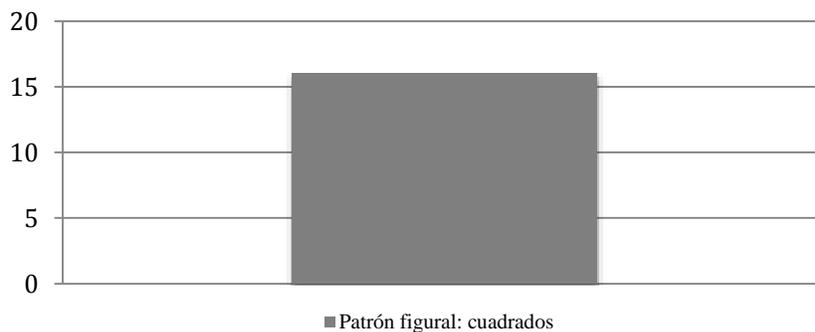
Los resultados de la pregunta 3 muestran que los estudiantes construyen correctamente el arreglo bidimensional discreto de líneas al identificar el patrón de manera inductiva. Al mismo tiempo, cabe destacar la multiplicidad de justificaciones dada por los estudiantes respecto del arreglo bidimensional discreto se caracterizan por las diferentes descripciones de la respuesta en Registro RID y su explicación en un registro RVD, lo que evidencia

comprensión del problema (Duval citado en Socas, 1997). Por otra parte, las justificaciones dadas por los estudiantes permiten evidenciar diferentes formas de abordar inductivamente el problema de arreglo bidimensional discreto de líneas lo que se fundamenta en el hecho de que los estudiante con talento académico se distinguen por la forma en la que procesan la información (Arancibia y col. 2005).

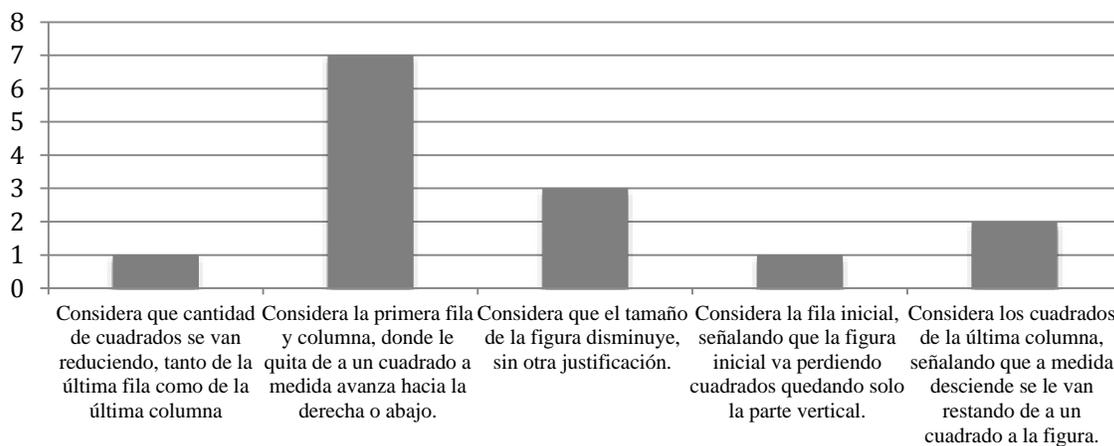
**Problema 4 – patrón:**



**Problema 4: Tipo de respuesta**

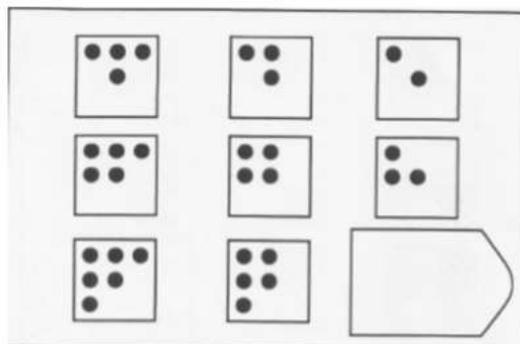


**Problema 4: Justificaciones de los estudiantes**

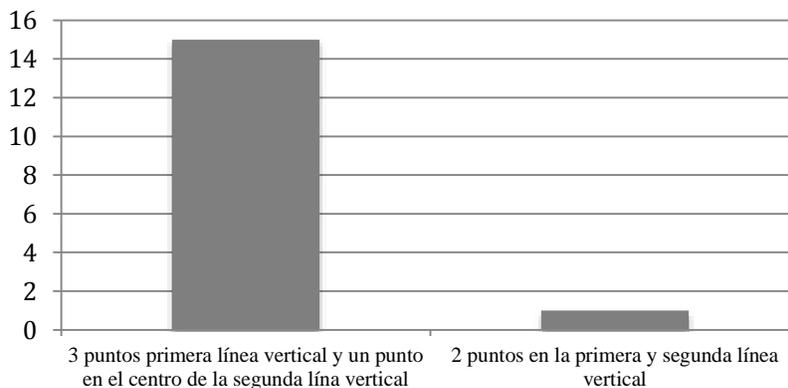


Los resultados de la pregunta 4 muestran que los estudiantes construyen correctamente el arreglo bidimensional continuo figural de cuadrados. Al mismo tiempo, cabe destacar nuevamente la multiplicidad de justificaciones dada por los estudiantes respecto del arreglo bidimensional continuo en las diferentes respuesta en Registro RID y su explicación en un registro RVD. No obstante, hay estudiantes que declaran una explicación general de la respuesta y no justifican el procedimiento realizado en función de las figuras dadas. Lo que se fundamenta en que no todos los estudiantes poseen una inteligencia idéntica (Arancibia y col. 2012) o las mismas habilidades.

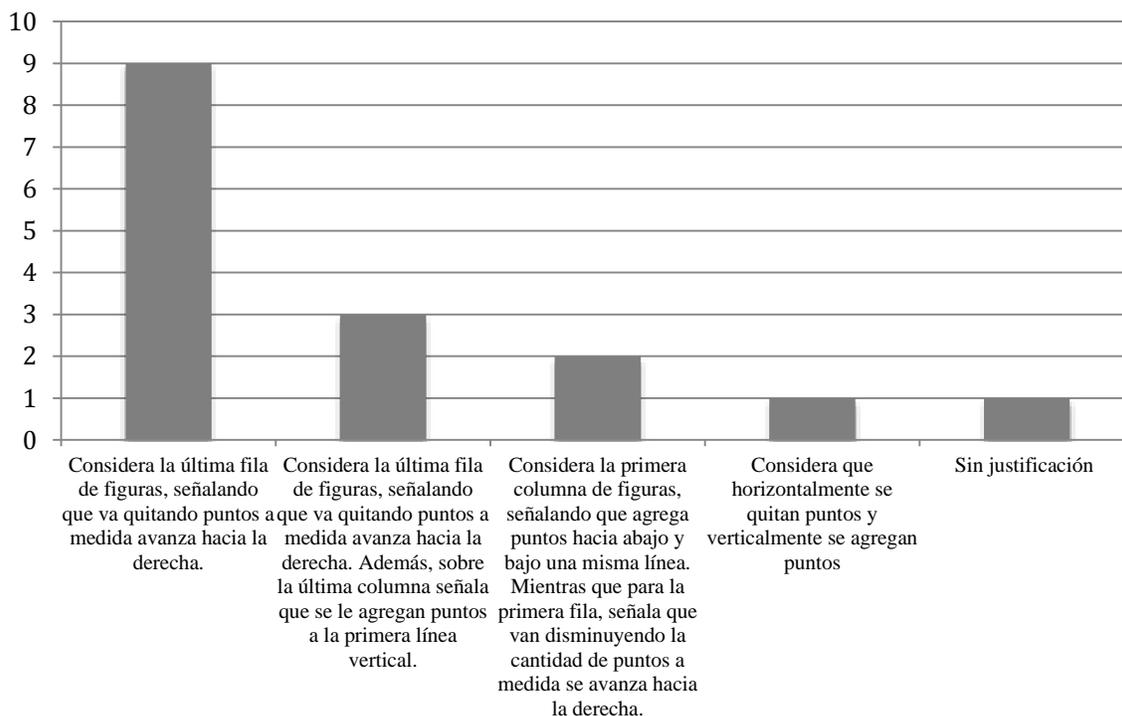
**Problema 5 – patrón:**



**Problema 5: Tipo de respuestas**

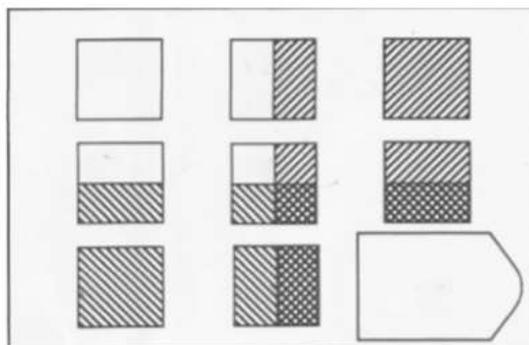


### Problema 5: Justificaciones de los estudiantes

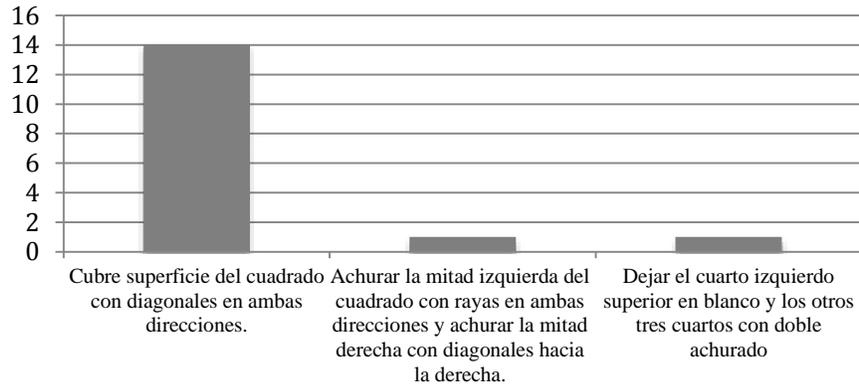


La pregunta 5 muestra que los estudiantes completan correctamente el patrón figural discreto del problema planteado. Sin embargo, la multiplicidad de justificaciones dada por los estudiantes, respecto del patrón figural, es general e imprecisa, omitiendo información relevante que se encuentra de forma explícita en el registro RID y que la descripción de éste no incorpora en el registro RVD. Al mismo tiempo, hay estudiantes que no justifican el procedimiento realizado en función de las figuras dadas. Todo esto permite concluir que no hay comprensión del problema (Duval citado en Socas 1997).

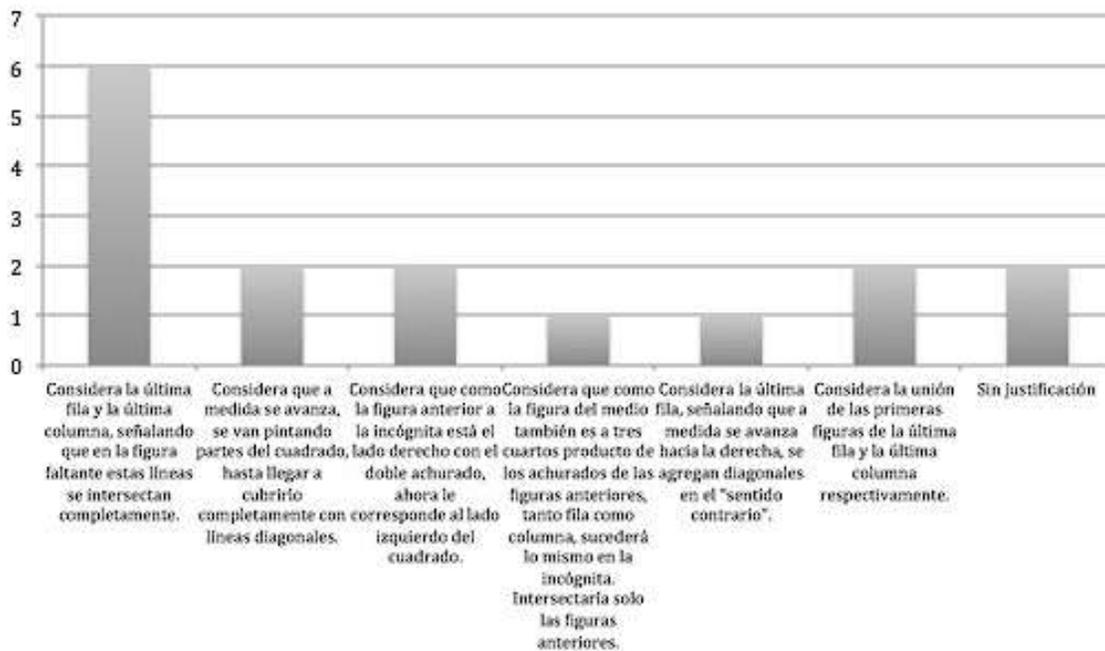
### Problema 6 – patrón:



### Problema 6: Tipos de respuestas

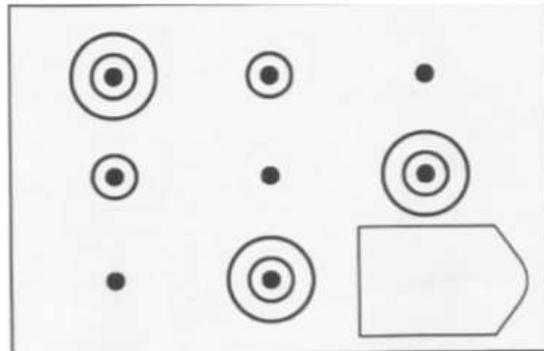


### Problema 6: Justificaciones de los estudiantes

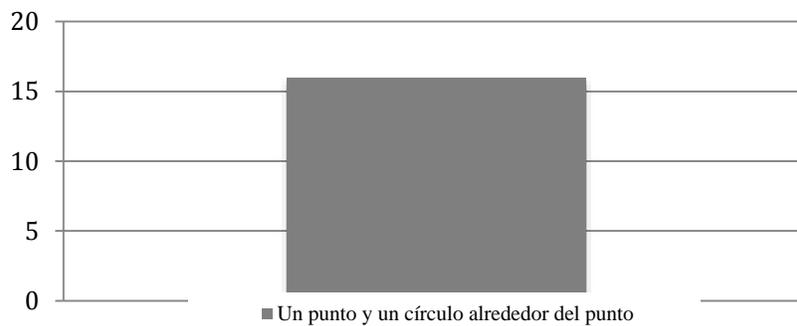


Los resultados de la pregunta 6 muestran que los estudiantes completan correctamente el patrón achurando la región cuadrada con líneas diagonales en ambas direcciones. No obstante, hay dos estudiantes que construyen una respuesta incorrecta. Por otra parte, cabe destacar que la multiplicidad de justificaciones dada por los estudiantes es general e imprecisa, omitiendo información relevante del achurado de líneas diagonales en ambas direcciones, las cuales se encuentran de forma explícita en el registro RID y que la descripción de éste no incorpora en el registro RVD, por ende hay incompreensión (Duval citado en Socas, 1997). Al mismo tiempo, hay estudiantes que no justifican el procedimiento realizado en función de las figuras dadas.

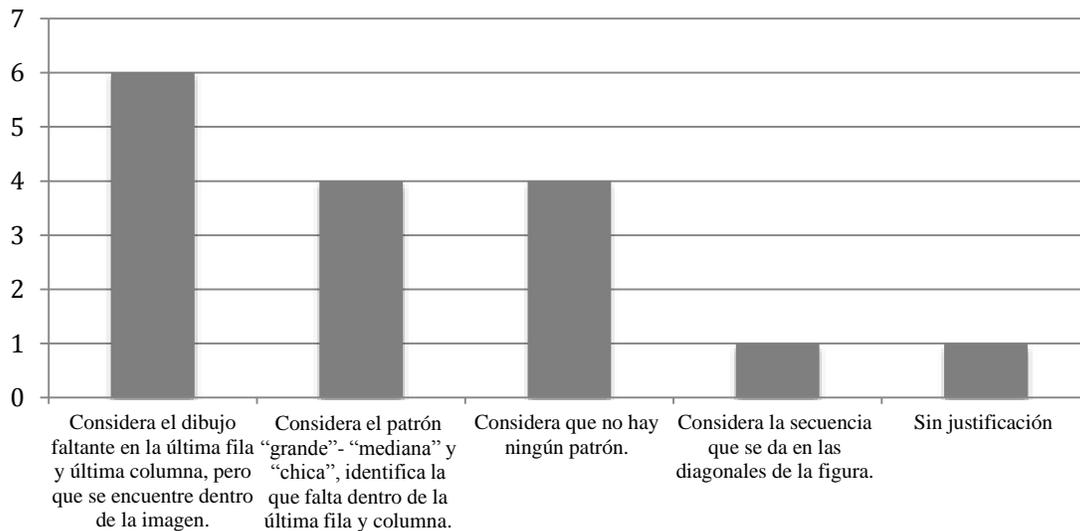
### Problema 7 – patrón:



### Problema 7: Tipo de respuestas



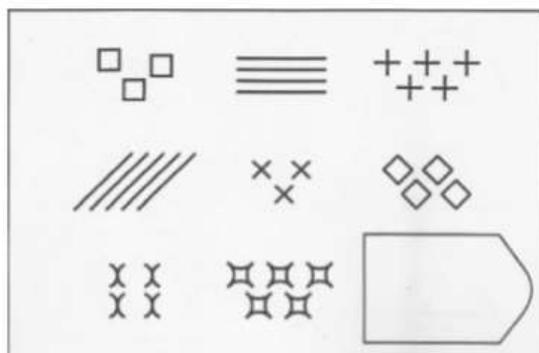
### Problema 7: Justificaciones de los estudiantes



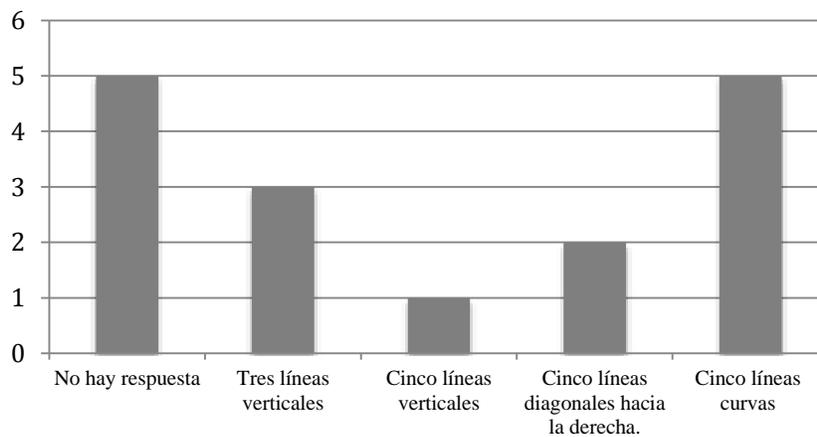
Los resultados de la pregunta 7 muestran que los estudiantes completan correctamente el patrón figural círculos-circunferencias. No obstante, 11 de los 16 estudiantes crean justificaciones cuya descripción es general e imprecisa, omitiendo información relevante del patrón círculos-circunferencias, las cuales se encuentran de forma explícita en el

registro RID y que la descripción de éste no incorpora en el registro RVD. Al mismo tiempo, hay un estudiante que no justifica el procedimiento realizado en función de las figuras dadas.

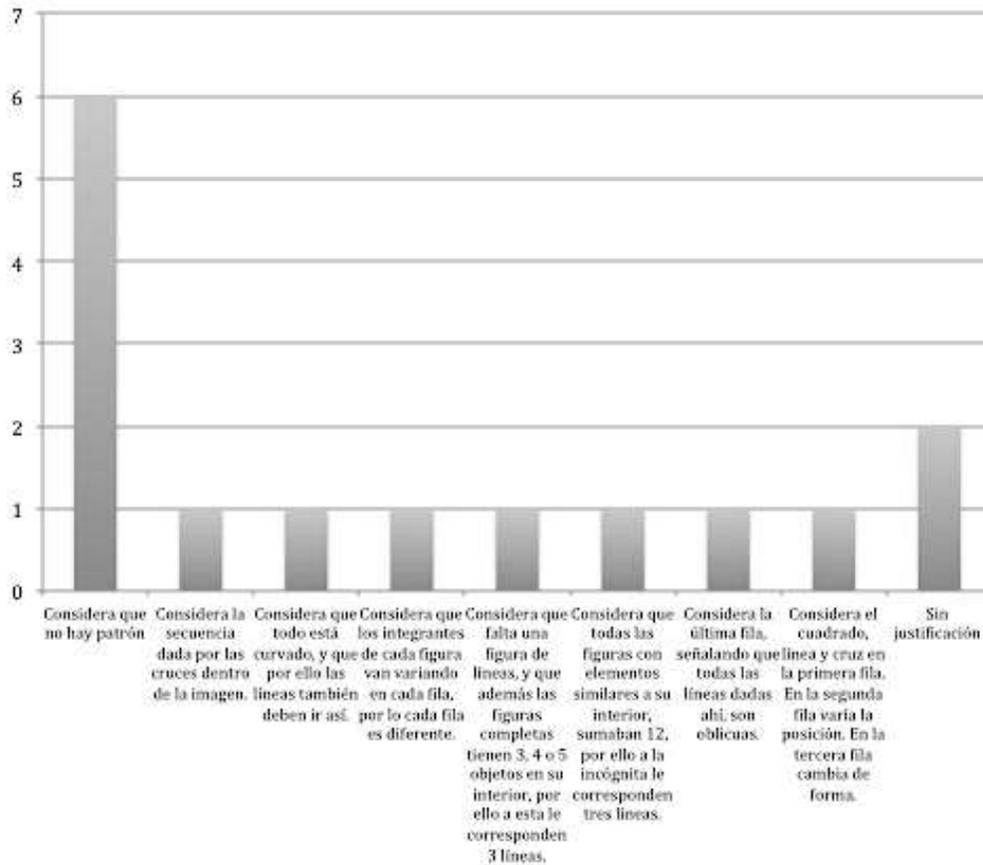
Problema 8 – patrón:



**Problema 8: Tipos de respuestas**

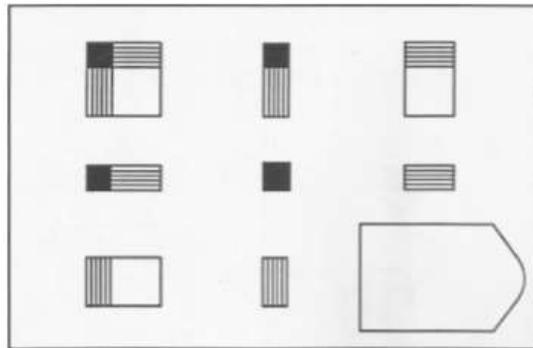


### Problema 8: Justificaciones de los estudiantes

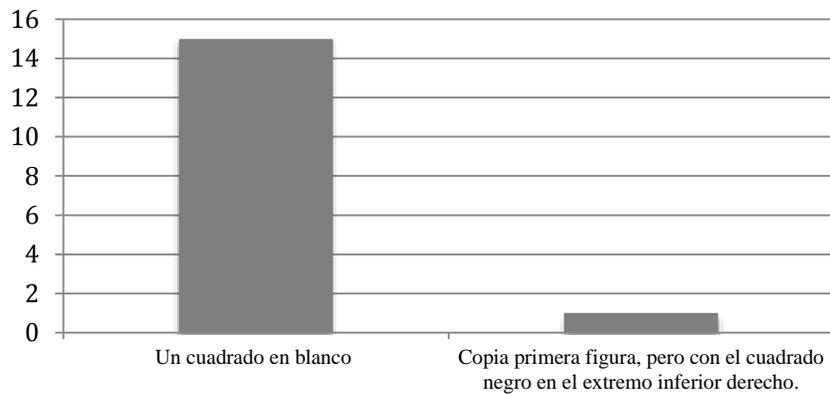


Los resultados de la pregunta 8 muestran que los estudiantes completan cuatro tipos de respuestas diferentes, lo cual da cuenta de la dificultad que implica resolver patrones con atributos absolutos y relativos al mismo tiempo. En este contexto de análisis, cabe destacar que hay cinco estudiantes que no construyeron una respuesta al problema planteado. Por otra parte, la multiplicidad de justificaciones dada por los estudiantes se caracteriza por una descripción general e imprecisa, omitiendo información relevante de los atributos absolutos y relativos que conforman el patrón. Al mismo tiempo, hay estudiantes que no justifican el procedimiento realizado en función de las figuras dadas inicialmente.

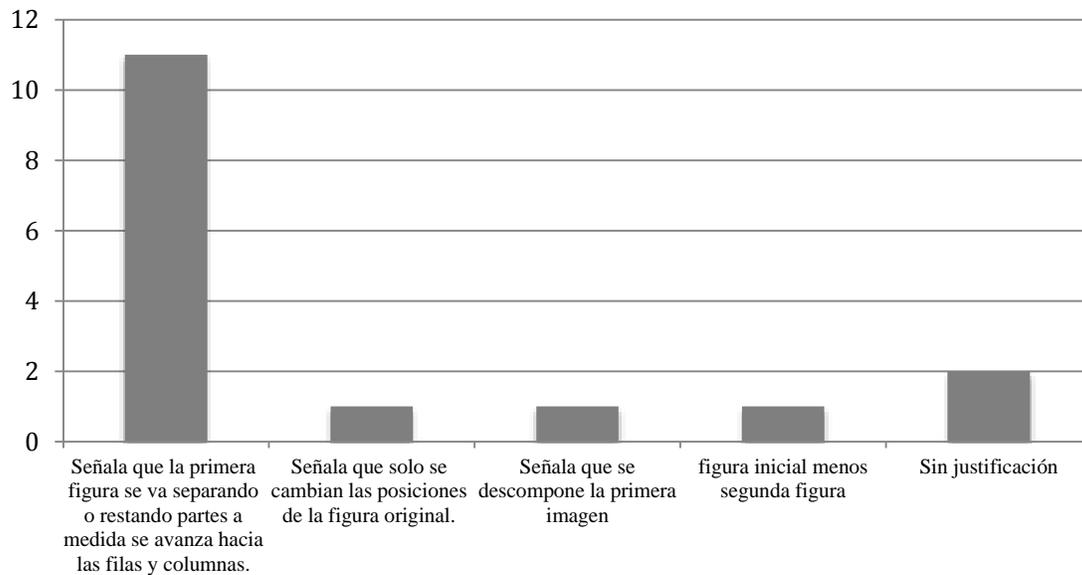
**Problema 9 – patrón:**



**Problema 9: Tipos de respuestas**

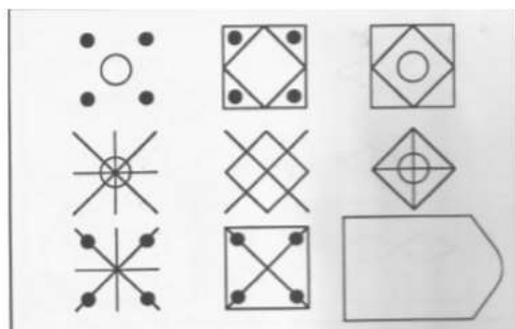


**Problema 9: Justificaciones de los estudiantes**

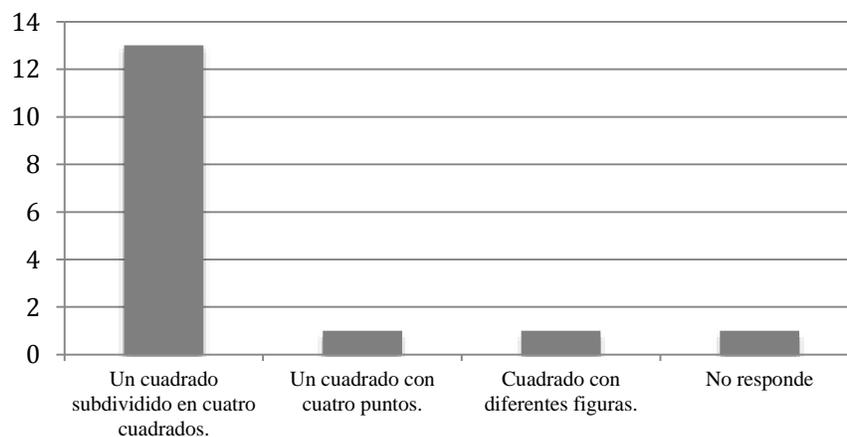


Los resultados de la pregunta 9 muestran que los estudiantes completan correctamente al patrón con la figura final correspondiente a un cuadrado. En este contexto de análisis, cabe señalar que solamente un estudiante responde incorrectamente, pero cinco de ellos justifican incorrectamente. Lo anterior da cuenta que las justificaciones dadas por los estudiantes implican, si o si, realizar un cambio de registro RID en un registro RVD que permita describir cambios de atributos absolutos que constituyen el patrón dado. Al mismo tiempo, hay dos estudiante que no justifican el procedimiento realizado en función de las figuras dadas inicialmente.

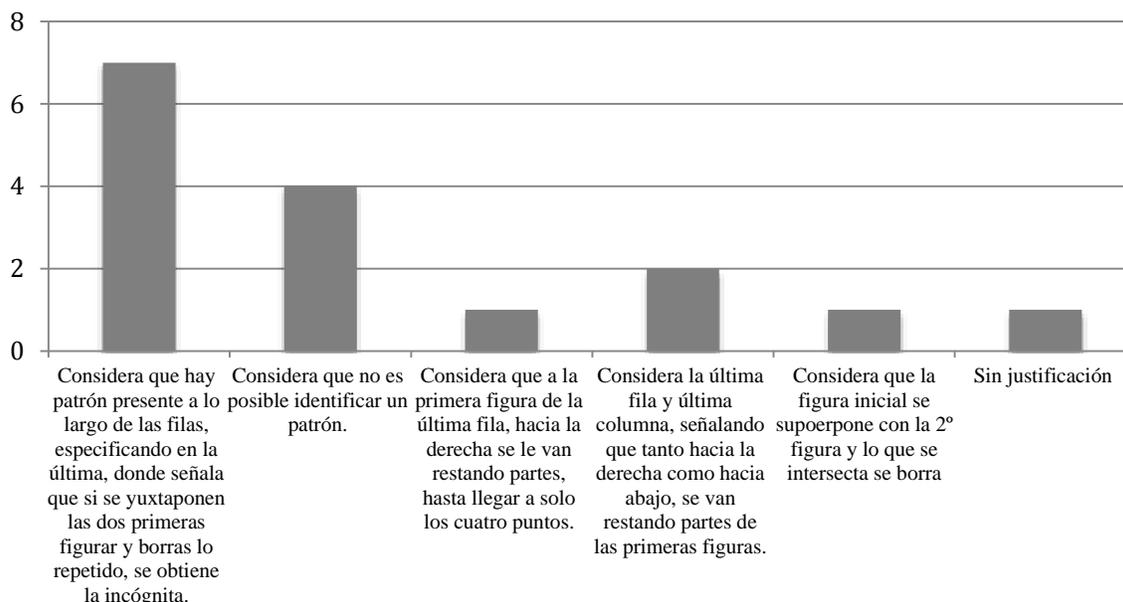
Problema 10 – patrón:



**Problema 10: Tipos de respuestas**



### Problema 10: Justificaciones de los estudiantes



Los resultados de la pregunta 10 muestran que trece estudiantes completan correctamente al patrón con la figura final correspondiente a un cuadrado subdividido en otros cuatro cuadrados congruentes entre sí. En este contexto de análisis, cabe señalar que solamente dos estudiantes responden incorrectamente y un estudiante no responde el problema. Por otra parte, las justificaciones dadas por los estudiantes implican, si o si, realizar un cambio de registro RID en un registro RVD que permita describir la construcción del patrón a partir de la intersección de atributos absolutos dados en las figuras. Al mismo tiempo, cabe destacar que ocho estudiantes construyen una justificación correcta, cuatro estudiantes justifican que no es posible identificar un patrón, tres estudiantes construyen una justificación general e imprecisa del patrón y un estudiantes no justifica.

A modo general, los problemas de 1 a 10 muestran claramente que la dificultad va aumentando no sólo en la resolución de los problemas del Test de Raven (Ivanovic, 2000) sino que también en la calidad argumentativa, los registros usados y los obstáculos encontrados (generalizaciones o respuestas incorrectas), pero por sobre todo en el problema 5,6,7,8,9 y 10.

## **5. EVALUACIÓN GENERAL:**

Otra manera de conocer el desempeño de los estudiantes por criterios netamente académicos, es la evaluación final que cada profesor realiza sobre cada estudiante, el cual es un requerimiento dentro del PENTA UC.

**Tabla 5: Desempeño de los estudiantes:**

<b>Estudiante</b>	<b>% Asistencia</b>	<b>% Evaluación Inicial</b>	<b>% Evaluación Final</b>	<b>Evaluación Actitudinal</b>
VA	85.71	30	100	35
IA	92.86	0	84	34
MB	92.86	40	100	35
PC	71.43	6	90	35
HC	85.71	0	100	35
JE	78.57	9	95	34
GG	100.00	30	75	35
SL	78.57	55	100	36
DL	92.86	50	100	36
FM	100.00	5	73	35
CP	85.71	0	70	35
RR	78.57	9	67	35
VS	92.86	50	60	35
BS	92.86	0	95	36
VU	100.00	26	82	35
RV	100.00	12	90	35

En la tabla 5 se pueden visualizar los resultados que obtuvieron cada uno de los estudiantes expresado en porcentaje con diferencias significativas ( $p < 0,000$ ), respecto a la asistencia, conocimientos por medio de una prueba inicial – final creada por cada profesor y la actitud

de cada estudiante a lo largo del curso. En esta última evaluación, cada profesor completa una planilla respondiendo si cada dimensión fue *no lograda*, *escasamente lograda*, *mayormente lograda* o *totalmente lograda* asignando un número de 1 a 4 a cada estudiante. En la evaluación existe un total de nueve dimensiones, en las cuales se consideran aspectos de compromiso asociados al propio aprendizaje, al aprendizaje de los demás y a las normas - acuerdos del ambiente de trabajo. Por lo tanto, el total que puede alcanzar un estudiante en esta categoría es 36 como puntaje actitudinal.

En general, se puede visualizar en la tabla 5 que en la evaluación inicial y final existen diversos porcentajes obtenidos, pero claramente la evaluación inicial obtiene menores resultados en relación a la final, presentando diferencias significativas en términos de progreso de aprendizaje ( $p < 0,000$ ). Lo anterior permite confirmar que los aprendizajes relacionados a razonamiento matemático y procesos de argumentación no eran conocimientos y habilidades desarrolladas en los estudiantes. Del total de los estudiantes, sólo tres logran un porcentaje mayor o igual a 50 en la evaluación inicial. Por otra parte, los estudiantes logran aprendizajes relacionados a argumentación disciplinar en la prueba final gracias a la instrucción y la práctica sistemática de la habilidad.

Tal aumento no se fundamenta en la asistencia debido a que hay estudiantes que sin una asistencia completa obtienen una mayor diferencia entre ambas evaluaciones en comparación a sus pares con menor asistencia (como HC y BS) e incluso, se puede observar que cinco estudiantes con baja asistencia obtienen el porcentaje máximo en la última evaluación (VA, MB, HC, SL y DL), porcentaje que no es alcanzado por ninguno de los estudiantes que tuvieron asistencia total (GG, FM, VU y RV).

Pese a ello, el aumento que tuvieron los estudiantes entre la prueba inicial y final sí puede tener explicación en algunos de los estudiantes a través de la evaluación actitudinal. En relación al total de estudiantes, sólo tres de ellos obtuvieron el puntaje máximo actitudinal (SL, DL y BS): dos de ellos tuvieron el 100% y la tercera persona alcanzó un 95% en la prueba final. Esto quiere decir que existe una relación más estrecha en el compromiso (Arancibia y col. 2012) mostrado en clases por los estudiantes que su asistencia.

## **6. RESUMEN DE RESULTADOS (ENCUESTA, COMENTARIOS Y ENTREVISTA)<sup>9</sup>:**

Los resultados de la encuesta mostraron algunos aspectos respecto al curso que para los estudiantes fueron destacables en su experiencia (con porcentajes  $P < 0,000$ , lo que confirma que las diferencias son significativas) como: el nivel de profundidad de los contenidos, metodología motivante y los conocimientos adquiridos. Por otro lado, los aspectos que destacaron de la profesora: responder preguntas y consultas, establecer buenas relaciones, generar un ambiente agradable, demostrar gusto por enseñar y asistencia.

Los comentarios de los estudiantes consideraron la enseñanza, el clima socio afectivo, metodología y el aprendizaje como los aspectos más destacables. Sobre esto se destacan algunos ejemplos: “todos dábamos nuestras opiniones”; “había respeto entre todos”; “los casos o ejemplos eran buenos y entretenidos”; “la forma en la que se trabaja con actividades como la de lanzar un huevo”; y “las profesoras estaban dispuestas a ayudar y explicar de nuevo”.

Sobre la entrevista, algunos de los comentarios de la profesora estaban asociados a desafiar a los estudiantes y a poseer libertad al enseñar, pero en relación a algunas dificultades que observó en los estudiantes, explicita: contenidos como las paradojas y la velocidad al resolver problemas que involucran aritmética. Además, explicitó que algunas de ellas provienen desde la escuela, de los intereses que tienen los estudiantes hacia la matemática y el contexto familiar.

Todos estos resultados quieren decir que ambientes positivos y metodología desafiante con énfasis en el rol docente y de los estudiantes sea activo, responsable y comprometido trabajando en actividades con problemas interesantes y discutibles, fueron aspectos que de una u otra forma lograron desarrollar en los estudiantes la habilidad argumentativa. Esto confirma la idea de que la demostración sea considerada como una práctica social (Crespo, 2010; Llanos; 2007).

---

<sup>9</sup> Los resultados completos de cada dato se encuentran en el anexo 4.7

## **V. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES:**

El estudio permitió caracterizar las argumentaciones que los estudiantes con talento académico usaron en dos grupos: no deductivas y deductivas. El primer grupo lo componen la explicación, el argumento visual, inductivo, abductivo y no deductivo. Tales tipos de argumentación se construyen en escenarios no académicos (Crespo, 2010), lo cual muestra el poder que tienen la intuición y las experiencias fuera de la escuela.

El segundo grupo corresponde a las argumentaciones deductivas, es decir, las que se construyen en escenarios académicos, tales son: justificación disciplinar y la argumentación deductiva. Sólo la última es la que se evidenció con mayor frecuencia en los documentos escritos, los registros de audio y en la prueba inicial-final del curso estudiado.

Una de las diferencias que se encontraron entre los dos grupos de argumentación fue la situación en las que se manifestaron. Las no deductivas tuvieron mayor presencia durante las primeras clases y en la evaluación inicial (donde las deductivas se evidenciaron en un número menor de casos). Por el contrario, las argumentaciones deductivas aumentaron paulatinamente, mientras las no deductivas disminuyeron, a medida que los estudiantes fueron adquiriendo mayor práctica e instrucción en relación a las temáticas que el curso abordaba.

Otro de los aspectos que determinó el uso de argumentaciones deductivas fueron los objetivos de las clases relacionados a las actividades que se realizaron. Un ejemplo de ello, son la clase n° 7 y 8, las cual buscaban justificar razonamientos correctos e identificar razonamientos falaces. Objetivo que fue trabajado por medio de actividades que en la clase 7 trabajaban falacias lógicas (proposiciones relacionadas a la vida cotidiana). Sin embargo, en la clase 8 el trabajo se realizó en torno a falacias aritméticas y a la tabla de verdad lógica, es decir, en actividades asociadas mayormente a la disciplina que permitieron expresar en los estudiantes un mayor número de argumentaciones deductivas.

En relación a la pregunta ¿Cómo son las argumentaciones disciplinares en este tipo de estudiantes?, la investigación encontró algunos recursos argumentativos que ayudan a responder tal interrogante. Las argumentaciones son diversos en relación a la manera en la que los estudiantes usan los datos o premisas (implícita o explícitamente). Sumado a ellos, son signos y formas de organización, los cuales en este estudio fueron conocidos como registros de representación semióticos que reflejaron comprensión de conceptos matemáticos (Duval, 1999; Socas, 1997; D'Amore, 2002) a la hora de resolver problemas no rutinarios en matemática.

Sobre los registros, se pueden distinguir dos grupos en relación al nivel de presencia disciplinar dentro de los signos y/o la forma de organizar una idea. Es así que el primer grupo, el cual coincide con una mayor frecuencia de uso en general dentro del curso, es el registro de representación simbólico (RSD) y el pictórico (RPD). El otro grupo lo componen el registro de representación verbal (RVD) y el icónico (RID), los cuales estuvieron presentes, mayormente en las primeras clases.

En relación al uso explícito o implícito de premisas, el cuestionario mostró que los estudiantes son capaces de usar diferentes aspectos-elementos de un problema con estrategias diferentes a la hora de justificar sus respuestas: identificando el patrón implicado, considerando elementos generales y/o particulares, usando lenguaje o palabras que ayudan a comprender el razonamiento implicado y/o regularidades numéricas.

Esto muestra que los estudiantes con talento académico que están inmersos en una práctica argumentativa constante pueden desarrollar argumentos deductivos con premisas explícitas y registros con alto nivel disciplinar. Sin embargo, para alcanzarlos, ellos deben ser construidos desde los argumentos y registros que se generan en escenarios no académicos (argumentaciones no deductivas, RVD y RID).

El segundo objetivo que se evidenció en este estudio consiste en la identificación de los obstáculos epistemológicos que los estudiantes enfrentaron en la situación educativa observada. En general, aquél que tuvo una mayor frecuencia es: el obstáculo del

aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos (OA). El cual se debe principalmente al desconocimiento o conocimiento inadecuado de alguna propiedad, procedimiento o idea matemática (Abrate y col. 2006) previa.

Un claro ejemplo en la que se puede manifestar un obstáculo es la situación que se describió dentro del estudio, en la que un grupo de estudiantes no usaban propiedades matemáticas a la hora de resolver operaciones combinadas. En tal situación se evidenció obstáculo epistemológico de asociación incorrecta o rigidez del pensamiento de tipo interferencial en el que además, estaba afectado por otro tipo de obstáculo que involucra situaciones de cálculo, el tratamiento (Duval, 1999). Lo anterior provocó conflicto en aquellos que estaban resolviendo el problema matemáticamente, lo cual ratifica la influencia de los contextos culturales, lingüísticos (Smith, 2003) y el tipo de matemática enseñada en las escuelas.

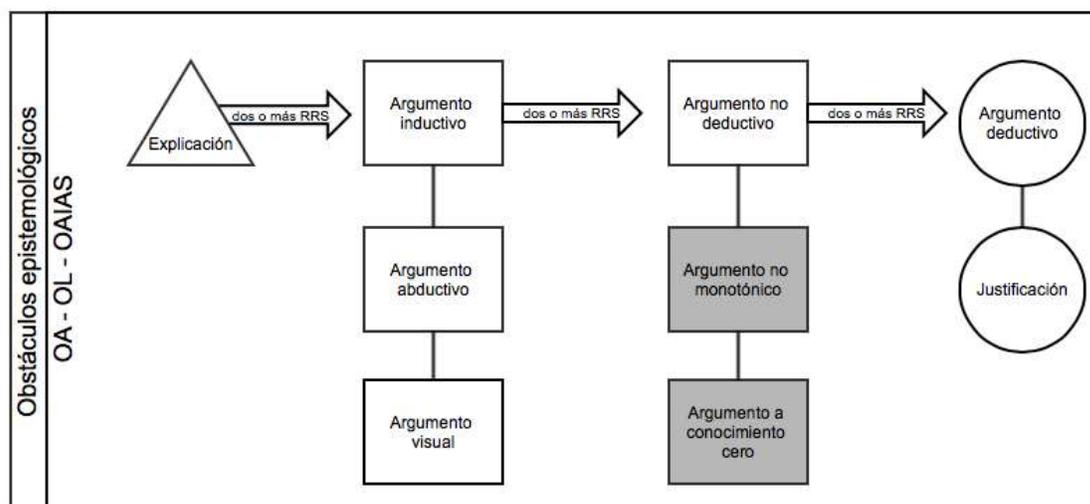
En reiteradas ocasiones el lenguaje aparece como dificultad a la hora de trabajar con problemas matemáticos que impliquen conceptos complejos como integrales, expresiones algebraicas y raíces., Lo anterior, se explica en el hecho de que el lenguaje influye en la expresión de las demostraciones (Duval citado en Crespo y col. 2005). Por lo tanto, una primera sugerencia sería trabajar en torno al lenguaje matemático para así construir argumentaciones cada vez más disciplinares. Este punto sirve para justificar que los obstáculos con instrucción y práctica sistemática pueden dejar de presentarse, lo cual no implica que dejen de existir, ya que pueden surgir otros: En la prueba inicial se evidenciaron los obstáculos de asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento del tipo asimilativa y de asociación, los cuales en la prueba final no se presentaron. Sin embargo, surgieron otros como el lenguaje y el obstáculo de aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos.

Para complementar, el cuestionario muestra que la dificultad va aumentando no sólo en la resolución, sino que también en la calidad argumentativa, los registros usados y los obstáculos encontrados (generalizaciones o respuestas incorrectas). Los estudiantes son capaces de usar diferentes aspectos del problema para dar una respuesta, pero a medida que

la dificultad del problema aumenta, aparecen estudiantes que no justifican e incluso no logran resolver el problema en cuestión.

Lo anterior reafirma la idea de que los estudiantes con talento académico utilizan diversas estrategias frente a una misma tarea (Arancibia y col. 2012), pero en algunos casos, tales estrategias son insuficientes para obtener una respuesta o generar una justificación de manera disciplinar, lo cual tiene implicancias a nivel didáctico.

Por tal razón, el estudio presenta una propuesta que a nivel didáctico puede ser aplicada en cualquier institución educativa. Proposición que además, forma parte del análisis de la relación encontrada entre los obstáculos epistemológicos y las argumentaciones disciplinares, el cual se resume en el siguiente esquema:



El esquema permite visualizar que la argumentación es un pasaje hacia la demostración (Duval, 1999), el que en este estudio se inicia con las argumentaciones no deductivas (representadas en el esquema por rectángulos y triángulo) hasta llegar a las argumentaciones deductivas, donde el paso de un grupo argumentativo a otro se produce a través del uso de dos o más registros de representación debido a que esto comprueba comprensión de conceptos matemáticos (Duval, 1999; Socas, 1997; D'Amore, 2002).

Otra característica importante son los cuatro grupos de argumentación que se identificaron con mayor frecuencia: el primero es la explicación; el segundo el argumento inductivo-

abductivo-visual; el tercero, el argumento no deductivo-no monotónico-a conocimiento cero; y el último grupo compuesto por el argumento deductivo y la justificación.

El aspecto que se destaca de esta ruta es que considera los escenarios académicos (argumentación deductiva y justificación) y cotidianos (explicación y argumentos inductivo, abductivo, visual, no deductivo, no monotónico y a conocimiento cero) (Crespo, 2010) a la hora de argumentar.

De esta manera, un estudiante puede iniciar su habilidad argumentativa en una explicación, pero a través de la práctica e instrucción sistemática, tal explicación puede ser transformada a una argumentación (inductivo, abductiva, visual) y así sucesivamente, hasta alcanzar el argumento deductivo y la justificación.

Sin embargo, hay que tener en cuenta que generar argumentaciones disciplinares y desarrollarlas no es trivial (Solar y col. 2009), por tal razón el pasaje hacia la demostración está enmarcado con la presencia de obstáculos epistemológicos (aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos-lenguaje-asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento de tipo asimilativa) debido a la naturaleza de la argumentación (Brousseau, 1999; D'Amore, 2006), la falta de noética, el fracaso en el manejo de representaciones, transformaciones y conversiones (D'Amore, 2002). En este caso, la recomendación para los profesores es detectar los obstáculos, caracterizarlos y conocer la situación didáctica en la que el/los obstáculos fueron construidos (Ñuñez, 2007) en los estudiantes.

En general, la ruta argumentativa adquiere sentido cuando se reflexiona acerca del aprendizaje de cualquier estudiante en matemática debido a que en los primeros años predomina una matemática informal en la cual las argumentaciones poseen un carácter más bien intuitivo debido al pensamiento concreto que en esta etapa los estudiantes poseen (Crespo y col. 2005).

Por tal razón, los estudiantes necesitan sentir libertad y flexibilidad durante esta fase exploratoria (Durand-Guerrier y col. 2012). Pese a ello, la situación de usar la matemática

informal en los primeros años cambia a medida que los niveles escolares aumentan, así, en educación media se espera que aparezcan argumentaciones de carácter empírico-inductivo y demostraciones deductivas informales, aunque a veces elementales (Crespo y col. 2005).

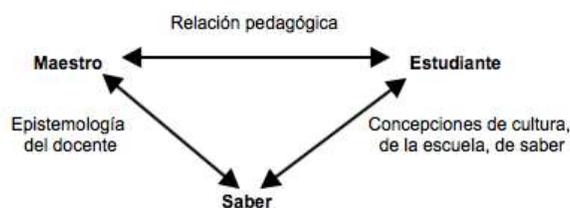
En el caso particular de un estudiante con talento, la literatura indica que se acercan al conocimiento de manera intuitiva y cuestionadora (Arancibia y col. 2012). Situación que se asimila en la manera de aprender en matemática durante la etapa infantil, lo cual reafirma la idea de trabajar con este tipo de estudiantes de acuerdo a sus intereses, con contenidos tratados de manera profunda e interdisciplinar.

Sin embargo, la realidad en las instituciones escolares es que no se trabaja deliberadamente la argumentación puesto a que se opta por la repetición y la reproducción del conocimiento (Llanos, 2007) limitando el uso de argumentos y de registros de representación, provocando así que los obstáculos epistemológicos persistan. Esta situación se evidenció en los resultados obtenidos debido a que los estudiantes claramente comenzaron el curso con un mayor uso de argumentos no deductivos contruidos desde sus escenarios cotidianos. Pese a ello, este estudio revela que cualquier estudiante con talento académico que se encuentre inmerso en un contexto educativo que desarrolle, valore y desafíe sus habilidades argumentativas, no sólo mejorará tales habilidades, sino que también otras como el razonamiento y la congruencia de diferentes registros de representación (Duval, 1999).

En este sentido, se reafirma que “los estudiantes no sólo necesitan argumentar, sino que también necesitan aprender a argumentar bien” (Kuhn, 2008, p. 113; Planas y col. 2013). Por esta razón es importante que los profesores generen oportunidades de aprendizajes enfocadas en esta habilidad y que la enseñanza se enfoque en la práctica sistemática (Gagné, 2009; Arancibia y col. 2012) destinada no sólo a los estudiantes con talento, sino que a todos.

Una manera de poder llevar a cabo la ruta argumentativa en cualquier institución educativa consiste en desarrollar algunos de los elementos actitudinales y metodológicos que el contexto estudiado presentó. Lo anterior se representa a través de un esquema propuesto

por D'Amore (2006), el cual contiene algunos de los resultados obtenidos los cuales serán explicados a continuación:



Estudiante	Saber	Maestro
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Flexibilidad cognitiva.</li> <li>- Pluralidad argumentativa.</li> <li>- Compromiso.</li> <li>- Incrementan sus aprendizajes.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Profundidad de contenidos.</li> <li>- Metodología desafiante e interdisciplinar.</li> <li>- Libertad en seleccionar contenidos y resolver problemas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Responder preguntas y consultas.</li> <li>- Establecer buenas relaciones.</li> <li>- Generar un ambiente agradable.</li> <li>- Demostrar gusto por enseñar.</li> <li>- Asistencia.</li> <li>- Libertad en seleccionar contenidos y resolver problemas.</li> <li>- Desafiar a los estudiantes.</li> </ul>

El esquema evidencia la teoría de las situaciones didácticas propuestas por Brousseau, pero más que centrarse en la teoría misma, la idea es recalcar los aspectos que se evidenciaron en las diferentes situaciones generadas en el curso estudiado para caracterizar y comprender la forma en la cual se puede llevar a cabo la argumentación en los contextos escolares, esto en base a los resultados obtenidos en la evaluación general, encuesta, comentarios de los estudiantes y la entrevista realizada a la profesora.

Los *estudiantes* se distinguen por la forma en la que procesan la información (Arancibia y col. 2005) ejemplificada en la flexibilidad cognitiva y la pluralidad argumentativa que se evidenció en los diferentes datos que se usaron en este estudio. Sumado a ello, el desempeño de los estudiantes en el curso fue variado, todos los estudiantes incrementaron sus porcentajes obtenidos en la evaluación final con  $P < 0,000$ , lo que confirma que las diferencias fueron significativas y se explican en aspectos como el compromiso y las experiencias matemáticas anteriores dentro del programa. Esto demuestra que los contenidos (*saber*) por sí solos no son suficientes a la hora de aprender en matemática, sino que requiere a su vez del desarrollo de las actitudes en los estudiantes.

El ideal de *maestro*, *saber*, *concepción de la escuela* (PENTA UC) y la *relación pedagógica* que permitieron desarrollar las habilidades argumentativas en este estudio

fueron: profundidad de los contenidos, la forma de trabajo desafiante (metodología-enseñanza), los conocimientos adquiridos (aprendizaje) y respecto a rol docente se encuentran el responder preguntas y consultas, establecer buenas relaciones, generar un ambiente agradable y demostrar gusto por enseñar. Tales aspectos coinciden en las condiciones básicas que Arancibia y col. (2012) proponen a la hora de enseñar a estudiantes con talento académico, es decir generar ambientes positivos y metodología desafiante de manera interdisciplinar.

En este estudio se han logrado identificar algunas diferencias entre la realidad escolar y el programa en el que los estudiantes con talento participan, las que corresponden a los contenidos trabajados y la metodología. En el primer caso, los profesores no tienen completa libertad en la selección de los contenidos debido a que están fijados por el MINEDUC, lo que tensiona la enseñanza de temas no tradicionales, como el caso de las paradojas, donde temas como ese motivan enormemente a este tipo de estudiantes. En relación al segundo caso, en las escuelas la forma de trabajo en matemática es llevada a cabo como una mera transferencia, es por eso que la argumentación en tal contexto está en crisis (Crespo, 2010); en cambio, el PENTA UC permite completa libertad en la resolución de los problemas lo que se evidencia en la pluralidad de argumentaciones usadas por los estudiantes. Esto recalca la idea de considerar una visión positiva de la enseñanza, en la cual los sujetos, sus experiencias y argumentaciones sean valoradas.

La manera de desarrollar la habilidad argumentativa en los estudiantes es considerándola como una práctica social debido a que es un acto de interacción social y discusión (Duval, 1999; Llanos, 2007; Alcolea, 2013). En este estudio los estudiantes reconocen que uno de los aspectos destacables del curso fue el clima socio afectivo en la relación de ellos con sus pares y profesora. Por esta razón, la primera recomendación es desarrollar actitudes positivas en el aula como el respeto hacía las ideas y las personas.

Concretamente, es importante desarrollar la competencia comunicativa a través de discusiones (Durand-Guerrier y col. 2012) auténticas donde los estudiantes no se expresen por sí mismos y el profesor no controle los modos de discusión (Kuhn, 2008). Esto con el

fin de construir entre todos el conocimiento donde los estudiantes puedan reflexionar sobre conceptos meta-matemáticos y cultivar la actitud de razonamiento por sí solos y con sus pares (Durand-Guerrier y col. 2012) por ejemplo, a través de tareas complejas.

Durand-Guerrier y col. (2012, p. 364) proponen algunos aspectos más específicos con el objetivo de desarrollar la habilidad argumentativa que resumen lo que fue mencionado en este capítulo:

1. Tipos de problemas: abiertos y cerrados donde los estudiantes determinen la verdad o falsedad; estudio crítico de las argumentaciones de los estudiantes; discusión sobre la base de la justificación; narración; trabajar en el desarrollo de pruebas y así sucesivamente.
2. Manejo de las actividades: Por ejemplo, debates estudiantiles; producción de trabajo escrito; uso de software, diagramas e instrumentos. Técnicas de manejo: uso de diagramas de razonamiento; discursos a meta nivel, manejo de diferentes registros semióticos, debate con toda la clase, trabajo en grupos, trabajo individual y así sucesivamente.
3. Rol de los estudiantes y docentes pertinente con el objetivo de desarrollar el diálogo y la interacción.

Finalmente, en relación a la continuidad de este estudio, es cierto que conocer las variables que afectan y explican el desempeño argumentativo de los estudiantes con talento académico en matemática no forman parte directa de los objetivos de esta investigación, pero resultaría interesante continuar indagando en lo anterior debido a que ayudaría a comprender y caracterizar a este grupo de estudiantes con mayor profundidad para que de esta manera cualquier profesor pueda atender sus necesidades. Para esto sería necesario aumentar la muestra, considerar datos en un mayor periodo de tiempo y en diferentes contextos, es decir, no sólo en el contexto del programa sino que también el escolar debido a que esto permitirá generalizar los resultados encontrados y a su vez, considerar diferentes factores implicados en el proceso de enseñanza aprendizaje de la argumentación.

Otra manera de continuar esta investigación es realizando un estudio de caso en aquellos estudiantes que mostraron un desempeño argumentativo, asociado o en vías de demostración. Esto ayudaría a comprender con mayor profundidad la ruta argumentativa que fue descrita anteriormente con el fin de obtener datos concretos que permitan comprender el paso de una argumentación a otra y los obstáculos que pueden impedirlo. Todo esto desde una perspectiva socioepistemológica puesto a que la idea de construcción social del conocimiento (Crespo, 2010) adquiere sentido y valor con el tiempo, especialmente con investigaciones como estas que permiten reafirmar la importancia este paradigma.

Como reflexión final, en muchas de las respuestas claramente se evidenció uso de premisas en los argumentos de los estudiantes, pero en algunos casos es implícita. En este sentido, el desafío para los docentes es hacer visible los razonamientos y motivar a los estudiantes a examinar la validez de afirmaciones (Durand-Guerrier y col. 2012). Es una tarea compleja, pero esto ayudará a tomar decisiones pedagógicas enfocadas en el desarrollo de la habilidad argumentativa con fundamento y no por mera intuición.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aberdein (2005). *The uses of argument in mathematics*. *Argumentation*, 19, p. 287–301.
- Abrate y col. (2006). *Errores y dificultades en matemática: Análisis de causa y sugerencia de trabajo*. Universidad Nacional de Villa María, Buenos Aires.
- Ainscow (2011). *Responding to the challenge of equity within education systems*. *Aula: Revista de Pedagogía de la Universidad de Salamanca*, 17, p. 73-87
- Alcolea (2013). Chapter 4: *Argumentation in mathematics*. In *The Argument of Mathematics*, Aberdein and Dove. Springer Science & Business Media.
- Andréu (2001). *Las técnicas de análisis de contenido: Una revisión actualizada*. Documento de trabajo, S2001/03, Centro de estudios andaluces. Recuperado de: <http://public.centrodeestudiosandaluces.es/pdfs/S200103.pdf>
- Arancibia y col. (2012). *¿Qué hacemos con los alumnos talentosos en la sala de clases?*. En Mena, Lissi, Alcalay, Milicic, N. (2012). *Educación y Diversidad*. Ediciones UC.
- Arancibia y col. (2012). *Autoconcepto y Talento: Una relación que favorece el logro académico*. *PSYKHE*. Vol. 21, N°1, p. 37-53.
- Arancibia (2009). *La educación de alumnos con talentos: una deuda y una oportunidad para Chile*. Dirección de asuntos públicos. Santiago, Chile.
- Arancibia y col. (2005). *Elaboración e implementación de un programa educacional para alumnos con talentos académicos de 1o a 4o básico de escuelas municipales. Estudio de impacto para su transferencia*. Proyecto FONDEF DO5I10398.

- Bachelard (1938). *La formación del espíritu científico: contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo*. Siglo XXI editores. , 23ª edición en español, 2000.
- Barrantes (2008). *Los obstáculos epistemológicos*. Recuperado de: <http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6886/6572>
- Bermeosolo (2010). *Psicopedagogía de la diversidad en el aula: desafío a las barreras en el aprendizaje y la participación*. Alfaomega.
- Blanco (2001). *Errors in the Teaching/Learning of the Basic Concepts of Geometry*. International Journal for Mathematics Teaching and Learning
- Blanco (2006). *La equidad y la inclusión social: Uno de los desafíos de la educación y la escuela hoy*. REICE, Revista Electrónica Iberoamericana sobre la Calidad, Eficacia y Cambio en Educación. Vol. 4, Nº 3.
- Blanco (2008). *Construyendo las bases de la inclusión y la calidad de la educación en la primera infancia*. Revista de Educación, 347. Septiembre-diciembre 2008, p. 33-54
- Bralić, y col. (2000). *Niños y jóvenes con talentos: Una educación de calidad para todos*. Santiago: Dolmen.
- Bisquerra (2014). *Metodología de la investigación educativa*. Cuarta edición. Editorial La Muralla, España.
- Brousseau (1999). *Los Obstáculos Epistemológicos y los Problemas en Matemáticas*. Traducción con fines de trabajo educativo sin referencia. Reeditado como documento de trabajo para el PMME de la UNISON por Hernández y Villalba. 1999.
- Brousseau (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Libros del zorzal, 1ª edición, Argentina, Buenos Aires.

- Cabrera (2011). *¿Qué debe saber y saber hacer un profesor de estudiantes con talento académico? Una propuesta de estándares de formación inicial en educación de talentos*. Estudios Pedagógicos XXXVII, No 2, p. 43-59.
- Cáceres (2003). *Análisis cualitativo de contenido: Una alternativa metodológica alcanzable*. Psicoperspectivas, revista de la escuela de psicología. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Vol. II, p. 53 – 82.
- Carrillo (2009). Dificultades en el aprendizaje matemático. Revista educativa: Innovación y experiencias educativas. N°16, p. 1-10.
- Castro y col. (2010). *El razonamiento inductivo como generados de conocimiento matemático*. Revista Uno 54, p. 55-67
- Codina y col. (1999). *El Razonamiento Matemático: Argumentación y Demostración*. Recuperado de: <http://www.ipesad.edu.mx/repositorio1/BG-B15-65.pdf.pdf>
- Cramer (2011). *Everyday argumentation and knowlegde construction in mathematical tasks*. Recuperado de: [http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/1/CERME7\\_WG1\\_Cramer.pdf](http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/1/CERME7_WG1_Cramer.pdf)
- Crespo y col. (2005). *Una visión socioepistemológica de las argumentaciones en el aula*. El caso de las demostraciones por reducción al absurdo. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8(3).
- Crespo (2010). *Argumentaciones y demostraciones: una visión de la influencia de los escenarios socioculturales*. Relime vol.13 no.3

- Cumsille (2005). Validación de un sistema de nominación de alumnos con talentos académicos: Seminario Internacional "El Modelo Penta UC para la Educación de Talentos Académicos". 3º, Santiago, Chile.
- De Gamboa y col. (2010). *Argumentación matemática: prácticas escritas e interpretaciones*. Suma 64, p. 35-44
- Devalle de Rendo y col. (2006). *Una escuela EN y PARA la diversidad: El entramado de la diversidad*. Primera edición, Aique Grupo Editores. Buenos Aires, Argentina.
- Duval (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle, Grupo de Educación Matemática.
- D'Amore (2006). *Didáctica de la matemática*. Cooperativa Editorial Magisterio. Bogotá.
- D'Amore (2002). *La complejidad de la noética en matemáticas como causa de la falta de devolución*. TED. Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional. 11, p. 63-71.
- Durand-Guerrier y col. (2012). Chapter 15: *Argumentation and proof in the mathematics classroom*. In: Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study
- Dweck (2006). *Mindset: The New Psychology of Success*. Random House Publishing Group, New York.
- Engler y col. (2004). *Los errores en el aprendizaje de la matemática*. Revista Premisa de la Sociedad Argentina de Educación Matemática, v. 6, n. 23, p. 23-32,
- Fernández (2011). *De la escuela integradora a la escuela inclusiva*. Revista Innovación Educativa, nº 21, 2011: p. 119-131

- Ferrándiz y col. (2010). *Modelo de identificación de alumnos con altas habilidades de Educación Secundaria*. REIFOP, 13 (1)
- Franchi (2003). *Tipología de errores en el área de geometría plana*. Revista Educere, año 8, N°24, p. 63-71
- Gagné (2009). *Construyendo talentos a partir de la dotación: Breve revisión del MDDT*, traducido por Sonia Bralić. Recuperado de: [http://www.talented.cl/pdfs/MDDT\\_20.pdf](http://www.talented.cl/pdfs/MDDT_20.pdf)
- García (2004). *Una educación de calidad para los niños bien dotados desde la atención a la diversidad. De la educación integradora a la educación inclusiva*. Revista Complutense de Educación. Vol. 15 Núm. 2, p. 597-620
- Genovard y col. (2010). *Los profesores de alumnos con altas habilidades*. REIFOP 13(1)
- Godino (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Proyecto Edumat-Maestros. Recuperado de: <http://www.matesup.otalca.cl/modelos/articulos/fundamentos.pdf>
- Godino y col. (2002). *Geometría y su didáctica para maestros*. Proyecto Edumat-Maestros. Recuperado de: [http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/4\\_Geometria.pdf](http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/4_Geometria.pdf)
- González y col. (2012). *Autoconcepto y Talento: Una Relación que Favorece el Logro Académico*. Psykhe, 21(1)
- Hontangas (2010). *Atención a la diversidad y desarrollo de procesos educativos inclusivos*. Revista Prisma Social - No 4 , p. 1-37.
- Infante (2010). *Desafíos a la formación docente: inclusión educativa*. Estudios pedagógicos XXXVI, N° 1, p. 287-297.

- Ivanovic (2000). *Estudio de la capacidad intelectual (Test de Matrices Progresivas de Raven) en escolares chilenos de 5 a 18 años I. Antecedentes generales, normas y recomendaciones*. Rev. de Psicol. Gral y Aplic., Universidad de Chile, 53 (1), p. 5-30.
- Jiménez y col. (1999). *De educación especial a educación en la diversidad*. Ediciones Aljibe.
- Knipping (2012). *The social dimension of argumentation and proof in mathematics classrooms*. Recuperado de: [http://www.icme12.org/upload/submission/1935\\_F.pdf](http://www.icme12.org/upload/submission/1935_F.pdf).
- Krippendorff (2003). *Content Analysis: An introduction to its methodology*. Second Edition. Sage publications, London.
- Kuckartz (2014). *Qualitative Text Analysis: A Guide to Methods, Practice and Using Software*. SAGE publications, London.
- Kuhn (2008). *Education for thinking*. Harvard University Press. United States of America.
- Latorre (2001). *¿Qué es y cómo se trabaja el análisis de similitud?* Boletín de Investigación Educativa 16, p. 48-67.
- Llanos (2007). *Argumentación matemática en los libros de texto de la enseñanza media*. REIEC año 2, n° 2, p. 30-53.
- López y col. (2012). Capítulo 1: *Conceptos generales del alumno con altas capacidades*. En *Alumnos con altas capacidades y aprendizaje cooperativo: un modelo de respuesta educativa*, Torrego y otros. Fundación SM. Madrid, España.
- Lucchini y col. (2006). *Errar no siempre es un error*. Fundar, Santiago, Chile.

- Marland (1971). *Education of the gifted and talented: Report to the congress of the United States by the U.S. commissions of education*. Recuperado de: <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED056243.pdf>
- Martínez (2011). Capítulo 7: *La atención al alumnado con altas capacidades*. En orientación educativa: Atención a la diversidad y educación inclusiva. Grao, Barcelona.
- Marradi y col. (2007) *Metodología de las Ciencias sociales*. Editorial Emecé. Buenos Aires, Argentina.
- Matus (2005). *¿Existe alguna posibilidad de que triunfe la diversidad?*. Pensamiento educativo. Vol.37, p.16-26
- Mena y col. (2012). *Capítulo 1: El desafío de la diversidad en el sistema escolar*. En, Mena, Lissi, Alcalay, Milicic, (2012). *Educación y Diversidad*. Ediciones UC.
- MINEDUC (2004). *Nueva perspectiva y visión de la educación especial: informe de la comisión de expertos*. Chile, Santiago.
- MINEDUC (2005). *Política nacional de educación especial: nuestro compromiso con la diversidad*. Chile, Santiago.
- MINEDUC (2009). *Ley general de educación*. Chile, Santiago.
- MINEDUC (2009). *Propuesta ajuste curricular: objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios*. Chile, Santiago.
- MINEDUC (2011). *Fundamentos: bases curriculares 2011, educación básica*. Chile, Santiago.

- MINEDUC (2012). *Bases curriculares Matemática: educación básica (1° básico a 6° básico)*. Chile, Santiago.
- MINEDUC (2013). *Bases curriculares Matemática: educación media (7° básico a 4° medio)*. Chile, Santiago.
- Mullis (2003), *TIMSS Assessment Frameworks and Specifications 2003*, International Study Center, Boston College, 2nd Edition.
- Ñuñez (2007). *Obstáculos para el logro de aprendizajes en matemáticas*. Eutopía, n° 2
- Parra (2010). *Educación inclusiva: Un modelo de educación para todos*. revista\_isees no 8, p. 73-84.
- Planas y col. (2013). *El papel del contexto en la identificación de argumentaciones matemáticas por un grupo de profesores*. PNA, 7(4), p. 155-170.
- PISA (2009). *Resumen de resultados, PISA 2009, Chile*. SIMCE, Unidad de curriculum y evaluación, Ministerio de Educación de Chile. Santiago de Chile.
- RAE (2001). *Diccionario de la lengua española* (22.a ed.). Consultado en <http://www.rae.es/rae.html>
- Radillo (2007). *Obstáculos en el aprendizaje de la geometría Euclidiana relacionados con la traducción entre códigos del lenguaje matemático*. Recuperado de: <http://unvm.galeon.com/Cap13.pdf>
- Renzulli (2010). *El rol del profesor en el desarrollo del talento*. REIFOP, 13 (1)
- Rico (2006). *La competencia matemática en PISA*. PNA 1 (2). p. 47-66. Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co/529/1/RicoL07-2777.PDF>

- Ruiz (2003). *Metodología de la investigación cualitativa*. Tercera edición. Universidad de Deusto, Bilbao.
- Ruiz (2012). *Metodología de la investigación cualitativa*. Quinta edición. Universidad de Deusto, Bilbao.
- Rosso (2005). Inauguración: Seminario Internacional "El Modelo Penta UC para la Educación de Talentos Académicos". 3º, Santiago, Chile.
- Salas (2012). *Crecer con talento: cómo los padres pueden apoyar a sus hijos/as con talento académico*. Ediciones UC. Chile, Santiago.
- Sánchez (2008). *Principales modelos de superdotación y talentos*. Rescatado de: <http://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/10993/SanchezLopez04de12.pdf?sequence=4>
- Sampieri (2006). *Metodología de la investigación*. Cuarta edición. Mc Graw Hill Interamericana, México.
- Sandín (2003). *Investigación cualitativa en educación: Fundamentos y tradiciones*. Primera edición, Mc Graw Hill Interamericana, Madrid.
- Solar y col. (2009). *Competencia de argumentación en la interpretación de gráficas funcionales*. En González; Murillo (Eds.). *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación*. XIII Simposio de la SEIEM. Santander.
- Soto y col. (2010). *Las inferencias y el proceso de aprendizaje de la matemática*. Revista educación y desarrollo social, Vol. 4 n° 2
- Smith (2003). *Bases psicopedagógicas de la educación especial*. 4ed. Pearson, Madrid.

- TIMSS (2011). *Resultados TIMSS 2011 Chile, Estudio internacional de tendencias en matemática y ciencias*. Agencia de Calidad de la Educación, División de Estudios. Santiago de Chile.
- Tourón (2009). *La superdotación en el aula: claves para su identificación y tratamiento educativo*. En Bautista García-Vera, A. (coord.). *Formación de profesores de educación secundaria. Programación y Evaluación Curricular*. Madrid: ICE, Universidad Complutense
- UNESCO (2004). *La educación de niños con talento en Iberoamérica*. Editorial Trineo, Chile.
- Varettoni (2012). *Un estudio sobre registros de representación que emplean docentes de la E.P. en la resolución y anticipación de un problema*. Recuperado de: [http://sedici.unlp.edu.ar/bitstream/handle/10915/32674/Documento\\_completo.pdf?sequence=1](http://sedici.unlp.edu.ar/bitstream/handle/10915/32674/Documento_completo.pdf?sequence=1)
- Vecino (2001): *La enseñanza de la geometría en la Educación Primaria*, en Chamorro M. C.(Cord.) (2001): *Dificultades del aprendizaje de las matemáticas*. M.E.C.D., Madrid.
- Yuni, (2006). *Técnicas para investigar: Recursos metodológicos para la preparación de proyectos de investigación*. Brujas: 2da edición. Córdoba.
- Ziegler y col. (2000) *Myth and Reality: A review of empirical studies on giftedness*, *High Ability Studies*, 11:2, p. 113-136

## **ANEXOS**

## ANEXO 1: OBJETIVOS DE CLASES

	Clase1	Clase2	Clase3	Clase4	Clase5
Objetivo	Resolver problemas de razonamiento inductivo	Resolver problemas de razonamiento inductivo	Resolver problemas en busca de una solución eficiente.	Resolver problemas en busca de una solución eficiente.	Resolver situaciones paradójicas asociadas a problemas matemáticos.
Contenido	Regularidades y generalizaciones  Operaciones aritméticas en Z	Regularidades y generalizaciones  Operaciones aritméticas en Z	Regularidades y generalizaciones  Razonamiento inductivo  Operaciones aritméticas en Z	Razonamiento inductivo  Regularidades y generalizaciones  Operaciones aritméticas en Z	Paradojas Matemáticas.
Actividades y/o problemas	<p><b>•Desafíos, individual y en grupos:</b> -Colocar entre dos números un signo de operación aritmética o paréntesis que permitan dar como resultado 1. -La casa del tigre consiste en buscar el nombre de un animal a través de determinados datos.</p> <p><b>•Resolver cuadrados mágicos de orden 3 individualmente.</b></p>	<p><b>•Resolver figuras mágicas individualmente.</b></p> <p><b>•Crear una figura mágica por grupo.</b></p> <p><b>•Resolver una figura mágica creada por otro grupo.</b></p>	<p><b>•Resolver figuras mágicas individualmente.</b></p> <p><b>•Crear una figura mágica por grupo.</b></p> <p><b>•Resolver una figura mágica creada por otro grupo.</b></p> <p><b>•Resolver cuadrados mágicos de orden 4 individualmente.</b></p>	<p><b>•Actividad práctica para descubrir algunas propiedades y conceptos de la física como centro de masa y gravedad:</b> “Salvemos al huevo”. En grupo y usando bombillas, crear un espacio o lugar (a modo de nave) en el que un huevo crudo esté en su interior para que luego sea lanzado desde una determinada altura y no se rompa.</p>	<p><b>•Resolver y discutir la paradoja del gato de Schrödinger individualmente.</b></p> <p><b>•Identificar una paradoja de la vida cotidiana en grupos.</b></p> <p><b>•Crear una paradoja en grupo.</b></p> <p><b>•Resolver una paradoja creada por un grupo</b></p>

	Clase6	Clase7	Clase8	Clase9
Objetivo	Resolver situaciones paradójicas asociadas a problemas matemáticos.	Justificar razonamientos correctos e identificar razonamientos falaces.	Justificar razonamientos correctos e identificar razonamientos falaces.	Objetivos planteados de la sesión 1 a la sesión 8
Contenido	Paradojas Matemáticas.	Falacias Matemáticas.	Falacias Matemáticas.	Razonamiento inductivo  Regularidades y generalizaciones  Operaciones aritméticas en $Z$  Paradojas Matemáticas.  Falacias Matemáticas.
Actividades y/o problemas	<ul style="list-style-type: none"> <li>•Resolver y discutir la paradoja de los gemelos de Albert Einstein.</li> <li>•Crear una paradoja relacionada a la de los gemelos de Albert Einstein individualmente.</li> <li>•Escoger una paradoja en grupos y representarla</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•Crear al menos dos falacias de manera individual.</li> <li>•Resolver guía con falacias identificando su tipo y explicándola de manera individual y en grupos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•Resolver guía con falacias aritméticas identificando el error y explicándola de manera individual y en grupos.</li> <li>•Justificar argumentos validos y no validos mediante la tabla de verdad de manera individual.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•Resolver prueba final del curso con problemas relacionados a los contenidos del curso de manera individual.</li> <li>•Crear una paradoja, falacia o curiosidad matemática de manera individual.</li> <li>•Resolver una paradoja, falacia o curiosidad matemática de un compañero(a).</li> </ul>

## ANEXO 2: DEFINICIÓN DE LOS CONTENIDOS DEL CURSO

**Paradoja:** Es una proposición en apariencia verdadera que nos lleva a una contradicción lógica o que choca con el sentido común. Ejemplo: En el experimento de Schrödinger, tenemos una caja totalmente opaca, con 3 elementos en su interior: un gato (vivo), una botella con un gas venenoso y un aparato con una partícula radioactiva, la cual tiene una probabilidad del 50% de desintegrarse (la botella libera el gas, matando al gato). Entonces, ¿El gato está vivo o muerto?

**Falacia:** Son razonamientos aparentemente correctos pero que en su desarrollo contienen errores que nos llevan a conclusiones totalmente falsas. Ejemplo 1: La mayoría de estudiantes de Santiago son estudiosos. Martín es santiaguino, consecuentemente es estudioso. Ejemplo 2:

**¿Es posible que  $1 = -1$ ?**

$$\begin{aligned}\sqrt{(1)} &= \sqrt{(-1)(-1)} \\ 1 &= \sqrt{(-1)}\sqrt{(-1)} \\ 1 &= i * i \\ 1 &= i^2 \\ 1 &= -1\end{aligned}$$

**Curiosidad:** Son conocimientos matemáticos que por su naturaleza causa interés, asombro y admiración. Ejemplos: Cuadrados mágicos, números perfectos y la serie de Fibonacci.

### ANEXO 3: CATEGORÍAS ENTREVISTA Y ENCUESTA<sup>10</sup>

Concepto	Definición
Aprendizaje	Proceso mediante el cual la experiencia genera un cambio permanente en el conocimiento o la conducta o los conocimientos nuevos que una persona adquiere.
Cambios curriculares	Modificaciones al currículum nacional realizadas por el MINEDUC, ya sea a objetivos o contenidos.
Conocimientos previos	Representaciones que posee una persona en un momento determinado de su historia sobre una parcela de la realidad o las experiencias de aprendizaje previas que una persona posee.
Contenidos	Son los conocimientos y prácticas que buscan desarrollar destrezas y actitudes en los estudiantes.
Clima socioafectivo	Son los ambientes educativos en los que se valora la convivencia entre los estudiantes y se respeta las características de cada uno.
Dificultades en el curso	Algún obstáculo o situación difícil que se observa de una determinada realidad, las cuales pueden ser educativas, de aprendizaje e incluso actitud.
Dificultades matemáticas	Algún obstáculo o situación difícil que se observa de una determinada realidad en matemática, las cuales pueden ser educativas, de aprendizaje e incluso conceptual.
Dificultades personales	Algún obstáculo o situación difícil que se observa e identifica sobre uno mismo o de sus propias experiencias, las cuales pueden ser de vida, educativas, de aprendizaje e incluso actitud.
Diversidad	La variedad de personas, formas de aprender, entre otras. Que componen una determinada realidad, en este caso, la escuela.
Enseñanza	Es la forma de transformar el saber sabio (contenido académico) en uno que sea accesible para que todos aprendan.
Estudiantes	Son los sujetos que están implicados a la hora de aprender.
Evaluación	Un instrumento o manera de medir o estimar lo que alguien sabe, en este caso, un estudiante.
Experiencia escolar	Son las situaciones que una persona vive o evidencia en el contexto escolar, las cuales pueden ser educativas, relacional, de aprendizaje e incluso actitudinal.
Experiencia PENTA UC	Son las situaciones que una persona vive o evidencia en el contexto PENTA UC, las cuales pueden ser educativas, relacional, de aprendizaje e incluso actitudinal.
Gestión escolar	Es la manera en que se promueven los aprendizajes en los estudiantes, profesores y la comunidad.
Horario	Es el tiempo destinado para realizar una determinada actividad, en este caso, asistir al curso del programa.
Intereses	Son las preferencias a las que una persona de manera voluntaria decide realizar, como por ejemplo leer, estudiar, aprender, entre otros.
Labor docente	La capacidad y responsabilidad que posee un profesor sobre los diferentes elementos que componen e influyen en el proceso de enseñanza, como la comunicación.
Medios educativos	Los elementos que se utilizan para proveer y/o facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje, en este caso la tecnología.
Metodología	Los elementos que se utilizan para proveer y/o facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje.
Participación	Involucrarse en el proceso de enseñanza-aprendizaje activamente, por ejemplo en el caso de un estudiante: preguntando, debatiendo, entre otros.
Percepción general del curso	Alguna situación relevante para alguien obtenida a través de la observación de una determinada realidad (en este caso el curso estudiado), las cuales pueden ser educativas, de aprendizaje e incluso actitud, pero son más generales, por eso no se asocian a otra categoría más específica.
Talento académico	Poseer habilidades cognitivas superiores en relación a pares y en un determinado contexto (Arancibia y col. 2012)

<sup>10</sup> Definidas por las respuestas obtenidas.

## ANEXO 4: ANÁLISIS PRELIMINARES

### ANEXO 4.1: ANÁLISIS PRELIMINAR DE LOS DOCUMENTOS ESCRITO

Estudiante	Clase 1			Clase 2			Clase 3			Clase 4		
	Argumento	Obstáculo	Registro	Argumento	Obstáculo	Registro	Argumento	Obstáculo	Registro	Argumento	Obstáculo	Registro
VA	Inductivo Visual	OA Tratamiento o Incongruencia  (No usa propiedad de operación)	RSD RPD	Inductivo Visual Deductiva		RVD RSD RID RPD	Inductivo Visual		RPD	Visual	OA  (No usan ninguna propiedad matemática o geométrica)	RPD
IA	Inductivo Visual	OA Tratamiento o Incongruencia  OAI	RSD RPD	Visual Inductiva		RPD RID	Inductivo Visual		RPD RSD	Visual	OA	RPD
MB	Inductivo Visual		RSD RPD RID	Visual Inductiva		RPD RID	Inductivo Visual		RPD	Visual	OA	RPD
PC	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	Visual Inductiva		RPD RID	Inductivo Visual		RPD	Visual	OA	RPD
HC	Inductivo Visual	OAI Tratamiento o Incongruencia	RSD RPD RID	Visual Inductiva		RPD RID	Inductivo Visual		RPD	Visual	OA	RPD
JE	Inductivo Visual		RSD RPD	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	Inductivo Visual		RPD RSD RID	Visual	OA	RPD
GG	Inductivo Visual		RSD RPD RID	Visual Inductiva		RPD RID	Inductivo Visual		RPD RSD RID	Visual	OA	RPD
SL	Inductivo Visual		RPD	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	Inductivo Visual		RPD	Visual	OA	RPD
DL	Inductivo Visual Deductiva	OA Tratamiento o Incongruencia	RSD RPD RID RVD	Inductivo Visual Deductiva		RPD RID RVD	Inductivo Visual		RPD RSD RVD	Visual	OA	RPD
FM	Inductivo Visual		RID RPD	Visual Inductiva		RPD RID	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	Visual	OA	RPD

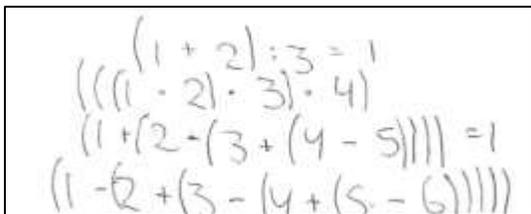
CP	Inductivo Visual		RPD	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	Inductivo Visual		RPD	Visual	OA	RPD
RR	Inductivo Visual	OA Tratamiento Incongruencia	RSD RPD	Visual Inductiva		RPD RID	Inductivo Visual		RPD RSD RID RVD	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos
VS	Inductivo Visual		RSD RPD	Visual Inductiva		RPD RID	Inductivo Visual		RPD RID	Visual	OA	RPD
BS	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	Visual Inductiva		RPD RID	Inductivo Visual		RPD	Visual	OA	RPD
VU	Inductivo Visual Deductiva	OA Tratamiento Incongruencia	RSD RPD	Visual Inductiva		RPD RID	Inductivo Visual		RPD RSD RID	Visual	OA	RPD
RV	Inductivo Visual		RSD RPD	Visual Inductiva		RPD RID	Inductivo Visual		RPD RSD	Visual	OA	RPD

Estudiante	Clase 5			Clase 6			Clase 7			Clase 8			Clase 9		
	Argumento	Obstáculo	Registro	Argumento	Obstáculo	Registro	Argumento	Obstáculo	Registro	Argumento	Obstáculo	Registro	Argumento	Obstáculo	Registro
VA	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	Deductiva Explicación		RPD RVD	A conocimiento cero Abductiva		RVD RID	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	Explicación(declaración)		RVD
IA	Visual		RPD	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	A conocimiento cero		RVD RID	Visual		RID	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos
MB	Visual		RPD	Abductiva		RVD	A conocimiento cero		RVD RID	Deductivo Abductivo Visual		RVD RSD RID	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos
PC	Visual Abductivo		RVD RPD	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos
HC	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	A conocimiento cero Abductiva No deductiva		RVD RID	Deductivo Abductiva Visual	OAIA	RVD RSD RID	Explicación(declaración)		RVD
JE	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	A conocimiento cero		RVD RID	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos
GG	Abductivo		RVD	Abductiva Explicación		RVD	Abductiva		RVD RID	Inductivo Abductivo Deductivo		RVD RSD	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos

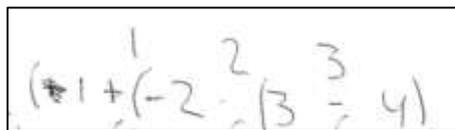
SL	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	A conocimiento cero Abductiva No deductiva		RVD RID	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos
DL	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	Deductiva Explicación		RVD	A conocimiento cero Abductiva		RVD RID	Deductivo		RVD RSD	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos
FM	Abductivo Visual		RPD RVD RID	Abductiva Explicación		RVD	Abductiva		RVD RID	Deductivo Abductivo Visual		RVD RSD RID	Explicación(declaración) Visual		RVD RPD
CP	Abductiva		RVD	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	A conocimiento cero		RVD RID	Abductivo Visual Deductivo		RVD RSD	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos
RR	Abductivo		RVD	Abductiva Explicación		RVD	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	Deductivo		RVD RSD	Explicación(declaración)		RVD
VS	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	Deductiva Explicación		RVD	A conocimiento cero Abductiva		RVD RID	Deductivo		RVD RSD	Explicación(declaración) Visual		RVD RPD
BS	Abductivo Visual		RPD y RVD	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	Abductiva		RVD RID	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos
VU	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	Deductiva		RVD	A conocimiento cero Abductiva		RVD RID	Visual Deductivo Abductivo		RVD RSD RID	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos
RV	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	Explicación		RVD	A conocimiento cero Abductiva No deductiva		RVD RID	Deductivo Inductivo Abductiva Visual	Asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento de asociación	RVD RSD RID	Visual Explicación (declaración)		RVD RSD

## ANEXO 4.2: EJEMPLOS DE LOS DOCUMENTOS ESCRITOS

**Problema Clase 1:** Coloque entre cada dos cifras el signo de la operación aritmética que sea necesario. Está permitido utilizar paréntesis.


$$\begin{aligned} &(1+2):3=1 \\ &(((1-2)\cdot 3)\cdot 4) \\ &(1+(2-(3+(4-5))))=1 \\ &(1-2+(3-(4+(5-6)))) \end{aligned}$$

Ejemplo 1a.


$$(1+(-2-3-4))$$

Ejemplo 1b.

El objetivo del problema anterior es obtener para cada expresión el resultado “1”. Es así que en el ejemplo (1a y 1b) se visualiza argumento inductivo debido a que prueba con diferentes casos la forma de obtener “1” a través del registro de representación simbólica (RSD) lo cual implica conversión de registros de representación de lenguaje natural al registro RSD. Pese a ello, presenta obstáculo de asociación incorrecta o rigidez del pensamiento de interferencia por el uso de signo negativo en expresiones algebraicas con paréntesis. Lo anterior confirma la idea de que el algebra supone un cambio en el pensamiento de un estudiante (Socas, 1997) debido a que esta situación interfiere constantemente en el ejemplo 1a y 1b (en específico en la última expresión de ambos ejemplos debido a que el resultado es -1).

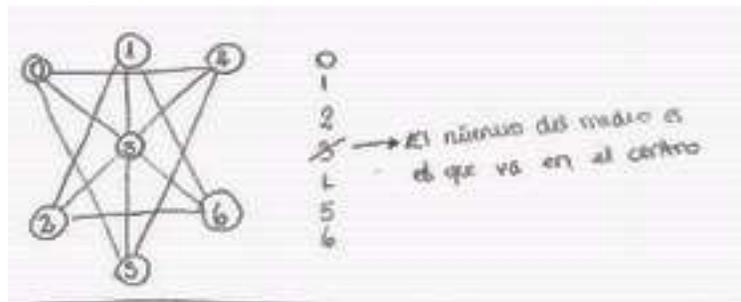
Lo anterior genera implicancias en otros obstáculos que son planteados por Duval (1999), los cuales se refieren precisamente a los problemas generados dentro de los registros en situaciones de cálculo matemático, esto es conocido como *tratamiento*. En esta respuesta en particular, causado por los signos negativos en las expresiones algebraicas. En otros casos se evidenció en respuestas como la siguiente:

$$\begin{array}{l}
 1 - 2 + 3 - 4 = 1 \\
 1 - 2 + 3 + 4 - 5 = 1 \\
 1 + 2 + 3 - 4 + 5 - 6 = 1 \\
 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 = 1 \\
 1 + 2 + 3 - 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 1 \\
 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 = 1
 \end{array}$$

Ejemplo 1c.

El ejemplo 1c muestra el uso de diferentes operaciones entre ellas multiplicaciones y divisiones con sumas y restas, donde las primeras poseen jerarquía a la hora de resolver operaciones combinadas en situaciones matemáticas. Sin embargo, en el ejemplo el desarrollo de cada operación matemática se realiza de izquierda a derecha, lo que matemáticamente no es posible.

**Problema clase 2:** *¿Es posible distribuir los números del 0 al 6, de manera que la suma los tres números que están en cada vértice de los triángulos y de los segmentos que pasan por el centro sea 9?*



Ejemplo 2.

El ejemplo 2 presenta argumento inductivo apoyado del argumento visual debido a que el estudiante escribe de manera vertical los números del 0 al 6, los cuales ubica en los vértices de cada triángulo para cumplir con los requerimientos del problema. Además el ejemplo posee una conclusión: “el número del medio es el que va en el centro”, la cual no era requerida. Es por esto que posee un registro de representación RVD centrado en el tipo escrito, apoyado a su vez de registros de representación simbólicos (RSD) e icónicos (RID)

debido a que utiliza números del 0 al 6 distribuidos de una determinada manera, el número tres es tachado mediante una línea y hay una flecha que permite comprender la relevancia de la conclusión para el estudiante.

**Problema clase 3:**

- a) Resuelve el cuadrado utilizando los números del 1 al 16.
- b) Resuelve el cuadrado utilizando los números del 0 al 15.
- b) ¿Cuál es la constante mágica de a y b?
- c) ¿La solución es única de a y b?

The image shows two 4x4 magic squares and handwritten notes. The first square uses numbers 1-16 and has a magic constant of 34. The second square uses numbers 0-15 and has a magic constant of 50. Handwritten notes explain the construction of the second square.

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

= 34

15	1	2	12
8	6	5	11
4	10	9	7
3	13	14	0

0  
1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12

13  
14  
15

= 50

- La suma de los 4 números del mismo dan la constante
- Son consecutivos, del medio, se pararon por dos (del medio del conjunto)
- Los de las esquinas están separados por tres y con los primeros y últimos

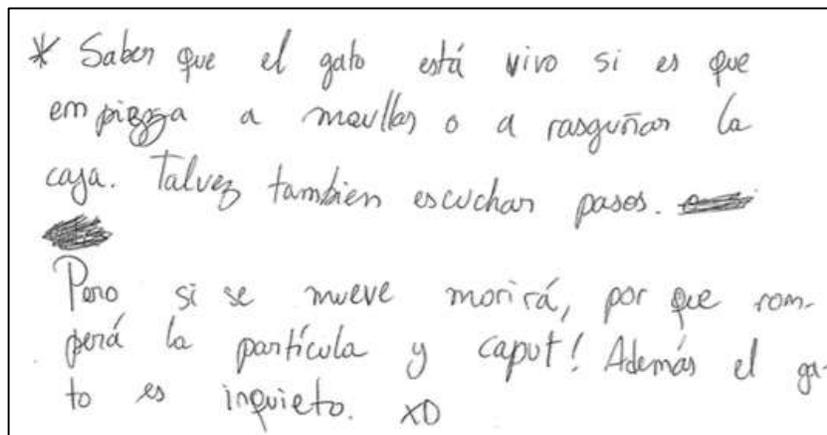
Ejemplo 3

En el ejemplo 3 corresponde a un cuadrado mágico de orden cuatro, en el se puede visualizar que existe presencia de argumento inductivo apoyado del argumento visual

debido a que el estudiante escribe de manera vertical los números del 0 al 12, los cuales ubica en las casillas del cuadrado para cumplir con los requerimientos del problema. Todo lo anterior permitió generar diferentes conclusiones respecto a la distribución de los números: “la suma de los 4 números del centro dan la constante”, “Son consecutivos del medio, separados por dos (del medio de conjunto)” y “los de las esquinas están separados por tres y son los primeros y últimos”, las cuales no son requerimiento del problema.

Es así como este es un ejemplo que posee un registro de representación RVD centrado en el tipo escrito, apoyado a su vez de registros de representación simbólicos RSD, debido a que utiliza números del 0 al 15 y del 1 al 16 distribuidos de una determinada manera en la que todas las casillas verticales, horizontales y las diagonales sumen 30.

**Problema Clase 5:** *En el experimento de Schrödinger, tenemos una caja totalmente opaca, con 3 elementos en su interior: un gato (vivo), una botella con un gas venenoso y un aparato con una partícula radioactiva, la cual tiene una probabilidad del 50% de desintegrarse (la botella libera el gas, matando al gato). Entonces, ¿El gato está vivo o muerto?*



\* Saber que el gato está vivo si es que empieza a moverse o a rasguñar la caja. Tal vez también escuchar pasos. ~~es~~

Pero si se mueve morirá, por que romperá la partícula y caput! Además el gato es inquieto. XD

Ejemplo 5a

~ la paradoja de Schrödinger  
la solución a esta paradoja es que si el gato está  
adentro se va a mover haciendo que la partícula  
se desintegre. Así como que la bofetada de gas se  
abra y el gato muera!

### Ejemplo 5b

Los ejemplos 5a y 5b permiten observar otro tipo de argumento que fue recurrente dentro del curso estudiado, el cual fue usado por los estudiantes porque se plantearon diversos problemas con diferentes objetivos, en este caso generar discusión y argumentos con fundamentos para responder a la pregunta.

Una paradoja es una proposición en apariencia verdadera que nos lleva a una contradicción lógica o que choca con el sentido común, por ende implica usar un razonamiento para encontrar alguna explicación o respuesta. Es así como el ejemplo 5a presenta un argumento abductivo (AA), es decir, donde la conclusión surge totalmente desde las experiencias y no usa ningún tipo de premisa o dato, debido a que el estudiante aplica ciertas cualidades que posee un gato para fundamentar que morirá bajo las condiciones de la proposición. Argumento que es de igual forma presentado en el ejemplo 5b. Además, ambos poseen un registro de representación verbal-escrito (RVD) con presencia netamente escrita, el cual no presenta ningún concepto, idea o símbolo matemático. Por lo tanto, no existe congruencia con otros registros.

Pese a ello, la respuesta correcta era que el gato está vivo y muerto a la vez porque el problema indica que tiene una probabilidad de 50% de desintegrarse la partícula. Este argumento no fue usado por ningún estudiante debido a que sus conclusiones estaban asociadas a sus experiencias y no a los datos que el problema propiamente tal entregaba. Este es un problema que ejemplifica la relación que existe entre los argumentos y los razonamientos en matemática, tales razonamientos pueden estar o no asociados a la

experiencia, pero ella prevalecerá cuando no existe un conocimiento matemático previo respecto a un determinado tema.

**Problema clase 7:** Lee con detención cada una de las falacias y explica cuál es el error.

2. Si como jamón, entonces tomo agua, y si tomo agua me quito la sed, por ello si como jamón me quito la sed. *Jamón evita el hambre, y tal vez da sed, pero el agua sin comer jamón evita la sed (?)*

3. Einstein creía en Dios. Y si ese gran físico lo dice, debe estar en lo cierto al 100%. *no por que alguien popular diga o crea algo, no significa que sea cierto.*

4. Los fidels italianos son los mejores. lo recomienda Ricky Martin.

Ejemplo 7

El ejemplo 7 corresponde a diferentes proposiciones en las cuales los estudiantes debían identificar el tipo de falacia y/o explicar el error. Es así como se puede visualizar que existe registro de representación verbal-escrito (RVD) y presencia de argumento abductivo debido a que las respuestas corresponden a ideas asociadas a diferentes experiencias o ideas vinculadas a la vida cotidiana, tal y como lo siguiente: “jamón quita el hambre y tal vez da sed, pero el agua sin comer jamón quita la sed”, en este caso el ámbito disciplinar se pierde porque los elementos cotidianos poseen más relevancia en el argumento. Esto ejemplifica que los estudiantes recurren al argumento abductivo (Crespo, 2010).

**Problema clase 8:** Lee con detención cada una de las falacias y explica cuál es el error.

1. ¿Es posible que  $4 = 3$ ?  
 Suponemos que  $a^2 = b^2 + c^2$ , entonces:

$$c^2 = 4a^2 - 3a^2$$

$$1a^2$$

$$a^2 = 4a^2 - 3a^2 \quad \checkmark$$

$$b^2 = 4b^2 - 3b^2 \quad \checkmark$$

$$c^2 = 4c^2 - 3c^2, \text{ entonces:}$$

$$4a^2 - 3a^2 = (4b^2 - 3b^2) + (4c^2 - 3c^2) \quad \checkmark$$

$$4a^2 - 4b^2 - 4c^2 = 3a^2 - 3b^2 - 3c^2 \quad \checkmark$$

$$4(a^2 - b^2 - c^2) = 3(a^2 - b^2 - c^2) \quad \times$$

$$4 = 3$$

$$0 = 0$$



$$b^2 + c^2 = a^2$$

Ejemplo 8

El ejemplo 8 corresponde a una proposición aritmética en la cual los estudiantes debían identificar y/o explicar el error. Es así como se puede visualizar que posee registro de representación simbólico (RSD) y existe presencia de argumento no deductivo debido a que utiliza las premisas para desarrollar el ejercicio, relacionándolo a una experiencia

disciplinar como el Teorema de Pitágoras: Dibuja un triángulo rectángulo con la fórmula. En base a ella intenta desarrollar el ejercicio debido a que el uso del teorema lo impide, transformándose esta experiencia disciplinar más bien en un obstáculo de asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento de asociación (OAIA).

Todos estos ejemplos verifican que no todos los estudiantes con talento académico poseen una inteligencia idéntica, pero aún así, son caracterizados como flexibles en el aspecto cognitivo (Arancibia y col. 2012) ya sea en las diferencias y/o similitudes en los argumentos como en los obstáculos y registros que fueron encontrados.

### ANEXO 4.3: ANÁLISIS PRELIMINAR DE REGISTROS DE AUDIO

	Clase 1			Clase 2			Clase 3			Clase 4		
	Tipo	Obstáculo	Registro	Tipo	Obstáculo	Registro	Tipo	Obstáculo	Registro	Tipo	Obstáculo	Registro
F1	1.Explicación 2.Justificación		RSD	1. Deductiva 2. Visual		RVD y RSD	1. Justificación 2. No monotónica	OAI	RVD	1. Explicación 2. No monotónica	OL	RVD y RSD
F2	1. A conocimiento cero 2. Abductiva	T OL	RSD	1. Inductiva 2. Visual	OAIAS	RVD	1. No monotónica 2. Visual		RVD	1. Inductiva 2. Explicación	OL	RVD
F3	1. Explicación 2. Justificación		RVD	1. No monotónica		RVD	1. Justificación		RVD	No monotónica	OAIA	RVD
F4	1. No deductiva 2. Abductiva		RVD	1. Abductiva 2. Visual	Lenguaje	RVD	1. No monotónica 2. Visual		RVD	1.Inductiva 2. Abductiva 3. Visual		RVD
F5	1. Explicación 2. Justificación	OL OA	RSD	1.A conocimiento cero 2. Visual	Lenguaje	RSD	1. Justificación 2. Inductiva	OAIAS	RVD	No monotónica		RVD
F6	1. Justificación 2. Visual		RSD	1.Abductiva 2. Visual		RSD	Justificación		RVD	1. Explicación 2. Visual 3. No deductiva	Lenguaje	RVD
F7	1. Justificación		RVD	1. Abductiva 2. Visual		RSD y RPD	1. Explicación 2. Visual 3. Abductiva	Lenguaje	RSD y RPD	No monotónica		RVD
F8	1. Abductiva 2. No monotónica		RSD	1. No monotónica	OAIAS	RVD	Justificación	OAI	RVD	Abductiva		RVD
F9	1. Visual 2. Justificación		RSD	1. Explicación 2. Visual		RVD	No monotónica		RVD	Deductiva	Lenguaje	RSD
F10	1.No monotónica 2. Visual	OAIAS	RSD	1. No monotónica 2. Visual	OAIAS	RVD	1. Justificación 2. Inductiva		RVD	1. Explicación 2. Inductiva		RVD y RSD
F11	1. Justificación 2. Visual		RSD	1. Inductiva 2. Visual		RVD	No monotónica		RVD	Deductiva	OAIA	RVD
F12	1. No monotónica 2. Visual		RVD	1. No monotónica 2. Visual		RVD	1.Explicación 2. Visual	OAIAS 2. Lenguaje	RVD	Explicación		RVD
F13	1. Explicación 2. Visual		RVD	1. Explicación 2. Inductiva 3. Visual	OAIAS	RVD y RSD	No monotónica		RVD	1. Explicación 2. No monotónica		RVD y RSD
F14	1. Explicación 2.Justificación	OL	RVD y RSD	1. No monotónica2 . Visual	OAIAS	RVD	1. Explicación 2. Inductiva 3. Visual		RSD	1. A conocimiento cero 2. Visual	OAIA	RVD
F15	1. Explicación 2. Inductivo		RSD	1. Justificación 2. Visual		RVD	1. Abductiva 2. Explicación		RVD	No monotónica		RVD
F16	1. Explicación 2.Visual	OAIA	RVD	1. Abductiva 2. Visual		RSD y RPD	Justificación		RSD	1. A conocimiento cero 2. Visual		RVD

F17	1. Explicación 2. Visual		RVD				Explicación		RSD	Deductiva		RVD
F18	1. Explicación 2. Justificación		RVD				1. Inductiva 2. Explicación 3. Visual	1.OAI 2. Lenguaje	RSD	No monotónica		RVD
F19	1.Explicación 2. Visual	I	RSD				No monotónica		RVD	1. Justificación 2. Explicación	Lenguaje	RVD
F20	1. Justificación 2. Explicación		RVD				1. Explicación 2. Visual		RVD			
F21	1. Justificación 2. Explicación		RVD									
F22	1. No monotónica 2. Visual		RVD									
F23	1. Justificación 2. Explicación	OR	RVD									
F24	1. Abductiva 2. No monotónica		RSD									
F25	1. Explicación 2. Justificación	OAIAS	RVD y RSD									
F26	1. Abductiva 2. Visual		RVD									
F27	1. Justificación 2. Visual		RVD y RSD									
F28	1. Justificación 2. Abductiva 3. Visual	OAI	RSD									
F29	1. Explicación 2. Visual	OAIAS	RVD y RSD									
F30	1. Explicación 2. Justificación		RVD									

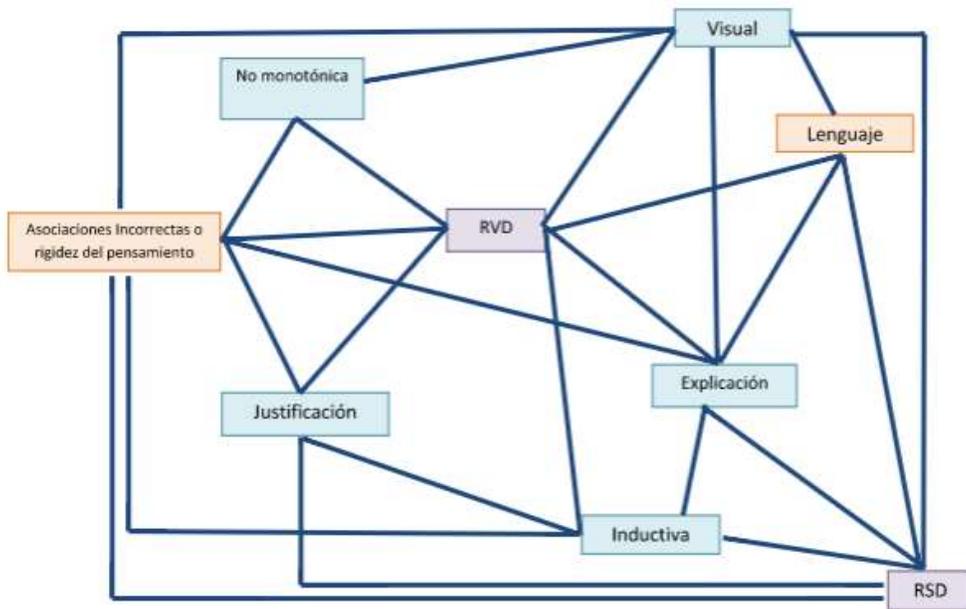
Clase 5			Clase 6			Clase 7			Clase 8			Clase 9		
Tipo	Obstáculo	Registro	Tipo	Obstáculo	Registro	Tipo	Obstáculo	Registro	Tipo	Obstáculo	Registro	Tipo	Obstáculo	Registro
Expli.		RVD	Explicación		RVD	Explicación		RVD	Explicación		RSD	1.Expli. 2. No monot.		RVD
Deductiva	OAIAS	RVD	No deductiva	OAI	RVD	1.Abductiva 2. Deductiva		RVD	A conocimiento cero		RVD	1.A conocimiento cero 2. Deductiva	1.OL 2. OA	RVD
Explicación		RVD	Justificación		RVD	Justificación		RVD	1.Explicación 2. Justificación		RVD y RPD	1. A conocimiento cero 2. Deductiva	1. OL 2. OA	RSD
Deductiva	OL	RVD	1.Explicación 2. Justificación		RVD	1.Abductiva 2. Justificación		RVD	Justificación		RVD	No monotónica	1. OL 2. OA	RVD
Explicación		RVD	1.Explicación 2. Visual	OL	RVD y RID	Deductiva		RVD	A conocimiento cero		RVD	A conocimiento cero		RVD
1.Abductiva 2. Justificación	OAIAS	RVD	1. Explicación 2. Justificación		RVD	Explicación		RVD	No monotónica		RVD	No monotónica		RVD
No monotónica		RVD	Abductiva		RVD	Deductiva		RVD	A conocimiento cero		RVD	1. A conocimiento cero 2. Explicación		RSD
No monotónica	OAIAS	RVD	No monotónica	OAIAS	RVD	A conocimiento cero		RVD	Deductiva		RVD	1. A conocimiento cero 2. Explicación	1. OL 2. OA 3. T	RSD
Justificación		RVD	Explicación		RVD	1. Deductivo 2. A conocimiento cero		RVD	No monotónica		RVD	A conocimiento cero		RVD
Deductiva	OL	RVD	1.No deductiva 2. Justificación	OA	RVD	A conocimiento cero		RVD	A conocimiento cero		RVD	No monotónica		RVD
1.Explicación 2. Justificación		RVD	Justificación		RVD	1. Deductivo 2. A conocimiento cero	OAIAS	RVD	Deductiva		RVD	Deductiva	1. OL 2. OA	RVD
No monotónica		RVD	1.No deductiva 2. Justificación	OA	RVD	1. Deductiva 2. Explicación	Lenguaje	RSD y RVD	1.No monotónica 2. Visual		RVD	1. No monot. 2. A conocimiento cero 3. Explicación	1. OL 2. OA	RVD

Justificación	OAIA	RVD	No monotónica		RVD	1. Deductiva 2. Explicación		RVD	1.A conocimiento cero 2. Visual		RPD	1. Justificación 2. No monotónica 3. A conocimiento cero		RVD
Deductiva		RVD	Justificación	OL	RVD	No monotónica	OAIAS	RVD	Explicación		RVD	1. No monotónica 2. A conocimiento cero 3. Explicación	1. OL 2. OA	RVD
Explicación		RVD	No monotónica	OAIAS	RVD	Justificación		RVD	No monotónica	1.OAIA 2. OA	RVD	1. Explicación 2. Visual		RVD y RSD
1. No deductiva 2. Justificación	OAIA	RVD	Explicación		RVD	No monotónica	OAIAS	RVD	Explicación		RVD			
Justificación		RVD	1. Explicación 2. Justificación	OL	RSD	Justificación		RVD	Explicación		RVD			
Explicación		RVD	A conocimiento cero		RVD	No monotónica		RVD	1. Deductiva 2. Visual		RVD y RSD			
Deductiva		RVD	Justificación		RVD	Deductiva		RVD	1. No monotónica 2. Visual		RVD y RPD			
No monotónica	OAIP	RVD	No monotónica		RVD	No monotónica	OAIAS	RVD	1. Explicación 2. Visual 3. Deductiva		RVD y RPD			
Explicación		RVD	Justificación		RVD	Justificación		RVD	No monotónica	1. OAIAS 2. OA	RVD			
Deductiva	OL	RVD	1. No monotónica 2. Justificación	OA	RVD				1. Explicación 2. Justificación		RVD			
No monotónica	OAIP	RVD	Explicación		RVD				1. Inductiva 2. No monotónica 3. Explicación 4. Visual		RVD y RPD			
Justificación		RVD	Explicación		RVD				Inductiva		RVD			
Explicación		RVD	1. Abductiva 2. Deductiva		RVD				Inductiva		RVD			
1. Justificación	OAIA	RVD	Explicación		RVD				Deductiva		RVD y RPD			

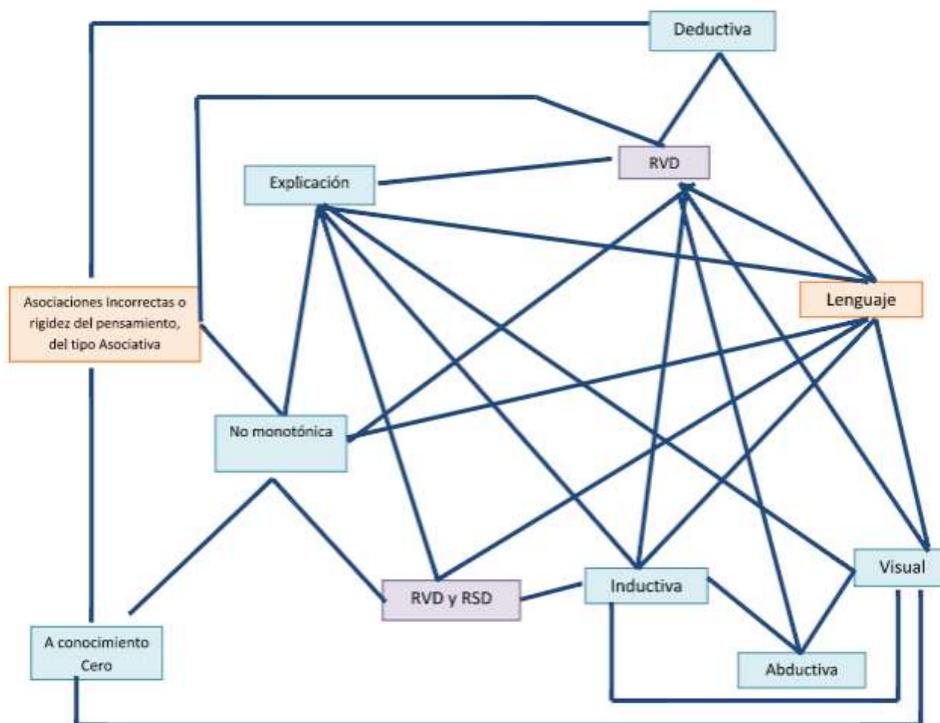
ón 2.Deductiva																			
Expli.		RVD							1. No monot. 2. Inductiva	1.OAIAS 2. OA	RVD								
1.Deduc. 2.Justificación	OAIA	RVD							1.Inductiva 2. Justificación		RVD								
No monot.		RVD							Justificación		RVD								
Justificación		RVD							Justificación		RVD								
Deductiva	OAIP	RVD							1.Deductiva 2. Expli.		RVD y RSD								
Justificación		RVD							1. Expli. 2.Justific.		RVD								
1. No deductiva 2. Expli.		RVD																	
No monot.		RVD																	
1. No deductiva 2. Justificación	OAIA	RVD																	
Justificación		RVD																	
1. No deductiva 2. Expli.	OAIA	RVD																	
No monot.	OAIP	RVD																	
1. Expli. 2.Justificación 3.Deduc.		RVD																	
No deductiva		RVD																	
No monot.	OAIP	RVD																	
No monot.	OAIAS	RVD																	
1. Expli. 2.Justificación		RVD																	
No deductiva	OAIAS	RVD																	
1. No deductiva 2. Expli.		RVD y RSD																	
No monot.	OAIAS	RVD																	
Justificación		RVD																	

**ANEXO 4.4: GRAFOS CLASE 3, 4, 5, y 6.**

**C3:**



**C4:**





## ANEXO 4.5: ANÁLISIS PRELIMINAR PRUEBA INICIAL-FINAL POR ESTUDIANTE

Estudiante	Prueba Inicial			Prueba Final		
	Argumento	Obstáculo	Registro	Argumento	Obstáculo	Registro
VA	Inductivo Explicación(3)	Asociaciones incorrectas de pensamiento de asimilación	RVD RSD	Explicación Deductivo(2)-Explicación No deductivo		RVD RPD RSD
IA	Inductivo(2) Explicación(3)	Asociaciones incorrectas de pensamiento de asimilación	RVD RSD RID	Explicación Deductivo No deductivo Inductivo	-Lenguaje -Aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos.	RVD RSD
MB	Inductivo Abductiva Explicación(2)	Asociaciones incorrectas de pensamiento de asociación	RVD RSD	Explicación Deductivo(2) No deductivo Visual		RVD RPD RSD
PC	Inductivo No deductivo(2) Explicación	Asociaciones incorrectas de pensamiento de asociación	RVD RSD	Justificación Explicación Deductiva No deductivo	Lenguaje	RSD RVD RPD
HC	Inductivo Explicación(2) Abductivo	Asociaciones incorrectas de pensamiento de asimilación	RVD RSD RID	Visual Deductivo(2) Explicación No deductivo	Lenguaje	RVD RSD RPD RID
JE	Inductivo(2) Explicación(3)	Asociaciones incorrectas de pensamiento de asimilación	RVD RSD	Visual Explicación Deductivo No deductivo	Lenguaje	RSD RVD
GG	Inductivo(2) Explicación(3)	Asociaciones incorrectas de pensamiento de asimilación	RVD RSD	Explicación No deductivo Inductivo(2)	Aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos -Lenguaje	RSD RVD RID
SL	Inductivo(2) No deductivo Explicación	Asociaciones incorrectas de pensamiento de asimilación	RVD RSD	Explicación No deductivo Deductivo(2)	Lenguaje	RSD RVD
DL	Inductivo(3) Explicación No deductivo	Asociaciones incorrectas de pensamiento de asociación	RVD RSD	Explicación Deductivo(2) No deductivo		RSD RVD
FM	Inductivo(2) Abductiva Explicación	Asociaciones incorrectas de pensamiento de asociación	RVD RSD RID	Explicación Inductivo(2) No deductivo	Aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos Lenguaje	RVD RSD RID
CP	No hay documentos	No hay documentos	No hay documentos	No deductivo Inductivo(2) Explicación	Lenguaje Aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos	RVD 
RR	Inductivo Explicación(3)	Asociaciones incorrectas de pensamiento de asimilación	RVD RSD RID	No deductivo Inductivo(2) Explicación	Aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos Lenguaje	RVD RSD
VS	Inductivo(2) Explicación(2) Deductivo	Asociaciones incorrectas de pensamiento de asimilación	RVD RSD	No deductivo Explicación Deductivo	Aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos	RSD RVD
BS	Inductivo Explicación(3)	Asociaciones incorrectas de pensamiento de asimilación	RVD RID	No deductivo Explicación Deductivo-Visual Inductivo	Aplicación de reglas estrategias irrelevantes Lenguaje	RSD RVD RPD
VU	Inductivo(2) Explicación(2)	Asociaciones incorrectas de pensamiento de asimilación	RVD RSD	Inductivo deductivo Explicación No deductivo	Aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos	RSD RVD
RV	Inductivo Explicación(3)	Asociaciones incorrectas de pensamiento de asimilación	RVD RID	Inductivo deductivo Explicación No deductivo	Lenguaje	RID RSD RVD

#### ANEXO 4.6: EJEMPLOS DE RESPUESTAS DE LA PRUEBA INICIAL-FINAL

**Problema n° 1:** *¿Cómo lograr que se cumpla la igualdad? (Inicial) - En las siguientes igualdades el signo "+" no quiere decir "más" ¿Qué significa entonces? (Final).*

Handwritten mathematical problem and solution for example 1a. The problem shows three equations:  $RAS = 913$ ,  $+PAR = 419$ , and  $ASSA = 1331$ . The solution is written in Spanish: "Solo entente con varios números hasta llegar al resultado".

1a.

Handwritten explanation for example 1b: "+ significa sumarle al primer sumando, la mitad del segundo sumando. Para lograr q este resultado, busque en qué debería, cambiar uno de los dos sumandos, y llegué a esa conclusión."

1b.

Este problema en la prueba inicial no fue desarrollado por todos los estudiantes, de un total de 16, cinco de ellos lograron resolverlo, el ejemplo 1a es uno de ellos, el cual presenta un argumento inductivo debido a que se probaron distintos casos. Contiene registro de representación simbólico (RSD) a través de los cálculos que se realizaron, los cuales a su vez, complementan el registro de representación verbal-escrito (RVD) de tipo escrito, utilizado, el cual sólo describe el procedimiento usado.

En el ejemplo 1b ya no existen registros de representación simbólico (RSD), -a excepción del símbolo que representa una suma-. En este caso el argumento posee sólo registro de representación verbal-escrito (RVD) de tipo escrito y está asociado más bien a una explicación de lo que hay que hacer para obtener el resultado esperado en las expresiones. Pese a ello, este es un caso que a nivel del uso del lenguaje es muy potente debido a que usa el término apropiado para cada elemento de una adición, aspecto que se reitera en otros casos donde los estudiantes son capaces de usar un lenguaje matemático adecuado.

En ambos ejemplos se evidencia comprensión debido a que presenta diferentes registros de representación semiótico. (Duval citado en Socas, 1997).

**Problema n° 2:** Completa el cuadrado con números del 1 al 16, de manera que la suma de los números de las filas, columnas y diagonales sea la misma (Inicial) - Completa el cuadrado con números del 0 al 15 (sin repetirlos) de manera que la suma de los números de filas, columnas y diagonales sea la misma (Final).

2a.

3-4-7-8-9-11-13- 16	16	2	3	13
	5	11	10	8
	9	7	6	12
	4	14	15	1

Al ser la diagonal que le faltaban esos números, he probado todas las alternativas que podía, hasta que todo me sumó 34

2b.

15	1	2	12
4	10	9	7
8	6	5	11
3	13	14	0

Pones los n° en orden, pero los de las esquinas y los 4 de en medio se invierten con su opuesto

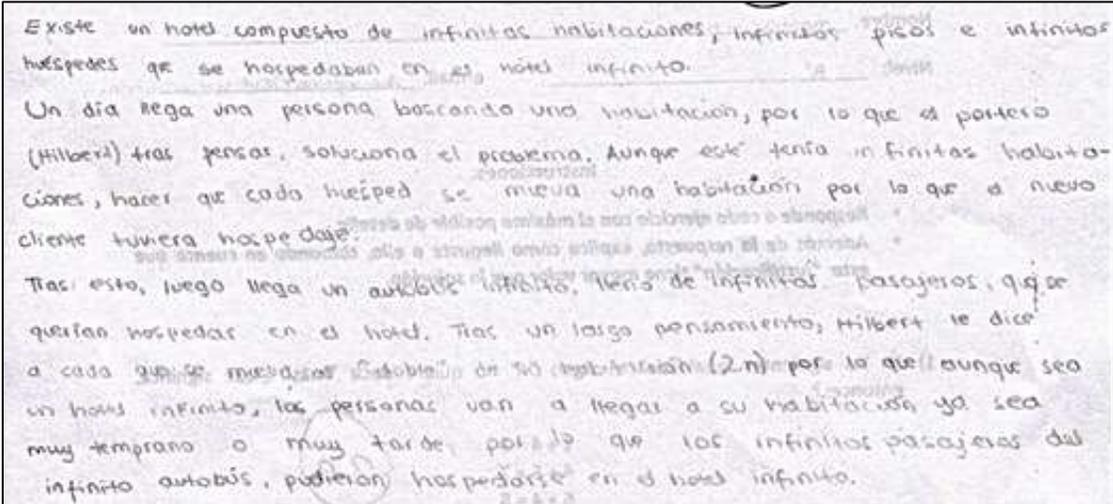
Este es un problema que es desarrollado y explicado por los estudiantes de diferentes maneras, pero es evidente el cambio entre la prueba inicial y final debido a que en la primera sólo hubieron cinco respuestas correctas y en la última, el número aumentó a doce. El ejemplo 2<sup>a</sup> presenta registro de representación verbal-escrito (RVD) de tipo escrito en específico, y argumento inductivo.

En la prueba final los registros y argumentos fueron más complejos, ya no probaron para cada caso, sino que usaron el método que se les fue enseñado para resolverlo tal y como el ejemplo 2b lo presenta, en el se observa claramente un argumento deductivo implícito porque se utiliza un método de resolución específico, y a su vez presenta

argumento visual debido a que usa registro de representación icónico (RID) por medio de flechas y puntos que no forman parte del problema, pero los cuales son el soporte en su explicación. Es por esto que en el ejemplo 2b se presentan dos tipos de registros de representación, RID y el registro de representación verbal escrito (RVD) de tipo escrito. Sin embargo, este argumento presenta un obstáculo de lenguaje (OL) debido a que existe imprecisión en algunos conceptos o ideas, precisamente cuando dice que "...los 4 de en medio se invierten con su opuesto", esto se puede interpretar como que los cuatro números ubicados en el centro se invierten con otros números o que los cuatro números entre sí se invierten, esta última idea es la correcta. Este ejemplo evidencia claramente que el paso a la demostración genera ruptura cognitiva (D' Amore, 2006).

**Problema n° 3:** *Describe y explica una de las paradojas de Zenón (Inicial) - Describe y explica una de las siguientes paradojas: -Aquiles y la tortuga -La flecha -Los gemelos -El Hotel infinito (Final).*

3a. 1: No sé que es una paradoja, no los he aprendido.

3b. 

Para este problema no existen ejemplos en los que se visualice algún argumento en la prueba inicial, el total de los estudiantes justificaron (de manera no disciplinar) tal y como el ejemplo 3a lo muestra, es decir, explicitando que "...no sé lo que es una

paradoja...”. Por ende, el registro de representación es más bien verbal escrito (RVD), de tipo escrito en específico.

A pesar de eso, en la prueba final el tipo de registro se mantiene, pero en algunos casos como el ejemplo 3b ese registro se complementa con el registro de representación simbólico (RSD) debido a que presenta “2n” para referirse al doble de un número. Es así como presenta datos específicos: Un hotel con infinitas habitaciones. A su vez, una situación inicial donde llega un nuevo huésped y una solución: “hacer que cada huésped se mueva una habitación”. Junto con ello, una situación problemática: un bus con infinitos pasajeros y una solución: “hacer que cada huésped se mueva al doble de su habitación”. Finalmente, en el ejemplo 3b se puede observar que es un problema que presenta explicación y que requiere de ella porque así el enunciado lo indica.

**Problema n° 4:** Ud. deposita \$50.000 en su banco y después hace una serie de retiros... ¿Puede ir al banco a reclamar esos \$51.000? Explique por qué (Ambas pruebas).

Handwritten work for problem 4a:

$50.000 - 20.000 = 30.000$   
 $30.000 - 15.000 = 15.000$   
 $15.000 - 9.000 = 6.000$   
 $6.000 - 6.000 = 0$

$+10$   
 $10 - 3 = 7$   
 $7 - 6 = 1$

$-10 + 0 + 3 + 6$   
 $-10 + 3 = -7$   
 $-7 + 6 = -1$

Si lo miramos desde un lado el ganó \$1.000, pero si lo vemos desde el otro, quedó debiendo \$1.000. El resultado sería nullo, no gana ni pierde nada.

4a.

4b.

No puede reclamarlos ya que uno no puede sumar lo que no tiene, que sería el monto que le queda, tiene que restarle al monto que uno tiene (sumar los retiros) es una falacia.

En la prueba inicial ninguno de los estudiantes logró resolver correctamente este problema. Las respuestas corresponden a justificaciones no disciplinarias tales como: “no sé y no entiendo cómo hacerlo”.

Pese a lo anterior, seis estudiantes intentaron desarrollar algún tipo de respuesta. El ejemplo 4a es uno de esos casos el cual presenta un argumento abductivo e inductivo debido a que se interpreta la información y se extrae algo significativo relacionándolo con otros hechos que los expliquen, en este caso prueba los retiros y los saldos por separado. Esos cálculos que corresponden a un registro de representación simbólico (RSD) los utiliza como soporte en el registro de representación verbal-escrito (RVD) de tipo escrito en específico.

Sin embargo, el ejemplo presenta obstáculo de asociaciones incorrectas o rigidez de pensamiento de asociación (OAIA) debido a que se prueban propiedades matemáticas en un problema que busca más bien persuadir la lógica argumentando la validez o no de una situación así. Esto en el ejemplo 4b ya no se presenta como un obstáculo porque los estudiantes trabajaron anteriormente con diferentes situaciones falaces.

Es así como el ejemplo 4b presenta registro de representación verbal-escrito (RVD) de tipo escrito. A su vez, utiliza un argumento no deductivo, en el cual la conclusión surge de las experiencias usando alguna de las premisas o datos debido a que implícitamente relaciona que en la vida diaria una persona suma los retiros, no los saldos o lo que va quedando.

## ANEXO 4.7: RESULTADOS ENCUESTA, COMENTARIOS Y ENTREVISTA

• **Encuesta:** Corresponde a la evaluación que los estudiantes realizan sobre el curso en el que participaron, esta información es requerida por el PENTA UC y aplicada a todos los estudiantes. A continuación se presentan los resultados de la encuesta en la que se encuentran las preguntas relativas al desarrollo del curso, el promedio del curso y el promedio en porcentaje obtenido por todos los curso correspondientes al ciclo. Esto quiere decir que para cada categoría es posible contrastar las respuestas con las de todos los estudiantes de octavo básico. Esto permitirá conocer la percepción de los estudiantes hacia el curso y relacionarla a la experiencia de sus pares que no participaron en este curso.

**Tabla 6: Evaluación curso**

Preguntas Encuesta	Promedio Curso	Promedio del Ciclo
El nivel de profundidad de los contenidos te parece adecuado	96,88	95,92
El nivel de exigencia es adecuado para ti	89,06	94,11
La forma de trabajar en este curso fue para ti motivante	96,88	92,98
La asistencia a clases fue importante para tu aprendizaje en este curso	93,75	94,64
El curso te entregó conocimientos que no tenías	93,75	94,03
Los conocimientos que adquiriste te parecen importantes	95,31	93,66
Quedaste contento con el curso	100,00	96,00
<b>PROMEDIO CURSO</b>	<b>95,09</b>	<b>94,48</b>

En primer lugar, se puede visualizar en la tabla 6 que el promedio general del curso es mayor que el promedio del ciclo, sin embargo, la diferencia es sólo de un 0.61%. A pesar de esto, los porcentajes del curso en cada categoría se ubican, en general, dentro de los 90%. Los datos que llaman la atención se encuentran en las categorías con porcentajes mayores en comparación a los del ciclo, tales como: el nivel de profundidad de los contenidos, la forma de trabajo, la importancia de los conocimientos adquiridos y la satisfacción final hacia el curso. Pese a ello, esto se contradice con algunos de los porcentajes que se ubican por debajo del promedio del ciclo, entre ellos el nivel de

exigencia, la importancia de la asistencia y la adquisición de conocimientos que los estudiantes no tenían.

Lo último que se puede rescatar de estos datos es la asistencia debido a que los estudiantes consideran que no es importante en su aprendizaje dentro del curso. Esto se vincula estrechamente con la conclusión encontrada anteriormente, la cual establece que el aumento en la prueba final en relación a la inicial no se explica en la asistencia que los estudiantes tuvieron dentro del curso.

A continuación se presentan los resultados de un aspecto diferente pero incluido en la encuesta que realiza el PENTA UC a los estudiantes, esto corresponde a la evaluación a su profesor y una apreciación general del curso que se encuentra al final. En estos datos se encuentran las preguntas relacionadas al quehacer docente, el promedio del curso y el promedio en porcentaje de los cursos correspondientes. Esto permitirá conocer la percepción de los estudiantes hacia su profesor y relacionarla a la experiencia de sus pares que no participaron en este curso.

**Tabla 7: Evaluación profesor**

<b>Preguntas Encuesta</b>	<b>Promedio Curso</b>	<b>Promedio del Ciclo</b>
El profesor dice desde un comienzo lo que vas a aprender en el curso	98,44	94,12
El profesor explica con claridad la materia del curso	96,88	93,75
El profesor/a está dispuesto a responder preguntas y consultas	100,00	94,12
El profesor llega puntualmente a hacer las clases	89,06	92,43
El profesor tiene buenas relaciones con todos los alumnos	100,00	93,75
El profesor establece un ambiente agradable en clases	100,00	93,96
La forma de presentar los contenidos te ha facilitado el aprendizaje	95,31	93,38
El profesor estimula el interés y atención de los alumnos	95,31	93,59
El profesor estimula a los alumnos a realizar preguntas	93,75	92,74
El profesor permite la participación activa de los alumnos	95,31	94,39
El profesor te hace pensar y descubrir cosas interesantes	98,44	93,54
Se nota que al profesor le gusta enseñar este curso	100,00	94,49
El profesor asiste regularmente a clases	100,00	92,58
Recomendarías este profesor a un amigo	100,00	94,00
Tomarías otro curso con este profesor	93,75	89,35
<b>PROMEDIO PROFESOR</b>	<b>97,08</b>	<b>93,35</b>

De 1 a 10, ¿cuánto aprendiste en este curso?	9,50	8,75
<b>PROMEDIO GENERAL (Curso + Profesor + Ayudantes)</b>	<b>96,09</b>	<b>94,61</b>

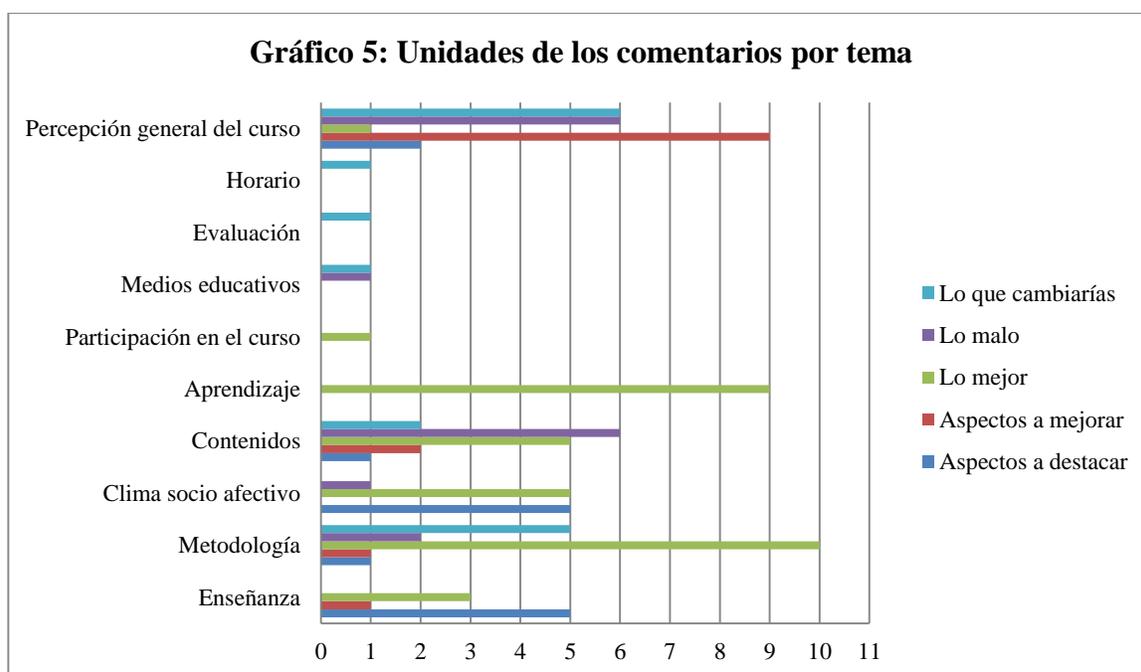
A modo general, en la tabla 7 se puede visualizar que el promedio general del profesor es mayor que el promedio del ciclo, la diferencia es 3.73% ( $P < 0,000$ . Lo anterior confirma que las diferencias son significativas). Los estudiantes poseen una positiva percepción hacía el profesor de su curso debido a que los promedios de cada categoría son mayores que los del ciclo. Existe sólo un caso en que la categoría de puntualidad es baja en relación al promedio del ciclo. Es así como se pueden encontrar categorías destacables porque poseen el porcentaje total, las cuales son: responder preguntas y consultas, establecer buenas relaciones, generar un ambiente agradable, demostrar gusto por enseñar, asistencia y recomendar el profesor a un amigo. Tales aspectos son características de la profesora que los estudiantes reconocen y valoran dentro de su experiencia.

Finalmente, los estudiantes consideran que aprendieron en este curso más que sus pares que no participaron de él. La diferencia no es amplia entre los encuestados que pertenecen al curso y los que no, sólo existe un 0.75% ( $P < 0,000$ . Lo anterior confirma que las diferencias son significativas) en relación a los aprendizajes logrados y 1.48% ( $P < 0,000$ . Lo anterior confirma que las diferencias son significativas) en el promedio general. Pese a ello, es claro que la percepción de los estudiantes hacía los diferentes aspectos que definen el curso son, tomando todo en cuenta, positivos.

Para comprender con mayor detalle lo anterior, se presentan a continuación los diferentes temas que los estudiantes en sus comentarios usaron a la hora de formular una opinión escrita a través de lápiz-papel y computador (los cuales se encuentran en el anexo 4.8. Algunos de estos comentarios forman parte de la evaluación del PENTA UC y otros fueron solicitados dentro del curso, sin embargo, la mayor diferencia entre ellos es que en los últimos, los estudiantes explicaron y fundamentaron sus opiniones más que en la evaluación del programa.

• **Comentarios<sup>11</sup>:** Los datos que corresponden a la encuesta realizada por el PENTA UC son los aspectos a mejorar y a destacar. Los otros tres aspectos (lo mejor, lo malo, lo que cambiarías) corresponden a preguntas que los estudiantes respondieron por escrito en la clase final del curso.

Como aclaración, la categoría percepción general del curso corresponde a comentarios realizados por los estudiantes como: “es entretenido”, “no hay nada que mejorar”, “me gustó mucho así que no puedo poner nada”, “nada porque me llenó y fue excelente”, entre otros. En general, comentarios como esos, sólo transmiten una opinión que no se puede asociar a ninguna categoría específica.



Los aspectos mayormente destacables en el gráfico 5 son los comentarios que corresponden a los *aspectos destacables del curso*, entre ellos la enseñanza y el clima socio afectivo. Algunos comentarios permiten comprender lo que para los estudiantes es más importante, entre ellos, algunos opinan que: “la profesora explica muy bien todo”, “la profesora está dispuesta a responder preguntas”, “la manera de expresarse de la profesora en los contenidos era muy entretenida”, “la profesora es amable y motivadora”, “la profesora es

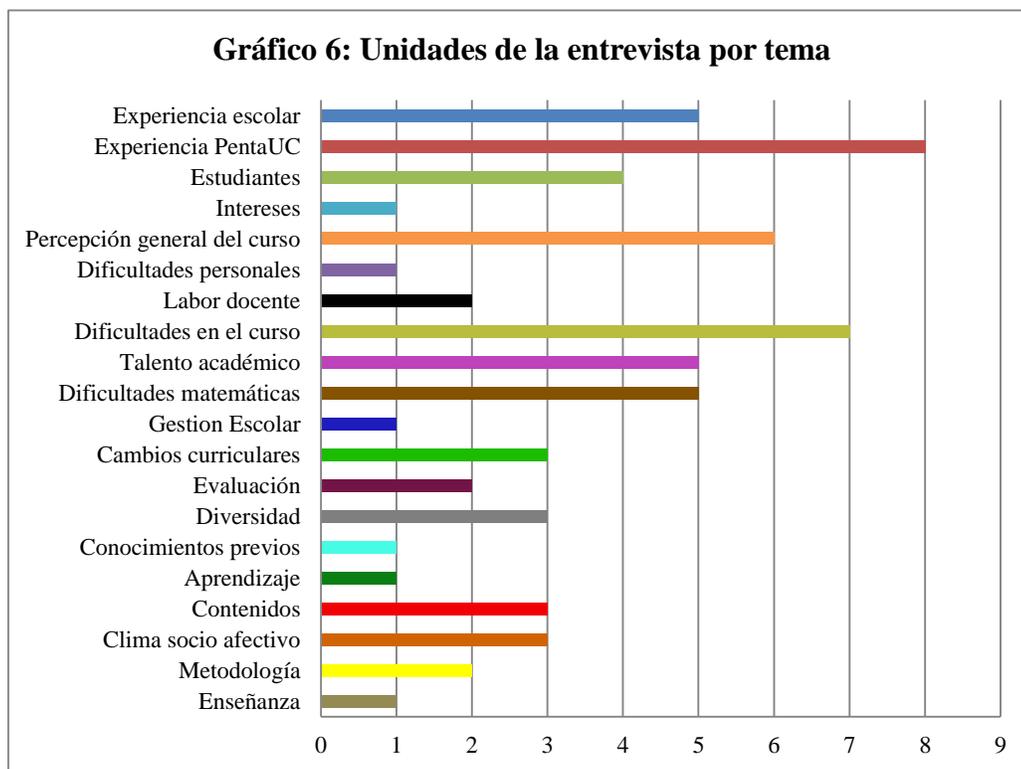
<sup>11</sup> Los análisis preliminares se encuentran en el anexo 4.8

simpática y además hace que la clase no sea tan fome”, hace las matemáticas más interesantes que en el colegio mismo”, entre otros comentarios. Esto quiere decir que para los estudiantes existe una estrecha relación entre enseñanza y clima socio afectivo que es explicada por ciertas cualidades que posee la profesora.

Otro de los aspectos positivos dentro del curso fueron aquellos en los que los estudiantes consideran que fue *lo mejor*, en el gráfico 5 se puede visualizar que la metodología y el aprendizaje son los temas que más se encontraron en sus comentarios en esta categoría. Algunos ejemplos de sus opiniones son: “los casos o ejemplos eran buenos y entretenidos”, “era entretenido por ejemplo cuando tiramos los huevos”, “me gustó el sistema de carpetas”, “crear e intercambiar ejercicios entre los compañeros porque en general se separan en grupos”, “lo mejor fue incrementar mi conocimiento matemático”, “aprender temas que en el colegio no se van a pasar”, entre otros. Esto quiere decir que para los estudiantes una metodología no tradicional, con actividades novedosas y en las que ellos estén más activos son importantes a la hora de aprender y de adquirir nuevos conocimientos, experiencias y/o habilidades.

Pese a ello, existen algunos aspectos que para los estudiantes sería bueno *cambiar, mejorar* o aspectos que fueron considerados “*malos*” por ellos. En las tres categorías, los aspectos destacables son los contenidos y la metodología. Algunos de los comentarios más sobresalientes son: “se dedicaba mucho tiempo a una sola cosa, se hablaba en una clase, la otra y la siguiente. Eso quitó tiempo para ver falacias”, “más actividades prácticas”, “más trabajos en grupo”, respecto a los contenidos algunos consideraron que “era muy difícil la materia”, “resolver cuadrados mágicos de 4x4 porque aún no lo logro entender”, “falacias porque eran fomes y fáciles”, entre otros. En este caso, los comentarios son variados porque algunos tienen mayor preferencia a uno que a otros contenidos, pero en general, todos los estudiantes están de acuerdo que les gustaría tener clases más prácticas. Esto se relaciona a lo anterior, debido a que los sujetos consideran que la metodología fue lo mejor del curso, pero también creen que podría cambiarse en el sentido de ser mucho mejor.

• **Entrevista (profesora)<sup>12</sup>:** Conocer la percepción de la profesora en relación a diferentes aspectos de su experiencia como docente, previa al curso y en el transcurso de el entrega un análisis completo del contexto en el cual el estudio fue realizado.



En el gráfico 6 se puede visualizar que uno de los temas importantes dentro de la entrevista fue la *experiencia PENTA UC*, la profesora plantea que: “...me han dejado hacer clases de lo que a mí se me ocurra, lo que sea, todo lo que a mi me gusta lo he podido hacer curso...”, en este sentido, ella habla de la importancia para un profesor de sentir la confianza proveniente de otros y de enseñar lo que a uno le gusta, aspectos que para ella son destacables dentro del programa. Además, para ella algunas ventajas que posee el PENTA UC es “...es que no es escolar y parte de no ser escolar es mostrarles una persona de verdad, una persona que se equivoca, que hace las cosas bien, pero que principalmente le gusta lo que está haciendo...” y algo que ella valora es “...cuando los coordinadores van a mirar las clases porque te entregan una mirada externa súper buena de cosas que uno no ve...” todo esta libertad a la hora de enseñar, es a su vez valorada por los estudiantes en los

<sup>12</sup> Los análisis preliminares se encuentran en el anexo 4.9

comentarios que ellos realizaron, esto quiere decir que este es un aspecto que se presenta a nivel de programa y de clases.

Una de las ideas dentro de la entrevista era poder contrastar la experiencia de la profesora en dos contextos diferentes, escolar y PENTA UC, esto porque no todos los profesores del programa ejercen esa profesión o tuvieron formación pedagógica. Algunos de ellos son ingenieros que hacen algún curso matemático o en otro caso, son matemáticos que no tuvieron la pedagogía dentro de su formación. En este caso, su formación universitaria es pedagogía en matemática y ejerció por unos años como profesora en diferentes escuelas, pero actualmente sólo se dedica a hacer clases en el programa y a adultos. Algunos de sus comentarios más destacables en relación a su experiencia escolar como docente son: "...lo que me costó de trabajar en colegios fue la disciplina porque yo soy bien relajada, no me complica las cosas que normalmente a los profesores les complica. Por eso me aburrí de los colegios, porque yo era la profesora que la retaban porque los tenía afuera...", eso es en relación a su rol, pero también se refiere a los estudiantes, "...lo que también vi es que había muchos que comillas tenían déficit atencional, eran muy inteligentes y el problema en realidad era que los profes no encontraban los desafíos suficientes para mantenerlos entretenidos..." en ambas citas se puede interpretar que para la profesora existe importancia en lo no tradicional, en marcar la diferencia haciendo clases variadas dentro y fuera de la sala de clases, pero desafiantes para todos. Esto es lo que lamentablemente en el contexto escolar es poco valorado, y es por esto que algunos profesores prueban contextos alternativos como escuelas con una determinada metodología o el mismo PENTA UC.

Otro de los temas dentro de la entrevista en profundidad, son las dificultades presentes en el curso y las dificultades matemáticas. Algunos de sus comentarios destacables respecto al primer tema están relacionados a los apuntes que realizan los estudiantes debido a que algunos estudiantes tienen una letra ilegible, las habilidades sociales, las inasistencias y los nervios. Sin embargo, respecto a los contenidos, la profesora indica que las paradojas "...siempre son un tema complicado porque es un tema completamente nuevo porque desafía la razón, porque desafía una razón, un razonamiento que ellos nunca han tenido, entonces son como muchas cosas que se juntan para que sea difícil", contenido que se

presentó en la prueba inicial y final, pero que en la inicial no pudo ser respondida por ningún estudiante porque no era un tema conocido por ellos. Otro dato importante a considerar, este es un curso que fue dictado anteriormente, por esta razón, la profesora indica que “...en el primer curso el tema de los cuadrados mágicos no fue tan extenso porque los estudiantes venían con más velocidad para la aritmética, en cambio acá tuvimos que darle un poquito más...” esto quiere decir que los tiempos destinados para cada contenido dependen de los estudiantes, por ende, el profesor necesita ser reflexivo y crítico para darse cuenta de ello. Esto es algo que no siempre ocurre en las escuelas, pero es importante aplicarlo porque así se considera el tema de la diversidad en la sala de clases, en el sentido de que todos, incluso estudiantes con talento académico, poseen distintos ritmos de aprendizaje.

Complementando lo anterior, en relación a la experiencia escolar y el PENTA UC, la profesora plantea que algunas de las dificultades matemáticas que poseen los estudiantes con talento académico, y los estudiantes en general, vienen de la escuela: “...en el colegio lo que le enseñan es mínimo y yo me he encontrado con adultos universitarios que tienen problemas con los números enteros y los naturales...”, por ende, hay algunas dificultades que continúan presentes en el tiempo. En otros casos lo atribuye a un tema de interés, esto en el sentido de que hay algunos estudiantes que “no pasan la matemática”. En otros que varía en relación al nivel socioeconómico: sector alto las familias piensan que la matemática “no la consideran importante o son muy exigentes” con sus hijos, y en los sectores vulnerables “...los papás no tienen la información como para ayudarles...” a los estudiantes. Esto en relación al contexto más bien familiar y personal de cada estudiante, pero vinculado a ello, la profesora considera que dentro de las escuelas “...hay un problema súper serio en el tema de la continuidad, esto que te cambian el profesor todos los años que en general pasa en todos lados. Hace que se note mucho la mano del profesor anterior, entonces los cabros llegan con una base bastante sencilla a media, o a lo mejor, el salto que se hace de básica a media...”, para la profesora esto implica no sólo generar una mayor continuidad en los profesores que enseñan matemática, sino que también que exista una mayor conexión entre los niveles de octavo básico y primero medio.

## ANEXO 4.8: ANÁLISIS PRELIMINAR COMENTARIOS

Categorías	Aspectos a destacar	Aspectos a mejorar	Lo mejor	Lo malo	Lo que cambiarías
Enseñanza (+8) (-1)	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Me encantó la forma de enseñar.</li> <li>-que explica muy bien todo.</li> <li>-la profesora está dispuesta a responder preguntas.</li> <li>-La profesora explica muy bien la materia, y se esfuerza porque entendamos.</li> <li>-La manera de expresarse de la profesora en los contenidos era muy entretenida.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Deberían enseñar los contenidos más claramente, ya que yo siempre quedaba con algunas dudas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Las profesoras siempre estaban dispuestas a ayudar y explicar de nuevo. (+1)</li> <li>-Profesoras dejaron mucho conocimiento.</li> </ul>		
Metodología (+11) (-8)	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Me encantó las actividades que se realizaban.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-pueden dar más guías de trabajo para hacer trabajar la mente</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Era entretenido por ejemplo cuando tiramos los huevos.</li> <li>-Los casos o ejemplos eran buenos y entretenidos.</li> <li>-Me gustó el sistema de carpetas.</li> <li>-Crear e intercambiar ejercicios entre los compañeros porque en general se separan en grupos.</li> <li>-La coordinación del curso.</li> <li>-lanzar el huevo.</li> <li>-La forma en la que se trabaja con actividades como la de lanzar un huevo.</li> <li>-Este curso te motiva, te dan ganas de participar, de esforzarse, de lograr tu objetivo.</li> <li>-Lo que se presentaba y la manera de presentarlo.</li> <li>-Las actividades que tienen que ver con curiosidades, con pensar.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Preguntar uno por uno (El que no supo, no supo).</li> <li>-Se dedicaba mucho tiempo a una sola cosa, se hablaba en una clase, la otra y la siguiente. Eso quitó tiempo para ver falacias.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Más trabajos en grupo.</li> <li>-Más actividades.</li> <li>-Materiales para interactuar y desarrollar lo aprendido.</li> <li>-Más actividades prácticas.</li> <li>-Que nos dieran al final del curso una hoja con muchas paradojas, falacias, entre otras para mostrarlas a quienes uno quiera.</li> </ul>
Clima social afectivo (+10) (-1)	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Entretenida, dispuesta a ayudar, atenta con todos los alumnos.</li> <li>-la profe era muy simpática.</li> <li>-Es simpática y además hace que la clase no sea tan fome, hace las matemáticas más interesantes que en el colegio mismo.</li> <li>-amable, motivadora</li> <li>-Hacen las clases muy motivantes.</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>-Había respeto entre todos.</li> <li>-La profesora es súper entretenida.</li> <li>-Profesora ambientaliza el curso de forma agradable y se encarga de que los demás entiendan.</li> <li>-La profesora y ayudante eran muy simpáticas, nunca me pusieron mala cara, eran buenas comprensivas y pacientes.</li> <li>-Las profesoras porque se nota que les gusta enseñar y eso crea un ambiente distinto.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-No compartí mucho porque falté varias veces (Mi culpa)</li> </ul>	

Contenidos (+5) (-10)	-Opino que la forma de presentar los contenidos fue muy buena y estimulante, todos los contenidos fueron tratados de buena manera.	-no pasar álgebra (es broma) -muy difícil la materia	-Las paradojas y las falacias, me costaron al principio, pero después las encontré interesantes y divertidas. -Temas interesantes por su contenido y complejidad. -Los contenidos del curso son elevados y los entendí. -Los infinitos, las paradojas. -La materia es muy genial.	-Resolver cuadrados mágicos de 4x4 porque aún no lo logra entender. -Las falacias con términos algebraicos porque me costaron mucho. -Me gusto menos lo de encontrar y hacer calzar números (Figuras mágicas). -Falacias porque eran fomes y fáciles. -Los cuadrados mágicos porque no me interesó mucho. -Algunos contenidos eran más complicados de aprender.	-Ver más falacias. -Ver más paradojas y falacias, aunque eran varias, pero faltó una quizás por el tiempo.
Aprendizaje (+9)			-Incrementar conocimiento matemático. -Aprender temas que en el colegio no se van a pasar. -Aprender cosas nuevas (+3) -Aprendí más de lo que esperaba. -Fue una experiencia interesante y casi todo me gustó. -Aprendí cosas increíbles que no aprendería en otro lugar.		
Participación en el curso (+1)			-Todos dábamos nuestras opiniones.		
Medios educativos (+1) (-1)				-El data que proyectaba en otro color.	-El data
Evaluación (-1)					-No hacer prueba final.
Horario (-1)					-El horario porque al ser matemática hay que estar más concentrados, pero a veces el sueño ganaba.
Percepción general del curso (+3) (19)	-Es entretenido (+1)	-ninguno -nada en especial -Nada -Nada, todo en el curso estuvo bien. -Nada. -Todo fue bueno, no hay nada malo, ni difícil. -nada (: -No hay nada que mejorar. -Nada.	-Todo	-No creo que hayan cosas malas. (+2) -Nada porque todo era nuevo. -Me gustó mucho así que no puedo poner nada. -No hay nada malo en el curso.	-Nada porque me llenó y fue excelente -Nada porque quedé conforme con el curso. -Nada porque me gustó. -No cambiaría nada. -Nada porque todo fue increíble. -Nada porque me gusta tal cual es.

## ANEXO 4.9: ANÁLISIS PRELIMINAR ENTREVISTA

Categorías	Citas de la entrevista
Enseñanza	-en la universidad eso sí te enseñan matemática que te mueve el coágulo, pero es re poco lo que te enseñan de lo que tú vas a hacer en el colegio. Entonces tuve que reestudiar la matemática del colegio
Aprendizaje	-Me llamó mucho la atención que un curso que no tiene la más mínima idea de lo que tú vas a hacer, a diferencia de otros que pueden tener una noción, aquí no tienen idea lo qué es una paradoja, curiosidad o falacia ni de qué curiosidad les vamos a poner ahí entonces es como un avance súper grande.
Metodología	-empecé a crear mucho material, a basarme en los libros, partí copiando libros, la típica, este ejercicio está bueno pero con hartos monitos, colores y en general con mucho material y ejercicio para que los cabros se interesaran. -cuando uno les presenta un desafío tiene que estar consciente de que habrán estudiantes que lo van a resolver en 5 milisegundos y otros que lo van a resolver en 5min, pero que lo normal en un ser humano es resolverlo en 15-20 entonces uno siempre tiene que andar con cartitas bajo la manga
Conocimientos previos	-en los dos casos los alumnos que habían tomado un curso en particular en matemática estaban más rápidos para hacer los cálculos como con los cuadrados mágicos por ejemplo, les había servido haber estado en ese para que en este les fuera más natural.
Relación pedagógica	-Eso hace que yo diferencie muy bien el público que tengo, a pesar de que yo los trato a todos por igual (Su experiencia laboral) -uno tiene que tratar a sus estudiantes como si todos fueran talentosos, lo que pasa es que uno no sabe en qué, pero todos los alumnos tienen algunas cosas especiales, algunas más desarrolladas que otras, tal vez con todos no se puede llegar al nivel de profundización que con Penta, pero si uno tiene que tratarlos pensando que son buenos. -Como profe, yo creo que hay que ser más generoso con los cabros, no mirarlos como competencia.
Contenidos	-el trato en términos de objetivos que uno tiene o como uno traspasa los contenidos - la información eso varía, yo no trato igual a los del Penta que a mi clase de cálculo que a un profesor, pero lo que cambia (uno pensaría que es al revés), es que yo soy más exigente con los del Penta que con un universitario o un profe, mientras más viejo yo le exijo menos porque asumo que mientras más experiencia, entonces no tendría por qué entrar más en su cerebro. -en el Penta si quiero eliminar un contenido lo hago, si quiero estar tres semanas en un contenido, lo hago. -está obligado a pasar cierta cantidad de contenidos por lo tanto el nivel de profundización es tremendamente superficial
Evaluación	-tenemos esta gracia de la prueba inicial y final, y eso es un tremendo lujo, porque nadie me obliga ni me controla por estar pasando un contenido en particular estar tomando pruebas o qué sé yo. -Yo creo en la evaluación permanente, de hecho hacemos muchos ejercicios y esa es la forma de evaluar, pero no nota todo el día, y en el colegio uno tiene que tomarle la prueba rapidito y hacerla a la semana, una prueba por semana.
Diversidad	-yo veo que a los profes les cuesta mucho, que es cuando tienen 45 cabros hacer atenciones diversas, a mí no me cuesta. -para mí es súper natural tener diversidad y hacer actividades distintas, yo no siento que no sea justo, todo lo contrario, encuentro que si les hago la misma prueba a todos sabiendo que tienen niveles distintos, le estoy dando la oportunidad de profundizar más al que sabe más y de adelantar al que le cuesta. -ese estandarizar que tiene que ver con un poco lo que dice Robinson, es pensar que el valor de los niños y el valor de las personas es como su fecha de elaboración, entonces los juntamos a todos no porque tienen intereses y habilidades similares en el colegio, sino que porque nacieron en una fecha similar, entonces nunca vas a tener un curso parejo que es el sueño de un profe, no puede ser, es sospechoso, porque si es así es porque están seleccionados
Cambios curriculares	-El problema es que como se les dio libro con ejercicio, la mayoría de los profes que conocí ocupaban esos mismos ejercicios y los ocupaban como guía, en general no se apropian de las matemáticas o de la asignatura que sea. -yo creo que los cambios en general son interesantes, pero no he visto ningún estudio que diga que funcionó mal o bien y que por eso lo cambiaron. -Si estuviera realmente integrado sería espectacular, pero es difícil de hacerlo porque ya hay una estructura que está

	súper armada, con los profesores, supervisores y toda la estructura ministerial
Gestión Escolar	-Lo que importa en un colegio es el equipo de gestión, está claro en tener un proyecto, no para la tele que de verdad le interese, que potencie a los estudiantes.
Dificultades Matemáticas	-esa parte de matemática viene del colegio, y en el colegio lo que le enseñan es mínimo y yo me he encontrado con adultos universitarios que tienen problemas con los números enteros y los naturales. -Hay un problema súper serio en el tema de continuidad, esto que te cambian el profesor todos los años que en general pasa en todos lados. Hace que se note mucho la mano del profesor anterior, entonces los cabros llegan con una base bastante sencilla a media, o a lo mejor el salto que se hace de básica a media. - Entonces habían cabros en media que llegaban con problemas en los números enteros, entonces cómo le hacías ecuaciones si no sabe restar números negativos, algunos eran temas de atención que yo diría que es el problema más grande. Hay otro tema de interés, hay cabros que no pasan la matemática. -en el sector alto están los padres que no consideran importante o está el que es muy exigente, en sector vulnerable es así como que no hay ayuda de nadie porque los papás no tienen la información como para ayudarles. -Yo creo que es un problema de atención y motivación, pero cuando hay motivación hacen el esfuerzo y salen cosas mejores, no espectaculares
Talento	-son realmente secos -a los cabros les da el mate para profundizar. -yo sabía que iba a hacerle clases a niños que eran un poco más inteligentes que lo normal. -son estudiantes que quieren aprender y eso es impagable, en cambio en otros lados tienes que hacer varias cosas para que quieran aprender, aquí es todo lo contrario porque yo no hago mucho esfuerzo especial para que se interesen en el tema, encuentro yo, no he tenido que sentarme al lado de nadie para decirle que esto le va a servir en la vida, cosa que sí he tenido que hacer con cabros en colegios y universidades. Lo que les importa es aprender algo, no importa qué, así después salen con alguna cosa entretenida. -son más inteligentes que tienen pensamiento más profundo, que tienen más intereses por el estudio, pero otra cosa muy distinta es su desarrollo emocional y de niño
Dificultades en el curso	-no sé cómo se entiende los apuntes, si es que toma apuntes -las habilidades sociales hay un tema. Te acuerdas de estos dos chiquillos, me llamó mucho la atención por ser demasiado piola, muy creativo, muy inteligente -ser tan cabro chico, porque él hacía preguntas súper inocentemente - Lo que si fue complicado fue el tema de las inasistencias, las chiquillas, yo creo que eso también les perjudicó en el nivel de avance que tuvieron. -pudo haber sido los nervios, pudo haber sido muchas cosas. -En las paradojas, siempre son un tema complicado porque es un tema completamente nuevo porque desafía la razón, porque desafía una razón, un razonamiento que ellos nunca han tenido, entonces son como muchas cosas que se juntan para que sea difícil. -depende de los avances porque por ejemplo en el primer curso el tema de los cuadrados mágicos no fue tan extenso porque los estudiantes venían con más velocidad para la aritmética, en cambio acá tuvimos que darle un poquito más.
Labor docente	-me gusta hacer clases, me di cuenta con las ayudantías -uno está más preocupado del contenido y del objetivo que de, de la cuestión, del ambiente de la sala, de cómo te comunicas con los alumnos
Dificultades personales	-vine de un colegio con muy mala base matemática, entonces me costó
Percepción general del curso	-yo los vi que venían de colegios mezcladitos -fue mucho más natural para ellos entender que habían infinitos distintos, en cambio para los de universidad que tienen más vida más concepto, les costó entender un mundo el concepto. -como es más conceptual es más fácil de abordar. -el grupo era como más cabro chico, más niñitos, más regalones, más profes pásame la power, pero el nivel de profundización al que llegamos fue más menos el mismo (Curso 1 y actual). -me encantó que ahora hubieran más niñas porque cuando se mezclan pasan cosas súper buenas, costó. -sacaron buenos porcentajes,

Intereses	-ahora me gusta mucho el tema de enseñar en educación sobre todo qué es lo que el alumno aprende, neurociencias
Estudiantes	<p>-desde mi punto de vista, el que es bueno en matemática también es bueno en lenguaje, normalmente el que es bueno en matemática(no aritmética) tiene muy buen lenguaje porque los problemas se escriben de cierta manera y si tú cambias una coma, cambia todo.</p> <p>-en particular porque es muy disperso y nunca me había pasado que alguien se demorara tan poco en hacer la prueba, se demoró 15 min y 100% así de claro, a ti te da la impresión de que está en otro planeta, pero no, está súper pendiente y además tiene esta cosa en la vista, y es tan así como gesticulador.</p> <p>-me impactó por lo rápido y lo creativo.</p> <p>-es buenísima, lenta, calladita.</p>
Experiencia PENTA UC	<p>-me han dejado hacer clases de lo que a mí se me ocurra, lo que sea, todo lo que a mi me gusta lo he podido hacer curso</p> <p>-en 13 clases hacían programas, hacían software. En cambio en un colegio que tienes un año completo, que son muchísimas clases más, son como 4 o 5 veces la cantidad de hora, los cabros terminaban recién entendiendo cómo resolver un problema. Misma profe, misma metodología, mismo todo, mismo contenido incluso. Y no es que a los cabros no les interese porque hay cabros que son bien habilidosos, que le gusta la cuestión, que a veces lo hacen por su cuenta, pero son los menos, 1 o 2 con suerte, en cambio acá tienes a todos los habilidosos juntos entonces el nivel de avance es mucho mayor.</p> <p>-Ahí fui inventando cosas porque los cabros podían más entonces era como una lata eternizarse</p> <p>-al principio los niños llegaron con prejuicios, ellos se sentían muy espectaculares. Eso fue el primer año, después hicieron talleres y cursos que ayudaron, y además verse al lado de otro que también es brillante les bajaron los humos rápidamente.</p> <p>-Los niños están orgullosos y todo eso, pero no son tan abacanados.</p> <p>-Para mí es como un laboratorio, para mí es un lugar donde me dan el espacio para enseñar las cosas que me entretienen y que me gustan, donde me tienen la confianza, que eso es súper importante para un profe, la confianza de que lo que yo estoy haciendo va a servir.</p> <p>-una de las cosas que a mí me gustan es cuando los coordinadores van a mirar las clases porque te entregan una mirada externa súper buena de cosas que uno no ve.</p> <p>-la ventaja que tiene el Penta es que no es escolar y parte de no ser escolar es mostrarles una persona de verdad, una persona que se equivoca, que hace las cosas bien, pero que principalmente le gusta lo que está haciendo, que no se urge porque uh me equivoqué de signo, chuta que no se den cuenta.</p>
Experiencia escolar	<p>-Lo que me costó de trabajar en colegios, fue la disciplina porque yo soy bien relajada no me complica las cosas que normalmente a los profesores les complica. Por eso me aburrí de los colegios porque yo era la profesora que la retaban porque los tenía afuera.</p> <p>-en 13 clases hacían programas, hacían software. En cambio en un colegio que tienes un año completo, que son muchísimas clases más, son como 4 o 5 veces la cantidad de hora, los cabros terminaban recién entendiendo cómo resolver un problema. Misma profe, misma metodología, mismo todo, mismo contenido incluso. Y no es que a los cabros no les interese porque hay cabros que son bien habilidosos, que le gusta la cuestión, que a veces lo hacen por su cuenta, pero son los menos, 1 o 2 con suerte, en cambio acá tienes a todos los habilidosos juntos entonces el nivel de avance es mucho mayor.</p> <p>-en general tuve pocos problemas de disciplina, principalmente porque los tenía siempre ocupados.</p> <p>-pero así ¿seco? se ve en algunos cursos</p> <p>-Lo que también vi es que había muchos que comillas “tenían déficit atencional”, eran muy inteligentes y el problema en realidad era que los profes no encontraban los desafíos suficientes para mantenerlos entretenidos</p>

## ANEXO 5: GRÁFICOS ANÁLISIS PRELIMINAR DE DOCUMENTOS ESCRITOS

