PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

UN ALGORITMO BI-NIVEL DE DISEÑO DE SERVICIOS *LIMITED-STOP* CON ASIGNACIÓN DETERMINÍSTICA Y ESTOCÁSTICA

GUILLERMO BENJAMÍN SOTO MARIÓ

Tesis para optar al grado de
Magister en ciencias de la Ingeniería

Profesor Supervisor:
HOMERO LARRAIN IZQUIERDO
JUAN CARLOS MUÑOZ ABOGABIR

Santiago de Chile, Abril, 2017

© 2017, Guillermo Benjamín Soto Marió

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

UN ALGORITMO BI-NIVEL DE DISEÑO DE SERVICIOS *LIMITED-STOP* CON ASIGNACIÓN DETERMINÍSTICA Y ESTOCÁSTICA

GUILLERMO BENJAMÍN SOTO MARIÓ

Tesis presentada a la Comisión integrada por los profesores:

HOMERO LARRAIN IZQUIERDO

JUAN CARLOS MUÑOZ ABOGABIR

SEBASTIÁN RAVEAU FELIÚ

CRISTIÁN CORTÉS CARRILLO

RODRIGO PASCUAL JIMÉNEZ

Para completar las exigencias del grado de
Magister en ciencias de la Ingeniería

Santiago de Chile, Abril, 2017

A mi familia, Herlen y amigos, que me han brindado su apoyo en todo momento.

AGRADECIMIENTOS

Quisiera partir agradeciendo a mis dos profesores guía: Homero Larrain y Juan Carlos Muñoz. Puedo decir con mucha alegría que tuve un paso increíble por postgrado y gran parte de los aprendizajes que me llevo para mi vida se los debo a ustedes. Gracias por guiarme en esta tesis y ser un constante ejemplo a seguir, tanto en lo académico como en la relación de amistad que entablamos. Espero poder volver a trabajar con ustedes en el futuro.

Agradezco también al profesor y amigo Sebastián Raveau, quien me ayudó a solucionar muchas dudas sobre la teoría de los modelo de elección, en particular de los modelos logit. Además, Sebastián siempre me sorprendió con su acertado uso de *memes* y buen sentido del humor por lo que rápidamente pasó a ser como uno más de los de postgrado. Gracias por la buena onda y espero que tengas mucho éxito en lo que te propongas.

En tercer lugar agradezco a mi familia, y a Herlen, quienes me apoyaron incondicionalmente a lo largo de mi tesis. Gracias a sus oraciones y constante apoyo pude mantenerme motivado aun en los momentos más difíciles. También doy las gracias a mis amigos de transporte, con mención especial al mejor pasillo fundador: Nacho Tiznado, Seba Muñoz y Mr Owen, y a los que se integraron después: Babydiola, Nacho Arismendi, Hernán y Mariana, junto a los de otras salas: Tygger, Jaime, Pipe y Gonzalo. Gracias por todos esos momentos memorables (Haxball, iizii, FT, "qué pasillo" entre muchos otros) que nunca olvidaré.

Por otro lado quiero agradecer al Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico (Proyecto FONDECYT 11140443). Esta tesis también fue apoyada por el centro BRT fundada por el *Volvo Research and Educational Foundations* (VREF) y el Centro de Desarrollo Urbano Sustentable (CEDEUS), Conicyt / Fondap / 15110020.

Finalmente, quisiera agradecer a todos los del Departamento de Transporte que no he nombrado pero que saben que los aprecio mucho. Estoy muy agradecido del buen ambiente que se generó tanto profesores y funcionarios, como con mis compañeros de postgrado con los cuales compartí muy buenos momentos.

INDICE GENERAL

Pág.

DEDICATORIA ii

AGRADECIMIENTOS iii

INDICE DE TABLAS vi

INDICE DE FIGURAS vii

RESUMEN ix

ABSTRACT x

1. Introducción 1
   1.1. Contexto y motivación 1
   1.2. Aportes y objetivos principales 4

2. Revisión bibliográfica 9
   2.1. Modelos de asignación de usuarios 10
      2.1.1. Modelos con asignación determinística 11
      2.1.2. Modelos con asignación estocástica 12
   2.2. Contribuciones del modelo propuesto 14

3. Metodología 15
   3.1. Descripción de esquema de trabajo modular 15
      3.1.1. The limited-stop service design problem (LSDP) 16
      3.1.2. Capacitated frequency optimization and assignment problem (CFOAP) 18
      3.1.3. The frequency optimization and assignment problem (FOAP) 19
   3.2. Modelo simultáneo de Larrain (2013) 20
      3.2.1. Supuestos del modelo 20
      3.2.2. Función objetivo y restricciones 22
      3.2.3. Limitaciones del modelo de optimización simultáneo 28
   3.3. Enfoque bi-nivel para resolver el CFOAP 32
      3.3.1. Problema de asignación de pasajeros (PAP) 34
      3.3.2. Función objetivo FOP y FOAP 49

3.3.3. Heurística GRASP de capacidad para CFOAP 54

4. Experimentos y Análisis de resultados 58
4.1. Descripción de escenarios 58
4.2. Algoritmos de solución 63
4.3. Indicadores de rendimiento por algoritmo 64
4.3.1. Costos de operación 65
4.3.2. Costos esperados de tiempos de viaje 65
4.3.3. Costos de trasbordos 66
4.3.4. Costo social 66
4.3.5. Costo social corregido 67
4.4. Análisis de resultados de asignación determinística 67
4.5. Análisis de resultados de asignación estocástica 73
4.6. Indicadores de rendimiento para algoritmos A4 y A6 75
4.7. Tiempos de ejecución 76
4.8. Comparación de soluciones determinísticas y estocásticas 78
4.8.1. Corredor 20 paraderos Avenida Caracas 79
4.8.2. Corredor 40 paraderos Avenida Caracas 83
4.8.3. Corredor 80 paraderos Avenida Caracas 87

5. Conclusiones 92

BIBLIOGRAFIA 97

A N E X O S 100

Anexo A: Matrices de demanda 101

Anexo B: Estructura de sevicios por escenario 106

INDICE DE TABLAS

Pág.

Tabla 2-1. Modelos de diseño de servicios *limited-stop* 14
Tabla 4-1. Descripción de los escenarios. 60
Tabla 4-2. Parámetros para cada corredor 61
Tabla 4-3. Algoritmos a comparar en cada experimento. 63
Tabla 4-4. Resultados para algoritmos de asignación determinística. 69
Tabla 4-5. Algoritmo simultáneo (A0) versus bi-nivel (A1). 70
Tabla 4-6. Algoritmos *greedy* (A1 y A3) versus GRASP (A2 y A4). 71
Tabla 4-7. Comparación entre algoritmos determinísticos con (A2) y sin trasbordos (A4). 72
Tabla 4-8. Comparación de algoritmos determinísticos con y sin trasbordos con $\theta Tr = 0$ 73
Tabla 4-9. Resultados para algoritmos de asignación estocástica. 74
Tabla 4-10. Indicadores de rendimiento de algoritmo A4, determinístico. 75
Tabla 4-11. Indicadores de rendimiento de algoritmo A6, estocástico. 76
Tabla 4-12. Tiempos de ejecución de los algoritmos. 77
Tabla A-1. Matrices de demanda origen-destino para escenarios 1, 4 y 7 101
Tabla A-2. Matrices de demanda origen-destino para escenarios 2, 5 y 8 102
Tabla A-3. Matrices de demanda origen-destino para escenarios 3, 6 y 9 103
Tabla B-1. Servicios generados para escenario 1 106
Tabla B-2. Servicios generados para escenario 2 106
Tabla B-3. Servicios generados para escenario 3 107
Tabla B-4. Servicios generados para escenario 4 108
Tabla B-5. Servicios generados para escenario 5 109
Tabla B-6. Servicios generados para escenario 6 110
Tabla B-7. Servicios generados para escenario 7 110
Tabla B-8. Servicios generados para escenario 8 111
Tabla B-9. Servicios generados para escenario 9 112

INDICE DE FIGURAS

Pág.

Figura 3-1. Esquema de trabajo LSDP. 16
Figura 3-2. Estructura de solución de FOAP y CFOAP de modelo simultáneo. 26
Figura 3-3. Asignación según razón de valoración del tiempo de espera y viaje. 30
Figura 3-4. Asignación según frecuencia del servicio 1. 31
Figura 3-5. Estructura de solución del FOAP y CFOAP de modelo bi-nivel. 34
Figura 3-6. Líneas comunes – Asignación determinística. 38
Figura 3-7. Funciones de densidad para conjuntos as1 y as2 con λ alto. 43
Figura 3-8. Funciones de densidad para conjuntos as1 y as2 con λ bajo. 44
Figura 3-9. Líneas comunes – Asignación estocástica 45
Figura 3-10. Ejemplo de red auxiliar para el par O/D par $w = 1, 4$. 47
Figura 4-1. Perfil de demanda por corredor, escenarios de 80 paraderos. 59
Figura 4-2. Servicios generados y frecuencias óptimas para algoritmos A4 y A6, en sentido 1 de escenario 7. 80
Figura 4-3. Servicios generados y frecuencias óptimas para algoritmos A4 y A6, en sentido 2 de escenario 7. 80
Figura 4-4. Comparación entre perfiles de carga por bus para algoritmo determinístico A4, y estocástico A6 de escenario 7. 82
Figura 4-5. Perfil de carga por bus para asignación estocástica de solución determinística A4 para escenario 7. 83
Figura 4-6. Servicios generados y frecuencias óptimas para algoritmos A4 y A6, en sentido 1 de escenario 8. 84
Figura 4-7. Servicios generados y frecuencias óptimas para algoritmos A4 y A6, en sentido 2 de escenario 8. 85
Figura 4-8. Comparación entre perfiles de carga por bus para algoritmo determinístico A4, y estocástico A6 de escenario 8. 85
Figura 4-9. Perfil de carga por bus para asignación estocástica de solución determinística A4 para escenario 8. 86

Figura 4-10. Servicios generados y frecuencias óptimas para algoritmos A4 y A6, en sentido 1 de escenario 9. 88
Figura 4-11. Servicios generados y frecuencias óptimas para algoritmos A4 y A6, en sentido 2 de escenario 9. 88
Figura 4-12. Comparación entre perfiles de carga por bus para algoritmo determinístico A4, y estocástico A6 de escenario 9. 89
Figura 4-13. Perfil de carga por bus para asignación estocástica de solución determinística A4 para escenario 9. 90

RESUMEN

En sistemas de transporte público con altos niveles de demanda, los servicios *limited-stop*, que sirven un subconjunto de paradas del corredor, son una alternativa atractiva tanto para usuarios como para operadores cuando cuentan con un diseño adecuado. Leiva et al. (2010) y Larrain (2013) introducen un modelo para diseñar estos servicios que resuelve simultáneamente la optimización de frecuencias y asignación de pasajeros. El modelo contempla la optimización de un problema no lineal cuya solución es altamente costosa en tiempos de ejecución para escenarios con un gran número de pares origen-destino.

Para abordar este problema se propone cambiar el enfoque simultáneo por uno bi-nivel al separar el problema de optimización de frecuencias del de asignación de pasajeros. Este enfoque permite probar distintos modelos de comportamiento de usuarios relajando, por ejemplo, el supuesto de asignación determinística. En este trabajo se introduce una metodología para diseñar servicios *limited-stop* bajo el supuesto de asignación estocástica. La estocasticidad es incorporada con un modelo logit multinomial en las etapas de selección de líneas comunes y de elección de ruta. Adicionalmente, para resolver el problema con restricción de capacidad de los vehículos, se propone una heurística GRASP, que es una extensión del algoritmo *greedy* del modelo simultáneo.

La metodología fue probada en nueve escenarios basados en corredores reales tales como el de avenida Caracas (Bogotá, Colombia). Los resultados muestran que el enfoque bi-nivel reduce, en promedio, en 80% los tiempos de ejecución en comparación al modelo simultáneo. También se muestra que asumir una asignación determinística puede llevar a soluciones con sobrecarga de pasajeros en los buses si los usuarios realmente se comportan estocásticamente. Finalmente, comprobamos que la heurística GRASP genera ahorros adicionales a *greedy*, teniendo un mejor desempeño bajo una asignación estocástica de usuarios, probando que todavía hay espacio de mejora, sobretodo en la solución estocástica.

Palabras Claves: transporte público; corredor de buses; diseño de servicios; servicios *limited-stop*; enfoque bi-nivel; asignación estocástica, asignación determinística.

ABSTRACT

In public transportation systems with high levels of demand, limited-stop services, which serve a subset of the stops in the corridor, are an attractive alternative for both users and operators when properly design. Leiva et al. (2010) and Larrain (2013) introduce a model to design these services that simultaneously solves the frequency optimization and passenger assignment. The model considers the optimization of a nonlinear problem whose solution is very expensive in terms of execution times for scenarios with a large number of origin-destination pairs.

To address this problem we propose to change the approach from simultaneous to bi-level by separating the frequency optimization problem from the passenger assignment. This approach allows to test different user behavior models by relaxing, for example, the deterministic assignment assumption. In this paper we introduce a methodology to design limited-stop services under the assumption of stochastic assignment. The stochasticity is incorporated with a multinomial logit model in the stages of common lines selection and route choice. In addition, to solve the problem with vehicles capacity restrictions, a GRASP heuristic is proposed, which is an extension of the greedy algorithm of the simultaneous model.

The methodology was tested in nine scenarios based on real corridors such as “Avenida Caracas” (Bogotá, Colombia). The results show that the bi-level approach reduces, on average, 80% of the execution times in comparison with the simultaneous model. It is also shown that assuming a deterministic assignment can lead to solutions with passenger overload on buses if users actually behave stochastically. Finally, we verified that the GRASP heuristic generates additional savings over greedy algorithm, having a better performance under a stochastic assignment of users, proving that there is still room for improvement, especially in the stochastic solution.

Keywords: public transport; bus corridor; service design; limited-stop services; bi-level approach; stochastic assignment, deterministic assignment.

1. INTRODUCCIÓN

En esta tesis se estudia el problema de diseño de servicios *limited-stop*, también conocidos como servicios expresos, los cuales, por definición, omiten una o más detenciones en paraderos de su recorrido. Para este problema se busca determinar el conjunto de servicios que permite optimizar la operación de un corredor de buses al minimizar una función objetivo de costos sociales.

Este capítulo comienza con una breve motivación sobre la importancia de contar con buenos modelos que resuelvan este problema. Posteriormente, se discute sobre los posibles aportes de esta tesis, tras identificar ciertas oportunidades en los modelos de diseño existentes en la literatura. En particular, esta tesis se centra en proponer mejoras y variaciones al modelo de diseño introducido en Leiva et al. (2010) y mejorado en Larrain (2013). Finalmente, el capítulo cierra con el planteamiento de los objetivos e hipótesis de la tesis, en las que se propone un modelo bi-nivel de optimización de servicios con capacidad limitada que incorpora supuestos de comportamiento estocásticos para modelar la toma de decisiones de viaje de los usuarios del corredor.

1.1. Contexto y motivación

La congestión vehicular es un fenómeno de tráfico que se encuentra presente en todas las grandes y medianas ciudades del mundo. La congestión es causada por dos factores: una creciente y poco regulada tasa de motorización con su consiguiente aumento en el uso del automóvil; y por la incapacidad e inconveniencia de aumentar la capacidad de la infraestructura vial a un nivel equivalente al del uso del automóvil. Por ejemplo, en Santiago de Chile, en el periodo 2011-2015 el parque automotriz creció un 35%, mientras que los tiempos de viaje promedio aumentaron un 15,8% (UOCT, 2015).

Esta tendencia al alza en la tasa de motorización, junto con los mayores niveles de saturación de la red, trae varias consecuencias negativas adicionales. Dentro de estas se destaca un fuerte aumento de los tiempos de viaje y un empeoramiento generalizado en la experiencia de viaje tanto para usuarios del transporte privado como público, además de

un alza peligrosa de los niveles de emisión de contaminantes que aumentan el riesgo en la salud de la población. Todas estas externalidades negativas, que no son asimiladas por los conductores, terminan siendo internalizadas por terceros, ya sea a un nivel local, como ocurre con el ruido, o global, como es el caso de la contaminación con efectos en la salud. Para desincentivar el uso del automóvil e internalizar sus costos, en la literatura y en muchas ciudades del mundo, se han propuesto políticas tales como tarificación vial por congestión, limitar el número de estacionamientos, cobrar impuestos al combustible, aplicar restricción vehicular, entre otras.

Si bien desincentivar el uso del automóvil es una medida necesaria para disminuir su utilización, es igualmente importante brindarle a los viajeros otras alternativas atractivas para realizar sus viajes, ya que de otra forma no cambiarán su modo de transporte. Dentro de los modos más sustentables y deseables de potenciar se encuentran: (i) la bicicleta, que representa una alternativa muy flexible para viajes de distancias cortas y medianas y no genera contaminación; (ii) el metro, que si bien tiene un alto costo de construcción es el modo que logra transportar la mayor cantidad de pasajeros por hora proveyendo un alto nivel de confiabilidad; (iii) y los buses, que brindan un mayor nivel de flexibilidad que el metro y, con un buen diseño operacional, entregan buenos niveles de capacidad de pasajeros por hora. Adicionalmente son una alternativa de menor costo que el metro y de menores externalidades negativas (contaminación, accidentes, ruido, congestión) que el transporte privado.

La regulación de la oferta de transporte público, en particular de los buses, permite a las autoridades tener un mayor control sobre los niveles de congestión en la cuidad. A diferencia de los viajes realizados en automóvil, en los que los usuarios únicamente buscan minimizar sus tiempos de viaje sin considerar la congestión que generan, en el transporte público la oferta está dada por los operadores, por lo que la congestión que se causa en las calles y paraderos es planificada y puede ser controlada. Debido a que el sistema de buses es una pieza “controlable” dentro del ajedrez de la movilidad urbana, no es de extrañar que muchas ciudades hagan grandes esfuerzos para mejorar su calidad. Dentro de las opciones de inversión de las autoridades están las de invertir fuertemente en

infraestructura especializada para buses con el fin de aumentar su nivel de servicio, siendo tal vez los sistemas Bus Rapid Transit (BRT) los más famosos y con mayor crecimiento a nivel mundial de los últimos años, teniendo presencia en 207 ciudades a la fecha (brtdata.org, 2017).

Los sistemas de transporte urbano masivo tipo BRT requieren de la provisión de infraestructura especializada que permite a los buses operar de forma independiente y segregada de los vehículos privados. Por esta razón logran ofrecer tiempos de viajes mucho menores y más estables que los alcanzados en tráfico mixto, representado una alternativa eficiente y de mayor capacidad que el servicio de un bus tradicional. Este tipo de sistema aspira a entregar un servicio de calidad comparable a sistemas operados por trenes, pero con la flexibilidad y economía de los buses. Algunos de los elementos comúnmente asociados a los sistemas BRT son la integración tarifaria, el diseño de estaciones con pago fuera del vehículo, como ocurre en el metro, la operación sobre vías exclusivas, y la provisión de servicios expresos o también conocidos como *limited-stop* (Wright, 2003). Este último elemento es un factor clave que permite a estos sistemas entregar viajes más expeditos a los usuarios, disminuyendo a su vez los tiempos de ciclo, lo que se traduce en una mayor capacidad para una flota dada de buses.

El sistema Transmilenio de Bogotá, Colombia, con más de 110 kilómetros de infraestructura construida, es un claro ejemplo del potencial de los BRT y de los servicios *limited-stop*. La ciudad tiene una población aproximada de 7,7 millones de habitantes, de los cuales el 59% usa transporte público generando más de 2,2 millones de viajes diarios. El tramo en el sentido más cargado de la red en hora punta lleva 48.000 pasajeros por hora, para el cual se ofertan 320 buses por hora (brtdata.org, 2017). Los operadores de Transmilenio ofrecen una combinación entre servicios *all-stop*, que se detienen en todos los paraderos del recorrido, y *limited-stop* para transportar estos altos niveles de demanda. Esto permite a los usuarios tener una variedad de opciones a la hora de elegir cómo realizar su viaje, pudiendo optar tanto por los servicios *limited-stop* que ofrecen una conexión más expedita y/o por el servicio *all-stop* que conecta todos los paraderos del corredor.

Sin embargo, y a pesar de las numerosas ventajas del sistema BRT, se debe considerar que los costos de construcción de estos corredores no pueden ser despreciados. Si bien estos son muy inferiores a los de construir líneas de metro, los costos sociales alternativos del espacio que requiere el BRT pueden llegar a ser muy altos. Luego, resulta natural procurar que una inversión importante como esta ofrezca los mayores niveles de servicio y capacidad que sean posibles.

1.2. Aportes y objetivos principales

El problema de diseño de servicios *limited-stop*, que llamaremos LSDP por sus iniciales en inglés, en corredores BRT ha captado la atención de investigadores alrededor del mundo, sobre todo en la última década. El LSDP puede ser definido como el problema de determinar el conjunto de servicios que deben operar en ambos sentidos del corredor, y sus frecuencias asociadas. Un elemento clave en los distintos modelos que trabajan sobre el LSDP es el supuesto utilizado en la asignación de pasajeros a las líneas disponibles. A pesar de que existe algo de variedad en la literatura sobre los supuestos de comportamiento de los usuarios, gran parte los trabajos consideran una asignación determinística. En esencia, la asignación determinística consiste en suponer que todos los usuarios cuentan con información perfecta respecto de las distintas alternativas para llevar a cabo su viaje y que son idénticos respecto a sus percepciones y valoraciones de los atributos asociados a cada alternativa de viaje. Así todos los viajeros entre un par origen destino escogerán viajar por la misma ruta: aquella que minimice los costos generalizados de viaje entre su origen y su destino. En esta asignación los usuarios utilizarán solo servicios identificados como atractivos para este propósito, según la definición de Chriqui y Robillard (1975).

La principal ventaja de este tipo de asignación radica en su gran simplicidad de resolución debido a que permite utilizar algoritmos ampliamente estudiados en la literatura de rutas mínimas como el propuesto por Dijkstra (1959) que entrega soluciones eficientes a bajo costo en tiempos de ejecución. Dentro de los trabajos que han modelado el LSDP mediante una asignación determinística destaca Leiva et al. (2010) y Larrain (2013). En estos trabajos la asignación determinística posee una gran limitación: al asignar la totalidad de

los pasajeros por la ruta de menor costo, se dejan sin uso todas las demás rutas para ese par origen-destino, aun cuando su costo sea ligeramente superior al de mínimo costo. Es evidente que este comportamiento difiere fuertemente de lo que se observa en la realidad a nivel de elecciones individuales a pesar de que en forma agregada este efecto tiende a compensarse. En la práctica, existen varios tipos de usuarios con distintas percepciones sobre los atributos del viaje, lo que agrega una componente estocástica de error e incertidumbre a la hora de predecir el comportamiento de los pasajeros. (Raveau et al 2010; Tirachini et al 2013; Batarce et al 2015).

Asimismo, y debido a que los usuarios siempre optan por la ruta y servicios de menor costo, pequeños cambios o errores en la estimación de los parámetros y atributos de entrada de la asignación (frecuencias, valoración del tiempo de espera o viaje, entre otros) pueden causar cambios importantes en la predicción de la asignación de los pasajeros a servicios y/o rutas. Este comportamiento binario de los usuarios genera saltos discretos en la asignación, lo que afecta la estabilidad de la solución y dificulta la etapa de optimización de frecuencias del algoritmo y la búsqueda de la solución óptima, especialmente si consideramos que los vehículos poseen capacidad limitada. Por todo lo anterior, los diseños de sistemas de transporte público hechos en base a las predicciones de la asignación determinística presentan poca robustez en cuanto al nivel de carga de los servicios y rutas.

Este documento de tesis extiende y mejora el modelo simultáneo antes desarrollado por Leiva et al. (2010) y luego por Larrain (2013). Este modelo simultáneo, que será explicado en detalle en el capítulo 3, resuelve el subproblema, que en esta tesis llamaremos, *capacitated frequency optimization and assignment problem* (CFOAP), en el cual se optimiza la frecuencia de los servicios que operan en el corredor, considerando un conjunto de servicios conocido. El objetivo del modelo de optimización es minimizar los costos sociales, es decir, de usuarios y operadores, considerando penalidades por trasbordo, restricción de capacidad máxima de cada bus, entre otras. La optimización de los costos sociales es simultánea, es decir, el modelo entrega simultáneamente las frecuencias óptimas y la asignación de pasajeros para cada servicio. Hemos podido

identificar tres debilidades presentes en el modelo simultáneo que esta tesis pretende abordar y contribuir:

1. Si bien el enfoque simultáneo es deseable, los tiempos de ejecución de este modelo aumentan fuertemente al aumentar el número de paraderos considerados en el corredor debido a la no linealidad del problema. Leiva et al. (2010) reporta resultados para un corredor de solo 10 paraderos por sentido, mientras que Larrain (2013) lo amplía a 20 pero prohibiendo los trasbordos. En la realidad, los corredores cuentan con varias decenas de paraderos lo que exige una metodología de solución que ofrezca tiempos de solución expeditos para este contexto.
2. El modelo de asignación planteado en la optimización simultánea es determinístico, es decir, se asume homogeneidad en la valoración de los atributos de viaje por parte de todos los usuarios. Esto se traduce en que la asignación determinística solo asigne pasajeros a una única ruta de menor costo en cada par origen destino, por lo que sus predicciones son poco estables ante un análisis de sensibilidad y poco robustas frente una consideración de usuarios heterogéneos en sus preferencias.
3. Para resolver el problema que incluye la capacidad de los vehículos, CFOAP, el modelo simultáneo trabaja con una heurística *greedy*, la cual en cada iteración modifica la cota mínima de frecuencia del servicio que tras la optimización presente la mayor sobrecarga de pasajeros. El problema de esta heurística es que no necesariamente conduce a un óptimo global ya que solo busca alcanzar la factibilidad de capacidad en los buses.

Para atacar la primera debilidad esta tesis propone separar el problema de optimización de frecuencias del problema de asignación de pasajeros como veremos en el capítulo 3, sección 3.3.1. La hipótesis es que el enfoque bi-nivel logra disminuir fuertemente los tiempos de ejecución con respecto al modelo simultáneo para corredores con una gran cantidad de paraderos. Este ahorro de tiempo puede llegar a ser muy significativo, sobre todo cuando se piensa en las extensiones futuras de este modelo a optimización de redes de corredores, en las cuales se trabaja con muchos más paraderos y servicios.

Con respecto al segundo punto, se propone el uso de un modelo estocástico para el nivel de la asignación de pasajeros del enfoque bi-nivel. Este enfoque se basa en el principio de que existe una componente de incertidumbre en las preferencias de los usuarios que el modelador no puede observar. Esta componente explica que haya usuarios que escojan rutas y/o servicios distintos a los del mínimo costo del modelo determinístico. Suponemos que la asignación estocástica reparte a los usuarios entre las opciones disponibles según las probabilidades de dos modelos logit multinomial (MNL). El primer modelo logit MNL se utiliza en la etapa de elección de servicios para cada etapa de viaje permitiendo a los usuarios escoger servicios que una asignación determinística considera como no atractivos. En el segundo modelo logit MNL se habilita la elección de rutas distintas a la de mínimo costo entre cada par origen-destino. Estos cambios suavizan las soluciones del modelo evitando saltos discretos en la carga de los servicios, o en el flujo de las rutas al evaluar cambios marginales en los atributos de la red.

Finalmente, el último aporte metodológico de esta tesis consiste en expandir la búsqueda de soluciones factibles que respete la restricción de capacidad de los vehículos y garantice una asignación espontánea de los usuarios. Debido a que la heurística *greedy* siempre toma el servicio más sobrecargado para fijarle una cota mínima de frecuencia, los resultados que se obtienen de ella siempre son los mismos sin importar cuántas veces se ejecute. Lo que proponemos es una heurística GRASP que consiste en elegir, de forma aleatoria y proporcional al nivel de sobre saturación, el servicio al que le impondrá una cota mínima de frecuencia. Con esto se logra explorar una región más amplia del dominio, la cual se espera que, en algunos casos, permitan identificar soluciones de menor costo social que la obtenida con la heurística *greedy*.

Lo que sigue de este trabajo se encuentra estructurado de la siguiente manera. En el capítulo 2 se presenta una revisión bibliográfica, con énfasis en los modelos que resuelven problemas similares al LSDP, y en los supuestos de asignación con los que trabajan. El capítulo 3, de metodología, se divide en tres secciones: en la sección 3.1 se introducen conceptos generales sobre el LSDP y sus subproblemas; en la sección 3.2 se presenta el modelo simultáneo de Larrain (2013) y se profundiza en el análisis de sus supuestos y

limitaciones; finalmente en la sección 3.3 se detalla el modelo bi-nivel, tanto en su versión determinística como estocástica, junto con la metodología para utilizarlo. Además, en esta sección se presenta una discusión sobre las ventajas y desventajas de utilizar un modelo de asignación estocástico de pasajeros. Luego, el capítulo 4, en la sección 4.1, contiene la caracterización de los nueve escenarios en los que se comparan los algoritmos de solución junto con información de los parámetros y datos de demanda utilizados. En la sección 4.2 se introducen los algoritmos de solución, y en la sección 4.3 se definen los indicadores de rendimiento del sistema. Luego, en las secciones 4.4, 4.5, 4.6 y 4.7 se analizan los resultados de los algoritmos en los nueve escenarios a fin de poner a prueba las tres contribuciones de la tesis: tiempos de ejecución, supuestos del modelo de asignación y calidad de las soluciones del modelo con capacidad CFOAP. Finalmente, en el capítulo 5 se exponen las principales conclusiones y futuras líneas de investigación para seguir desarrollando mejores soluciones para el LSDP.

2. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

Según Desaulniers y Hickman (2007), la primera mención en la literatura del término *limited-stop*, en el contexto del diseño de servicios, fue en el artículo de Jordan y Turnquist (1979). En éste se resuelve el problema de diseño y optimización de frecuencias para corredores con una estructura de demanda *one-to-many*. Unos años después, Furth (1986) expande esta formulación generalizándola para incluir corredores bidireccionales y corredores con bifurcaciones, pero manteniendo una estructura de demanda restringida. Adicionalmente, en el trabajo de Furth y Day (1985) se introducen formalmente las variaciones pertenecientes a la familia de servicios que omiten paraderos. Estos son los servicios: (i) *short-turning*, que sirven únicamente un tramo del corredor; (ii) *deadheading*, que hacen su viaje de regreso sin detenerse en ningún paradero; y (iii) *limited-stop*, los cuales omiten uno o más paraderos en su recorrido.

La explosión a nivel mundial en el uso de sistemas BRT vino acompañada de un renovado interés en el problema de diseño de servicios *limited-stop*. Varios estudios empíricos han demostrado el potencial que tienen los servicios *limited-stop*, dentro de los cuales se encuentran los de Ercolano (1984), Silverman (1998), y Tétreault y El-Geneidy (2010).

Además, en artículos recientes se ha investigado sobre las metodologías para el diseño y optimización de estos servicios. Leiva et al. (2010) y Larrain (2013) proponen un modelo de diseño de servicios que busca minimizar los costos sociales, entendidos como la suma de los costos de los operadores y los usuarios. Un aspecto interesante de este modelo es que permite tomar en consideración las restricciones de capacidad en los buses sin alterar la asignación espontánea de los usuarios. Este modelo separa el problema de diseño de servicios en dos subproblemas: el problema de generación de servicios y el problema de asignación y optimización de frecuencias con capacidad. Estos subproblemas serán explicados con mayor detalle en la sección 3.1.

A causa de su gran complejidad, por lo general estos subproblemas son resueltos de manera independiente. Hay trabajos en los que se estudia el problema de generación de servicios en una etapa previa a la optimización de frecuencias de los servicios. Por

ejemplo, en Larrain et al. (2015) se introducen varias heurísticas de generación de servicios que permiten diseñar servicios basándose en información de demanda de la matriz origen-destino. Estas heurísticas permiten generar varias configuraciones de servicios como *limited-stop, short-turning* y zonales, en donde estos últimos solo se detienen en los paraderos cercanos a los cabezales de cada sentido del corredor.

2.1. Modelos de asignación de usuarios

En esta sección se expondrán los distintos modelos de asignación necesarios para predecir el comportamiento de los usuarios y así poder optimizar las frecuencias de los servicios. En el contexto de este trabajo, la asignación de pasajeros es entendida como la etapa en la que los usuarios deciden cómo realizar su viaje. Para esto deben dar respuesta a las siguientes dos interrogantes: (i) ¿Qué servicios estoy dispuesto a utilizar en cada etapa de viaje?, y (ii) ¿Qué ruta de entre las que considero atractivas utilizo para llegar al paradero de destino? Para dar respuesta a estas preguntas existen dos tipos de asignación, la asignación determinística y la asignación estocástica.

La asignación determinística asume que el modelador dispone de información perfecta de las preferencias de los usuarios por lo que puede predecir con total certeza los servicios y rutas que tomará cada usuario. Esta asignación es muy utilizada debido a que su supuesto de información perfecta permite simplificar fuertemente el problema de asignación de pasajeros. El algoritmo de líneas comunes, planteado originalmente por Chriqui y Robillard (1975), entrega una solución determinística a la primera interrogante de determinar el conjunto de servicios a utilizar en cada sección de ruta (el equivalente a una etapa de viaje). Los servicios pertenecientes a este conjunto son denominados “líneas atractivas” y son los únicos que llevaran pasajeros en esa sección de ruta. El algoritmo de líneas comunes permite obtener el costo esperado de viaje de cada sección de ruta, con el cual se puede calcular el costo de cada ruta disponible. Luego, de manera análoga para la etapa de elección de rutas, la versión determinística asigna a todos los pasajeros a la ruta de menor costo dejando el resto sin flujo.

Por otro lado, en la asignación estocástica el modelador reconoce su grado de incertidumbre sobre las preferencias de los usuarios, por lo que incluye una componente estocástica en la función de costo de cada alternativa lo que deriva en una probabilidad de uso para cada servicio y para cada ruta. La raíz de esta incertidumbre se puede encontrar, por ejemplo, en las valoraciones del tiempo de viaje, tiempo de espera, comodidad al interior del bus, entre otras.

2.1.1. Modelos con asignación determinística

Sun et al. (2008) presenta un problema de optimización con programación entera que define la configuración y frecuencia de tres servicios sobre un corredor (un servicio *all-stop* que se detienen en todos los paraderos, uno *limited-stop* y un zonal) para minimizar los costos sociales. En este trabajo a los usuarios no se les permite realizar trasbordos, y no se modelan líneas comunes. Tampoco se toma en cuenta la capacidad de los vehículos. Chen et al. (2012) presenta un modelo de minimización de costos sociales para un corredor en el que circula un servicio *all-stop* y uno *limited-stop*. Este modelo tampoco permite los trasbordos. Se asume que los usuarios siempre optarán por abordar únicamente el servicio más rápido del par origen-destino, lo que los lleva a elegir el servicio *limited-stop* en caso de que este sirva el par origen-destino de su viaje y el *all-stop* en caso contrario. La restricción de capacidad de los vehículos es modelada mediante una restricción estricta en el problema de optimización. Esto puede llevar a una asignación "altruista" que no se condice con la realidad, en donde una proporción de los usuarios opte por una ruta minimice los costos sociales en vez de sus propios costos, no respetando así una asignación espontánea de usuarios.

En Chiraphadhanakul y Barnhart (2013) se plantea un modelo similar al de Chen et al. (2012), en donde no se permiten trasbordos, pero se modela la demanda del servicio *limited-stop* como una parte fija dependiente de la proporción de las frecuencias y una variable basada en los ahorros de tiempo de viaje. La restricción de capacidad también es modelada con una restricción estricta en el problema de optimización.

Los modelos de Leiva et al. (2010) y Larrain (2013) también utilizan una asignación determinística, y a diferencia de los anteriores, sí permiten a los usuarios realizar trasbordos, asumiendo que todos optan por la ruta de mínimo costo para cada par origen-destino. Además, ambos modelos consideran la restricción de capacidad de los buses, cuidando que se respete la asignación espontánea de usuarios. Esto lo logran relajando inicialmente la restricción de capacidad obteniendo una asignación de usuarios que no enfrenta congestión y por lo tanto es coherente con una asignación espontánea. A continuación inician un procedimiento iterativo en que se eleva la cota mínima de frecuencia del servicio más sobrecargado, y reoptimizan para así obtener una solución con menos servicios con problemas de capacidad. Se repite este proceso hasta que la solución del modelo de optimización con cotas en las frecuencias satisfaga la capacidad en los buses de todos los servicios. Este algoritmo no afecta la asignación espontánea de usuarios ya que solo impone restricciones a las cotas mínimas de frecuencia de los servicios, respetando las elecciones de cada usuario.

Por otra parte, De Cea y Fernández (1993) presentan un modelo de asignación determinística con equilibrio, que no incluye optimización de frecuencias, en el que los tiempos de espera son afectados por el nivel de utilización del sistema. Ellos plantean que mientras mayor es la carga de un servicio, menor es su frecuencia efectiva, con lo que se volverá menos atractivo en las siguientes iteraciones, permitiendo que se utilicen otros servicios de menor costo para el usuario. Este algoritmo les permite modelar una asignación con congestión que finaliza cuando se alcanza un estado de equilibrio en el que todos los usuarios han minimizado sus costos de viaje. Esta es una forma indirecta de imponer una restricción de capacidad, por lo que conserva la asignación espontánea de usuarios, sin embargo, el modelo de asignación tiene el problema de que no asegura que la capacidad máxima de los servicios sea respetada.

2.1.2. Modelos con asignación estocástica

Los autores Ulusoy et al. (2010) y Ulusoy y Chien (2015) proponen un modelo de diseño de servicios que aborda tanto el problema de generación de servicios como el de optimización de frecuencias. La generación de servicios se modela mediante un algoritmo genético el cual entrega en cada iteración un conjunto de servicios a optimizar. El algoritmo genético permite determinar la estructura de paradas de servicios de tipo *limited-stop* y *all-stop* (que incluyen los *short-turning*) que operan en el corredor. Se asume que los usuarios eligen cómo realizar su viaje en base a una de estas cuatro opciones: (1) esperar el servicio *all-stop* y no hacer trasbordos, (2) esperar el servicio *all-stop* y luego trasbordar al *limited-stop*, (3) esperar el servicio *limited-stop* y no trasbordar, o (4) esperar por el servicio *limited-stop* y luego trasbordar al *all-stop*. Esta elección es modelada estocásticamente mediante un modelo logit para cada par origen-destino. Los autores reportan una solución para un corredor de 69 paraderos. La principal desventaja del modelo es que no tiene una extensión sencilla que le permita incluir más de un servicio *limited-stop*, ya que exige enumerar las combinaciones entre servicios.

El modelo de Cortés et al. (2013), que se enfoca exclusivamente en proponer un modelo de asignación de usuarios, es especialmente innovador ya que es uno de los primeros en estudiar el concepto de asignación estocástica en la etapa de líneas comunes. Este elemento estocástico es incorporado al darle a cada usuario una probabilidad de abordar los servicios que sirven su paradero. Así, a diferencia del algoritmo de líneas comunes determinística de Chriqui y Robillard (1975), en que solo los servicios atractivos de cada par origen-destino llevan pasajeros, en este modelo todos los servicios tienen una probabilidad de ser utilizados. Para modelar el equilibrio en la asignación se agrega una probabilidad de no abordar el bus, esto permite incorporar la restricción de capacidad en buses al aumentar los tiempos de espera para los pasajeros que no encuentran lugar en el bus. En la misma línea, los trasbordos son modelados asumiendo que los usuarios buscan una estrategia óptima, escogiendo la hiperruta de menor costo de acuerdo al modelo de asignación de Nguyen y Pallottino (1988). Para ello, resuelven lo que ellos definen como el problema de líneas comunes estocástico, el cual junto con restricciones de continuidad, permite encontrar un equilibrio de tráfico estocástico.

2.2. Contribuciones del modelo propuesto

A continuación, en la Tabla 2-1 se muestran los modelos de diseño de servicios *limited-stop* (LSDP) identificados en la literatura:

Tabla 2-1. Modelos de diseño de servicios *limited-stop*

	Many-to-many	Optimización de frecuencias	Generación de servicios	Líneas Comunes determinística	Trasbordos mínimo costo	Líneas comunes estocástica	Trasbordos estocásticos	Asignación espontanea	Restricción de capacidad	Opt. a gran escala (>40 paradas)
Jordan y Turnquist (1979)		✓	✓					✓		
Sun et al. (2008)	✓	✓	✓					✓		
Leiva et al. (2010)	✓	✓		✓	✓			✓	✓	
Chen et al. (2012)	✓	✓	✓	✓					✓	
Chiraphadhanakul y Barnhart (2013)	✓	✓	✓	✓					✓	
Larrain (2013)	✓	✓	✓	✓	✓			✓	✓	
Ulusoy y Chien (2015)	✓	✓	✓				✓		✓	✓
Esta tesis	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

El criterio de *many-to-many* de la Tabla 2-1 indica si el modelo permite optimizar los viajes entre todos los pares origen-destino del corredor. Se muestra que, basados en la revisión bibliográfica realizada, no hay ningún modelo que resuelva el LSDP para corredores de gran escala (40 o más paraderos) con asignación estocástica en las etapas de elección de servicios y rutas. También notamos que son solo tres los modelos que respetan la asignación espontánea de usuarios al incluir la restricción de capacidad y enfrentarla correctamente, lo que indica que esta es una carencia recurrente.

A partir de estas oportunidades, y tomando como punto de comparación el modelo de Larrain (2013) en este documento, proponemos hacer las siguientes contribuciones: (i) plantear modelo bi-nivel separando las etapas de asignación de la optimización de frecuencias, (ii) desarrollar la metodología del modelo de asignación determinístico y estocástico con trasbordos, (iii) mejorar el algoritmo de capacidad *greedy* de cotas mínimas de frecuencia mediante la implementación de una heurística GRASP.

3. METODOLOGÍA

En este capítulo se presentan los aportes metodológicos de esta tesis respecto de cómo generar un diseño de servicios para un corredor de buses. En la sección 3.1, se presenta el esquema de trabajo modular propuesto para resolver el problema diseño de servicios *limited-stop*, o LSDP por sus siglas en inglés. Luego, en la sección 3.2, se detalla el trabajo realizado en la investigación de Larrain (2013), en donde se desarrolla un modelo simultáneo de optimización y asignación de pasajeros para corredores de buses con consideraciones de capacidad de los vehículos. Adicionalmente, en este apartado se expondrán las ventajas y desventajas de utilizar el modelo simultáneo, lo que servirá como punto de comparación para el modelo bi-nivel introducido en esta tesis. Finalmente, en la sección 3.3 se expone el modelo bi-nivel propuesto para resolver el problema de optimización y asignación de pasajeros con capacidad, CFOAP.

3.1. Descripción de esquema de trabajo modular

En esta sección formulamos el *limited-stop service design problem* (LSDP), y presentamos un esquema propuesto de trabajo para abordar este desafiante problema. En este apartado describiremos el LSDP, y proponemos su descomposición en dos nuevos problemas, el *capacitated frequency optimization and assignment problem* (CFOAP) y el *limited-stop service generation problem* (LSGP). Como se argumentará más adelante, el CFOAP se puede abordar por medio de la solución iterada de un problema que llamamos *frequency optimization and assignment problem* (FOAP). A su vez, el FOAP se puede separar en dos nuevos subproblemas: *frequecy optimization problem* (FOP) y *passenger assignment problem* (PAP). Una vista general de estos problemas y subproblemas se entrega en la Figura 3-1.

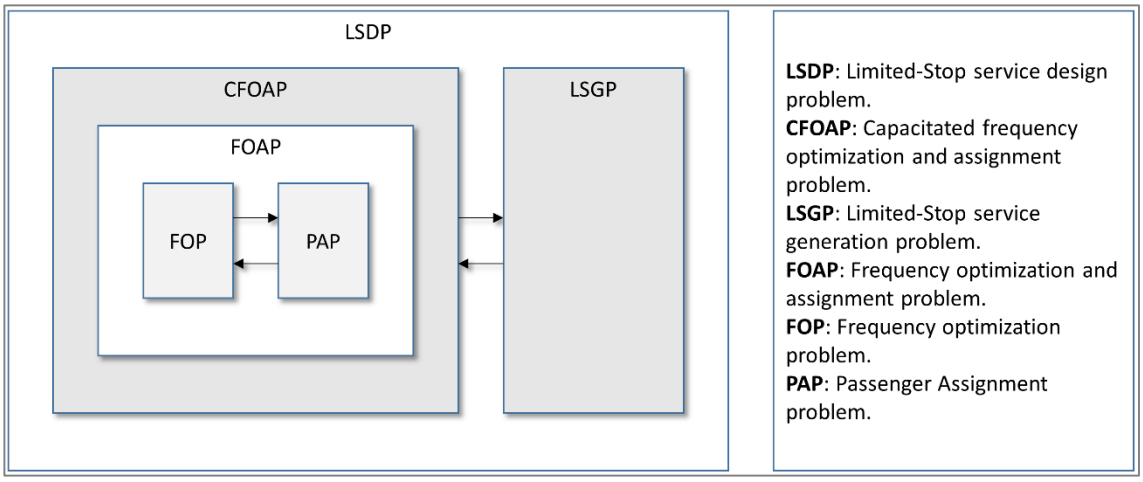


Figura 3-1. Esquema de trabajo LSDP.

3.1.1. The limited-stop service design problem (LSDP)

Consideremos un corredor bidireccional de transporte público para el cual se conoce una matriz de viajes origen-destino (O/D) entre los paraderos del corredor. El *limited-stop service design problem* (LSDP) se define como el problema de determinar el conjunto de servicios que debe operar en ambos sentidos del corredor, y las frecuencias de estos servicios. Esta solución se debe escoger de forma de optimizar cierto indicador de desempeño para la operación del corredor. Este indicador de desempeño puede corresponder, por ejemplo, a los costos sociales del sistema. Cabe notar que en el LSDP cualquier posible configuración de servicio podría ser utilizado en la solución, incluyendo servicios *all-stop* o *limited-stop* como *deadheading, short-turning*, y cualquier otro esquema de operación que podría resultar de interés (Furth y Day, 1985).

El LSDP es un problema complejo de resolver por una serie de razones. Una buena modelación y un buen algoritmo de solución del problema debe lidiar con al menos las siguientes dificultades:

1. La naturaleza entera mixta del problema. Esto es consecuencia del diseño de cada servicio en que se debe determinar si se atiende o no cada paradero en su trazado.

2. La no linealidad del problema. Esto es consecuencia del *trade-off* que es central al problema: mientras que los tiempos de espera son proporcionales al inverso de las frecuencias de los servicios, los costos de operación son directamente proporcionales a éstas.
3. Es necesario determinar cómo los pasajeros utilizarán los servicios para poder evaluar los costos del sistema. En otras palabras, el modelo debe incluir en alguna etapa un modelo de asignación de pasajeros. Existen, naturalmente, diversas formas de modelar esta asignación. En este trabajo proponemos y evaluamos diferentes alternativas para resolver esta cuestión.
4. La capacidad de los buses debe ser tomada en cuenta. La complejidad de este punto radica en que se debe tener particular cuidado de que la incorporación de esta restricción sea compatible con la modelación del proceso de asignación en que cada usuario escoja la mejor alternativa que tenga disponible.

Una forma de abordar el LSDP adaptado por Larrain (2013) consiste en acotar la búsqueda de servicios a un conjunto finito de servicios previamente definido. Esta estrategia da lugar a dos nuevos subproblemas a los que llamaremos: *capacitated frequency optimization and assignment problem* (CFOAP) y *limited-stop service generation problem* (LSGP).

El CFOAP puede ser definido como el problema de determinar las frecuencias de un conjunto de servicios definidos a priori que optimizan cierto indicador de desempeño de un corredor (i.e., que minimiza los costos sociales de éste). Esta solución debe satisfacer tres condiciones: (i) la factibilidad de las frecuencias propuestas en términos de continuidad de los buses, (ii) replicar una asignación espontánea de los usuarios de acuerdo a algún criterio definido, y (iii) satisfacer las restricciones de capacidad de los buses. Este problema recibe como datos de entrada indicadores de costos operacionales de cada servicio, una matriz (O/D) de viajes para los paraderos del corredor, y otros parámetros del problema que se detallan en la Sección 3.2 y 3.3.

El LSGP, por su parte, corresponde al problema de determinar cuáles son los servicios que se deben entregar al CFOAP de forma de obtener el mejor resultado posible. En Larrain (2013) y Larrain et al. (2015) se propone una serie de heurísticas de generación

de servicios *limited-stop*. Estas heurísticas se pueden clasificar en dos grandes grupos: las heurísticas *a priori*, en las que los servicios son diseñados sin considerar una solución vigente para el problema, y las heurísticas *ex post*, en donde nuevos servicios son propuestos para mejorar la operación del corredor dada una solución propuesta. Este segundo tipo de heurística puede ser aplicada en forma iterativa, formando un ciclo de retroalimentación entre el CFOAP y el LSGP.

3.1.2. Capacitated frequency optimization and assignment problem (CFOAP)

Si planteamos el CFOAP como un problema de programación matemática, el enfoque natural para modelar las tres condiciones antes descritas consistiría en incorporarlas como restricciones al problema. Sin embargo, hasta donde se ha podido corroborar, esta vía es sólo factible en un caso en particular, como detallamos a continuación.

La primera condición, que impone la factibilidad del conjunto de frecuencias, puede ser modelada sin mayor dificultad como un conjunto de restricciones. En este trabajo las llamaremos restricciones estructurales del problema. Éstas imponen la no negatividad de las frecuencias de los servicios, y la conservación de la flota de buses en los puntos donde los buses terminan de efectuar un servicio.

La segunda condición exige que la asignación de pasajeros responda a algún criterio preestablecido. En general, no hay una forma de modelar esta asignación directamente como parte del problema de optimización, es decir, que la optimización minimice los costos que perciben los usuarios a nivel individual de cada viaje en el sistema. Sin embargo, existe un caso en particular donde esto se puede lograr sin imponer ninguna restricción. Esto ocurre cuando el comportamiento cada usuario se puede modelar como la optimización de cierta función objetivo (i.e. el tiempo esperado total de viaje individual) y la función objetivo del problema general se encuentra alineada con esta optimización (i.e. cuando contiene un término que corresponde a la suma de los tiempos esperados individuales). El modelo simultáneo presentado en Larrain (2013) y descrito a continuación en la sección 3.2, aplica esta idea. Sin embargo, solo se puede asegurar la

factibilidad de la solución a este problema cuando la capacidad de los buses no está activa para ningún servicio, es decir, la carga de pasajeros por bus en el arco crítico de cada servicio no excede su capacidad máxima. En caso contrario, el óptimo social que entrega la solución puede corresponder a una situación en que se minimiza el costo social, pero donde no todos los usuarios utilizan su ruta preferida.

La tercera condición vela por que la capacidad de los buses (o eventualmente de otros recursos del sistema, como se propone en Larrain (2013)) no se vea superada. Resulta tentador incluir esta condición directamente como una restricción. Sin embargo, y como se adelanta en el párrafo anterior, si la asignación de los usuarios es determinada por la minimización de los costos sociales, una restricción de capacidad podría introducir una distorsión en la asignación alejándolo de la asignación espontánea de usuarios buscada. Para lidiar con este problema sin perder los beneficios de trabajar con un problema único de optimización, Leiva et al. (2010) y Larrain (2013) proponen dos procedimientos heurísticos tipo *greedy* para obtener una solución al CFOAP a partir de la resolución iterada de un FOAP con cotas mínimas de frecuencia.

3.1.3. The frequency optimization and assignment problem (FOAP)

Como se menciona antes, es posible conseguir una solución al CFOAP mediante resolver sucesivamente una serie de problemas equivalentes, pero sin restricción de capacidad de los buses, que llamamos FOAP. Como se ilustra en la Figura 3-1, el FOAP puede ser separado en dos subproblemas.

El primero de estos problemas es el *Frequency Optimization Problem* (FOP). Este problema determina las frecuencias óptimas de un conjunto dado de servicios, suponiendo que las elecciones de ruta de los pasajeros y el conjunto de servicios utilizados son conocidos (es decir, que la asignación de los pasajeros es conocida).

El segundo de estos problemas es el *Passenger Assignment Problem* (PAP), donde, dado un conjunto de servicios y sus frecuencias, se debe determinar cuáles rutas y servicios adoptarán los usuarios para llegar a su destino. Este proceso puede ser modelado de

diferentes formas. En particular, resulta de interés para esta tesis comparar una forma determinística de asignación con una forma estocástica.

3.2. Modelo simultáneo de Larrain (2013)

En este modelo se plantea la minimización de una función objetivo de costos sociales mediante la optimización de frecuencias, f_l, de un conjunto predeterminado de servicios, $\mathcal{L}$, donde $l \in \mathcal{L}$. Estos servicios deben servir los viajes paraderos-a-paradero de una matriz origen-destino (OD) T_w, con $w \in \mathcal{W}$, en donde $\mathcal{W}$ es el conjunto de pares O/D del corredor de $\mathcal{N}$ paraderos. En cuanto a la función objetivo, esta se compone de los costos de operar cada servicio, tanto por kilómetro recorrido como por tiempo de ciclo, junto con los costos de usuarios que incluyen tiempos de espera en paradero, tiempo de viaje en vehículo y penalidades por trasbordo.

El modelo de optimización está planteado de tal manera que entrega simultáneamente las frecuencias optimizadas de cada servicio, junto con la elección de servicios y rutas utilizadas por cada usuario, pero sin considerar la restricción de capacidad de los buses, es decir, resuelve un FOAP, o lo que es equivalente, resuelve simultáneamente el FOP y PAP. Tras resolver el problema sin capacidad se procede a implementar una heurística que agrega cotas mínimas a la frecuencia de cierto servicio para tomar así en consideración la restricción de capacidad del problema CFOAP alcanzando finalmente una solución factible.

3.2.1. Supuestos del modelo

Los principales supuestos de modelación del modelo simultáneo de Larrain (2103) son:

1. El corredor está dividido en un sentido de ida y uno de vuelta. Ambos sentidos deben tener la misma cantidad de paraderos, y los servicios a optimizar deben tener la totalidad de su recorrido al interior del corredor, es decir, se modela un corredor de buses cerrado.

2. La detención de los buses en paraderos es modelada como un tiempo fijo que incluye la desaceleración del bus al llegar al paradero, subida y bajada de pasajeros, y la aceleración para retomar una velocidad constante.
3. Los tiempos de viaje entre paraderos son fijos y conocidos para cada servicio.
4. Los tiempos de espera de los usuarios en los paraderos se modelan a través de un parámetro κ que se introduce paramétricamente al modelo.
5. Para el FOAP, se asume que los usuarios siempre podrán abordar el bus que esperan debido a que este siempre contará con capacidad para recibirlos.
6. La llegada de pasajeros a los paraderos es uniforme durante todo el periodo de estudio y la tasa coincide con los datos de la matriz origen-destino T_w. Se requiere que los datos de demanda estén a nivel de paradero debido a que no se modelan caminatas de acceso ni egreso al corredor.

En este modelo, y en el resto de la tesis, se sigue una nomenclatura comúnmente usada en la literatura de transporte en que una ruta en transporte público consiste en una secuencia de secciones de ruta también conocidas como etapas de viaje. Se asume que en cada sección de ruta los usuarios toman el primer vehículo que pasa por el paradero del conjunto de servicios que conforman la sección de ruta.

Como dato de entrada, el modelo requiere de una configuración de detenciones para cada servicio, la cual luego queda fija durante la optimización. Dentro de las opciones de servicios que pueden ser modelados están los servicios: (i) *all-stop*; (ii) *limited-stop*; (iii) *short-turning*; (iv) *dead heading*; y (v) zonales que conectan paraderos de inicio y fin del corredor, omitiendo la porción intermedia.

Por su parte, los datos de salida que arroja el modelo simultáneo son asignaciones de carga de pasajeros a nivel de servicio, perfiles de carga entre paraderos, frecuencias por servicio, costos de operación y de usuarios considerando costos de tiempos de viaje, espera y trasbordos.

3.2.2. Función objetivo y restricciones

La ecuación (3.1) muestra la función objetivo que representa el costo social por hora de operación [$/hr], en donde las variables de decisión son las frecuencias de cada servicio (f_l) y la frecuencia (f_l^s) percibida en cada sección de ruta $s \in S$. Si tras la optimización se cumple que $f_l^s > 0$, entonces la línea l pertenecerá al conjunto de líneas atractivas, en caso contrario ($f_l^s = 0$) la línea no llevará pasajeros en la sección de ruta s.

$$\min_{f_l, f_l^s} \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} c_l f_l + \sum_{w \in \mathcal{W}} \sum_{s \in S} H_s^w \left(\theta_{WT} \frac{\kappa}{\sum_{l \in \mathcal{L}} f_l^s} \right) + \sum_{w \in \mathcal{W}} \sum_{s \in S} H_s^w \left(\theta_{TT} \frac{\sum_{l \in \mathcal{L}} tt_l^s f_l^s}{\sum_{l \in \mathcal{L}} f_l^s} \right) + \theta_{Tr} \left(\sum_{w \in \mathcal{W}} \sum_{s \in S} H_s^w - \sum_{w \in \mathcal{W}} T_w \right) \right] \tag{3.1}$$

Sujeto a:

$$0 \leq f_l^w \leq f_l, \qquad \forall l \in \mathcal{L}, \forall w \in \mathcal{W} \tag{3.2}$$

$$\sum_{s \in S_i^+} H_s^w - \sum_{s \in S_i^-} H_s^w = \begin{cases} T_w & si\ i = O \\ -T_w & si\ i = D \\ 0 & e.o.c. \end{cases}, \quad \forall i \in \{1, \dots, \mathcal{N}\}, \forall w \in \mathcal{W} \tag{3.3}$$

$$\sum_{l \in \mathcal{L}_i^+} f_l = \sum_{l \in \mathcal{L}_i^-} f_l, \qquad \forall i \in \mathcal{N} \tag{3.4}$$

El primer término de la función objetivo (3.1) corresponde a la suma de la multiplicación entre los costos de operación por unidad de frecuencia y la frecuencia de cada servicio l del corredor. Los costos operacionales c_l representan el costo en que incurre un bus durante una hora de operación en el servicio l. Este considera los kilómetros recorridos (gas, neumáticos, etc), los salarios de conducción y los costos asociados al tamaño de flota como por ejemplo la depreciación del vehículo (Fernández y De Cea, 2003).

El segundo término representa los costos de espera que se obtienen a partir del tiempo de espera total experimentado por los usuarios en el sistema, convertidos a costos monetarios

mediante el parámetro de valor de tiempo de espera, θ_{WT}. Se asume que para cada sección de ruta s del par w, el total de pasajeros H_s^w experimentan un tiempo de espera proporcional al *headway* promedio multiplicado por la constante κ. Si se desea modelar que los servicios son perfectamente regulares, es decir, no tienen variabilidad en sus tiempos de llegada, entonces se utiliza $\kappa = 0{,}5$, lo que equivale a decir que cada pasajero espera en promedio la mitad del intervalo de los buses de los servicios que lo sirven. Si se asume una gran variabilidad en los tiempos de pasada de los buses, se utiliza $\kappa = 1$ haciendo que los usuarios esperen la totalidad del *headway* (Mohring, 1972; Jansson, 1980). Esto último equivale a suponer que los tiempos de pasada entre buses son variables aleatorias que distribuyen exponencial, y que por su propiedad de falta de memoria replican un proceso de llegada poissoniano. Dado que a corredores de alta demanda se les ofrecen múltiples servicios, cada uno con su propia frecuencia, es difícil que todos sean perfectamente regulares. Así, por lo general se utiliza $\kappa > 0{,}5$.

El tercer término es el costo de viaje de los usuarios calculado a partir del tiempo de viaje promedio, tt_l^s, en cada sección de ruta s, y el parámetro del valor del tiempo de viaje θ_{TT}. El tiempo promedio de viaje se calcula mediante un promedio ponderado entre los tiempos de viajes tt_l^s de los servicios atractivos y sus frecuencias f_l^s. Se asume que los usuarios se reparten de manera proporcional a las frecuencias del conjunto de servicios atractivos, por lo que el tiempo de viaje promedio simplemente se calcula como un promedio ponderado.

Estos últimos dos términos están multiplicados por el flujo de pasajeros H_s^w que utiliza la sección de ruta s como etapa de viaje del par origen-destino w, por lo que al sumar para cada par O/D y sección de ruta se obtienen los costos de espera y viaje de todos los usuarios del sistema. Al desagregar la matriz de viajes T_w en viajes por sección de ruta H_s^w se le permite a los usuarios realizar trasbordos en paradas distintas a su paradero de origen y destino. Los trasbordos les permiten a los usuarios utilizar servicios que no se detienen en su paradero de origen brindándoles un mayor número de rutas, alternativas a la opción directa, para realizar su viaje, pudiendo significarles un ahorro en su tiempo total de viaje.

El cuarto término representa la penalidad por trasbordos, que se obtiene al multiplicar el número de trasbordos totales, obtenido de la resta entre H_s^w y T_w, con la penalidad θ_{Tr} que lo convierte a valores monetarios. Esta penalidad recoge el disgusto intrínseco de realizar un trasbordo debido a, por ejemplo, tener que caminar para realizar el trasbordo, enfrentarse a condiciones climáticas poco agradables (lluvia, calor, nieve, viento, entre otras), por tener que pagar una diferencia monetaria o simplemente producto de interrumpir el viaje.

Es importante notar que los costos de operación aumentan con la frecuencia, mientras que los costos de los usuarios, en particular, los tiempos de espera, disminuyen a medida que aumenta la cantidad de buses por hora. En este *trade-off* se refleja además la no linealidad del problema, haciendo que este sea complejo de resolver a optimalidad, debido a que es un problema que puede presentar múltiples óptimos locales (Larrain, 2013).

La restricción (3.2) asegura que para cada sección s la frecuencia f_l^s percibida por los usuarios no supere a la frecuencia f_l del servicio l y tampoco sea negativa. En la práctica, la frecuencia el usuario será f_l si l es atractiva, o 0 si no lo es. Esto resulta ser equivalente a asignar flujo únicamente a las líneas atractivas, entregando una asignación determinística de los viajes en las líneas seleccionadas.

La restricción (3.3) asegura la conservación del flujo de pasajeros en cada paradero i. Los conjuntos S_i^+ y S_i^- representan respectivamente las secciones de rutas que salen y que entran del paradero i, en donde se deben satisfacer estrictamente las demandas T_w de cada par origen-destino w. La restricción (3.4) asegura que se respete la conservación de las frecuencias de buses entre los dos sentidos del corredor. Los conjuntos $\mathcal{L}_i^+$ y $\mathcal{L}_i^-$ representan respectivamente los servicios que comienzan y terminan su recorrido en el paradero $i \in \mathcal{N}$, por lo que al imponer igualdad entre ambas sumatorias de frecuencias se logra que no exista acumulación de buses en ningún nodo. El modelo asume que un bus que termina su recorrido en un paradero i puede iniciar un servicio en la dirección opuesta incurriendo en un costo que está incluido en el costo operacional de la línea.

El modelo simultáneo de optimización recién descrito da una solución al FOAP ya que entrega tanto la asignación de pasajeros a nivel de sección de ruta y servicio como la frecuencia optimizada de cada línea. El modelo no exige que los usuarios se comporten minimizando sus costos personales, sino que se minimiza el costo social total. En ausencia de congestión o de restricción de capacidad, la asignación óptima del sistema coincide con la asignación espontánea de los usuarios. Pero si exigimos que además se satisfagan las restricciones de capacidad de los buses, se perdería la certeza de que la solución sea coherente con esta asignación espontánea, lo que exigiría agregar complejas restricciones asociadas al comportamiento de usuarios para poder garantizarla.

Una opción para satisfacer la capacidad de los buses es imponer una restricción explícita de capacidad en el problema de optimización. La principal ventaja de este tipo de restricciones es que entregan una solución directa al CFOAP, sin necesidad de resolver iterativamente el FOAP. Sin embargo, en presencia de congestión, el modelo entrega una asignación de pasajeros que minimiza el costo social pero que no necesariamente refleja una asignación espontánea de usuarios. Esto es equivalente a decir que la asignación asumirá que ciertos usuarios tendrán un comportamiento “altruista” en donde optarán por viajar por una ruta o servicio de mayor costo a fin de minimizar el costo social total y no el individual, lo cual no corresponde a lo esperado según la teoría de maximización de la utilidad.

Como enfoque alternativo a una restricción explícita de capacidad, el modelo utiliza una heurística de capacidad de cotas inferiores para aumentar progresivamente la frecuencia del servicio más saturado. La heurística se implementa una vez finalizada la etapa de optimización sin consideraciones de capacidad (FOAP). Esto permite que la asignación de pasajeros resultante en cada etapa del algoritmo sea consistente con la asignación espontánea de usuarios, es decir, con la elección de rutas y servicios que cada pasajero escogería para minimizar individualmente su tiempo esperado de viaje.

Luego, para dar solución al CFOAP que toma en cuenta la capacidad de los buses se plantea el siguiente conjunto de restricciones:

$$f_l \geq f_l^{LB}, \qquad \forall l \in \mathcal{L} \tag{3.5}$$

La restricción (3.5) procura que los buses de la línea l no excedan su capacidad en ningún tramo de su recorrido, para lo cual se aumenta progresivamente el valor de f_l^{LB} si la restricción de capacidad del servicio l no es satisfecha. La heurística propuesta por Larrain (2013) es del tipo *greedy*, en el sentido de que se identifica el sentido de mayor mejora y se avanza en esa dirección. En este caso, en cada iteración se escoge siempre el servicio con mayor sobrecarga de pasajeros. Solo se consideran elegibles los servicios que tras la asignación presentan un nivel medio de pasajeros en el tramo más cargado mayor a su capacidad máxima.

La Figura 3-2 muestra un esquema general de cómo se resuelve el CFOAP en el modelo simultáneo y los *inputs* y *outputs* de cada etapa de solución.

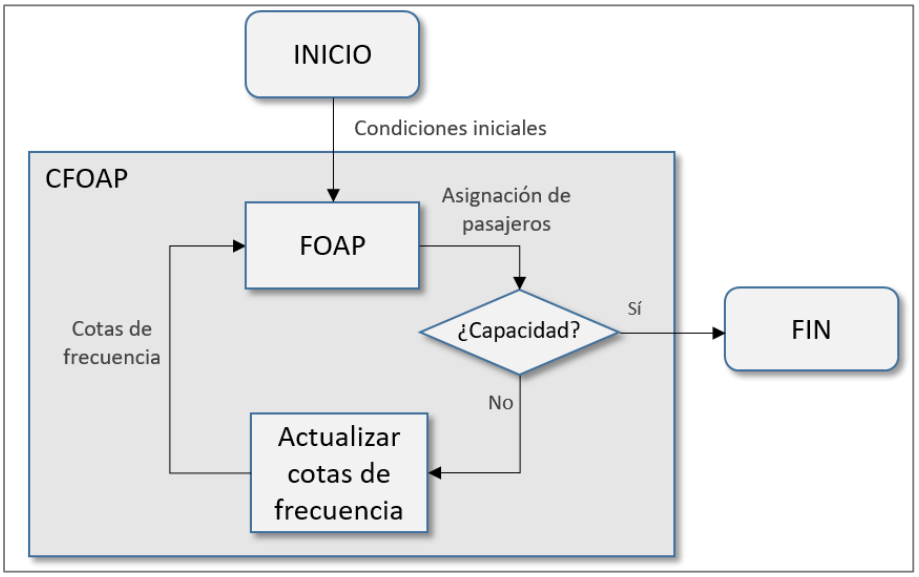


Figura 3-2. Estructura de solución de FOAP y CFOAP de modelo simultáneo.

Así, el CFOAP se resuelve mediante la heurística de capacidad, que procura identificar una solución factible, la que se describe a continuación:

1. Inicializar cotas mínimas con $f_l^{LB} = 0, \forall l \in \mathcal{L}$.

2. Resolver el FOAP de las ecuaciones (3.1) - (3.5), es decir, incluyendo la restricción de cotas mínimas.
3. Usando la solución obtenida en el paso anterior, calcular la carga del arco crítico de cada servicio, P_l^{max}, usando la ecuación (3.6), donde ς_q^l es un parámetro que toma el valor 1 si el servicio l sirve el arco $q \in \mathcal{Q}$, y 0 en otro caso. Donde $\mathcal{Q}$ es el conjunto de arcos que unen paraderos consecutivos del corredor.

$$P_l^{max} = \max_{q \in \mathcal{Q}} \left\{ \sum_{w \in \mathcal{W}} \sum_{s \in S} H_s^w \varsigma_q^l \frac{f_l^s}{\sum_{i \in \mathcal{L}} f_i^s} \right\} \tag{3.6}$$

4. Calcular para cada servicio el déficit de capacidad D_l, usando la ecuación (3.7), donde k_l es la capacidad de los buses que operan en el servicio l.

$$D_l = \max \left\{ \frac{P_l^{max}}{f_l} - k_l, 0 \right\}, \forall l \in \mathcal{L} \tag{3.7}$$

5. Si $D_l = 0, \forall l \in \mathcal{L}$, es decir, el déficit es igual a cero para todos los servicios, entonces detener el algoritmo ya que se tiene una solución factible para CFOAP. La solución actual es factible dado que no hay servicios con sobrecarga. Si por el contrario, el déficit de capacidad es mayor a cero en algún servicio, entonces se debe identificar el servicio g que tiene el mayor valor de déficit D_l y continuar al paso 6.
6. Incrementar la cota mínima de frecuencia del servicio g, haciendo $f_g^{LB} \leftarrow P_g^{max} / k_g$.
7. Volver al paso 2 para resolver nuevamente el FOAP con el vector actualizado de cotas mínimas de frecuencia.

Una vez se ha superado satisfactoriamente el paso 5 se da fin al algoritmo y se mantiene la solución alcanzada. Como se ha mencionado anteriormente, esta solución satisface la restricción de capacidad y respeta la asignación espontánea de usuarios en la que cada pasajero minimiza individualmente su tiempo de viaje.

3.2.3. Limitaciones del modelo de optimización simultáneo

Los modelos simultáneos de Leiva et al. (2010) y Larrain (2013) han significado un gran avance para la literatura en cuanto a la resolución del problema con capacidad, CFOAP. Sus mayores aportes consisten en la consideración de la restricción de capacidad respetando la asignación espontánea de los usuarios, la modelación del *trade-off* entre costos de operación y de usuarios que permite modelar de mejor manera los intereses de cada actor, la consideración de trasbordos y finalmente la posibilidad de incorporar distintos esquemas de detenciones en paraderos de los servicios, entregando gran flexibilidad al momento planificar la operación en el corredor.

Sin embargo, el modelo conserva supuestos cuestionables, como por ejemplo que la asignación de pasajeros es determinística. Este supuesto es muy discutible ya que implica suponer que todos los pasajeros perciben de igual manera los atributos de viaje, optando todos quienes hacen un mismo viaje origen-destino siempre por las mismas rutas y servicios.

Adicionalmente, la asignación determinística entrega soluciones poco robustas. Por ejemplo, frente a pequeñas variaciones en los parámetros de valoración de los atributos de viaje, el modelo puede predecir asignaciones totalmente diferentes. Estas variaciones pueden estar justificadas, por ejemplo, en el error en la estimación de parámetros de entrada del modelo como lo son el valor del tiempo de viaje, tiempo de espera o penalidad de trasbordo. Estos parámetros son difíciles de estimar con exactitud, y en la realidad varían entre usuarios por lo que es difícil de justificar un modelo que genere soluciones tan inestables ante este tipo de ajustes en los datos de entrada. Resulta muy deseable contar con un modelo robusto que absorba estas variaciones sin cambios significativos en sus resultados.

Así, a raíz de la naturaleza “todo o nada” del modelo de asignación determinístico, en la que solo las rutas y servicios de menor costo de cada par O/D llevan flujo de pasajeros, se pueden cometer grandes errores de predicción. Para ilustrar esta situación, tomemos como ejemplo un par O/D que tiene solo dos servicios y 100 pasajeros que desean viajar por él.

Los valores del tiempo de viaje y frecuencias de los servicios son los siguientes: $tt_1 = 30$ y $tt_2 = 40$ (en minutos), $f_1 = 12$ y $f_2 = 10$ (en buses/hr), para los servicios 1 y 2 respectivamente. Adicionalmente los parámetros de valoración del tiempo de espera, viaje y regularidad son $\theta_{TW} = 1.800$, $\theta_{TT} = 900$ (en \$/hr) y $\kappa = 1$ respectivamente. Para conocer la asignación bajo distintas condiciones es necesario identificar las líneas atractivas según el algoritmo de Chriqui y Robillard (1975). Para ello primero debemos calcular los costos esperados de viaje o *expected travel costs* (ETC) de cada conjunto $a \in \mathcal{A}$ de servicios para encontrar el de menor costo según la ecuación (3.8):

$$ETC_a = \theta_{TW} \frac{\kappa}{\sum_{l \in a} f_l} + \theta_{TT} \frac{\sum_{l \in a} f_l \, tt_l}{\sum_{l \in a} f_l} \tag{3.8}$$

En este ejemplo el conjunto posible de conjuntos de servicios es $\mathcal{A} = \{(1), (1,2), (2)\}$, sin embargo el algoritmo de Chriqui y Robillard (1975) indica que basta con ordenar de más rápido a más lento los servicios y calcular el ETC agregando en cada iteración el siguiente servicio más rápido. En otras palabras, basta con tomar el conjunto $\mathcal{A}' = \{(1), (1,2)\}$, ya que el servicio 1 es más rápido por diez minutos que el servicio 2. Tras identificar el ETC mínimo (ETC_MIN) y los servicios que lo componen se calcula la carga de los servicios de manera proporcional a su frecuencia. La Figura 3-3 muestra cómo va cambiando el nivel de carga de pasajeros (H1) del servicio 1, cuando va variando la razón entre el valor del tiempo de espera y de viaje.

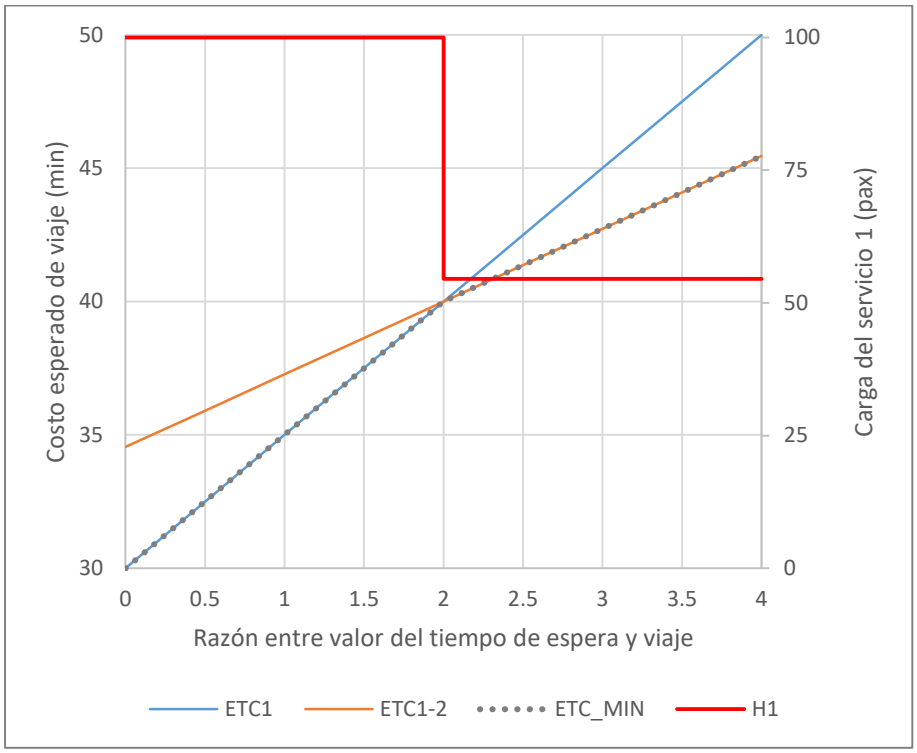


Figura 3-3. Asignación según razón de valoración del tiempo de espera y viaje.

La Figura 3-3 muestra claramente que el modelo determinístico predice un salto discreto en la carga del servicio 1 para el valor de la razón de los parámetros igual a 2. Esto hace que cambie fuertemente el nivel de carga de los servicios 1 y 2. Con una razón menor a 2 todos los pasajeros prefieren utilizar exclusivamente el servicio 1, por otro lado, con una razón mayor a 2 la carga se divide en forma proporcional a la frecuencia de los servicios, ya que ambos pasan a ser atractivos. Adicionalmente, se cumple que la recta ETC_MIN cambia de pendiente para este punto ya que, en este todos los usuarios cambian de estrategia óptima para su viaje.

Por otro lado, la Figura 3-4 muestra qué pasa si graficamos estos mismos servicios con una razón entre la valoración del tiempo de espera y viaje fija e igual a 2, pero sensibilizando el valor de la frecuencia del servicio 1.

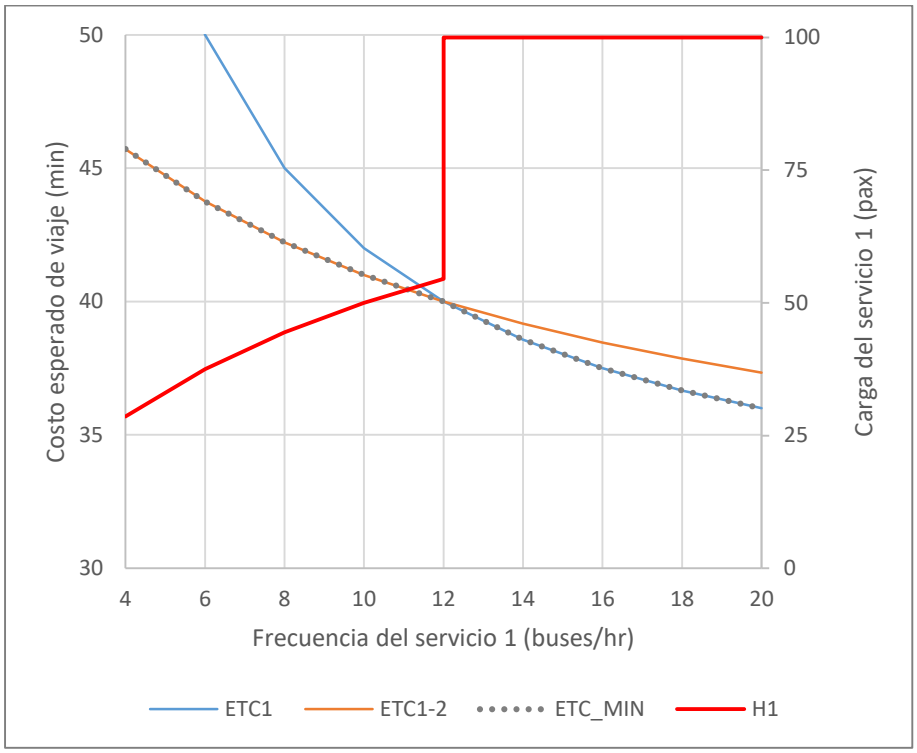


Figura 3-4. Asignación según frecuencia del servicio 1.

Como podemos observar, en la Figura 3-4 se muestra cómo cambia la carga del servicio 1 en función de su frecuencia. Para frecuencias altas del servicio 1 ($f_1 > 12$) el costo esperado de viaje ETC1 se mantiene siempre como la única línea atractiva llevando a todos los pasajeros. Mientras que si la frecuencia disminuye ($f_1 < 12$) entonces la carga se reparte proporcional a la frecuencia ya que ambas pasan a ser líneas atractivas. Claramente cambios pequeños en la oferta como aumentar la frecuencia de 11 a 13 buses por hora no debieran generar un cambio tan pronunciado en la asignación.

Adicionalmente, como consecuencia de esta fuerte discontinuidad en la asignación determinística resultante para distintos puntos del dominio de frecuencias, la búsqueda de un óptimo global se torna mucho más difícil. Los programas comerciales de optimización, también conocidos como *solvers*, generalmente tienen dificultades para trabajar con funciones objetivo poco robustas en alguna parte de su dominio. Esta dificultad puede incluso hacer que el *solver* alcance únicamente óptimos locales debido a las dificultades

que tiene para encontrar direcciones de movimiento del dominio factible. Pequeños cambios en las frecuencias de los servicios pueden significar grandes cambios en la asignación dificultando el cálculo de dirección de optimización necesario para llegar a buenas soluciones.

Por otro lado, el enfoque simultáneo también presenta desventajas en cuanto a tiempos de ejecución. Según resultados de Larrain (2013), el nivel de complejidad del problema, junto con sus tiempos de ejecución crecen fuertemente con el número de paraderos a modelar. Para ponerlo en perspectiva, si consideramos un corredor de 20 paraderos (10 por sentido) entonces tendremos 90 pares O/D, uno con 40 paraderos (20 por sentido) se alcanzan los 380 pares O/D, mientras que uno de 80 paraderos (40 por sentido) llega a los 1560 pares O/D. Claramente la relación paraderos-pares O/D no es lineal, sino que cuadrática, mientras que el conjunto de posibles servicios a considerar crece de forma combinatorial con el número de paraderos.

Debido a la necesidad de contar con soluciones para corredores reales que pueden bordear los 80 paraderos (40 por sentido) y que se calculen suficientemente rápido, se vuelve relevante trabajar con algoritmos eficientes. Esta es probablemente la razón por la que se planteó inicialmente un modelo con una asignación determinística debido a que es bastante sencilla de calcular. En la siguiente sección exploraremos un enfoque bi-nivel que pretende reducir fuertemente los tiempos de ejecución para poder optimizar corredores de mayor tamaño. Además se introducirá el modelo de comportamiento estocástico que suaviza los problemas de inestabilidad de la asignación determinística.

3.3. Enfoque bi-nivel para resolver el CFOAP

El enfoque bi-nivel es una variación en el método de solución del problema sin capacidad (FOAP) en la que se separa la asignación de pasajeros (PAP) de la optimización de frecuencias (FOP). Para incorporar la modelación de capacidad se puede utilizar la heurística *greedy* de capacidad mencionada en la Sección 3.2 que permite obtener una solución al CFOAP aplicando un algoritmo iterativo a partir de la solución del FOAP.

Cabe notar que esta estrategia es aplicable incluso si el FOAP no es modelado directamente como un único problema de optimización. Esto permite generalizar este esquema de solución para el LSDP para casos donde se asumen diferentes tipos de asignación de pasajeros.

La dinámica que subyace al FOAP en su caso general se puede plantear como un juego de Stackelberg, donde un planificador define las frecuencias del conjunto de servicios disponibles, y los seguidores (en este contexto, los usuarios del sistema) escogen qué servicios utilizar. Para resolver el FOAP, hemos formulado el problema separándolo en dos partes: por una parte se encuentra el problema que resuelve el planificador que hemos llamado *frequency optimization problem* (FOP), y por otro lado se encuentra el problema que enfrentan los usuarios, que hemos llamado *passenger assignment problem* (PAP). Estos problemas se pueden ver contextualizados con respecto a los otros problemas del esquema de trabajo para el CFOAP en la Figura 3-5.

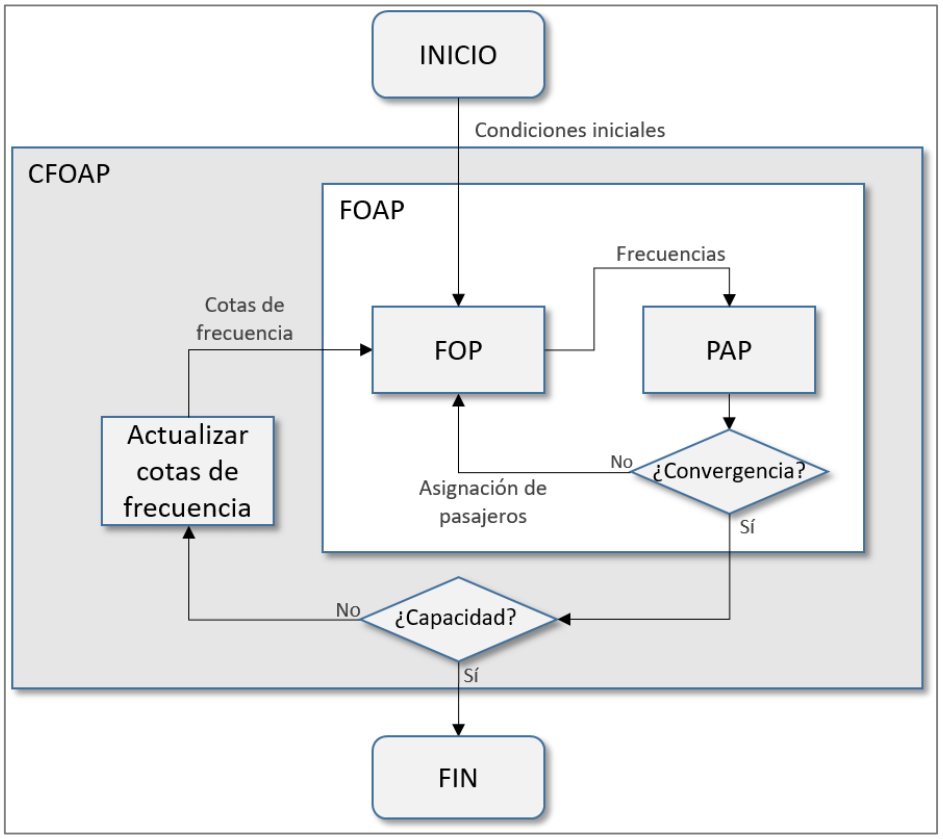


Figura 3-5. Estructura de solución del FOAP y CFOAP de modelo bi-nivel.

La estructura del FOAP y sus subproblemas sugieren la adopción de un esquema bi-nivel de solución, donde el FOP y el PAP son resueltos en forma alternada formando un ciclo de retroalimentación. Este método de solución propuesto se ilustra en el diagrama de la Figura 3-5, en el recuadro correspondiente al FOAP. Dado un conjunto de servicios, FOP optimiza sus frecuencias, asumiendo que la asignación de los usuarios es conocida. En este contexto la asignación se entiende como la ruta que sigue cada usuario que viaja entre cada par O/D considerando los posibles trasbordos para alcanzar su destino. Esto significa conocer el flujo esperado de pasajeros que sube y baja de cada una de los servicios en cada estación, es decir, su perfil de carga. El PAP, por su lado, recibe del FOP las frecuencias, y a partir de éstas determina la asignación de los pasajeros, cerrando de esta forma el ciclo. Este ciclo continúa hasta que se alcance un criterio de convergencia, el cual corresponde a que las frecuencias entre iteraciones no cambien más que un cierto parámetro de tolerancia.

Como se menciona anteriormente, es posible modelar el proceso de elección de rutas de los pasajeros (es decir, el proceso de asignación de pasajeros a servicios) de diferentes maneras. En esta sección estudiaremos dos tipos de asignación: una determinística, similar a la asignación del modelo simultáneo, y la otra estocástica tipo Logit Multinomial. Estos tipos de asignación afectan la modelación de ambos subproblemas del FOAP, y son detallados en las secciones que siguen.

3.3.1. Problema de asignación de pasajeros (PAP)

En el enfoque bi-nivel, el problema de asignación de pasajeros se resuelve considerando frecuencias fijas provenientes de la etapa de optimización FOP. Este ciclo continúa hasta que la diferencia entre las frecuencias de iteraciones sucesivas sea menor a un parámetro predefinido de tolerancia (α). Como veremos más adelante, el tipo de asignación tiene un

impacto tanto en la velocidad de convergencia como en la evolución de la función objetivo de los costos sociales.

En esta sección estudiaremos dos tipos de modelos de comportamiento por parte de los usuarios, determinístico y estocástico, que se diferencian principalmente en los supuestos que hace el modelador respecto de su conocimiento acerca de los atributos que valora el usuario para elegir cómo efectuar su viaje y su peso relativo.

El primer modelo de asignación determinística corresponde al utilizado en el modelo simultáneo de la sección 3.2. En este tipo de asignación se asume que el modelador es capaz de predecir con total certeza cuáles serán los servicios y rutas utilizadas por los usuarios. Esto se debe al supuesto de que se conocen todos los atributos que definen el costo de una ruta para un usuario, por lo que en cada par O/D simplemente se asignan todos los viajes a la ruta de menor costo. Otra forma de interpretar este supuesto de comportamiento "todo o nada" es entenderlo como que se asume que existe un único tipo de usuario, y que su costo esperado de viaje queda perfectamente representado por los atributos modelados por el planificador.

En contraste, el modelo estocástico que proponemos se hace cargo de algunas de las limitaciones expuestas de la asignación determinística. Se asume que el modelador tiene un grado de incerteza sobre el costo con que perciben los usuarios cada ruta. Esto se traduce en que se adiciona un elemento de error estocástico a la función de costo, el cual representa los atributos del viaje que no están siendo incorporados en la modelación. De esta manera, se obtienen resultados que reflejan una asignación mediante un modelo Logit Multinomial, en los cuales se utilizan servicios y rutas que en la asignación determinística no llevan flujo de pasajeros.

Para modelar el proceso de decisión de los usuarios hemos dividido el problema de asignación en dos etapas que se muestras a continuación:

a. **Elección de líneas atractivas.** Supongamos que un usuario viaja sin trasbordar entre dos paradas i y j del corredor. Para realizar este viaje, existe un conjunto de servicios que el usuario podría utilizar, cada uno con su respectivo tiempo de viaje

y frecuencia asociado. ¿Cuáles son los servicios que el usuario debiese estar dispuesto a tomar cuando los buses pasen? En presencia de servicios *limited-stop*, la respuesta a esta pregunta deja de ser trivial, ya que el usuario podría estar dispuesto a dejar pasar algunos servicios más lentos para esperar a un servicio más rápido. Esta selección del conjunto de líneas atractivas permite obtener para cada posible etapa de viaje un costo esperado de viaje.

b. **Elección de ruta.** En esta etapa los usuarios, conociendo los tiempos esperados de las posibles etapas de viaje, escogen la ruta y los trasbordos que minimizan su tiempo esperado de viaje total.

El primer supuesto implícito que estamos tomando al adoptar esta estructura de decisión es que los usuarios cuentan con información perfecta de la oferta (frecuencias, tiempos de viaje, tiempos de espera y regularidad). Este supuesto es bastante común en los modelos de asignación de transporte público ya que estos están orientados a usuarios frecuentes del sistema, los cuales a base de experiencia se acercan bastante a cumplir el supuesto de información perfecta.

Por otra parte, se asume que los usuarios se asignan de acuerdo a un modelo de comportamiento de minimización de costos individuales, es decir, en base a una asignación espontánea de usuarios. En este modelo cada pasajero debe evaluar los costos de las rutas que conectan su paradero de origen con el de destino a fin de poder escoger la opción, que bajo sus criterios sea la de menor costo. Sin embargo para conocer estos costos es necesario saber cuáles servicios son atractivos en cada sección de ruta. Luego, el segundo supuesto implícito en esta formulación consiste en que los usuarios resuelven primero la etapa de líneas atractivas, y luego en base a esa información seleccionan la ruta que utilizarán.

A continuación, proponemos una formulación matemática del PAP considerando tanto la elección de líneas atractivas en cada sección de ruta como la elección de rutas. Ambos subproblemas serán desarrollados entregar una asignación tanto en una versión determinística como una estocástica del modelo bi-nivel.

a) Elección de líneas atractivas

Dada una sección de ruta $s \in S$, sea $\mathcal{A}_s$ el conjunto de servicios que permiten hacer esta etapa de viaje. Para cada servicio $l \in \mathcal{A}_s$, se conoce su tiempo de viaje tt_l^s y su frecuencia f_l. El resultado de esta etapa corresponde al costo mínimo esperado de viajar en cada sección de ruta s, ETC_s, y la probabilidad $\Pr\{l, s\}$ de que un usuario cualquiera que viaja en esta sección lo haga utilizando el servicio $l \in \mathcal{A}_s$.

i) Asignación determinística

Sea ETC_a^sel costo esperado de viaje de la sección de ruta s que los usuarios experimentan al considerar un conjunto de líneas atractivas $a \subseteq \mathcal{A}_s$. La expresión para calcular ETC_a^s es la siguiente:

$$ETC_a^s = \theta_{TW} \frac{\kappa}{\sum_{l \in a} f_l} + \theta_{TT} \frac{\sum_{l \in a} f_l \, tt_l^s}{\sum_{l \in a} f_l} \; ; \; \forall a \in \mathcal{A}_s \tag{3.9}$$

El primer término de la ecuación (3.9) corresponde al costo del tiempo esperado de espera, mientras que el segundo término representa el costo del tiempo esperado de viaje en la sección de ruta s dado que el conjunto de líneas atractivas es a.

Mediante el algoritmo de líneas comunes propuesto por Chriqui y Robillard (1975) es posible determinar cuáles son los servicios que minimizan ETC. A estos los llamaremos servicios atractivos. El primer procedimiento del algoritmo consiste en ordenar los servicios de menor a mayor según su tiempo de viaje tt_l^s. Llamaremos a los servicios ordenados de $1, \dots, \ell$, en que ℓ es el número de servicios que sirven la sección de ruta s. El siguiente paso consiste en calcular el costo esperado de viaje, ETC_1^s, asociado a esperar el primer bus que pasa del servicio de menor tiempo de viaje, y compararlo con el costo esperado de viaje de incluir el o los segundos servicios más rápidos, es decir, de esperar el primer bus que pase de los servicios 1 y 2 ($ETC_{1,2}^s$). De esta manera se evalúa en cada iteración si la adición de un servicio adicional logra disminuir el costo esperado de viaje. Se repite el proceso sucesivamente incluyendo el siguiente servicio más rápido generando un nuevo conjunto de servicios a analizar. El procedimiento se detiene cuando el costo esperado para el conjunto ampliado de servicios no reduce el costo esperado de viaje o si

ya no quedan más servicios por agregar. Como resultado del algoritmo de Chriqui y Robillard se obtiene, para cada sección de ruta s, el conjunto de líneas atractivas, a_s^*, que entrega el valor del mínimo costo esperado de viaje, $ETC_s = ETC_{a_s^*}^s$.

La Figura 3-6 muestra cómo se ordenan los servicios de cada par en base a sus tiempos de viaje para luego poder determinar el mínimo costo esperado de viaje ETC_s.

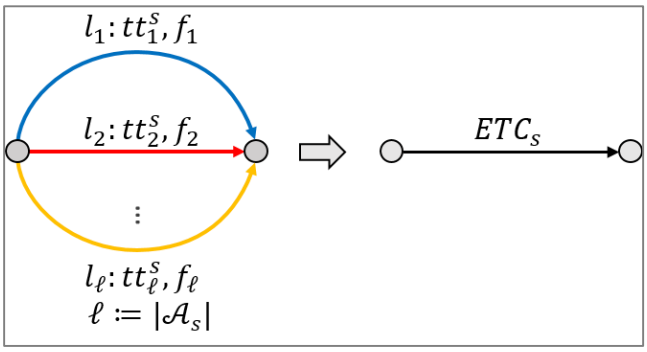


Figura 3-6. Líneas comunes – Asignación determinística.

Este método se basa en la observación que si un servicio l pertenece al conjunto de líneas atractivas, entonces los servicios $1, \ldots, l-1$ también deben pertenecer a dicho conjunto. En otras palabras, si un usuario está dispuesto a tomar un servicio en particular, también debería estar dispuesto a tomar cualquier otro servicio más rápido si éste pasa antes por el paradero.

Con el método de líneas comunes se determina cuáles son los servicios atractivos para cada sección de ruta s del corredor, sin embargo falta determinar la probabilidad con que un usuario abordará cada servicio para realizar su viaje. Este problema se aborda con un supuesto sencillo pero razonable, asumimos que la probabilidad $\Pr\{l, s\}$ de escoger un servicio l es proporcional a las frecuencias de los servicios atractivos según la ecuación (3.10):

$$\Pr\{l,s\} = \begin{cases} \dfrac{f_l}{\sum_{l' \in a_s^*} f_{l'}}, & l \in a_s^* \\ 0, & l \notin a_s^* \end{cases} \tag{3.10}$$

De esta forma la diferencia de carga entre dos servicios pertenecientes al conjunto de líneas atractivas a_s^* se explica únicamente por la frecuencia f_l que ofrece cada servicio para servir la sección de ruta s.

ii) Asignación estocástica

En la versión estocástica del problema de selección de líneas atractivas, se admite que existe cierta incertidumbre por parte del modelador respecto al costo esperado de viaje que cada usuario percibe en la sección de ruta s dado un conjunto de líneas atractivas $a \subseteq \mathcal{A}_s$. Esto implica que no es posible predecir con certeza la opción de menor costo para el usuario, sino una cierta probabilidad asociada a cada una de las alternativas.

Para poder definir las alternativas de conjuntos de líneas atractivas consideradas por el usuario conservaremos el supuesto de que si los usuarios consideran atractiva la línea l para la sección de línea s necesariamente consideran también todos los servicios más rápidos que l para la misma etapa de viaje. Así, supongamos que se define un conjunto (A_s) de conjuntos de alternativas (k) de líneas atractivas (a_s^{k}) que sigue este supuesto $\mathrm{A}_s = \{a_s^1, \dots, a_s^{K_s}\}$, donde K_s es la cantidad total de alternativas a considerar en el modelo logit en la sección de ruta s. Asociada a cada una de estas alternativas existe una utilidad (U_s^k) percibida por el usuario que realiza el viaje, que corresponde al costo esperado de seleccionar a_s^k como conjunto de líneas atractivas. La utilidad asociada a la alternativa k en la sección de ruta s se puede modelar como $U_s^k = V_s^k + \varepsilon_s^k$. Esta utilidad se compone de una utilidad determinística V_s^k, que es medible por el planificador, y una parte aleatoria ε_s^k, que representa la parte de la utilidad que es incierta para el planificador. La utilidad determinística la modelaremos como $V_s^k = ETC_{a_s^k}^s \cdot \Psi$, que corresponde al costo esperado de viaje (calculado utilizando la expresión (3.9)) transformado a unidades de utilidad mediante el parámetro Ψ.

Asumiendo que los errores ε_s^k son variables aleatorias i.i.d. que siguen una distribución de Gumbel con media 0, podemos hacer el supuesto de que es igual para todos los usuarios, en todas las alternativas y secciones de rutas, luego $\varepsilon_s^k = \varepsilon,\ \forall s \in S, \forall k \in K_s$. Bajo el supuesto de distribución de Gumbel de los errores, la teoría de modelos de elección discreta indica que la probabilidad $\Pr\{k, s\}$ de escoger el conjunto a_s^k para la sección de ruta s se puede estimar de acuerdo a un modelo logit multinomial según la ecuación (3.11):

$$\Pr\{k, s\} = \frac{\exp(-\lambda \cdot V_s^k)}{\sum_{k'=1}^{K_s} \exp\left(-\lambda \cdot V_s^{k'}\right)} \tag{3.11}$$

El valor λ de la ecuación (3.11) corresponde al parámetro de escala del modelo Logit MNL. Este parámetro es inversamente proporcional a la desviación estándar de la variable aleatoria ε_s^k de distribución Gumbel, lo que implica que a medida que λ aumenta el comportamiento de los usuarios se asemeja cada vez más a la asignación determinística. En otras palabras, cuando λ tiende a infinito, el error ε_s^k tiende a 0, cumpliendo que $U_s^k = V_s^k$, lo que lleva a todos los usuarios a viajar exclusivamente por la alternativa k de mayor utilidad determinística. Por otra parte, si λ tiende a 0 entonces las probabilidades de escoger cada alternativa k se vuelven equiprobables con probabilidad $1/K_s$.

Uno de los supuestos fundamentales que se requiere para utilizar el modelo logit es cumplir con la independencia de las alternativas, o lo que es equivalente, que no exista correlación entre las alternativas. Por lo tanto, el conjunto A_s de posibles conjuntos de líneas atractivas debe ser construido de forma de asegurar esta condición. Esto exige que los conjuntos de servicios que componen estas alternativas no tengan líneas en común. Es decir, construir subconjuntos disjuntos de servicios para estructurar las distintas alternativas k de viaje.

En el modelo de De Cea y Fernández (1993), para la asignación de usuarios de transporte público en presencia de congestión, se propone una forma de agrupar los servicios en subconjuntos que satisface la independencia de las opciones. Dichos conjuntos de servicios se construyen siguiendo el siguiente procedimiento:

1. Construir a_s^1 aplicando el algoritmo de líneas comunes de Chriqui y Robillard sobre el conjunto de servicios $\mathcal{A}_s$.
2. Construir a_s^2 aplicando el algoritmo de líneas comunes de Chriqui y Robillard sobre el conjunto de servicios $\mathcal{A}_s \setminus a_s^1$.
3. Repetir el paso anterior, aplicando líneas comunes sobre el conjunto de los servicios que no han sido asignados a algún a_s^k hasta cubrir los ℓ servicios en la sección s.

Aplicando este algoritmo se pueden construir los K_s conjuntos independientes de líneas que conforman A_s. El costo asociado a la sección de ruta s debe ser estimado a partir de su utilidad máxima esperada (EMU_s), que está dada por la siguiente expresión de la ecuación (3.12):

$$EMU_s = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(\sum_{k=1}^{K_s}\exp(-\lambda \cdot V_s^k)\right) \tag{3.12}$$

Donde se puede expresar el valor de EMU_s en unidades de costo monetario mediante la ecuación (3.13):

$$ETC_s = \frac{1}{\Psi} EMU_s \tag{3.13}$$

Para esta aplicación, el valor de EMU_s en vez de representar el nivel de utilidad del logit, más bien corresponde a una medida de desutilidad de viajar por la sección de ruta s. Esto es debido a que los usuarios perciben los atributos del viaje (tiempo de viaje y tiempo de espera) como un costo en su función de utilidad U_s^k, luego, estos siempre preferirán viajar por secciones de ruta con un bajo valor de EMU_s a fin de minimizar su desutilidad.

Además, se debe notar que si para una sección de ruta s existe solo una alternativa k de viaje mediante el conjunto a_s^1, que por construcción es igual a a_s^* de la asignación determinística de líneas atractivas, entonces se cumple que $EMU_s = V_s^k$. Esto implica que cuando existe un solo un conjunto de servicios atractivos la asignación estocástica entrega el mismo resultado que la determinística.

También es importante mencionar que la desutilidad esperada EMU_s siempre disminuye al agregar nuevas alternativas de viaje k, haciendo que sea más atractivo de utilizar para los usuarios. Esto se debe a que siempre habrá usuarios que perciban el nuevo conjunto de servicios a_s^k como el de máxima utilidad (mínima desutilidad) a causa de la componente de error ε_s^k, sin importar que tan relativamente baja sea la utilidad determinística V_s^k. Luego, el ETC_s proveniente de la ecuación (3.13) siempre entregará un costo menor o igual al de la asignación determinística.

Se debe tener especial cuidado en la calibración del parámetro de escala λ, ya que como se ha mencionado anteriormente este es, por construcción del modelo logit MNL, inversamente proporcional a la desviación estándar de la variable aleatoria ε_s^k. Así, cuando λ es muy bajo la desviación estándar de la utilidad percibida U_s^k será muy alta, lo que puede, en algunos escenarios, entregar valores de EMU_s negativos.

Tomemos por ejemplo una sección de ruta s en donde A_s contiene dos conjuntos de alternativas de viaje, a_s^1 y a_s^2, con utilidades esperadas de viaje de U_s^1 y U_s^2, utilidades determinísticas V_s^1 y V_s^2, y errores i.i.d. con distribución Gumbel ε_s^1 y ε_s^2 respectivamente. La Figura 3-7 muestra las funciones de densidad de las utilidades percibidas por los usuarios para ambas alternativas, las que están centradas en el valor de la utilidad determinística y tienen una desviación estándar igual a $\pi/(\sqrt{6}\lambda)$ según la distribución de errores Gumbel. Para este ejemplo se asume que el parámetro de escala λ es relativamente alto, lo que hace que las formas de las distribuciones no tengan mucha desviación estándar.

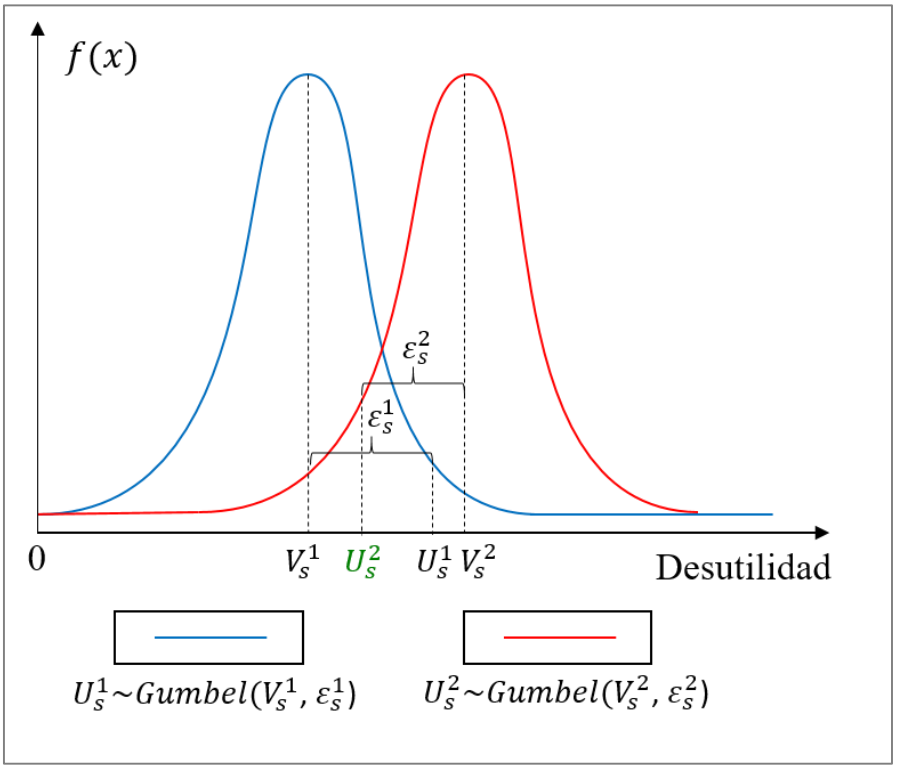


Figura 3-7. Funciones de densidad para conjuntos a_s^1 y a_s^2 con λ alto.

En la Figura 3-7 se está evaluando una instancia particular de decisión donde para el usuario son conocidos los valores de ε_s^1 y ε_s^2, por lo que también conoce las (des)utilidades U_s^1 y U_s^2 de cada alternativa. En el ejemplo vemos que $U_s^2 < U_s^1$, lo que lleva al usuario a escoger la alternativa 2 al ser la de menor desutilidad, esto a pesar de que $V_s^1 < V_s^2$. Este ejemplo ilustra claramente un escenario en que el modelo de asignación determinístico no habría sido capaz de predecir el comportamiento de este usuario.

El problema está cuando el parámetro λ es relativamente bajo, haciendo que la desviación estándar de los errores sea alta, haciendo que aumente la posibilidad de obtener EMU_s negativos. Un EMU_s negativo significa que los usuarios perciben una utilidad esperada positiva (desutilidad negativa) por viajar en la sección de ruta s, lo que no es razonable debido a que todas las componentes de la utilidad determinística son costos (costo esperado de espera y costo esperado de viaje), y por ende generan una desutilidad. La Figura 3-8 presentada a continuación ilustra esta situación:

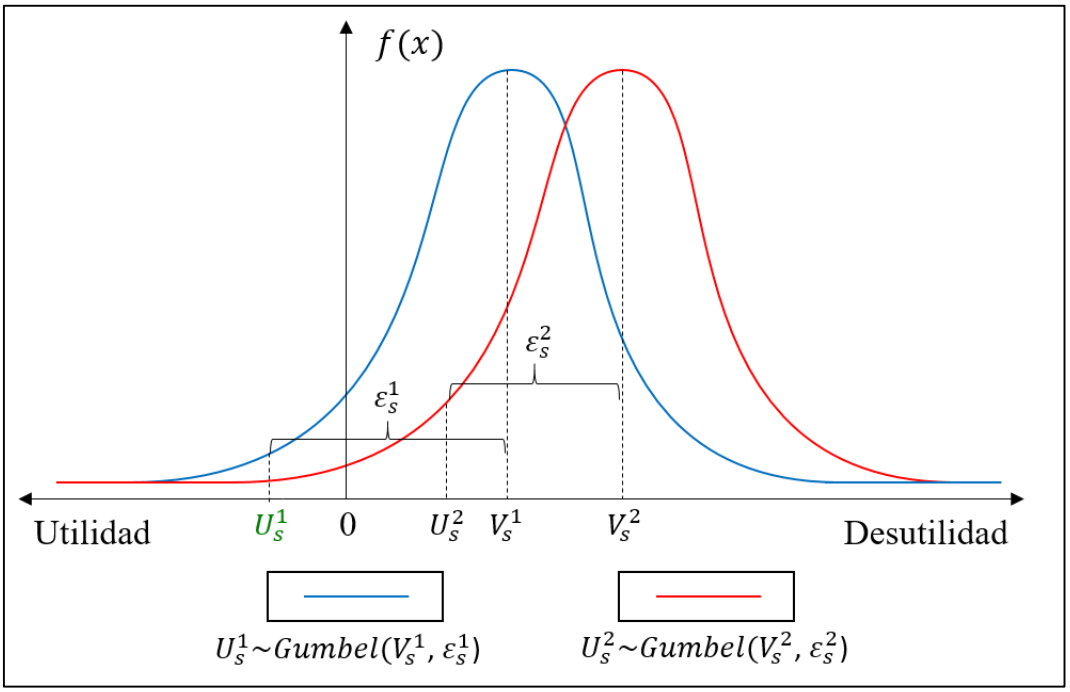


Figura 3-8. Funciones de densidad para conjuntos a_s^1 y a_s^2 con λ bajo.

Se puede observar que para este ejemplo el usuario escogerá la alternativa 1 para realizar su viaje debido a que $U_s^1 < U_s^2$. Sin embargo, vemos que la variabilidad del error ε_s^1 en la alternativa 1 ha llevado a la utilidad percibida U_s^1 a tomar valores negativos, convirtiendo la desutilidad en utilidad de viaje. Para evitar este problema con el signo de EMU_s, se debe calibrar el parámetro de escala λ de manera que ninguna sección de ruta tenga una utilidad percibida positiva. Más adelante, en el capítulo 4 de resultados, aplicaremos una regla sencilla para calibrar λ, la cual consiste en encontrar el parámetro de escala tal que entregue resultados razonables ante diferencias en los costos de las alternativas. Por ejemplo, ante diferencias de 5 minutos en tiempo de viaje entre las dos alternativas se busca el parámetro λ que entrega una asignación a los conjuntos tal que $\Pr\{1, s\} = 70\%$ y $\Pr\{2, s\} = 30\%$. Aunque, lo ideal, para aplicaciones del modelo en corredores reales, siempre será calibrar λ de manera simultánea con el resto de parámetros de la función de

costos ($\theta_{WT}, \theta_{TT}, \theta_{Tr}$) a partir de un modelo demanda de estudio de preferencias en base a un modelo logit MNL.

Finalmente, y continuando con el modelo estocástico, la probabilidad de utilizar el servicio $l \in a_s^k$ (asumiendo los elementos de A_s disjuntos) corresponde a la probabilidad $\Pr\{k, s\}$, proveniente del modelo logit, de escoger la alternativa k, multiplicada por la proporción de las frecuencias correspondientes, según la ecuación (3.14):

$$\Pr\{l, s\} = \Pr\{k, s\} \cdot \frac{f_l}{\sum_{l' \in a_s^k} f_{l'}} \tag{3.14}$$

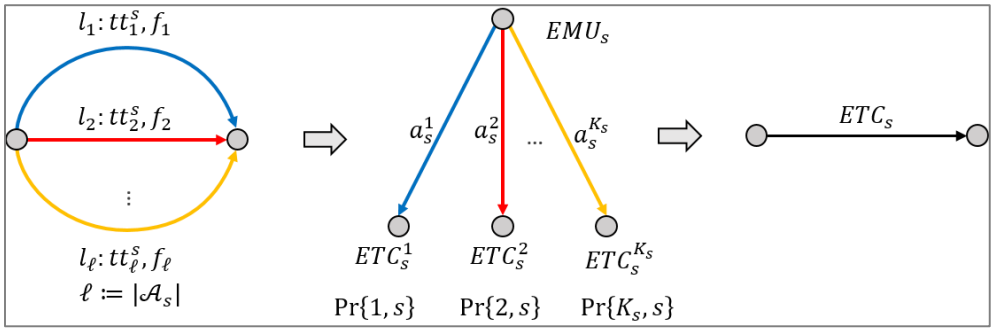


Figura 3-9. Líneas comunes – Asignación estocástica.

En la Figura 3-9 se muestra un esquema que resume las etapas de la asignación estocástica. La primera etapa consiste en identificar las secciones de línea que conectan el par s, luego se calculan las probabilidades de elección del conjunto a_s^k del modelo logit, y finalmente se transforma el valor esperado de desutilidad a un costo esperado de viaje ETC_s.

b) Elección de ruta

Sea una red dirigida $G(N, S)$ en que N es el conjunto de paraderos de un corredor de transporte público, y S un conjunto de secciones de ruta. Para cada sección de ruta $s \in S$ se conoce el costo esperado de viaje de cada arco ETC_s, y la demanda por viajes (T_w) sobre cada par $w \in W$. El problema de selección de rutas busca determinar qué etapas de viaje y trasbordos realizarán los usuarios para realizar sus viajes del par O/D w.

Por ejemplo, los usuarios de un par w podrían realizar su viaje en forma directa al utilizar los servicios atractivos de la sección de ruta que une el par w, o también podrían optar por una ruta alternativa que los fuerce a realizar uno o más trasbordos. Como se mencionaba al comienzo de esta sección, un modelo de elección de rutas puede ser de tipo determinístico o estocástico, al igual que en el caso del problema de elección de servicios atractivos.

El resultado de esta etapa corresponde a una asignación de viajes a rutas y por lo tanto a servicios para cada etapa de viaje en la red. La cantidad de viajes de cada ruta s se guarda en la variable H_s, mientras que los viajes a nivel de servicio l se almacenan en la variable H_s^l.

Para resolver el problema de selección de ruta lo separamos por par w, donde O_w y D_w representan respectivamente los nodos de origen y destino del par w. Luego, construimos una red auxiliar que contenga un arco para sección de ruta $s \in S'_w$, tal que $S'_w = \{s = (i,j) : O_w \leq i < j \leq D_w\}$, es decir, el grafo contiene todas las secciones de ruta s que podrían ser utilizados como etapa de viaje para el par w. A cada uno de estos arcos se le asigna un costo de ETC_s si la sección de ruta s se origina en O_w, y de $ETC_s + \theta_{Tr}$ si el par se origina en cualquier otro nodo. En esta última expresión, θ_{Tr} corresponde a un costo fijo que se incurre por cada trasbordo realizado, que puede deberse por ejemplo al tiempo de caminata entre andenes del paradero, exposición al clima o bien a un desagrado intrínseco por realizar el trasbordo. Sin embargo, no se debe confundir esta penalidad con el costo de esperar nuevamente otro servicio, ya que ese costo está considerado en la expresión ETC_s de cada sección de ruta.

Para ilustrar esta metodología, la Figura 3-10 presenta el grafo auxiliar del par $w = (1,4)$.

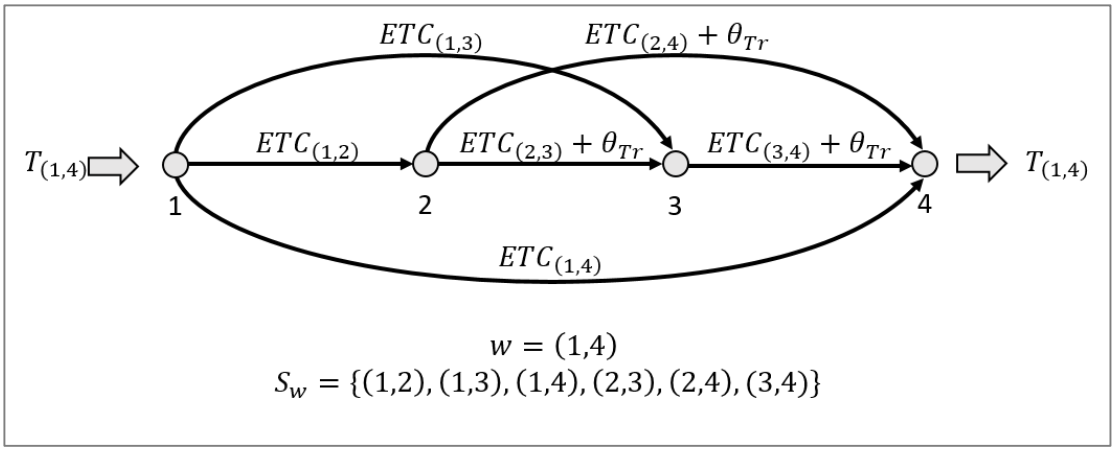


Figura 3-10. Ejemplo de red auxiliar para el par O/D par $w = (1, 4)$.

En la red se pueden observar los costos de cada sección de ruta, con los cuales se calculan los costos de cada ruta que conecta el paradero 1 con el 4.

i) Asignación determinística

La elección de rutas en la asignación determinística se encuentra simplemente mediante el problema de rutas mínimas para cada par origen destino. El problema de rutas mínimas ha sido muy bien estudiado en la literatura debido a su gran utilidad en diversas disciplinas como el transporte, logística, tecnologías de la información, entre otras. En particular para la elección de rutas utilizaremos el algoritmo propuesto por Dijkstra (1959) debido a su fácil implementación.

Dada la naturaleza de este problema, basta con resolver el problema solo para los grafos auxiliares cuyo nodo destino sea el nodo final de un sentido del corredor. Esta solución entrega un árbol de rutas mínimas en la que se encuentra la solución de rutas mínimas para todos los posibles nodos intermedios. Cabe notar que los grafos auxiliares son acíclicos, lo que hace posible implementar una versión especializada del algoritmo de rutas mínimas para sacar provecho de esta estructura.

El algoritmo de rutas mínimas entrega como resultado un vector de flujos H_s^w que contiene la información de los flujos de pasajeros en cada sección de ruta s del par w. Si la etapa de viaje s pertenece a la ruta mínima del par w entonces $H_s^w = T_w$, y en caso contrario

$H_s^w = 0$. Con esto, calculamos el flujo total H_s del en la sección de ruta s al sumar para cada par w según la ecuación:

$$H_s = \sum_{w \in W} H_s^w \tag{3.15}$$

Mientras que el flujo de pasajeros H_s^l asociado a cada línea l y la sección de ruta s se calcula simplemente como:

$$H_s^l = \Pr\{l, s\} \cdot H_s \tag{3.16}$$

ii) Asignación estocástica

La elección de rutas estocástica también se puede modelar mediante un modelo logit para cada par O/D. En este modelo, al igual que en la etapa de elección de líneas atractivas, se asume que cada ruta r del par w tiene una utilidad determinística V_w^r igual a la suma de las utilidades de las secciones de ruta que la componen. Luego, asumiendo que el elemento de error distribuye Gumbel con media 0, la probabilidad de los usuarios de escoger la ruta r para hacer del par w es:

$$\Pr\{r, w\} = \frac{\exp(-\beta \cdot V_w^r)}{\sum_{r'=1}^{R_w} \exp\left(-\beta \cdot V_w^{r'}\right)} \tag{3.17}$$

Donde β es el parámetro de escala del modelo logit y R_w es la cantidad total de rutas del par w. Para obtener el flujo de pasajeros en cada sección de ruta H_s^wse debe sumar la carga de cada ruta r del par w que incluye la sección de ruta s como etapa de viaje según la ecuación:

$$H_s^w = \sum_{r=1}^{R_w} T_w \Pr\{r, w\} \varphi_s^r \tag{3.18}$$

En donde φ_s^r toma el valor de 1 si la ruta r incluye la sección de ruta s y 0 en caso contrario. Luego, con las ecuaciones (3.15) y (3.16) se obtiene, para cada sección de ruta s, el flujo de pasajeros H_s y la carga de cada servicio H_s^l.

Si bien esta metodología en teoría es bastante sencilla, tiene la complicación de que requiere de una enumeración de rutas para cada par O/D. El problema de enumeración de rutas por lo general requiere un esfuerzo computacional importante que crece considerablemente si el número de paraderos del corredor aumenta. Por esta razón hemos decidido modelar la elección de rutas mediante el algoritmo de Dial (1971), que mediante unas simplificaciones en la red no requiere enumeración de rutas.

Este algoritmo entrega una asignación de pasajeros sin congestión que es equivalente a una asignación Logit, para ello requiere simplemente de los costos de cada sección de ruta ETC_s, y un parámetro de escala β. El resultado del algoritmo de Dial entrega la carga total de cada sección de ruta H_s^w, por lo que es perfectamente compatible con la metodología propuesta anteriormente.

Para conseguir lo anterior el algoritmo de Dial requiere eliminar todas las rutas que incluyan arcos definidos como no razonables. Un arco no razonable corresponde a un arco de sección de ruta que al utilizarlo acerca al usuario al origen o bien lo aleja del destino. Es decir, se asume que ningún usuario racional utilizaría una sección de ruta no razonable, por lo que no tiene sentido definir rutas que incluyan estos arcos. Sin embargo, y debido a que en nuestra red los arcos del corredor son unidireccionales, no se permite generar rutas que contengan ciclos, por lo que difícilmente se encontraran arcos no razonables.

3.3.2. Función objetivo FOP y FOAP

En esta sección nos referimos a la interacción entre los subproblemas PAP y FOP en la resolución del problema sin restricción de capacidad FOAP. Para ello determinaremos las variables de *input* y *output* que requiere cada subproblema junto con detallar los elementos de la función objetivo del problema FOAP y FOP tanto para el caso determinístico como el estocástico.

Como se ha mencionado anteriormente, el problema FOAP del enfoque bi-nivel consta de dos etapas que iteran hasta alcanzar convergencia, la etapa de asignación (PAP) y la de optimización de frecuencias (FOP). La convergencia se alcanza cuando el máximo cambio

porcentual de frecuencias entre iteraciones sucesivas es menor a un parámetro α de tolerancia.

En la etapa de asignación PAP, la oferta del sistema es fija, es decir, las frecuencias f_l de cada servicio son conocidas para los usuarios. Debido a que la etapa de asignación PAP supone que no hay interacción entre usuarios (asignación sin congestión ni capacidad), el resultado de la asignación representa una asignación espontánea de usuarios. Las variables de *output* de esta etapa corresponden a: (i) el vector de flujo en secciones de ruta H_s, (ii) la carga de cada servicio H_s^l, (iii) el conjunto de líneas atractivas, a_s^* en el caso determinístico y A_s para el estocástico, y (iv) el valor de la función de costo social, SC_{FOAP}, de cada iteración.

Por otro lado, el FOP requiere como *input* el vector de flujo para cada sección de ruta H_s y el conjunto de líneas atractivas a_s^* o A_s, dependiendo del tipo de asignación. En esta etapa se plantea un problema de optimización similar al del modelo simultáneo, pero con ciertas diferencias en la función objetivo de costos sociales, SC_{FOP}, que permiten simplificar el problema. Como salida del problema FOP se tiene el valor optimizado de las frecuencias de cada servicio, f_l^*.

A continuación precederemos a plantear las funciones de costo social, SC_{FOAP} y SC_{FOP}, junto con el conjunto de restricciones del problema de optimización. Además se incluirá una breve discusión sobre las diferencias entre la asignación determinística y estocástica en cuanto a optimalidad y convergencia del problema FOAP y su valor de costo social, SC_{FOAP}.

i) Función de costo social FOAP

La función de costos sociales del FOAP que se obtiene en cada iteración tras la etapa de asignación PAP se presenta a continuación:

$$SC_{FOAP} = \sum_{l \in \mathcal{L}} c_l f_l \; + \sum_{s \in S} H_s \, ETC_s + \; \theta_{Tr} \left(\sum_{s \in S} H_s - \sum_{w \in \mathcal{W}} T_w \right) \qquad (3.19)$$

El primer término de la expresión corresponde al costo de los operadores por unidad de frecuencia. El segundo y tercer término representan los costos de los usuarios con la suma de los costos esperados de viaje, ETC_s, de cada sección de ruta s, y el costo asociado al total de trasbordos del sistema.

Se debe notar que el término ETC_s puede provenir de una asignación determinística o de una estocástica en la fase de elección de líneas atractivas. En caso de que provenga de la asignación determinística el costo esperado de cada sección de ruta s se debe calcular en base a la ecuación (3.9), mientras que al ser estocástica proviene de la utilidad máxima esperada, por lo que se deben utilizar las ecuaciones (3.12) y (3.13). Esto hace que los valores SC_{FOAP} provenientes de distintos tipos de asignación no sean directamente comparables, ya que miden de distinta forma los costos ETC_s de cada sección de ruta s.

Lo anterior permite que se puedan combinar distintos tipos de asignación, haciendo por ejemplo, que la elección de líneas atractivas sea estocástica y la elección de rutas determinística. Aún más, el modelo bi-nivel permite que el modelador utilice cualquier modelo de asignación que desee siempre y cuando se le se proporcionen los *inputs* y *outputs* necesarios a las etapas del FOP y el PAP. Sin embargo, la desventaja de mezclar distintos tipos de asignación y optimización de frecuencias es que se puede estar sacrificando la convergencia del FOAP. Se debe cuidar de mantener alineadas las etapas del PAP, la función de costos sociales SC_{FOAP} y el FOP, de manera de preservar la consistencia del FOAP. Con esto último nos referimos a que, por ejemplo, se utilicen los mismos parámetros de costos de operación, tiempo de viaje, espera y trasbordo en todos los subproblemas a fin de no generar inconsistencias entre los costos percibidos por los usuarios y operadores y los medidos en la función de costos sociales.

ii) Función objetivo y restricciones FOP

En la etapa de optimización de frecuencias se plantea un problema de optimización que corresponde a una simplificación del problema sin capacidad FOAP. En el FOP se fija el resultado del PAP, es decir, las cargas de cada sección de ruta H_s y el conjunto de líneas atractivas de cada sección de ruta pasan a ser parámetros conocidos.

Esta simplificación permite resolver problemas con un elevado número de pares O/D con la ventaja de que el modelo no debe calcular cuales son las líneas atractivas de cada sección de ruta ya que estas son un *input* del modelo de asignación. Además, al tener fijo H_s en el FOP no es necesario modelar trasbordos, ya que estos son constantes durante toda la optimización.

Sin embargo, este aumento en la eficiencia viene acompañado de una desventaja. En teoría, el costo social de la solución del FOAP en el modelo bi-nivel siempre será mayor, o en el mejor de los casos igual, al del modelo simultáneo. Esto se debe a que este último puede explorar la totalidad del dominio de frecuencias sin tener fijos los conjunto de líneas atractivas o los flujos de pasajeros en las secciones de ruta.

En cuanto a la expresión general del problema de optimización de frecuencias (FOP), esta corresponde a:

$$\min_{f_l} SC_{FOP} = \sum_{l \in \mathcal{L}} c_l f_l \; + \sum_{s \in S} H_s ETC_s \tag{3.20}$$

Sujeto a las restricciones (3.4) y (3.5) de continuidad de frecuencias y cotas mínimas respectivamente. Notar que la restricción (3.2) no es necesaria debido a que el conjunto de líneas atractivas se mantiene fijo en la etapa FOP. De igual forma, la restricción (3.3), de conservación de flujo, es innecesaria al encontrarse fijos los flujos H_s de cada sección de ruta s.

La función objetivo SC_{FOP} consta de la minimización de los costos del operador y del usuario, siendo f_l la variable de decisión del problema. Debido a que los trasbordos son fijos en esta etapa el costo por trasbordo también es fijo, por lo que no es necesario incluirlo en la optimización.

La expresión (3.20) varía dependiendo del tipo de asignación de líneas atractivas que se utilice a fin de mantener alineados el PAP y el FOP. En el caso determinístico el costo esperado de viaje ETC_s del conjunto de líneas atractivas a_s^* es:

$$ETC_s = \theta_{TW} \frac{\kappa}{\sum_{l \in a_s^*} f_l} + \theta_{TT} \frac{\sum_{l \in a_s^*} f_l \, tt_l^s}{\sum_{l \in a_s^*} f_l} \tag{3.21}$$

Mientras que con el supuesto de asignación estocástica la expresión ETC_s calculada con el conjunto atractivo a_s^k de la alternativa k corresponde a:

$$ETC_s = -\frac{1}{\Psi\lambda} \ln\left(\sum_{k=1}^{K_s} \exp\left(-\lambda \cdot \left[\theta_{TW} \frac{\kappa}{\sum_{l \in a_s^k} f_l} + \theta_{TT} \frac{\sum_{l \in a_s^k} f_l \, tt_l^s}{\sum_{l \in a_s^k} f_l}\right]\right)\right) \tag{3.22}$$

Tanto la expresión (3.21) como la (3.22) del costo ETC_s hacen que la función objetivo SC_{FOP} sea no lineal en las frecuencias de los servicios, lo que impide asegurar que la solución encontrada corresponda a un óptimo global. Además la expresión estocástica (3.22) tiene una forma claramente más compleja que la determinística, debido a que contiene funciones exponenciales y logaritmos naturales, volviéndola aún más difícil de tratar para un *solver*.

En cada iteración del FOP se obtienen los valores optimizados de frecuencia f_l^* de cada servicio, los cuales sirven como *input* para el siguiente PAP. Todos los servicios que tras la optimización tengan frecuencia nula ($f_l^* = 0$) no serán ofertados en el siguiente PAP, sin embargo sí serán considerados al momento de determinar las líneas atractivas de cada sección de ruta. Esto permite que en siguientes iteraciones del FOP estos servicios sean considerados en la optimización, haciendo que puedan volver a tener frecuencia positiva.

iii) Optimalidad y convergencia

Al analizar la optimalidad del problema bi-nivel sin capacidad, FOAP, notamos que ninguno de los dos tipos de asignación asegura encontrar un óptimo global, ya que cada vez que se resuelve el FOP se está resolviendo una versión simplificada del problema simultáneo. Mientras el modelo simultáneo puede explorar la totalidad del dominio de

frecuencias, el problema FOP mantiene fijo el conjunto de líneas atractivas limitando la calidad de las soluciones.

Sin embargo, separar el problema FOAP mediante un enfoque bi-nivel también presenta grandes ventajas, ya que, como veremos en el capítulo 4, esto permite: (i) encontrar buenas soluciones para corredores de gran tamaño en cuanto a número de pares O/D, (ii) disminuir los tiempos de ejecución con respecto al modelo simultáneo, e (iii) incorporar distintos tipos de asignación.

En cuanto a la convergencia del FOAP, la asignación determinística la tiene asegurada. En cada secuencia de PAP-FOP los costos sociales de esta asignación siempre se reducen o se mantienen. Primero, cuando la asignación esta fija, optimizar las frecuencias solo puede mejorar la solución actual. Luego, al asignar a los usuarios con estas frecuencias se hace que cada uno minimice su costo individual de viaje, sin afectar los costos de operación, lo que necesariamente lleva a una solución mejor o igual que la anterior.

En contraste, para la asignación estocástica, de haber convergencia en el FOAP, no se puede asegurar que se converja al menor costo social. Si bien en ambos modelos los usuarios minimizan sus costos percibidos de viaje, en la asignación estocástica los costos sociales no necesariamente bajan o se mantienen entre iteraciones. Esto se debe a que existen usuarios que utilizarán rutas o servicios que, desde el punto de vista del costo social, son suboptimos y aumentan los costos del sistema.

Lo anterior implica que, de alcanzar convergencia en el FOAP de asignación estocástica, es necesario seleccionar la iteración de menor costo SC_{FOAP} para proceder a evaluar desde allí la factibilidad de capacidad de los buses. En cambio, con la asignación determinística basta con tomar la iteración final, que es la de convergencia, ya que esta siempre será la de menor costo social.

3.3.3. Heurística GRASP de capacidad para CFOAP

En el modelo bi-nivel se mantiene la misma estrategia que en el modelo simultáneo para lidiar con el problema de la capacidad en los buses. Esta estrategia consiste en que luego de encontrar una solución al problema FOAP, se evalúa si existe algún servicio que presente problemas de capacidad, en caso de haberlo se implementa la heurística de capacidad que modifica las cotas mínimas utilizadas en el problema de optimización FOP. Al igual que en el modelo simultáneo, en el enfoque bi-nivel utilizamos la heurística *greedy* de capacidad, descrita en la sección 3.2 para dar solución al problema CFOAP. Sin embargo, hemos identificado un posible problema con esta heurística: el modelo bi-nivel no asegura optimalidad global, por lo que al explorar únicamente el camino *greedy* se dejan de lado otras soluciones potencialmente mejores. Por lo que implementando un algoritmo que permita ampliar la búsqueda dentro del dominio de factibilidad existe la posibilidad de encontrar mejores soluciones.

Para hacernos cargo de este problema proponemos una heurística del tipo GRASP, en la que en cada iteración se escoge de forma aleatoria, de entre los servicios sobrecargados, una línea para aumentarle la cota mínima de frecuencia. De esta forma se logra explorar un mayor número de soluciones factibles de capacidad, lo que puede llevar a encontrar una que sea mejor a la obtenida con la heurística *greedy*. Dada la aleatoriedad de la heurística GRASP, esta puede encontrar soluciones distintas al resolver una misma instancia del CFOAP. Así, al aumenta el número de veces que se resuelve el CFOAP utilizando GRASP se aumenta también la probabilidad de encontrar mejores soluciones ya que se están explorando más regiones del dominio de soluciones.

Al igual que la heurística *greedy*, solo se consideran elegibles los servicios que tras la optimización presentan un nivel medio de pasajeros por bus mayor a su capacidad máxima. Se le asigna una probabilidad de elección a cada servicio en función de su nivel de déficit de capacidad D_l, definida en (3.7) como la diferencia entre el flujo promedio de pasajeros en los buses del arco más cargado y la capacidad máxima de cada bus. La heurística GRASP de capacidad se describe a continuación:

1. Inicializar cotas mínimas con $f_l^{LB} = 0, \forall l \in \mathcal{L}$.

2. Resolver el FOAP de las ecuaciones (3.1) - (3.5), es decir, incluyendo la restricción de cotas mínimas. Iterar entre FOP y PAP hasta alcanzar convergencia de frecuencias.
3. Usando la solución obtenida en el paso anterior, calcular la carga del arco crítico de cada servicio, P_l^{max}, usando la ecuación (3.6), donde ς_q^l es un parámetro que toma el valor 1 si el servicio l sirve el arco $q \in \mathcal{Q}$, y 0 en otro caso. Donde $\mathcal{Q}$ es el conjunto de arcos que unen paraderos consecutivos del corredor.
4. Calcular para cada servicio el déficit de capacidad D_l, usando la ecuación (3.7), donde k_l es la capacidad de los buses que operan en el servicio l.
5. Si $D_l = 0, \forall l \in \mathcal{L}$, es decir, el déficit es igual a cero para todos los servicios, entonces detener el algoritmo ya que se tiene una solución factible para CFOAP. La solución actual es factible dado que no hay servicios con sobrecarga. Si por el contrario, el déficit de capacidad es mayor a cero en algún servicio, entonces se debe escoger un servicio z aleatoriamente con una probabilidad proporcional a su nivel de sobrecarga según el peso ω_l de la ecuación (3.23):

$$\omega_l = \frac{D_l}{\sum_{i \in \mathcal{L}} D_i} \tag{3.23}$$

6. Incrementar la cota mínima de frecuencia del servicio z, haciendo $f_z^{LB} \leftarrow P_z^{max} / k_z$.
7. Volver al paso 2 para resolver nuevamente el FOAP con el vector actualizado de cotas mínimas de frecuencia.

La implementación de esta heurística consiste en resolver en primera instancia el problema con capacidad CFOAP mediante el algoritmo *greedy*, y luego, en una segunda iteración, hacerlo mediante GRASP. De esta manera se logra que la solución final del algoritmo siempre sea igual o mejor que con la heurística *greedy*, ya que la incluye. Además, mientras más iteraciones de GRASP se realicen, mayor será la probabilidad de encontrar una solución que supere a la encontrada con la heurística *greedy*.

Notar que tanto *greedy* como esta versión del algoritmo GRASP no incluyen una búsqueda local en torno a la solución del FOAP como sugieren Feo y Resende (1995) en su

implementación original del GRASP. Luego, una extensión o mejora futura al algoritmo de capacidad debiese considerar, por ejemplo, la opción tanto de subir como de bajar las cotas mínimas de frecuencias de cada servicio. Esto permitiría encontrar otras soluciones factibles de capacidad, las cuales tienen el potencial de tener un costo social más bajo.

Otra alternativa complementaria para considerar la restricción de capacidad de manera directa, pero que no es suficiente por sí sola para asegurar factibilidad de capacidad, es incluirla como restricción explicita en el problema de optimización FOP. La ecuación (3.24), impone que la carga máxima total de cada servicio sea menor o igual que su capacidad de pasajeros por hora, es decir, que en ningún tramo se supere la capacidad máxima generando lo que se conoce como un corte válido del problema.

$$\max_{q \in Q} \left\{ \sum_{s \in S} H_s^l \varsigma_q^l \right\} \leq k_l \, f_l \, ; \quad \forall l \in \mathcal{L} \tag{3.24}$$

A diferencia del modelo simultáneo, en el modelo bi-nivel es posible aplicar esta restricción y conservar una asignación que respete la asignación espontánea de usuarios. Esto se debe a que esta restricción solo modifica la oferta de frecuencias del corredor, con la cual luego los usuarios se asignaran libremente a la opción que les reporte el menor costo de viaje. Esto implica que a pesar de imponer la restricción de capacidad en el problema FOP es posible que se viole la capacidad máxima en el problema PAP. Luego, esta restricción ayuda a acercarse a la factibilidad del problema CFOAP sin afectar la asignación espontánea de usuarios.

A pesar de las ventajas teóricas de esta restricción, se decidió no incorporarla al problema FOP debido a que pruebas exploratorias revelaron que al combinar la restricción (3.24) con la heurística *greedy* los tiempos de ejecución crecían considerablemente. Además, en cuanto a costo social de las soluciones del problema CFOAP, este enfoque no mostró ser sistemáticamente superior a aplicar solo *greedy*.

4. EXPERIMENTOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este capítulo se detallan los experimentos y resultados obtenidos de nueve escenarios de modelación y siete algoritmos de solución los que tienen como objetivo poner a prueba las hipótesis planteadas sobre el modelo bi-nivel. Con estas hipótesis se afirma que el modelo bi-nivel: (i) logra disminuir fuertemente los tiempos de ejecución con respecto al modelo simultáneo; (ii) con asignación estocástica, a diferencia de la determinística, suaviza las soluciones del modelo evitando saltos discretos en la carga de los servicios, o en el flujo de las rutas al evaluar cambios marginales en los atributos de la red; (iii) la heurística GRASP de capacidad en los vehículos permite obtener resultados de menor costo social que la heurística *greedy*.

4.1. Descripción de escenarios

Los nueve escenarios de estudio se conforman de tres corredores BRT, cada uno con tres cantidades de paraderos. Los tres corredores modelados se basan en la estructura de demanda de los ejes: (i) Avenida Pajaritos, Santiago, Chile; (ii) Avenida Grecia, Santiago, Chile; y (iii) Avenida Caracas, Bogotá, Colombia. Para cada uno de estos se modelan escenarios con 20, 40 y 80 paraderos en total, es decir, 10, 20 y 40 paraderos por sentido del corredor respectivamente.

En la Figura 4-1, se presentan los perfiles de demanda para los tres corredores en los escenarios de 80 paraderos. La matriz de demanda de los corredores se basa en mediciones reales realizadas en horario punta mañana para la hora más cargada. El detalle completo de las demandas por cada par O/D de los nueve escenarios se encuentra disponible en el Anexo A.

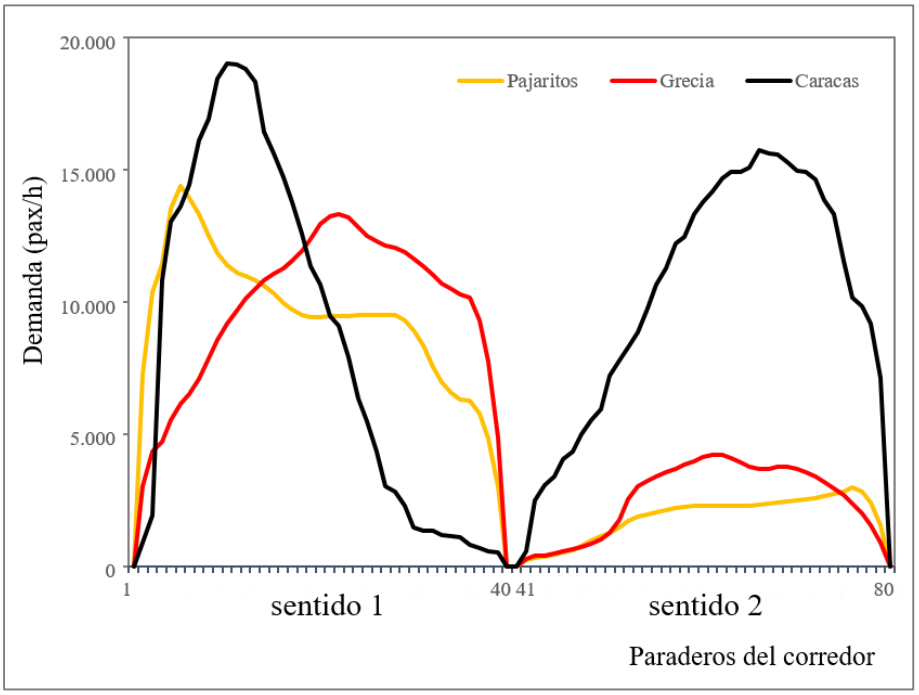


Figura 4-1. Perfil de demanda por corredor, escenarios de 80 paraderos.

En la Figura 4-1 el eje de las abscisas representa la secuencia ordenada (ida y regreso) de paraderos del corredor, mientras que el eje de las ordenadas muestra el perfil de carga de demanda medido en pasajeros por hora del horario punta mañana.

Para la modelación de cada escenario se asumió que el corredor posee la misma cantidad de paraderos en cada sentido. Los sentidos se separan en “ida” y “vuelta”, que de ahora en adelante llamaremos 1 y 2 respectivamente. Así, en la Figura 4-1, el sentido 1 corresponde a los paraderos entre el 1 y el 40, mientras que el sentido 2 del 41 al 80. Esto es válido también para los escenarios con 20 y 40 paraderos, donde el sentidos 1 va del paradero 1 al 10 y 1 al 20, mientras que el sentido 2 entre los paraderos 11 al 20 y 21 al 40 respectivamente.

En los tres corredores seleccionados el sentido 1 recibe mayor demanda que el sentido 2. Los ejes de Pajaritos y Caracas, en el sentido 1, tienen un perfil de demanda decreciente, mientras que en el corredor de Grecia la demanda se concentra en los paraderos intermedios en ambos sentidos.

En la Tabla 4-1 se presenta información detallada sobre las características físicas, y operacionales de los 9 escenarios modelados.

Tabla 4-1. Descripción de los escenarios.

Parámetros	**Pajaritos**			**Grecia**			**Caracas**		
Escenario	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Número de paraderos	20	40	80	20	40	80	20	40	80
Número de pares O-D	90	380	1.560	90	380	1.560	90	380	1.560
Largo del corredor por sentido (km)	8	8	8	10	10	10	30	30	30
Distancia media entre estaciones (m)	889	421	205	1.111	526	256	3.333	1.579	769
Velocidad operacional (km/hr)	22	22	22	25	25	25	26	26	26
Total de viajes (pax/hr)	20.546	20.527	20.529	37.728	37.719	37.810	43.562	43.564	43.551
Carga máxima (pax/hr)	14.119	14.163	14.372	13.392	13.223	13.335	19.179	19.082	19.004
Número de servicios a optimizar	11	27	56	26	31	31	17	22	41

Notar que el largo de cada corredor se mantiene fijo en sus tres escenarios, por lo que únicamente cambia la distancia media entre estaciones, la cual va disminuyendo a medida que aumenta el número de paraderos. En cuanto a los viajes totales y carga máxima, cabe señalar que para construir la matriz de demanda solo se consideraron los viajes que estaban enteramente contenidos en el corredor, es decir, únicamente los que tienen su origen y destino dentro del corredor. Esta consideración es necesaria ya que tanto el modelo bi-nivel como el simultáneo optimizan la operación de servicios que operan en un único corredor. De otra manera, si se permiten servicios que sirven a paraderos externos al corredor a optimizar, sería necesario conocer su carga de pasajeros al ingresar al corredor y contar con una medida de los efectos que tienen los cambios de sus frecuencias en los costos sociales de los corredores no modelados, lo que escapa de los alcances de la metodología propuesta en esta tesis. Así, esto explica que, por ejemplo, la carga máxima considerada para la avenida Caracas sea menor a los 48.000 pax/hr-sentido reportados por el centro BRT para el periodo punta mañana (BRT Data, 2017).

La complejidad de resolver el CFOAP no solo depende del tamaño del corredor, sino que también de la cantidad de servicios a optimizar, por lo que es importante contar con una

buena heurística de generación de servicios. El número de servicios a optimizar, junto con su estructura de paradas fue determinado utilizando la heurística de generación de servicios sin capacidad del LSGP de Larrain (2013). Para ello se generaron servicios *limited-stop* en cada sentido, tanto del tipo de cabezal a cabezal y servicios zonales, que solo omiten los paraderos del centro, como de los servicios *short-turning-limited-stop*. Además se incluyó el par de servicios *all-stop* en cada sentido del corredor, los que no omiten ningún paradero en su recorrido.

La heurística de Larrain (2013) comienza la generación de un conjunto inicial de servicios en base a criterios basados en el análisis de la matriz O/D, como por ejemplo, la creación de un *ranking* de los paraderos con mayor demanda (suma de generación y atracción de viajes) para crear servicios *limited-stop*. Con el conjunto de potenciales servicios y fijando para todos la misma frecuencia inicial, se resuelve una iteración de la secuencia PAP-FOP con el modelo determinístico bi-nivel. Con las frecuencias óptimas resultantes se realiza un proceso de selección en el que se conservaron únicamente los servicios con mayor frecuencia, los que finalmente fueron utilizados en los experimentos de los nueve escenarios. La estructura de paradas de cada servicio en los nueve escenarios se presenta en el Anexo B.

En la Tabla 4-2 se presentan los parámetros necesarios para utilizar el modelo simultáneo y bi-nivel en cada uno de los corredores.

Tabla 4-2. Parámetros para cada corredor

Parámetros	**Pajaritos**	**Grecia**	**Caracas**	**Unidad**
Valor del tiempo de viaje en vehículo, θ_{TT}	97,5	97,5	50,9	CLP/min
Valor del tiempo de espera, θ_{WT}	98,8	98,8	34,2	CLP/min
Costo de trasbordo, θ_{Tr}	396,3	396,3	97,2	CLP/tr
Utilidad marginal del dinero, Ψ	0,0008	0,0008	0,0002	Utilidad/CLP
Parámetro de escala – líneas atractivas, λ	2,2	2,2	17	-
Parámetro de escala - Dial, β	2,8	2,8	22	-
Regularidad de los servicios, κ	1	1	1	-
Tiempo de detención, τ	1	1	1	min
Costo de operación por distancia, c_L	500	500	500	CLP/bus-km
Costo de operación por tiempo, c_T	5.000	5.000	5.000	CLP/bus-hr
Capacidad del bus, k	80	72	120	pax/bus

Los parámetros $\theta_{TT}, \theta_{WT}, \theta_{Tr}$ y Ψ fueron obtenidos del estudio de preferencias declaradas (PD) y preferencias reveladas (PR) de Batarce et al. (2015). En este estudio se calibraron modelos Logit MNL para la elección de modos de transporte en las ciudades de Santiago y Bogotá. En este se plantea que los usuarios tienen una función de utilidad que considera la valoración del tiempo de viaje en función de la comodidad al interior del bus medida en unidades de pasajeros por metro cuadrado. Luego, fue necesario fijar los valores de densidad para poder recuperar el parámetro θ_{TT} de valoración del tiempo de viaje. Asumimos una densidad de 5-6 pax/m^2 y 5 pax/m^2 en los corredores de Santiago y Bogotá respectivamente, ya que estas densidades están dentro de los valores más altos del estudio, y son las que se pueden observar en el periodo de punta mañana modelado, el cual tiene altos niveles de alta demanda y congestión.

Como se menciona en la sección 3.3.1, los parámetros de escala λ y β de los modelos logit MNL son calibrados de manera tal que la varianza del parámetro de error ε de la utilidad de cada alternativa permita obtener resultados razonables, esto es, EMU_s y ETC_s no negativos según las Figuras 7 y 8. Para ello se utilizaron los siguientes criterios: (i) en una sección de ruta s con solo dos servicios, se busca el valor de λ que asegura que dada una diferencia de cinco minutos en tiempo de viaje el 70% de los pasajeros opte por el servicio más rápido y el 30% por el otro; (ii) para un par w con solo dos rutas, se busca el valor de β que asegura que dada una diferencia de 10 minutos en tiempo de viaje entre las rutas, el 90% de los pasajeros opte por la ruta más rápida y el 10% por otra ruta.

Si bien estos rangos son arbitrarios, estas condiciones permiten mantener la variabilidad de la utilidad en el modelo Logit en valores razonables en ausencia de una calibración específica para este modelo. Con esto se establece el rango de diferencias de tiempos de viaje que son perceptibles por los usuarios y que por lo tanto generan un cambio de comportamiento en su elección de ruta. Por ejemplo, una diferencia de 1 minuto entre dos rutas podría resultar casi imperceptible para el usuario, mientras que, ante una diferencia de 10 minutos, se espera que el usuario opte por la ruta más rápida con una probabilidad muy cercana a 1.

El parámetro de regularidad, κ, se definió igual a 1 para todos los servicios, lo que equivale a que la llegada de los buses de cada conjunto de servicios atractivos sigue un proceso Poisson, y que en promedio los usuarios deben esperar en el andén el equivalente a la totalidad de un intervalo promedio entre buses. El tiempo de detención, τ, se fijó en 1 minuto, mientras que la capacidad de los buses, k, considera un factor de seguridad del 80%. Esto implica que la capacidad máxima de los buses de cada servicio es de 100, 90 y 150 pasajeros/bus en los corredores de Pajaritos, Grecia y Caracas respectivamente. Este factor de seguridad permite reconocer que debido a la variabilidad de la distribución de los intervalos de pasada entre buses, la carga de los buses también tendrá variabilidad. Así, se garantiza un servicio estándar de confort en esos buses que circularán sobrecargados. Finamente, los parámetros de costos de operación por kilometro c_L y hora c_T se obtuvieron a partir de los valores reportados en informe de Fernández y De Cea (2003).

4.2. Algoritmos de solución

En la Tabla 4-3 se detallan las diferentes variantes del modelo simultáneo y bi-nivel que se usaron para resolver el CFOAP en cada uno de los nueve escenarios descritos en la sección 4.1. Las soluciones de estos algoritmos servirán para comparar el rendimiento de modelos y sus variantes, y así poner a prueba las tres hipótesis principales de la tesis.

Tabla 4-3. Algoritmos a comparar en cada experimento.

Algoritmo	Estrategia de Optimización	Asignación de Pasajeros	Heurística de Capacidad	Trasbordos
A0	Simultáneo	Determinística	*Greedy*	No
A1	Bi-nivel	Determinística	*Greedy*	No
A2	Bi-nivel	Determinística	GRASP	No
A3	Bi-nivel	Determinística	*Greedy*	Sí
A4	Bi-nivel	Determinística	GRASP	Sí
A5	Bi-nivel	Estocástica	*Greedy*	Sí
A6	Bi-nivel	Estocástica	GRASP	Sí

El primer algoritmo de la Tabla 4-3 es el que se usa como *benchmark* de comparación. En este algoritmo el problema se resuelve en forma simultánea y con asignación determinística tal como lo hacen Leiva et al. (2010) y Larrain (2013). Para este algoritmo no se modelaron trasbordos ya que, según resultados reportados en Larrain (2013), el *solver* en el cual se resuelve el modelo simultáneo, que permite a los usuarios realizar trasbordos, entrega soluciones claramente subóptimas para redes de 20 o más paraderos por sentido dada su alta complejidad. Además en este algoritmo se resuelve el problema CFOAP mediante la heurística de capacidad *greedy* reportada también por Larrain (2013).

Los algoritmos A1 a A6 utilizan una estrategia de optimización bi-nivel, tanto en su versión determinística como estocástica para el problema de asignación de pasajeros. En el subproblema FOAP, se establece la convergencia de frecuencias del modelo bi-nivel para un valor de $\alpha = 10^{-7}$, es decir, el modelo iterará entre el FOP y el PAP hasta que la mayor diferencia porcentual entre las frecuencias de iteraciones consecutivas no sea mayor a α. Los algoritmos A1 y A2, que no permiten trasbordos, se usan para tener un punto de comparación con la solución del problema A0 en cada escenario. Finalmente, para obtener una solución factible para el problema de capacidad en los buses (CFOAP), se usan alternadamente las heurísticas *greedy* o GRASP.

Los algoritmos bi-nivel de solución (A1-A6) fueron codificados en Visual Studio en lenguaje C#. Los subproblemas FOP dentro de estos algoritmos fueron resueltos en AMPL, al igual que el modelo asociado al algoritmo A0. Todos los algoritmos fueron implementados en un computador personal con procesador Inter Core i7-4510 CPU @ 2,00 GHz, 2,60 GHz y 8,00 G RAM.

4.3. Indicadores de rendimiento por algoritmo

En esta sección se detallan los indicadores de rendimiento que sirven para medir la calidad de las soluciones de los algoritmos de solución. Dentro de estos indicadores se encuentra la función de costos sociales (SC), junto con sus componentes de costos de operación (OC), costos de tiempo de espera (WTC), costos de tiempos de viaje (TTC) y costos de

trasbordo (TRC). En esta sección se introducen las fórmulas de los indicadores sin entrar en el detalle de su explicación o notación, ya que estas han sido previamente introducidas en el capítulo 3. Adicionalmente se define el concepto de costo social corregido (CSC) y costo fijo de tiempo de viaje ($FTTC$) utilizado en Larrain (2013) para comparar los costos sociales de las soluciones de los algoritmos.

4.3.1. Costos de operación

Los costos de operación (OC) totales del sistema se calculan según la ecuación (4.1) como:

$$OC = \sum_{l \in \mathcal{L}} c_l f_l \tag{4.1}$$

Este indicador es común para todos los algoritmos ya que no depende del tipo de asignación del modelo ni de si permite o no los trasbordos, sino que solo del parámetro c_l.

4.3.2. Costos esperados de tiempos de viaje

Los costos esperados de tiempo viaje dependen tanto del tipo de asignación como de si se permiten o no trasbordos. Si bien este costo para la asignación determinística es separable en los costos de tiempos de espera y viaje, en la versión estocástica solo se puede expresar como un solo término, razón por la cual se decidió evaluarlo en un único costo denominado ETC.

En la ecuación (4.2) se muestra el ETC de una asignación determinística sin trasbordos (algoritmos A0, A1 y A2):

$$ETC = \sum_{w \in \mathcal{W}} T_w \left(\theta_{WT} \frac{\kappa}{\sum_{l \in \mathcal{L}} f_l^w} + \theta_{TT} \frac{\sum_{l \in \mathcal{L}} tt_l^w f_l^w}{\sum_{l \in \mathcal{L}} f_l^w} \right) \tag{4.2}$$

En la ecuación (4.3) se muestra el ETC de una asignación determinística con trasbordos (algoritmos A3 y A4):

$$ETC = \sum_{w \in \mathcal{W}} \sum_{s \in S} H_s^w \left(\theta_{WT} \frac{\kappa}{\sum_{l \in \mathcal{L}} f_l^s} + \theta_{TT} \frac{\sum_{l \in \mathcal{L}} tt_l^s f_l^s}{\sum_{l \in \mathcal{L}} f_l^s} \right) \tag{4.3}$$

Finalmente, la ecuación (4.4) muestra el ETC de una asignación estocástica con trasbordos (algoritmos A5 y A6):

$$ETC = \sum_{w \in \mathcal{W}} \sum_{s \in S} H_s^w \frac{-1}{\Psi \lambda} \ln \left(\sum_{k=1}^{K_s} \exp \left(-\lambda \cdot \left[\theta_{TW} \frac{\kappa}{\sum_{l \in a_s^k} f_l} + \theta_{TT} \frac{\sum_{l \in a_s^k} f_l \, tt_l^s}{\sum_{l \in a_s^k} f_l} \right] \right) \right) \tag{4.4}$$

4.3.3. Costos de trasbordos

Los costos de trasbordos de los algoritmos A2, A3, A4, A5 y A6 se calculan con la ecuación (4.5) como:

$$TRC = \theta_{Tr} \left(\sum_{w \in \mathcal{W}} \sum_{s \in S} H_s^w - \sum_{w \in \mathcal{W}} T_w \right) \tag{4.5}$$

Estos costos son independientes del tipo de asignación y representan la penalidad total de trasbordos del sistema a causa de los usuarios que realizaron trasbordos para realizar su viaje

4.3.4. Costo social

La ecuación (4.6) muestra los costos sociales (SC) de los algoritmos sin trasbordos (A0, A1 y A2):

$$SC = OC + ETC \tag{4.6}$$

La ecuación (4.7) muestra los costos sociales (SC) de los algoritmos sin trasbordos (A3, A4, A5 y A6):

$$SC = OC + ETC + TRC \tag{4.7}$$

4.3.5. Costo social corregido

El costo social corregido (CSC) representan la parte de los costos sociales que realmente está sujeta a mejoras con la optimización de frecuencias. El CSC se obtiene de restarle a los costos sociales (SC) la parte fija de los costos de tiempos de viaje ($FTTC$) como se aprecia en la ecuación (4.8):

$$CSC = SC - FTTC \tag{4.8}$$

En donde $FTTC$ representa los costos de tiempo de viaje que son imposibles de reducir. Estos costos son fijos, es decir, no dependen de la optimización, ya que miden el tiempo mínimo que les toma a los usuarios en ir desde su paradero de origen. Así, en cada par O/D w los usuarios utilizan un único servicio *limited-stop* que los lleva directo a su paradero de destino con tiempo de viaje tt^w y tiempo de detención τ ($\tau/2$ en el paradero de origen y $\tau/2$ en el de destino). Este costo es propio de cada matriz de demanda T_w, por lo que está ligado al escenario y no al algoritmo de resolución. Se calcula con la ecuación (4.9):

$$FTTC = \theta_{TT} \sum_{w \in \mathcal{W}} T_w \left(tt^w + \tau\right) \tag{4.9}$$

En las siguientes secciones del capítulo 4 se muestran los resultados de varios experimentos, y en los que se usa el concepto de costo social corregido para hacer las comparaciones entre algoritmos en cada escenario.

4.4. Análisis de resultados de asignación determinística

En esta sección se analizan los resultados de la solución de los algoritmos determinísticos A0-A4 para los nueve escenarios, en los que se resuelve el CFOAP. A fin de determinar la calidad de las soluciones, se compararán los resultados con los de resolver el problema utilizando únicamente dos servicios *all-stop*, uno en cada sentido del corredor.

Los servicios *all-stop*, por definición, cubren todos los pares origen-destino, haciendo innecesario modelar trasbordos. La solución al problema de los servicios *all-stop* se puede obtener fácilmente utilizando la fórmula de la raíz propuesta por Mohring:

$$f^* = \sqrt{\frac{\kappa\, \theta_{WT} \sum_{w \in \mathcal{W}} T_w}{c_l}} \tag{4.10}$$

En donde f^* es la frecuencia óptima de los servicios *all-stop* en cada sentido. La ecuación (4.10) se obtiene al derivar e igualar a cero los costos sociales de (3.1), la cual corresponde a la condición de optimalidad de primer orden (Mohring, 1972). Esta fórmula, que resuelve el FOAP, es fácilmente adaptable a resolver el CFOAP, ya que, al haber solo un servicio por sentido del corredor, basta con verificar que la frecuencia f^* de la fórmula de la raíz sea mayor o igual que la carga en el arco más cargado dividida por la capacidad de los buses del servicio *all-stop*. Así, la frecuencia óptima con restricción de capacidad f^*_{cap} se calcula como:

$$f^*_{cap} = \max\left\{f^*, \frac{P_a^{max}}{k_a}\right\} \tag{4.11}$$

Donde P_a^{max} es la carga en el arco crítico y k_a es la capacidad del servicio *all-stop* a. De esta forma se asegura que los servicios *all-stop* sean capaces de transportar a todos los pasajeros del corredor.

En este experimento se busca responder las siguientes preguntas para la asignación determinística:

- ¿Cuál es el ahorro en costos sociales corregidos (CSC) del modelo simultáneo y bi-nivel, que incluyen servicios *limited-stop*, en comparación a las soluciones *all-stop*?
  -Algoritmos comparados: A0, A1, A2, A3 y A4 con solución *all-stop*.
  -Indicadores medidos: CSC
- Al comparar el modelo simultáneo con el bi-nivel, ¿Cuál entrega menor valor de costo social corregido?
  -Algoritmos comparados: A0 con A1 y A2.

-*Indicadores medidos*: CSC

- ¿Vale la pena utilizar la heurística de capacidad GRASP en vez de la *greedy*?
  -*Algoritmos comparados:* A1 con A2 y A3 con A4.
  -*Indicadores medidos:* CSC
- ¿Afecta la modelación de trasbordos a la calidad de las soluciones?
  -*Algoritmos comparados:* A2 con A4.
  -*Indicadores medidos:* CSC, número de trasbordos.

Los resultados del experimento determinístico se muestran en la Tabla 4-4, donde la cuarta y quinta columna corresponden respectivamente al indicador de costos fijos de tiempos de viaje ($FTTC$) y los costos sociales corregidos (CSC) de la solución *all-stop* para los nueve escenarios. Luego, para los algoritmos A0 a A4 se presenta el porcentaje de ahorro de CSC con respecto a la solución *all-stop*. Mientras mayor sea este porcentaje, mayor será el ahorro en los costos sociales.

Tabla 4-4. Resultados para algoritmos de asignación determinística.

			$FTTC$ (CLP/hr)	CSC All-stop (CLP/hr)	Ahorros en CSC %				
Escenarios	**Corredor**	**Paraderos**			**A0**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**
1	**Pajaritos**	**20**	26.843.851	11.252.070	48,5%	48,5%	48,5%	48,5%	48,5%
2	**Pajaritos**	**40**	26.348.088	22.508.534	56,2%	56,5%	56,5%	56,5%	56,5%
3	**Pajaritos**	**80**	26.349.311	45.454.418	63,7%	63,8%	63,8%	63,8%	63,8%
4	**Grecia**	**20**	34.639.317	12.016.858	22,2%	22,2%	22,2%	22,2%	22,2%
5	**Grecia**	**40**	33.537.341	24.331.650	31,3%	31,2%	31,2%	31,3%	31,3%
6	**Grecia**	**80**	32.988.028	49.125.834	35,7%	35,6%	35,6%	38,0%	38,0%
7	**Caracas**	**20**	75.323.630	14.724.206	13,2%	17,8%	17,8%	14,7%	18,3%
8	**Caracas**	**40**	70.883.220	24.298.867	30,2%	31,3%	31,6%	34,4%	34,5%
9	**Caracas**	**80**	69.421.073	115.042.006	79,4%	79,3%	79,6%	81,4%	81,4%

Vemos que en la Tabla 4-4 todos los algoritmos generan un ahorro porcentual con respecto a la solución *all-stop*. Esto era de esperar ya que los algoritmos A0 a A4 incluyen tanto

servicios *all-stop* como *limited-stop*, por lo que la solución de utilizar únicamente servicios *all-stop* está dentro del dominio de soluciones de todos los escenarios.

Además, notamos que este ahorro aumenta significativamente con el número de paraderos de cada corredor. Esto se debe a que los servicios *limited-stop* generan mayores ahorros de tiempo de viaje a medida que omiten una mayor cantidad de paraderos (Larrain, 2013). Luego, en corredores con alta densidad de paraderos, como los escenarios 3, 6 y 9, este ahorro en los costos de tiempo de viaje genera una disminución importante en los costos sociales de los usuarios de servicios *limited-stop*, superando incluso el 79% de ahorros en el escenario 9 en todos los algoritmos.

Las comparaciones entre los algoritmos A0 al A4 se harán comparando directamente los valores de CSC de cada solución de los nueve escenarios, es decir, de aquí en adelante ya no se harán más comparaciones con los valores de la soluciones *all-stop*. A continuación, en la Tabla 4-5, se muestran las diferencias en costo social corregido de las soluciones de los algoritmos sin trasbordos A0, del modelo simultáneo, y A1, del modelo bi-nivel.

Tabla 4-5. Algoritmo simultáneo (A0) versus bi-nivel (A1).

			Costo social corregido (CLP/hr)		**A0 vs A1**
Escenario	**Corredor**	**Paraderos**	**A0**	**A1**	**% CSC**
1	**Pajaritos**	**20**	5.798.416	5.797.844	-
2	**Pajaritos**	**40**	9.862.677	9.795.336	0,7%
3	**Pajaritos**	**80**	16.481.709	16.470.443	0,1%
4	**Grecia**	**20**	9.347.492	9.349.597	-
5	**Grecia**	**40**	16.704.794	16.730.852	-0,2%
6	**Grecia**	**80**	31.594.248	31.619.899	-0,1%
7	**Caracas**	**20**	12.774.259	12.101.905	5,3%
8	**Caracas**	**40**	16.965.615	16.682.331	1,7%
9	**Caracas**	**80**	23.733.639	23.760.308	-0,1%

Al analizar la Tabla 4-5 notamos que los costos sociales corregidos son muy similares en la mayoría de los escenarios. En teoría, el algoritmo A0 debe ser siempre superior a A1 en el FOAP debido a que resuelve conjuntamente la etapa de asignación y optimización.

Sin embargo, esto deja de ser cierto para la solución del CFOAP debido a que tanto la heurística de capacidad *greedy* como GRASP no aseguran optimalidad, mas sí factibilidad de capacidad. Esto se aprecia en los resultados de los escenarios 2, 3, 7 y 8 en donde el algoritmo A1 obtiene costos sociales corregidos menores que A0, llegando a una diferencia porcentual no despreciable de un 5,3% en el escenario 7.

Para comparar las heurísticas de capacidad, *greedy* y GRASP en la Tabla 4-6 se presentan los costos sociales corregidos (CSC) y los ahorros porcentuales (% CSC) para los algoritmos A1 vs A2 y A3 vs A4.

Tabla 4-6. Algoritmos *greedy* (A1 y A3) versus GRASP (A2 y A4).

			Costos sociales corregidos CSC (CLP/hr)				**A1 vs A2**	**A3 vs A4**
Escenarios	**Corredor**	**Paraderos**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**% CSC**	**% CSC**
1	**Pajaritos**	**20**	5.797.844	5.797.827	5.797.844	5.797.827	-	-
2	**Pajaritos**	**40**	9.795.336	9.795.331	9.793.927	9.793.921	-	-
3	**Pajaritos**	**80**	16.470.443	16.470.265	16.445.248	16.445.248	-	-
4	**Grecia**	**20**	9.349.597	9.349.597	9.349.597	9.349.597	-	-
5	**Grecia**	**40**	16.730.852	16.730.852	16.725.193	16.725.193	-	-
6	**Grecia**	**80**	31.619.899	31.619.898	30.435.694	30.435.694	-	-
7	**Caracas**	**20**	12.101.905	12.101.713	12.564.687	12.034.546	-	4,2%
8	**Caracas**	**40**	16.682.331	16.612.621	15.929.625	15.926.488	0,4%	-
9	**Caracas**	**80**	23.760.308	23.496.931	21.405.337	21.350.932	1,1%	0,3%

Recordemos que la heurística de capacidad GRASP incluye como primera iteración el algoritmo *greedy*, por lo que al menos asegura la obtención de una solución de igual costo. Sin embargo, analizando los resultados de los algoritmos sin trasbordo, A1 con A2, vemos que presentan diferencias de tan solo 0,4% y 1,1% en los escenarios 8 y 9, mientras que

entre A3 y A4 se alcanza un 4,2% y 0,3% en los escenario 7 y 9 respectivamente. Estos resultados permiten concluir que, para la asignación determinística, el algoritmo GRASP no genera mejoras significativas al algoritmo *greedy* en la mayoría de los escenarios en cuanto a disminución de costos sociales corregidos. Sin embargo, GRASP logra un 4,2% de ahorro entre A4 y A2 en el escenario 7, lo que sugiere que con algunas mejoras, como por ejemplo la implementación de búsqueda local en torno a la solución del FOAP, esta podría generar mejoras importantes. Por ende, y en base a la metodología actual de GRASP, solo se recomienda su uso si el modelador cuenta con el tiempo necesario para resolver varias veces el CFOAP en búsqueda de alguna mejora a la solución *greedy*.

Finalmente, compararemos las soluciones de la heurística GRASP de los algoritmos con y sin trasbordos (A4 y A2) determinísticos en base los resultados expuestos en la Tabla 4-7.

Tabla 4-7. Comparación entre algoritmos determinísticos con (A2) y sin trasbordos (A4).

			Costos sociales corregidos (CLP/hr)		**A2 vs A4**	**Número de trasbordos**
Escenario	**Corredor**	**Paraderos**	**A2**	**A4**	**% CSC**	**A4**
1	**Pajaritos**	**20**	5.797.827	5.797.827	-	-
2	**Pajaritos**	**40**	9.795.331	9.793.921	-	12
3	**Pajaritos**	**80**	16.470.265	16.445.248	0,2%	511
4	**Grecia**	**20**	9.349.597	9.349.597	-	-
5	**Grecia**	**40**	16.730.852	16.725.193	-	187
6	**Grecia**	**80**	31.619.898	30.435.694	3,7%	3.041
7	**Caracas**	**20**	12.101.713	12.034.546	0,6%	2.085
8	**Caracas**	**40**	16.612.621	15.926.488	4,1%	6.786
9	**Caracas**	**80**	23.496.931	21.350.932	9,1%	15.950

Vemos que en los escenarios 3 y 7, A4 logra pequeños ahorros porcentuales de 0,2%, 0,6% con respecto a A2, mientras que en los escenarios 6, 8 y 9 se alcanzan mejoras de un 3,7%, 4,1% y 9,1% respectivamente. Sin embargo, al observar el número de trasbordos del algoritmo A4, vemos que los usuarios realizan relativamente pocos trasbordos. Esto

plantea la pregunta de si tal vez la penalidad por trasbordo (θ_{Tr}) fue percibida como muy alta por los usuarios, forzándolos a desistir de utilizar rutas distintas a las directas entre sus paraderos de origen y destino. Luego, en la Tabla 4-8 se hace una comparación entre el algoritmos A2 y el A4, pero sin penalidad por trasbordo, es decir, con $\theta_{Tr} = 0$.

Tabla 4-8. Comparación de algoritmos determinísticos con y sin trasbordos con $\theta_{Tr} = 0$.

			Costos sociales corregidos (CLP/hr)		A2 vs A4	Número de trasbordos
Escenario	**Corredor**	**Paraderos**	**A2**	**A4 ($\theta_{Tr} = 0$)**	**% CSC**	**A4 ($\theta_{Tr} = 0$)**
1	**Pajaritos**	**20**	5.797.827	5.776.805	0,4%	430
2	**Pajaritos**	**40**	9.795.331	9.621.325	1,8%	1.169
3	**Pajaritos**	**80**	16.470.265	15.668.614	4,9%	10.655
4	**Grecia**	**20**	9.349.597	9.176.712	1,8%	2.100
5	**Grecia**	**40**	16.730.852	15.622.900	6,6%	7.445
6	**Grecia**	**80**	31.619.898	26.983.605	14,7%	16.331
7	**Caracas**	**20**	12.101.713	11.347.211	6,2%	11.718
8	**Caracas**	**40**	16.612.621	14.705.152	11,5%	19.731
9	**Caracas**	**80**	23.496.931	19.593.362	16,6%	31.278

Los resultados son bastante positivos e intuitivos. Al eliminar la penalidad por trasbordar, el número de trasbordos de cada escenario aumenta fuertemente y los costos sociales corregidos de A4 bajan. Esto produce que se registren aumentos en el número de trasbordos que superan los 15.000 trasbordos adicionales, y se alcancen ahorros de hasta un 16,6% en el escenario 9. Este análisis de sensibilidad del parámetro θ_{Tr} permite obtener una cota máxima de los beneficios de los trasbordos, con la cual se confirma que la omisión de la modelación de trasbordos puede resultar en una subestimación importante de los beneficios de utilizar servicios *limited-stop* optimizados.

4.5. Análisis de resultados de asignación estocástica

La Tabla 4-9 muestra los resultados de los algoritmos de asignación estocástica A5 y A6 en sus versiones *greedy* y GRASP para los nueve escenarios de modelación. En cada uno de estos se dan a conocer los valores de costo social corregidos y ahorro porcentual de

utilizar el algoritmo A6 en vez del A5. Recordemos que estos resultados no son directamente comparables con los de la Tabla 4-6, ya que en ella se miden costos sociales provenientes de un modelo de asignación determinístico, en el cual los usuarios siguen una lógica de comportamiento distinta a la del modelo estocástico.

Tabla 4-9. Resultados para algoritmos de asignación estocástica.

			Costos sociales corregidos (CLP/hr)		**A5 vs A6**
Escenario	**Corredor**	**Paraderos**	**A5**	**A6**	**% CSC**
1	**Pajaritos**	**20**	3.869.098	3.867.804	-
2	**Pajaritos**	**40**	11.518.511	11.518.511	-
3	**Pajaritos**	**80**	23.525.765		
4	**Grecia**	**20**	6.166.205	6.005.698	2,6%
5	**Grecia**	**40**	17.623.475	17.623.475	-
6	**Grecia**	**80**	37.902.212		
7	**Caracas**	**20**	17.882.499	16.373.612	8,4%
8	**Caracas**	**40**	23.918.760	23.663.428	1,1%
9	**Caracas**	**80**	33.305.854		

Aclaramos que no fue posible utilizar el algoritmo GRASP (A6) para los escenarios 3, 6 y 9, de 80 paraderos, debido a los grandes tiempos de ejecución necesarios para resolver el CFOAP del algoritmo A5. Esto se debe principalmente a la etapa de elección de rutas de PAP, en la cual se utiliza el algoritmo de Dial que requiere de bastante tiempo de ejecución para encontrar la asignación a rutas en corredores de gran tamaño. En el análisis de los tiempos de ejecución de la sección 4.7 se entrará más en detalle sobre este y otros temas relacionados.

Al analizar la Tabla 4-9 notamos que el ahorro porcentual del costo social corregido en los escenarios 1, 2 y 5 es nulo. El hecho que los algoritmos *greedy* y GRASP entreguen los mismos resultados indica que la mejor solución del algoritmo de capacidad GRASP coincide con la encontrada por el algoritmo *greedy*. Esto por lo general sucede cuando son pocos los servicios saturados al final de cada etapa FOAP, lo que limita las posibilidades de exploración del algoritmo GRASP.

En contraste, en los escenarios 4, 7 y 8 el ahorro porcentual es de 2,6%, 8,4% y 1,1% respectivamente. En estos casos que muestran un ahorro, se desprende que existe un camino de aumento de cotas mínimas, distinto al de elegir siempre el servicio con mayor sobrecarga, que entrega una solución factible de menor costo que el algoritmo *greedy*. Luego, el escenario 7 muestra que el algoritmo de capacidad GRASP sí puede llegar a ser de gran utilidad cuando se tiene una asignación estocástica. Llama la atención que este escenario sea el de mayor ahorro de GRASP tanto en el algoritmo determinístico A4 como en el estocástico A6. Lo más probable es que este escenario presente altos niveles de sobresaturación en varios servicios tras cada iteración de FOAP, lo que permite crear nuevos caminos para explorar en la heurística GRASP. Luego, para la asignación estocástica, se recomienda utilizar la heurística de capacidad GRASP, siempre y cuando los tiempos de ejecución *greedy* no sean excesivamente altos.

4.6. Indicadores de rendimiento para algoritmos A4 y A6

En la Tabla 4-10 y Tabla 4-11 se muestra para cada escenario el número de trasbordos (N_TR) totales, y la composición de los costos sociales (SC) a nivel de detalle de los costos de operación (OC), costos esperados de viaje (ETC), y costos de trasbordo (TRC). Además se expone el peso porcentual que tiene cada componente en los costos sociales para la solución encontrada en cada escenario.

Tabla 4-10. Indicadores de rendimiento de algoritmo A4, determinístico.

				Costos (CLP/hr)			% del SC		
Escenario	**Corredor**	**Paraderos**	**N_TR**	**OC**	**ETC**	**TRC**	**OC**	**ETC**	**TRC**
1	**Pajaritos**	**20**	0	2.307.622	30.334.056	-	7,1%	92,9%	-
2	**Pajaritos**	**40**	12	2.803.505	33.333.748	4.755	7,8%	92,2%	0,0%
3	**Pajaritos**	**80**	511	3.626.315	38.965.735	202.509	8,5%	91,1%	0,5%
4	**Grecia**	**20**	0	3.259.855	40.729.059	-	7,4%	92,6%	-
5	**Grecia**	**40**	187	4.238.587	45.949.839	74.108	8,4%	91,4%	0,1%
6	**Grecia**	**80**	3.041	5.187.833	57.030.742	1.205.148	8,2%	89,9%	1,9%
7	**Caracas**	**20**	2.085	6.796.743	80.358.771	202.662	7,8%	92,0%	0,2%
8	**Caracas**	**40**	6.786	6.446.471	79.703.638	659.599	7,4%	91,8%	0,8%
9	**Caracas**	**80**	15.950	6.661.235	82.560.430	1.550.340	7,3%	91,0%	1,7%

Tabla 4-11. Indicadores de rendimiento de algoritmo A6, estocástico.

				Costos (CLP/hr)			% de los costos sociales		
Escenario	**Corredor**	**Paraderos**	**N_TR**	**OC**	**ETC**	**TRC**	**OC**	**ETC**	**TRC**
1	**Pajaritos**	**20**	6.137	2.382.223	25.897.183	2.432.249	7,8%	84,3%	7,9%
2	**Pajaritos**	**40**	17.909	3.052.427	27.716.835	7.097.337	8,1%	73,2%	18,7%
3	**Pajaritos**	**80**	25.538	4.733.331	35.020.892	10.120.853	9,5%	70,2%	20,3%
4	**Grecia**	**20**	8.781	3.021.542	34.143.597	3.479.877	7,4%	84,0%	8,6%
5	**Grecia**	**40**	25.561	4.231.137	35.716.803	10.129.857	8,4%	71,3%	20,2%
6	**Grecia**	**80**	47.850	5.511.046	46.416.341	18.962.853	7,8%	65,5%	26,7%
7	**Caracas**	**20**	49.207	6.881.558	80.033.015	4.782.964	7,5%	87,3%	5,2%
8	**Caracas**	**40**	116.255	6.984.165	76.262.485	11.299.999	7,4%	80,7%	12,0%
9	**Caracas**	**80**	187.266	8.413.881	76.110.102	18.202.247	8,2%	74,1%	17,7%

Comparando ambas tablas se puede notar que la asignación estocástica entrega soluciones con muchos más trasbordos que la determinística. Este resultado es intuitivo ya que es esperable que ante niveles de incertidumbre mayores que en el caso determinístico, la predicción de comportamiento de los usuarios en la asignación estocástica indique que estos utilizarán varias alternativas de rutas y conjuntos de servicios atractivos en las etapas de viaje para llegar a su destino, lo que se traduce en más trasbordos. Así, el costo de los trasbordos en el algoritmo estocástico A6 es más alto que el determinístico en todos los escenarios, sobrepasando en algunos el 20% de los costos sociales. Con respecto a los costos esperados de viaje (ETC) estos representan la principal componente del costo social, ya que en A4 bordea el 90%, y en A6 el 70%. Finalmente, vemos que los costos de operación son bastante parecidos en ambos algoritmos, y tienden a representar cerca del 7-8% de los costos sociales.

4.7. Tiempos de ejecución

Tal como se mencionó en el capítulo del modelo simultáneo, uno de los objetivos que se tenían con el modelo bi-nivel es que fuera capaz de resolver problemas de gran tamaño idealmente sin sacrificar la calidad de las soluciones. En la sección 4.4 pudimos comprobar que la calidad de las soluciones del algoritmo bi-nivel (A1) es similar o incluso, en algunos casos, superior a las de A0, por lo que ese objetivo ya ha sido cumplido. En

esta sección analizaremos los resultados de los tiempos de ejecución de los algoritmos A0 a A6 expuestos en la Tabla 4-12 a fin de analizar el cumplimiento del segundo objetivo.

Tabla 4-12. Tiempos de ejecución de los algoritmos.

			Tiempo de ejecución del algoritmo (seg)						
Escenarios	**Corredor**	**Paraderos**	**A0**	**A1**	**A2***	**A3**	**A4***	**A5**	**A6**
1	**Pajaritos**	**20**	1	3	59	4	88	9	189*
2	**Pajaritos**	**40**	32	11	232	11	378	161	973**
3	**Pajaritos**	**80**	984	48	1.318	8	197	1.912	-
4	**Grecia**	**20**	3	28	222	9	267	127	1.005*
5	**Grecia**	**40**	31	4	86	3	79	40	349**
6	**Grecia**	**80**	169	28	411	9	235	9.289	-
7	**Caracas**	**20**	17	10	128	3	135	10	135*
8	**Caracas**	**40**	219	59	2.127	22	191	298	1.573**
9	**Caracas**	**80**	1.382	149	4.427	176	3.292	17.241	-

*Resultados obtenidos después de 10 iteraciones de GRASP.

** Resultados obtenidos después de 5 iteraciones de GRASP.

Los resultados de la Tabla 4-12 permiten comparar los segundos de tiempo de ejecución que le toma a cada algoritmo encontrar una solución factible al CFOAP al ser probados en distintos escenarios. Vemos que existe una tendencia de que a mayor número de paraderos, mayor es el tiempo de ejecución. Esto se cumple para todos los escenarios menos el 5, ya que en este caso ocurrió algo particular. En este escenario se cumplió que, para todos los algoritmos, las soluciones del primer problema FOAP no presentaban problemas de capacidad, lo que permitía fijar dicha solución como factible, dando fin al algoritmo. Por lo tanto, se puede afirmar que los tiempos de ejecución dependen tanto del tamaño del corredor, como de la cantidad de servicios y nivel de saturación de cada uno tras resolver el problema FOAP.

Vemos que el algoritmo simultáneo (A0) es más rápido que el bi-nivel (A1) para escenarios de 20 paraderos. Esto puede deberse al tiempo que requiere la convergencia del problema FOAP del algoritmo bi-nivel, el cual en estos escenarios de menor complejidad, es mayor al de resolver un único problema de optimización simultánea. Los beneficios de utilizar el algoritmo bi-nivel se hacen notar en escenarios de mayor tamaño, como los de 40 y 80 paraderos, en donde el modelo simultáneo tiene dificultades para

manejar tantos servicios y pares O/D. Esto se ve reflejado en los escenarios grandes, en los que el algoritmo A1 logra reducir en torno al 80% el tiempo de ejecución promedio del algoritmo simultáneo A0, con lo que se logra cumplir el segundo objetivo del modelo bi-nivel determinístico.

Otro punto interesante de resaltar es que la versión con trasbordos determinística (A3 y A4) es más rápida o similar que la sin trasbordos (A1 y A2). Este es un resultado es llamativo, ya que si bien modelar trasbordos mediante la etapa de elección de ruta mínima significa un aumento en los tiempos de ejecución del problema PAP, a la larga trae ahorros al algoritmo general del problema CFOAP. Esto puede deberse a que al permitir trasbordos, se puede estar dando un mayor uso a servicios que en la solución sin trasbordo llevan pocos pasajeros. De esta forma se distribuye la demanda de cada par O/D entre más servicios, haciendo que la heurística de capacidad tarde menos tiempo en alcanzar la factibilidad al tener menores niveles de sobrecarga en cada servicio.

Finalmente, al analizar los tiempos de los algoritmos estocásticos (A5 y A6), vemos que los tiempos de ejecución crecen fuertemente para todos los escenarios con respecto a los algoritmos determinísticos (A3 y A4). Esta diferencia es especialmente notoria en los escenarios de 80 paraderos, donde incluso demora más de 4,5 horas en el escenario 9. Por lo mismo, en estos escenarios solo fue posible resolver la versión *greedy* del algoritmo (A5) debido a los altos tiempos de ejecución. Tras revisar la codificación del programa y hacer mediciones de cada fase del algoritmo estocástico, determinamos que la etapa que toma mayor cantidad de tiempo en resolverse en cada iteración es la de elección de ruta mediante Dial. Esta etapa es especialmente costosa en términos computacionales ya que requiere calcular las probabilidades de cada ruta razonable para cada par O/D de la red. Por lo tanto, para futuras versiones del modelo se recomienda estudiar mejoras en el algoritmo de Dial que permitan acelerar los tiempos totales de ejecución.

4.8. Comparación de soluciones determinísticas y estocásticas

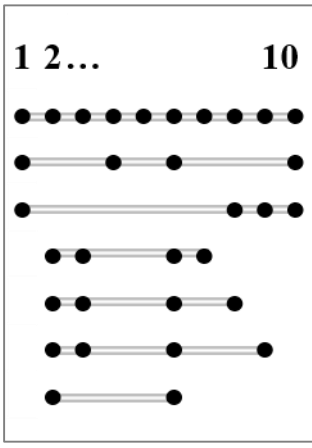
La asignación estocástica distribuye los viajes entre distintas rutas para cada par O/D. Esto debiera generar una mayor distribución de los viajes entre las líneas del corredor que la asignación determinística. Para comprobar esta hipótesis, en esta sección se analizan los perfiles de carga de distintos servicios para las soluciones de los algoritmos determinísticos y estocásticos A4 y A6. Adicionalmente se busca identificar el posible error de la asignación si se asume erróneamente una asignación determinística. Para esto se analizará la sobrecarga generada en las líneas si el diseño responde a un supuesto de asignación determinística, pero los usuarios se asignan estocásticamente. Es decir, se busca responder la siguiente pregunta: ¿Qué pasaría con los perfiles de carga si se resuelve el CFOAP asumiendo que los usuarios se comportan según el algoritmo determinístico A4, pero en realidad estos toman decisiones en base al comportamiento estocástico de la etapa PAP utilizada en A5 y A6?

Para modelar esta situación es necesario tomar la solución del problema CFOAP con asignación determinística y trasbordos (A4) y ponerla a prueba en una asignación estocástica con trasbordos. Para ello utilizamos las frecuencias óptimas del algoritmo A4 y obtendremos una asignación de pasajeros estocástica al resolver el PAP, de la cual se obtienen los perfiles de carga de los servicios.

En las tres subsecciones que se presentan a continuación se muestran los resultados de las frecuencias óptimas y perfiles de carga de los escenarios 7, 8 y 9 del corredor de Avenida Caracas. Se utilizó únicamente este corredor debido a que es el que posee la mayor demanda, y por ende los mayores problemas de saturación en los servicios.

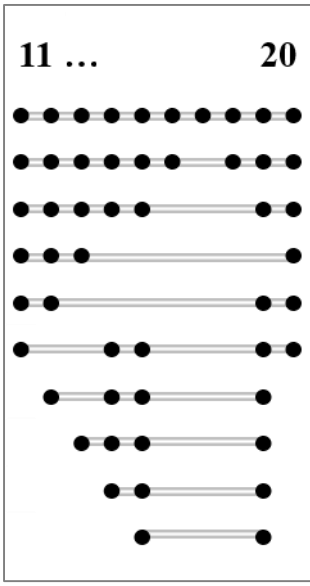
4.8.1. Corredor 20 paraderos Avenida Caracas

En la Figura 4-2 y Figura 4-3 se muestra la estructura de paradas de los 17 servicios del corredor en ambos sentidos. Adicionalmente se dan a conocer las frecuencias óptimas resultantes de los algoritmos GRASP con asignación determinística (A4) y estocástica (A6) que permiten trasbordar.



Servicio	Frecuencia (buses/hr)	
	A4	A6
L1	85,1	134,5
L2	65,0	25,8
L3	9,7	-
L4	-	-
L5	-	-
L6	-	-
L7	-	-

Figura 4-2. Servicios generados y frecuencias óptimas para algoritmos A4 y A6, en sentido 1 de escenario 7.



Servicio	Frecuencia (buses/hr)	
	A4	A6
L8	34,9	93,3
L9	18,9	67,1
L10	36,5	-
L11	29,4	-
L12	21,1	-
L13	19,0	-
L14	-	-
L15	-	-
L16	-	-
L17	-	-

Figura 4-3. Servicios generados y frecuencias óptimas para algoritmos A4 y A6, en sentido 2 de escenario 7.

Revisando los resultados de ambas figuras podemos comprobar que se respeta restricción de conservación de frecuencias. Si sumamos las frecuencias del sentido 1 del algoritmo A4 obtenemos un total de 159,8 buses/hr, misma suma que en el sentido 2. Lo mismo

ocurre con el algoritmo A6, donde ambos sentidos suman 160,4 buses/hr. En ninguna de las soluciones de los algoritmos se utilizaron servicios *short-turning* (servicios 4, 5, 6, 7, 14, 15, 16 y 17), mas sí se usaron servicios zonales y *limited-stop* que cubren todo el sentido del corredor.

Resulta interesante notar que en el algoritmo A4 hay una tendencia a utilizar más servicios *limited-stop* que en A6, con 9 y 4 servicios activos respectivamente. Además las frecuencias de los servicios *all-stop* (servicios 1 y 8) son mucho mayores en el algoritmo estocástico, lo que sugiere que bajo los supuestos de los modelos Logit, los usuarios están más dispuestos a utilizar servicios con mayores tiempos de viaje pero que conectan con un mayor número de destinos. Otra posible interpretación a este hecho consiste en considerar que las ganancias de los servicios *limited-stop* son, a veces, muy marginales, lo que produce que en una asignación estocástica una proporción importante de los usuarios no los escoja.

Hay que recordar que en la asignación determinística solo los servicios pertenecientes a las líneas atractivas llevan pasajeros. En presencia de servicios *limited-stop* para muchos pares O/D, los servicios *all-stop* no pertenecen a las líneas atractivas, ya que por definición son los servicios más lentos que conectan cada par O/D al no omitir ningún paradero. Así, mientras en una asignación determinística los servicios *limited-stop* capturan toda la demanda, en una asignación estocástica el servicio *all-stop*, y similares, también recibirá viajes.

En la Figura 4-4 se muestran los perfiles de carga de los algoritmos A4 y A6 de los servicios escogidos (frecuencia positiva) en sus dos sentidos. En color azul se encuentran destacados los servicios estilo *all-stop,* los cuales se caracterizan porque se detienen en el 70% o más de los paraderos de su recorrido, mientras que en color gris se muestra el resto de los servicios que son considerados como *limited-stop*.

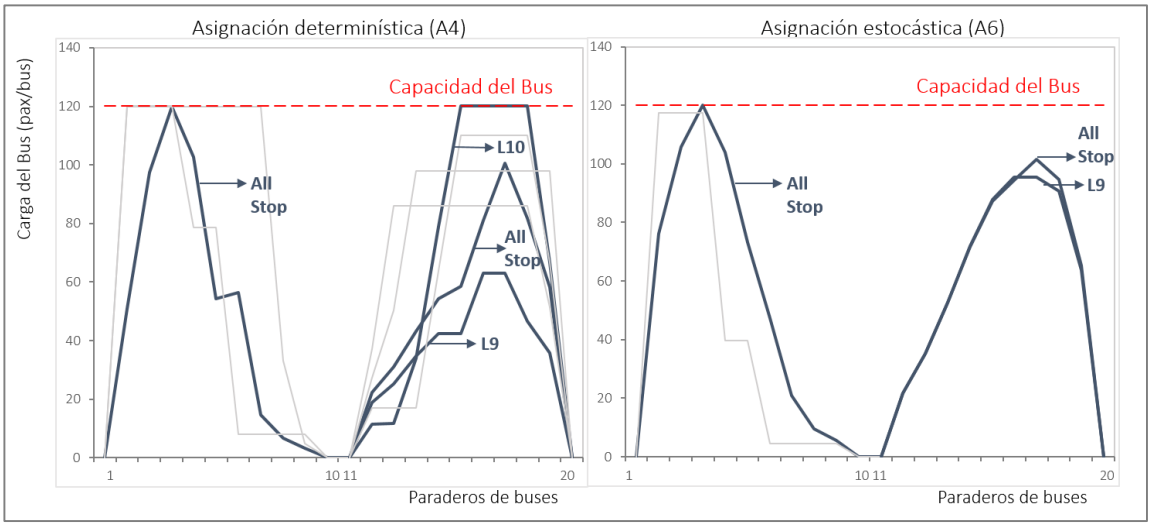


Figura 4-4. Comparación entre perfiles de carga por bus para algoritmo determinístico A4, y estocástico A6 de escenario 7.

Vemos que en la Figura 12, tanto en el algoritmo A4 como en el A6, por construcción al ser soluciones del CFOAP, se respeta la capacidad máxima de cada servicio. También es posible apreciar que la principal diferencia entre los perfiles de carga provenientes de una asignación determinística y estocástica es el nivel de uso de los servicios tipo *all-stop*. Para A4 vemos que los servicios 8 y 9 tienen un nivel de ocupación relativamente bajo durante gran parte de su recorrido, mientras que en A6 estos cuentan con una frecuencia mayor y una carga media más cercana a la capacidad del bus.

La Figura 4-5 muestra el perfil de carga que se obtiene de utilizar las frecuencias óptimas del algoritmo A4 y realizar una asignación estocástica idéntica a la utilizada en el PAP de A5 y A6. En este gráfico se puede apreciar el nivel de sobrecarga que tendría cada servicio en caso de que el modelador haga el supuesto de que los usuarios se comportan según el modelo determinístico siendo que ellos en verdad eligen en base a una asignación estocástica.

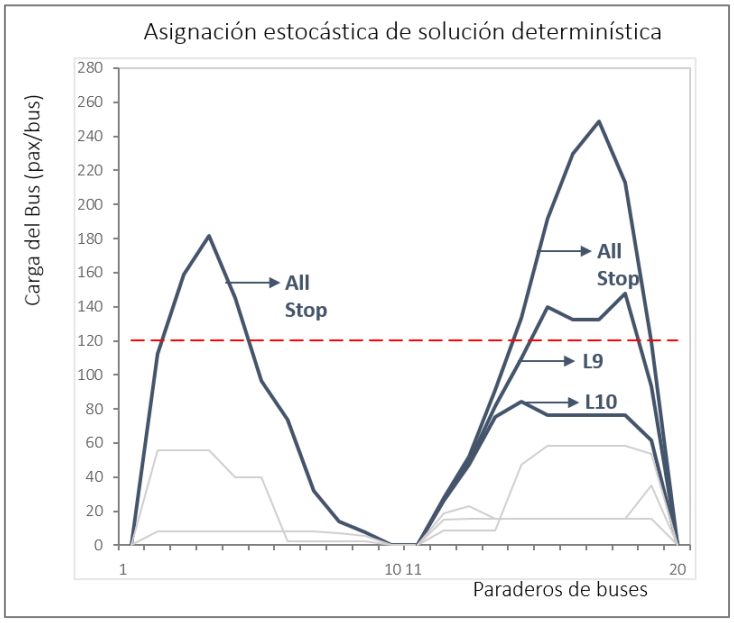


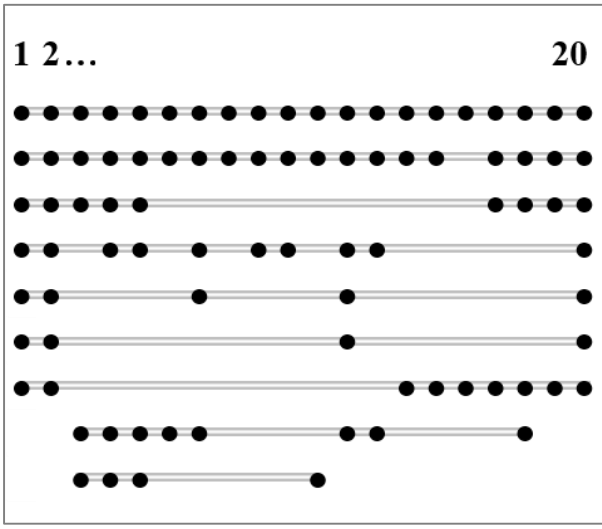
Figura 4-5. Perfil de carga por bus para asignación estocástica de solución determinística A4 para escenario 7.

En la Figura 4-5 se distingue claramente que los servicios del tipo *all-stop* son los que presentan los mayores niveles de sobrecarga. En particular vemos que el servicio 8 (*all-stop*) del sentido 2 es el que posee mayor carga, alcanzando los 249 pax/bus, los cuales exceden ampliamente la capacidad máxima de 120 pasajeros por bus. En cuanto a los costos sociales, el algoritmo A6, con asignación estocástica, entrega un costo social corregido (CSC) de \$16.374.308 CLP, mientras que el de la asignación estocástica de solución determinística alcanza los \$15.741.790 CLP. Esto equivale a una disminución porcentual de 3,9% con respecto al algoritmo A6, pero a costa de una carga máxima de 249 pax/bus, lo que la vuelve infactible la solución en cuanto a la restricción de capacidad.

4.8.2. Corredor 40 paraderos Avenida Caracas

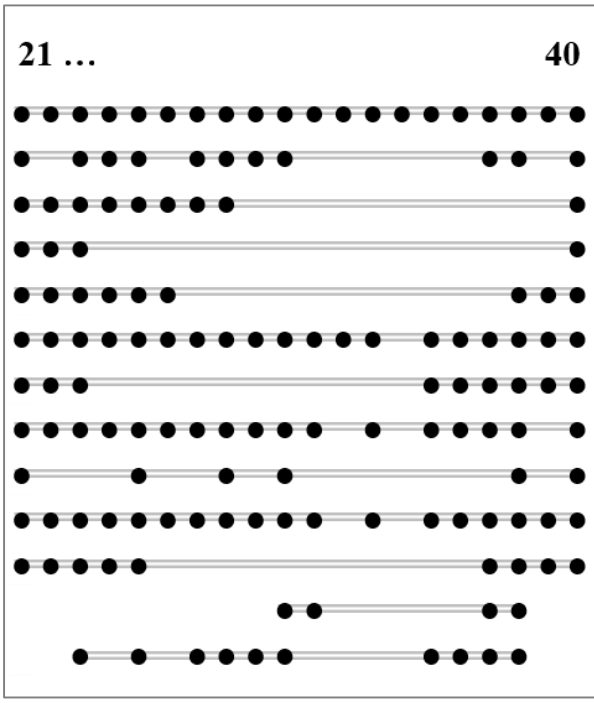
En la Figura 4-6 y Figura 4-7 se muestra la estructura de paradas de los 22 servicios del corredor en ambos sentidos. Adicionalmente se dan a conocer las frecuencias óptimas

resultantes de los algoritmos GRASP con trasbordo determinísticos (A4) y estocásticos (A6).



Servicio	Frecuencia (buses/hr)	
	A4	A6
L1	18,5	42,9
L2	3,6	55,4
L3	-	-
L4	52,0	59,6
L5	48,6	-
L6	-	-
L7	16,0	-
L8	-	-
L9	26,0	-

Figura 4-6. Servicios generados y frecuencias óptimas para algoritmos A4 y A6, en sentido 1 de escenario 8.



Servicio	Frecuencia (buses/hr)	
	A4	A6
L10	15,8	80,6
L11	29,6	-
L12	16,6	-
L13	14,7	-
L14	14,4	-
L15	7,2	14,6
L16	10,8	-
L17	11,6	62,7
L18	14,7	-
L19	-	-
L20	3,4	-
L21	26,0	-
L22	-	-

Figura 4-7. Servicios generados y frecuencias óptimas para algoritmos A4 y A6, en sentido 2 de escenario 8.

La Figura 4-6 y Figura 4-7 permiten dar cuenta de que los servicios con mayor frecuencia en el algoritmo A6 son, en su mayoría, similares en estructura a los *all-stop*, mientras que en A4 la oferta de frecuencia se encuentra dividida en una gran variedad de servicios *limited-stop*. Otra diferencia importante entre los dos algoritmos es que la solución A4 utiliza un total de 17 servicios, mientras que A6 tan solo necesita 6.

En la Figura 4-8 se muestran los perfiles de carga de los algoritmos A4 y A6 de los 22 servicios en sus dos sentidos. En color azul se encuentran destacados los servicios estilo *all-stop,* los cuales se caracterizan porque se detienen en el 70% o más de los paraderos de su recorrido, mientras que en color gris se muestra el resto de los servicios que son considerados como *limited-stop*.

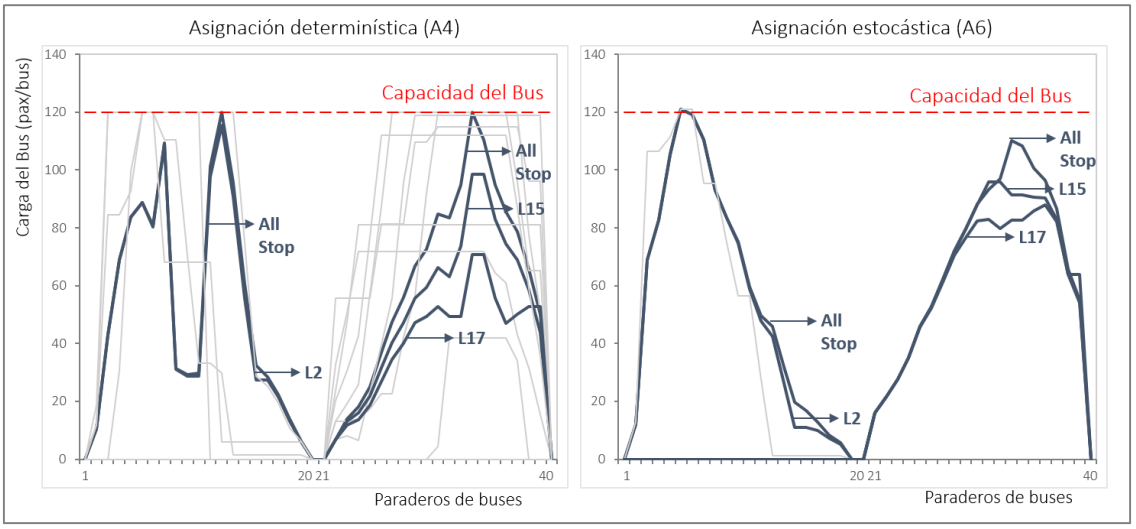


Figura 4-8. Comparación entre perfiles de carga por bus para algoritmo determinístico A4, y estocástico A6 de escenario 8.

Al analizar ambos gráficos de la Figura 4-8 vemos que, por construcción, se respeta la capacidad máxima de cada bus. Además, en el gráfico del algoritmo A4 vemos que los servicios tipo *all-stop* marcados en azul son bastante utilizados en el sentido 1, más no tan en el sentido 2. En contraste con lo anterior, el algoritmo A6 presenta una solución basada principalmente en servicios *all-stop*, y con tan solo un servicio *limited-stop*, la línea 4.

La Figura 4-9 muestra el perfil de carga que se obtiene de utilizar las frecuencias óptimas del algoritmo A4 y realizar una asignación estocástica idéntica a la utilizada en la etapa PAP de A5 y A6. En este gráfico se puede apreciar el nivel de sobrecarga que tendría cada servicio en caso de que el modelador haga el supuesto de que los usuarios se comportan según el modelo determinístico siendo que ellos en verdad eligen en base a una asignación estocástica.

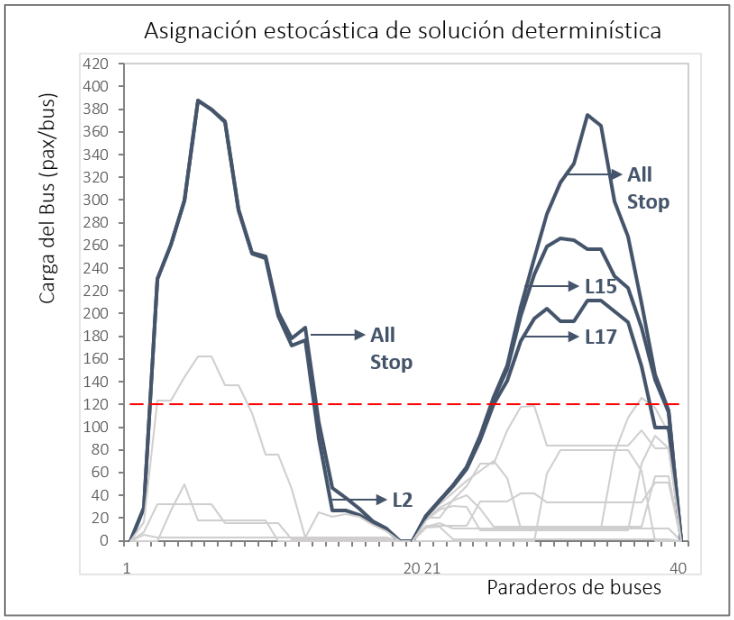


Figura 4-9. Perfil de carga por bus para asignación estocástica de solución determinística A4 para escenario 8.

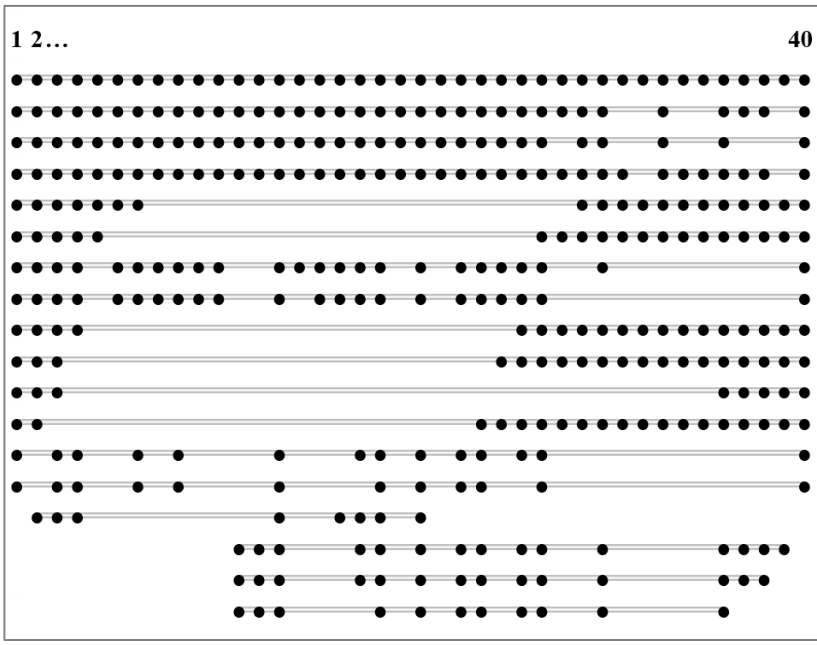
Vemos que al igual que en la Figura 4-5 del escenario 7 los niveles de sobrecarga de los servicios tipo *all-stop* superan ampliamente la capacidad máxima de 120 pax/bus de los

servicios. En particular la mayor sobrecarga la comparten los servicios 1 y 2 del sentido 1 con 388 pax/bus, seguidos muy de cerca por el servicio 10 que lleva a 375 pax/bus en su tramo más cargado.

El costo social corregido final del algoritmo A6, con asignación estocástica, fue de $23.663.454 CLP, mientras que el de la asignación estocástica de solución determinística fue de $22.238.289 CLP. Esto equivale a una disminución porcentual de 6% con respecto al algoritmo A6, pero a costa de una carga máxima de 388 pax/bus, lo que la vuelve infactible la solución en cuanto a la restricción de capacidad.

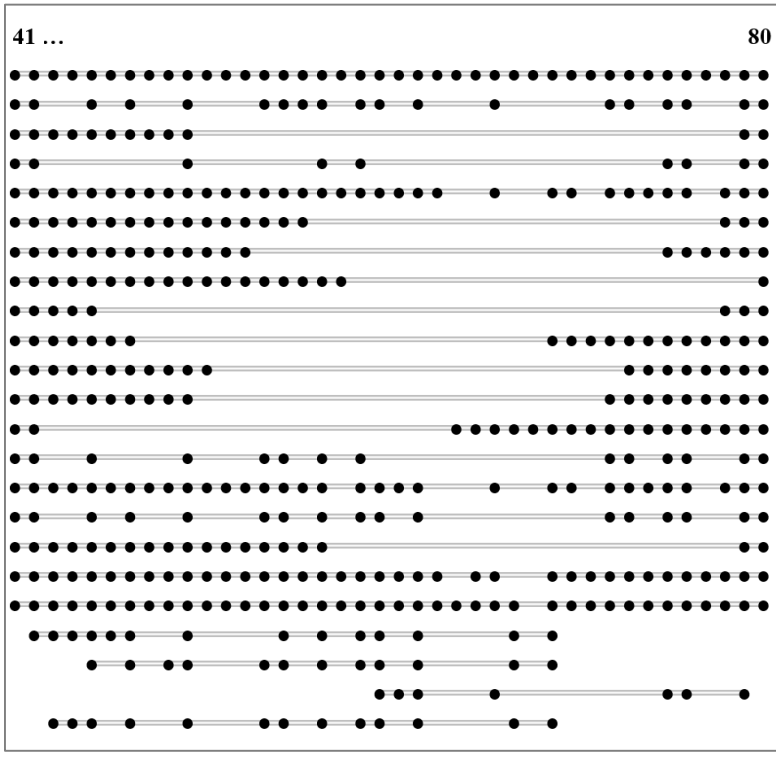
4.8.3. Corredor 80 paraderos Avenida Caracas

En la Figura 4-10 y Figura 4-11 se muestra la estructura de paradas de los 41 servicios del corredor en ambos sentidos. Adicionalmente se dan a conocer las frecuencias óptimas resultantes de los algoritmos GRASP con trasbordo determinísticos (A4) y estocásticos (A6).



Servicio	Frecuencia (buses/hr)	
	A4	A6
L1	3,0	67,7
L2	-	14,6
L3	23,6	-
L4	-	-
L5	5,4	-
L6	-	-
L7	-	70,9
L8	-	-
L9	12,2	-
L10	11,3	-
L11	-	-
L12	-	-
L13	-	16,3
L14	67,3	-
L15	40,1	-
L16	-	-
L17	11,8	-
L18	-	18,7

Figura 4-10. Servicios generados y frecuencias óptimas para algoritmos A4 y A6, en sentido 1 de escenario 9.



Servicio	Frecuencia (buses/hr)	
	A4	A6
L19	8,8	37,2
L20	-	43,0
L21	24,4	-
L22	9,5	-
L23	3,9	58,1
L24	7,5	-
L25	7,9	-
L26	6,8	-
L27	-	-
L28	6,5	-
L29	7,2	-
L30	-	-
L31	5,4	-
L32	23,2	-
L33	-	-
L34	-	-
L35	5,3	-
L36	2,9	-
L37	3,5	31,1
L38	-	-
L39	-	18,7
L40	40,1	-
L41	11,8	-

Figura 4-11. Servicios generados y frecuencias óptimas para algoritmos A4 y A6, en sentido 2 de escenario 9.

Los resultados de las frecuencias óptimas de los algoritmos A4 y A6 revelan que existe una gran diferencia en cuanto a los servicios utilizados por cada tipo de asignación. El algoritmo A4 lleva a que se utilicen principalmente servicios del tipo *limited-stop*, mientras que A6 concentra su frecuencia en unos pocos servicios del tipo *all-stop*. Resulta interesante resaltar que las soluciones de los algoritmos solo comparten el uso de los servicios 1, 19, 23 y 37, los cuales tienen en común que omiten muy pocos paraderos en su recorrido.

En el algoritmo A4 se utiliza un total de 24 servicios, mientras que en A6 tan solo se requiere de 10 servicios. Este menor número de servicios es algo valorado por los usuarios ya que facilita el aprendizaje de los servicios del corredor. Además esto es algo compatible con la restricción de capacidad en paraderos, expresada como la cantidad máxima de buses por hora que puede servir un paradero a causa de la infraestructura limitada de paradas.

En la Figura 4-12 se muestran los perfiles de carga de los algoritmos A4 y A6 de los 41 servicios en sus dos sentidos. En color azul se encuentran destacados los servicios estilo *all-stop,* los cuales se caracterizan porque se detienen en el 70% o más de los paraderos de su recorrido, mientras que en color gris se muestra el resto de los servicios que son considerados como *limited-stop*.

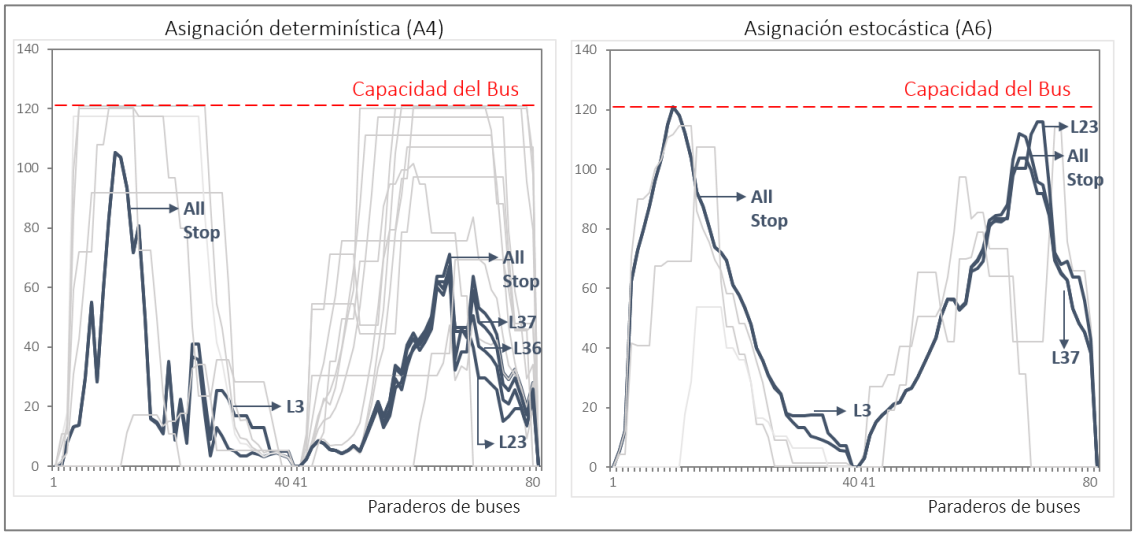


Figura 4-12. Comparación entre perfiles de carga por bus para algoritmo determinístico A4, y estocástico A6 de escenario 9.

De los perfiles del algoritmo A4 de la Figura 4-12 se desprende que no solo la frecuencia de los servicios *all-stop* es baja, sino que también sus niveles de carga de pasajeros. Esto se debe a la gran cantidad de servicios *limited-stop* que utiliza el algoritmo A4, con los que logra cubrir gran parte de la demanda del corredor. Vemos también que la forma de los perfiles de carga de A6 es mucho más suave que los de A4. Estos saltos en la

asignación determinística son poco probables de observar en la realidad, y probablemente se deben a la naturaleza “todo o nada” de este modelo de comportamiento.

La Figura 4-13 muestra el perfil de carga que se obtiene de utilizar las frecuencias óptimas del algoritmo A4 y realizar una asignación estocástica idéntica a la utilizada en la etapa PAP de A5 y A6. En este gráfico se puede apreciar el nivel de sobrecarga que tendría cada servicio en caso de que el modelador haga el supuesto de que los usuarios se comportan según el modelo determinístico siendo que ellos en verdad eligen en base a una asignación estocástica.

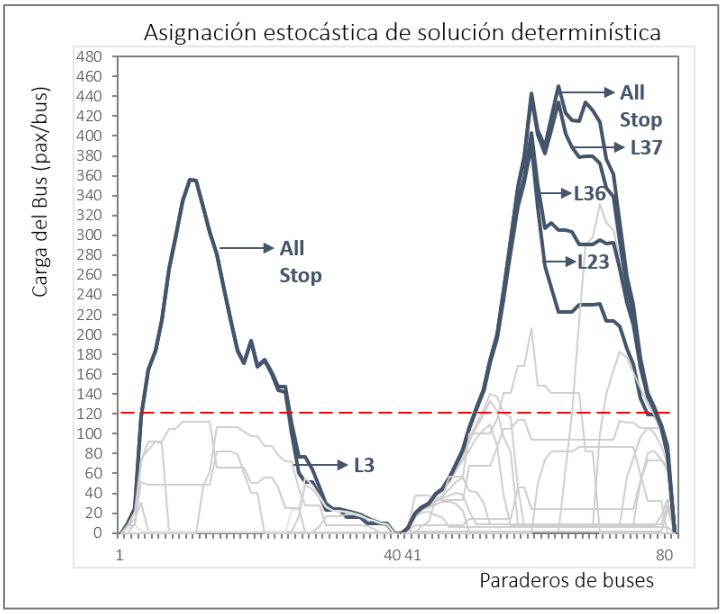


Figura 4-13. Perfil de carga por bus para asignación estocástica de solución determinística A4 para escenario 9.

Vemos que al igual que en la Figura 4-5 y Figura 4-9 de los escenarios 7 y 8, los niveles de sobrecarga de los servicios tipo *all-stop* superan ampliamente la capacidad máxima de 120 pax/bus de los servicios. En particular la mayor sobrecarga la comparten los servicios 19 y 37 del sentido 2 con 450 pax/bus y 439 pax/bus, seguidos muy de cerca por los servicios 36 y 23 con 403 pax/bus y 391 pax/bus respectivamente en su tramo más

cargado. Este nivel de sobrecarga es muy grande ya que corresponde a una saturación de 3,75 veces la capacidad máxima de 120 pax/bus.

El costo social corregido del algoritmo A6, con asignación estocástica, fue de $33.305.157 CLP, mientras que el de la asignación estocástica de solución determinística fue de $38.445.298 CLP. Esto equivale a un aumento porcentual del 15,4% en los costos con respecto al algoritmo A6, ya que la solución del algoritmo A6 es de menor costo social. En este caso, además de entregar una solución de mayor costo la asignación también hace que el servicio con carga máxima transporte 450 pax/bus en su arco más saturado, lo que vuelve infactible en capacidad a la solución de frecuencias del algoritmo A4 con asignación estocástica.

En base a los resultados de los escenarios 7, 8 y 9 podemos afirmar que la asignación determinística tiende a sobreestimar la carga de los servicios *limited-stop* y a subestimar la de los *all-stop*. Esto puede llegar a ser un gran problema si se asume erróneamente una asignación determinística para resolver el problema CFOAP, ya que a ojos del modelador la solución cumpliría la restricción de capacidad, pero en la práctica habría un nivel de saturación importante en ciertos paraderos en los que los usuarios no podrían abordar sus servicios de elección.

Por ende, y como se mencionó en las secciones 3.3.1 y 4.1, se recomienda que antes de hacer una aplicación real de estos algoritmos, se cuente con una calibración del modelo estocástico basándose en mediciones reales del comportamiento de los usuarios del corredor. Esta calibración permitirá obtener simultáneamente los parámetros de valoración de los atributos de viaje, junto con los parámetros de escala λ y β de cada modelo Logit MNL. De esta manera se evita el tener que usar criterios, que si bien son razonable, también son arbitrios a la hora de calibrar los parámetros de escala.

5. CONCLUSIONES

En este documento se presenta formalmente el *limited-stop service design problem* (LSDP) junto con su esquema de trabajo. La metodología propuesta para resolver el LSDP consiste en separar el problema en dos: *limited-stop service generation problem* (LSGP), el cual consiste en definir los conjuntos de servicios con los que se optimizará el corredor, y *capacitated frequency optimization and assignment problem* (CFOAP), en donde se optimizan las frecuencias de los servicios y se encuentra la asignación de los pasajeros teniendo en consideración la restricción de capacidad máxima de pasajeros al interior de cada bus. En esta tesis nos hemos enfocado en estudiar y desarrollar una solución eficiente para el CFOAP, el cual es una pieza clave para resolver el LSDP.

Como punto de comparación al modelo propuesto en este trabajo se analizó el modelo simultáneo desarrollado por Larrain (2013). Este modelo permite resolver el CFOAP al iterar sobre la solución del FOAP (versión sin capacidad del CFOAP). El FOAP se resuelve mediante un único problema de optimización de frecuencias, del cual se obtiene como resultado la asignación determinística de pasajeros a rutas mínimas junto con las frecuencias óptimas de cada servicio. Las dos principales debilidades del modelo simultáneo consisten en que: (i) solo permite utilizar un modelo de asignación determinístico, el cual entrega soluciones poco robustas ante pequeños cambios en los parámetros de valoración de los usuarios; y (ii) para el modelo con trasbordos los tiempos de ejecución de la solución empeoran drásticamente al resolver escenarios con 40 o más paraderos por corredor, lo que obliga a trabajar con la versión que no permite realizar trasbordos, limitando las posibilidades de viaje de los usuarios y la interacción entre servicios.

En adición a la introducción del LSDP, en este trabajo proponemos un modelo bi-nivel para resolver el CFOAP, el cual corrige los dos problemas mencionados del modelo simultáneo. En primer lugar, la solución a la etapa de asignación de pasajeros (PAP) es presentada como un sub-problema en sí mismo, permitiendo modelar los comportamientos de los usuarios de varias formas. En este caso, se optó por relajar el supuesto de asignación determinística, el cual es ampliamente utilizado en la literatura,

para dar paso a una modelación estocástica en las elecciones de los pasajeros. Esta extensión resulta en un diseño de soluciones más robusto y realista. En segundo lugar se propone una mejora al algoritmo existente de solución del CFOAP. Esta mejora es en base a dos grandes innovaciones. La primera consiste en separar el FOAP en dos subproblemas, *frequency optimization problem* (FOP) y *passenger assignment problem* (PAP), y resolverlo usando el enfoque bi-nivel. La segunda innovación es la implementación de una heurística GRASP para el algoritmo de capacidad, la cual itera sobre las soluciones del FOAP para encontrar una solución al CFOAP. Esta heurística permite explorar más soluciones factibles del CFOAP tanto para la asignación determinística como estocástica.

Estas dos innovaciones permiten que sea posible abordar escenarios de mayor escala, con más servicios a optimizar y paraderos en el corredor, y a la vez resolver el CFOAP en un menor tiempo de ejecución que el modelo simultáneo. El modelo bi-nivel determinístico resuelve escenarios de mediano y gran tamaño (40 y 80 paraderos) generando una reducción promedio cercana al 80% en los tiempos de ejecución al comparar con el modelo simultáneo sin trasbordos. Además, los resultados indican que los costos sociales de las soluciones del CFOAP de los modelos bi-nivel y simultáneo son muy parecidos. Esto permite asegurar que no se está sacrificando calidad de solución por velocidad en los tiempos de ejecución ya que ambos modelos llegan a valores similares, pero con distintos tiempos de ejecución.

En cuanto a los tiempos de ejecución del modelo con asignación estocástica, estos son considerablemente más altos que los de la asignación determinística. Detectamos que la etapa que consume más tiempo de ejecución es la de la elección de rutas, la cual se basa en el algoritmo de Dial (1971), por lo que cualquier mejora futura que apunte a disminuir los tiempos de ejecución debiera comenzar por enfocarse en mejorar esta etapa. Para el desarrollo futuro de esta etapa proponemos limitar la cantidad máxima de trasbordos de cada viaje, lo que reduciría considerablemente el número de rutas posibles de cada par origen-destino. Esto permitiría disminuir los tiempos de ejecución eliminando, a la vez, las rutas poco razonables que tienen un número muy grande de trasbordos.

Al comparar los resultados de los algoritmos con y sin trasbordos del modelo bi-nivel determinístico, vemos que la modelación que permite los trasbordos reporta costos sociales corregidos menores que la que los prohíbe. El mayor ahorro se logra en el escenario 9 del corredor de avenida Caracas con 80 paraderos, en el que se alcanza un 9,1% de ahorro porcentual en los costos sociales corregidos con respecto al modelo sin trasbordos. Eliminando del modelo el parámetro de penalidad por trasbordo el número de trasbordos de todos los escenarios modelados crece fuertemente, y el ahorro máximo de costos social aumenta a 16,6% en el escenario 9. Este análisis de sensibilidad del parámetro θ_{Tr} permite obtener una cota máxima de los beneficios de modelar trasbordos, con la cual se confirma que la omisión de la modelación de trasbordos puede resultar en una subestimación importante de los beneficios sociales de utilizar servicios *limited-stop* optimizados.

La heurística GRASP parece ser poco efectiva para los algoritmos de asignación determinística, en comparación al estocástico, ya que esta entrega soluciones con un costo social de a lo más un 4,2% de ahorro porcentual con respecto a la heurística *greedy*. Luego, solo se recomienda el uso de GRASP para resolver CFOAP en caso de que se cuente con tiempo para realizar varias iteraciones de la heurística. En contraste, el algoritmo de asignación estocástica del escenario 7 del corredor de avenida Caracas con 20 paraderos obtuvo un 8,4% de ahorro adicional con respecto a la heurística *greedy*, por lo que pareciera tener un mayor potencial para encontrar mejores soluciones. Por lo anterior, se recomienda el uso de GRASP en la asignación estocástica, teniendo en cuenta eso sí que los tiempos de ejecución de este algoritmo son bastante altos.

Los resultados de la sección 4.6 permiten concluir que en la asignación estocástica los usuarios trasbordan más que en la asignación determinística. Esto se traduce en un mayor peso del costo los trasbordos en la asignación estocástica, en la cual, en algunos escenarios, supera el 20% de los costos sociales totales. En cuanto a los costos operacionales, estos se mantienen en proporciones similares en ambos tipos de asignación rodeando el 7-8% de los costos sociales, lo que sugiere que estos están más ligados a características del corredor como la distancia entre estaciones, así como también de los

servicios con su velocidad operacional, tiempos de detención y estructura de detenciones. Finalmente, el costo esperado de viaje representa la principal componente del costo social. Este bordea el 90% en la asignación determinística y el 70% en la asignación estocástica.

Los resultados de los experimentos realizados para probar el modelo bi-nivel revelan que si los usuarios se comportan según un modelo de asignación estocástico, diseñar servicios bajo el supuesto de asignación determinística puede llevar a soluciones en las que se subestime la demanda de servicios de tipo *all-stop*, causando graves problemas de saturación en buses y paraderos. Los resultados de este experimento, en un corredor de 80 paraderos de Avenida Caracas (Bogotá) del sistema Transmilenio, muestran que el nivel de carga del servicio *all-stop* alcanza los 450 pax/bus, para buses con capacidad máxima de 120 pasajeros, lo que evidencia un grave problema de diseño e infactibilidad a causa del supuesto de asignación determinística. Esto revela la importancia de utilizar la asignación estocástica y la necesidad de encontrar mejores algoritmos para resolver este problema.

Para futuras líneas de investigación de este trabajo se podría incluir la modelación de una restricción de capacidad en paraderos, la cual no ha sido incluida en este modelo. En esta restricción se debería establecer un valor máximo de buses por hora, sobre el cual comience a haber congestión en el paradero. Esta restricción es muy importante, ya que para corredores con servicios de altas frecuencias es posible que la restricción en paraderos sea el verdadero cuello de botella del sistema.

Por otra parte, los bajos tiempos de ejecución del modelo determinístico abren las puertas a aplicaciones más complejas, tales como modelar y optimizar una red de corredores como se propone en Larrain (2013). Otra posible mejora corresponde a suponer que los pasajeros inician su viaje en un centroide, el cual representa sus hogares, desde el cual luego pueden elegir el paradero de inicio de su viaje. De esta manera se captura el hecho de que la matriz origen-destino puede depender de los niveles de servicio del corredor, y que por lo tanto no es un elemento estático.

Adicionalmente, en futuras investigaciones se podrían agregar más atributos a la función de utilidad estocástica de viajes. Por ejemplo, se podría medir el nivel de comodidad al

interior del bus en cada servicio, o la probabilidad de ir sentado. También sería interesante estudiar una mejora a los algoritmos de capacidad *greedy* y GRASP al incorporarles una etapa de búsqueda local previa a la modificación de las cotas mínimas de frecuencia. De esta manera se podrían incluir soluciones en las se evalúen distintas estrategias como, por ejemplo, bajar la cota mínima de algún servicio y así disminuir los costos sociales sin perjudicar la factibilidad de capacidad. Además, de forma complementaria a los algoritmos *greedy* y GRASP, se podría incluir una heurística de búsqueda local para el FOAP de asignación estocástica, ya que esta no necesariamente converge al mínimo de costos sociales como en el caso determinístico, lo que hace que sea más necesario explorar el dominio de soluciones.

En un contexto en el que los sistemas BRT del mundo se enfrentan a una demanda creciente y a escenarios cada vez más desafiantes, una buena herramienta de diseño de servicios *limited-stop* es una componente vital para asegurar la provisión eficiente un nivel de servicio de buena calidad para el transporte público. Los modelos y algoritmos de solución presentados en esta tesis contribuyen a desarrollar un mejor entendimiento de estos sistemas complejos. En el futuro esperamos que estos puedan guiarnos a conseguir soluciones sustentables de movilidad para nuestras ciudades.

BIBLIOGRAFIA

Batarce, M., Muñoz, J. C., Ortúzar, J. D. D., Raveau, S., Mojica, C., y Ríos Flores, R. A., (2015). Evaluation of Passenger Comfort in Bus Rapid Transit Systems. *Inter-American Development Bank*.

BRT Centre of Excellence, EMBARQ, IEA y SIBRT. (2016). Global BRTData. Versión 3.16. Extraído el: 07, Marzo 2017. Disponible en: http://www.brtdata.org

Chen, X., Hellinga, B., Chang, C. y Fu, L., (2012). Optimization of Headways for Bus Rapid Transit System with Stop-Skipping Control. *Transportation Research Board Annual Meeting 2012*, Paper #12-1999.

Chiraphadhanakul, V. and C. Barnhart., (2013). Incremental Bus Service Design: Combining Limited-Stop and Local Bus Services. *Public Transport*, 5(1-2), 53-78.

Chriqui, C. and P. Robillard., (1975). Common bus lines. *Transportation Science*, 9, 115-121.

Cortés, C. E., Jara-Moroni, P., Moreno, E., y Pineda, C., (2013). Stochastic transit equilibrium. *Transportation Research Part B: Methodological*, 51, 29-44.

De Cea, J. y Fernández, E., (1993). Transit assignment for congested public transport systems: an equilibrium model. *Transportation science*, 27(2), 133-147.

Desaulniers, G. y Hickman, M., (2007). Handbooks in Operations Research and Management Science, *Public Transit. In: Barnhart, C., Laporte, G. (Eds.)*, vol. 14. North-Holland, Amsterdam, 69–128.

Dial, R. B., (1971). A probabilistic multipath traffic assignment model which obviates path enumeration. *Transportation research*, 5(2), 83-111.

El-Geneidy, A.M. y Surprenant-Legault, J. (2010). Limited-Stop Bus Service: An Evaluation of an Implementation Strategy. *Public Transport*, 2(4), 291-306.

Ercolano, J.M., (1984). Limited-Stop Bus Operations: An Evaluation. *Transportation Research Record*, 994, 24–29.

Fernández, J.E., De Cea, J., (2003). Análisis Modernización de Transporte Público, VI Etapa. *Technical report*. SECTRA, Santiago.

Feo, T. A., y Resende, M. G., (1995). Greedy randomized adaptive search procedures. *Journal of global optimization*, 6(2), 109-133.

Furth, P.G. y Day, F.B., (1985). Transit Routing and Scheduling Strategies for Heavy Demand Corridors. *Transportation Research Record*, 1011, 23–26.

Furth, P.G. (1986). Zonal Route Design for Transit Corridors. *Transportation Science*, 20(1), 1–12.

Jordan, W.C. y Turnquist, M.A., (1979). Zone Scheduling of Bus Routes to Improve Service Reliability. *Transportation Science*, 13(3), 242–268.

Larrain, H., (2013). Diseño de Servicios Expresos para Buses. *PhD dissertation*, Pontificia Universidad Católica de Chile.

Larrain, H., J.C. Muñoz y R. Giesen., (2015). Generation and Design Heuristics for Zonal Express Services. *Transportation Research Part E*, 79, 201 – 212.

Leiva, C., J. C. Muñoz, R. Giesen, y H. Larrain., (2010). Design of Limited-Stop for an Urban Bus Corridor with Capacity Constraints. *Transportation Research B*, 44(10), 1186-1201.

Mohring, H., (1972). Optimization and Scale Economies in Urban Bus Transportation. *American Economic Review*, 62(4), 591–604.

Nguyen, S. y Pallottino, S., (1988). Equilibrium Traffic Assignment for Large Scale Transit Networks. *European Journal of Operational Research*, 37, 176–186.

Raveau, S., Alvarez-Daziano, R., Yañez, M.F., Bolduc, D. y Ortuzar, J. de D., (2010). Sequential and simultáneous estimation of hybrid discrete choice models: some new findings, *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Record*, 2156: 131 – 139.

Silverman, N.C., (1998). Limited-Stop Bus Service at New York City Transit. *Journal of Transportation Engineering*, 124, 503-509.

Sun, C., W. Zhou, y Y. Wang., (2008). Scheduling Combination and Headway Optimization of Bus Rapid Transit. *Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology*, 8(5), 61-67.

Tétreault, P. y El-Geneidy, A., (2010). Estimating Bus Run Times for New Limited-Stop Service Using Archived AVL and APC Data. *Transportation Research Part A*, 44(6), 390–402.

Tirachini, A. Hensher, D.A. y Rose, J.M., (2013). Crowding in public transport systems: effects on users, operation and implications for estimation of demand, *Transportation Research Part A*, 53(1): 36 – 52.

UOCT. (2015). Santiago se vuelve cada año una ciudad con calles más lentas. Extraído el: 07, Marzo 2017. Disponible en: http://www.latercera.com/noticia/santiago-se-vuelve-cada-ano-una-ciudad-con-calles-mas-lentas.

Ulusoy, Y., Chien, S., y Wei, C. H., (2010). Optimal all-stop, short-turn, and express transit services under heterogeneous demand. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, (2197), 8-18.

Ulusoy, Y., y Chien, S. I. J., (2015). Optimal bus service patterns and frequencies considering transfer demand elasticity with genetic algorithm. *Transportation Planning and Technology*, 38(4), 409-424.

Wright, L. (2003). Sustainable Transport: A Sourcebook for Policy-makers in Developing Cities, Module 3b: Bus Rapid Transit.

A N E X O S

ANEXO A: MATRICES DE DEMANDA

Tabla A-1. Matrices de demanda origen-destino para escenarios 1, 4 y 7.

O/D	E1	E4	E7	O/D	E1	E4	E7	O/D	E1	E4	E7
1-2	3.620	684	314	**5-6**	8	2.604	83	**12-19**	42	84	567
1-3	790	372	1.242	**5-7**	12	372	82	**12-20**	726	144	1.326
1-4	1.585	336	3.049	**5-8**	117	984	58	**13-14**	12	24	78
1-5	281	1.824	2.777	**5-9**	15	684	42	**13-15**	22	264	247
1-6	186	540	2.739	**5-10**	198	1.248	59	**13-16**	24	1.272	132
1-7	264	24	1.878	**6-7**	9	420	78	**13-17**	4	264	99
1-8	2.631	708	854	**6-8**	86	924	101	**13-18**	18	36	347
1-9	337	204	291	**6-9**	11	660	110	**13-19**	34	120	797
1-10	4.425	1.116	150	**6-10**	144	1.104	118	**13-20**	606	168	1.492
2-3	38	276	238	**7-8**	107	264	27	**14-15**	13	108	142
2-4	75	204	1.000	**7-9**	13	48	45	**14-16**	13	252	120
2-5	13	1.236	913	**7-10**	180	336	53	**14-17**	2	144	119
2-6	9	540	891	**8-9**	18	1.044	45	**14-18**	10	24	432
2-7	13	36	775	**8-10**	232	1.884	70	**14-19**	20	0	947
2-8	125	624	302	**9-10**	200	2.292	192	**14-20**	342	12	1.681
2-9	16	36	102	**11-12**	67	0	569	**15-16**	2	468	110
2-10	211	744	57	**11-13**	19	0	282	**15-17**	0	312	141
3-4	82	96	596	**11-14**	7	0	204	**15-18**	1	84	417
3-5	14	516	677	**11-15**	15	48	352	**15-19**	3	144	1.033
3-6	10	516	944	**11-16**	16	288	149	**15-20**	44	120	1.791
3-7	14	120	760	**11-17**	3	36	115	**16-17**	0	1.092	73
3-8	135	516	244	**11-18**	12	48	250	**16-18**	2	144	185
3-9	17	120	89	**11-19**	23	84	483	**16-19**	4	252	600
3-10	228	456	91	**11-20**	395	108	1.057	**16-20**	64	168	926
4-5	15	240	83	**12-13**	36	0	103	**17-18**	5	720	94
4-6	9	360	145	**12-14**	14	0	99	**17-19**	10	768	433
4-7	11	48	115	**12-15**	26	96	219	**17-20**	165	552	790
4-8	130	288	46	**12-16**	28	156	101	**18-19**	11	288	211
4-9	17	48	30	**12-17**	6	0	88	**18-20**	189	132	775
4-10	218	456	64	**12-18**	22	72	227	**19-20**	600	480	540

Tabla A-2. Matrices de demanda origen-destino para escenarios 2, 5 y 8.

O/D	E2	E5	E8	O/D	E2	E5	E8	O/D	E2	E5	E8	O/D	E2	E5	E8
1-2	151	153	29	**6-17**	19	80	12	**21-22**	5	5	222	**26-37**	9	27	114
1-3	636	121	27	**6-18**	4	31	19	**21-23**	11	0	292	**26-38**	11	43	217
1-4	1.273	243	34	**6-19**	36	84	10	**21-24**	23	0	152	**26-39**	134	57	57
1-5	775	187	80	**6-20**	79	162	41	**21-25**	13	0	169	**26-40**	297	83	475
1-6	277	132	199	**7-8**	10	12	25	**21-26**	9	0	42	**27-28**	0	1	5
1-7	417	125	255	**7-9**	6	54	39	**21-27**	3	0	57	**27-29**	2	17	17
1-8	557	119	207	**7-10**	3	96	31	**21-28**	2	0	89	**27-30**	3	34	57
1-9	327	385	167	**7-11**	3	104	31	**21-29**	3	8	99	**27-31**	3	81	31
1-10	98	649	113	**7-12**	2	111	77	**21-30**	5	16	153	**27-32**	3	128	32
1-11	81	420	210	**7-13**	2	66	54	**21-31**	5	59	51	**27-33**	1	83	23
1-12	65	192	253	**7-14**	3	21	35	**21-32**	5	102	47	**27-34**	0	38	25
1-13	78	100	181	**7-15**	18	61	30	**21-33**	3	57	49	**27-35**	1	21	103
1-14	92	8	87	**7-16**	33	102	5	**21-34**	1	12	35	**27-36**	2	5	106
1-15	508	130	62	**7-17**	18	61	8	**21-35**	2	14	84	**27-37**	3	7	157
1-16	924	251	14	**7-18**	4	21	15	**21-36**	4	16	68	**27-38**	5	9	263
1-17	521	162	9	**7-19**	35	79	12	**21-37**	6	23	109	**27-39**	55	12	79
1-18	118	72	13	**7-20**	78	162	29	**21-38**	8	30	178	**27-40**	124	19	713
1-19	992	275	4	**8-9**	1	31	2	**21-39**	86	38	60	**28-29**	1	13	12
1-20	2.178	556	6	**8-10**	3	61	9	**21-40**	194	53	556	**28-30**	3	27	54
2-3	272	52	98	**8-11**	3	76	7	**22-23**	5	0	74	**28-31**	3	46	28
2-4	545	104	150	**8-12**	2	92	28	**22-24**	10	0	43	**28-32**	3	64	28
2-5	332	80	320	**8-13**	2	52	14	**22-25**	5	0	54	**28-33**	1	50	30
2-6	119	56	625	**8-14**	2	12	10	**22-26**	3	0	14	**28-34**	0	37	40
2-7	179	54	1.627	**8-15**	17	43	9	**22-27**	1	0	17	**28-35**	1	21	111
2-8	238	51	916	**8-16**	32	73	1	**22-28**	1	0	37	**28-36**	2	6	107
2-9	140	165	1.216	**8-17**	18	43	3	**22-29**	1	3	43	**28-37**	3	3	163
2-10	42	278	1.242	**8-18**	4	12	4	**22-30**	2	7	53	**28-38**	5	0	350
2-11	35	180	868	**8-19**	34	75	8	**22-31**	2	25	21	**28-39**	53	1	82
2-12	27	82	1.369	**8-20**	76	162	15	**22-32**	2	44	28	**28-40**	120	4	783
2-13	33	43	928	**9-10**	1	31	6	**22-33**	1	24	18	**29-30**	1	13	22
2-14	39	3	656	**9-11**	2	203	11	**22-34**	0	5	12	**29-31**	1	52	23
2-15	218	55	712	**9-12**	2	376	25	**22-35**	1	6	40	**29-32**	1	92	37
2-16	396	108	53	**9-13**	2	215	20	**22-36**	1	7	55	**29-33**	1	74	27
2-17	223	69	112	**9-14**	2	53	11	**22-37**	2	9	64	**29-34**	0	58	33
2-18	50	31	153	**9-15**	16	107	17	**22-38**	3	12	125	**29-35**	0	36	88
2-19	425	117	48	**9-16**	30	162	3	**22-39**	37	16	50	**29-36**	1	13	88
2-20	933	238	90	**9-17**	17	127	6	**22-40**	82	22	376	**29-37**	2	15	152
3-4	0	0	9	**9-18**	4	93	7	**23-24**	0	0	26	**29-38**	2	18	309
3-5	2	17	27	**9-19**	33	176	8	**23-25**	1	0	42	**29-39**	30	18	65
3-6	4	35	77	**9-20**	72	303	15	**23-26**	6	0	16	**29-40**	67	23	701
3-7	7	31	261	**10-11**	1	331	10	**23-27**	2	0	18	**30-31**	0	59	18
3-8	9	25	180	**10-12**	2	662	36	**23-28**	1	0	34	**30-32**	0	119	31
3-9	5	92	158	**10-13**	2	379	33	**23-29**	2	6	50	**30-33**	0	99	32
3-10	1	157	159	**10-14**	3	95	18	**23-30**	3	12	69	**30-34**	0	79	46
3-11	1	113	132	**10-15**	16	172	29	**23-31**	3	15	27	**30-35**	0	50	131
3-12	1	68	142	**10-16**	29	250	8	**23-32**	3	19	26	**30-36**	0	21	103
3-13	1	37	105	**10-17**	16	212	14	**23-33**	2	9	26	**30-37**	0	28	174
3-14	1	4	112	**10-18**	3	174	15	**23-34**	0	0	20	**30-38**	0	37	382
3-15	8	42	64	**10-19**	31	277	12	**23-35**	1	4	52	**30-39**	6	37	80
3-16	15	79	12	**10-20**	69	444	23	**23-36**	2	9	55	**30-40**	15	43	919
3-17	8	42	13	**11-12**	1	331	17	**23-37**	4	9	83	**31-32**	0	59	10
3-18	2	4	21	**11-13**	1	216	25	**23-38**	5	10	177	**31-33**	0	119	24
3-19	16	59	5	**11-14**	2	101	14	**23-39**	57	16	70	**31-34**	0	178	28
3-20	36	132	13	**11-15**	14	171	29	**23-40**	128	25	538	**31-35**	0	104	73
4-5	4	35	22	**11-16**	25	242	8	**24-25**	2	0	27	**31-36**	0	28	51
4-6	9	70	109	**11-17**	14	207	19	**24-26**	12	0	17	**31-37**	0	40	137
4-7	14	61	326	**11-18**	3	171	21	**24-27**	4	0	16	**31-38**	0	50	257
4-8	18	52	218	**11-19**	27	265	16	**24-28**	3	0	28	**31-39**	8	47	41
4-9	11	183	316	**11-20**	59	418	23	**24-29**	5	12	39	**31-40**	18	51	577
4-10	3	314	267	**12-13**	1	53	19	**24-30**	6	24	59	**32-33**	0	138	5
4-11	2	226	177	**12-14**	2	107	19	**24-31**	6	32	30	**32-34**	0	278	15
4-12	2	137	427	**12-15**	11	171	50	**24-32**	7	40	17	**32-35**	0	157	30
4-13	2	73	313	**12-16**	21	235	13	**24-33**	4	19	20	**32-36**	0	37	29
4-14	3	9	234	**12-17**	12	201	25	**24-34**	1	0	20	**32-37**	0	50	62
4-15	17	83	206	**12-18**	2	168	44	**24-35**	3	9	62	**32-38**	1	64	137
4-16	31	159	15	**12-19**	22	252	28	**24-36**	5	18	54	**32-39**	10	57	30
4-17	17	83	32	**12-20**	50	393	49	**24-37**	8	19	99	**32-40**	22	59	264
4-18	4	9	35	**13-14**	1	53	3	**24-38**	10	21	199	**33-34**	0	138	7
4-19	33	118	14	**13-15**	12	102	12	**24-39**	115	33	73	**33-35**	0	124	40
4-20	73	265	23	**13-16**	24	151	4	**24-40**	255	51	627	**33-36**	0	110	41
5-6	4	35	65	**13-17**	13	120	9	**25-26**	6	0	15	**33-37**	1	119	102

5-7	12	37	248	**13-18**	3	90	12	**25-27**	2	0	19	**33-38**	1	129	262
5-8	19	38	212	**13-19**	25	155	13	**25-28**	2	1	43	**33-39**	18	119	83
5-9	11	130	255	**13-20**	56	256	18	**25-29**	3	16	71	**33-40**	40	128	583
5-10	3	223	231	**14-15**	13	34	5	**25-30**	4	32	107	**34-35**	0	92	4
5-11	2	178	215	**14-16**	26	67	5	**25-31**	5	74	43	**34-36**	1	183	9
5-12	2	134	472	**14-17**	15	40	8	**25-32**	5	116	37	**34-37**	1	189	24
5-13	2	76	290	**14-18**	3	12	15	**25-33**	3	68	26	**34-38**	2	195	40
5-14	3	19	267	**14-19**	28	57	9	**25-34**	1	19	31	**34-39**	26	181	14
5-15	17	82	158	**14-20**	63	119	12	**25-35**	2	15	122	**34-40**	57	196	99
5-16	32	144	13	**15-16**	13	34	5	**25-36**	4	11	91	**35-36**	0	92	10
5-17	18	82	28	**15-17**	8	85	6	**25-37**	5	15	170	**35-37**	1	113	28
5-18	4	19	29	**15-18**	3	138	20	**25-38**	7	19	285	**35-38**	2	134	70
5-19	34	101	16	**15-19**	32	238	23	**25-39**	85	28	98	**35-39**	27	119	32
5-20	76	214	22	**15-20**	72	395	25	**25-40**	191	43	842	**35-40**	61	121	246
6-7	10	12	56	**16-17**	2	132	4	**26-27**	2	4	3	**36-37**	1	37	19
6-8	20	24	71	**16-18**	4	266	14	**26-28**	4	8	12	**36-38**	2	73	89
6-9	12	77	110	**16-19**	37	420	8	**26-29**	5	51	21	**36-39**	29	56	47
6-10	3	131	72	**16-20**	81	671	12	**26-30**	7	94	44	**36-40**	66	47	439
6-11	3	131	67	**17-18**	2	132	21	**26-31**	8	273	26	**37-38**	1	37	34
6-12	2	131	176	**17-19**	33	385	28	**26-32**	8	453	24	**37-39**	59	64	29
6-13	3	80	113	**17-20**	75	743	36	**26-33**	4	273	12	**37-40**	139	109	274
6-14	3	31	80	**18-19**	30	349	49	**26-34**	1	94	29	**38-39**	90	73	20
6-15	18	80	61	**18-20**	70	816	76	**26-35**	3	53	64	**38-40**	211	171	210
6-16	33	131	7	**19-20**	35	408	74	**26-36**	6	12	66	**39-40**	105	85	17

Tabla A-3. Matrices de demanda origen-destino para escenarios 3, 6 y 9.

O/D	E3	E6	E9	O/D	E3	E6	E9	O/D	E3	E6	E9	O/D	E3	E6	E9	O/D	E3	E6	E9	O/D	E3	E6	E9	O/D	E3	E6	E9	O/D	E3	E6	E9
1-2	0	0	1	**6-17**	1	15	63	**12-29**	2	14	8	**20-36**	0	44	6	**41-42**	0	0	43	**46-57**	0	0	11	**52-69**	0	19	15	**60-76**	0	9	52
1-3	27	27	10	**6-18**	1	23	34	**12-30**	4	20	13	**20-37**	4	57	3	**41-43**	0	0	16	**46-58**	0	1	5	**52-70**	0	14	15	**60-77**	0	9	10
1-4	54	54	3	**6-19**	0	31	37	**12-31**	6	27	3	**20-38**	7	71	2	**41-44**	1	1	50	**46-59**	0	2	10	**52-71**	1	8	3	**60-78**	1	9	16
1-5	142	49	3	**6-20**	0	40	50	**12-32**	8	33	0	**20-39**	15	103	0	**41-45**	2	0	63	**46-60**	0	3	8	**52-72**	1	3	30	**60-79**	3	11	82
1-6	230	43	9	**6-21**	0	34	62	**12-33**	6	27	3	**20-40**	25	158	9	**41-46**	3	0	23	**46-61**	0	3	2	**52-73**	1	4	38	**60-80**	5	15	309
1-7	345	65	8	**6-22**	0	28	18	**12-34**	4	20	1	**21-22**	0	42	1	**41-47**	5	0	36	**46-62**	0	3	7	**52-74**	2	6	20	**61-62**	0	7	1
1-8	460	86	8	**6-23**	0	23	33	**12-35**	2	14	1	**21-23**	0	84	6	**41-48**	8	0	22	**46-63**	0	4	6	**52-75**	2	8	60	**61-63**	0	15	2
1-9	370	77	23	**6-24**	0	17	42	**12-36**	1	7	5	**21-24**	0	127	5	**41-49**	6	0	16	**46-64**	0	4	4	**52-76**	2	11	37	**61-64**	0	22	5
1-10	280	67	13	**6-25**	0	13	23	**12-37**	5	15	1	**21-25**	0	101	6	**41-50**	4	0	32	**46-65**	0	3	5	**52-77**	19	13	8	**61-65**	0	25	5
1-11	190	56	51	**6-26**	0	9	31	**12-38**	9	21	2	**21-26**	0	76	6	**41-51**	3	0	5	**46-66**	0	2	5	**52-78**	34	15	18	**61-66**	0	27	8
1-12	100	47	44	**6-27**	0	5	41	**12-39**	17	35	0	**21-27**	0	50	6	**41-52**	3	0	6	**46-67**	0	1	2	**52-79**	63	20	53	**61-67**	0	30	8
1-13	125	46	46	**6-28**	0	1	17	**12-40**	28	57	17	**21-28**	0	25	2	**41-53**	2	0	4	**46-68**	0	0	2	**52-80**	107	29	174	**61-68**	0	32	5
1-14	151	45	61	**6-29**	1	5	17	**13-14**	1	1	4	**21-29**	2	34	6	**41-54**	1	0	5	**46-69**	0	0	8	**53-54**	0	0	1	**61-69**	0	26	19
1-15	176	44	63	**6-30**	2	11	12	**13-15**	2	3	3	**21-30**	3	44	10	**41-55**	0	0	11	**46-70**	0	1	8	**53-55**	0	0	1	**61-70**	0	19	23
1-16	201	42	40	**6-31**	2	15	5	**13-16**	3	4	9	**21-31**	5	53	4	**41-56**	0	0	6	**46-71**	0	1	1	**53-56**	0	1	1	**61-71**	0	13	7
1-17	160	90	54	**6-32**	3	20	0	**13-17**	3	11	10	**21-32**	6	63	1	**41-57**	0	1	24	**46-72**	0	2	20	**53-57**	0	4	3	**61-72**	0	6	15
1-18	119	137	25	**6-33**	2	15	5	**13-18**	2	17	9	**21-33**	5	57	9	**41-58**	1	2	11	**46-73**	0	2	20	**53-58**	0	8	3	**61-73**	0	7	42
1-19	77	184	29	**6-34**	2	11	2	**13-19**	1	23	6	**21-34**	3	53	4	**41-59**	1	4	18	**46-74**	1	2	9	**53-59**	1	13	12	**61-74**	0	8	29
1-20	35	231	19	**6-35**	1	5	1	**13-20**	0	28	5	**21-35**	2	48	2	**41-60**	1	5	19	**46-75**	1	2	33	**53-60**	1	16	8	**61-75**	0	9	70
1-21	32	191	83	**6-36**	0	1	9	**13-21**	0	29	8	**21-36**	0	44	11	**41-61**	1	13	3	**46-76**	1	2	31	**53-61**	1	30	5	**61-76**	0	11	36
1-22	29	150	23	**6-37**	2	7	2	**13-22**	0	29	3	**21-37**	4	56	6	**41-62**	1	21	13	**46-77**	7	3	4	**53-62**	1	45	7	**61-77**	0	11	8
1-23	26	109	44	**6-38**	4	15	1	**13-23**	0	30	9	**21-38**	7	69	4	**41-63**	1	28	5	**46-78**	15	4	19	**53-63**	1	59	8	**61-78**	1	11	10
1-24	23	69	78	**6-39**	7	27	0	**13-24**	0	30	27	**21-39**	14	100	0	**41-64**	1	37	4	**46-79**	27	5	34	**53-64**	1	74	3	**61-79**	3	13	46
1-25	26	52	30	**6-40**	13	47	7	**13-25**	0	24	10	**21-40**	23	154	16	**41-65**	1	28	4	**46-80**	46	8	123	**53-65**	1	59	4	**61-80**	5	17	141
1-26	28	35	70	**7-8**	0	0	2	**13-26**	0	19	19	**22-23**	0	42	2	**41-66**	1	20	3	**47-48**	0	0	4	**53-66**	0	45	4	**62-63**	0	7	0
1-27	30	19	43	**7-9**	0	3	4	**13-27**	0	13	14	**22-24**	0	84	5	**41-67**	0	12	9	**47-49**	0	0	2	**53-67**	0	30	5	**62-64**	0	15	2
1-28	33	2	5	**7-10**	0	6	9	**13-28**	0	6	1	**22-25**	0	70	5	**41-68**	0	4	0	**47-50**	0	0	14	**53-68**	0	17	4	**62-65**	0	22	7
1-29	108	24	12	**7-11**	1	9	38	**13-29**	2	12	6	**22-26**	0	55	8	**41-69**	0	4	9	**47-51**	1	0	4	**53-69**	0	13	20	**62-66**	0	30	4
1-30	184	46	15	**7-12**	1	13	32	**13-30**	4	18	6	**22-27**	0	40	4	**41-70**	0	4	10	**47-52**	2	0	8	**53-70**	0	9	19	**62-67**	0	38	8
1-31	259	68	7	**7-13**	2	13	49	**13-31**	6	24	2	**22-28**	0	25	2	**41-71**	1	5	4	**47-53**	1	0	4	**53-71**	0	5	7	**62-68**	0	45	8
1-32	335	90	1	**7-14**	2	12	149	**13-32**	8	29	0	**22-29**	2	34	4	**41-72**	1	5	11	**47-54**	0	0	6	**53-72**	1	2	35	**62-69**	0	35	19
1-33	261	74	4	**7-15**	3	11	63	**13-33**	6	24	2	**22-30**	3	44	7	**41-73**	1	6	8	**47-55**	0	0	10	**53-73**	1	3	39	**62-70**	0	26	12
1-34	188	57	1	**7-16**	3	9	70	**13-34**	4	18	0	**22-31**	4	52	2	**41-74**	2	8	5	**47-56**	0	0	5	**53-74**	1	4	16	**62-71**	0	17	10
1-35	115	42	1	**7-17**	2	22	86	**13-35**	2	12	1	**22-32**	6	61	1	**41-75**	2	9	15	**47-57**	0	1	13	**53-75**	1	5	62	**62-72**	0	7	18
1-36	42	25	7	**7-18**	2	34	116	**13-36**	1	6	4	**22-33**	4	57	3	**41-76**	2	11	7	**47-58**	0	2	13	**53-76**	2	6	28	**62-73**	0	8	36
1-37	201	61	1	**7-19**	1	47	128	**13-37**	4	14	2	**22-34**	3	52	2	**41-77**	17	12	2	**47-59**	1	3	18	**53-77**	13	7	8	**62-74**	0	9	30
1-38	359	98	0	**7-20**	0	59	40	**13-38**	8	21	2	**22-35**	2	48	2	**41-78**	31	13	6	**47-60**	1	4	19	**53-78**	24	8	26	**62-75**	0	12	81
1-39	654	168	0	**7-21**	0	51	64	**13-39**	17	34	0	**22-36**	0	44	5	**41-79**	57	18	17	**47-61**	1	5	4	**53-79**	45	12	67	**62-76**	0	13	68
1-40	1.105	277	2	**7-22**	0	43	31	**13-40**	28	57	10	**22-37**	3	55	3	**41-80**	98	26	37	**47-62**	1	5	14	**53-80**	76	18	261	**62-77**	1	12	10
2-3	12	12	12	**7-23**	0	34	125	**14-15**	1	1	2	**22-38**	6	68	2	**42-43**	0	0	30	**47-63**	1	6	7	**54-55**	0	0	1	**62-78**	2	12	14
2-4	23	23	4	**7-24**	0	26	189	**14-16**	2	3	10	**22-39**	13	98	0	**42-44**	0	0	124	**47-64**	1	7	2	**54-56**	0	0	2	**62-79**	3	14	85
2-5	60	21	7	**7-25**	0	20	92	**14-17**	2	8	9	**22-40**	21	149	7	**42-45**	1	0	126	**47-65**	1	5	8	**54-57**	0	2	4	**62-80**	6	18	302
2-6	98	18	9	**7-26**	0	14	137	**14-18**	1	14	10	**23-24**	0	42	2	**42-46**	1	0	79	**47-66**	0	3	6	**54-58**	0	4	8	**63-64**	0	7	2
2-7	148	27	11	**7-27**	0	7	156	**14-19**	1	19	12	**23-25**	0	38	5	**42-47**	2	0	54	**47-67**	0	1	8	**54-59**	0	6	20	**63-65**	0	20	2
2-8	198	37	7	**7-28**	0	1	12	**14-20**	0	24	8	**23-26**	0	34	9	**42-48**	3	0	39	**47-68**	0	0	2	**54-60**	0	8	16	**63-66**	0	32	1

2-9	158	32	31	**7-29**	1	8	65	**14-21**	0	25	13	**23-27**	0	30	10	**42-49**	2	0	31	**47-69**	0	0	22	**54-61**	0	15	6	**63-67**	0	45	6
2-10	120	28	14	**7-30**	3	16	73	**14-22**	0	26	6	**23-28**	0	26	4	**42-50**	1	0	89	**47-70**	0	1	10	**54-62**	0	21	12	**63-68**	0	58	3
2-11	81	24	61	**7-31**	4	23	9	**14-23**	0	27	15	**23-29**	1	34	9	**42-51**	1	0	10	**47-71**	0	2	3	**54-63**	0	26	7	**63-69**	0	46	10
2-12	43	20	43	**7-32**	5	30	0	**14-24**	0	28	26	**23-30**	3	44	22	**42-52**	1	0	21	**47-72**	0	3	27	**54-64**	0	32	13	**63-70**	0	33	10
2-13	53	19	49	**7-33**	4	23	12	**14-25**	0	22	8	**23-31**	4	52	7	**42-53**	0	0	23	**47-73**	1	3	35	**54-65**	0	27	10	**63-71**	0	21	9
2-14	65	19	98	**7-34**	3	16	5	**14-26**	0	17	17	**23-32**	5	60	4	**42-54**	0	0	25	**47-74**	1	3	19	**54-66**	0	21	5	**63-72**	0	8	11
2-15	75	19	61	**7-35**	1	8	6	**14-27**	0	11	16	**23-33**	4	56	12	**42-55**	0	0	42	**47-75**	1	3	56	**54-67**	0	15	9	**63-73**	0	9	26
2-16	86	18	42	**7-36**	0	1	15	**14-28**	0	5	4	**23-34**	3	52	6	**42-56**	0	0	30	**47-76**	1	3	52	**54-68**	0	9	7	**63-74**	0	12	16
2-17	69	39	53	**7-37**	3	12	5	**14-29**	2	11	7	**23-35**	1	47	4	**42-57**	0	0	45	**47-77**	12	4	14	**54-69**	0	7	30	**63-75**	0	13	54
2-18	50	58	34	**7-38**	6	22	3	**14-30**	4	16	10	**23-36**	0	43	23	**42-58**	0	1	19	**47-78**	22	6	33	**54-70**	0	5	33	**63-76**	0	15	44
2-19	32	79	41	**7-39**	12	42	1	**14-31**	6	21	3	**23-37**	3	54	9	**42-59**	0	1	71	**47-79**	41	8	75	**54-71**	0	3	21	**63-77**	1	14	9
2-20	15	99	23	**7-40**	20	71	11	**14-32**	8	26	0	**23-38**	6	66	9	**42-60**	0	2	44	**47-80**	69	14	280	**54-72**	0	1	42	**63-78**	2	13	10
2-21	14	81	77	**8-9**	0	4	3	**14-33**	6	21	5	**23-39**	12	95	3	**42-61**	0	5	10	**48-49**	0	0	2	**54-73**	0	1	71	**63-79**	4	15	56
2-22	13	64	25	**8-10**	1	8	5	**14-34**	4	16	1	**23-40**	20	145	27	**42-62**	0	8	25	**48-50**	0	0	8	**54-74**	0	1	31	**63-80**	7	19	139
2-23	10	47	39	**8-11**	1	13	26	**14-35**	2	11	1	**24-25**	0	6	1	**42-63**	0	12	16	**48-51**	1	0	2	**54-75**	1	2	113	**64-65**	0	18	1
2-24	9	29	91	**8-12**	2	18	13	**14-36**	1	5	9	**24-26**	0	14	4	**42-64**	0	16	22	**48-52**	3	0	3	**54-76**	1	2	59	**64-66**	0	35	1
2-25	10	22	21	**8-13**	2	17	29	**14-37**	4	13	6	**24-27**	0	20	4	**42-65**	0	12	20	**48-53**	2	0	3	**54-77**	7	2	15	**64-67**	0	53	2
2-26	12	15	59	**8-14**	3	16	97	**14-38**	8	20	3	**24-28**	0	27	1	**42-66**	0	8	22	**48-54**	1	0	4	**54-78**	14	3	30	**64-68**	0	71	3
2-27	13	7	32	**8-15**	4	14	31	**14-39**	17	34	1	**24-29**	1	35	6	**42-67**	0	5	23	**48-55**	0	0	9	**54-79**	26	4	88	**64-69**	0	55	5
2-28	14	1	6	**8-16**	4	13	53	**14-40**	28	57	17	**24-30**	2	44	12	**42-68**	0	1	2	**48-56**	0	0	5	**54-80**	45	6	294	**64-70**	0	40	4
2-29	46	11	21	**8-17**	3	29	55	**15-16**	1	1	0	**24-31**	4	51	2	**42-69**	0	1	33	**48-57**	1	1	8	**55-56**	0	0	2	**64-71**	0	24	3
2-30	78	20	14	**8-18**	2	47	58	**15-17**	1	5	0	**24-32**	5	59	0	**42-70**	0	2	32	**48-58**	1	3	5	**55-57**	0	1	2	**64-72**	0	9	5
2-31	110	29	5	**8-19**	1	64	57	**15-18**	0	11	1	**24-33**	4	55	4	**42-71**	0	2	9	**48-59**	1	4	10	**55-58**	0	3	7	**64-73**	0	11	9
2-32	144	39	0	**8-20**	0	80	42	**15-19**	0	15	3	**24-34**	3	51	3	**42-72**	0	2	43	**48-60**	1	6	12	**55-59**	0	5	20	**64-74**	0	13	10
2-33	111	31	3	**8-21**	0	69	59	**15-20**	0	20	2	**24-35**	1	47	4	**42-73**	0	2	64	**48-61**	1	6	5	**55-60**	0	7	19	**64-75**	0	15	20
2-34	80	24	1	**8-22**	0	57	23	**15-21**	0	21	2	**24-36**	0	43	12	**42-74**	0	3	32	**48-62**	1	7	7	**55-61**	0	12	7	**64-76**	0	16	18
2-35	49	18	1	**8-23**	0	46	54	**15-22**	0	23	1	**24-37**	3	53	6	**42-75**	1	3	92	**48-63**	1	8	3	**55-62**	0	16	11	**64-77**	1	15	7
2-36	18	11	4	**8-24**	0	34	56	**15-23**	0	24	3	**24-38**	5	65	3	**42-76**	1	4	63	**48-64**	1	9	5	**55-63**	0	20	9	**64-78**	2	15	4
2-37	85	26	1	**8-25**	0	26	43	**15-24**	0	25	8	**24-39**	10	92	0	**42-77**	7	4	16	**48-65**	1	7	4	**55-64**	0	24	7	**64-79**	4	16	15
2-38	154	42	2	**8-26**	0	19	40	**15-25**	0	20	2	**24-40**	18	141	19	**42-78**	13	5	36	**48-66**	1	4	2	**55-65**	0	21	11	**64-80**	7	21	53
2-39	280	72	0	**8-27**	0	11	53	**15-26**	0	15	2	**25-26**	0	6	1	**42-79**	24	7	131	**48-67**	0	2	7	**55-66**	0	17	8	**65-66**	0	18	1
2-40	473	119	4	**8-28**	0	2	13	**15-27**	0	9	2	**25-27**	0	14	1	**42-80**	42	11	369	**48-68**	0	0	2	**55-67**	0	13	9	**65-67**	0	35	1
3-4	0	0	28	**8-29**	2	12	34	**15-28**	0	4	0	**25-28**	0	20	1	**43-44**	0	0	15	**48-69**	0	1	15	**55-68**	0	9	10	**65-68**	0	53	1
3-5	17	3	46	**8-30**	4	21	32	**15-29**	2	8	1	**25-29**	1	27	2	**43-45**	0	0	30	**48-70**	0	2	15	**55-69**	0	7	36	**65-69**	0	44	3
3-6	34	6	46	**8-31**	6	30	5	**15-30**	4	13	3	**25-30**	2	34	4	**43-46**	0	0	26	**48-71**	1	3	2	**55-70**	0	5	33	**65-70**	0	35	8
3-7	52	9	55	**8-32**	7	41	1	**15-31**	6	18	0	**25-31**	4	42	2	**43-47**	0	0	18	**48-72**	1	4	22	**55-71**	0	3	20	**65-71**	0	27	5
3-8	70	13	73	**8-33**	6	30	13	**15-32**	8	22	0	**25-32**	5	49	0	**43-48**	1	0	12	**48-73**	1	4	30	**55-72**	0	1	46	**65-72**	0	19	11
3-9	56	12	123	**8-34**	4	21	3	**15-33**	6	18	2	**25-33**	4	45	2	**43-49**	0	0	7	**48-74**	2	4	15	**55-73**	0	1	60	**65-73**	0	20	19
3-10	43	9	148	**8-35**	2	12	1	**15-34**	4	13	0	**25-34**	3	41	3	**43-50**	0	0	28	**48-75**	2	5	47	**55-74**	0	1	31	**65-74**	0	21	20
3-11	29	8	298	**8-36**	1	2	13	**15-35**	2	8	0	**25-35**	1	37	1	**43-51**	0	0	3	**48-76**	2	5	44	**55-75**	1	1	138	**65-75**	0	23	43
3-12	15	6	201	**8-37**	4	16	4	**15-36**	1	4	2	**25-36**	0	32	4	**43-52**	0	0	4	**48-77**	16	6	8	**55-76**	1	1	76	**65-76**	0	24	41
3-13	19	6	300	**8-38**	8	30	2	**15-37**	4	12	1	**25-37**	3	42	3	**43-53**	0	0	4	**48-78**	29	8	18	**55-77**	7	1	21	**65-77**	1	23	11
3-14	23	6	999	**8-39**	16	55	0	**15-38**	8	20	3	**25-38**	5	52	2	**43-54**	0	0	6	**48-79**	54	12	59	**55-78**	14	1	30	**65-78**	3	22	10
3-15	26	6	331	**8-40**	26	95	11	**15-39**	16	34	0	**25-39**	10	75	0	**43-55**	0	0	13	**48-80**	92	18	211	**55-79**	25	2	111	**65-79**	6	25	35
3-16	30	6	379	**9-10**	0	4	2	**15-40**	27	57	6	**25-40**	19	116	7	**43-56**	0	0	10	**49-50**	0	0	3	**55-80**	44	4	328	**65-80**	10	33	140
3-17	24	14	382	**9-11**	1	8	26	**16-17**	0	3	0	**26-27**	0	6	0	**43-57**	0	0	18	**49-51**	1	0	4	**56-57**	0	1	1	**66-67**	0	18	2
3-18	18	21	582	**9-12**	1	13	24	**16-18**	0	7	0	**26-28**	0	14	1	**43-58**	0	0	9	**49-52**	2	0	4	**56-58**	0	3	2	**66-68**	0	35	2
3-19	12	28	647	**9-13**	2	13	36	**16-19**	0	12	1	**26-29**	1	20	3	**43-59**	0	0	16	**49-53**	1	0	4	**56-59**	0	5	9	**66-69**	0	33	14
3-20	5	35	349	**9-14**	3	13	124	**16-20**	0	16	4	**26-30**	3	26	3	**43-60**	0	0	13	**49-54**	0	0	2	**56-60**	0	6	6	**66-70**	0	31	14
3-21	4	29	563	**9-15**	3	12	58	**16-21**	0	17	3	**26-31**	4	32	1	**43-61**	0	2	3	**49-55**	0	0	7	**56-61**	0	9	4	**66-71**	0	29	9
3-22	4	23	134	**9-16**	4	12	81	**16-22**	0	19	1	**26-32**	6	39	1	**43-62**	0	3	9	**49-56**	0	0	9	**56-62**	0	12	7	**66-72**	0	28	16
3-23	3	17	622	**9-17**	3	25	66	**16-23**	0	21	5	**26-33**	4	34	2	**43-63**	0	4	8	**49-57**	0	1	13	**56-63**	0	14	5	**66-73**	0	29	32
3-24	3	11	482	**9-18**	2	40	94	**16-24**	0	23	12	**26-34**	3	30	2	**43-64**	0	5	9	**49-58**	1	3	10	**56-64**	0	16	8	**66-74**	0	30	31
3-25	3	7	335	**9-19**	1	54	96	**16-25**	0	18	4	**26-35**	2	26	2	**43-65**	0	4	5	**49-59**	1	5	17	**56-65**	0	15	7	**66-75**	0	31	86
3-26	4	5	377	**9-20**	0	69	36	**16-26**	0	13	6	**26-36**	0	23	4	**43-66**	0	3	8	**49-60**	1	6	13	**56-66**	0	13	4	**66-76**	0	32	91
3-27	4	2	413	**9-21**	0	59	95	**16-27**	0	7	6	**26-37**	3	31	4	**43-67**	0	1	8	**49-61**	1	9	1	**56-67**	0	11	10	**66-77**	2	31	31
3-28	4	0	85	**9-22**	0	51	40	**16-28**	0	3	1	**26-38**	6	40	4	**43-68**	0	0	0	**49-62**	1	14	9	**56-68**	0	9	10	**66-78**	4	30	30
3-29	17	3	206	**9-23**	0	43	104	**16-29**	2	6	2	**26-39**	12	58	0	**43-69**	0	0	12	**49-63**	1	17	5	**56-69**	0	7	23	**66-79**	8	34	70
3-30	28	6	339	**9-24**	0	34	235	**16-30**	4	11	2	**26-40**	20	92	11	**43-70**	0	0	11	**49-64**	1	20	6	**56-70**	0	5	19	**66-80**	15	46	335
3-31	40	11	34	**9-25**	0	26	77	**16-31**	6	15	0	**27-28**	0	6	1	**43-71**	0	0	2	**49-65**	1	15	6	**56-71**	0	3	9	**67-68**	0	18	1
3-32	51	14	5	**9-26**	0	19	129	**16-32**	8	19	0	**27-29**	1	12	1	**43-72**	0	0	31	**49-66**	0	11	2	**56-72**	0	1	31	**67-69**	0	22	1
3-33	40	11	75	**9-27**	0	11	188	**16-33**	6	15	1	**27-30**	3	17	1	**43-73**	0	1	22	**49-67**	0	6	5	**56-73**	0	1	45	**67-70**	0	27	2
3-34	28	8	15	**9-28**	0	3	8	**16-34**	4	11	0	**27-31**	4	22	1	**43-74**	0	1	15	**49-68**	0	2	2	**56-74**	0	0	27	**67-71**	0	32	1
3-35	18	6	14	**9-29**	2	12	48	**16-35**	2	6	1	**27-32**	6	27	1	**43-75**	0	1	40	**49-69**	0	2	15	**56-75**	1	0	85	**67-72**	0	38	5
3-36	6	3	109	**9-30**	4	21	55	**16-36**	1	3	1	**27-33**	4	24	2	**43-76**	0	1	31	**49-70**	0	3	12	**56-76**	1	0	50	**67-73**	0	38	10
3-37	30	9	26	**9-31**	6	29	10	**16-37**	4	11	1	**27-34**	3	20	1	**43-77**	2	1	4	**49-71**	0	3	4	**56-77**	7	0	10	**67-74**	0	39	8
3-38	54	15	13	**9-32**	7	39	1	**16-38**	8	19	2	**27-35**	2	17	1	**43-78**	4	2	18	**49-72**	1	3	16	**56-78**	14	0	20	**67-75**	0	40	11
3-39	100	25	3	**9-33**	6	29	14	**16-39**	16	34	0	**27-36**	0	13	5	**43-79**	8	2	44	**49-73**	1	3	24	**56-79**	25	0	68	**67-76**	0	41	13
3-40	168	42	67	**9-34**	4	21	4	**16-40**	27	57	8	**27-37**	3	20	2	**43-80**	15	3	126	**49-74**	1	4	18	**56-80**	43	1	272	**67-77**	2	40	3
4-5	34	6	1	**9-35**	2	12	3	**17-18**	0	3	1	**27-38**	6	27	2	**44-45**	0	0	9	**49-75**	1	4	39	**57-58**	0	1	1	**67-78**	5	38	5
4-6	70	13	4	**9-36**	1	3	17	**17-19**	0	7	3	**27-39**	13	42	0	**44-46**	1	0	9	**49-76**	2	5	33	**57-59**	0	3	8	**67-79**	10	44	9
4-7	105	20	8	**9-37**	4	16	4	**17-20**	0	12	1	**27-40**	21	67	8	**44-47**	1	0	7	**49-77**	14	6	7	**57-60**	0	5	10	**67-80**	17	57	52
4-8	140	26	14	**9-38**	8	27	5	**17-21**	0	23	2	**28-29**	1	4	1	**44-48**	2	0	5	**49-78**	25	7	13	**57-61**	0	8	3	**68-69**	0	12	1
4-9	113	23	17	**9-39**	16	50	0	**17-22**	0	35	1	**28-30**	3	8	2	**44-49**	1	0	5	**49-79**	47	11	44	**57-62**	0	13	11	**68-70**	0	23	0
4-10	85	20	31	**9-40**	27	85	11	**17-23**	0	47	4	**28-31**	4	13	0	**44-50**	1	0	13	**49-80**	80	17	140	**57-63**	0	16	7	**68-71**	0	34	1
4-11	58	17	58	**10-11**	0	4	6	**17-24**	0	59	4	**28-32**	6	17	3	**44-51**	1	0	3	**50-51**	0	0	1	**57-64**	0	20	19	**68-72**	0	47	2
4-12	30	14	65	**10-12**	1	8	10	**17-25**	0	47	6	**28-33**	5	14	5	**44-52**	0	0	4	**50-52**	1	0	6	**57-65**	0	18	14	**68-73**	0	47	3

4-13	39	14	80	**10-13**	2	8	16	**17-26**	0	33	4	**28-34**	3	9	1	**44-53**	0	0	4	**50-53**	1	0	4	**57-66**	0	16	6	**68-74**	0	48	3
4-14	46	14	241	**10-14**	3	9	71	**17-27**	0	21	1	**28-35**	2	6	2	**44-54**	0	0	4	**50-54**	0	0	8	**57-67**	0	14	17	**68-75**	0	49	6
4-15	53	13	98	**10-15**	3	9	31	**17-28**	0	8	0	**28-36**	0	3	7	**44-55**	0	0	6	**50-55**	0	0	16	**57-68**	0	12	9	**68-76**	0	50	9
4-16	61	13	104	**10-16**	4	9	41	**17-29**	2	14	3	**28-37**	3	8	2	**44-56**	0	0	9	**50-56**	0	0	11	**57-69**	0	9	33	**68-77**	3	48	3
4-17	49	27	112	**10-17**	3	21	39	**17-30**	4	19	2	**28-38**	7	15	3	**44-57**	0	0	11	**50-57**	0	2	24	**57-70**	0	7	32	**68-78**	6	46	3
4-18	35	42	135	**10-18**	2	33	56	**17-31**	5	24	0	**28-39**	13	25	0	**44-58**	0	0	4	**50-58**	0	4	24	**57-71**	0	4	20	**68-79**	12	53	10
4-19	23	56	169	**10-19**	1	45	63	**17-32**	7	29	0	**28-40**	23	42	3	**44-59**	0	1	14	**50-59**	0	5	47	**57-72**	0	2	45	**68-80**	20	70	27
4-20	10	71	72	**10-20**	0	56	34	**17-33**	6	25	1	**29-30**	1	4	2	**44-60**	0	1	9	**50-60**	1	7	28	**57-73**	0	2	69	**69-70**	0	12	1
4-21	9	58	130	**10-21**	0	51	52	**17-34**	4	21	1	**29-31**	3	8	1	**44-61**	0	4	4	**50-61**	1	14	9	**57-74**	0	2	40	**69-71**	0	23	1
4-22	8	46	37	**10-22**	0	45	27	**17-35**	2	17	0	**29-32**	4	13	2	**44-62**	0	6	5	**50-62**	1	19	24	**57-75**	0	2	149	**69-72**	0	34	8
4-23	7	33	140	**10-23**	0	40	51	**17-36**	1	13	1	**29-33**	3	14	3	**44-63**	0	8	5	**50-63**	1	24	16	**57-76**	0	2	79	**69-73**	0	37	9
4-24	6	21	120	**10-24**	0	34	81	**17-37**	4	22	0	**29-34**	2	16	2	**44-64**	0	11	6	**50-64**	1	29	9	**57-77**	5	2	16	**69-74**	0	39	9
4-25	7	16	105	**10-25**	0	26	38	**17-38**	8	31	1	**29-35**	1	17	1	**44-65**	0	8	4	**50-65**	1	23	10	**57-78**	10	2	36	**69-75**	0	40	20
4-26	8	11	106	**10-26**	0	19	44	**17-39**	16	51	0	**29-36**	0	19	9	**44-66**	0	6	2	**50-66**	0	17	8	**57-79**	20	3	103	**69-76**	0	42	27
4-27	9	5	138	**10-27**	0	12	64	**17-40**	26	82	5	**29-37**	4	28	6	**44-67**	0	3	3	**50-67**	0	11	21	**57-80**	33	4	402	**69-77**	3	40	6
4-28	9	0	17	**10-28**	0	4	6	**18-19**	0	3	2	**29-38**	7	38	5	**44-68**	0	1	1	**50-68**	0	4	3	**58-59**	0	1	1	**69-78**	6	38	9
4-29	33	7	75	**10-29**	2	13	22	**18-20**	0	7	1	**29-39**	14	58	1	**44-69**	0	1	12	**50-69**	0	4	47	**58-60**	0	3	3	**69-79**	13	43	28
4-30	56	14	89	**10-30**	4	21	32	**18-21**	0	29	4	**29-40**	24	92	7	**44-70**	0	1	5	**50-70**	0	3	47	**58-61**	0	8	2	**69-80**	21	56	109
4-31	79	21	12	**10-31**	6	28	3	**18-22**	0	52	3	**30-31**	1	4	1	**44-71**	0	1	2	**50-71**	0	3	9	**58-62**	0	13	7	**70-71**	0	12	0
4-32	102	27	2	**10-32**	8	37	0	**18-23**	0	74	11	**30-32**	3	8	1	**44-72**	0	1	19	**50-72**	1	2	62	**58-63**	0	18	5	**70-72**	0	23	1
4-33	80	22	16	**10-33**	6	28	8	**18-24**	0	96	5	**30-33**	2	15	1	**44-73**	0	2	19	**50-73**	1	3	82	**58-64**	0	23	6	**70-73**	0	26	6
4-34	57	18	5	**10-34**	4	21	2	**18-25**	0	75	6	**30-34**	2	22	1	**44-74**	0	2	8	**50-74**	1	3	46	**58-65**	0	21	4	**70-74**	0	28	3
4-35	35	13	5	**10-35**	2	13	1	**18-26**	0	54	4	**30-35**	1	28	1	**44-75**	0	2	26	**50-75**	1	4	111	**58-66**	0	19	3	**70-75**	0	31	7
4-36	13	7	25	**10-36**	1	4	7	**18-27**	0	33	7	**30-36**	0	35	8	**44-76**	0	3	27	**50-76**	1	4	101	**58-67**	0	17	3	**70-76**	0	34	16
4-37	61	19	4	**10-37**	4	15	3	**18-28**	0	14	2	**30-37**	4	48	7	**44-77**	5	3	6	**50-77**	12	5	21	**58-68**	0	15	5	**70-77**	3	32	6
4-38	109	29	5	**10-38**	8	25	4	**18-29**	2	20	4	**30-38**	8	60	6	**44-78**	9	4	22	**50-78**	22	7	57	**58-69**	0	12	9	**70-78**	6	30	11
4-39	200	51	2	**10-39**	16	45	0	**18-30**	4	27	9	**30-39**	15	91	1	**44-79**	17	5	51	**50-79**	41	9	149	**58-70**	0	8	14	**70-79**	13	33	20
4-40	338	84	19	**10-40**	27	76	10	**18-31**	5	34	2	**30-40**	26	141	16	**44-80**	29	7	154	**50-80**	69	15	505	**58-71**	0	6	6	**70-80**	22	43	88
5-6	34	6	1	**11-12**	0	4	3	**18-32**	7	41	1	**31-32**	1	4	1	**45-46**	0	0	9	**51-52**	0	0	0	**58-72**	0	3	17	**71-72**	0	12	1
5-7	52	9	2	**11-13**	1	5	5	**18-33**	5	37	3	**31-33**	1	16	1	**45-47**	0	0	10	**51-53**	0	0	1	**58-73**	0	3	29	**71-73**	0	15	2
5-8	70	13	3	**11-14**	2	6	36	**18-34**	4	32	2	**31-34**	1	27	1	**45-48**	1	0	9	**51-54**	0	0	1	**58-74**	0	3	13	**71-74**	0	19	5
5-9	56	13	4	**11-15**	3	6	20	**18-35**	2	28	0	**31-35**	1	40	1	**45-49**	1	0	10	**51-55**	0	0	2	**58-75**	0	4	50	**71-75**	0	22	10
5-10	43	13	9	**11-16**	4	7	26	**18-36**	1	23	5	**31-36**	0	51	5	**45-50**	0	0	20	**51-56**	0	1	4	**58-76**	0	4	30	**71-76**	0	26	26
5-11	29	12	14	**11-17**	3	17	25	**18-37**	4	34	3	**31-37**	4	68	2	**45-51**	0	0	5	**51-57**	0	4	8	**58-77**	4	4	6	**71-77**	3	24	5
5-12	16	12	9	**11-18**	2	26	41	**18-38**	8	45	3	**31-38**	8	83	2	**45-52**	1	0	6	**51-58**	1	8	3	**58-78**	7	4	7	**71-78**	7	22	8
5-13	20	11	22	**11-19**	1	35	29	**18-39**	15	69	0	**31-39**	16	123	2	**45-53**	0	0	5	**51-59**	1	12	10	**58-79**	14	5	46	**71-79**	14	24	26
5-14	24	11	61	**11-20**	0	45	16	**18-40**	26	108	9	**31-40**	27	191	4	**45-54**	0	0	8	**51-60**	1	16	11	**58-80**	24	8	147	**71-80**	23	29	81
5-15	27	9	26	**11-21**	0	42	32	**19-20**	0	3	1	**32-33**	0	17	0	**45-55**	0	0	13	**51-61**	1	30	5	**59-60**	0	1	2	**72-73**	0	4	3
5-16	31	9	28	**11-22**	0	40	11	**19-21**	0	35	4	**32-34**	0	33	2	**45-56**	0	0	8	**51-62**	1	44	9	**59-61**	0	7	4	**72-74**	0	9	9
5-17	25	21	32	**11-23**	0	37	34	**19-22**	0	68	3	**32-35**	0	50	2	**45-57**	0	0	20	**51-63**	1	58	4	**59-62**	0	14	8	**72-75**	0	14	16
5-18	19	32	29	**11-24**	0	33	77	**19-23**	0	100	17	**32-36**	1	68	6	**45-58**	0	1	13	**51-64**	1	72	5	**59-63**	0	20	9	**72-76**	0	19	37
5-19	12	44	31	**11-25**	0	26	24	**19-24**	0	132	9	**32-37**	5	88	3	**45-59**	0	1	22	**51-65**	1	57	4	**59-64**	0	26	10	**72-77**	3	16	12
5-20	5	55	40	**11-26**	0	20	41	**19-25**	0	104	9	**32-38**	9	107	2	**45-60**	0	2	28	**51-66**	0	43	1	**59-65**	0	24	13	**72-78**	7	14	21
5-21	4	46	41	**11-27**	0	13	50	**19-26**	0	75	13	**32-39**	17	156	1	**45-61**	0	3	4	**51-67**	0	28	16	**59-66**	0	22	7	**72-79**	14	14	69
5-22	4	38	12	**11-28**	0	6	3	**19-27**	0	47	7	**32-40**	29	238	5	**45-62**	0	5	14	**51-68**	0	14	2	**59-67**	0	20	14	**72-80**	24	17	260
5-23	4	28	36	**11-29**	2	14	17	**19-28**	0	19	2	**33-34**	0	17	1	**45-63**	0	6	8	**51-69**	0	12	16	**59-68**	0	17	13	**73-74**	0	4	2
5-24	3	19	31	**11-30**	4	21	23	**19-29**	2	27	6	**33-35**	0	33	2	**45-64**	0	7	8	**51-70**	0	8	18	**59-69**	0	14	38	**73-75**	0	9	6
5-25	3	15	19	**11-31**	6	27	4	**19-30**	4	35	12	**33-36**	0	50	13	**45-65**	0	5	10	**51-71**	0	5	7	**59-70**	0	11	43	**73-76**	0	14	23
5-26	4	9	31	**11-32**	8	34	0	**19-31**	5	44	3	**33-37**	4	76	8	**45-66**	0	4	7	**51-72**	1	2	25	**59-71**	0	7	21	**73-77**	5	15	7
5-27	4	5	38	**11-33**	6	27	7	**19-32**	7	52	1	**33-38**	8	102	7	**45-67**	0	2	14	**51-73**	1	4	38	**59-72**	0	4	48	**73-78**	12	15	14
5-28	5	0	15	**11-34**	4	21	1	**19-33**	5	48	6	**33-39**	17	159	1	**45-68**	0	0	2	**51-74**	1	5	17	**59-73**	0	4	84	**73-79**	21	19	54
5-29	17	6	17	**11-35**	2	14	1	**19-34**	4	43	3	**33-40**	28	252	19	**45-69**	0	0	20	**51-75**	2	6	71	**59-74**	0	5	33	**73-80**	36	27	159
5-30	29	12	17	**11-36**	1	6	11	**19-35**	2	39	3	**34-35**	0	17	1	**45-70**	0	1	16	**51-76**	2	7	48	**59-75**	0	6	156	**74-75**	0	4	1
5-31	41	18	7	**11-37**	4	15	3	**19-36**	0	33	4	**34-36**	0	33	5	**45-71**	0	1	4	**51-77**	15	9	9	**59-76**	0	6	89	**74-76**	0	9	4
5-32	53	24	0	**11-38**	8	23	4	**19-37**	4	46	5	**34-37**	4	66	6	**45-72**	0	2	30	**51-78**	28	11	21	**59-77**	2	6	19	**74-77**	7	13	3
5-33	41	19	5	**11-39**	17	41	0	**19-38**	8	57	2	**34-38**	8	98	7	**45-73**	0	2	30	**51-79**	52	15	54	**59-78**	4	6	35	**74-78**	15	16	5
5-34	29	14	0	**11-40**	28	67	23	**19-39**	15	85	1	**34-39**	16	162	2	**45-74**	0	2	25	**51-80**	88	22	191	**59-79**	8	8	105	**74-79**	29	24	24
5-35	18	8	2	**12-13**	1	1	1	**19-40**	25	133	13	**34-40**	27	264	14	**45-75**	0	2	54	**52-53**	0	0	1	**59-80**	15	12	419	**74-80**	50	39	34
5-36	6	4	9	**12-14**	2	3	14	**20-21**	0	42	1	**35-36**	0	17	2	**45-76**	1	2	60	**52-54**	0	1	1	**60-61**	0	7	1	**75-76**	0	4	4
5-37	31	13	2	**12-15**	3	4	11	**20-22**	0	84	2	**35-37**	4	55	3	**45-77**	6	3	14	**52-55**	0	1	2	**60-62**	0	15	5	**75-77**	9	11	8
5-38	56	22	1	**12-16**	5	6	13	**20-23**	0	127	5	**35-38**	7	94	5	**45-78**	12	4	32	**52-56**	1	2	4	**60-63**	0	22	4	**75-78**	19	17	9
5-39	103	40	0	**12-17**	4	13	17	**20-24**	0	169	5	**35-39**	15	166	1	**45-79**	22	5	93	**52-57**	1	7	3	**60-64**	0	30	7	**75-79**	36	30	53
5-40	175	66	5	**12-18**	3	20	26	**20-25**	0	132	7	**35-40**	26	278	8	**45-80**	38	8	285	**52-58**	1	13	6	**60-65**	0	27	8	**75-80**	62	50	92
6-7	0	0	3	**12-19**	1	26	19	**20-26**	0	97	3	**36-37**	3	44	20	**46-47**	0	0	4	**52-59**	1	18	10	**60-66**	0	25	3	**76-77**	12	9	1
6-8	0	0	1	**12-20**	0	33	8	**20-27**	0	60	7	**36-38**	7	89	21	**46-48**	0	0	3	**52-60**	1	24	12	**60-67**	0	22	14	**76-78**	23	19	2
6-9	0	2	3	**12-21**	0	33	14	**20-28**	0	24	2	**36-39**	15	170	5	**46-49**	0	0	3	**52-61**	1	47	4	**60-68**	0	20	5	**76-79**	44	35	8
6-10	0	4	11	**12-22**	0	33	9	**20-29**	2	33	4	**36-40**	25	290	62	**46-50**	0	0	9	**52-62**	2	70	8	**60-69**	0	16	25	**76-80**	76	60	55
6-11	0	6	30	**12-23**	0	33	16	**20-30**	4	44	6	**37-38**	3	44	9	**46-51**	0	0	2	**52-63**	2	93	9	**60-70**	0	13	24	**77-78**	12	9	0
6-12	1	8	25	**12-24**	0	33	50	**20-31**	5	53	3	**37-39**	9	116	5	**46-52**	1	0	3	**52-64**	2	116	6	**60-71**	0	8	11	**77-79**	30	24	0
6-13	1	8	41	**12-25**	0	27	17	**20-32**	7	64	1	**37-40**	19	218	44	**46-53**	1	0	1	**52-65**	1	93	3	**60-72**	0	5	24	**77-80**	57	46	10
6-14	1	7	136	**12-26**	0	20	30	**20-33**	5	58	3	**38-39**	5	63	1	**46-54**	0	0	4	**52-66**	1	70	4	**60-73**	0	6	35	**78-79**	16	13	1
6-15	2	6	63	**12-27**	0	14	24	**20-34**	4	54	1	**38-40**	13	146	24	**46-55**	0	0	8	**52-67**	0	47	11	**60-74**	0	7	22	**78-80**	38	30	5
6-16	2	6	62	**12-28**	0	7	3	**20-35**	2	49	2	**39-40**	6	73	6	**46-56**	0	0	4	**52-68**	0	24	0	**60-75**	0	8	84	**79-80**	19	15	26

ANEXO B: ESTRUCTURA DE SEVICIOS POR ESCENARIO

Tabla B-1. Servicios generados para escenario 1.

	Paradas																			
Línea	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
1	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o										
2	o	o	o	o	o	-	-	o	-	o										
3	o	o	o	o	-	-	-	o	-	o										
4	o	o	-	o	-	-	-	o	-	o										
5	o	-	-	-	-	-	-	o	o	o										
6	o	-	-	-	-	-	-	-	-	o										
7											o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
8											o	o	o	o	-	o	o	o	o	o
9											o	o	o	o	-	-	-	-	o	o
10											o	o	o	-	-	-	-	-	-	o
11											o	o	-	-	-	-	-	-	-	o

Tabla B-2. Servicios generados para escenario 2.

	Paradas																																											
Línea	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
1	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o																						
2	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	-	-	-	-	o	o	o	o	o	o																						
3	o	o	o	o	o	o	o	o	o	-	-	-	-	-	o	o	o	-	o	o																						
4	o	o	o	o	o	o	o	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	o	o																						
5	o	o	-	o	o	-	-	o	-	-	-	-	-	-	o	o	o	-	o	o																						
6	o	o	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	o	o	o	o	o	o	o																						
7	o	o	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	o	o	o	o	o	o																						
8	o	o	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	o	o																						
9	o	o	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	o																						
10	o	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	o	o	o	o	o	o	o	o																						
11	o	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	o	o	o	o	o	o																						
12	o	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	o	o																						
13						o	o	o	-	-	-	-	-	-	o	o																											
14																					o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
15																					o	o	o	o	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	o	o
16																					o	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	o	o
17																					o	o	o	o	o	o	o	o	o	-	-	-	-	-	-	-	o	o	o	o
18																					o	o	o	o	o	o	o	o	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	o
19																					o	o	o	o	o	o	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	o	o
20																					o	o	o	o	o	o	o	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	o	o
21																					o	o	o	o	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	o
22																					o	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	o	o	o	o	o	o	o	o	o
23																					o	o	o	o	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	o	o	o	o	o	o
24																					o	o	o	o	o	o	o	o	-	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
25																					o	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	o

26	o - - o o o - - - - - - - - - - - o o o
27	o o - - - - - - - - o

Tabla B-3. Servicios generados para escenario 3.

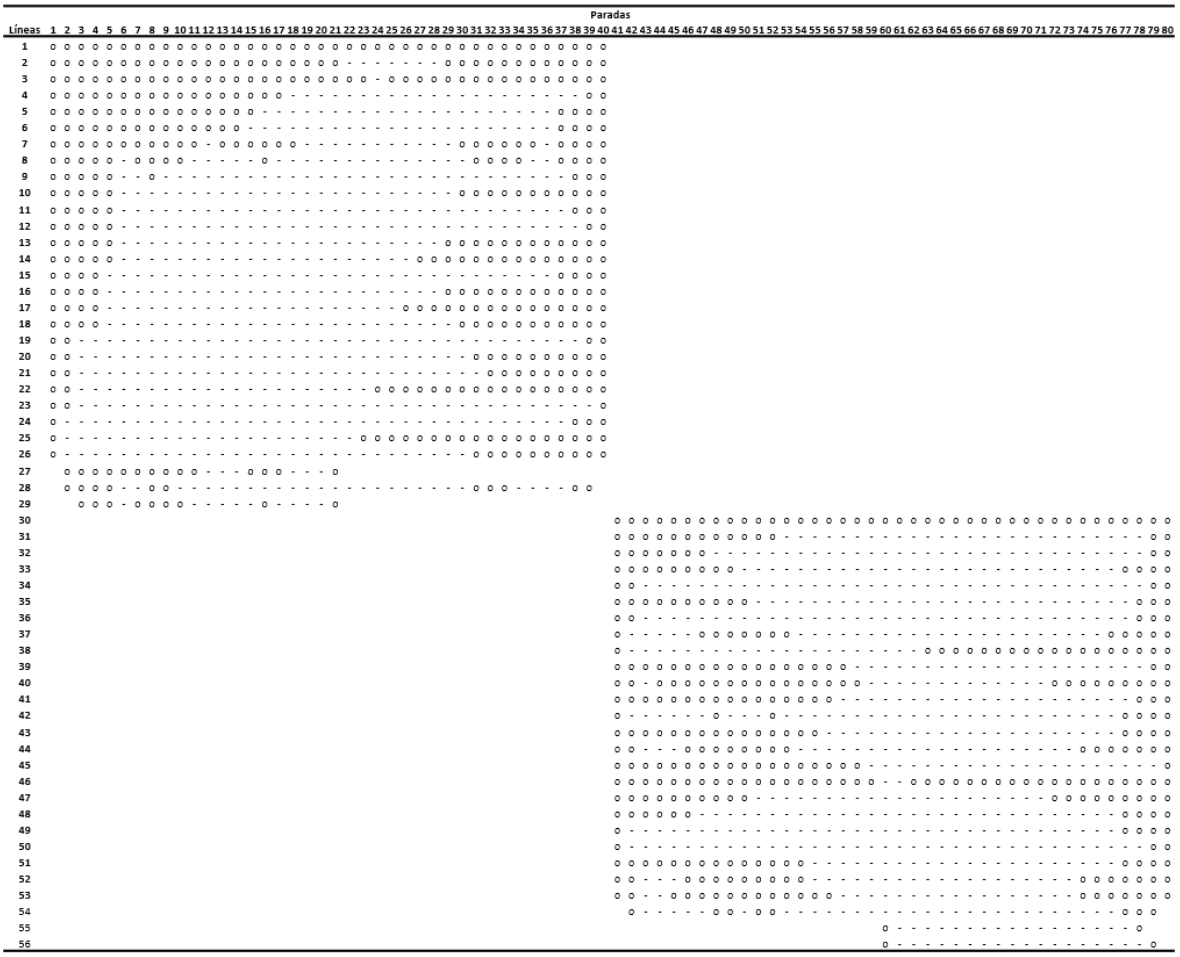


Tabla B-4. Servicios generados para escenario 4.

	Paradas																			
Línea	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
1	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o										
2	o	o	o	o	o	o	-	o	o	o										
3	o	o	o	-	-	-	-	-	-	o										
4	o	o	-	-	o	o	-	o	o	o										
5	o	-	-	-	o	-	-	-	-	o										
6	o	-	-	-	-	-	-	o	o	o										
7		o	o	-	o	o	-	o	o											
8		o	-	-	o	o	o													
9		o	-	-	o	o	-	o												
10		o	-	-	o	o														
11		o	-	-	o															
12			o	-	o	o	-	o	o											
13			o	-	o	o	-	o												
14											o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
15											o	o	o	-	-	-	-	-	-	o
16											o	o	-	-	-	-	-	-	o	o
17											o	-	o	-	o	o	o	-	o	o
18											o	-	o	-	-	o	o	-	o	o
19											o	-	-	-	-	-	-	o	o	o
20												o	o	-	-	o	o	o		
21												o	o	-	-	o	o	-	o	
22													o	-	-	o	o	o		
23													o	-	-	o	o	-	o	
24														o	-	o	o	-	o	
25															o	o	o	-	o	
26																o	o	-	o	

Tabla B-5. Servicios generados para escenario 5.

	Paradas																																					
Línea	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
1	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o																				
2	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	-	o	o	o	o	o	o																				
3	o	o	o	o	o	o	o	o	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	o																				
4	o	o	o	o	o	o	o	-	o	o	o	o	o	-	o	o	o	o	o	o																				
5	o	o	o	o	o	o	o	o	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	o	o																				
6	o	o	o	o	o	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	o	o	o	o																				
7	o	o	o	o	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	o	o	o	o	o																				
8	o	o	o	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	o	o	o	o	o	o																				
9	o	o	-	o	o	o	-	-	o	o	o	o	o	-	o	o	o	o	o	o																				
10	o	o	-	o	o	-	-	-	o	o	o	o	o	-	o	o	o	o	o	o																				
11	o	o	-	o	-	-	-	-	o	o	o	o	o	-	o	o	o	o	o	o																				
12	o	o	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	o	o																				
13	o	-	-	-	-	-	-	-	o	o	o	o	-	-	-	o	o	-	o	o																				
14	o	-	-	-	-	-	-	-	-	o	o	o	-	-	-	o	-	-	o	o																				
15	o	-	-	-	-	-	-	-	-	o	o	-	-	-	-	-	-	-	-	o																				
16				o	o	-	-	-	o	o	o	o	o	-	o																									
17					o	-	-	-	-	o	o	o	-	-	-	o																								
18					o	-	-	-	-	o	o	o																												
19																					o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
20																					o	-	-	-	-	o	-	-	-	-	o	o	o	o	o	-	-	o	o	o
21																					o	-	-	-	-	o	-	-	-	-	-	o	o	o	-	-	-	-	-	o
22																					o	-	-	-	o	o	o	-	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
23																					o	o	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	o	o	o
24																					o	o	o	o	o	o	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	o	o	o
25																					o	o	-	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
26																					o	o	o	o	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	o	o	o	o	o
27																					o	o	o	o	o	o	o	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	o	o	
28																					o	o	o	o	o	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	o	o	o	o
29																													o	-	-	o	o	o	-	o				
30																									o	o	-	-	-	-	o	o	o	o	o	o				
31																										o	-	-	-	-	o	o	o	o	o	-	o			

Tabla B-6. Servicios generados para escenario 6.

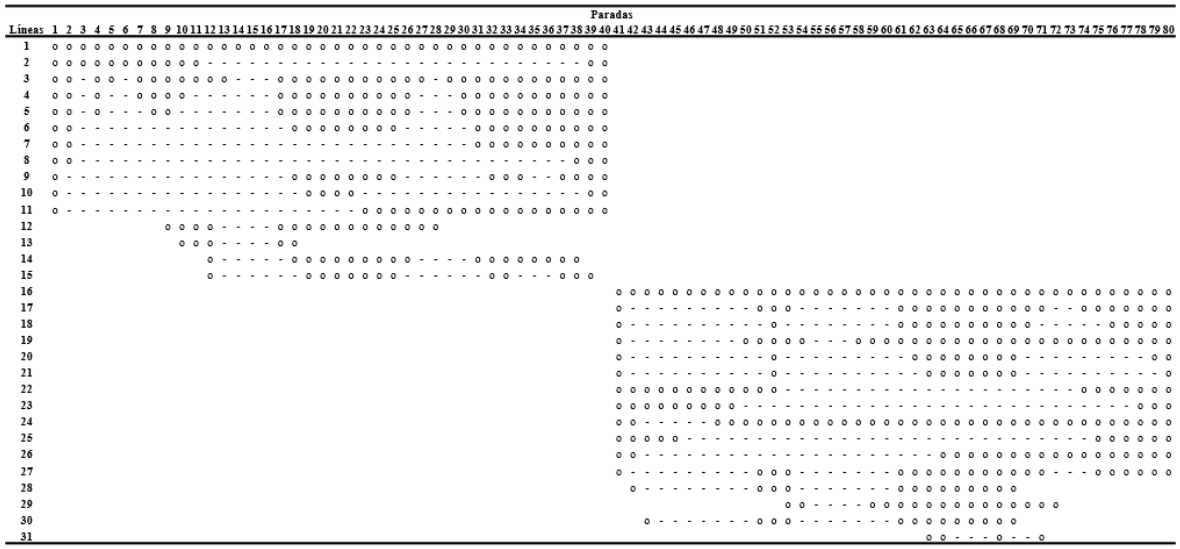


Tabla B-7. Servicios generados para escenario 7.

	Paradas																			
Línea	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0										
2	0	-	-	0	-	0	-	-	-	0										
3	0	-	-	-	-	-	-	0	0	0										
4		0	0	-	-	0	0													
5		0	0	-	-	0	-	0												
6		0	0	-	-	0	-	-	0											
7		0	-	-	-	0														
8											0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9											0	0	0	0	0	0	-	0	0	0
10											0	0	0	0	0	-	-	-	0	0
11											0	0	0	-	-	-	-	-	-	0
12											0	0	-	-	-	-	-	-	0	0
13											0	-	-	0	0	-	-	-	0	0
14												0	-	0	0	-	-	-	0	
15													0	0	0	-	-	-	0	
16														0	0	-	-	-	0	
17															0	-	-	-	0	

Tabla B-8. Servicios generados para escenario 8.

	Paradas																																							
Línea	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
1	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o																				
2	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	-	o	o	o	o																				
3	o	o	o	o	o	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	o	o	o	o																				
4	o	o	-	o	o	-	o	-	o	o	-	o	o	-	-	-	-	-	-	o																				
5	o	o	-	-	-	-	o	-	-	-	-	o	-	-	-	-	-	-	-	o																				
6	o	o	-	-	-	-	-	-	-	-	-	o	-	-	-	-	-	-	-	o																				
7	o	o	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	o	o	o	o	o	o	o																				
8			o	o	o	o	o	-	-	-	-	o	o	-	-	-	-	o																						
9			o	o	o	-	-	-	-	-	o																													
10																					o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
11																					o	-	o	o	o	-	o	o	o	o	-	-	-	-	-	-	o	o	-	o
12																					o	o	o	o	o	o	o	o	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	o
13																					o	o	o	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	o
14																					o	o	o	o	o	o	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	o	o	o
15																					o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	-	o	o	o	o	o	o
16																					o	o	o	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	o	o	o	o	o	o
17																					o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	-	o	-	o	o	o	o	-	o
18																					o	-	-	-	o	-	-	o	-	o	-	-	-	-	-	-	-	o	-	o
19																					o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	-	o	-	o	o	o	o	o	o
20																					o	o	o	o	o	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	o	o	o	o
21																														o	o	-	-	-	-	-	o	o		
22																							o	-	o	-	o	o	o	o	-	-	-	-	o	o	o	o		

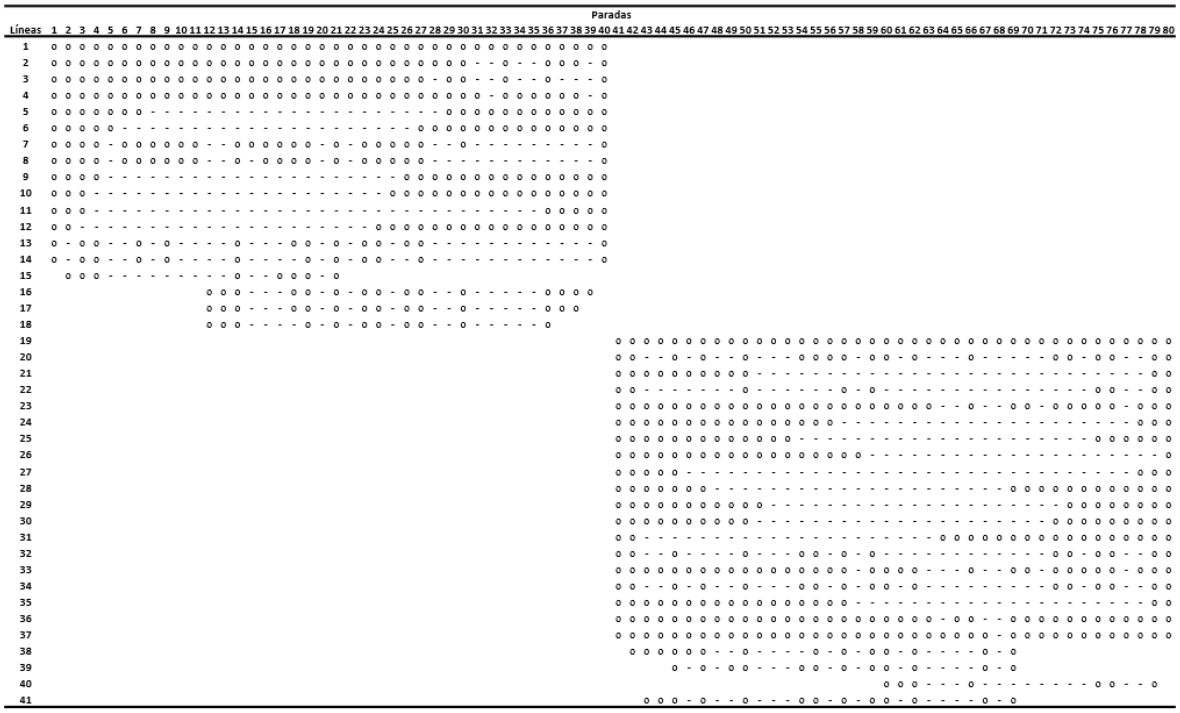



Tabla B-9. Servicios generados para escenario 9.