



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

**ROBUST RETAIL REVENUE
MANAGEMENT: RISK AVERSION IN
PRICING DECISIONS**

DIEGO EDUARDO OYARZÚN ALCAYAGA

Tesis para optar al grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Profesor Supervisor:
JUAN CARLOS FERRER O.

Santiago de Chile, Septiembre 2008

© MMVIII, DIEGO EDUARDO OYARZÚN ALCAYAGA



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

**ROBUST RETAIL REVENUE
MANAGEMENT: RISK AVERSION IN
PRICING DECISIONS**

DIEGO EDUARDO OYARZÚN ALCAYAGA

Miembros del Comité:

JUAN CARLOS FERRER O.

JORGE VERA A.

FERNANDO ORDOÑEZ P.

JOAQUÍN DE CEA C.

Tesis presentada a la Dirección de Investigación y Postgrado
como parte de los requisitos para optar al grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Santiago de Chile, Septiembre 2008

© MMVIII, DIEGO EDUARDO OYARZÚN ALCAYAGA

A mis padres por todo lo que me han entregado durante mi vida, a mi hermano por ser mi amigo y guía, y a mi polola por su amor y apoyo incondicional.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a mi profesor supervisor, Juan Carlos Ferrer, por su guía y apoyo a lo largo del desarrollo de esta tesis. También quiero agradecer al profesor Jorge Vera por su buena disposición y sus sugerencias para esta investigación. Por último no puedo dejar de mencionar al equipo de Pricing UC, a Francisco Olivares, Pedro León, Diego Fuentes, Eduardo Flores, Felipe Aros y Hugo Mora, quienes me ayudaron con ideas y perspectivas diferentes y me brindaron su apoyo cuando lo necesité.

INDICE GENERAL

AGRADECIMIENTOS	iv
INDICE DE FIGURAS	vii
INDICE DE TABLAS	x
RESUMEN	xi
ABSTRACT	xii
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Motivación	1
1.2. Revisión de Literatura	2
1.3. Organización del Documento	6
2. MODELO GENÉRICO	7
2.1. Supuestos Básicos y Nomenclatura	7
2.2. Modelación de la Demanda Genérica.	7
2.3. Modelo Nominal Genérico	8
2.3.1. Modelo	9
2.3.2. Solución Analítica	9
2.4. Modelo Robusto Genérico	10
3. MODELO PARTICULAR	14
3.1. Modelación de la Demanda	14
3.2. Solución Analítica	17
3.3. Comportamiento del Precio	18
3.4. Análisis para Inventario Inicial Grande	19
3.4.1. Variabilidad del Ingreso	20
3.4.2. Criterio de Elección de Aversión al Riesgo	22

4. PRUEBAS NUMÉRICAS Y SIMULACIONES	24
4.1. Políticas de Precio Óptimas	24
4.2. Experimento Escenarios Específicos	26
4.3. Experimento Escenarios Simulados	27
4.4. Experimento Inventario Inicial Grande	31
5. EXTENSIÓN AL CASO DE DEMANDA EXPONENCIAL	37
5.1. Modelación Exponencial de la Demanda	37
5.2. Solución Analítica del Modelo	38
5.3. Pruebas Numéricas y Simulaciones	39
5.3.1. Políticas de Precio Óptimas	40
5.3.2. Experimento Escenarios Específicos	40
5.3.3. Experimento Escenarios Simulados	41
6. CONCLUSIONES	46
BIBLIOGRAFIA	48
ANEXO A. DETALLE EXPERIMENTO ESCENARIOS SIMULADOS PARA DEMANDA LINEAL	50
ANEXO B. EXPERIMENTO ESCENARIOS SIMULADOS CON DISTRIBUCIÓN UNIFORME	51
ANEXO C. EXPERIMENTO ESCENARIOS SIMULADOS CON DISTRIBUCIÓN BETA (2,4)	53
ANEXO D. EXPERIMENTO ESCENARIOS SIMULADOS CON DISTRIBUCIÓN BETA (4,2)	55
ANEXO E. DETALLE EXPERIMENTO ESCENARIOS SIMULADOS PARA DEMANDA EXPONENCIAL	57

INDICE DE FIGURAS

4.1 Ingreso total para cada escenario según aversión al riesgo Γ , con demanda lineal.	27
4.2 Promedio y desviación estándar del ingreso para diferentes políticas de precio según aversión al riesgo Γ , para una distribución Normal de los coeficientes de demanda, con demanda lineal.	29
4.3 Razón entre la variación porcentual del ingreso promedio y la variación porcentual de la desviación estándar, al aumentar la aversión al riesgo Γ , para una distribución Normal de los coeficientes de demanda, con demanda lineal. . . .	30
4.4 Distribución del ingreso obtenido para 10.000 escenarios simulados para distribución Normal de los coeficientes, con demanda lineal, para $\Gamma = 0,2; 0,5; 1,0$ y $2,0$	31
4.5 Probabilidad de estar sobre cierto percentil de la política neutral al riesgo ($\Gamma = 0$), para distribución Normal de los coeficientes, con demanda lineal.	32
4.6 Promedio y desviación estándar del ingreso teórico y simulado, para diferentes políticas de precio según aversión al riesgo Γ , para una distribución Normal de los coeficientes de demanda, para inventario inicial grande, con demanda lineal.	33
4.7 Promedio y desviación estándar del ingreso teórico y simulado, para diferentes políticas de precio según aversión al riesgo Γ , para una distribución Uniforme de los coeficientes de demanda, para inventario inicial grande, con demanda lineal.	34
4.8 Promedio y desviación estándar del ingreso teórico y simulado, para diferentes políticas de precio según aversión al riesgo Γ , para una distribución Beta (2,4) de los coeficientes de demanda, para inventario inicial grande, con demanda lineal.	35
4.9 Promedio y desviación estándar del ingreso teórico y simulado, para diferentes políticas de precio según aversión al riesgo Γ , para una distribución Beta (4,2) de los coeficientes de demanda, para inventario inicial grande, con demanda lineal.	36

5.1 Ingreso total para cada escenario según aversión al riesgo Γ , con demanda exponencial.	41
5.2 Promedio y desviación estándar del ingreso para diferentes políticas de precio según aversión al riesgo Γ , para una distribución Normal de los coeficientes de demanda, con demanda exponencial.	42
5.3 Razón entre la variación porcentual del ingreso promedio y la variación porcentual de la desviación estándar al aumentar la aversión al riesgo Γ , para una distribución Normal de los coeficientes de demanda, con demanda exponencial.	43
5.4 Distribución del ingreso obtenido para 10.000 escenarios simulados para distribución Normal de los coeficientes, con demanda exponencial, para $\Gamma = 0,3; 0,5; 0,7$ y $1,0$	44
5.5 Probabilidad de estar sobre cierto percentil de la política neutral al riesgo ($\Gamma = 0$), para distribución Normal de los coeficientes, con demanda exponencial.	45
A.1 Distribución del ingreso obtenido para 10.000 escenarios simulados, utilizando un inventario inicial de 100 unidades, para distribución Normal de los coeficientes, con demanda lineal, para los diferentes valores de aversión al riesgo Γ . Se comparan las distintas políticas (línea segmentada) con la política neutral al riesgo (línea continua).	50
B.1 Promedio y desviación estándar del ingreso, para diferentes políticas de precio según aversión al riesgo Γ , para una distribución Uniforme de los coeficientes de demanda, con demanda lineal.	51
B.2 Probabilidad de estar sobre cierto percentil de la política neutral al riesgo ($\Gamma = 0$), para distribución Uniforme de los coeficientes, con demanda lineal.	52
C.1 Promedio y desviación estándar del ingreso, para diferentes políticas de precio según aversión al riesgo Γ , para una distribución Beta (2,4) de los coeficientes de demanda, con demanda lineal.	53

C.2 Probabilidad de estar sobre cierto percentil de la política neutral al riesgo ($\Gamma = 0$), para distribución Beta (2,4) de los coeficientes, con demanda lineal.	54
D.1 Promedio y desviación estándar del ingreso, para diferentes políticas de precio según aversión al riesgo Γ , para una distribución Beta (4,2) de los coeficientes de demanda, con demanda lineal.	55
D.2 Probabilidad de estar sobre cierto percentil de la política neutral al riesgo ($\Gamma = 0$), para distribución Beta (4,2) de los coeficientes, con demanda lineal.	56
E.1 Distribución del ingreso obtenido para 10.000 escenarios simulados, utilizando un inventario inicial de 100 unidades, para distribución Normal de los coeficientes, con demanda exponencial, para los diferentes valores de aversión al riesgo Γ . Se comparan las distintas políticas (línea segmentada) con la política neutral al riesgo (línea continua).	57

INDICE DE TABLAS

3.1 Coeficientes α y β para obtener la menor demanda según Γ y p	17
4.1 Valores nominales y rangos de los coeficientes para cada periodo, en el caso de demanda lineal.	24
4.2 Políticas de precios para distintos niveles de aversión al riesgo Γ , con demanda lineal, para un inventario disponible y periodo dados.	25
4.3 Escenarios específicos para los coeficientes de demanda.	26
4.4 Error porcentual entre el valor simulado y teórico del máximo valor de Γ que aumenta la probabilidad de estar sobre cierto percentil de la política neutral al riesgo, para las diferentes distribuciones de probabilidad.	34
5.1 Valores nominales y rangos de los coeficientes para cada periodo, en el caso de demanda exponencial.	40
5.2 Políticas de precios para distintos niveles de aversión al riesgo Γ , con demanda exponencial, para un inventario y periodo dados.	40
5.3 Escenarios específicos para el coeficiente de demanda β , en el caso de demanda exponencial.	41

RESUMEN

Una buena estimación de la demanda es clave para una aplicación efectiva de *Revenue Management*. Dicha estimación está sujeta a un alto nivel de incertidumbre producto de diversos factores impredecibles o muy difíciles de modelar (clima, recesiones económicas, sustitución, competencia, cambios en gustos del consumidor, mala calidad de datos, etc.). Así, la decisión de fijación de precios está sujeta a riesgos. Esta investigación propone una metodología utilizando optimización robusta, con el fin de incorporar tanto la incertidumbre como el grado de aversión al riesgo del tomador de decisión a la modelación del problema. Se consideran explícitamente incertidumbre en dos coeficientes de una función de demanda lineal, se derivan expresiones para el precio, y se propone un criterio para definir el grado de aversión al riesgo. Adicionalmente, se aplica el modelo robusto propuesto, pero con demanda exponencial, para abordar un caso más cercano a la realidad de los retailers. En ambos casos se logra reducir la variabilidad del ingreso obtenido, a costa de una reducción en el ingreso esperado. Además, se encuentra un nivel de aversión al riesgo por sobre el cual deja de ser conveniente estar, puesto que se obtienen los peores ingresos de una política neutral al riesgo. Si bien el modelo se centra en el *retail*, es suficientemente genérico para ser aplicado a otras industrias.

Palabras Claves: optimización robusta, aversión al riesgo, *pricing*, *retail*, *revenue management*.

ABSTRACT

Good demand estimates are the key to an effective application of revenue management. However, they are subject to high uncertainty levels due to various factors that are unpredictable or difficult to model (climate, economic fluctuations, substitute products, competition, changes in consumer's preferences, poor data quality, etc.), and pricing decisions are therefore risky. This study proposes a robust optimization methodology that incorporates both uncertainty and the decision-maker's degree of risk aversion into the problem modeling process. Uncertainty is explicitly considered for two coefficients of a linear demand function, price expressions are derived and a criterion is proposed for defining the degree of risk aversion. The resulting model is also applied to an exponential demand case to better reflect a more realistic retail setting. In both cases, revenue variability was reduced at the cost of lower expected revenue. A degree of risk aversion is found, the point above which is not desirable to be, since revenue remains within the worst cases of the risk-neutral policy. Though designed for the retail industry, the model is sufficiently general to be applied to others.

Keywords: robust optimization, risk aversion, pricing, retail, revenue management.

1. INTRODUCCIÓN

Los modelos de *Revenue Management* tuvieron sus inicios en la industria de las aerolíneas, y hasta la fecha han tenido un importante desarrollo, como se puede observar en McGill y Van Ryzin (1999), convirtiéndose en un elemento clave para la supervivencia en dicha industria. Hoy en día, el uso de técnicas de *Revenue Management* se ha extendido a otras industrias, como la industria hotelera y la del *retail*, por mencionar algunas, donde el uso correcto de estos modelos permite marcar la diferencia en el desempeño obtenido y mantenerse en competencia. La presente investigación se centra en la industria del *retail* e incorpora la aversión al riesgo del tomador de decisiones de precio.

1.1. Motivación

El problema a resolver en *Revenue Management* y *Pricing* en *retail* consiste en buscar la mejor estrategia de precios, dada una capacidad fija de inventario inicial. Esto se debe a que los productos se encargan con gran anticipación, por lo que reponer inventario en caso de faltante es prácticamente imposible (debido a largos *lead times*). En vista de esto, una vez iniciada la temporada de venta del producto, se deben optimizar los precios para maximizar los ingresos, siendo fundamental contar con una buena estimación de demanda, y así tener la capacidad de fijar el precio de acuerdo al comportamiento del consumidor. Sin embargo, dicha estimación está sujeta a un alto nivel de incertidumbre, dado que puede verse afectada por diversos factores impredecibles o muy difíciles de estimar (clima, recesiones económicas, sustitución, competencia, mala calidad de datos, etc.). Además, en muchas ocasiones no se cuenta con información suficiente, como es el caso de productos nuevos que se introducen al mercado. Esto conduce a que la decisión de precio esté sujeta a riesgos y que el desempeño de los modelos no sea siempre el deseado. A pesar que, según Bitran y Caldentey (2003), la formulación neutral al riesgo es la más utilizada en la literatura, es necesario incorporar el grado de aversión al riesgo en la modelación, ya que esto refleja mejor la realidad de los tomadores de decisiones.

Para incorporar la incertidumbre, generalmente se han utilizado modelos estocásticos (Dantzig, 1955), de recurso o de programación dinámica. Según Bitran y Caldentey (2003), si bien dichos modelos pueden representar la realidad de forma más adecuada, ellos requieren un mayor esfuerzo de cálculo. Además, en Kouvelis y Yu (1997), se menciona que pese a incorporar la incertidumbre en la decisión, no consideran la aversión al riesgo de quien la toma, puesto que optimizan en base al valor esperado. También se critica la necesidad de asignar probabilidades a los distintos escenarios o parámetros inciertos, lo cual es una tarea compleja, debido a que pueden existir correlaciones difíciles de estimar entre los diferentes factores. Sin embargo, la crítica más importante apunta a que los modelos de optimización estocástica son incapaces de reconocer que tras cada decisión existe una gama de resultados posibles, que dependen del escenario realizado. Esto último es de gran interés para alguien averso al riesgo, dado que busca una decisión que se desempeñe bien bajo cualquier escenario, más que una decisión que sea óptima bajo el escenario más probable.

Con el fin de incorporar la incertidumbre en la estimación de demanda y la aversión al riesgo del tomador de decisión, resulta conveniente abordar el problema mediante un enfoque distinto. El enfoque que se utiliza es de optimización robusta, el cual sí incorpora la variabilidad de los resultados posibles, tomando en cuenta así la aversión al riesgo del tomador de decisión. En lo que viene a continuación, se aborda en mayor detalle la literatura acerca de *Revenue Management* y *Pricing* en *retail*, y de la optimización robusta.

1.2. Revisión de Literatura

Como se mencionó anteriormente, el problema de *Revenue Management* y *Pricing* en *retail*, consiste en buscar la mejor estrategia de precios dada una capacidad fija de inventario inicial, siendo clave para esto contar con una buena estimación de demanda. En la literatura, la demanda se clasifica en modelos determinísticos y estocásticos. En el caso determinístico, es posible utilizar diferentes modelos, dependiendo de la cantidad

de factores explicativos que se consideren (factores estacionales, nivel de inventario, promociones, sensibilidad al precio del consumidor, etc.). Según Bitran y Caldentey (2003), generalmente en *retail* se utilizan modelos exponenciales de demanda, los cuales se ajustan mejor que los modelos lineales (Smith, McIntyre y Acahabal, 1994). Por ejemplo, en Smith y Achabal (1998) se utiliza un modelo de demanda exponencial que incorpora el efecto del nivel de inventario a la modelación. En el caso estocástico, se puede incorporar a la formulación un componente estocástico de media cero, ya sea aditivo o multiplicativo, en caso de tiempo discreto (Federgruen y Heching, 1999), o bien, se puede modelar la llegada de clientes mediante un proceso Poisson, en caso de tiempo continuo (Gallego y van Ryzin, 1994; Bitran y Mondschein, 1997). Cabe destacar que en las investigaciones mencionadas el tomador de decisión tiene una postura neutral al riesgo.

Para profundizar acerca del desarrollo del *Revenue Management* en la industria del *retail*, se recomiendan las revisiones de Elmaghraby y Keskinocak (2003) y de Bitran y Caldentey (2003). La primera identifica tres factores que determinan el problema de los *retailers* al fijar los precios: 1) la posibilidad de reponer inventario, lo cual muchas veces no es posible debido a largos *lead times* al encargar los productos; 2) si la demanda es independiente del tiempo; y 3) si los consumidores son estratégicos o miopes, es decir, si toman su decisión de compra considerando lo que puede pasar en el futuro con el precio o no. La segunda revisión se basa en el estudio de un problema genérico de *Revenue Management*, clasificando los modelos según si son determinísticos o estocásticos, y si son para uno o múltiples productos. Se mencionan distintos temas claves en la modelación, como suministro, producto, información y estrategia de precios. También se proponen diversas extensiones, como incorporar aprendizaje en la demanda, efectos de sustitución en los productos, diseño y bundling de productos, comportamiento estratégico en los consumidores, competencia, y aversión al riesgo, que es lo que se aborda en esta tesis.

Ahora, en optimización robusta el objetivo es encontrar la mejor solución factible para un problema, bajo cualquier escenario posible. Sus ventajas son ser más fácil de resolver que su contraparte estocástica, que no requiere conocimiento específico de la distribución de demanda, y ser capaz de incorporar la variabilidad de los resultados obtenidos de acuerdo a los escenarios realizados.

Los primeros pasos en esta línea de investigación fueron dados por Soyster (1973) quien resuelve un problema de optimización lineal convexo con restricciones inciertas, basándose en el peor escenario. De esta forma logra el objetivo de encontrar una solución factible para cualquier escenario, sin embargo, obtiene soluciones muy conservadoras, que ceden demasiada optimalidad a cambio de robustez.

Para lidiar con este problema, en Ben-Tal y Nemirovski (1998) se considera la incertidumbre en las restricciones como un conjunto elipsoidal. Esto permite obtener soluciones menos conservadoras, ya que se evitan los casos extremos, sin embargo, el problema queda no-lineal, lo que resulta difícil de resolver. Más tarde, en Bertsimas y Sim (2004) se logra mantener el problema lineal, considerando esta vez incertidumbre poliédrica en las restricciones e incorporando a la modelación un parámetro encargado de controlar el nivel de conservadurismo de las soluciones.

Otra línea de investigación en optimización robusta es la de Mulvey, Vanderbei y Zenios (1995), donde se menciona que la optimización robusta es más aplicable, sin embargo, se le critica el hecho de ser paramétrica en cuanto al nivel de robustez del modelo. Se plantea un modelo en que a la función objetivo se le agrega un factor de penalización a las infactibilidades, ponderado por un parámetro encargado de balancear la optimalidad con la factibilidad de la solución. Se aplica el modelo a diversas áreas como expansión de capacidad de potencia, balanceo de matrices, reconstrucción de imágenes, programación de rutas para la fuerza aérea, inmunización de escenarios para portafolios, y diseño de estructuras de mínimo peso.

Siguiendo la línea de Bertsimas y Sim (2004), otras investigaciones derivan diversas aplicaciones que incorporan la aversión al riesgo en las decisiones (Bertsimas y Thiele, 2006; Adida y Perakis, 2006; Perakis y Sood, 2006). De estas investigaciones, la que más se acerca a lo que se realiza en este trabajo, es la de Perakis y Sood (2006), donde se propone un modelo de *pricing* para un producto con competencia en un mercado oligopólico, con demanda incierta para cada firma participante, donde la incertidumbre viene dada por la sensibilidad al precio en una función de demanda lineal para cada firma.

Bajo un enfoque de programación dinámica con tiempo continuo, en Lim y Shanthikumar (2007) se incorpora robustez considerando incertidumbre en la tasa de llegada de los clientes. Siguiendo este mismo enfoque, en una reciente publicación de Levin, McGill y Nediak (2008), también se incorpora el riesgo en la decisión de precio para un producto, incorporando al modelo un costo para la probabilidad que los ingresos caigan bajo cierto valor mínimo establecido.

Esta investigación, al igual que en Perakis y Sood (2006), propone un modelo determinístico de optimización robusta que permite a un tomador de decisión fijar los precios de un producto maximizando sus ingresos, incorporando la incertidumbre en la estimación de demanda, y reduciendo la variabilidad de los resultados posibles, de acuerdo a su grado de aversión al riesgo. A diferencia de Perakis y Sood (2006), la contribución de esta investigación, en un contexto monopolístico, es: i) considerar explícitamente incertidumbre en dos coeficientes de una función de demanda lineal; ii) proponer un criterio de elección de aversión al riesgo, basado en la reducción de la probabilidad de obtener resultados desfavorables, en comparación a una política neutral al riesgo; y iii) aplicar el modelo bajo una formulación exponencial de demanda, de forma de acercarse a lo que se hace en la práctica de la industria del *retail*.

1.3. Organización del Documento

A continuación en el Capítulo 2 se presenta el modelo de precios robusto genérico propuesto. Luego, en el Capítulo 3 se aplica el modelo para un caso particular de demanda lineal, que corresponde al modelo utilizado en las pruebas numéricas. En el Capítulo 4, se presentan los resultados del modelo y los experimentos realizados. En el Capítulo 5, siguiendo lo que se hace en la práctica, el modelo se pone a prueba bajo una formulación exponencial de demanda. Finalmente en el Capítulo 6, se presentan las conclusiones.

2. MODELO GENÉRICO

En este capítulo se presenta de manera genérica el modelo de precios robusto propuesto en esta investigación, donde el problema a resolver es maximizar los ingresos por venta de un producto de acuerdo al grado de aversión al riesgo del tomador de decisión. Se utiliza un modelo determinístico, debido a su gran utilización en la práctica dentro de la industria, su buena aproximación a modelos más complejos, y por ser menos costoso en términos de cálculo (Bitran y Caldentey, 2003). En primer lugar, se presentan los supuestos básicos del modelo y la notación utilizada. En segundo lugar, se presenta de manera general la modelación de la demanda. En tercer lugar, se presenta un modelo de precios nominal genérico con su solución analítica. Y finalmente, se presenta el modelo de precios genérico robusto propuesto en esta investigación.

2.1. Supuestos Básicos y Nomenclatura

Para la modelación que se presenta, se realiza el supuesto que tanto el costo de las ventas perdidas, como el valor residual del producto y el costo de inventario, son nulos. Tampoco se considera un costo por demanda insatisfecha. Además, se debe considerar la siguiente notación:

T = Cantidad de periodos en la temporada (o cantidad de cambios de precio).

C = Inventario al inicio de la temporada.

V = Ingreso máximo obtenido en la temporada.

p_t = Precio en el periodo t .

$d_t(p_t)$ = Demanda en el periodo t dado un precio p_t .

2.2. Modelación de la Demanda Genérica.

Como se mencionó anteriormente, en la práctica es difícil obtener distribuciones de probabilidad de la demanda, sin embargo, en general se cuenta con datos históricos que permiten predecir las ventas por medio de regresiones. En la industria del *retail* se trabaja

con temporadas, generalmente dadas por las estaciones climáticas que marcan el tipo de ropa que se utiliza en cada época del año (primavera-verano u otoño-invierno). Dadas estas condiciones, en que se puede observar un patrón de comportamiento similar de un año a otro, es posible estimar las ventas para un producto en una temporada futura, por medio de una regresión lineal multivariable. Básicamente, a partir de datos históricos, ya sea de una o más temporadas anteriores, se puede establecer una función de ventas que dependa de variables \vec{x} , que pueden ser variables estacionales, promociones, sensibilidad al precio, nivel de inventario, u otras. Desde aquí en adelante, se hablará de demanda para referirse a las ventas. En esta investigación se trabaja con una formulación de demanda lineal, la cual para un periodo dado es:

$$d(\vec{x}) = a_0 + \sum_{i=1}^N a_i x_i + \varepsilon \quad (2.1)$$

La ecuación está compuesta por un coeficiente de nivel a_0 y coeficientes a_i ($i = 1 \dots N$), que corresponden a los coeficientes de las variables \vec{x} , y un error ε que se relaciona con la incertidumbre que uno pueda tener en la estimación. Los coeficientes a_i se obtienen por medio de una regresión lineal multivariable, la cual entrega un valor nominal del coeficiente y un intervalo de confianza al cual pertenece. Cabe mencionar que lo que se obtiene es una estimación de lo que va a ocurrir, la cual está inherentemente sujeta a incertidumbre, debido a que no es posible conocer con certeza lo que va a ocurrir en el futuro.

2.3. Modelo Nominal Genérico

En esta sección se presenta un modelo de precios nominal genérico, y su solución analítica para cualquier función de demanda.

2.3.1. Modelo

En el modelo que se presenta, no se considera la demanda como un valor entero, en vista que, comúnmente, esta restricción se relaja para resolverlo, sin afectar la calidad de la solución. Así, se tiene el siguiente modelo de precios nominal:

$$\begin{aligned} V_N(C) &= \max_{\vec{p}} \sum_{t=1}^T p_t d_t(p_t) & (2.2) \\ \text{s.a.} & \\ & \sum_{t=1}^T d_t(p_t) \leq C, \\ & d_t(p_t) \geq 0 \quad \forall t, \\ & p_t > 0 \quad \forall t. \end{aligned}$$

La función objetivo a maximizar es el ingreso de la temporada, es decir, la suma del precio por la demanda en cada periodo, lo que depende del inventario inicial C . La primera restricción indica que la suma de las cantidades demandadas en cada periodo no puede superar al inventario inicial. La segunda restricción indica que la demanda no ser negativa. Y la tercera, que los precios deben ser estrictamente positivos.

2.3.2. Solución Analítica

Se resuelve el modelo en (2.2) mediante las condiciones de primer orden de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). Sea D_0 el conjunto de periodos en que la demanda es nula. Los puntos KKT que caracterizan la política de precios nominal óptima se obtienen resolviendo los siguientes tres sistemas de ecuaciones, donde λ es el multiplicador de

Lagrange asociado a la primera restricción:

$$\vec{p}_N(C) = \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \frac{\partial}{\partial p_t} (d_t(p_t)) (-p_t) - d_t(p_t) = 0 \quad \forall t \\ \text{ii) } \sum_{t=1}^T d_t(p_t) = C \\ \text{iii) } \sum_{t=1, t \notin D_0}^T d_t(p_t) = C \\ \quad d_t(p_t) = 0 \quad \forall t \in D_0 \\ \quad \frac{\partial}{\partial p_t} (d_t(p_t)) (-p_t + \lambda) - d_t(p_t) = 0 \quad \forall t \notin D_0 \end{array} \right. , \text{ si } \left\{ \begin{array}{l} \sum_{t=1}^T d_t(p_t) \leq C \\ d_t(p_t) \geq 0 \quad \forall t, \\ \lambda > 0 \\ d_t(p_t) > 0 \quad \forall t, \\ \lambda > 0 \\ \lambda - p_t > 0 \quad \forall t \in D_0 \\ d_t(p_t) > 0 \quad \forall t \notin D_0. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Estos tres sistemas de ecuaciones entregan 2^T puntos KKT. Normalmente, en la industria del *retail*, durante una temporada, un producto sufre entre 3 y 5 cambios de precio, por lo que la cantidad de puntos es un valor acotado. Los puntos KKT vienen dados por: i) caso en que no se logra vender todas las unidades; ii) caso en que se logra vender todas las unidades y se vende al menos una en cada periodo; y iii) casos en que se logra vender todas las unidades y no se vende ninguna en uno o más periodos. Cabe recordar que los puntos KKT entregan a lo más óptimos locales, por lo que para encontrar el óptimo global se debe escoger el punto que entregue el mayor ingreso.

2.4. Modelo Robusto Genérico

La incertidumbre en el modelo en (2.2) viene dada por el desconocimiento de lo que puede ocurrir en el futuro con la demanda, por lo que se debe estar preparado para la ocurrencia del peor escenario. El modelo robusto que se desarrolla a continuación utiliza la modelación de la incertidumbre de Bertsimas y Sim (2004) que se describe a continuación. Sea un problema de maximización lineal con incertidumbre en la matriz A de restricciones. Sea A_i la fila i de la matriz A incierta. Sea J_i el set de coeficientes

incierto de A_i . Cada coeficiente incierto a_{ij} se modela como una variable aleatoria simétrica acotada que toma valores en $[\bar{a}_{ij} - \hat{a}_{ij}, \bar{a}_{ij} + \hat{a}_{ij}]$ de manera que $\frac{a_{ij} - \bar{a}_{ij}}{\hat{a}_{ij}} \in [-1, 1]$. Se incorpora el parámetro $\Gamma_i \in [0, |J_i|]$ encargado de regular el *trade-off* entre robustez y calidad de la solución. La idea es que a lo más $\lfloor \Gamma_i \rfloor$ coeficientes cambien y que sólo un coeficiente cambie en $(\Gamma_i - \lfloor \Gamma_i \rfloor) \hat{a}_{ij}$.

Siguiendo esto (en lo que viene a continuación se omiten los subíndices t), sea $d(\vec{a}, p)$ la función de demanda para un periodo, definida por un vector de coeficientes \vec{a} y por el precio p . Sea J el set de índices de los coeficientes inciertos. Sean \bar{a}_j , con $j \in J$, el valor nominal del coeficiente incierto a_j , y $2\hat{a}_j$ el largo del intervalo al cual éste pertenece, es decir, $a_j \in [\bar{a}_j - \hat{a}_j, \bar{a}_j + \hat{a}_j]$. En cada periodo, se regula el nivel de robustez del modelo o aversión al riesgo del tomador de decisión, mediante el parámetro Γ , el cual tiene el mismo valor en cada periodo. Sea U el set de incertidumbre al cual pertenecen los coeficientes, el cual para un periodo dado queda definido por:

$$U(\Gamma) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j \in J} \left| \frac{a_j - \bar{a}_j}{\hat{a}_j} \right| \leq \Gamma \quad , \Gamma \in [0, |J|] \\ \vec{a} : \bar{a}_j - \hat{a}_j \leq a_j \leq \bar{a}_j + \hat{a}_j \quad , \forall j \in J \\ a_j = \bar{a}_j \quad , \forall j \notin J \end{array} \right\}.$$

El parámetro Γ representa la disposición a aceptar que los coeficientes se desvíen de su valor nominal, y toma valores entre 0 (no se acepta movimiento de los coeficientes respecto a sus valores nominales) y la cantidad de coeficientes sujetos a incertidumbre $|J|$ (se acepta todo el movimiento posible dentro de los intervalos respectivos de cada coeficiente incierto). En cada periodo se considera el peor escenario posible de demanda para un precio p dado. Se tiene el siguiente problema de minimización:

$$d_{min}(p, \Gamma) = \min_{\vec{a}} d(\vec{a}, p) \quad (2.4)$$

s.a.

$$\vec{a} \in U(\Gamma).$$

El modelo robusto propuesto queda definido por el modelo en (2.2) utilizando la demanda planteada en (2.4). Esto es:

$$\begin{aligned}
 V_R(C, \Gamma) &= \max_{\vec{p}} \left(\min_{\vec{a}_t, \forall t} \sum_{t=1}^T p_t d(\vec{a}_t, p_t) \right) & (2.5) \\
 \text{s.a.} & \\
 &\vec{a}_t \in U_t(\Gamma) & \forall t, \\
 &\sum_{t=1}^T d(\vec{a}_t, p_t) \leq C, \\
 &d(\vec{a}_t, p_t) \geq 0 & \forall t, \\
 &p_t \geq 0 & \forall t.
 \end{aligned}$$

Notar que si se considera una política neutral al riesgo ($\Gamma = 0$), este modelo es equivalente al modelo nominal en (2.2). Llama la atención en el modelo robusto el hecho que sea un modelo Max-Min puesto que por un lado se busca obtener la menor demanda posible para un precio dado, y por otro se busca maximizar el ingreso que depende a su vez de la demanda y del precio. A diferencia de la optimización robusta tradicional, se robustece el problema por el lado de la función objetivo, considerando la menor demanda posible para un precio que maximice el ingreso, dejando de lado la restricción de inventario, y por ende, permitiendo quiebres de stock.

Cabe mencionar también que el modelo en (2.5) es lo suficientemente genérico para ser utilizado en otras industrias. Lo particular de cada industria queda definido por el comportamiento de los consumidores respecto a su disposición a pagar en un horizonte de tiempo por el producto en cuestión. Por ejemplo, en el caso de las aerolíneas o de los hoteles, a medida que se acaba el horizonte de venta, el consumidor está dispuesto a pagar más por el producto, puesto que lo necesita con mayor urgencia. Por el contrario, en el caso del *retail* de ropa, el consumidor está dispuesto a pagar más al comienzo del horizonte de venta, dado que podrá utilizar el producto durante un tiempo mayor. En la práctica esto se ve reflejado en las promociones de los productos, ya que en el primer caso

los mayores descuentos se realizan si uno compra el producto con mayor anticipación, mientras que en el segundo caso, las liquidaciones se realizan al final de la temporada.

3. MODELO PARTICULAR

El modelo robusto en (2.5) planteado anteriormente es general, por lo que para resolverlo es necesario considerar una función particular de demanda. Con este fin, en este capítulo se limita la cantidad de coeficientes en la modelación de la demanda en (2.1) a dos coeficientes, ambos inciertos. Este modelo particular será utilizado en el capítulo siguiente para los experimentos y análisis de resultados. En primer lugar, se presenta la modelación de la demanda con dos coeficientes inciertos y la solución al problema del peor escenario de demanda en (2.4). En segundo lugar, se presenta la solución al modelo robusto en (2.5) para este caso particular de demanda. Y finalmente, se analiza el comportamiento del modelo.

3.1. Modelación de la Demanda

Se considera una formulación lineal de demanda con dos coeficientes, un coeficiente de nivel α del periodo y un coeficiente de sensibilidad al precio β del periodo. Para un periodo t se tiene:

$$d_t = \alpha_t - \beta_t p_t,$$

en que ambos coeficientes varían en cada periodo, de forma que a medida que avanza la temporada, el nivel de demanda α disminuye y la sensibilidad al precio β aumenta, puesto que la gente está menos dispuesta a comprar un producto que podrá utilizar por menos tiempo.

En lo que viene a continuación, por simplicidad se omitirán los subíndices t . Los coeficientes α y β se consideran inciertos. Sean $\bar{\alpha}$ y $\bar{\beta}$ los valores nominales de los coeficientes, y $2\hat{\alpha}$ y $2\hat{\beta}$ los largos de los intervalos a los cuales pertenecen, es decir, α y β pertenecen a los intervalos $[\bar{\alpha} - \hat{\alpha}; \bar{\alpha} + \hat{\alpha}]$ y $[\bar{\beta} - \hat{\beta}; \bar{\beta} + \hat{\beta}]$ respectivamente. El nivel de incertidumbre en los coeficientes Γ , en este caso, toma valores entre 0 y 2 (cantidad de coeficientes sujetos a incertidumbre) y el set de incertidumbre para cada periodo queda

definido por:

$$U(\Gamma) = \left\{ (\alpha, \beta) : \begin{array}{l} \left| \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{\hat{\alpha}} \right| + \left| \frac{\beta - \bar{\beta}}{\hat{\beta}} \right| \leq \Gamma, \Gamma \in [0, 2] \\ \bar{\alpha} - \hat{\alpha} \leq \alpha \leq \bar{\alpha} + \hat{\alpha} \\ \bar{\beta} - \hat{\beta} \leq \beta \leq \bar{\beta} + \hat{\beta} \end{array} \right\}.$$

Ahora, como se mencionó anteriormente, en un modelo de precios robusto se debe considerar el peor escenario posible de demanda, lo cual se logra resolviendo el problema en (2.4). Para demanda lineal con dos coeficientes, ambos inciertos, y considerando incertidumbre Γ en los coeficientes y un precio p dado, se tiene el siguiente problema:

$$d_{min}(p, \Gamma) = \min_{\alpha, \beta} \alpha - \beta p \quad (3.1)$$

s.a.

$$\begin{array}{l} \left| \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{\hat{\alpha}} \right| + \left| \frac{\beta - \bar{\beta}}{\hat{\beta}} \right| \leq \Gamma, \Gamma \in [0; 2], \\ \bar{\alpha} - \hat{\alpha} \leq \alpha \leq \bar{\alpha} + \hat{\alpha}, \\ \bar{\beta} - \hat{\beta} \leq \beta \leq \bar{\beta} + \hat{\beta}. \end{array}$$

El parámetro Γ representa entonces el nivel de aversión al riesgo del tomador de decisión, puesto que permite definir el peor de los escenarios aceptados por el tomador de decisión. Es así como una persona neutral al riesgo consideraría un Γ igual a 0, de forma que los coeficientes tomen sus valores nominales $\bar{\alpha}$ y $\bar{\beta}$, mientras que una persona completamente averso al riesgo consideraría un Γ igual a 2, de forma que los coeficientes puedan tomar todo su rango de valores. La solución analítica del problema en (3.1) está dada por:

$$d_{min}(p, \Gamma) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Para } \Gamma = 0 \\ \bar{\alpha} - \bar{\beta}p \quad , \text{ con } \begin{array}{l} \alpha = \bar{\alpha} \\ \beta = \bar{\beta}, \end{array} \\ \\ \text{Para } 0 < \Gamma \leq 1 \\ \bar{\alpha} - \hat{\alpha}\Gamma - \bar{\beta}p \quad \text{si } p = \frac{\hat{\alpha}}{\bar{\beta}} \quad , \text{ con } \begin{array}{l} \bar{\alpha} - \Gamma\hat{\alpha} < \alpha < \bar{\alpha} \\ \beta = \bar{\beta} + \Gamma\hat{\beta} + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\alpha}}(\alpha - \bar{\alpha}), \end{array} \\ \bar{\alpha} - \hat{\alpha}\Gamma - \bar{\beta}p \quad \text{si } p < \frac{\hat{\alpha}}{\bar{\beta}} \quad , \text{ con } \begin{array}{l} \alpha = \bar{\alpha} - \hat{\alpha}\Gamma \\ \beta = \bar{\beta}, \end{array} \\ \bar{\alpha} - (\bar{\beta} + \hat{\beta}\Gamma)p \quad \text{si } p > \frac{\hat{\alpha}}{\bar{\beta}} \quad , \text{ con } \begin{array}{l} \alpha = \bar{\alpha} \\ \beta = \bar{\beta} + \hat{\beta}\Gamma, \end{array} \\ \\ \text{Para } 1 < \Gamma \leq 2 \\ \bar{\alpha} - \hat{\alpha}\Gamma - \bar{\beta}p \quad \text{si } p = \frac{\hat{\alpha}}{\bar{\beta}} \quad , \text{ con } \begin{array}{l} \bar{\alpha} - \hat{\alpha} < \alpha < \bar{\alpha} - \hat{\alpha}(\Gamma - 1) \\ \beta = \bar{\beta} + \Gamma\hat{\beta} + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\alpha}}(\alpha - \bar{\alpha}), \end{array} \\ \bar{\alpha} - \hat{\alpha} - (\bar{\beta} + \hat{\beta}(\Gamma - 1))p \quad \text{si } p < \frac{\hat{\alpha}}{\bar{\beta}} \quad , \text{ con } \begin{array}{l} \alpha = \bar{\alpha} - \hat{\alpha} \\ \beta = \bar{\beta} + \hat{\beta}(\Gamma - 1), \end{array} \\ \bar{\alpha} - \hat{\alpha}(\Gamma - 1) - (\bar{\beta} + \hat{\beta})p \quad \text{si } p > \frac{\hat{\alpha}}{\bar{\beta}} \quad , \text{ con } \begin{array}{l} \alpha = \bar{\alpha} - \hat{\alpha}(\Gamma - 1) \\ \beta = \bar{\beta} + \hat{\beta}. \end{array} \end{array} \right. \quad (3.2)$$

La solución para los coeficientes α y β con Γ igual a 0, corresponde a sus valores nominales. En cambio, para Γ distinto de 0, se puede observar en la solución que Γ acompaña al coeficiente que tenga mayor incidencia en la demanda. Los tramos $0 < \Gamma \leq 1$ y $1 < \Gamma \leq 2$ tienen tres soluciones posibles. En la primera solución, ambos coeficientes afectan de la misma forma a la demanda, en cambio en la segunda, es α quien tiene mayor incidencia, mientras que en la tercera lo hace β . Esto se resume en la Tabla 3.1.

TABLA 3.1. Coeficientes α y β para obtener la menor demanda según Γ y p .

Solución		$0 < \Gamma \leq 1$	$1 < \Gamma \leq 2$
1)	$p = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}$	$\bar{\alpha} - \Gamma \hat{\alpha} < \alpha < \bar{\alpha}$ $\beta = \bar{\beta} + \Gamma \hat{\beta} + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\alpha}} (\alpha - \bar{\alpha})$	$\bar{\alpha} - \hat{\alpha} < \alpha < \bar{\alpha} - \hat{\alpha} (\Gamma - 1)$ $\beta = \bar{\beta} + \Gamma \hat{\beta} + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\alpha}} (\alpha - \bar{\alpha})$
2)	$p < \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}$	$\alpha = \bar{\alpha} - \hat{\alpha} \Gamma$ $\beta = \bar{\beta}$	$\alpha = \bar{\alpha} - \hat{\alpha}$ $\beta = \bar{\beta} + \hat{\beta} (\Gamma - 1)$
3)	$p > \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}$	$\alpha = \bar{\alpha}$ $\beta = \bar{\beta} + \hat{\beta} \Gamma$	$\alpha = \bar{\alpha} - \hat{\alpha} (\Gamma - 1)$ $\beta = \bar{\beta} + \hat{\beta}$

3.2. Solución Analítica

Para obtener la solución analítica del modelo robusto en (2.5) particular, se reemplaza la menor demanda en (3.2) en los sistemas de ecuaciones en (2.3). Se tienen 2^T puntos KKT dados por los siguientes sistemas de ecuaciones, recordando que λ es el multiplicador de Lagrange asociado a la primera restricción:

$$\vec{p}_R(C, \Gamma) = \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \frac{\alpha_t(p_t, \Gamma)}{2\beta_t(p_t, \Gamma)} \quad \forall t \quad , \text{ si } \begin{array}{l} \sum_{t=1}^T d_t(p_t) \leq C \\ d_t(p_t) \geq 0 \quad \forall t, \end{array} \\ \text{ii) } \lambda = \frac{\sum_{j=1, j \notin D_0}^T \alpha_j(p_j, \Gamma) - 2C}{\sum_{j=1, j \notin D_0}^T \beta_j(p_j, \Gamma)} \quad \forall t \quad , \text{ si } \begin{array}{l} \lambda > 0 \\ d_t(p_t) > 0 \quad \forall t \notin D_0, \end{array} \\ \text{iii) } \lambda = \frac{\sum_{j=1, j \notin D_0}^T \alpha_j(p_j, \Gamma) - 2C}{\sum_{j=1, j \notin D_0}^T \beta_j(p_j, \Gamma)} \quad \lambda > 0 \\ \frac{\alpha_t(p_t, \Gamma)}{\beta_t(p_t, \Gamma)} \quad \forall t \in D_0 \quad , \text{ si } \begin{array}{l} \lambda - p_t > 0 \quad \forall t \in D_0 \\ d_t(p_t) > 0 \quad \forall t \notin D_0. \end{array} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_t(p_t, \Gamma)}{\beta_t(p_t, \Gamma)} + \lambda \right) \quad \forall t \notin D_0 \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Las políticas de precios dadas por los puntos KKT obtenidos en (3.3) caracterizan óptimos locales, por lo que aún falta encontrar el óptimo global. Como se mencionó anteriormente, para $\Gamma = 0$ los coeficientes α y β quedan definidos por $\bar{\alpha}$ y $\bar{\beta}$

respectivamente, y la política de precios neutral óptima es el punto KKT que entregue el mayor ingreso.

Sin embargo, para $\Gamma > 0$, la expresión del precio depende a su vez del mismo precio fijado, puesto que los coeficientes α y β dependen de éste en (3.3). Como se mencionó anteriormente, en cada periodo se tienen tres soluciones posibles para α y β con Γ distinto de 0, y el óptimo global debe pertenecer necesariamente a alguna combinación de estas soluciones. Entonces, con el fin de encontrar la política de precios robusta óptima, se calculan, para cada punto KKT y para cada combinación posible de soluciones en una temporada, los precios dados por los sistemas en (3.3), verificando que se cumplan las condiciones de los sistemas y de las soluciones de la combinación. Finalmente, se escoge la combinación que entregue el mayor ingreso.

3.3. Comportamiento del Precio

En esta sección se estudia analíticamente el comportamiento del precio según el inventario C al inicio de la temporada y el grado de aversión al riesgo Γ . Para el comportamiento del precio según el inventario C al inicio de la temporada, se tiene la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 3.1. *Para demanda lineal, los precios fijados son no-crecientes según el inventario inicial C , es decir,*

$$\frac{\partial}{\partial C} (p(C, \Gamma)) \leq 0.$$

DEMOSTRACIÓN 3.1. *En las políticas de precios dadas por los puntos KKT en (3.3), se observa que el inventario C afecta negativamente a λ , por lo que C afecta negativamente al precio en los casos ii) y iii), y no lo afecta en el caso i).*

La Proposición 3.1 se debe a que, dado que el inventario es un costo hundido, al tener mayor inventario inicial, es necesario fijar precios menores para poder vender todas las unidades. Por el contrario, si se tiene menor inventario inicial, existen mayores oportunidades de vender las unidades durante la temporada, por lo que se intenta obtener mejores ingresos fijando precios más altos. O bien, mirándolo desde otro punto de vista, si la demanda se mantiene, a menor oferta el precio aumenta.

Para el comportamiento del precio según Γ , se tiene la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 3.2. *Para demanda lineal, los precios fijados son no-crecientes según la aversión al riesgo Γ del tomador de decisión, es decir,*

$$\frac{\partial}{\partial \Gamma} (p(C, \Gamma)) \leq 0.$$

DEMOSTRACIÓN 3.2. *Se puede observar en las soluciones de los coeficientes α y β para el problema de menor demanda en la solución en (3.2), que α es no-creciente y β no-decreciente según Γ . Considerando esto, se observa de manera directa en (3.3) que el precio es no-creciente según Γ .*

La Proposición 3.2 se explica por el hecho que, si el tomador de decisión es averso al riesgo, prefiere fijar un precio más bajo para asegurar su venta y tener menor variabilidad en el ingreso. Si fijara un precio más alto, estaría apostando que la demanda va a ser más alta, sin importarle la posibilidad que no sea así, por lo que sería alguien neutral al riesgo.

3.4. Análisis para Inventario Inicial Grande

En esta sección se estudia el comportamiento del modelo en caso de tener alto nivel de inventario inicial, en cuanto a la variabilidad de los ingresos según la aversión al riesgo Γ y se propone un criterio al tomador de decisión para escoger el valor del parámetro Γ .

Para poder realizar los análisis se asume entonces “inventario grande”, el cual se define a continuación:

Definición 3.1. *Inventario grande es tal que, bajo cualquier escenario, no se alcance a vender la totalidad de las unidades durante la temporada, es decir, que no se produzcan quiebres de stock.*

PROPOSICIÓN 3.3. *En caso de demanda lineal, se tiene inventario grande cuando se cruza el umbral \bar{C} , el cual está definido por:*

$$\bar{C} = \sum_{t=1}^T (\bar{\alpha}_t + \hat{\alpha}_t) - (\bar{\beta}_t - \hat{\beta}_t) \min \left\{ \frac{\hat{\alpha}_t}{\hat{\beta}_t}, \frac{\bar{\alpha}_t - \hat{\alpha}_t}{2(\bar{\beta}_t + \hat{\beta}_t)} \right\}.$$

DEMOSTRACIÓN 3.3. *La expresión anterior se obtiene al considerar los mejores escenarios de demanda durante la temporada, bajo el menor precio posible. El mejor escenario de demanda para un periodo viene dado por el mayor coeficiente α y el menor coeficiente β posible. Al observar el primer caso (no se venden todas las unidades) de los sistemas de ecuaciones en (3.3), el precio tiene la forma $\frac{\alpha(p,\Gamma)}{2\beta(p,\Gamma)}$. Y al considerar los coeficientes de la Tabla 3.1, aceptando todo su movimiento posible ($\Gamma = 2$), el menor precio puede tomar los valores de $\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}$ y $\frac{\bar{\alpha}-\hat{\alpha}}{2(\bar{\beta}+\hat{\beta})}$ (soluciones 1 y 2 respectivamente).*

3.4.1. Variabilidad del Ingreso

Ahora, si x es una variable incierta, sea \tilde{x} su valor realizado. El ingreso máximo obtenido en caso de tener inventario grande queda definido por la siguiente expresión:

$$\tilde{V}(C, \Gamma) = \sum_{t=1}^T \tilde{d}_t(p_t(C, \Gamma)) p_t(C, \Gamma),$$

la cual, para el caso propuesto de demanda lineal con dos coeficientes inciertos, queda:

$$\begin{aligned}\tilde{V}(C, \Gamma) &= \sum_{t=1}^T (\tilde{\alpha}_t - \tilde{\beta}_t p_t(C, \Gamma)) p_t(C, \Gamma) \\ &= \sum_{t=1}^T \tilde{\alpha}_t p_t(C, \Gamma) - \tilde{\beta}_t p_t^2(C, \Gamma).\end{aligned}$$

Suponiendo que los coeficientes $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ son variables aleatorias i.i.d., con valores esperados μ_α y μ_β , y varianzas σ_α^2 y σ_β^2 respectivamente, el valor esperado y la varianza del ingreso máximo obtenido son:

$$E \left[\tilde{V}(C, \Gamma) \right] = \sum_{t=1}^T p_t(C, \Gamma) \mu_{\alpha t} - p_t^2(C, \Gamma) \mu_{\beta t}, \quad (3.4)$$

$$Var \left[\tilde{V}(C, \Gamma) \right] = \sum_{t=1}^T p_t^2(C, \Gamma) \sigma_{\alpha t}^2 + p_t^4(C, \Gamma) \sigma_{\beta t}^2. \quad (3.5)$$

Considerando esto, para el comportamiento de la variabilidad en el ingreso obtenido según Γ se tiene la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 3.4. *Para el caso de inventario grande con demanda lineal, la variabilidad en el ingreso máximo obtenido es no-creciente según la aversión al riesgo Γ del tomador de decisión, es decir,*

$$\frac{\partial}{\partial \Gamma} \left(Var \left[\tilde{V}(C, \Gamma) \right] \right) \leq 0.$$

DEMOSTRACIÓN 3.4. *La derivada de la variabilidad en (3.5) respecto a Γ es:*

$$\frac{\partial}{\partial \Gamma} \left(Var \left[\tilde{V}(C, \Gamma) \right] \right) = \sum_{t=1}^T \frac{\partial}{\partial \Gamma} (p_t(C, \Gamma)) \left[2p_t(C, \Gamma) \sigma_{\alpha t}^2 + 4p_t^3(C, \Gamma) \sigma_{\beta t}^2 \right],$$

y dado que:

$$\frac{\partial}{\partial \Gamma} (p_t(C, \Gamma)) \leq 0$$

y

$$[2p_t(C, \Gamma)\sigma_{\alpha t}^2 + 4p_t^3(C, \Gamma)\sigma_{\beta t}^2] \geq 0,$$

se obtiene que:

$$\frac{\partial}{\partial \Gamma} \left(Var \left[\tilde{V}(C, \Gamma) \right] \right) \leq 0.$$

La Proposición 3.4 muestra lo que se busca con el modelo robusto propuesto de precios, ya que permite al tomador de decisión averso al riesgo reducir la variabilidad de sus ingresos.

3.4.2. Criterio de Elección de Aversión al Riesgo

En un modelo robusto, la pregunta lógica a responder es qué tan averso al riesgo se debe ser, es decir, cuál es el valor del parámetro Γ a utilizar. Esto es muchas veces dejado de lado en la literatura, por lo que en esta sección se propone un criterio para el tomador de decisión, que le permita escoger su nivel de aversión al riesgo. El criterio se inspira en los modelos de *chance constraints* (Nemirovski y Shapiro, 2006), que buscan optimizar un problema de manera tal que las restricciones se cumplan con probabilidad cercana a uno, y que se pueden resolver mediante simulaciones de Monte Carlo (*Value-at-Risk*). Se estudia entonces la probabilidad de estar bajo cierto percentil de la política neutral al riesgo ($\Gamma = 0$). El objetivo es escoger el valor de Γ de forma de aumentar la probabilidad de estar sobre cierto percentil de la política neutral al riesgo. Así, se tiene la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 3.5. Sean μ_Γ y σ_Γ el valor esperado y la desviación estándar respectivamente, del ingreso máximo obtenido. Sea z una variable normal estándar. En caso de tener inventario grande con demanda lineal, para que la probabilidad de estar sobre el percentil q de una política neutral al riesgo aumente al utilizar una política robusta con aversión al riesgo Γ , se debe cumplir la siguiente condición:

$$\frac{\mu_0 - \mu_\Gamma}{\sigma_\Gamma} < \left(1 - \frac{\sigma_0}{\sigma_\Gamma} \right) z_q.$$

DEMOSTRACIÓN 3.5. *Para un número grande de iteraciones, según el Teorema Central del Límite, se puede establecer que el ingreso obtenido distribuye Normal, es decir, $\tilde{V}(C, \Gamma) \sim N(\mu_\Gamma; \sigma_\Gamma)$. Sea Q el valor del percentil q de la política neutral al riesgo. Se tiene:*

$$\begin{aligned} \Pr(\tilde{V}(C, 0) \leq Q) &= q \\ &= \Pr\left(\frac{\tilde{V}(C, 0) - \mu_0}{\sigma_0} \leq z_q\right) \\ &= \Pr\left(\tilde{V}(C, 0) \leq z_q \sigma_0 + \mu_0\right), \end{aligned}$$

y que:

$$\begin{aligned} \Pr(\tilde{V}(C, \Gamma) \leq Q) &= \Pr\left(\tilde{V}(C, \Gamma) \leq z_q \sigma_0 + \mu_0\right) \\ &= \Pr\left(\frac{\tilde{V}(C, \Gamma) - \mu_\Gamma}{\sigma_\Gamma} \leq \frac{z_q \sigma_0 + \mu_0 - \mu_\Gamma}{\sigma_\Gamma}\right), \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\frac{z_q \sigma_0 + \mu_0 - \mu_\Gamma}{\sigma_\Gamma} < z_q.$$

Considerando el valor esperado en (3.4) y la varianza en (3.5) mencionados anteriormente, junto con la Proposición 3.5, se obtiene que para aumentar la probabilidad de estar sobre el percentil q de la política neutral al riesgo, se debe cumplir para Γ :

$$\begin{aligned} &\frac{\sum_{t=1}^T p_t(C, 0) \mu_{\alpha t} - p_t^2(C, 0) \mu_{\beta t} - \sum_{t=1}^T p_t(C, \Gamma) \mu_{\alpha t} - p_t^2(C, \Gamma) \mu_{\beta t}}{\sum_{t=1}^T p_t^2(C, \Gamma) \sigma^2 \alpha t + p_t^4(C, \Gamma) \sigma^2 \beta t} \\ &< \left(1 - \frac{\sum_{t=1}^T p_t^2(C, 0) \sigma^2 \alpha t + p_t^4(C, 0) \sigma^2 \beta t}{\sum_{t=1}^T p_t^2(C, \Gamma) \sigma^2 \alpha t + p_t^4(C, \Gamma) \sigma^2 \beta t} \right) z_q \end{aligned} \quad (3.6)$$

4. PRUEBAS NUMÉRICAS Y SIMULACIONES

En este capítulo se presentan los resultados del modelo y las pruebas numéricas y simulaciones realizadas para analizar el comportamiento de éste. Se utiliza el modelo robusto en (2.5) particular, cuya solución viene dada por los sistemas de ecuaciones en (3.3). Se consideran 4 periodos en la temporada, y los valores y rangos de los coeficientes de demanda α y β de la Tabla 4.1, donde a medida que avanza la temporada, el nivel de demanda α disminuye y la sensibilidad al precio β aumenta, puesto que la gente está menos dispuesta a comprar un producto que podrá utilizar por menos tiempo. A continuación, se presentan las políticas de precio entregadas por el modelo. Luego se presenta un primer experimento que trabaja con escenarios específicos de demanda. Luego, un segundo experimento que trabaja con escenarios simulados de demanda. Y finalmente, un tercer experimento que trabaja también con escenarios simulados, pero esta vez con inventario inicial grande.

TABLA 4.1. Valores nominales y rangos de los coeficientes para cada periodo, en el caso de demanda lineal.

Periodo	α			$\beta (10^{-3})$		
	α_{\min}	$\bar{\alpha}$	α_{\max}	β_{\min}	β	β_{\max}
1	35,0	50	65,0	1,5	2,2	2,9
2	34,3	49	63,7	1,7	2,4	3,1
3	31,5	45	58,5	1,9	2,7	3,5
4	21,0	30	39,0	2,2	3,2	4,2

4.1. Políticas de Precio Óptimas

Como se mencionó anteriormente, para obtener la política de precios robusta óptima a seguir en cada periodo de la temporada, se deben calcular todas las combinaciones para los coeficientes α y β de la solución en (3.2), en los puntos KKT entregados por los sistemas de ecuaciones en (3.3), y escoger el punto que reporte el mayor ingreso. La solución entregada por el modelo corresponde a la política óptima de precios a seguir durante la temporada, es decir, a los precios que se deben fijar en cada periodo, con

la información disponible a la fecha. Cabe mencionar que, una vez transcurrido un periodo, hay nueva información respecto al inventario en mano, por lo que es conveniente determinar nuevamente los precios óptimos.

Los precios robustos óptimos se muestran en la Tabla 4.2, donde, por simplicidad, se presentan sólo los niveles de aversión al riesgo $\Gamma = 0$ (neutral) y $\Gamma = 0,5$, sin embargo, los fenómenos descritos a continuación son válidos para cualquier nivel de aversión al riesgo Γ .

TABLA 4.2. Políticas de precios para distintos niveles de aversión al riesgo Γ , con demanda lineal, para un inventario disponible y periodo dados.

$\Gamma = 0,0$					$\Gamma = 0,5$				
Inv.	Periodo				Inv.	Periodo			
	1	2	3	4		1	2	3	4
20	18.487	15.502	11.299	4.688	20	15.303	12.617	9.096	3.984
40	15.840	12.859	8.333	4.688	40	12.892	10.207	7.083	3.984
60	13.935	10.449	8.333	4.688	60	10.988	8.677	7.083	3.984
80	12.030	10.208	8.333	4.688	80	9.659	8.677	7.083	3.984
100	11.364	10.208	8.333	4.688	100	9.659	8.677	7.083	3.984

Se observa que el precio es no creciente en el tiempo, lo cual se explica porque, al ser el inventario un costo hundido, si la temporada se está acabando, el tomador de decisión debe intentar deshacerse del inventario. También se puede apreciar lo que se plantea en la Proposición 3.1, esto es, que el precio es no creciente con el inventario, dado que si se tiene alto nivel de inventario se busca vender una mayor cantidad de unidades, por lo que se fija un precio menor. Además ocurre lo planteado en la Proposición 3.2, es decir, que el precio es no creciente con la aversión al riesgo, puesto que a medida que la aversión al riesgo aumenta, los precios son no crecientes, lo cual obedece a que un tomador de decisión averso al riesgo busca fijar un precio más bajo para poder vender las unidades y obtener un ingreso más seguro o con menor variabilidad.

4.2. Experimento Escenarios Específicos

El objetivo de este experimento es estudiar la respuesta del modelo robusto propuesto (2.5) particular, bajo escenarios específicos de demanda, considerando escenarios extremos, neutrales e intermedios. Se trabaja con siete escenarios específicos que están definidos en la Tabla 4.3. En la definición de los escenarios, se considera como valor optimista (pesimista) de un coeficiente, el valor que maximice (minimice) la demanda para un precio dado, y como valor neutral, su valor nominal. Se utiliza un inventario inicial de 100 unidades, y se analiza la respuesta del modelo para los distintos escenarios, variando el grado de aversión al riesgo Γ desde 0 a 2, incrementando su valor en 0,1 cada vez. Es decir, se analiza la respuesta del modelo para 21 políticas de precios con diferente aversión al riesgo, y para cada escenario específico.

TABLA 4.3. Escenarios específicos para los coeficientes de demanda.

Escenario	Descripción
1) $\alpha (+) - \beta (+)$	Ambos coeficientes α y β toman sus valores optimistas.
2) $\alpha (+) - \beta (.)$	El coeficiente α toma su valor optimista, mientras que β toma su valor neutral.
3) $\alpha (.) - \beta (+)$	El coeficiente α toma su valor neutral, mientras que β toma su valor optimista.
4) $\alpha (.) - \beta (.)$	Ambos coeficientes α y β toman sus valores neutrales.
5) $\alpha (.) - \beta (-)$	El coeficiente α toma su valor neutral, mientras que β toma su valor pesimista.
6) $\alpha (-) - \beta (.)$	El coeficiente α toma su valor pesimista, mientras que β toma su valor neutral.
7) $\alpha (-) - \beta (-)$	Ambos coeficientes α y β toman sus valores pesimistas.

Los resultados de este experimento se muestran en la Figura 4.2, donde se observa el ingreso total de la temporada para cada nivel de aversión al riesgo Γ y para cada escenario específico. Se puede apreciar en el gráfico que la diferencia del ingreso percibido en los diferentes escenarios disminuye a medida que la aversión al riesgo Γ aumenta, lo que sugiere que la variabilidad disminuye a mayor aversión al riesgo. También se observa que, en escenarios pesimistas, se obtienen mejores resultados cuando se es más averso al riesgo. Llama la atención que en algunos casos, pese a tener el escenario más optimista, se

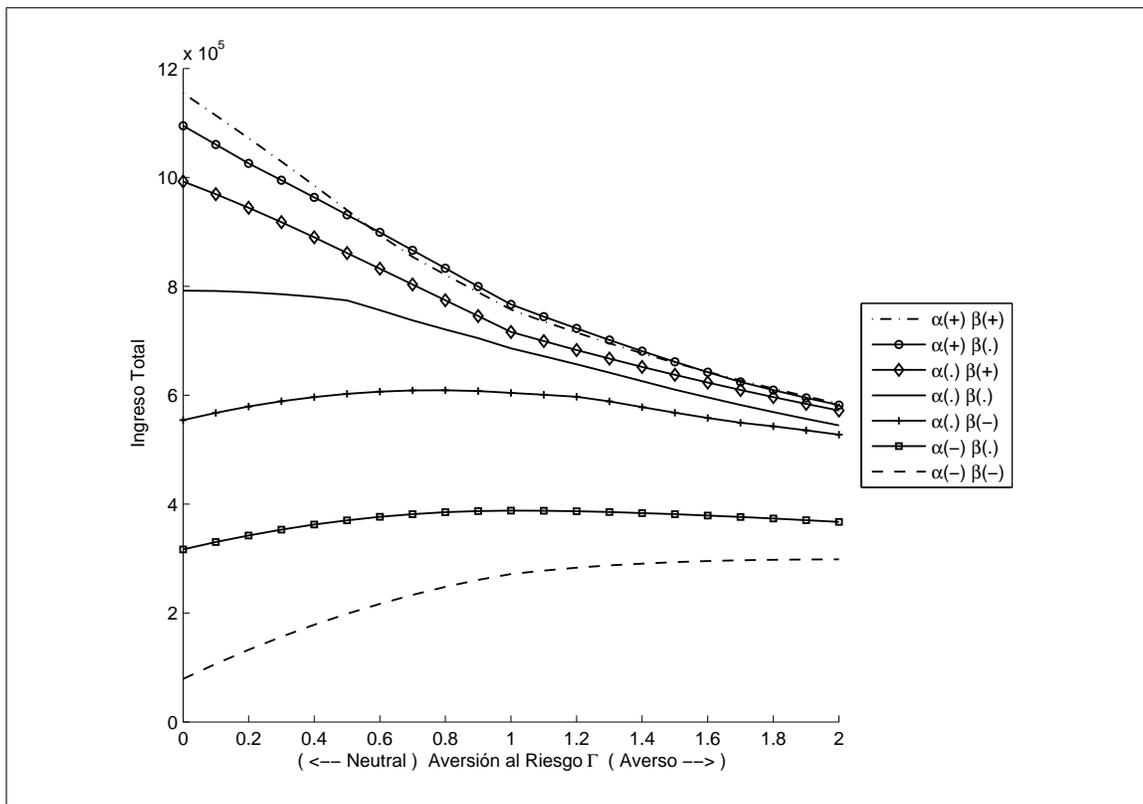


FIGURA 4.1. Ingreso total para cada escenario según aversión al riesgo Γ , con demanda lineal.

obtienen ingresos menores que bajo otros escenarios. Esto se explica por los quiebres de stock que se sufren por el hecho de haber fijado precios bajos teniendo una demanda alta, situación que impide reaccionar a tiempo para modificar el precio y obtener un mayor ingreso.

4.3. Experimento Escenarios Simulados

El objetivo de este experimento es estudiar el efecto en la variabilidad del ingreso obtenido bajo la política de precios robusta, entregada por el modelo robusto propuesto (2.5) particular, y el efecto en la probabilidad de obtener ingresos bajos. Con este fin, se simulan 10.000 escenarios distintos de demanda, con diferentes valores de α y β dentro de sus respectivos intervalos permitidos $[\bar{\alpha} - \hat{\alpha}; \bar{\alpha} + \hat{\alpha}]$ y $[\bar{\beta} - \hat{\beta}; \bar{\beta} + \hat{\beta}]$. En este experimento

también se utiliza un inventario inicial de 100 unidades. Se compara la respuesta del modelo, para distinta aversión al riesgo Γ , aumentando su valor en 0,1 cada vez, con los resultados que se hubieran obtenido bajo la política de precios neutral ($\Gamma = 0$).

Para simular los escenarios, se utilizan diferentes distribuciones de probabilidad, tanto simétricas (Normal y Uniforme) como no simétricas (Beta), para los coeficientes α y β dentro de sus intervalos respectivos. En el caso de distribución Normal, se toma como media el valor nominal del intervalo y una desviación estándar tal que el 99% de las veces el coeficiente simulado esté contenido en su intervalo¹, es decir, $\alpha_t \sim N\left(\bar{\alpha}_t; \frac{2\hat{\alpha}_t}{z_{99\%}}\right) \forall t$ y $\beta_t \sim N\left(\bar{\beta}_t; \frac{2\hat{\beta}_t}{z_{99\%}}\right) \forall t$. En los casos de distribución Beta, se utilizan Beta (2,4) (distribución cargada a la izquierda) y Beta (4,2) (distribución cargada a la derecha). Sin embargo para este experimento, por simplicidad, se presentan sólo los resultados obtenidos con distribución Normal de los coeficientes, dado que para las demás distribuciones se obtuvieron resultados cualitativamente similares.

En la Figura 4.3, se presenta el resumen de los promedios y desviaciones estándar del ingreso, para las diferentes políticas de precio según la aversión al riesgo Γ . Se observa que tanto el ingreso promedio obtenido, como la desviación estándar, calculados en base a los 10.000 escenarios simulados, disminuyen. Se observa además un punto de inflexión para $\Gamma = 1$ explicado por la definición en tramos de los coeficientes de demanda en (3.2). En la Figura 4.3, se puede apreciar que la variación porcentual de la desviación estándar del ingreso obtenido es mayor que la del ingreso promedio, lo que sugiere que lo ganado en reducción de desviación estándar es mayor a lo perdido en ingreso, sin embargo, la razón crece con Γ , por lo que esta ganancia se va haciendo cada vez menor en relación a la pérdida.

En la Figura 4.4, se observa en detalle lo que ocurre para $\Gamma = 0, 2; 0, 5; 1, 0$ y $2, 0$, por medio de gráficos de frecuencia del ingreso obtenido, con su respectiva media μ y desviación estándar σ . Se puede apreciar que, en comparación con la política de

¹No se utiliza una distribución normal truncada, puesto que la regresión entrega un intervalo para cierto nivel de confianza, que siempre puede ser violado.

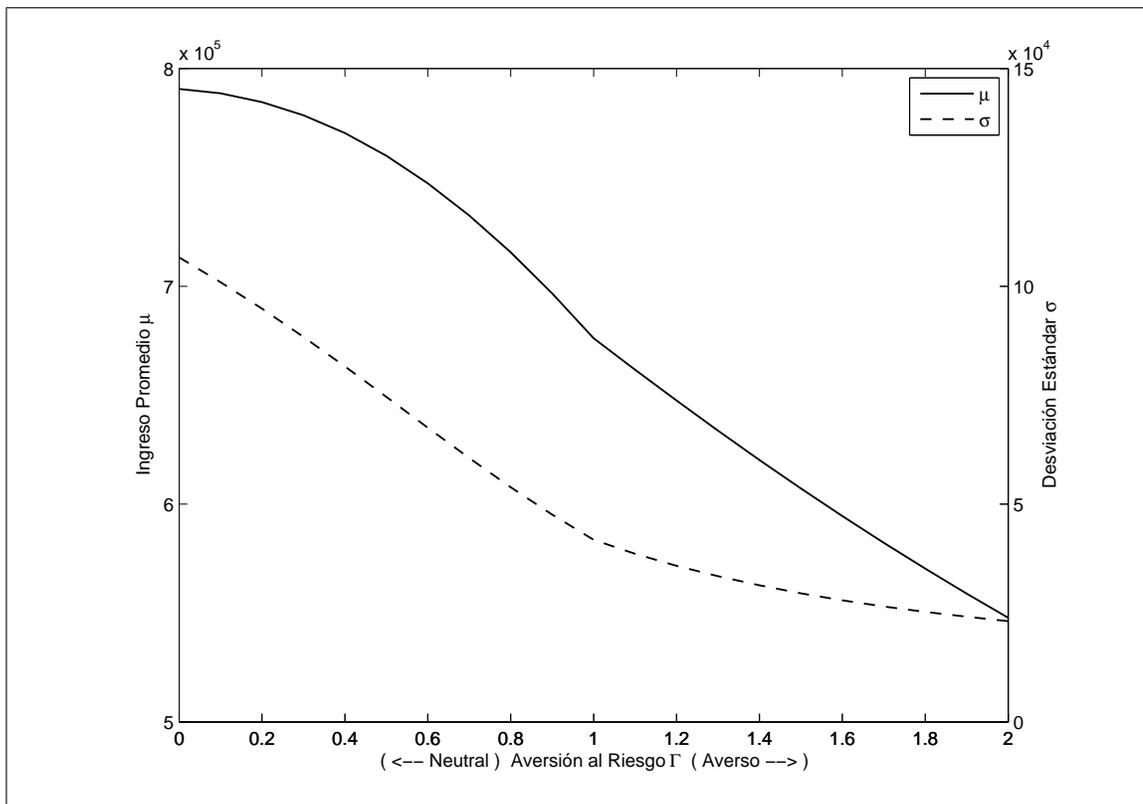


FIGURA 4.2. Promedio y desviación estándar del ingreso para diferentes políticas de precio según aversión al riesgo Γ , para una distribución Normal de los coeficientes de demanda, con demanda lineal.

precios neutral al riesgo ($\Gamma = 0$), la frecuencia de los escenarios negativos es menor, y la variabilidad del ingreso obtenido disminuye, a costa de una disminución del ingreso promedio. Para $\Gamma > 0,5$ este fenómeno también ocurre, sin embargo, el rango de ingreso obtenido queda contenido en los peores casos de la política neutral al riesgo (el detalle de lo ocurrido para cada política de precios con distinta aversión al riesgo Γ , con demanda lineal y distribución Normal de los coeficientes, se encuentra en el Anexo A).

Producto de este fenómeno, se analiza la probabilidad de estar sobre cierto percentil de la política neutral al riesgo ($\Gamma = 0$) en términos de ingreso, para cada política de precios. En la Figura 4.5, se grafica la proporción de los escenarios, bajo cada política de precios con $\Gamma \in [0; 2]$, que obtienen un ingreso mayor o igual a cierto percentil de

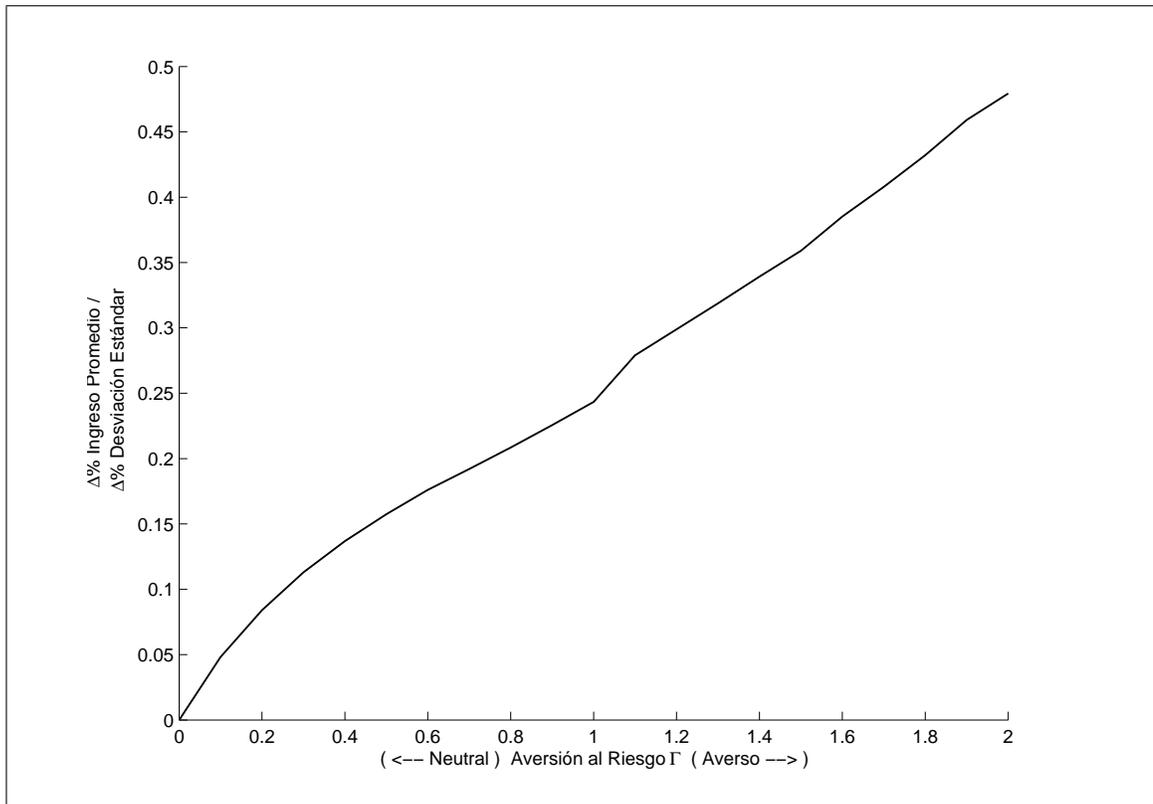


FIGURA 4.3. Razón entre la variación porcentual del ingreso promedio y la variación porcentual de la desviación estándar, al aumentar la aversión al riesgo Γ , para una distribución Normal de los coeficientes de demanda, con demanda lineal.

la política neutral al riesgo ($\Gamma = 0$), lo que se interpreta como la probabilidad de estar sobre cierto percentil de la política neutral al riesgo. Se observa que la probabilidad de estar sobre percentiles bajos aumenta para valores pequeños de Γ , luego disminuye rápidamente hasta anularse. Esto indica que no es necesario ser excesivamente pesimista e ir al peor caso posible, sino que puede ser mejor buscar un caso intermedio de aversión al riesgo. Por ejemplo, se observa que un tomador de decisión averso al riesgo, para aumentar la probabilidad de estar sobre el percentil 5% de la política neutral al riesgo, sin disminuir la probabilidad de estar sobre el percentil 10%, debe escoger un valor de Γ menor o igual a 0,7.

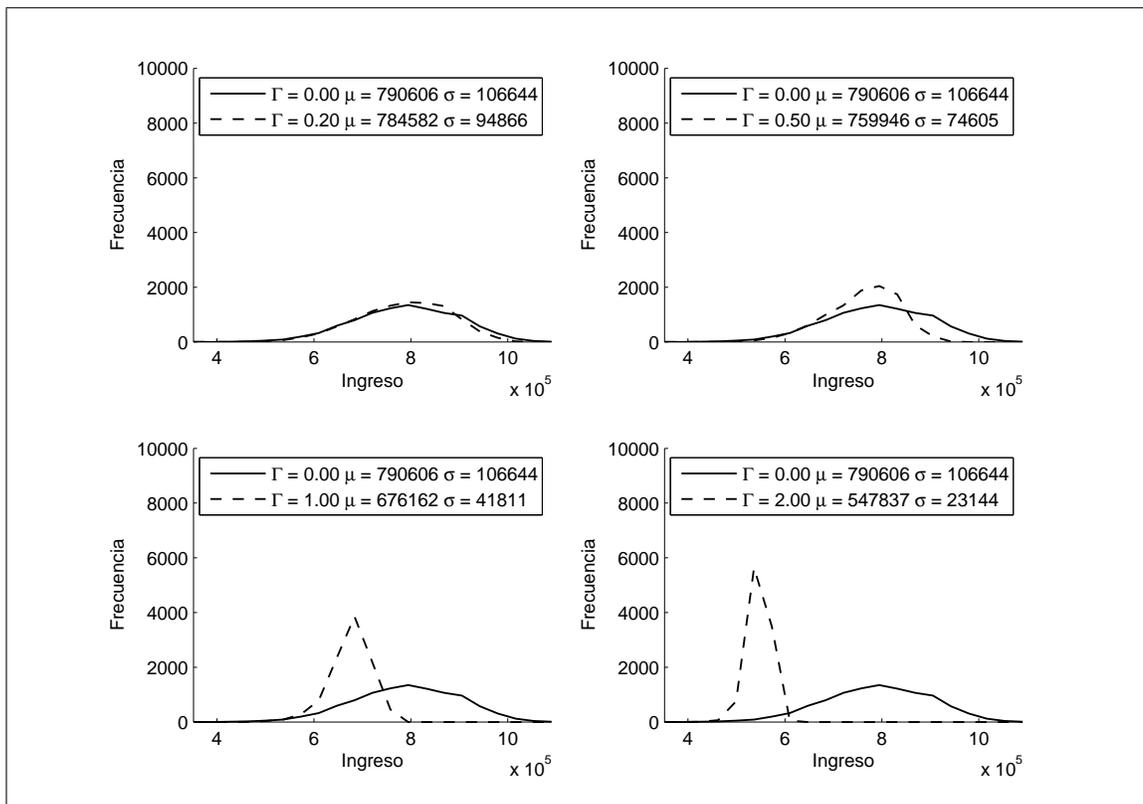


FIGURA 4.4. Distribución del ingreso obtenido para 10.000 escenarios simulados para distribución Normal de los coeficientes, con demanda lineal, para $\Gamma = 0,2; 0,5; 1,0$ y $2,0$.

Como se mencionó anteriormente, los resultados para las demás distribuciones de los coeficientes son cualitativamente similares, en cuanto a reducción de variabilidad y reducción de la probabilidad de estar bajo cierto percentil de la política neutral al riesgo. Los resultados se pueden observar en los Anexos B, C, y D para las distribuciones Uniforme, Beta (2,4) y Beta (4,2) respectivamente.

4.4. Experimento Inventario Inicial Grande

El objetivo de este experimento es comparar los valores simulados con los teóricos del ingreso esperado en (3.4), su variabilidad en (3.5) y del máximo valor de Γ que aumenta la probabilidad de estar sobre cierto percentil de la política neutral al riesgo, dado por la

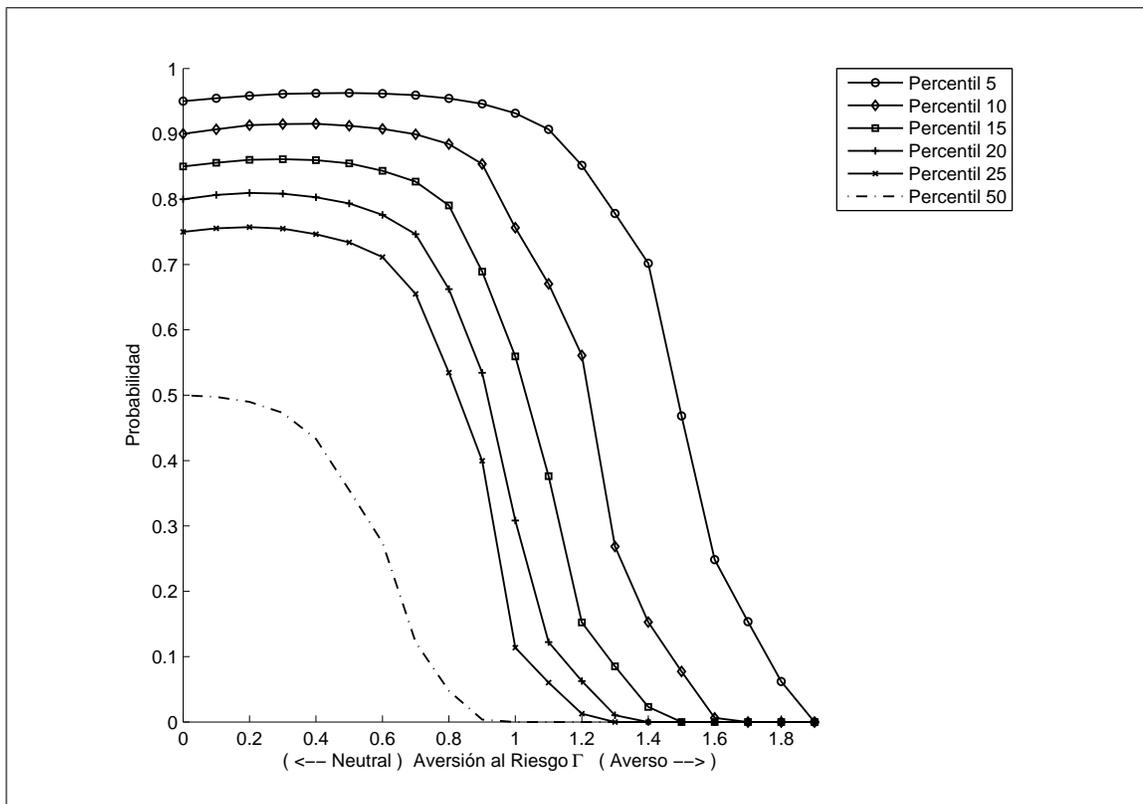


FIGURA 4.5. Probabilidad de estar sobre cierto percentil de la política neutral al riesgo ($\Gamma = 0$), para distribución Normal de los coeficientes, con demanda lineal.

Proposición 3.5 y que, para este caso de demanda lineal, viene dado por la expresión en (3.6). Para esto, se realiza el mismo experimento de escenarios simulados, pero esta vez se utiliza un inventario inicial grande de 194 unidades (obtenido por medio de la Proposición 3.3), de forma de evitar quiebres de stock. Cabe mencionar que para un mejor análisis, en este experimento en particular se trabajó con valores de Γ que aumentan en 0,01 cada vez.

En las Figuras 4.6 a 4.9, se muestran los resultados del valor teórico y simulado del ingreso esperado y de la variabilidad, para las distribuciones de los coeficientes Normal, Uniforme, Beta (2,4) y Beta (4,2). Se observa que ambos valores son muy cercanos, no superando un error porcentual promedio de 0,25% para el ingreso promedio, y de 7% para la desviación estándar. Tal como se mencionó anteriormente en la Proposición 3.4,

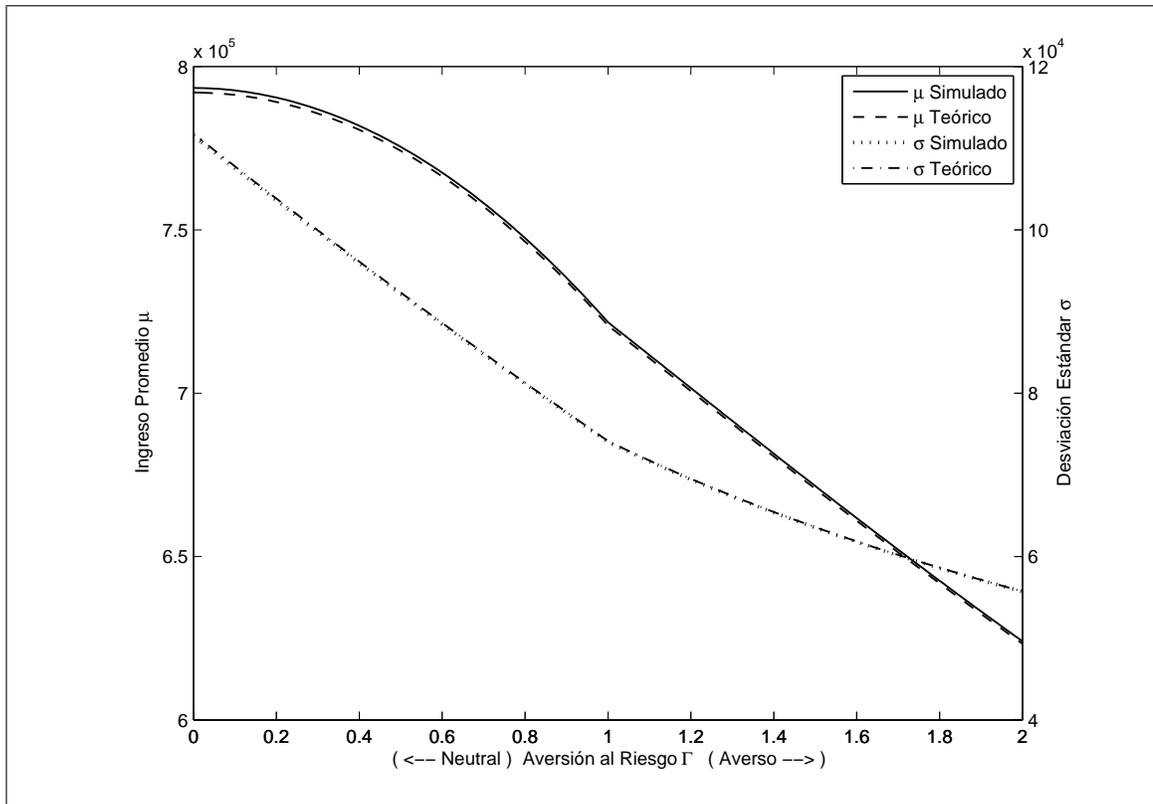


FIGURA 4.6. Promedio y desviación estándar del ingreso teórico y simulado, para diferentes políticas de precio según aversión al riesgo Γ , para una distribución Normal de los coeficientes de demanda, para inventario inicial grande, con demanda lineal.

la variabilidad en el ingreso obtenido disminuye a medida que Γ aumenta. El ingreso esperado también disminuye.

El error porcentual para el máximo valor de Γ que aumenta la probabilidad de estar sobre cierto percentil de la política neutral al riesgo se muestra en la Tabla 4.4, para las diferentes distribuciones de probabilidad de los coeficientes utilizadas. Se observa que los valores teóricos y simulados son muy cercanos en los casos Normal, Uniforme y Beta (2,4). En el caso de Beta (4,2), los valores son relativamente cercanos y se observa una mayor variabilidad en el error.

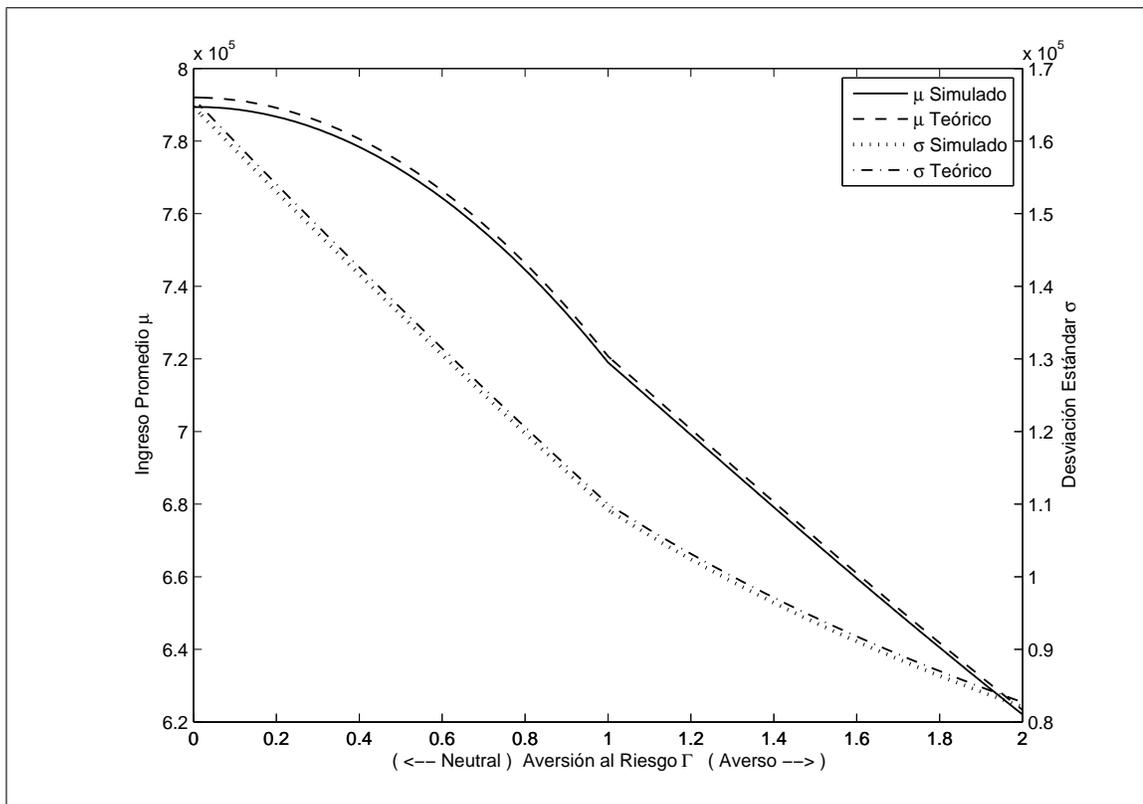


FIGURA 4.7. Promedio y desviación estándar del ingreso teórico y simulado, para diferentes políticas de precio según aversión al riesgo Γ , para una distribución Uniforme de los coeficientes de demanda, para inventario inicial grande, con demanda lineal.

TABLA 4.4. Error porcentual entre el valor simulado y teórico del máximo valor de Γ que aumenta la probabilidad de estar sobre cierto percentil de la política neutral al riesgo, para las diferentes distribuciones de probabilidad.

Percentil	Error Porcentual			
	Normal	Uniforme	Beta (2,4)	Beta (4,2)
5	3,45%	2,10%	3,61%	10,29%
10	0,00%	0,00%	7,69%	11,11%
15	3,57%	0,00%	3,77%	9,09%
20	4,35%	4,48%	4,65%	2,78%
25	2,70%	1,85%	2,86%	17,24%
30	0,00%	2,38%	3,70%	4,55%

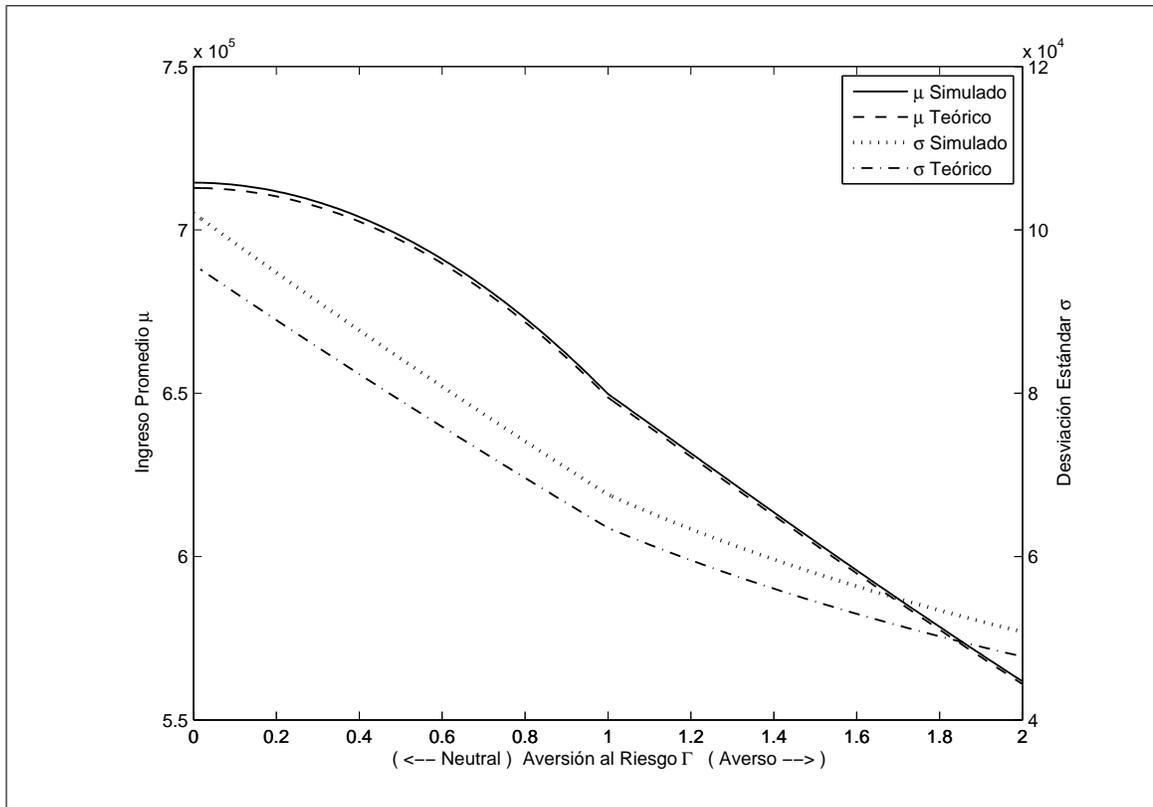


FIGURA 4.8. Promedio y desviación estándar del ingreso teórico y simulado, para diferentes políticas de precio según aversión al riesgo Γ , para una distribución Beta (2,4) de los coeficientes de demanda, para inventario inicial grande, con demanda lineal.

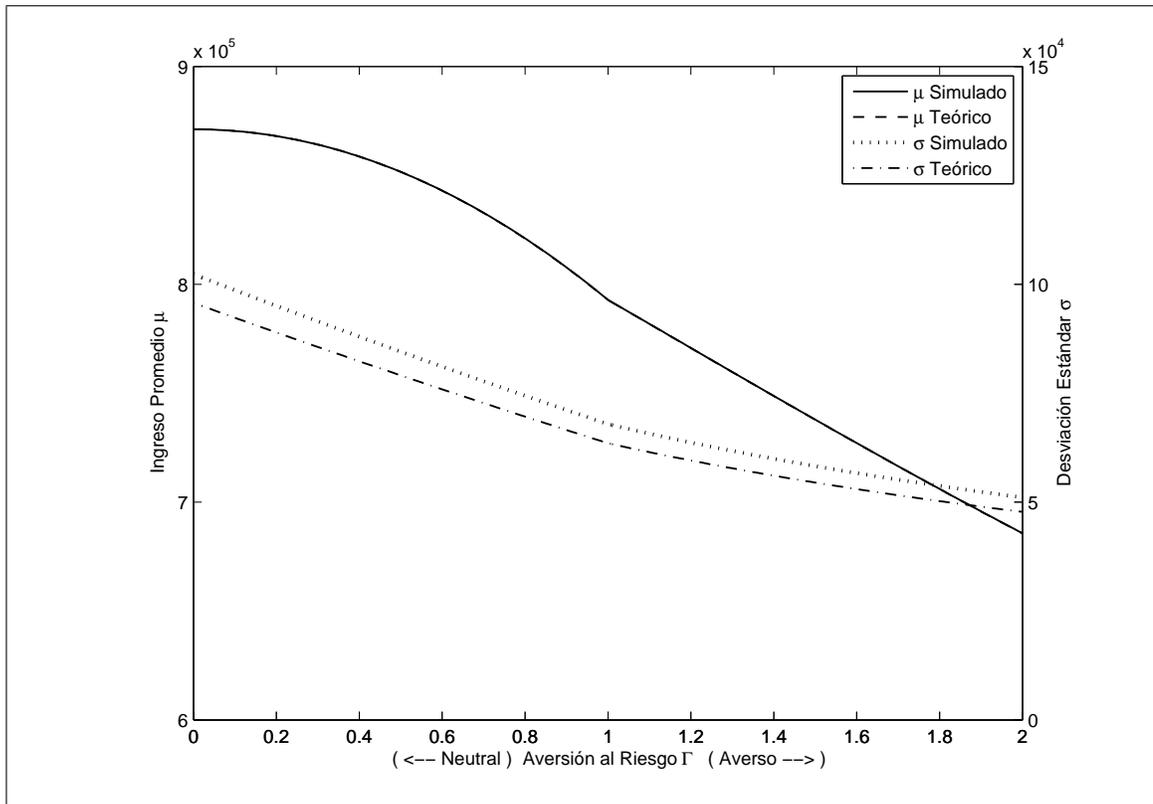


FIGURA 4.9. Promedio y desviación estándar del ingreso teórico y simulado, para diferentes políticas de precio según aversión al riesgo Γ , para una distribución Beta (4,2) de los coeficientes de demanda, para inventario inicial grande, con demanda lineal.

5. EXTENSIÓN AL CASO DE DEMANDA EXPONENCIAL

Hasta ahora, se ha trabajado con un caso particular de demanda lineal, lo cual ha permitido estudiar analíticamente el modelo. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, es común en la práctica de la industria del *retail* utilizar modelos de demanda exponencial (Bitran y Caldentey, 2003), debido a que presentan un mejor ajuste (Smith et al., 1994). Bajo esta consideración, en este capítulo se aplica el modelo robusto en (2.5) con una forma exponencial de demanda, siguiendo la misma metodología que en el caso lineal. A continuación, se describe la nueva formulación de demanda. Luego, se resuelve el modelo en base a los sistemas de ecuaciones en (2.3) y se incorpora la robustez al modelo. Finalmente, de la misma forma que con demanda lineal, se realizan los experimentos de escenarios específicos y escenarios simulados, y se analizan sus resultados. Se observa que el modelo se comporta de la misma forma que en el caso de demanda lineal.

5.1. Modelación Exponencial de la Demanda

Se considera la siguiente formulación exponencial genérica de la demanda:

$$d(\vec{x}) = e^{a_0} \prod_{i=1}^N e^{a_i x_i} \varepsilon \quad (5.1)$$

Al igual que en la formulación lineal, la ecuación está compuesta por un coeficiente de nivel a_0 y coeficientes a_i ($i = 1 \dots N$), que corresponden a los coeficientes de las variables \vec{x} , y un error ε que está relacionado con la incertidumbre. De manera de poder aplicar una regresión lineal multivariable, la ecuación de demanda exponencial (5.1) se puede transformar fácilmente a una ecuación lineal aplicando logaritmo natural en ambos lados de la ecuación, estimando así el logaritmo de las ventas y obteniendo los valores nominales e intervalos de confianza de los coeficientes a_i .

Ahora, se considera un caso particular de demanda exponencial, análogo al caso lineal, con dos coeficientes α y β que representan el nivel de demanda y la sensibilidad al precio respectivamente. La ecuación de demanda exponencial particular queda de la siguiente forma:

$$d = e^{\alpha - \beta p}.$$

5.2. Solución Analítica del Modelo

La solución analítica tiene solamente dos puntos KKT, puesto que la forma de demanda exponencial implica que $d(p) > 0$, dejando fuera el tercer caso de la solución genérica en (2.3) vista anteriormente:

$$\vec{p}_R(C, \Gamma) = \begin{cases} \text{i) } \frac{1}{\beta_t(p_t, \Gamma)} \quad \forall t & , \text{ si } \sum_{t=1}^T d_t(p_t) \leq C, \\ \text{ii) } \text{solve}_\lambda \left(\sum_{j=1}^T e^{\alpha_j(p_j, \Gamma) - \beta_j(p_j, \Gamma)\lambda - 1} = C \right) & , \text{ si } \lambda > 0. \\ \frac{1}{\beta_t(p_t, \Gamma)} + \lambda \quad \forall t & \end{cases} \quad (5.2)$$

Se observa en la solución que, en el primer caso, solamente está presente el coeficiente de sensibilidad al precio β , por lo que se considerará incertidumbre en ese coeficiente y no en ambos como en el caso lineal, por lo que $\Gamma \in [0; 1]$. Se observa también, en el segundo caso, que no se tiene una expresión cerrada para el precio. El

problema de menor demanda en (2.4) a resolver es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 d_{\min}(p, \Gamma) &= \min_{\alpha, \beta} e^{\alpha - \beta p} \\
 \text{s.a.} & \\
 \left| \frac{\beta - \bar{\beta}}{\hat{\beta}} \right| &\leq \Gamma, \quad \Gamma \in [0; 1], \\
 \alpha &= \bar{\alpha}, \\
 \bar{\beta} - \hat{\beta} &\leq \beta \leq \bar{\beta} + \hat{\beta},
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

y su solución para una aversión al riesgo Γ y un precio p dado, es:

$$d_{\min}(p, \Gamma) = e^{\bar{\alpha} - (\bar{\beta} + \hat{\beta}\Gamma)p}, \text{ con } \alpha = \bar{\alpha} \text{ y } \beta = \bar{\beta} + \hat{\beta}\Gamma$$

Reemplazando esto en (5.2), los dos puntos KKT son:

$$\vec{p}_R(C, \Gamma) = \begin{cases} \text{i) } \frac{1}{\bar{\beta}_t + \hat{\beta}_t \Gamma} \quad \forall t & , \text{ si } \sum_{t=1}^T d_t(p_t) \leq C, \\ \text{ii) } \text{solve}_{\lambda} \left(\sum_{j=1}^T e^{\bar{\alpha}_j - (\bar{\beta}_j + \hat{\beta}_j \Gamma) \cdot \lambda - 1} = C \right) & , \text{ si } \lambda > 0, \\ \frac{1}{\bar{\beta}_t + \hat{\beta}_t \Gamma} + \lambda \quad \forall t & \end{cases}$$

Para encontrar la política de precios robusta óptima se escoge el punto KKT válido que logre un mayor ingreso.

5.3. Pruebas Numéricas y Simulaciones

En esta sección se obtienen los resultados del modelo en cuanto a políticas de precio óptimas, y se realizan los experimentos con escenarios específicos y simulados. Se consideran 4 periodos, y un inventario inicial de 100 unidades. Los valores y rangos de α y β utilizados corresponden a los de la Tabla 5.1.

TABLA 5.1. Valores nominales y rangos de los coeficientes para cada periodo, en el caso de demanda exponencial.

Periodo	α			$\beta (10^{-3})$		
	α_{\min}	$\bar{\alpha}$	α_{\max}	β_{\min}	β	β_{\max}
1	5,0	5,0	5,0	0,198	0,220	0,242
2	4,9	4,9	4,9	0,216	0,240	0,264
3	4,5	4,5	4,5	0,243	0,270	0,287
4	3,0	3,0	3,0	0,288	0,320	0,352

5.3.1. Políticas de Precio Óptimas

En la Tabla 5.2 se presentan las políticas de precio para distintos niveles de inventario en el tiempo. Se muestran solamente los niveles de aversión al riesgo $\Gamma = 0$ (política neutral) y $\Gamma = 0,5$, sin embargo el comportamiento es análogo para otros valores de Γ . Tal como en el caso lineal, se observa que el precio es no creciente en el tiempo y con el inventario. Se aprecia también que a medida que la aversión al riesgo aumenta los precios son no crecientes.

TABLA 5.2. Políticas de precios para distintos niveles de aversión al riesgo Γ , con demanda exponencial, para un inventario y periodo dados.

$\Gamma = 0,0$	Periodo				$\Gamma = 0,5$	Periodo			
	Inv.	1	2	3		4	Inv.	1	2
20	12.755	10.035	6.236	3.125	20	11.753	9.125	5.475	3.125
40	9.859	7.321	3.749	3.125	40	8.864	6.420	3.704	3.125
60	8.174	5.739	3.704	3.125	60	7.186	4.845	3.704	3.125
80	6.983	4.620	3.704	3.125	80	6.000	4.167	3.704	3.125
100	6.061	4.167	3.704	3.125	100	5.083	4.167	3.704	3.125

5.3.2. Experimento Escenarios Específicos

En esta ocasión, se analizan tres escenarios específicos en que el coeficiente incierto β toma distintos valores, los cuales se describen en la Tabla 5.3.

Se obtienen resultados análogos al caso de demanda lineal. En la Figura 5.1, se observa que la variabilidad de los resultados disminuye a medida que la aversión al riesgo

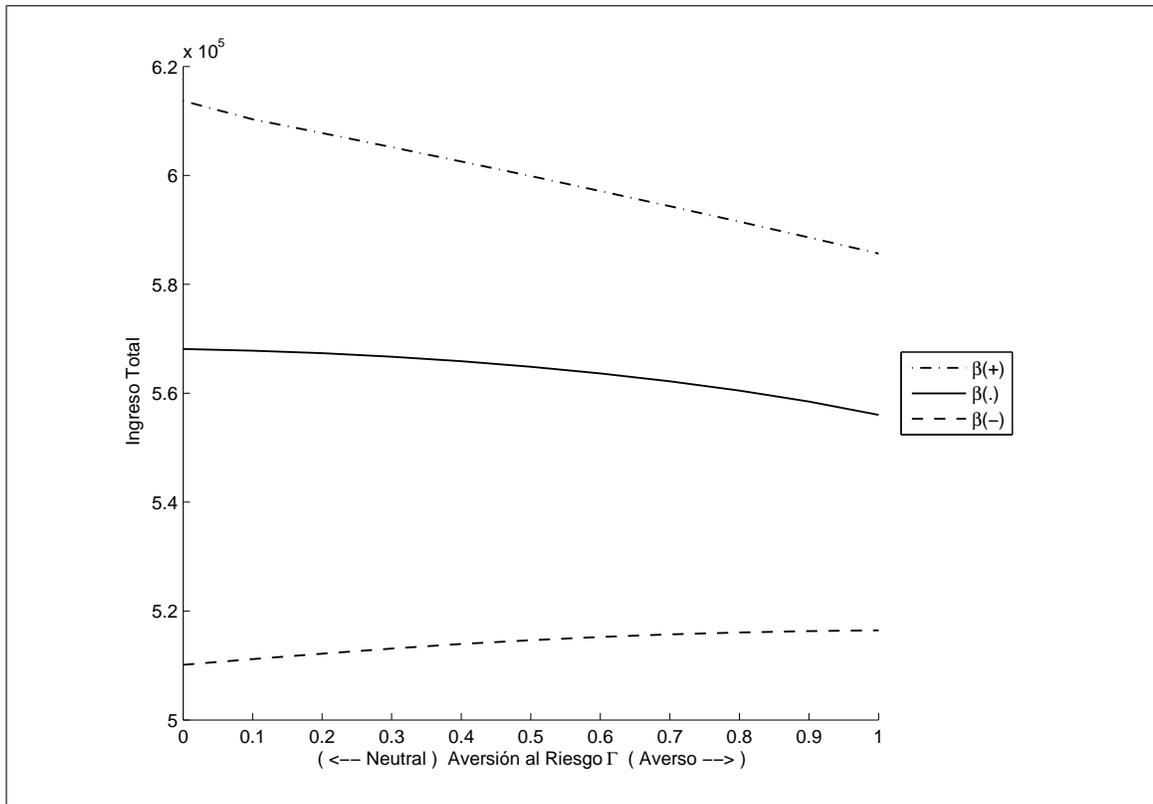


FIGURA 5.1. Ingreso total para cada escenario según aversión al riesgo Γ , con demanda exponencial.

Γ aumenta y que los resultados obtenidos en el escenario pesimista son mejores a mayor aversión al riesgo.

5.3.3. Experimento Escenarios Simulados

En este experimento, también se obtienen resultados similares al caso de demanda lineal. En las Figuras 5.2 y 5.3, se observa que tanto el ingreso promedio obtenido, como

TABLA 5.3. Escenarios específicos para el coeficiente de demanda β , en el caso de demanda exponencial.

Escenario	Descripción
1) $\beta (+)$	El coeficiente β toma su valor optimista.
2) $\beta (.)$	El coeficiente β toma su valor neutral.
3) $\beta (-)$	El coeficiente β toma su valor pesimista.

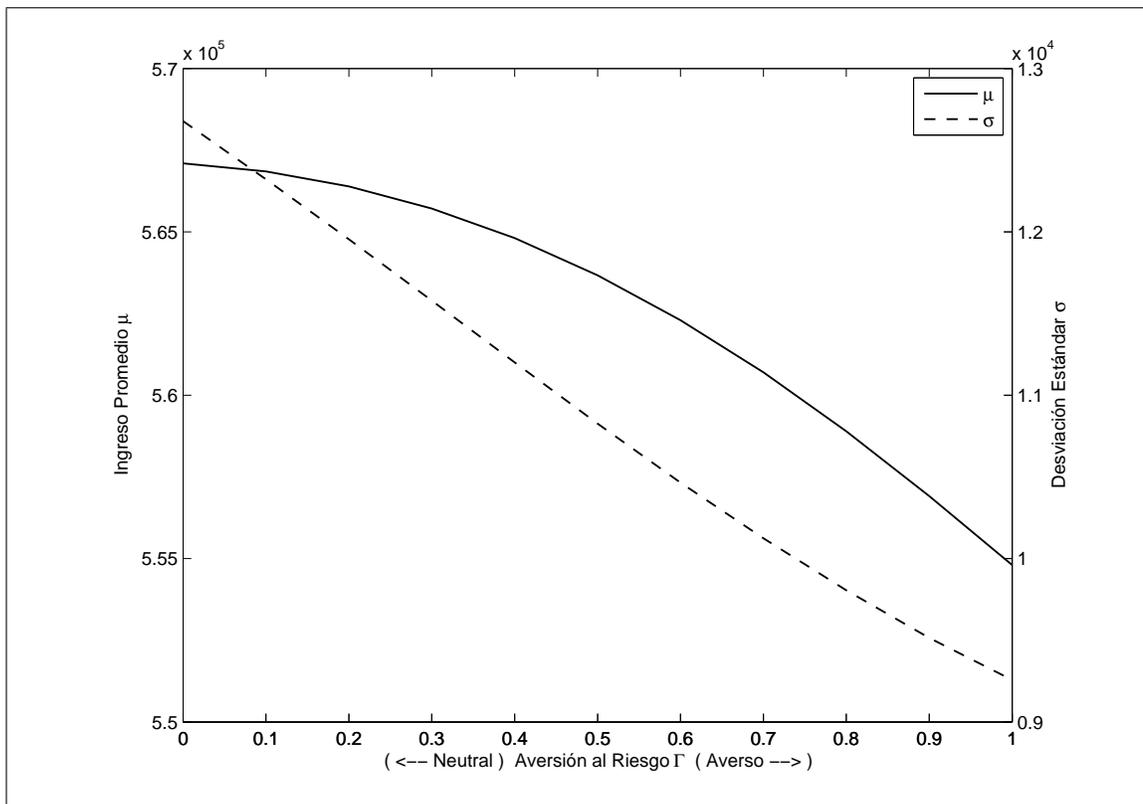


FIGURA 5.2. Promedio y desviación estándar del ingreso para diferentes políticas de precio según aversión al riesgo Γ , para una distribución Normal de los coeficientes de demanda, con demanda exponencial.

la desviación estándar disminuyen a medida que aumenta la aversión al riesgo Γ , y que lo ganado en reducción de desviación estándar es mayor a lo perdido en ingreso, sin embargo, esta ganancia se va haciendo cada vez menor en relación a la pérdida.

En la Figura 5.4, también se aprecia que disminuye la frecuencia de escenarios negativos, y la variabilidad del ingreso obtenido a costa de una disminución del ingreso promedio. Se obtiene el mismo efecto que para demanda lineal, donde en casos de Γ grande, el rango de ingreso obtenido queda contenido en los peores casos de la política neutral (el detalle de lo ocurrido para cada política de precios con distinta aversión al riesgo Γ , con demanda exponencial, se encuentra en el Anexo E). Cabe mencionar, que utilizando demanda exponencial, la disminución de la frecuencia de escenarios negativos

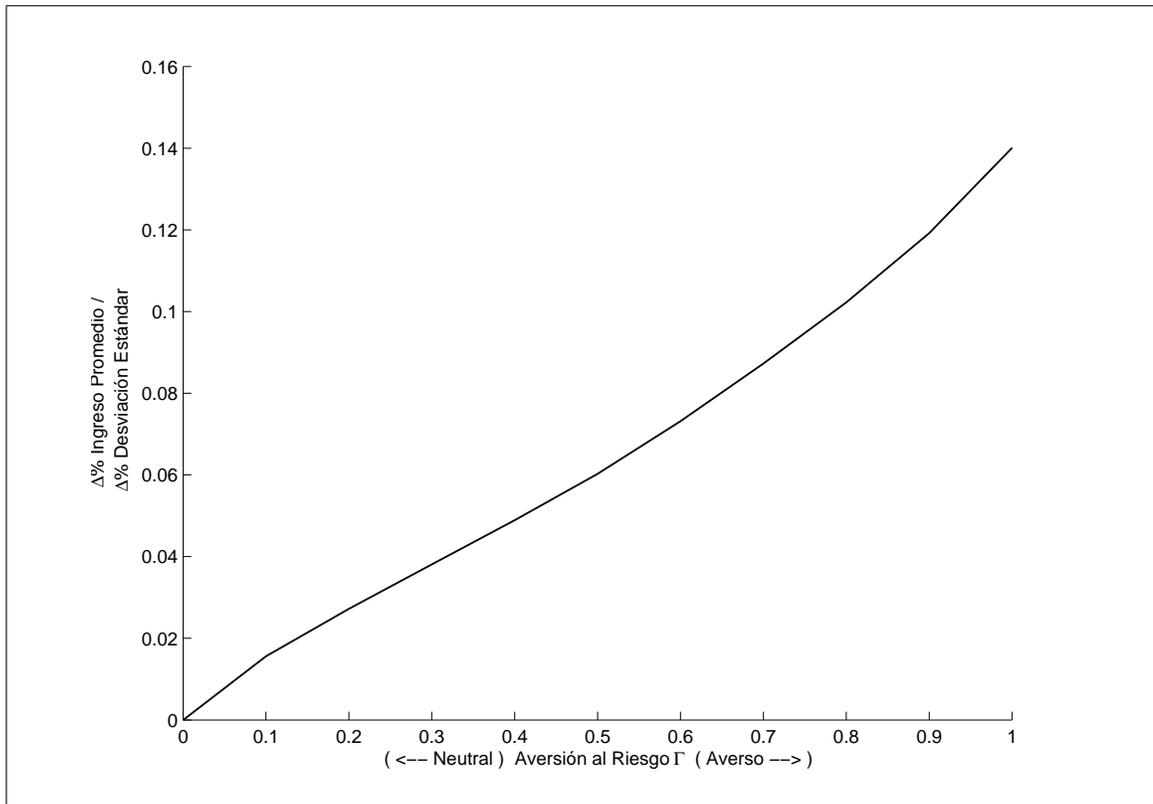


FIGURA 5.3. Razón entre la variación porcentual del ingreso promedio y la variación porcentual de la desviación estándar al aumentar la aversión al riesgo Γ , para una distribución Normal de los coeficientes de demanda, con demanda exponencial.

no es tan clara como en el caso de demanda lineal. Sin embargo, en la Figura 5.5, también se aprecia que la probabilidad de estar sobre percentiles bajos aumenta para valores pequeños de Γ , luego dicha probabilidad disminuye a medida que Γ aumenta, tal como ocurre en el caso de demanda lineal.

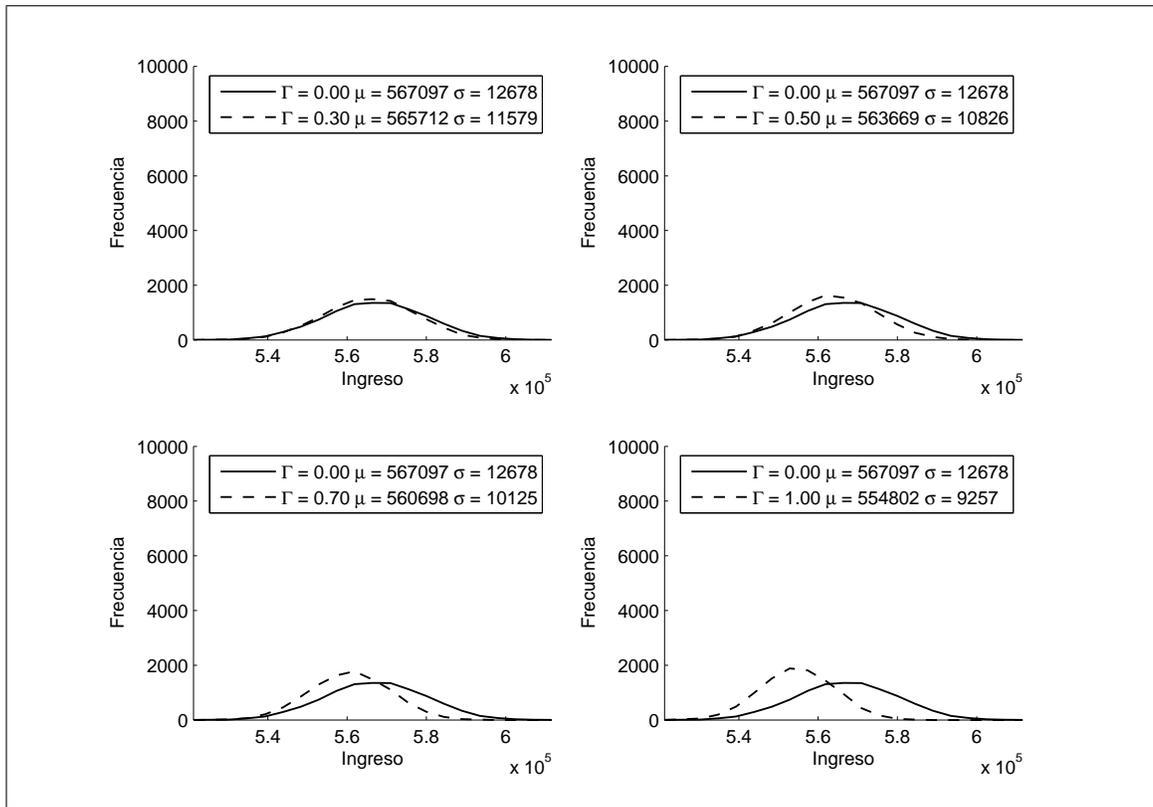


FIGURA 5.4. Distribución del ingreso obtenido para 10.000 escenarios simulados para distribución Normal de los coeficientes, con demanda exponencial, para $\Gamma = 0,3; 0,5; 0,7$ y $1,0$.

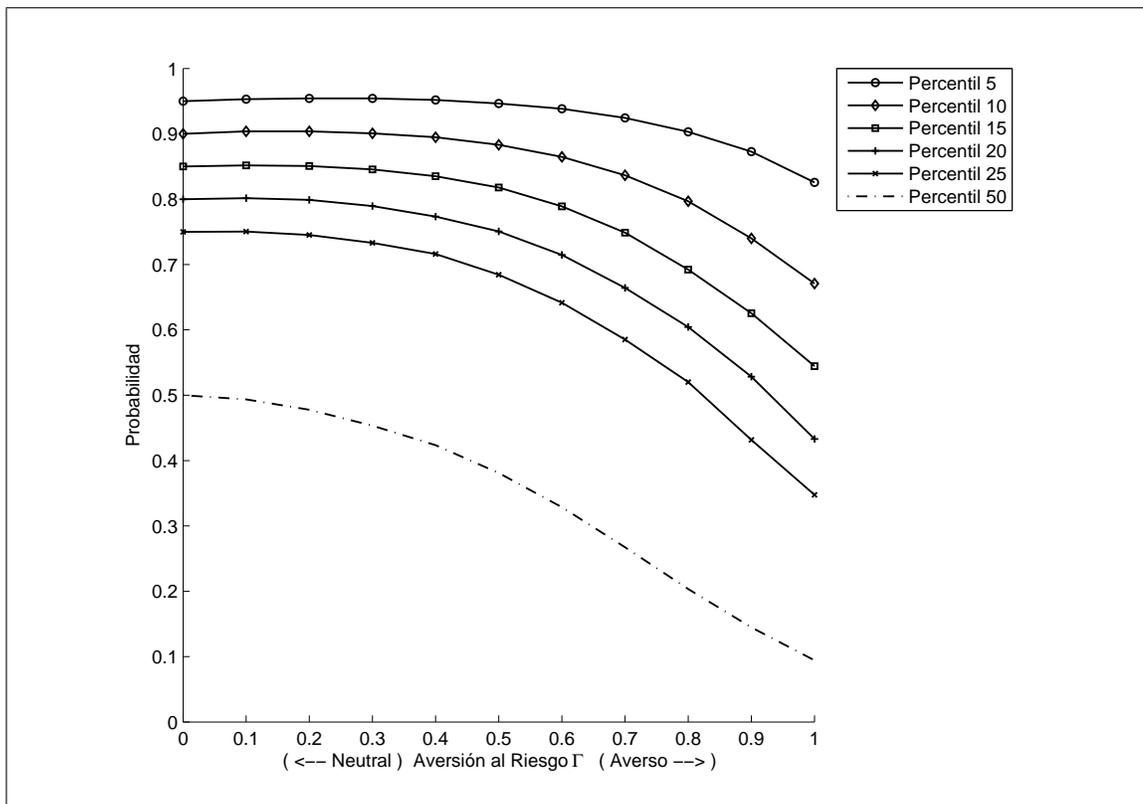


FIGURA 5.5. Probabilidad de estar sobre cierto percentil de la política neutral al riesgo ($\Gamma = 0$), para distribución Normal de los coeficientes, con demanda exponencial.

6. CONCLUSIONES

La incertidumbre en la estimación de demanda conduce a que la decisión acerca del precio óptimo a fijar esté sujeta a riesgos, debido a que se pueden tener escenarios de demanda tanto positivos como negativos, por lo que según el precio fijado se pueden tener resultados favorables o desfavorables, en cuanto a ingreso obtenido a lo largo de la temporada de venta de un producto. Esta problemática es abordada en esta investigación de forma práctica, puesto que el modelo robusto de precios que se propone es un modelo determinístico capaz de incorporar tanto la incertidumbre en la estimación de demanda, como el grado de aversión al riesgo del tomador de decisión.

El uso del modelo, bajo demanda lineal, permite reducir la variabilidad del ingreso obtenido, a costa de una disminución en el ingreso esperado. Sin embargo, el modelo muestra que no es conveniente ser excesivamente averso al riesgo, dado que sobre cierto umbral de éste, se obtienen los peores ingresos de la política neutral al riesgo. Por el contrario, bajo dicho umbral, es posible aumentar la probabilidad de obtener ingresos superiores a cierto percentil de la política neutral. Esto permite al tomador de decisión establecer un criterio para la elección de su grado de aversión al riesgo.

Es importante destacar el hecho que bajo un modelo de demanda exponencial se obtengan cualitativamente los mismos resultados mencionados anteriormente para demanda lineal. Desde el punto de vista de aplicación en la industria, este resultado es muy relevante.

Una extensión muy pertinente de esta investigación es estudiar el comportamiento del modelo bajo una restricción de precio no-creciente, observada comúnmente en la práctica, debido a que precios que aumentan y disminuyen no generan una buena imagen ante los consumidores. Con esto se esperaría que los precios iniciales sean más altos, y así poder realizar descuentos durante la temporada de venta, sin embargo, la aversión al riesgo conduce a precios más bajos. También se propone incorporar al modelo un costo de demanda insatisfecha, lo que contrarrestaría a su vez la disminución de los precios

producto de la aversión al riesgo, dado que los quiebres de stock se intentarían evitar a través de mayores precios.

BIBLIOGRAFIA

- Adida, E., y Perakis, G. (2006). A robust optimization approach to dynamic pricing and inventory control with no backorders. *Mathematical Programming*, 107(1), 97–129.
- Ben-Tal, A., y Nemirovski, A. (1998). Robust convex optimization. *Mathematics of Operations Research*, 23(4), 769–805.
- Bertsimas, D., y Sim, M. (2004). The price of robustness. *Operations Research*, 52(1), 35–53.
- Bertsimas, D., y Thiele, A. (2006). A Robust Optimization Approach to Inventory Theory. *Operations Research*, 54(1), 150-168.
- Bitran, G., y Caldentey, R. (2003). Commissioned paper: An overview of pricing models for revenue management. *Manufacturing & Service Operations Management*, 5(3), 203–229.
- Bitran, G. R., y Mondschein, S. V. (1997). Periodic pricing of seasonal products in retailing. *Management Science*, 43(1), 64–79.
- Dantzig, G. B. (1955). Linear programming under uncertainty. *Management Science*, 1(3/4), 197–206.
- Elmaghraby, W., y Keskinocak, P. (2003). Dynamic pricing in the presence of inventory considerations: Research overview, current practices, and future directions. *Management Science*, 49(10), 1287–1309.
- Federgruen, A., y Heching, A. (1999). Combined pricing and inventory control under uncertainty. *Operations Research*, 47(3), 454–475.
- Gallego, G., y van Ryzin, G. (1994). Optimal dynamic pricing of inventories with stochastic demand over finite horizons. *Management Science*, 40(8), 999–1020.
- Kouvelis, P., y Yu, G. (1997). *Robust discrete optimization and its applications*. Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA.

- Levin, Y., McGill, J., y Nediak, M. (2008). Risk in Revenue Management and Dynamic Pricing. *Operations Research*, 56(2), 326-343.
- Lim, A. E. B., y Shanthikumar, J. G. (2007). Relative Entropy, Exponential Utility, and Robust Dynamic Pricing. *Operations Research*, 55(2), 198-214.
- McGill, J. I., y van Ryzin, G. J. (1999). Revenue management: Research overview and prospects. *Transportation Science*, 33(2), 233–256.
- Mulvey, J. M., Vanderbei, R. J., y Zenios, S. A. (1995). Robust optimization of large-scale systems. *Operations Research*, 43(2), 264–281.
- Nemirovski, A., y Shapiro, A. (2006). Convex approximations of chance constrained programs. *SIAM Journal on Optimization*, 17(4), 969–996.
- Perakis, G., y Sood, A. (2006). Competitive multi-period pricing for perishable products: A robust optimization approach. *Mathematical Programming*, 107(1), 295–335.
- Smith, S. A., McIntyre, S. H., y Achabal, D. D. (1994). A two-stage sales forecasting procedure using discounted least squares. *Journal of Marketing Research*, 31(1), 44–56.
- Smith, S. A., y Achabal, D. D. (1998). Clearance pricing and inventory policies for retail chains. *Management Science*, 44(3), 285–300.
- Soyster, A. L. (1973). Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. *Operations Research*, 21(5), 1154–1157.

ANEXO A. DETALLE EXPERIMENTO ESCENARIOS SIMULADOS PARA DEMANDA LINEAL

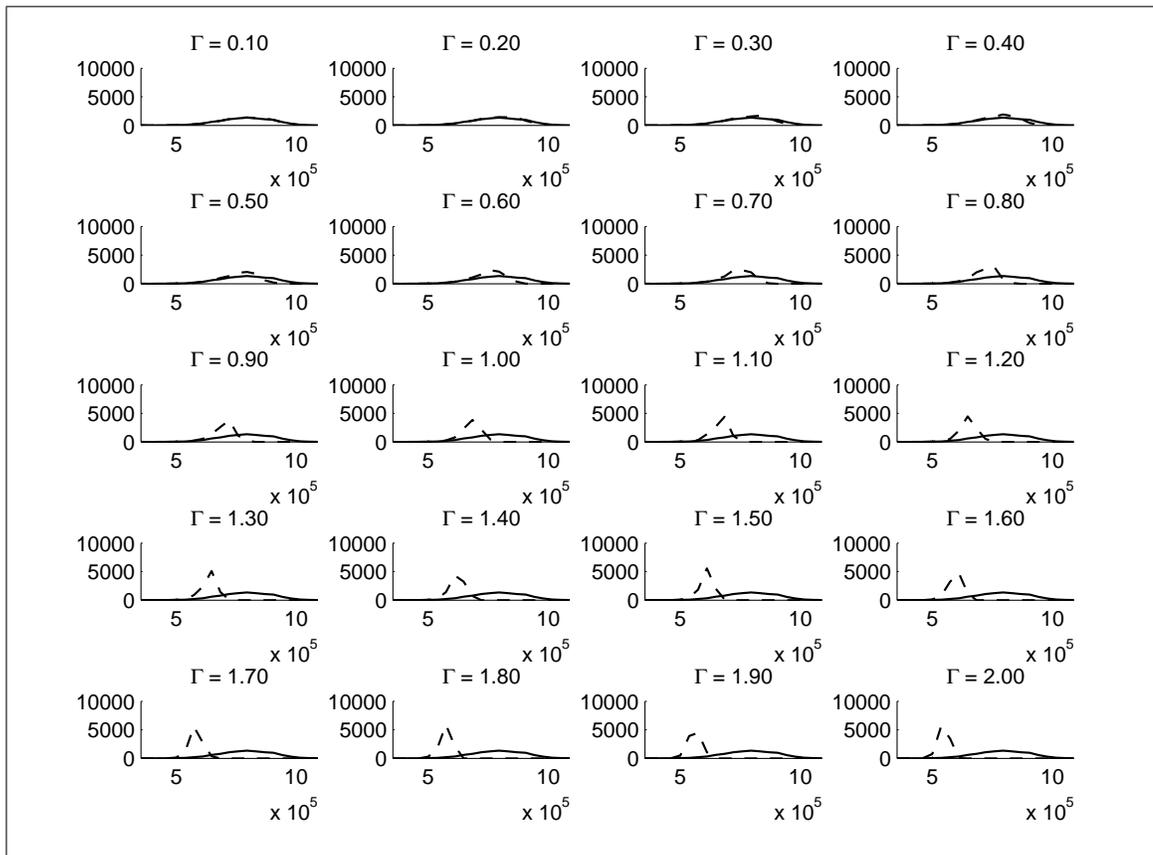


FIGURA A.1. Distribución del ingreso obtenido para 10.000 escenarios simulados, utilizando un inventario inicial de 100 unidades, para distribución Normal de los coeficientes, con demanda lineal, para los diferentes valores de aversión al riesgo Γ . Se comparan las distintas políticas (línea segmentada) con la política neutral al riesgo (línea continua).

ANEXO B. EXPERIMENTO ESCENARIOS SIMULADOS CON DISTRIBUCIÓN UNIFORME

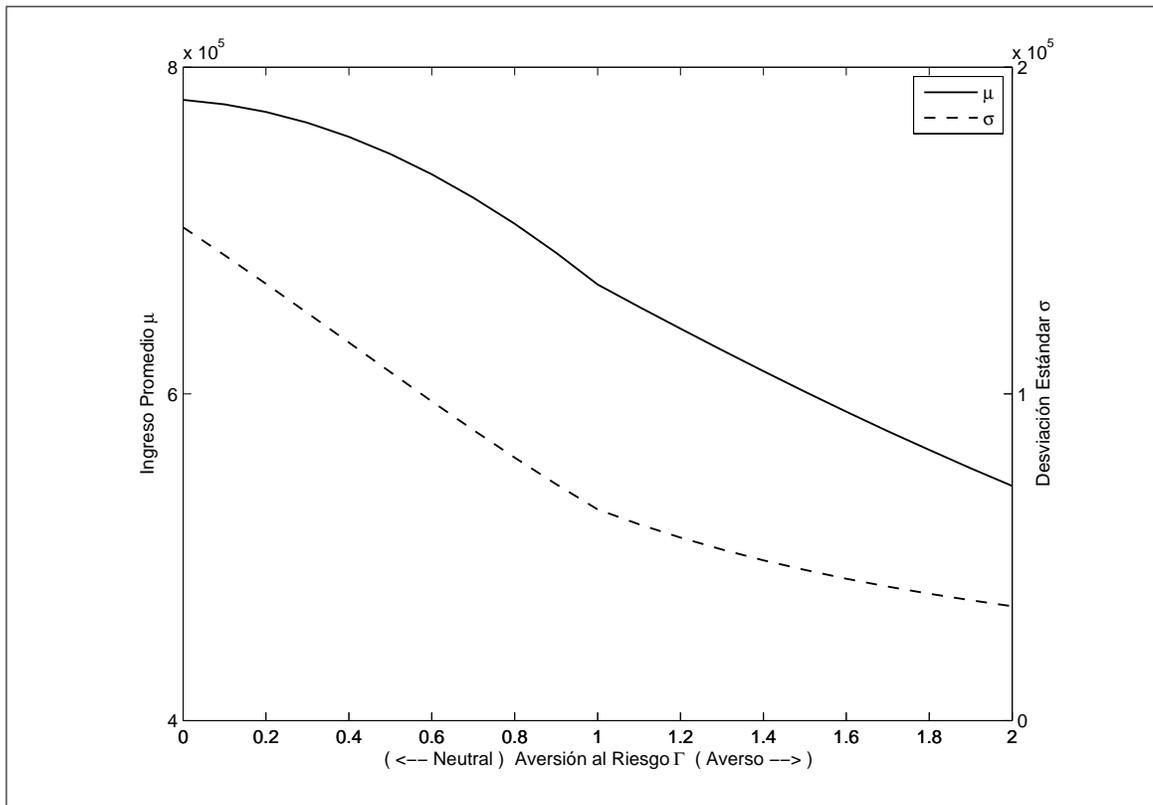


FIGURA B.1. Promedio y desviación estándar del ingreso, para diferentes políticas de precio según aversión al riesgo Γ , para una distribución Uniforme de los coeficientes de demanda, con demanda lineal.

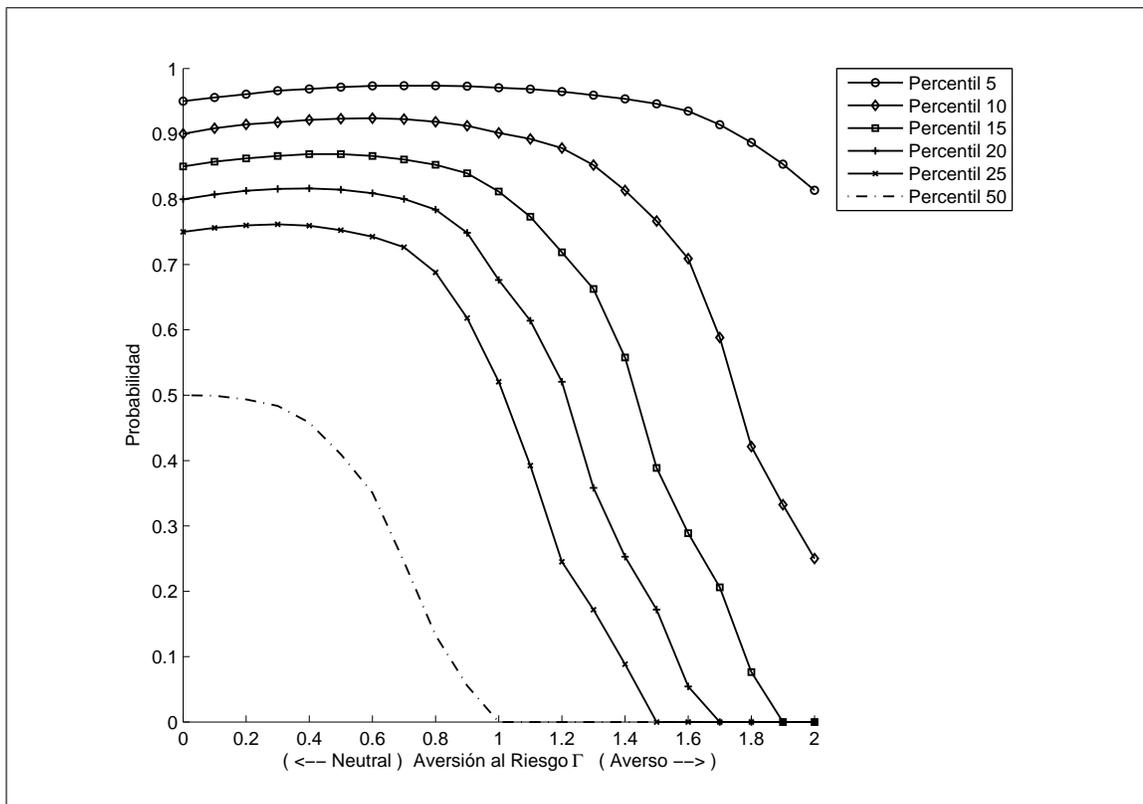


FIGURA B.2. Probabilidad de estar sobre cierto percentil de la política neutral al riesgo ($\Gamma = 0$), para distribución Uniforme de los coeficientes, con demanda lineal.

ANEXO C. EXPERIMENTO ESCENARIOS SIMULADOS CON DISTRIBUCIÓN BETA (2,4)

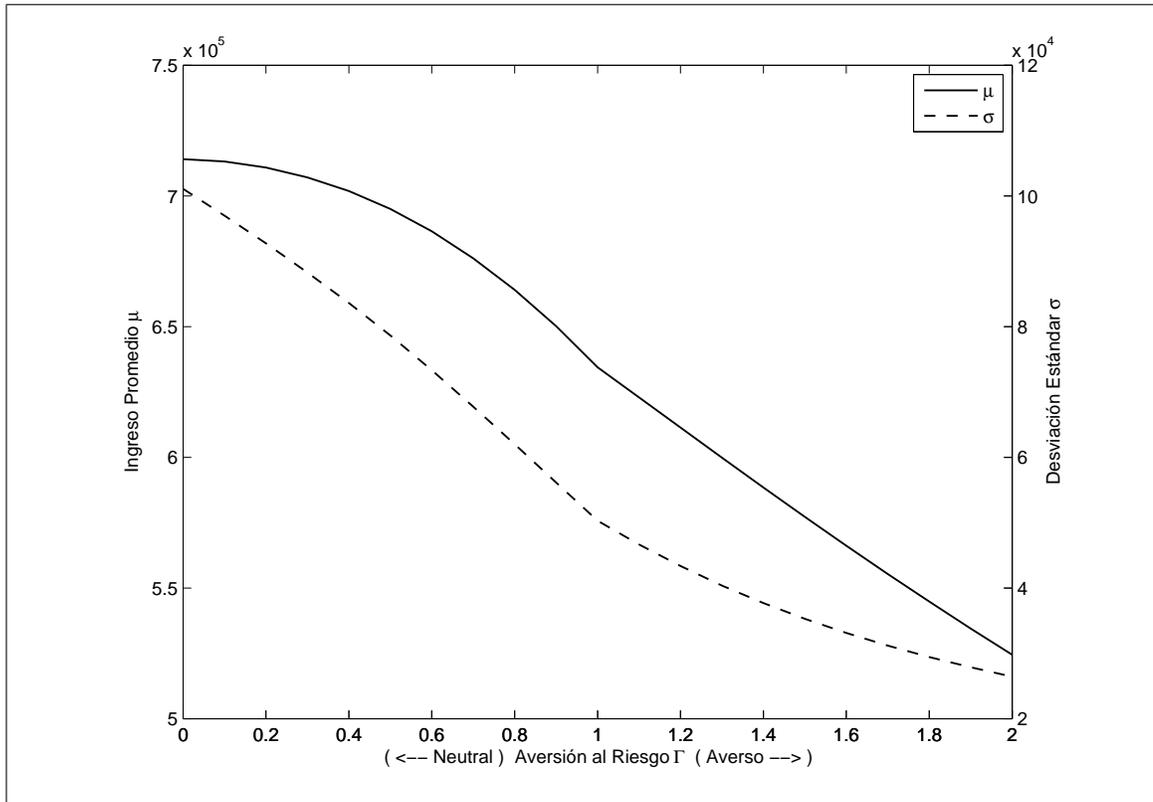


FIGURA C.1. Promedio y desviación estándar del ingreso, para diferentes políticas de precio según aversión al riesgo Γ , para una distribución Beta (2,4) de los coeficientes de demanda, con demanda lineal.

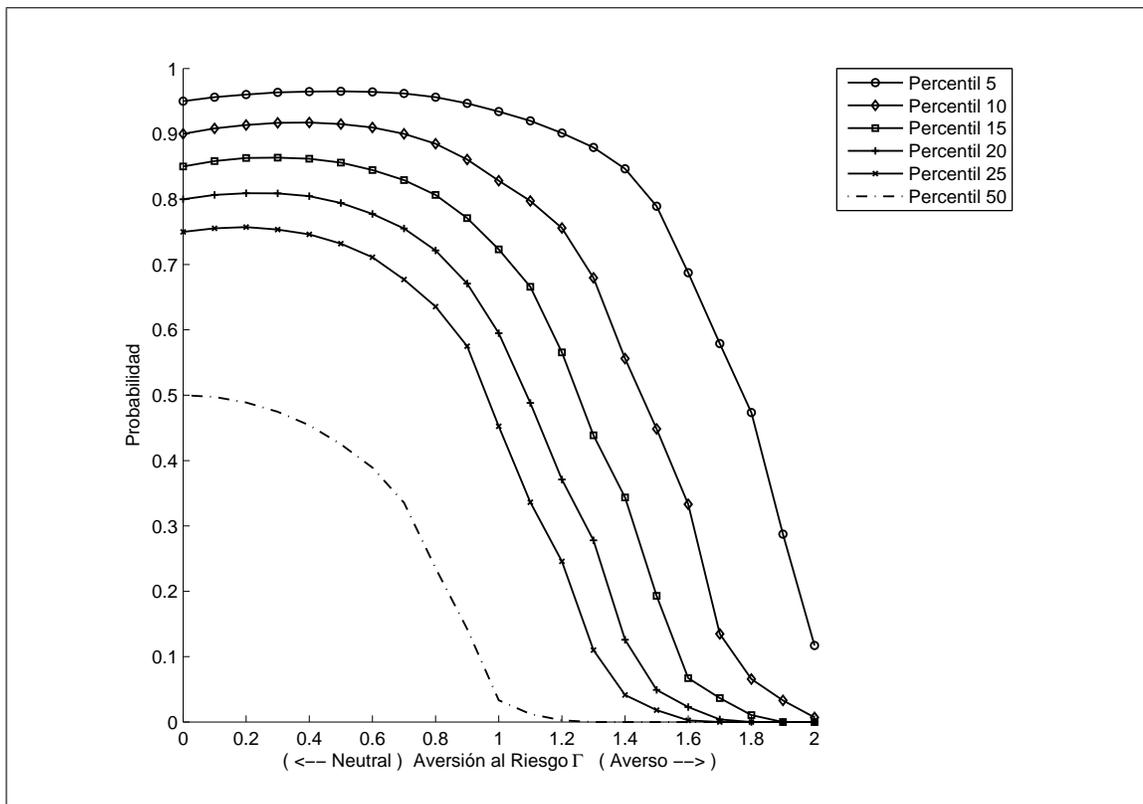


FIGURA C.2. Probabilidad de estar sobre cierto percentil de la política neutral al riesgo ($\Gamma = 0$), para distribución Beta (2,4) de los coeficientes, con demanda lineal.

ANEXO D. EXPERIMENTO ESCENARIOS SIMULADOS CON DISTRIBUCIÓN BETA (4,2)

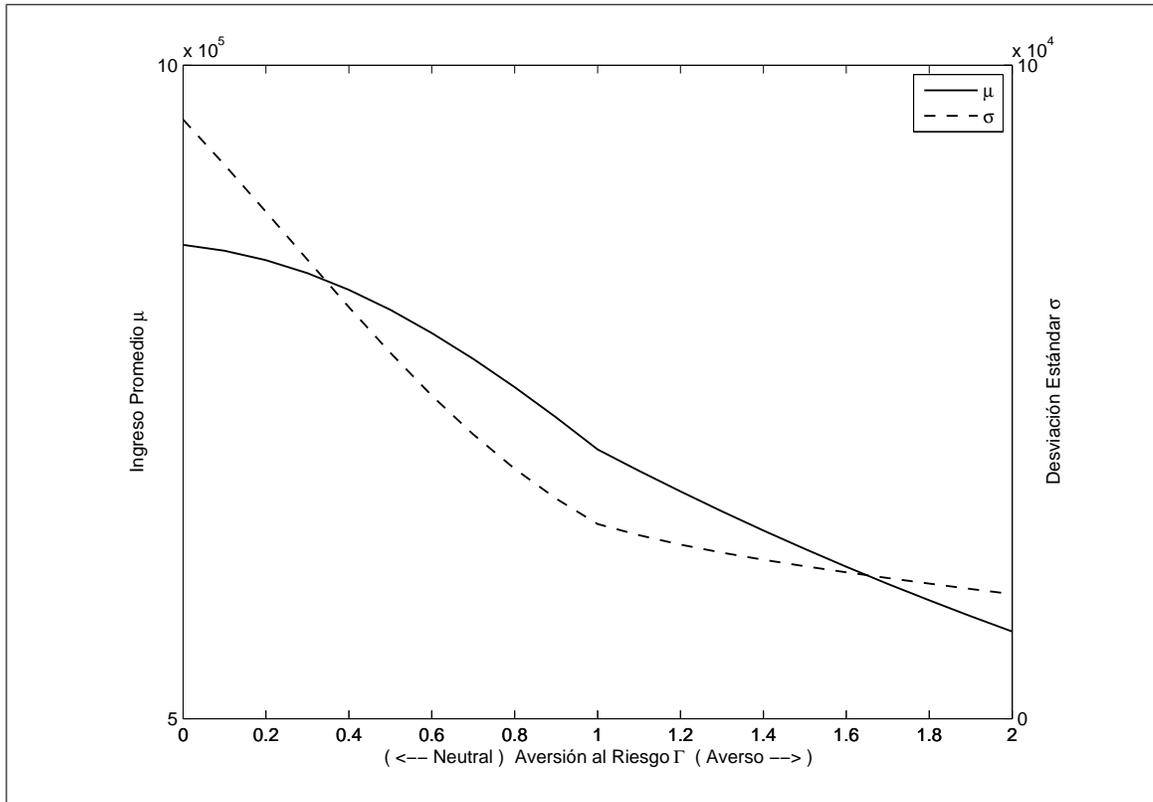


FIGURA D.1. Promedio y desviación estándar del ingreso, para diferentes políticas de precio según aversión al riesgo Γ , para una distribución Beta (4,2) de los coeficientes de demanda, con demanda lineal.

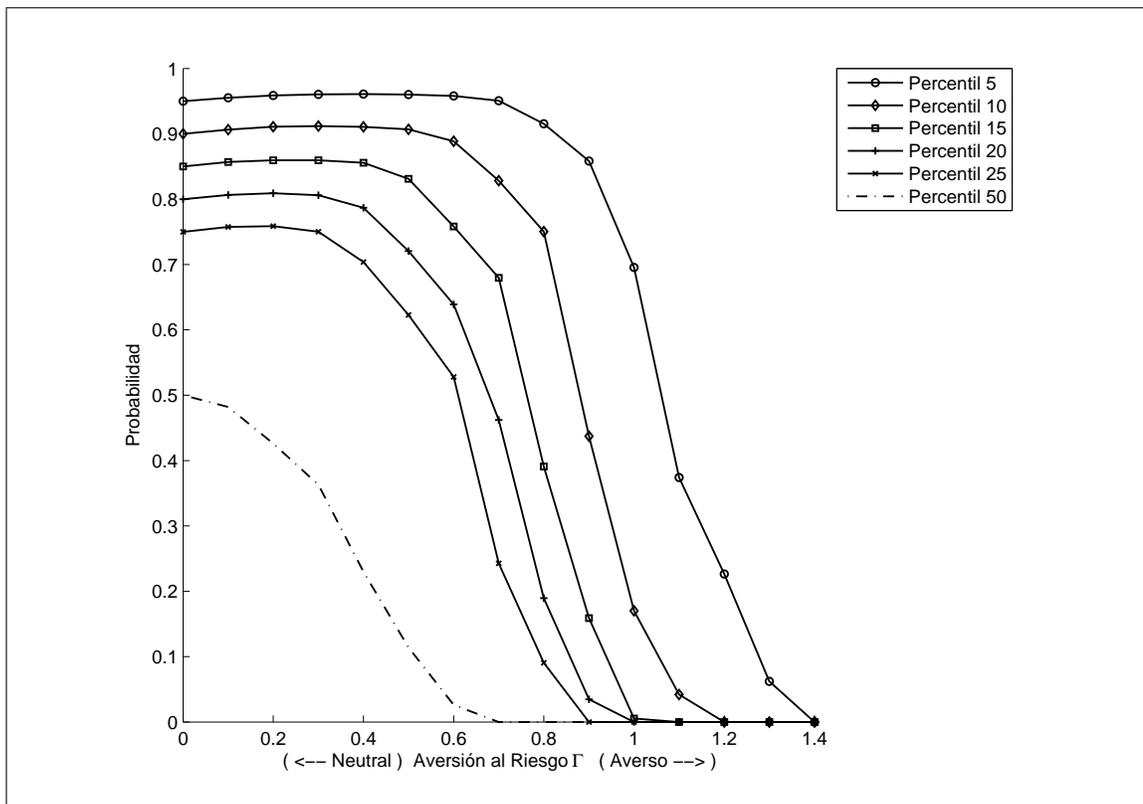


FIGURA D.2. Probabilidad de estar sobre cierto percentil de la política neutral al riesgo ($\Gamma = 0$), para distribución Beta (4,2) de los coeficientes, con demanda lineal.

ANEXO E. DETALLE EXPERIMENTO ESCENARIOS SIMULADOS PARA DEMANDA EXPONENCIAL

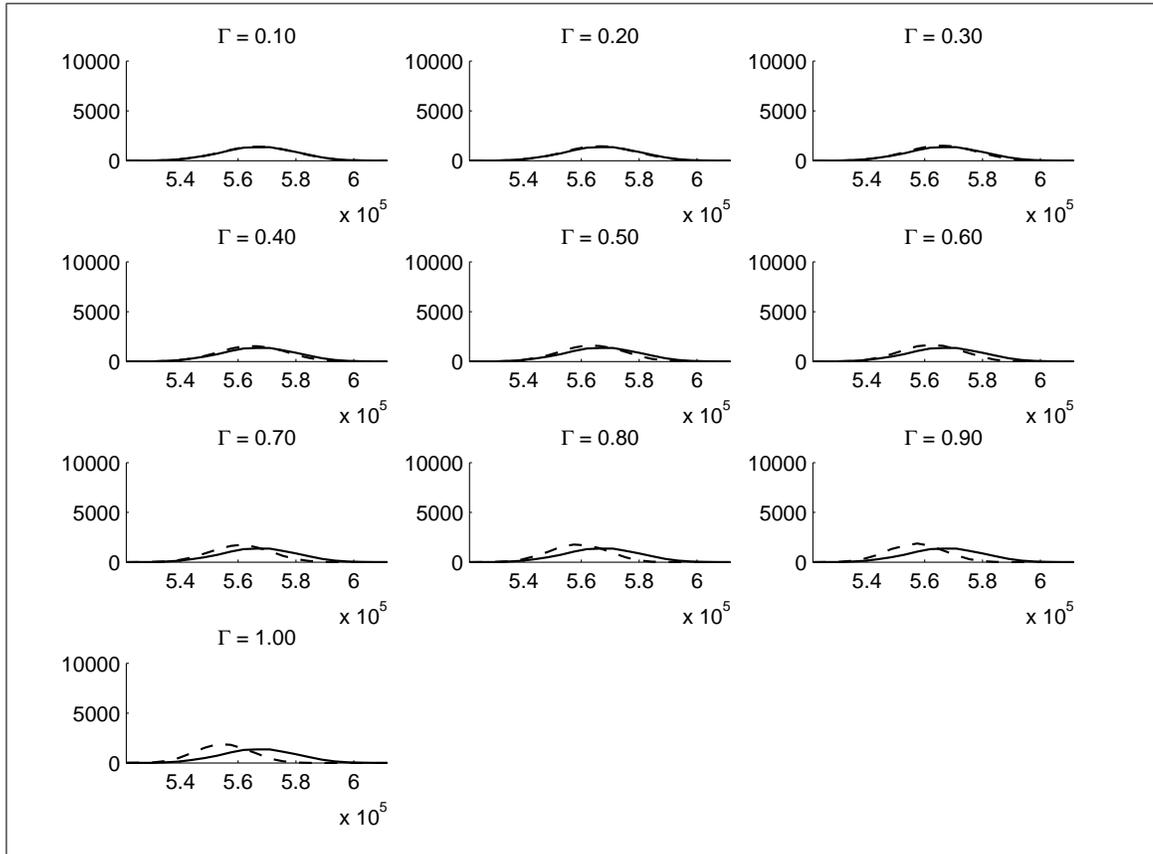


FIGURA E.1. Distribución del ingreso obtenido para 10.000 escenarios simulados, utilizando un inventario inicial de 100 unidades, para distribución Normal de los coeficientes, con demanda exponencial, para los diferentes valores de aversión al riesgo Γ . Se comparan las distintas políticas (línea segmentada) con la política neutral al riesgo (línea continua).