



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

**FUSIONANDO LA TEORÍA DE
EXPECTATIVAS CON LA DE NO
ARBITRAJE EN LA ESTRUCTURA DE
TASAS DE INTERÉS**

GONZALO VALDÉS E.

Tesis para optar al grado de
Magister en Ciencias de la Ingeniería

Profesor Supervisor:
GONZALO CORTAZAR S.

Santiago de Chile, Mayo, 2010

© 2010, Gonzalo Valdés



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

**FUSIONANDO LA TEORÍA DE
EXPECTATIVAS CON LA DE NO
ARBITRAJE EN LA ESTRUCTURA DE
TASAS DE INTERÉS**

GONZALO VALDÉS E.

Tesis presentada a la Comisión integrada por los profesores:

GONZALO CORTAZAR S.

JAIME CASASSUS V.

SALVADOR ZURITA L.

MARIO DURÁN T.

Para completar las exigencias del grado de
Magister en Ciencias de la Ingeniería

Santiago de Chile, Mayo, 2010

A mi familia.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero agradecer al profesor Gonzalo Cortázar, por su paciencia, tiempo, e importantes consejos en el desarrollo de esta tesis. Sin su guía al momento de elegir tema, discutir resultados, o elegir el curso del proyecto, esta tesis no hubiera sido posible.

También quisiera agradecer al equipo de RiskAmerica. Sin su ayuda, el trabajo habría sido tedioso y sin aplicaciones a la vista, que permiten apreciar el posible aporte del trabajo. En particular, me gustaría agradecer a Héctor Ortega y a Claudio Tapia, por las ideas, a Matías Castro por su ayuda constante, a Rodrigo Lártiga por el apoyo matemático, y a Christian Soto y Pablo Correa por suplir mis deficiencias computacionales.

Por último, agradezco a mi familia. Sin su apoyo e incentivo, no habría podido dedicar tanto tiempo y esfuerzo a este proyecto.

INDICE GENERAL

	Pág.
DEDICATORIA	ii
AGRADECIMIENTOS	iii
INDICE DE TABLAS	vii
INDICE DE FIGURAS.....	viii
RESUMEN.....	ix
ABSTRACT	x
1. INTRODUCCIÓN.....	1
2. MARCO TEÓRICO	5
2.1. Hipótesis de Expectativas	5
2.2. Modelos de No Arbitraje.....	7
2.3. Los Modelos de No Arbitraje, ¿incluyen la Hipótesis de Expectativas? ...	8
3. MODELO	10
3.1. Notación	12
3.2. Modelo 1: Un salto de tasa.....	13
3.3. Modelo 2: N saltos de tasa	15
3.4. Modelo 3: Parsimonioso en el Largo Plazo	18
3.5. Modelo 4: Extensión para Bonos Reales y Nominales	21
3.6. Modelo 5: Parsimonioso en el Corto Plazo.....	22
4. ESTIMACIÓN.....	25
4.1. El Filtro de Kalman.....	25
4.1.1. El Espacio de Estados.....	26
4.2. Estimación de Parámetros: El método de Máxima Verosimilitud	27
4.3. Aplicación al modelo propuesto.....	28
5. EL MERCADO Y LOS DATOS.....	30

5.1. El Banco Central y el Mercado Chileno	30
5.1.1. Descripción de las principales políticas.....	30
5.1.2. Mecanismos de transmisión y el horizonte de política.....	31
5.1.3. Características de la conducción de la política monetaria	31
5.1.4. Conducción operativa de la política monetaria	32
5.2. Descripción de los Papeles Utilizados	32
6. RESULTADOS	36
6.1. Modelo Calibrado.....	36
6.2. Estimación de Variables de Estado.....	37
6.2.1. Dentro de la muestra.....	37
6.2.2. Fuera de la muestra.....	39
6.3. Estimación de Parámetros	41
6.4. Ajuste a los Precios Observados dentro de la Muestra	43
6.5. Ajuste a los Precios Observados fuera de la Muestra	47
7. CONCLUSIONES.....	51
BIBLIOGRAFIA	53
A N E X O S	55
ANEXO A : Función generadora de momentos de la distribución normal multivariada	
56	
ANEXO B : Solución del modelo 1.....	57
Solución Mediante Esperanza Ajustada por Riesgo.....	57
Solución Mediante Ecuación Diferencial de Portafolio Libre de Riesgo.....	57
ANEXO C: Solución del modelo 2.....	59
Sin riesgo de crédito	59
Solución Mediante Esperanza Ajustada por Riesgo	59
Solución Mediante Ecuaciones Diferenciales:.....	60
Con riesgo de crédito constante.....	62
Con riesgo de crédito variable en el tiempo	62

ANEXO D: Solución del Modelo 5	65
Sin riesgo de default	65
Con riesgo de default variable	66
ANEXO E : Matriz de Información de Fisher:	67
ANEXO F : verosimilitud total del modelo	68
ANEXO G: Modelo de Heidari y Wu: Por qué no cumple la HE	69

INDICE DE TABLAS

	Pág.
Tabla 3-1 : Notación.....	12
Tabla 3-2: Parámetros del Modelo 1	14
Tabla 3-3: Parámetros del Modelo 2.....	17
Tabla 6-1: Correlaciones entre Estimaciones Independientes	37
Tabla 6-2: Notación para cada Banco	37
Tabla 6-3: Parámetros Estimados y Significancia	42
Tabla 6-4: Error dentro de la muestra	46
Tabla 6-5: Mapeo de Probabilidades, 13-09-2007	46
Tabla 6-6: Mapeo de Probabilidades, 12-02-2008.....	47
Tabla 6-7: Mapeo de Probabilidades, 05-05-2008.....	47
Tabla 6-8: Error fuera de la muestra	49
Tabla 6-9: Estadísticos de la Regresión Fuera de Muestra	50
Tabla 6-10: Datos de la Regresión Fuera de Muestra.....	50
Tabla 6-11: Coeficientes y Significancia de la Regresión Fuera de Muestra	50
Tabla 0-1: Definición de los Riesgos del Modelo.....	57
Tabla 0-1: Matriz de Información de Fisher, parte I.....	67
Tabla 0-2: Matriz de Información de Fisher, parte II.....	67

INDICE DE FIGURAS

	Pág.
Figura 3-1 Esquema Explicativo del Modelo.....	10
Figura 5-1: Transacciones Diarias promedio por tipo de Emisión en el mercado de Depósitos, Noviembre 2009.....	34
Figura 5-2: MMM de pesos transados promedio en el mercado de Depósitos, Noviembre 2009.....	34
Figura 5-3: Participación de Mercado de Depósitos, Noviembre 2009	35
Figura 6-1: Tasas Esperadas versus Realizadas dentro de la muestra	38
Figura 6-2: Spread por Banco dentro de la muestra.....	39
Figura 6-3: Tasas Esperadas versus Realizadas fuera de la muestra	40
Figura 6-4: Spread por Banco fuera de la muestra.....	41
Figura 6-5 : Día 14-12-2006, Estimación Dentro de la Muestra.....	44
Figura 6-6: Día 27-08-2007, Estimación Dentro de la Muestra.....	44
Figura 6-7: Día 06-12-2007, Estimación Dentro de la Muestra.....	45
Figura 6-8: Día 09-08-2007, Estimación Dentro de la Muestra.....	45
Figura 6-9: Día 23-10-2008, Estimación Fuera de Muestra	48
Figura 6-10: Día 11-02-2009, Estimación Fuera de Muestra	48
Figura 6-11: Día 02-06-2009, Estimación Fuera de Muestra	49

RESUMEN

Actualmente, existen dos teorías que explican la estructura de tasas de interés: la hipótesis de expectativas y los modelos de no arbitraje.

La hipótesis de expectativas sugiere que la estructura de tasas debiera incorporar la esperanza de las tasas de los próximos períodos del mercado. El modelo es completado con supuestos de premio por riesgo y expectativas racionales en el largo plazo.

Los modelos de no arbitraje, por otro lado, suponen dinámicas de la tasa corta, lo que induce, a través de coberturas dinámicas, una estructura de tasas.

Existe fuerte evidencia de que, cuando un Banco Central ajusta la tasa corta, esto afecta no sólo ésta tasa, sino que también las tasas largas. Esto significa que obviar la formulación explícita de la hipótesis de expectativas es probablemente un error, ya que un cambio hoy afecta lo que se cree pasará en el futuro. Por otro lado, los modelos dinámicos de no arbitraje tienden a comportarse mejor en el corte transversal.

Proponemos una estructura de tasas que captura ambas teorías. Un modelo de expectativas es incorporado de forma directa, al suponer que algunas de las variables latentes son las tasas futuras esperadas por el mercado, y éstas cambian en una fecha precisa. El modelo incluye otras variables, que representan el estado de la economía, como factores macroeconómicos y spread bancarios.

Una importante diferencia con respecto a trabajos anteriores es la incorporación de las fechas que entrega el Banco Central sobre sus reuniones, de forma de incorporar cambios bruscos en las tasas de mercado de forma explícita.

Palabras Claves: (Hipòtesis de Expectativas, Medida Neutral al Riesgo, Modelos de No Arbitraje)

ABSTRACT

Two theories have prevailed in explaining the term structure of interest rates: the expectation hypothesis and no arbitrage models.

The expectation hypothesis suggests the structure should incorporate what people think the following short term rate will be. The model is completed by assumptions of risk premia and rational expectations in the long run.

No arbitrage models, on the other hand, assume a stochastic dynamics of the short term rate, which induces, by risk hedging, a term structure that allows no arbitrage at any maturity.

There's strong evidence that Central Bank's adjustments of the short rate have an important impact not only in short term rates, but also on the long ones. This means that, disregarding the explicit formulation of the EH is probably a mistake, because short term adjustments change expectations of the future short term rates to be implemented by the central bank. On the other hand, No arbitrage models tend to perform better in cross section analysis.

We propose a term structure model which captures both theories. A rational expectation model is incorporated by directly assuming that some of the latent variables are the expected by the market future rates, and the rate changes in known dates. Other latent variables represent the state of the economy, such as macroeconomic factors, and the borrower's quality, such as bank spreads.

An important feature of the model is the explicit incorporation of the known dates of policy rate changes. This allows us to model discrete changes in the short rate at explicit dates.

Keywords (Expectation Hypothesis, Risk Neutral Measure, No arbitrage models)

1. INTRODUCCIÓN

La mayoría de los Bancos Centrales de países desarrollados implementan su política monetaria cambiando la tasa de interés corta. Estos cambios de tasa son generalmente discretos (por ejemplo, un múltiplo de 25 puntos base), y por períodos fijos (una vez al mes). Generalmente, la autoridad monetaria anuncia la fecha exacta de cambio de tasa, dejando para sí la libertad de decidir en cuántos puntos bases se cambiará.

La visión estándar del mecanismo de transmisión de la política monetaria hacia la economía real se basa en una relación estable entre las acciones de política monetaria y las tasas de interés de mercado. Como el primer enlace en la transmisión de la política monetaria va desde la tasa de política a la curva de rendimiento, tener estimaciones de la reacción de la curva de rendimiento ante cambios en las acciones de política, o en las expectativas de políticas futuras, es un paso importante en la formulación de decisiones efectivas (Larraín M., 2007).

Cada vez más economistas especializados en teoría monetaria están convencidos que la política monetaria se hace efectiva no sólo a través de la tasa corta, sino a través de los cambios en expectativas que los cambios generan. En particular, los cambios en las expectativas de las tasas futuras son especialmente efectivos (Woodford 2003). Esto significa que las expectativas de tasa afectan la estructura de tasas del mercado.

Al acercarse la fecha de la reunión de política monetaria, en que se decidirá cuál es la próxima tasa, la estructura de tasas muchas veces se ve “distorsionada”, primero, porque existe la posibilidad de que la tasa corta “salte”, lo que hará que la tasa futura cercana sea substancialmente distinta a la actual, y segundo, porque el mercado ha recibido toda la información posible de la autoridad monetaria, lo que hace que el cambio de tasa corta del Banco Central tenga un menor riesgo que lo habitual.

Existen varios estudios que modelan estos cambios de tasa en términos de variables aleatorias similares a saltos Poisson, donde estas variables cambian en intensidad (tamaño del salto) y frecuencia (tasa de salto) a través del tiempo. En estos modelos, aunque la incorporación de estos saltos mejora el ajuste estadístico de la serie de tiempo, no tiene un impacto relevante en la estructura de tasas (corte transversal) (Johannes, M. (2004)). Por ejemplo, Piazzesi (2005) modela los cambios de la Federal Fund de EEUU

como un proceso de saltos Poisson, en que la frecuencia (probabilidad de salto) aumenta de forma substancial cuando la reunión de la reserva Federal se acerca.

En un trabajo independiente, de Heidari y Wu (2009), un salto con una fecha conocida es incorporado a las variables de estado, permitiendo que la estructura de tasas refleje los posibles cambios hechos por las autoridades monetarias de la tasa corta. Aunque este trabajo ayuda a entender la importancia de agregar este tipo de saltos, la modelación no se adecúa a la Hipótesis de Expectativas. Esto puede ser comprobado matemáticamente al pensar que las variables de estado utilizadas por los autores se comportan de forma cada vez más determinística (la varianza tiende a cero). Si una transformación del factor con salto agregado fuera, como ellos sostienen, la “anticipación del movimiento de la tasa corta”, entonces la estructura debiera tender a la que se deriva de la hipótesis de expectativas, lo que no ocurre¹.

Nuestro modelo incorpora la hipótesis de expectativas en la valorización del precio de un bono haciendo supuestos de la forma en que las expectativas de cambio de tasa del Banco Central se modifican en el tiempo. Por lo que hemos investigado, éste es el primer modelo que encuentra una estructura de tasas dinámicas consistentes con la hipótesis de expectativas. Nuestro modelo permite estimar las expectativas de tasa del Banco Central del mercado para todos los días, pudiendo distinguir entre el cambio en expectativas y el aumento en spread por razones de mercado.

Conocer las expectativas puede ser importante a la hora de implementar la política monetaria: guiar las expectativas entregando información de la visión del mercado que tiene un Banco Central puede hacer más efectiva la política monetaria. En particular, Ben S. Bernanke, presidente de la Fed, publicó un documento que trata este tópico.

Para encontrar el precio de un bono cero cupón encontramos el valor esperado de los pagos en la medida neutral al riesgo. El mercado, en nuestro modelo, nunca está seguro de cuáles serán las próximas tasas cortas que implementará la autoridad monetaria. Esto significa que existe una expectativa de tasa corta futura, y una varianza asociada a la realización de ésta. Además, nueva información entra todos los días al mercado, haciendo que la expectativa cambie todos los días. Los cambios en la expectativa siguen un proceso de difusión con drift cero, lo que es consistente con expectativas racionales.

¹ La demostración, con una cita de los autores donde precisan a qué se refieren con la “anticipación del movimiento de la tasa corta” se encuentra en el Anexo G.

Proponemos un modelo con dos tipos de factores: expectativas de cambio de tasa del Banco Central y factores de mercado, como factores macro, riesgo, liquidez, etc.

El texto presenta distintos modelos² que incluyen saltos de magnitud desconocida de una tasa de interés en momentos conocidos. Es clave el conocimiento previo de los momentos en que el Banco Central cambiará la tasa, ya que estos permiten identificar cuáles son las expectativas que tiene el mercado sobre la tasa que impondrá el Banco Central. El hecho de que los momentos del cambio sean conocidos crea discontinuidades en la tasa forward, lo que se debe tanto a los cambios bruscos de tasa impuestos por el Banco Central, como al hecho de que estos tengan duración discreta.

Primero se presenta un modelo en el que se muestra una estructura de tasas de interés en un mercado con sólo un cambio en la tasa corta (de magnitud desconocida), en un momento conocido. Se modela la entrada de información al mercado, suponiendo que la tasa de entrada de información es constante en el tiempo.

Después, se discute un modelo en que existen N cambios de tasa consecutivos en el tiempo. En estos modelos se considera que la varianza en la estimación de la tasa es constante en el tiempo. A modo de simplificar, se supone que la entrada de información de las tasas futuras depende solamente del número de períodos que faltan para que ésta se haga efectiva.

Después, se incluye un modelo parsimonioso en el largo plazo. El modelo anterior, por el hecho de ser muy general, contiene demasiados parámetros y no es posible estimar sus parámetros en la realidad.

Se discute después un modelo que incluye la relación entre tasa de interés corta e inflación, relacionando el precio de los bonos reales y nominales.

Finalmente, se muestra un modelo que permite la estimación de expectativas en el corto plazo. Éste es después calibrado, mostrando parámetros estimados, variables de estado y capacidad de predicción fuera de muestra.

El objetivo de la estimación y calibración del modelo es extraer las expectativas de cambios de tasa del Banco Central día a día de los precios de mercado. Los resultados encontrados se comparan con un modelo tipo Vasicek con el mismo número de factores

² Para cada uno de estos modelos, se incluye un modelo con riesgo de default, en el marco de Duffie & Singleton (1999).

que el modelo calibrado. Se encuentra que el modelo calibrado no pierde ajuste en el corte transversal con respecto al clásico, logrando el objetivo de extraer información sin perder en poder de ajuste.

Se ocupa el Filtro de Kalman para estimar día a día las expectativas de mercado. Para estimar los parámetros del modelo se ocupa el método de máxima verosimilitud. La máxima verosimilitud incluye tanto el corte transversal asociado al filtro de Kalman, como expectativas racionales en la serie de tiempo.

2. MARCO TEÓRICO

En finanzas, la estructura de tasas es la relación entre las tasas de interés y la madurez de la deuda.

La tasa de un instrumento de deuda es la tasa acumulada de los retornos en el tiempo. Aunque los casos más sencillos consideran tasas constantes en el tiempo, de tal forma que la curva de rendimientos es plana, y la tasa es igual para todas las madureses, el caso más realista considera que la tasa de endeudamiento puede depender del plazo al que venza la deuda. Por ejemplo, un banco podría preferir entregar una mayor rentabilidad a personas que inviertan su dinero por un tiempo más largo.

2.1. Hipótesis de Expectativas

Esta hipótesis supone que las tasas a distintos períodos son sustitutos perfectos entre sí, lo que sugiere que la forma de la curva de rendimiento depende de las expectativas futuras de tasa del mercado. Es decir, si el mercado considera que es probable que las próximas tasas sean mayores a las actuales, entonces la curva tendrá una pendiente positiva. De esta forma, se puede construir una curva de rendimiento que pone de manifiesto las expectativas futuras de tasas (que pueden o no incluir premios por riesgo). Por ejemplo, si un inversionista cree que la tasa del próximo período será 10%, mientras que la actual es 5%, entonces debiera considerar que la tasa a dos períodos vista hoy debiera ser la compuesta entre ambas tasas. De forma más general, la tasa de un instrumento de largo plazo debiera ser igual a la media geométrica de las instantáneas.

La hipótesis de Expectativas de tasas de interés relaciona las tasas de largo plazo, a n períodos $i_t^{(n)}$ con una tasa corta a m períodos $i_t^{(m)}$. En el caso de un bono cero, la hipótesis de expectativas puede ser definida como:

$$i_t^{(n)} = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} E_t \left[i_{t+mi}^{(n)} \right] + c^{(n,m)} \quad (2.1)$$

donde $c^{(n,m)}$ es el premio entre la tasa a n y m períodos, E_t denota la esperanza matemática condicional en toda la información histórica hasta el momento t . n denota el plazo total, compuesto de k periodos de longitud m ($n = k \cdot m$). Es decir, la tasa cero es el promedio de tasas esperadas deflactadas por un premio por riesgo. Si el premio por

riesgo es cero, la forma resultante de la hipótesis de expectativas es llamada “hipótesis de expectativas puras”.

Longstaff(2000a) demuestra que la formulación tradicional de la hipótesis de expectativas es consistente con la ausencia de arbitraje aún si los mercados son incompletos.

La primera y más lógica implicancia de esta teoría es que, en promedio, las tasas forwards debieran ser predictoras de las tasas futuras. De esta forma, ante nueva información de tasas futuras, debiera cambiar la forma de la curva de forma inmediata.

Otra implicancia es que el proceso de formación de expectativas puede ser relevante al momento de manejar la política monetaria de un país: si la tasa de interés depende de lo que la gente cree que va a pasar en el futuro, entonces entregar información a la gente con respecto a la forma en que se toman decisiones será muy relevante.

Éstas pueden ser, suponiendo que en el largo plazo existen expectativas racionales, testeadas estadísticamente.

Generalmente, la literatura rechaza la validez empírica de la hipótesis de expectativas. Se usan muchos tipos de tests y distintos instrumentos financieros. (e.g., Roll, 1970; Fama, 1984; Fama and Bliss, 1987; Frankel and Froot, 1987; Stambaugh, 1988; Froot, 1989; Campbell and Shiller, 1991; Bekaert, Hodrick, and Marshall, 1997; Bekaert and Hodrick, 2001; Clarida, Sarno, Taylor, and Valente, 2006; Sarno, Thornton, and Valente, 2007).

Una excepción a notar es Longstaff (2000b), quien encuentra que el extremo corto de la estructura de tasas no rechaza la hipótesis de expectativas. Otra forma de testeo que no rechaza la hipótesis de expectativas es la aplicación de métodos de cointegración fraccional.

Literatura especializada en estudio de eventos encuentra que la política monetaria afecta de forma determinante la estructura de tasas de interés. Para hacer esto, se estiman las expectativas usando la tasa forward promedio calculada en el plazo relevante justo antes del cambio de política, y se estima el error o innovación de la política monetaria como la diferencia entre la realización de la tasa y la esperada estimada. Se ocupa la metodología de estudio de eventos para usar los datos de todos los cambios de política.

Los resultados están enfocados en entender la reacción de la curva ante los cambios, y no necesariamente a testear la hipótesis de expectativas racionales. Estos estudios

apuntan principalmente a sostener que las expectativas juegan un rol primordial en la curva, y no se especializan en la racionalidad de éstas.

2.2. Modelos de No Arbitraje

En el contexto de derivados de la tasa de interés, un modelo de tasa corta es uno tal que describe la evolución de las tasas de interés a corto plazo. Éstas permiten obtener la estructura de tasas de interés a través de argumentos de no arbitraje.

La tasa corta, generalmente escrita “ r_t ” es la tasa (anualizada) a la cual se puede endeudar o pedir dinero prestado por un tiempo infinitesimalmente corto desde un tiempo a otro. La especificación de la tasa corta actual no indica directamente la curva de rendimiento. Sin embargo, si se sabe la forma en que ésta cambia a través del tiempo, por argumentos de no arbitraje se puede especificar la curva de rendimiento completa. Esto se logra mediante el cálculo del precio de un bono cero cupón bajo la medida de probabilidades ajustadas por riesgo. El precio de un bono está dado por:

$$P(t, T) = E \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (2.2)$$

donde \mathcal{F} es el filtro natural del proceso. Esto significa que la tasa forward instantánea también está especificada y dada por:

$$f(t, T) = - \frac{\partial}{\partial T} \ln P(t, T) \quad (2.3)$$

La implicancia más lógica es la necesidad de entender cómo se comporta el mercado al momento de evaluar cuál es la tasa corta, y cómo cambia ésta en el tiempo, ya que la estructura estará determinada por las variables que muevan ésta.

La literatura clásica en que el movimiento de la tasa corta permite encontrar la estructura completa de tasas muestra varios modelos que han sido implementado en el mundo financiero. Dentro de éstos destacan:

- El modelo Vasicek
- El modelo de Hull-White (llamado modelo de Vasicek extendido)
- El modelo de Cox-Ingerson y Ross

Estos modelos pueden ser expandidos a procesos multifactoriales.

Los modelos asociados a la estructura de tasas de interés suelen estar asociados a éste tipo de modelación. Esto se debe a que permite crear estructuras de tasas que se ajustan a

las observadas en el corte transversal, mientras que siguen siendo consistentes a nivel de series de tiempo.

2.3. Los Modelos de No Arbitraje, ¿incluyen la Hipótesis de Expectativas?

En los modelos clásicos de No Arbitraje, lo que importa al momento de valorar un bono es la tasa corta actual, y su dinámica.

La dinámica que siga la tasa corta impondrá una estructura, lo que puede incluir saltos de tasa debidos a cambios en la tasa de política monetaria del Banco Central, cambios de spread por razones de liquidez, u otros. Usualmente, modelos de no arbitraje multifactoriales, como modelos Vasicek por ejemplo, contemplan en su formulación dinámica de la tasa corta, variables no observables. Estas variables intentan modelar factores macroeconómicos complejos, tales como expectativas de tasa futura, crecimiento del país, riesgo agregado, tipo de cambio, y muchos más.

Sin embargo, la tasa actual no debiera cambiar por el hecho de que la expectativa de cambio de tasa en el próximo período discreto cambie. Esto hace que la estructura de corto plazo (sin premios por riesgo), en que la tasa ha sido fijada por el Banco Central (hasta el próximo cambio de tasa) sea constante, ya que si no fuera así, existirían oportunidades de arbitraje. Por ejemplo, si el Banco Central mantiene la tasa fija en 5% por este mes, entonces, aunque yo crea que la tasa va a ser 10% o 2% el próximo, eso no debiera cambiar el hecho de que la estructura de tasas, por el primer mes, debiera ser constante (e igual a 5%).

Es decir, los factores que afectan la tasa actual no debieran ser las expectativas de tasa futura. Los modelos clásicos de no arbitraje no permiten una dinámica en que las tasas se mantengan fijas por una determinada cantidad de tiempo: varían todos los días. Esto indica que la formulación de variables de estado es incompleta, por lo menos al momento de incorporar expectativas de cambios de tasa discretos al modelo.

Sin embargo, la modelación de la estructura debiera incorporar, en un modelo de no arbitraje, las expectativas de tasa futura. Por ejemplo, si existe completa seguridad de que el Banco Central cambiará la tasa de 5 a 10%, una estrategia tipo *rolling* permitirá arbitrar la estructura de tasas hasta llevarla a la que se deduce de la hipótesis de expectativas.

En este trabajo se modela la estructura de tasas suponiendo que la tasa de interés a N períodos incluye tanto las expectativas de tasas futuras como el spread actual y su dinámica. La tasa de política monetaria cambia de forma discontinua en fechas dadas a conocer por la autoridad, de forma que la estructura incorpora saltos de magnitud considerable aunque desconocida. A través de imponer la condición de no arbitraje se encuentra una forma funcional que permite encontrar una estructura de tasas de interés que incluye expectativas.

En este modelo, al contrario que en los clásicos de no arbitraje, se encuentra que no sólo la dinámica de la tasa corta es importante para encontrar el precio de un bono, sino que las expectativas y su dinámica también afecta (a partir de cierto plazo) el precio de éste.

3. MODELO

En el modelo, una entidad externa al mercado cambia la tasa corta (a un día, por ejemplo) en momentos conocidos. Existen fechas claras en que la entidad decide si cambiar la tasa o no, y cuánto cambiarla. Esto genera una estructura de tasas de interés que, haciendo ingeniería inversa, permite conocer las proyecciones del mercado.

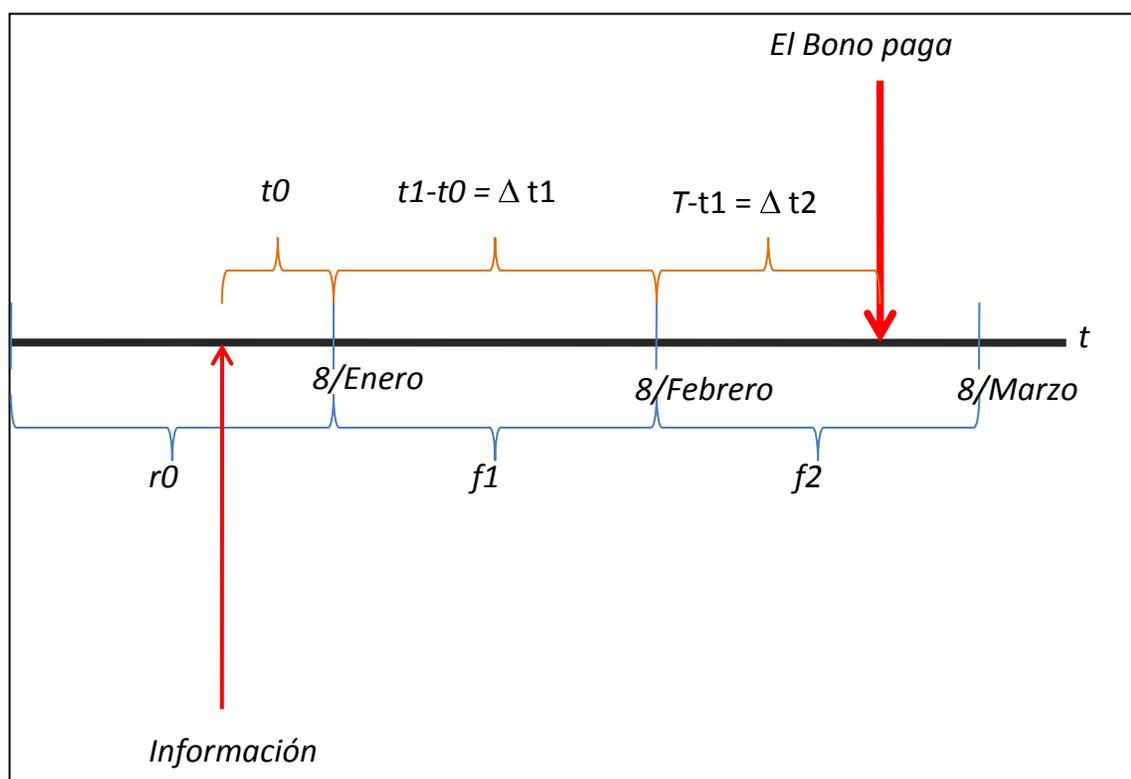


Figura 3-1 Esquema Explicativo del Modelo

La Figura 3-1 muestra de forma esquemática cómo funciona la economía asociada al modelo en cuestión. En ésta, el Banco Central cambia la tasa los días 8 de cada mes. El día de hoy es el 1 de Enero. La tasa actual es conocida, pero cambiará de forma abrupta el próximo 8. Esto significa que, suponiendo bonos totalmente seguros (sin spread), la primera parte de la estructura de tasas debiera ser plana (porque si no fuera así, una simple estrategia tipo *rolling* permitiría arbitrarla).

Las tasas esperadas f_1 y f_2 cambian a medida que pasa el tiempo ya que hay nueva información que entra al mercado: señales del Banco Central, resultados de inflación y otros, permiten conocer mejor qué hará el Banco Central con la próxima tasa (aunque no

necesariamente con seguridad). De esta forma, la mejor estimación de la tasa realizada, r_1 , viene dada por la tasa esperada el último día antes del cambio de tasa.

Además, el valor del bono depende de las tasas de interés (realizadas) en todos los momentos hasta su vencimiento, pero, siendo que estas son desconocidas, en realidad dependerán de su mejor estimación, las esperadas (y de su volatilidad). Además, se observa que a medida que pasa el tiempo, se mantienen constantes las diferencias en tiempo entre cambios, y sólo disminuye la cercanía al momento asociado al primer cambio (hasta que exista un nuevo cambio). Otra particularidad del modelo es que al principio, existe un número de tasas esperadas igual al número de períodos entre hoy y el momento del pago. Sin embargo, una vez que pasa el primer momento de cambio, la tasa esperada a un período se realiza (y se convierte en la tasa actual), y el número de tasas esperadas disminuye en una unidad. Por otro lado, si anterior al cambio una tasa era la esperada a, por ejemplo, tres períodos, se convertirá en una tasa esperada a sólo dos.

En el texto se presentan cinco modelos distintos, que incorporan las expectativas a la estructura de tasas de interés. El último modelo es a continuación calibrado usando instrumentos financieros transados en el mercado chileno.

3.1. Notación

A continuación se presenta la notación que será utilizada para designar variables, soluciones y otros en este trabajo:

T	Plazo de vencimiento de un bono
B_T	Bono que paga \$1 en un vencimiento T
\tilde{r}	Vector que contiene la variable aleatoria “tasa corta” en los próximos períodos
\tilde{f}	Vector que contiene la tasa esperada (o futura) en plazos siguientes.
C	Matriz varianza covarianza asociada al cambio de tasa.
Θ	Matriz varianza covarianza asociada a la nueva información que entra al mercado
$\Delta t = \begin{bmatrix} t_1 - t_0 \\ \vdots \\ T - t_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$	Vector de diferencias entre el momento en que ocurre el cambio i -ésimo y el anterior. Mientras no haya un cambio de tasa, el vector se mantendrá constante a medida que avanza el tiempo (ver Esquema)
S	Spread entre un bono emitido por el Banco Central y uno emitido por un banco.
$t_0 = T - \Delta t' \bar{1}$	Momento en el que ocurre el primer cambio

Tabla 3-1 : Notación

3.2. Modelo 1: Un salto de tasa

Este modelo muestra cómo sería una estructura de tasas de interés en que existe una fecha conocida en que ocurrirá un cambio de tasa. Este cambio tiene una magnitud desconocida, lo que impide que una estrategia tipo *rolling* (endeudamientos a un día de forma sucesiva) sean libres de riesgo.

A través de este modelo se intenta encontrar una estructura de tasas que tome en cuenta explícitamente las expectativas del mercado. Se supondrá que las probabilidades asociadas al cambio de tasa distribuyen normal, y se procederá a encontrar una estructura de tasas bajo el supuesto de que las expectativas de cambio de tasa siguen un proceso Browniano. Es decir, no sólo hay saltos en las tasas, sino que las expectativas de las tasas cambian con el tiempo.

El supuesto de que las probabilidades asociadas al cambio de tasa distribuyen normal es una simplificación de la realidad, en la cual los cambios de tasa son discretos (por ejemplo, de un múltiplo de 25 puntos base). Sin embargo, se pueden aproximar las probabilidades de cambio de tasa discretas aproximando éstas con la distribución de probabilidades.

Para encontrar la solución, suponemos que el salto tiene una distribución normal. Es de notar que la distribución asociada al cambio de tasa esperada a realizada puede estar correlacionada con los cambios anteriores de tasas. Es decir, sin información:

$$r = \begin{pmatrix} r_t \\ r_{<t} \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \right) \quad (3.1)$$

Pero, dado que se conoce la historia,

$$r_t / r_{<t} = a \sim N \left(\mu_1 + \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (a - \mu_2), \Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} \right) \quad (3.2)$$

Definiremos a la tasa futura “f” como la esperada dada la información actual. Es decir, el error tiene media cero.

$$f = E \left(r_t / r_{<t} = a \right) \quad (3.3)$$

Se supone que la autoridad del Banco Central cambiará sólo una vez la tasa para una fecha dada, pero que la tasa esperada (futura) cambia con el tiempo. Esto puede deberse a nueva información que es conocida por el mercado.

Como es una tasa futura, se debe cumplir que no revierte, ya que si revirtiera sería posible anticiparla. El proceso que definimos sigue la tasa esperada es:

$$df = \begin{cases} \sigma_f d\bar{w} & t < t_0 \\ 0 & t > t_0 \end{cases} \quad (3.4)$$

$$f(t) = \begin{cases} f(t-dt) + \varepsilon & t = t_0 \\ r & \end{cases} \quad (3.5)$$

De esta forma, la tasa esperada cambia hasta el momento anterior al cambio. En el momento del cambio la tasa esperada “salta” para convertirse en la realizada. Finalmente, en momentos posteriores al cambio, la tasa esperada se convierte en la tasa efectiva (y ya no existen dudas con respecto a ella), por lo que no cambia.

El Bono puede ser valorado tanto encontrando la esperanza de éste en la medida ajustada por riesgo, como resolviendo la ecuación diferencial asociada a una cartera libre de riesgo.

La solución (para $T > t_0$) está dada por la siguiente fórmula:

$$B_T = e^{-t_0 t_0 - f(T-t_0) + \frac{1}{2}\sigma_c^2(T-t_0)^2 + \lambda_c \sigma_c(T-t_0) + \frac{1}{2}t_0 \sigma^2(T-t_0)^2 + t_0 \lambda \sigma(T-t_0)} \quad (3.6)$$

Donde:

$\sigma_c^2 = \sum_{11} - \sum_{12} \sum_{22}^{-1} \sum_{21}$	Varianza asociada al cambio discreto de tasa (originado por el Banco Central).
λ_c	Premio por riesgo asociado al cambio discreto de tasa por unidad de volatilidad (originado por el Banco Central).
σ^2	Varianza asociada al cambio de tasa esperada antes del cambio (llegada de información)
λ	Premio por riesgo asociado al cambio de tasa esperada antes del cambio por unidad de volatilidad (llegada de información)

Tabla 3-2: Parámetros del Modelo 1

La demostración se encuentra en el Anexo B.

Se aprecia que a medida que la maduración del bono se acerca al momento del cambio de tasa, los efectos del cambio son cada vez más irrelevantes. Además, a medida que se acerca el momento del cambio (pero el tiempo entre maduración y cambio de tasa se mantienen constantes), el valor del bono pasa a depender exclusivamente del cambio de tasa. Esto se debe a que la información que entrará hasta que la tasa cambie es muy poca (se vuelve cada vez más irrelevante).

Si existiera riesgo de default constante (spread s), se tendría que, manteniendo los supuestos anteriores, para $T > t_0$:

$$B_T = e^{-r_0 t_0 - f(T-t_0) - sT + \frac{1}{2} \sigma_C^2 (T-t_0)^2 + \lambda_C \sigma_C (T-t_0) + \frac{1}{2} t_0 \sigma^2 (T-t_0)^2 + t_0 \lambda \sigma (T-t_0)} \quad (3.7)$$

3.3. Modelo 2: N saltos de tasa

Se generaliza el modelo anterior a uno en el cual haya varios cambios sucesivos en la tasa corta, por ejemplo, una vez al mes. En este modelo, existe una expectativa de tasa para cada período.

De esta forma, un bono a N períodos depende de la tasa esperada de cada uno de los períodos en cuestión.

El vector f denota las tasas esperadas en cada intervalo en que se mantienen constantes. Éstas no pueden tener reversión debido a que, en otro caso, no se estaría usando toda la información disponible, y sería posible anticiparlas.

Las tasas esperadas siguen el proceso:

$$d\vec{f} = \text{diag}(\sigma_i) d\varpi \quad (3.8)$$

Esto significa que el proceso (y varianza) de la entrada de información de la tasa futura a N períodos depende exclusivamente de cuántos períodos falten, por lo que, una vez que ocurra un cambio, y la tasa a N períodos se convierta en una tasa esperada a $N-1$ períodos, entonces su varianza corresponderá a la tasa esperada a $N-1$ períodos.

Esto se puede resumir en:

$$df_N = \begin{cases} \sigma_N d\varpi_N & t < t_0 \\ \sigma_{N-1} d\varpi_{N-1} & t_0 < t < t_1 \\ \vdots & \vdots \\ \sigma_1 d\varpi_1 & t_{N-1} < t < t_N \\ 0 & t > t_N \end{cases} \quad (3.9)$$

$$f_N(t_N) = f_N(t_N - dt) + \varepsilon_N \quad (3.10)$$

Donde los saltos (ε_N) tienen una distribución normal, y el cambio en la tasa es un proceso de Wiener.

Es de notar que, al igual que en el modelo 1, la distribución asociada al cambio de tasa de esperada a realizada puede estar correlacionada con los cambios anteriores de tasas.

Es decir, sin información:

$$r = \begin{pmatrix} r_t \\ r_{<t} \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \right) \quad (3.11)$$

Pero, dado que se conoce la historia,

$$r_t / r_{<t} = a \sim N \left(\mu_1 + \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (a - \mu_2), \Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} \right) \quad (3.12)$$

Si no existe riesgo de default o spread por liquidez, entonces el valor del bono es:

$$B_T = e^{-r_0 t_0 + f' \Delta t + L' \Delta t + \frac{1}{2} \Delta t' C \Delta t + \frac{1}{2} \Delta t' \Theta \Delta t + M' \Delta t} \quad (3.13)$$

Con:

$$L = \begin{bmatrix} \lambda_1^c \sqrt{C_{11}} \\ \lambda_2^c \sqrt{C_{22}} \\ \vdots \\ \lambda_N^c \sqrt{C_{NN}} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{N,1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{N,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1N} & C_{2N} & \cdots & C_{NN} \end{bmatrix} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} \quad (3.15)$$

$$\Theta = t_0 \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \cdots & \sigma_{1,N} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N,1} & \sigma_{N,2} & \cdots & \sigma_N^2 \end{bmatrix} + \Delta t_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \sigma_{N-1,1} & \cdots & \sigma_{N-1}^2 \end{bmatrix} + \dots + \Delta t_{N-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_1^2 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$M = t_0 \begin{bmatrix} -\lambda_1 \sigma_1 \\ -\lambda_2 \sigma_2 \\ \vdots \\ -\lambda_N \sigma_N \end{bmatrix} + \Delta t_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -\lambda_1 \sigma_1 \\ \vdots \\ -\lambda_{N-1} \sigma_{N-1} \end{bmatrix} + \dots + \Delta t_{N-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -\lambda_1 \sigma_1 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Con:

C_{ij}	Covarianza entre el cambio discreto de tasa en el período “i” y el “j” (originado por el Banco Central).
λ_i^C	Premio por riesgo asociado al cambio discreto de tasa (originado por el Banco Central) en el período “i”.
σ_{mn}	Covarianza asociada al cambio de tasa esperada antes del cambio (originada por llegada de información) entre la tasa esperada a “m” y “n” períodos.
λ_m	Premio por riesgo asociado al cambio de tasa esperada antes del cambio (llegada de información) en el período “m”.

Tabla 3-3: Parámetros del Modelo 2

La demostración se encuentra en el Anexo C.

Intuitivamente, cuando se valora un bono importan todos los cambios posibles en el tiempo. Por ende, al corregir por convexidad el valor del bono es necesario ocupar la varianza total de la tasa. Ésta está dada por la varianza de cada salto discreto de tasa originado por el Banco Central, y la entrada de nueva información. La varianza asociada a la entrada de nueva información corresponde a la suma de toda la variabilidad entrante. Siendo que algunas tasas se realizan en el tiempo, dejan de tener volatilidad, al momento que las nuevas tasas pasan a tener una volatilidad distinta debido a que dejan de ser tasas a N períodos y se convierten en tasas a N-1 períodos. Por la misma razón, al encontrar el premio por riesgo (por unidad de volatilidad) hay que considerar que las tasas se realizan en el tiempo: no son siempre igual de volátiles.

Si existiera un spread constante (y por lo tanto riesgo de default constante), el valor del bono sería:

$$B_T = e^{-r_0 t_0 + f' \Delta t + sT + L' \Delta t + \frac{1}{2} \Delta t' C \Delta t + \frac{1}{2} \Delta t' \Theta \Delta t + M' \Delta t} \quad (3.18)$$

Si existe un spread variable en el tiempo, es necesario suponer que éste sigue algún proceso en el tiempo. Supondremos que:

$$ds = \sigma_s d\varpi_s \quad (3.19)$$

De esta forma, el spread mañana es el spread hoy más un error browniano.

El precio de un bono con estas características está dado por:

$$B_T = e^{-r_0 t_0 + sT + f' \Delta t + L' \Delta t + \frac{1}{2} \Delta t' C \Delta t + \left(\frac{1}{2} N + P\right)} \quad (3.20)$$

Con:

$$L = \begin{bmatrix} \lambda_1^c \sqrt{C_{11}} \\ \lambda_2^c \sqrt{C_{22}} \\ \vdots \\ \lambda_N^c \sqrt{C_{NN}} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{N,1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{N,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1N} & C_{2N} & \cdots & C_{NN} \end{bmatrix} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} \quad (3.22)$$

$$N = \sum_{i=0}^N \Delta t_i \left(\sum_{j,k < i} \Delta t_j \Delta t_k \sigma_{jk} \right) + \sum_{i=0}^N \Delta t_i \left(\sum_{j < i} \Delta t_j (t_{i+1}^2 - t_i^2) \sigma_{js} \right) + \frac{\sigma_s^2 T^3}{3} \quad (3.23)$$

$$P = \sum_{i=0}^N \Delta t_i \left(\sum_{j=1..i} \Delta t_j \lambda_j \sigma_j \right) + \frac{T^2 \lambda_s \sigma_s}{2} \quad (3.24)$$

3.4. Modelo 3: Parsimonioso en el Largo Plazo

Si se quisiera estimar el modelo 2 para el largo plazo, sería necesario dejar libres demasiados parámetros, por lo que su estimación es en la práctica imposible en períodos largos (por ejemplo, 10 años). Por lo tanto, se creará un modelo que encuentra la estructura de tasas esperadas suponiendo que ésta sigue alguna forma funcional que sea razonable y a su vez tenga pocos parámetros.

Se propone una estructura de tasas esperadas de la forma propuesta para tasas forward por Nelson y Siegel:

$$f(t_i) = e^{-\alpha(t_i-t_0)} x_1 + \alpha(t_i - t_0) e^{-\alpha(t_i-t_0)} x_2 + x_3 \quad (3.25)$$

Donde:

X1: corresponde a la tasa esperada de corto plazo.

X2: corresponde a la tasa esperada de mediano plazo.

X3: corresponde a la tasa esperada de largo plazo.

Es decir, para cada momento, la estructura de tasas esperadas tiene la forma funcional propuesta por Nelson & Siegel, lo que no significa que las tasas forward sean de este tipo. Se observa que las tasas esperadas son lineales en las variables x 's. Podemos escribir las tasas esperadas en función de las variables de estado de la siguiente forma:

$$f = Rx \quad (3.26)$$

Con

$$R = \begin{bmatrix} e^{-\alpha(t_1-t_0)} & \alpha t_0 e^{-\alpha(t_1-t_0)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{-\alpha(t_n-t_0)} & \alpha t_n e^{-\alpha(t_n-t_0)} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

R es una matriz constante, ya que a medida que avanza el tiempo $(t_i - t_0)$ se mantiene constante.

Además, suponemos que las tasas no revierten de ninguna forma. Esto puede ser escrito a través de las variables de estado como:

$$d \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \Sigma d \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Con $\Omega = \Sigma \Sigma'$ la varianza instantánea de las variables de estado.

Por lo que:

$$\begin{aligned} df &= Rdx \\ df \cdot df' &= R\Omega R' dt \end{aligned} \quad (3.29)$$

La solución a la valoración es la misma que la del modelo general, con la excepción que es necesario incorporar la matriz R en las fórmulas de varianza covarianza. De esta forma, la solución sin spread es:

$$B_T = e^{-r_0 t_0 - R \bar{x}' \Delta t + L' \Delta t + \frac{1}{2} \Delta t_r' C \Delta t + \frac{1}{2} \Delta t' S \Delta t + T' \Delta t_r} \quad (3.30)$$

Con

$$L = \begin{bmatrix} \lambda_1^c \sqrt{C_{11}} \\ \lambda_2^c \sqrt{C_{22}} \\ \vdots \\ \lambda_N^c \sqrt{C_{NN}} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{N,1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{N,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1N} & C_{2N} & \cdots & C_{NN} \end{bmatrix} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} \quad (3.32)$$

$$S = t_0 R \Omega R' + \Delta t_1 R_1 \Omega R_1' + \dots + \Delta t_N R_N \Omega R_N' \quad (3.33)$$

$$T = t_0 R \Psi + \Delta t_1 R_1 \Psi + \dots + \Delta t_N R_N \Psi \quad (3.34)$$

Con

$$R_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{-\alpha(t_{i+1}-t_i)} & \alpha(t_{i+1}-t_i) e^{-\alpha(t_{i+1}-t_i)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{-\alpha(t_N-t_i)} & \alpha(t_N-t_i) e^{-\alpha(t_N-t_i)} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \lambda_1 \sqrt{\Omega_{11}} \\ \lambda_2 \sqrt{\Omega_{22}} \\ \lambda_3 \sqrt{\Omega_{33}} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

La solución con spread variable puede ser encontrada de la misma forma, ya que los supuestos son una simplificación del modelo general.

3.5. Modelo 4: Extensión para Bonos Reales y Nominales

Este modelo mezcla expectativas de tasa corta del Banco Central e inflación. Esto se fundamenta en una base macroeconómica.

La idea consiste en que el Banco Central, al subir su tasa, pretende hacer bajar la inflación (regla de Taylor del Banco Central). Al mismo tiempo, al subir la inflación, es probable que baje la tasa corta. De esta forma, los procesos asociados a inflación esperada, y tasa corta esperada debieran estar relacionados.

Otras formas de modelar los precios de bonos reales y nominales consiste en tratar las unidades monetarias que miden la inflación, y la afecta a inflación, como si fueran monedas extranjeras. Este enfoque no es el que intenta explorar el modelo, por lo que no se tomará en cuenta. Para una mejor comprensión de esta forma de modelación, se recomienda el libro “Interest Rate Models - Theory and Practice With Smile”, Inflation and Credit Series: Springer Finance Brigo, Damiano, Mercurio, Fabio 2nd ed. 2006).

Supondremos que la tasa e inflación esperadas siguen el proceso:

$$\begin{aligned} d\vec{f} &= Kd\pi + \Theta d\varpi \\ d\vec{\pi} &= Jdf + \Sigma d\omega \end{aligned} \quad (3.37)$$

Para simplificar la notación, se juntarán ambos vectores en uno.

$$g = \begin{bmatrix} f \\ \pi \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Así:

$$dg = Kd\omega \quad (3.39)$$

Esto se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
d \begin{bmatrix} f \\ \pi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & K \\ J & 0 \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} f \\ \pi \end{bmatrix} + \text{diag}(\sigma_i) d\varpi \\
\begin{bmatrix} I & -K \\ -J & I \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} f \\ \pi \end{bmatrix} &= \text{diag}(\sigma_i) d\varpi \\
d \begin{bmatrix} f \\ \pi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & -K \\ -J & I \end{bmatrix}^{-1} \text{diag}(\sigma_i) d\varpi
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Donde I es la matriz identidad.

Se observa que las ecuaciones y forma en que cambian las expectativas son las mismas del modelo general, por lo que la solución también es la misma:

$$B_T = e^{-r_0 t_0 + g' \Delta \tilde{t} + L' \Delta \tilde{t} + \frac{1}{2} \Delta \tilde{t}' C \Delta \tilde{t} + \frac{1}{2} \Delta \tilde{t}' \Theta \Delta \tilde{t} + M' \Delta \tilde{t}} \tag{3.41}$$

Donde dependiendo de si el bono es real o nominal es necesario cambiar los vectores $\Delta \tilde{t}$. En particular, para que el modelo tenga como solución las mismas matrices es preferible reordenar el vector g de tal forma que contenga primero la tasa a un periodo, después la inflación a 1 período (no necesariamente igual) y así sucesivamente.

3.6. Modelo 5: Parsimonioso en el Corto Plazo

En este modelo se intenta simplificar el modelo 2, a uno razonable en el corto plazo. La simplificación lograda para el largo plazo es también demasiado compleja en el corto plazo: son demasiados parámetros.

Se mostrará en los capítulos siguientes cómo este modelo fue calibrado usando papeles del mercado Chileno. Los resultados se discuten en las conclusiones.

Se supone que, para cada instante, la esperanza de tasas futuras tiene una “forma funcional” razonable. Para hacer explícito esto, en vez de suponer que las tasas esperadas a uno o dos períodos son simplemente f_1 y f_2 , se supondrá que el cambio en la tasa, esperado por el mercado, sigue una forma en que es improbable que el Banco Central primero suba la tasa, y después la baje nuevamente.

De esta forma, se supone que:

$$f_i - f_{i-1} = \beta_i (f_{i-1} - f_{i-2}) \tag{3.42}$$

Aunque no es necesario, se espera que el parámetro β_i asociado al período i sea mayor que cero y probablemente menor que 1.

De esta forma, reemplazando sucesivamente, se encuentra que:

$$f_n = f_1 + \prod_{i=1}^n (1 + \beta_i) (f_1 - r_0) = f_1 + \gamma_n (f_1 - r_0) \quad (3.43)$$

Escribiendo esto de forma matricial:

$$f = f_1 \cdot \vec{1} + \vec{\gamma} (f_1 - r_0) \quad (3.44)$$

Se encuentra que el precio del bono está dado por:

$$B_T = e^{-r_0 t_0 + f_1 \cdot \vec{1} + (f_1 - r_0) \vec{\gamma}' \Delta t + sT + L' \Delta t + \frac{1}{2} \Delta t' C \Delta t + \frac{1}{2} \Delta t' W \Delta t + R' \Delta t} \quad (3.45)$$

Con:

$$L = \begin{bmatrix} \lambda_1^c \sqrt{C_{11}} \\ \lambda_2^c \sqrt{C_{22}} \\ \vdots \\ \lambda_N^c \sqrt{C_{NN}} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{N,1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{N,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1N} & C_{2N} & \cdots & C_{NN} \end{bmatrix} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} \quad (3.47)$$

$$W = t_0 \sigma^2 (1 + \bar{\gamma}_0)(1 + \bar{\gamma}_0)' + \Delta t_1 \sigma^2 (1 + \bar{\gamma}_1)(1 + \bar{\gamma}_1)' + \dots + \Delta t_{N-1} \sigma^2 (1 + \bar{\gamma}_{N-1})(1 + \bar{\gamma}_{N-1})' \quad (3.48)$$

$$R = t_0 \begin{bmatrix} -\lambda_1 \sigma (1 + \gamma_1) \\ -\lambda_2 \sigma (1 + \gamma_2) \\ \vdots \\ -\lambda_N \sigma (1 + \gamma_{N-1}) \end{bmatrix} + \Delta t_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -\lambda_1 \sigma (1 + \gamma_1) \\ \vdots \\ -\lambda_{N-1} \sigma (1 + \gamma_{N-2}) \end{bmatrix} + \dots + \Delta t_{N-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -\lambda_1 \sigma (1 + \gamma_1) \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Lo que resulta ser equivalente a reemplazar la ecuación que describe las tasas esperadas en la ecuación del Bono en el modelo general. Esto es lógico ya que este modelo es una simplificación del anterior.

Si además existiera un spread variable, se tendría que el valor del Bono estaría dado por:

$$B_T = e^{-r_0 t_0 + sT + f_1 \bar{1} + f_1 - r_0 \bar{y} \Delta t + L' \Delta t + \frac{1}{2} \Delta t' C \Delta t + \frac{1}{2} W + R} \quad (3.50)$$

Con

$$L = \begin{bmatrix} \lambda_1^c \sqrt{C_{11}} \\ \lambda_2^c \sqrt{C_{22}} \\ \vdots \\ \lambda_N^c \sqrt{C_{NN}} \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{N,1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{N,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1N} & C_{2N} & \cdots & C_{NN} \end{bmatrix} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} \quad (3.52)$$

$$W = \sum_{i=0}^N \Delta t_i \sum_{j,k < i} \Delta t_{i-j} \Delta t_{i-k} \sigma_f^2 (1+\gamma_j)(1+\gamma_k) + \sum_{i=0}^N \Delta t_i \sum_{j < i} \Delta t_j t_{i+1}^2 - t_i^2 \sigma_{fs} (1+\gamma_j) + \frac{\sigma_s^2 T^3}{3} \quad (3.53)$$

$$R = \sum_{i=0}^N \Delta t_i \left(\sum_{j=1}^i \Delta t_j \lambda_j \sigma_f (1+\gamma_j) \right) + \frac{T^2 \lambda_s \sigma_s}{2} \quad (3.54)$$

Que corresponde, nuevamente, a reemplazar la ecuación que describe las tasas en la valoración del Bono del modelo general.

4. ESTIMACIÓN

Se explica a continuación la teoría de estimación, y la forma en que se procederá a estimar el modelo.

4.1. El Filtro de Kalman

Para estimar un modelo dinámico se necesita determinar por un lado los parámetros que rigen el modelo y por otro las variables de estado que representan la variable que se desea modelar. El filtro de Kalman (1960), permite estimar parámetros y variables de estado de forma simultánea, usando la información observada en la fecha que se quiere estimar, así como en fechas anteriores, permitiendo un cierto grado de error en la observación de la variable dependiente, aspecto importante en un mercado poco desarrollado, pues la observación podría estar determinada por condiciones específicas de la transacción que no representan información de mercado. Originalmente el filtro de Kalman fue desarrollado como respuesta a problemas de ingeniería de control y telecomunicaciones, sin embargo ha sido aplicado con éxito a problemas de ingeniería financiera.

Para realizar la estimación de parámetros, el filtro calcula la distribución de las innovaciones de observaciones en el proceso, entendiendo por innovaciones al cambio de la curva generada por el filtro en dos días consecutivos. Esta distribución permite obtener una función de verosimilitud que al ser maximizada da lugar a estimaciones consistentes de los parámetros que rigen la dinámica de las variables de estado. La metodología propuesta por Kalman se define para procesos gaussianos, por lo tanto para aplicarlo es necesario suponer que los errores de observación del modelo distribuyen normal, aunque este supuesto puede ser relajado. Originalmente el filtro de Kalman requiere paneles de datos completos lo que puede redundar en la pérdida de información disponible o agrupación de la misma para cumplir con esta condición, sin embargo Sørensen (2002) y Naranjo (2002) muestran que este requerimiento puede ser relajado, ya que las ecuaciones del filtro aplican para un número m_t de observaciones dependientes del tiempo t .

4.1.1. El Espacio de Estados

El filtro de Kalman se define en el espacio de estados mediante ecuaciones de medida, transición y predicción. La ecuación de medida es la que relaciona las variables observadas y no observadas.

$$z_t = H_t x_t + d_t + v_t \quad v_t \sim N(0, R_t) \quad (4.1)$$

El vector z_t de longitud $(m_t \times 1)$ reúne las variables observadas en el período t . H_t es una matriz de $(m_t \times n)$, donde n es el número de factores del modelo o, dicho de otra forma, de variables de estado x_t que explican las observaciones, d_t es un vector de constantes que da cuenta del desplazamiento necesario para llevar de las variables no observables a las observadas y v_t es una variable estocástica no correlacionada de media cero y varianza R_t que representa los errores de medición de distribución normal que se suponen al plantear el filtro.

La dinámica de las variables de estado se representa en el filtro mediante la ecuación de transición.

$$x_t = A_t x_{t-1} + c_t + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, Q_t) \quad (4.2)$$

La fórmula anterior describe la relación lineal que existe entre estados, así como la distribución normal multivariada de las perturbaciones ε que permiten modelar la incertidumbre en la estimación de las variables de estado del período siguiente. Definidas ambas ecuaciones, Kalman determina la forma de estimación del espacio de estados mediante una minimización del error cuadrático de estimación, es decir si \hat{x}_t es la estimación de la variable de estado x_t dada la información disponible hasta t , el error cuadrático de estimación se define por:

$$P_t = E(x_t - \hat{x}_t)(x_t - \hat{x}_t)' \quad (4.3)$$

Dado que \hat{x}_t y P_t reúnen toda la información disponible hasta t , el filtro de Kalman es un método recursivo de estimación, esto implica que de haber nueva información observada en $t + \Delta t$ ($z_{t+\Delta t}$), se puede estimar los nuevos valores $\hat{x}_{t+\Delta t}$ y $P_{t+\Delta t}$. A continuación se explica el procedimiento para realizar esta estimación.

Dada la información disponible hasta t , es decir conocidos \hat{x}_t y P_t , es posible estimar sus valores en un período Δt más adelante gracias a las ecuaciones de predicción:

$$\hat{x}_{t+\Delta t|t} = A_{t+\Delta t} \hat{x}_t + c_{t+\Delta t} \quad (4.4)$$

$$P_{t+\Delta t|t} = A_{t+\Delta t} P_t A_{t+\Delta t}' + Q_{t+\Delta t} \quad (4.5)$$

La forma en la que se describen las ecuaciones anteriores resalta la naturaleza bayesiana del filtro en el sentido de que la estimación de los valores en $t + \Delta t$ es condicional a los valores estimados para el tiempo t . Con estos estimadores, es posible hacer una predicción de las observaciones del próximo período gracias a la ecuación de medida:

$$\hat{z}_{t+\Delta t|t} = H_{t+\Delta t} \hat{x}_{t+\Delta t} + d_{t+\Delta t} \quad (4.6)$$

Luego al recibir nueva información, es posible contrastar la predicción del filtro con las nuevas variables observadas, haciendo posible encontrar la nueva predicción del filtro que es un promedio ponderado entre la información contemporánea y toda la historia contenida en las predicciones antes detalladas.

$$\hat{x}_{t+\Delta t} = \hat{x}_{t+\Delta t|t} + K_{t+\Delta t} (z_{t+\Delta t} - \hat{z}_{t+\Delta t|t}) \quad (4.7)$$

$$\hat{P}_{t+\Delta t} = (I - K_{t+\Delta t} H_{t+\Delta t}) P_{t+\Delta t|t} \quad (4.8)$$

En las ecuaciones anteriores (también llamadas paso de actualización), I corresponde a la matriz identidad de dimensión $(n \times n)$, mientras que K es la denominada ganancia de Kalman y está definida por las ecuaciones (4.9) y (4.10).

$$K_{t+\Delta t} = P_{t+\Delta t|t} H_{t+\Delta t}' \Omega_{t+\Delta t}^{-1} \quad (4.9)$$

$$\Omega_{t+\Delta t} = H_{t+\Delta t} P_{t+\Delta t|t} H_{t+\Delta t}' + R_{t+\Delta t} \quad (4.10)$$

$\Omega_{t+\Delta t}$ es la varianza de la predicción de las innovaciones y junto a la esperanza de la predicción permiten caracterizar la distribución de las innovaciones y por lo tanto son la base para realizar la estimación de los parámetros del modelo mediante el método de máxima verosimilitud.

4.2. Estimación de Parámetros: El método de Máxima Verosimilitud

El método de máxima verosimilitud busca encontrar el set de parámetros que maximiza la probabilidad de que los datos provengan de una distribución supuesta inicialmente. Bajo ciertas condiciones de regularidad, este método entrega estimaciones consistentes y asintóticamente normales. La distribución inicial que se supone, proviene de las

distribuciones de los errores descritos en las ecuaciones (4.1) y (4.2). Las variables x_t y v_t distribuyen normal, lo que implica que z_t y por lo tanto $\hat{z}_{t+\Delta t}$ distribuyan normal, como la suma de variables normales y una constante. De esta forma, dado que ya se definió la media y la varianza de las innovaciones en las ecuaciones (4.4) y (4.5), es posible describir su función de distribución de probabilidad según:

$$f_{z_{t+\Delta t}|t}(z_{t+\Delta t}) = \frac{1}{2\pi |\Omega_{t+\Delta t}|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (z_{t+\Delta t} - \hat{z}_{t+\Delta t|t})' \Omega_t^{-1} (z_{t+\Delta t} - \hat{z}_{t+\Delta t|t}) \right] \quad (4.11)$$

Dada la ecuación (4.11) que describe la densidad de probabilidad de las innovaciones $z_{t+\Delta t|t}$ y la independencia de las variables $x_{t+\Delta t|t}$ y $v_{t+\Delta t|t}$, es posible obtener la densidad de probabilidad conjunta de las innovaciones como la multiplicación de las funciones expresadas en (4.11), representada en su forma logarítmica en la ecuación (4.12).

$$\log L(\psi) = \sum_t \left(\log \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2} \log |\Omega_t| - \frac{1}{2} (z_t - \hat{z}_{t|t+\Delta t})' \Omega_t^{-1} (z_t - \hat{z}_{t|t+\Delta t}) \right) \quad (4.12)$$

La ecuación anterior resalta la dependencia de la función de verosimilitud del vector ψ que reúne los parámetros que rigen la dinámica del modelo. De esta forma maximizando la ecuación (4.12) es posible obtener estimaciones de los parámetros consistentes con las observaciones diarias. Como esta maximización es invariante frente a constantes, en realidad se maximiza la función de verosimilitud descrita por:

$$\log \bar{L}(\psi) = -\frac{1}{2} \sum_t \log |\Omega_t| - \frac{1}{2} \sum_t (z_t - \hat{z}_{t|t+\Delta t})' \Omega_t^{-1} (z_t - \hat{z}_{t|t+\Delta t}) \quad (4.13)$$

4.3. Aplicación al modelo propuesto

Como ya se explicó, el filtro de Kalman es usado para predecir variables no observables. En nuestro modelo, la expectativa de tasa es una variable no observable. Sin embargo, aunque no es observable, el modelo impone Expectativas Racionales. ¿Qué significa esto? Que sabemos cómo debiera distribuir el error asociado a la estimación de la próxima tasa corta impuesta por el Banco Central. De esta forma, aunque la tasa esperada no es observable, sí es una variable que puede ser chequeada *ex post* (una vez realizada la tasa). Más aún, la forma en que fue modelada la tasa esperada nos entrega de forma explícita la distribución de ésta, por lo que podemos encontrar una distribución de

probabilidades asociada. A su vez, es posible encontrar la verosimilitud asociada a los parámetros dada la muestra de datos.

Es así como, dado que las estimaciones (no observables) pueden ser chequeadas *ex post*, es posible estimar los parámetros del modelo a través de la inclusión de las verosimilitudes tanto de los errores en los datos (usando el filtro de Kalman) como de los errores de la tasa esperada del Banco Central versus la realizada (suponiendo expectativas racionales).

De esta forma, la verosimilitud total será la probabilidad conjunta de los errores en los datos y los errores en la estimación del mercado de las próximas tasas. Se supondrá, por simplicidad que ambos tipos de errores son independientes.

La demostración se encuentra en el Anexo F.

5. EL MERCADO Y LOS DATOS

Se explica a continuación el mercado del cual se extrajeron los datos, y los datos propiamente tales.

5.1. El Banco Central y el Mercado Chileno

El Banco Central de Chile es un organismo con patrimonio propio, de carácter técnico. Esta institución sólo puede efectuar operaciones con las entidades financieras, públicas o privadas. El Banco Central no puede otorgar garantías ni adquirir documentos emitidos por el Estado, sus organismos o empresas, ni puede financiar directa o indirectamente ningún gasto público o préstamo, salvo en caso de guerra exterior o peligro de ella, lo que debe calificar el Consejo de Seguridad Nacional.

Como consecuencia el Banco Central no está sujeto a la fiscalización de la Contraloría General de la República ni de la Superintendencia de Bancos e Instituciones Financieras. Tampoco forma parte de la Administración del Estado y se rige exclusivamente por las normas de su propia ley orgánica, algunas disposiciones específicas de la ley general de bancos y cuenta, además, con la facultad exclusiva de interpretar administrativamente sus acuerdos, reglamentos, órdenes o instrucciones, sin perjuicio de las atribuciones legales de los órganos jurisdiccionales.

5.1.1. Descripción de las principales políticas

5.1.1.1. Política monetaria

La preocupación del Banco Central por la estabilidad de precios se ha traducido en la adopción de un régimen monetario de meta de inflación.

Desde el año 2007, el objetivo explícito del Banco Central de Chile es que la inflación anual del Índice de Precios al Consumidor (IPC) se ubique la mayor parte del tiempo en torno a 3%, con un rango de tolerancia de más / menos 1 punto porcentual, el cual debe ser cumplido de manera permanente en un horizonte de mediano plazo en torno a dos años

5.1.1.2. Política cambiaria

El único compromiso del Banco Central es mantener la inflación en la meta, dejando que el mercado determine de manera autónoma el valor de la moneda nacional.

La flexibilidad cambiaria, sin embargo, no significa que el Banco Central de Chile no pueda intervenir en el mercado cambiario en situaciones excepcionales.

5.1.1.3. Política financiera

El Banco Central es el prestamista de última instancia de la economía, y por tanto provee liquidez a las instituciones que enfrentan problemas temporales de caja.

5.1.2. Mecanismos de transmisión y el horizonte de política

La transmisión de los cambios en la política monetaria hacia el resto de la economía sucede a través de varios canales y toma un tiempo relativamente largo y variable en materializarse.

Una política monetaria más restrictiva (reflejada en un aumento en la tasa de interés de política) incide en un menor gasto privado en inversión y consumo y, por esa vía, afecta a la brecha entre la demanda agregada y el producto potencial y, finalmente, a la inflación. Adicionalmente, el alza de la tasa de interés de política también puede afectar al tipo de cambio (apreciándose el peso), disminuyendo eventualmente la inflación de los productos importados, además de afectar también a la demanda externa y a la brecha gasto a producto. La acción de política también tendrá impacto sobre los precios de activos (al cambiar la rentabilidad relativa de los instrumentos financieros), lo cual puede afectar la riqueza real y de ahí la demanda agregada y la inflación. Es posible que la oferta de crédito del sector bancario también se vea afectada, lo que será especialmente relevante para aquellas firmas cuyo acceso a otras fuentes de financiamiento está cerrado.

Por último, la acción de política afecta las expectativas de los agentes económicos, lo cual puede reflejarse en sus decisiones de consumo e inversión, así como en la determinación de contratos y salarios.

5.1.3. Características de la conducción de la política monetaria

La transparencia juega un papel clave en la conducción de las políticas del Banco Central. En este sentido, las reuniones del Consejo con la Comisión de Hacienda del Senado son fundamentales para mantener a la sociedad informada, así como para que el Banco Central reciba retroalimentación respecto de las políticas.

Las decisiones de política se toman en reuniones mensuales, las cuales son anunciadas públicamente con seis meses de anticipación. Ello no impide que, de ser necesario, se puedan tomar decisiones de política en reuniones extraordinarias.

Otro elemento significativo de la transparencia de las políticas seguidas por el Banco Central es la publicación, a partir de mayo del 2000, del Informe de Política Monetaria, y a partir del año 2004, del Informe de Estabilidad Financiera.

5.1.4. Conducción operativa de la política monetaria

El Banco Central implementa su política monetaria mediante la definición de un nivel objetivo para la tasa de interés interbancaria nominal, valor conocido en Chile como la tasa de política monetaria (TPM). Para lograr que la tasa interbancaria se sitúe en este nivel deseado, el Banco Central debe regular la liquidez (o reservas) del sistema financiero, a través del uso de varios instrumentos: operaciones de mercado abierto, compra y venta de pagarés de corto plazo, y líneas de créditos y depósitos de liquidez (facilidades ampliadas). Dentro de las herramientas, también se encuentra el encaje bancario sobre los depósitos, aunque en la práctica el Banco Central no la utiliza como instrumento activo de política monetaria³.

5.2. Descripción de los Papeles Utilizados

Para estimar el modelo, se han ocupado Depósitos a Plazo de Bancos Chilenos a fechas menores a 3 meses. Los depósitos se transan en pesos, a una tasa lineal anual nominal. En particular, se usaron los precios de depósitos a plazo de cuatro bancos: Santander, BCI, Banco de Chile y CorpBanca. Éstos fueron elegidos por existir más transacciones asociadas a éstos.

La muestra de calibración corresponde a los datos mencionados en el período entre el tercer trimestre de 2006 hasta el tercer trimestre de 2008. El período fuera de la muestra corresponde a datos entre el cuarto trimestre de 2008, y el cuarto trimestre de 2009.

El Depósito a plazo es un título de deuda que se emite para certificar el depósito de dinero recibido de una persona, sea ésta natural o jurídica, bajo la obligación de restitución del dinero dentro de un plazo preestablecido, incluyendo reajustes e intereses convenidos, según corresponda. Se trata de una operación de captación que representa

³ Fuente: www.bcentral.cl

un pasivo para la entidad depositaria, la que se hace dueña del dinero depositado por tratarse de un depósito irregular, surgiendo la obligación de restitución a favor del depositante según lo precisado.

Los depósitos a plazo que emitan las entidades depositarias pueden expresar su valor en pesos moneda corriente nacional, en moneda extranjera, o utilizando alguna de las unidades de cuenta correspondientes a los sistemas de reajustabilidad autorizados por el Banco Central de Chile.

Los depósitos a plazo, dependiendo de la forma en que se pacte el derecho a la restitución del dinero depositado, pueden clasificarse en: depósitos a plazo fijo, depósitos a plazo renovable, y depósitos a plazo indefinido.

- En los depósitos a plazo fijo la entidad depositaria se obliga a pagar en un día prefijado.
- En los depósitos a plazo renovable se contemplan condiciones similares a los depósitos a plazo fijo, pero con la posibilidad de prorrogar automáticamente el depósito por un nuevo período, de la misma cantidad de días, en caso de que el depositante no retire el dinero.
- En los depósitos a plazo indefinido no se pacta, al momento de constituirlos, una fecha o plazo determinados de vencimiento, sino que la entidad depositaria se obliga a la restitución en un plazo prefijado a contar de la vista o aviso de su cliente.

Si bien no hay cortes para los depósitos a plazo, cada entidad depositaria fija libremente el monto mínimo susceptible de documentarse en un depósito a plazo.

La amortización de un depósito a plazo es a la fecha de vencimiento pactada. La tasa de interés de un depósito a plazo es determinada libremente por la entidad depositaria. La liquidez es al vencimiento del documento.

Los depósitos a plazo cuyos titulares sean personas naturales tienen la garantía del Estado. Esta cubre el 90% del monto de la obligación de la entidad depositaria (hasta un límite máximo).

El mercado de depósitos chileno se compone de transacciones en pesos y en UF (Unidades de Fomento, corregidas por inflación). La composición, en transacciones al día, es la siguiente:

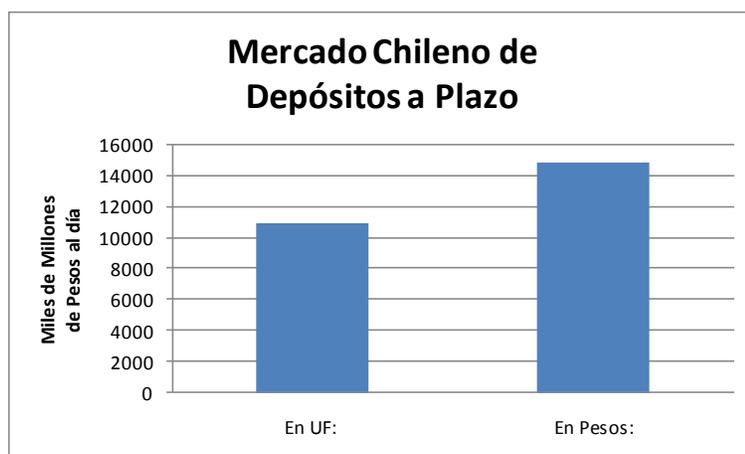


Figura 5-1: Transacciones Diarias promedio por tipo de Emisión en el mercado de Depósitos, Noviembre 2009⁴

Las transacciones se hacen a través de Bancos. El mercado no es dominado por ningún banco en particular, existiendo un total de 23 bancos que tranzan depósitos a plazo. El banco con mayor participación de mercado tiene un 13% de éste. Se presentan los montos al día de los principales:



Figura 5-2: MMM de pesos transados promedio en el mercado de Depósitos, Noviembre 2009

La participación de mercado es la siguiente:

⁴ Usando la UF del 1-11-2009

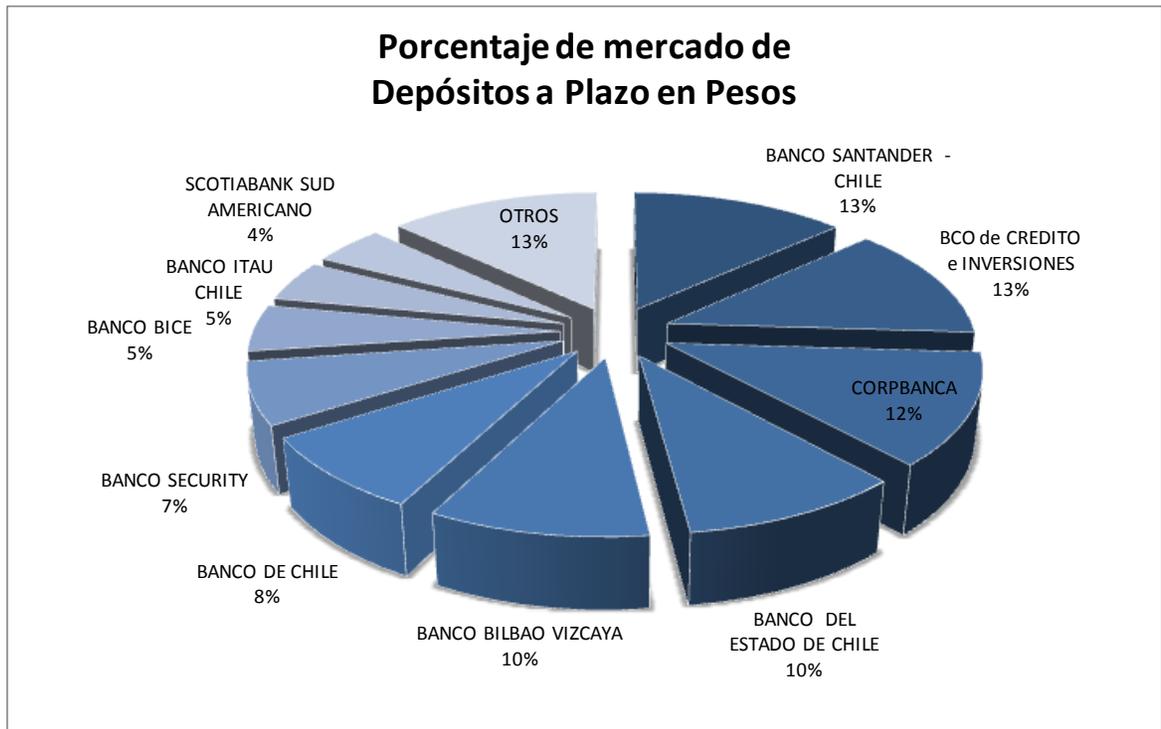


Figura 5-3: Participación de Mercado de Depósitos, Noviembre 2009

6. RESULTADOS

6.1. Modelo Calibrado

Al momento de calibrar, se eligió el Modelo 5, que contiene una estructura posible de calibrar en el Corto Plazo. Esto se debe tanto a los papeles elegidos como a la simplicidad de estimación con respecto a los demás modelos.

Es decir, se modelará el valor de un bono como:

$$B_T = e^{-r_0 t_0 + sT + f_1 \cdot \bar{1} + f_1 - r_0 \bar{\gamma} \Delta t + L' \Delta t + \frac{1}{2} \Delta t' C \Delta t + \frac{1}{2} W + R} \quad (6.1)$$

Con

$$W = \sum_{i=0}^N \Delta t_i \left(\sum_{j,k < i} \Delta t_{i-j} \Delta t_{i-k} \sigma_f^2 (1+\gamma_j)(1+\gamma_k) \right) + \sum_{i=0}^N \Delta t_i \left(\sum_{j < i} \Delta t_j (t_{i+1}^2 - t_i^2) \sigma_{fs} (1+\gamma_j) \right) + \frac{\sigma_s^2 T^3}{3} \quad (6.2)$$

$$R = \sum_{i=0}^N \Delta t_i \left(\sum_{j=1..i} \Delta t_j \lambda_j \sigma_f (1+\gamma_j) \right) + \frac{T^2 \lambda_s \sigma_s}{2} \quad (6.3)$$

$$L = \begin{bmatrix} \lambda_1^c \sqrt{C_{11}} \\ \lambda_2^c \sqrt{C_{22}} \\ \vdots \\ \lambda_N^c \sqrt{C_{NN}} \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{N,1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{N,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1N} & C_{2N} & \cdots & C_{NN} \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

Al momento de usar el filtro de Kalman, se usará como variable conocida el logaritmo del precio del bono, que es lineal en las variables de estado:

$$z = \ln(B_T) = z \bar{\gamma}, \lambda, \Sigma, \lambda_c, C + v_t \quad (6.6)$$

En particular, se eligió la matriz C como diagonal con sus elementos iguales, para disminuir el número de parámetros. Esto equivale a suponer que no existe correlación entre saltos. Se supuso que el premio por riesgo era el mismo para todos los saltos. También se eligió el premio por riesgo como constante para cada banco y fecha.

Inicialmente, se llevó a cabo una estimación independiente para cuatro emisores (los que tenían más transacciones). Al conocerse las estimaciones de tasas esperadas, se exploró la posibilidad de que fueran las mismas en todas las entidades. Estos bancos son: Santander, Chile, Corpbanca y Banco de Crédito e Inversiones (BCI).

Se muestra a continuación las correlaciones encontradas entre las tasas esperadas calibradas para cada uno de los bancos separadamente:

Correlaciones E(tpm1)				
	Santander	BCI	Chile	CorpBanca
Santander	100,00%	98,71%	98,94%	98,20%
BCI	98,71%	100,00%	99,29%	98,83%
Chile	98,94%	99,29%	100,00%	98,54%
CorpBanca	98,20%	98,83%	98,54%	100,00%

Tabla 6-1: Correlaciones entre Estimaciones Independientes

Por motivos prácticos de notación (que será utilizada más adelante), a cada uno se le asignó un número. Éstos son:

SANTANDER	1
CHILE	2
BCI	3
CORPBANCA	4

Tabla 6-2: Notación para cada Banco

La estimación se hizo en conjunto para cuatro bancos diferentes, debido a la evidencia de alta correlación entre las estimaciones de las tasas esperadas al hacer las estimaciones de forma independiente. Esto significa que, aunque cada banco tiene un spread asociado a la valoración, comparte la misma expectativa de tasa con todos los demás.

6.2. Estimación de Variables de Estado

6.2.1. Dentro de la muestra

Como ya se ha mencionado antes, algunas de las variables de estado de este modelo, aunque no son observables, sí tienen una interpretación clara: son las tasas esperadas por el mercado del próximo período. Por ende, deben parecer razonables si son observadas en el tiempo. Las estimaciones se presentan a continuación:

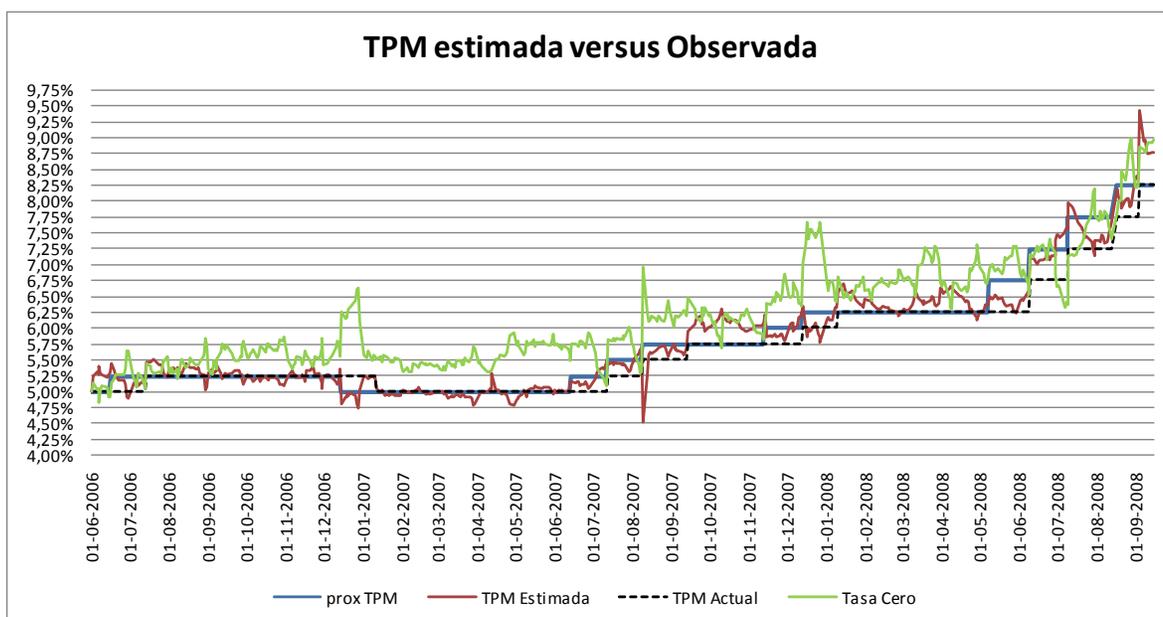


Figura 6-1: Tasas Esperadas versus Realizadas dentro de la muestra

Si las expectativas fueran exactas, la TPM Estimada (curva roja) sería idéntica a la próxima TPM (curva azul). Es decir, las expectativas se adelantarían de forma perfecta a la próxima TPM.

La TPM actual muestra como las expectativas (TPM Estimada) se separan de la TPM por creencias de subida o bajada de tasa en el corto plazo.

La Tasa Cero (curva verde) es la tasa que, calculada a través del modelo, se transa en el mercado a madurez cero (es decir, incluye el spread, calculado como el promedio entre los bancos). Se puede comprobar que ésta es más estable que la TPM Estimada (curva roja) debido a la correlación negativa entre el spread y la tasa esperada.

Es de notar que la variabilidad de la estimación de la próxima tasa baja cuando se acerca la fecha del cambio, debido a que las probabilidades de eventos que gatillen un cambio de política en el corto plazo son bajas.

Se observa que las tasas esperadas parecen anticiparse a las tasas realizadas. Esto es esperable debido a la forma en que fueron estimadas las variables: el método de máxima verosimilitud asegura que en promedio existen expectativas racionales.

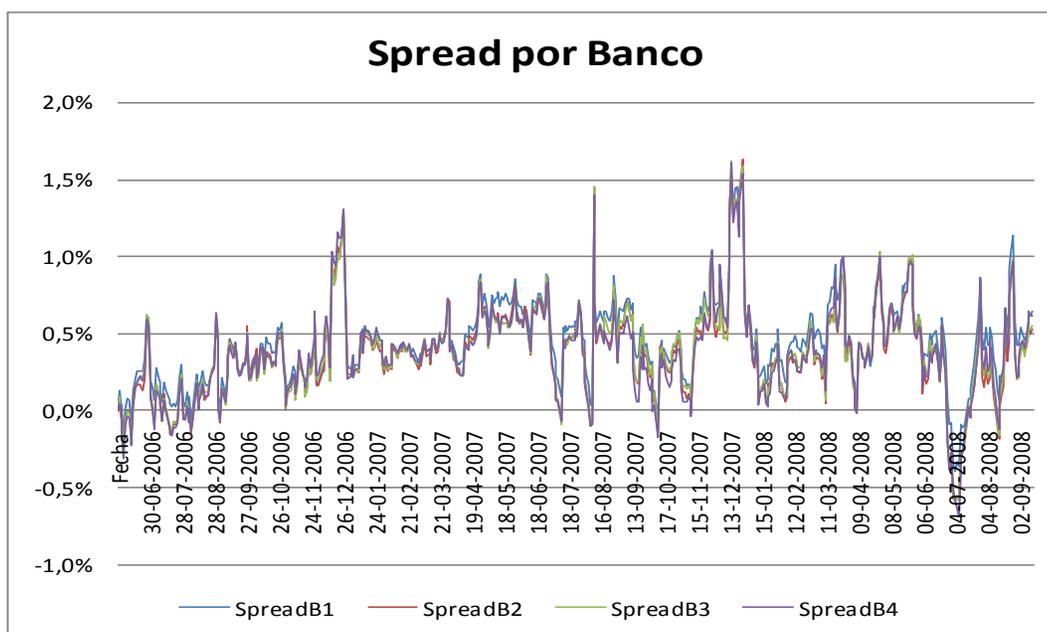


Figura 6-2: Spread por Banco dentro de la muestra.

La figura anterior muestra el Spread estimado para cada banco. Es de notar que el spread de cada banco es calculado a través de una variable de estado distinta en el modelo.

6.2.2. Fuera de la muestra

Fuera de la muestra, existen buenas razones para pensar que existe un cambio estructural: la crisis subprime. Sin embargo, es interesante chequear cómo se comporta el modelo ante un cambio estructural: ¿es necesario re-estimar los parámetros?, ¿es consistente ante cambios en los parámetros estimados? Las estimaciones de tasas se presentan a continuación:

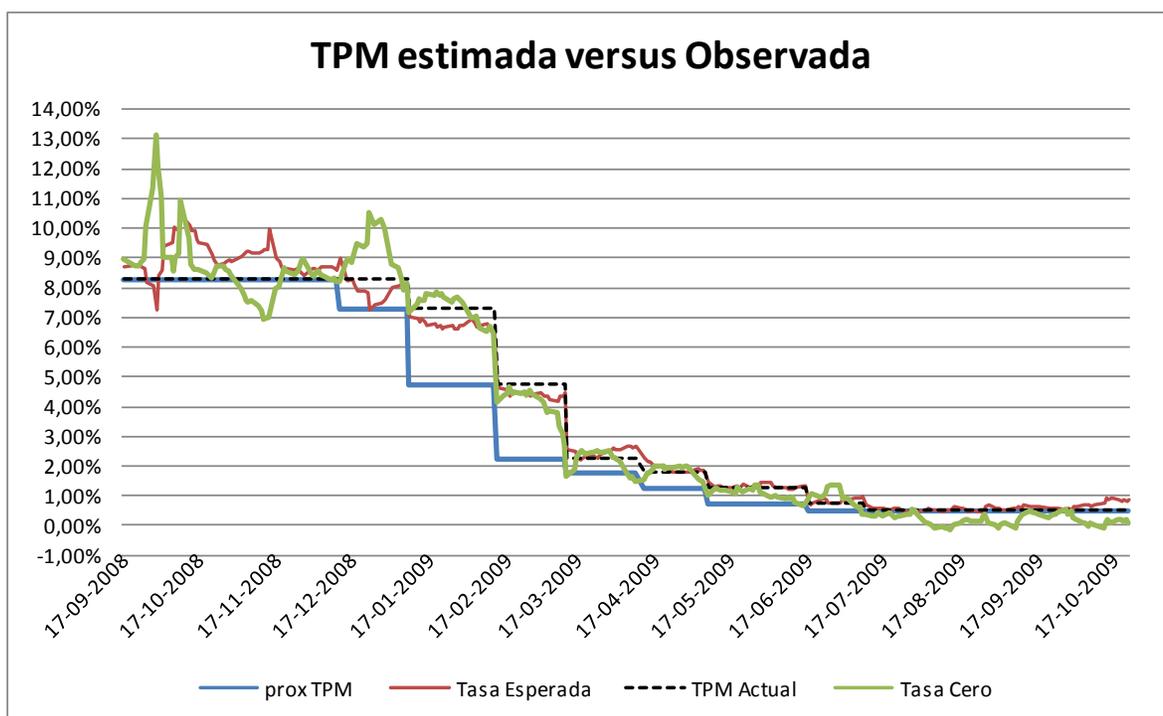


Figura 6-3: Tasas Esperadas versus Realizadas fuera de la muestra

Se aprecia que las tasas esperadas calculadas mediante el filtro de Kalman parecen anticiparse a la dirección en que cambiará la tasa. Sin embargo, la magnitud del cambio es notablemente distinta a la realizada. Esto se puede deber a dos razones: la primera es que el mercado efectivamente no esperaba cambios tan bruscos (150 puntos base) como los realizados, por lo que el modelo puede haber hecho una predicción correcta a partir de las transacciones. La otra alternativa es un cambio en los parámetros del modelo: al existir una crisis los parámetros estructurales cambian (por ejemplo, en la variabilidad del cambio de tasa y en la entrada de información al mercado). Esto significaría que el modelo subestima la magnitud del cambio que en realidad cree el mercado.

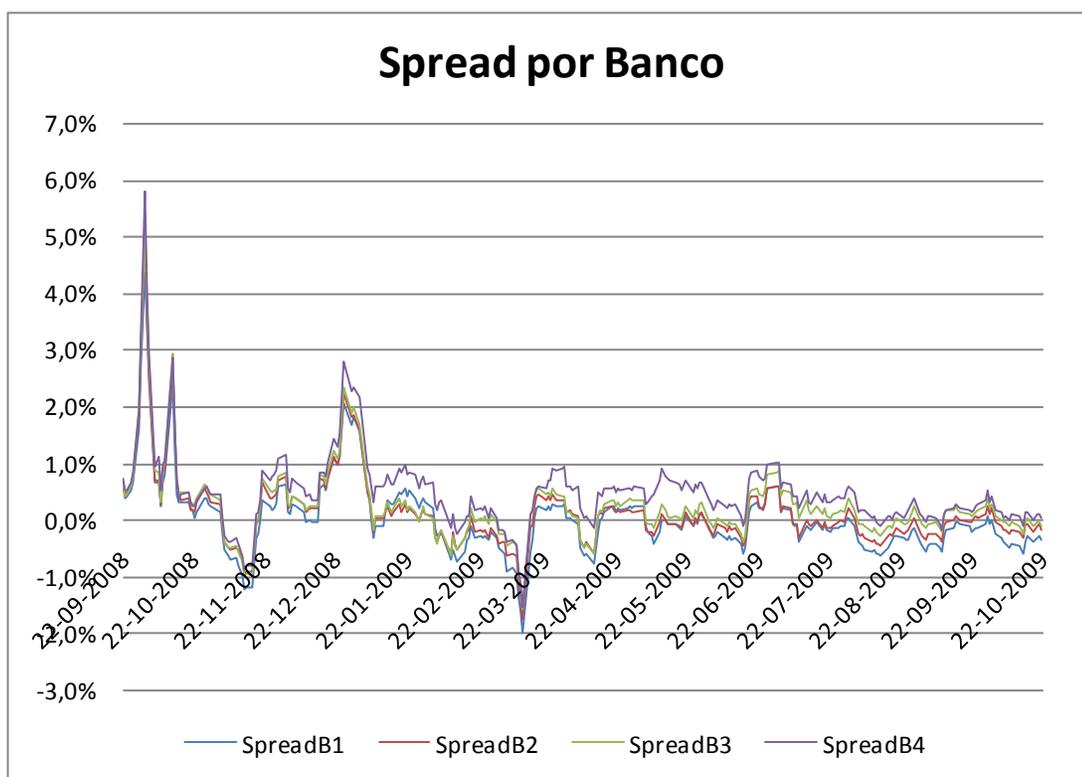


Figura 6-4: Spread por Banco fuera de la muestra

Se aprecia que entre Septiembre de 2008 y Diciembre de ese mismo año, el spread sufre una variabilidad ostensiblemente mayor a la de los meses siguientes. Este cambio estructural de mercado hace pensar que una reestimación de los parámetros en esa muestra conseguiría un mayor ajuste. Sin embargo, la estimación parece ser robusta en su estimación, entregando resultados coherentes aunque existan cambios estructurales en la muestra.

6.3. Estimación de Parámetros

Se presentan a continuación los parámetros estimados con sus respectivas desviaciones estándar y sus test t cuando corresponde:

	Parametro	Varianza	desv. Stdr	test t
σ_{largo}	1,06E-03	5,34E-14	2,31E-07	
σ_{corto}	2,38E-03	2,94E-13	5,43E-07	
λ_{c}	2,00E+00	3,65E-04	1,91E-02	104,6
σ_{c}	1,55E-03	2,54E-14	1,59E-07	
λ	3,16E-01	1,03E-05	3,21E-03	98,4
σ_{f}	6,17E-03	3,10E-09	5,57E-05	
σ_{B1}	1,26E-02	6,59E-09	8,12E-05	
σ_{B2}	1,43E-02	8,21E-09	9,06E-05	
σ_{B3}	1,38E-02	7,94E-09	8,91E-05	
σ_{B4}	1,41E-02	7,32E-09	8,56E-05	
$\rho_{\text{f,B1}}$	-7,88E-01	2,01E-07	4,48E-04	
$\rho_{\text{f,B2}}$	-8,75E-01	2,50E-07	5,00E-04	
$\rho_{\text{f,B3}}$	-8,95E-01	2,60E-07	5,10E-04	
$\rho_{\text{f,B4}}$	-8,63E-01	2,44E-07	4,94E-04	
$\rho_{\text{B1,B2}}$	8,51E-01	2,38E-07	4,88E-04	
$\rho_{\text{B1,B3}}$	8,59E-01	3,20E-07	5,65E-04	
$\rho_{\text{B1,B4}}$	8,42E-01	3,68E-07	6,06E-04	
$\rho_{\text{B2,B3}}$	8,77E-01	3,89E-07	6,24E-04	
$\rho_{\text{B2,B4}}$	8,61E-01	3,75E-07	6,12E-04	
$\rho_{\text{B3,B4}}$	8,10E-01	3,29E-07	5,74E-04	
β_2	8,66E-01	5,20E-04	2,28E-02	38,0
β_3	4,49E-01	4,77E-03	6,90E-02	6,5

Tabla 6-3: Parámetros Estimados y Significancia

σ_{largo} representa la variabilidad de los papeles cuyos plazos son mayores a un mes, mientras que σ_{corto} representa la de los papeles con plazos menores.

λ_{c} representa el precio del mercado del riesgo relacionado con los cambios de tasa por parte del Banco Central.

σ_{c} representa la desviación estándar del cambio de tasa por parte del Banco Central.

λ representa el precio del mercado del riesgo asociado a cambios en expectativas o spread.

σ_{f} representa la volatilidad de las expectativas.

σ_{Bi} representa la volatilidad del spread del banco i.

$\rho_{f,Bi}$ representa la correlación entre el cambio en el spread del banco i y el cambio en expectativas, f .

$\rho_{Bi,Bj}$ representa la correlación entre el cambio en el spread del banco i y el cambio en el spread del banco j .

Se observa que todos los parámetros son significativos.

Los parámetros asociados a la variabilidad del spread de distintos bancos son del mismo orden de magnitud para todos, lo que es razonable por estar en el mismo mercado.

Además, se aprecia que los spreads de los bancos están muy correlacionados entre sí. Esto se debe a que el spread de un banco en particular, con respecto a la tasa de corto plazo definida por el central (la TPM) corresponde a la suma de factores riesgosos de mercado y los riesgos particulares de cada banco.

Otro aspecto interesante corresponde a la correlación negativa entre el cambio en la tasa estimada y el cambio en el spread de los bancos. Este resultado muestra que la tasa cero (la transada a un plazo muy cercano a cero en los depósitos) es más estable que lo que el mercado cree pasará con la próxima tasa. Esto ha sido comprobado empíricamente en varios estudios⁵.

6.4. Ajuste a los Precios Observados dentro de la Muestra

Se muestran a continuación las estructuras de tasas de interés calibradas para distintos días en la muestra.

⁵ Entre ellos Longstaff & Schwartz (1992), Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model. *Journal of Finance* y Gregory R. Duffee (1998) The Relation Between Treasury Yields and Corporate Bond Yield Spreads. *Journal of Finance*

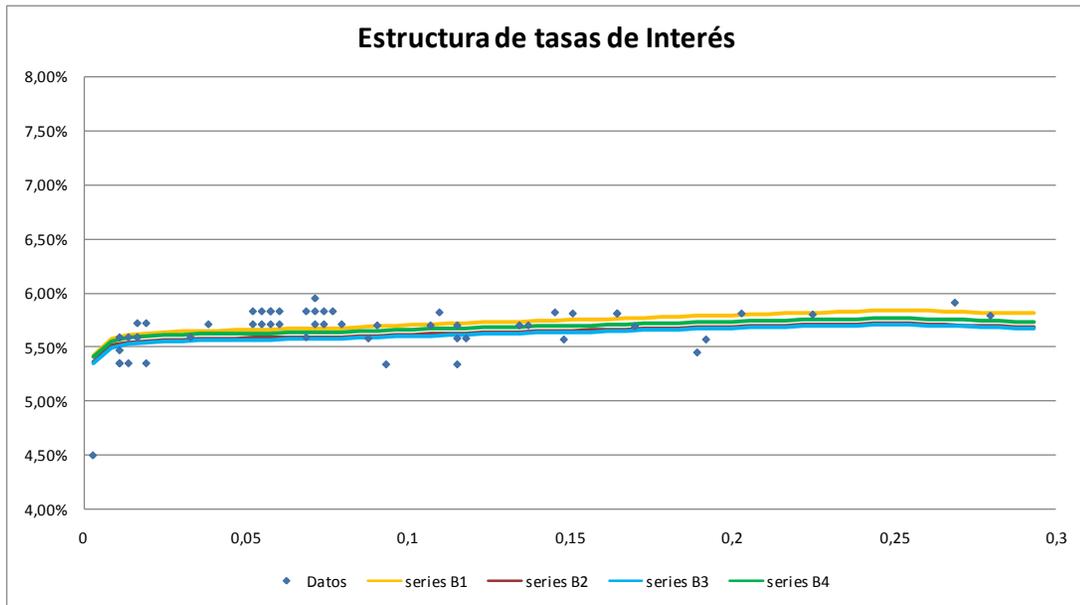


Figura 6-5 : Día 14-12-2006, Estimación Dentro de la Muestra

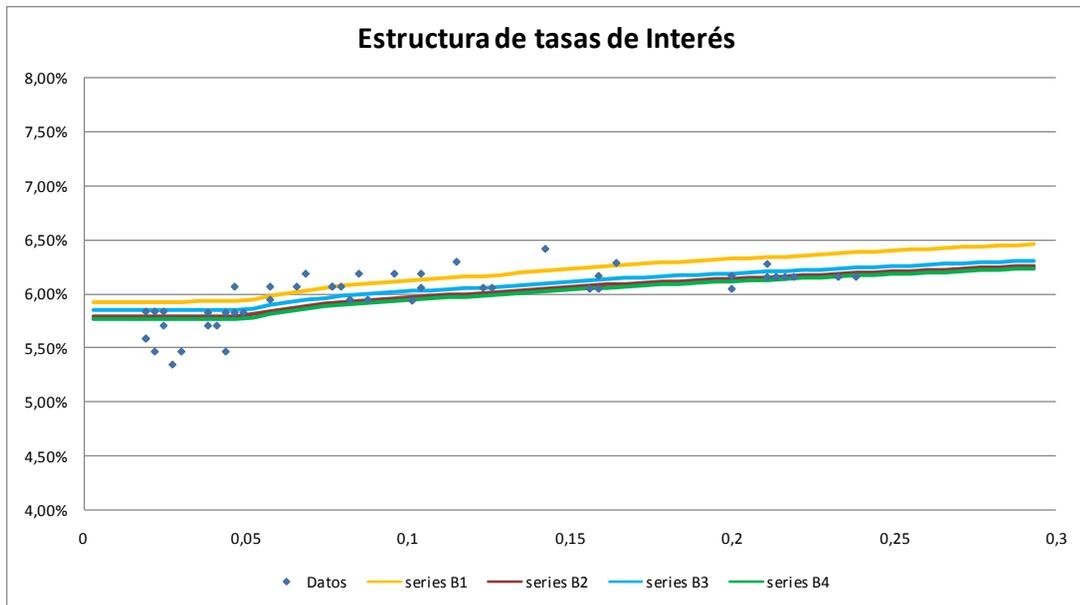


Figura 6-6: Día 27-08-2007, Estimación Dentro de la Muestra

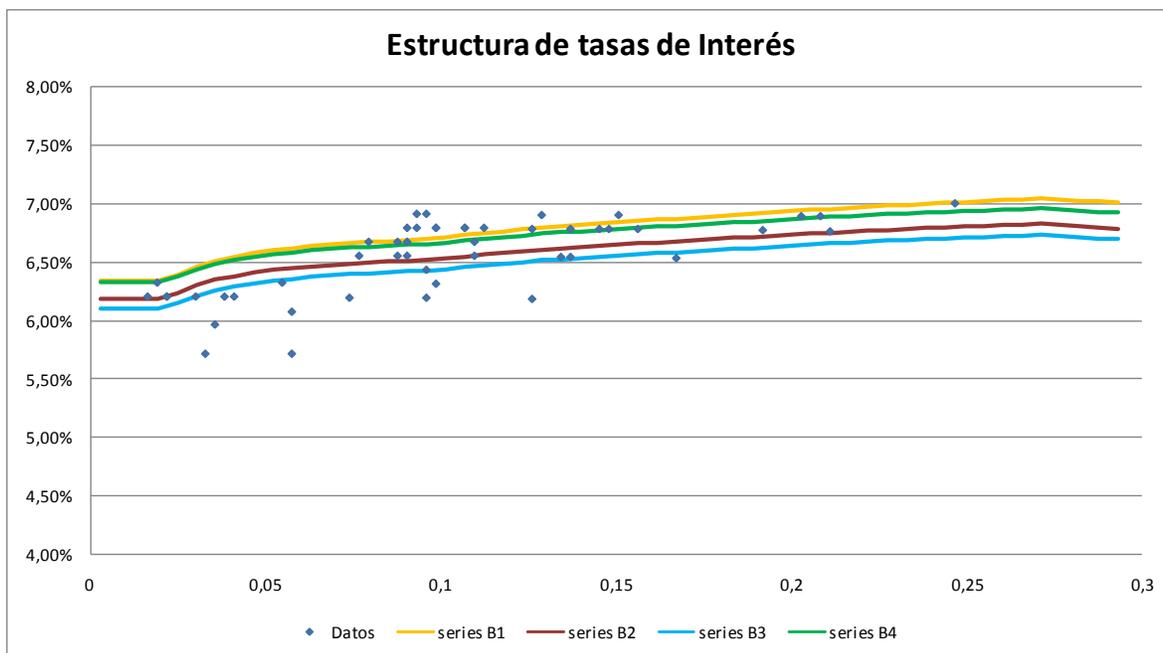


Figura 6-7: Día 06-12-2007, Estimación Dentro de la Muestra

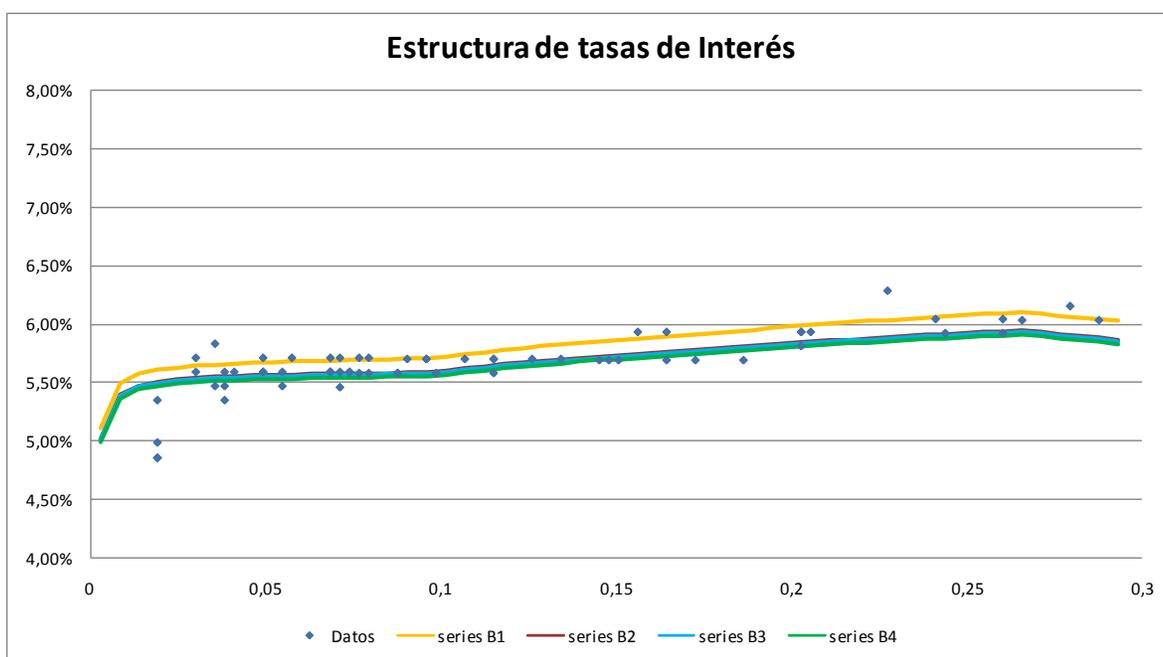


Figura 6-8: Día 09-08-2007, Estimación Dentro de la Muestra

Se muestra a continuación el error absoluto medio (EAM) y el error cuadrático medio (ECM) para la estimación dentro de la muestra (en puntos base):

	Modelo	Estandar Vasicek 2F
	In Sample	In Sample
EAM	10,20	11,35
ECM	16,20	16,55

Tabla 6-4: Error dentro de la muestra

El modelo calibrado se compara con un modelo Vasicek de dos factores debido a que éste tiene la misma cantidad: las tasas esperadas y el spread. Se observa que el modelo permite estimar expectativas sin perder poder de ajuste en el corte transversal.

Además, como ya se mencionó, el modelo supone que el salto de tasa es una variable normal. Sin embargo, el Banco Central de Chile, como política institucional, sólo cambia la tasa en múltiplos de 25 puntos base. Aunque esto es un supuesto simplificador, se pueden encontrar las probabilidades de cambio de tasa implícitas en el modelo mediante un mapeo adecuado.

Para hacer esto, se mapea la probabilidad con distribución normal de media y varianza estimada, calculando la probabilidad como la integral en el intervalo correspondiente. Se presentan a continuación algunos ejemplos:

TPM	5,50%	Próxima TPM	PROBABILIDAD
E(TPM1)	5,67%	5,00%	0%
E(TPM2)	5,83%	5,25%	2%
E(TPM3)	5,90%	5,50%	34%
		5,75%	56%
		6,00%	8%
		6,25%	0%
		6,50%	0%
1 días para el próximo cambio de tasa		13-09-2007	
0,16% desv. Stdr. Para la próx. Tasa			

Tabla 6-5: Mapeo de Probabilidades, 13-09-2007

TPM	6,25%	Próxima TPM	PROBABILIDAD
E(TPM1)	6,31%	5,50%	0%
E(TPM2)	6,36%	5,75%	2%
E(TPM3)	6,38%	6,00%	17%
		6,25%	44%
		6,50%	31%
		6,75%	6%
		7,00%	0%

24 días para el próximo
cambio de tasa
0,22% desv. Stdr. Para la prox. Tasa

19-02-2008

Tabla 6-6: Mapeo de Probabilidades, 12-02-2008

TPM	6,25%	Próxima TPM	PROBABILIDAD
E(TPM1)	6,28%	5,50%	0%
E(TPM2)	6,31%	5,75%	0%
E(TPM3)	6,33%	6,00%	14%
		6,25%	58%
		6,50%	26%
		6,75%	1%
		7,00%	0%

4 días para el próximo
cambio de tasa
0,17% desv. Stdr. Para la prox. Tasa

05-05-2008

Tabla 6-7: Mapeo de Probabilidades, 05-05-2008

6.5. Ajuste a los Precios Observados fuera de la Muestra

Se muestra a continuación la estimación de estructura de tasas de interés calibrada en los datos fuera de muestra.

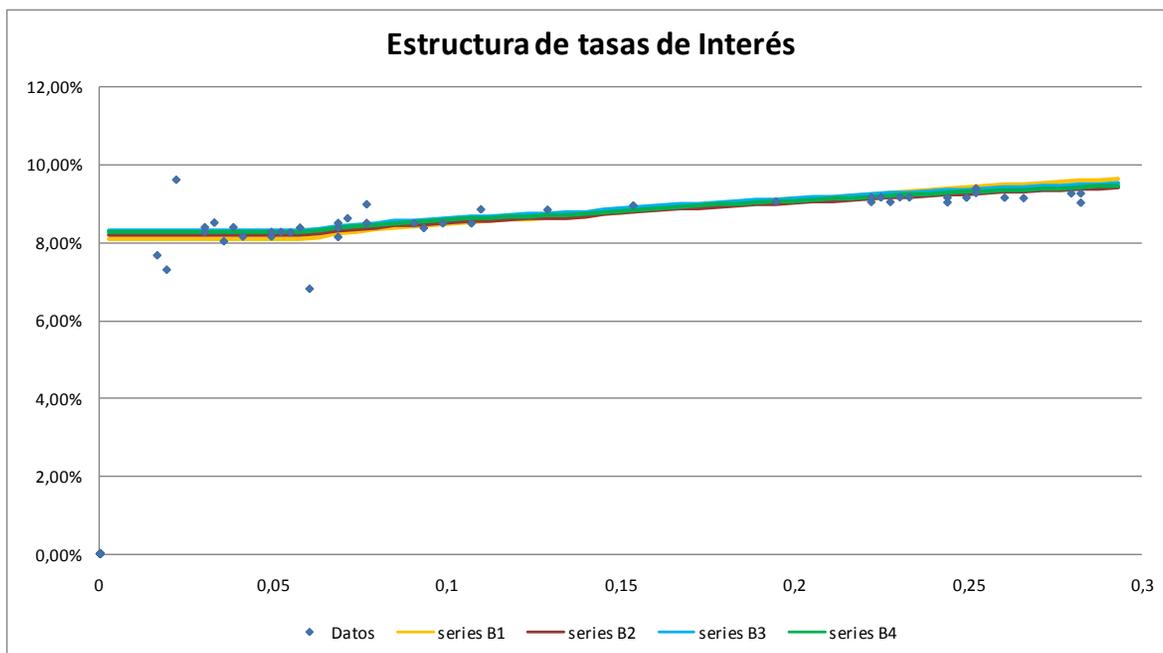


Figura 6-9: Día 23-10-2008, Estimación Fuera de Muestra

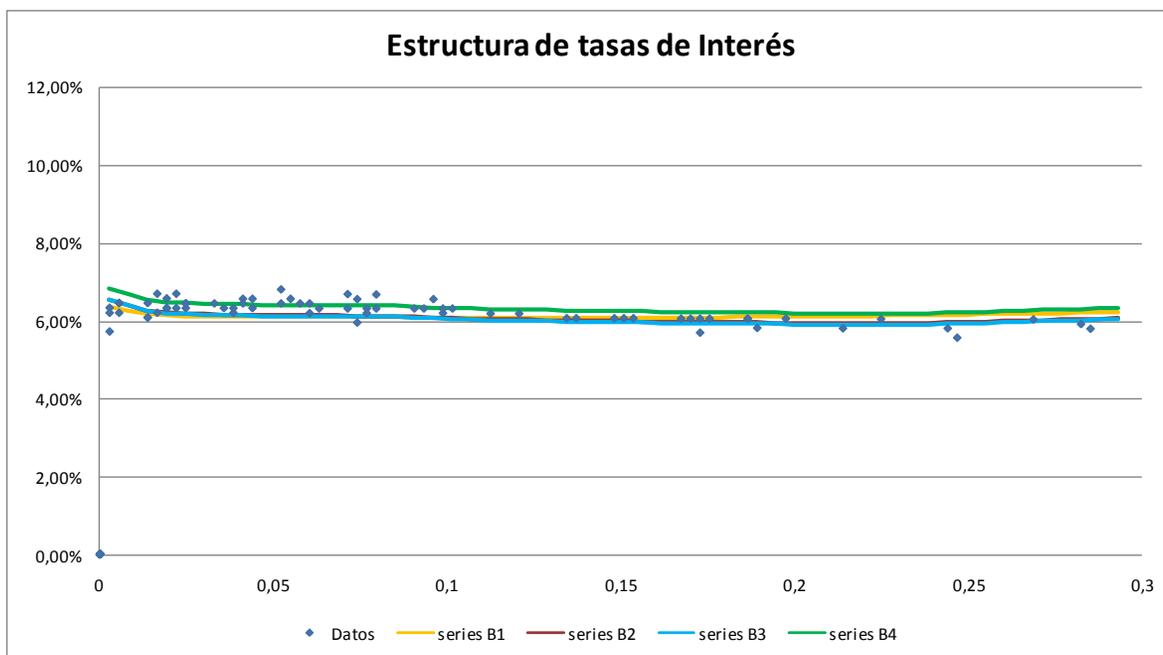


Figura 6-10: Día 11-02-2009, Estimación Fuera de Muestra

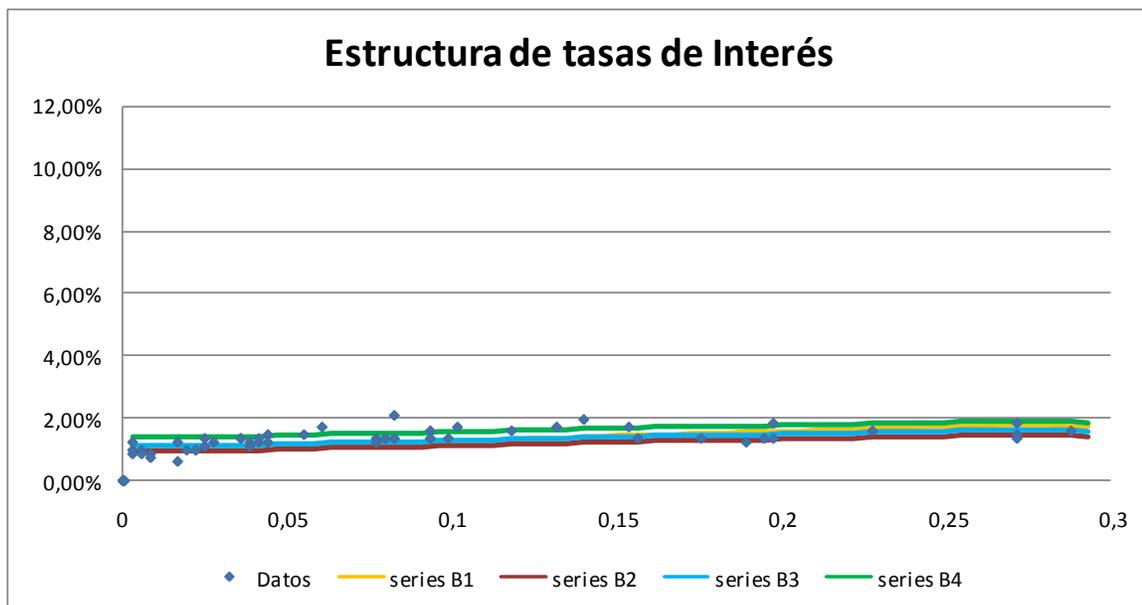


Figura 6-11: Día 02-06-2009, Estimación Fuera de Muestra

Se muestra a continuación el error absoluto medio y el cuadrático medio para las estimaciones fuera de muestra (en puntos base), en comparación con la estimación en la muestra de datos de calibración:

	Modelo		Estandar Vasicek 2F	
	In Sample	Out of Sample	In Sample	Out of Sample
EAM	10,20	20,76	11,35	18,58
ECM	16,20	37,62	16,55	52,41

Tabla 6-8: Error fuera de la muestra

Se observa que el modelo permite extraer las expectativas de cambio de tasa del Banco Central, fuera de muestra, sin perder poder explicativo en el corte transversal de la curva. De hecho, se observa que, aunque el error absoluto medio es ligeramente mayor fuera de muestra para el modelo, el error cuadrático medio es sustancialmente menor, lo que indica que el modelo propuesto tiende a tener un mejor ajuste para una gran mayoría de puntos.

Finalmente, para comparar que el modelo ajustara correctamente fuera de muestra, se hizo el siguiente análisis. Dado el supuesto de expectativas racionales, es claro que la

tasa esperada debiera ser, en promedio, la tasa realizada. De esta forma, es posible definir, la siguiente regresión que permite encontrar el posible sesgo:

$$Tasa_{Realizada} = \alpha + \beta \cdot Tasa_{Esperada} \quad (6.7)$$

Donde la hipótesis nula corresponde a suponer que la constante es cero (no hay sesgo), y la constante que acompaña a la tasa esperada es igual a 1.

Se presentan los resultados a continuación:

<i>Estadísticos de la Regresión</i>	
<i>Multiple R</i>	0,984484
<i>R Square</i>	0,969208
<i>Adjusted R Square</i>	0,966409
<i>Standard Error</i>	0,006182
<i>Observations</i>	13

Tabla 6-9: Estadísticos de la Regresión Fuera de Muestra

	<i>df</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>Significance F</i>
<i>Regression</i>	1	0,013232	0,013232	346,238	1,15748E-09
<i>Residual</i>	11	0,00042	3,82E-05		
<i>Total</i>	12	0,013652			

Tabla 6-10: Datos de la Regresión Fuera de Muestra

	<i>Coefficients</i>	<i>Standard Error</i>	<i>t Stat</i>	<i>P-value</i>	<i>Lower 95%</i>	<i>Upper 95%</i>
α	-0,00296469	0,002641377	-1,122	0,285593	-0,008778322	0,002849
β	0,91010672	0,048910824	1,838	0,089016	0,802454721	1,017759

Tabla 6-11: Coeficientes y Significancia de la Regresión Fuera de Muestra

En la regresión se usaron solamente las estimaciones de tasa esperada un día antes del cambio, debido a la correlación con las tasas esperadas a otras fechas, y al hecho de que en realidad en ese período hubo sólo 13 cambios de tasa del Banco Central.

Se aprecia que se cumple el supuesto de expectativas racionales con un nivel de confianza del 95%, y el R^2 es cercano al 97%.

Este análisis se hace fuera de muestra, debido a que, por la forma de estimación del modelo, dentro de la muestra es seguro que la tasa esperada es insesgada.

7. CONCLUSIONES

La gran mayoría de los Bancos Centrales de países desarrollados implementan su política monetaria a través de cambios en el nivel objetivo para la tasa de interés interbancaria nominal. Estos cambios son discretos (una vez al mes, por ejemplo), y crean discontinuidades en la tasa corta observada.

Hasta ahora, la literatura ha modelado estos cambios discontinuos tanto mediante saltos tipo Poisson, como mediante saltos de variables de estado en la fecha de cambio de la tasa de política. Sin embargo, las estructuras modeladas no son consistentes con la hipótesis de expectativas ni en el corte transversal ni en la serie de tiempo de los datos.

En este trabajo, se propone una estructura dinámica que no sólo es afectada por los movimientos en la tasa corta, sino que también por el cambio en la expectativa de la próxima tasa. Se muestra que es posible incorporar expectativas de forma explícita en una estructura de tasas de interés libre de arbitraje.

Los resultados de la estimación del modelo muestran que éste permite extraer las expectativas de tasas futuras impuestas por el Banco Central de las personas que transan. Más aún, estas expectativas pueden ser estimadas día a día, permitiendo que a futuro se pueda observar el impacto que noticias u opiniones tienen en las creencias del mercado. Además, es consistente con los datos, y más aún, es capaz de lograr el mismo ajuste en corte transversal que uno estándar.

Fuera de muestra, el modelo es testeado para comprobar si las expectativas extraídas son insesgadas. Aún en el período de la crisis subprime (el período fuera de muestra), el modelo resulta ser insesgado con respecto a las expectativas.

Por último, a través del método de calibración propuesto un modelo que incorpore bonos reales y nominales puede ser estimado, permitiendo encontrar la relación entre el cambio de expectativa entre el aumento de inflación (u otras variables macro) y el cambio en la tasa de política. Esto podría agregar información sobre la forma en que el mercado piensa que el Banco Central toma sus decisiones de política, permitiendo, por lo mismo, que el Banco Central tome mejores decisiones. Dejamos este análisis a futuros trabajos.

BIBLIOGRAFIA

- Ang, A., Dong, S., and Piazzesi, M. (2004), No-arbitrage Taylor rules, Working paper, Columbia University and University of Chicago.
- Babbs, S.H., Nowman, K.B. (1999). Kalman filtering of generalized Vasicek term structure models, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*.
- Beechey M., Hjalmarrsson E., Osterholm P. (2008). Testing the expectations hypothesis when interest rates are near integrated. *Journal of Banking & Finance*.
- Bernanke, B. S. (2004) Fed speak, Remarks at the meetings of the American Economic Association, San Diego, California, Board of Governors of the Federal Reserve System.
- Cook, T., T. Hahn (1989). The Effect of Changes in the Federal Funds Rate Target on Market Interest Rates in the 1970s. *Journal of Monetary Economics*.
- Cortazar, G., Naranjo, L. (2006) "An N-Factor Gaussian Model of Oil Futures Prices" *The Journal of Futures Markets*.
- Cortazar, G, Schwartz, E. S., Naranjo, L, (2007) "Term Structure Estimation in Markets with Infrequent Trading" *International Journal of Finance and Economics*.
- Cox, J.C., Ingersoll J.E., Ross, S.A. (1985), A theory of the term structure of interest rate, *Econometrica*.
- Della Corte, P., Sarno, L., Thornton D.L. (2008). The expectation hypothesis of the term structure of very short-term rates: Statistical tests and economic value, *Journal of Financial Economics*.
- Duffee GR. (1998) The Relation Between Treasury Yields and Corporate Bond Yield Spreads. *Journal of Finance*.
- Deutsche Bank, (2006), Determinants of the term structure of interest rates – approaches to combining arbitrage-free models and monetary macroeconomics, Monthly Report.
- Heidari, M., Wu, L., (2009), Market Anticipation of Fed Policy Changes and the Term Structure of Interest Rates, *Review of Finance*.
- Jiang G., Yan S. (2008). Linear-quadratic term structure models – Toward the understanding of jumps in interest rates, *Journal of Banking & Finance*.
- Johannes, M. (2004), The statistical and economic role of jumps in continuous-time interest rate models, *Journal of Finance*.
- Larraín, M. (2007), Sorpresas de Política Monetaria y la Curva de Rendimiento en Chile, *Economía Chilena*.

Lemke, W. (2006). Term Structure Modeling and Estimation in a State Space Framework. Book printed at Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Longstaff & Schwartz (1992), Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model. Journal of Finance.

Pandher, G. (2007), Arbitrage-free valuation of interest rate securities under forward curves with stochastic speed and acceleration, Journal of Economic Theory.

Piazzesi, M., (2005), Bond Yields and the Federal Reserve, Journal of Political Economy.

ANEXOS

**ANEXO A : FUNCIÓN GENERADORA DE MOMENTOS DE LA
DISTRIBUCIÓN NORMAL MULTIVARIADA**

$$I = \int e^{-\sum_i x_i \alpha_i} f(\vec{x}) dx$$

$$I = \int e^{-\vec{x}'\alpha} f(\vec{x}) dx$$

Como x distribuye normal,

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|\Omega|}} e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\mu)'\Omega^{-1}(\vec{x}-\mu)}$$

Con

Ω Matriz varianza covarianza de la distribución

μ Vector de esperanzas de la distribución

Si nos fijamos en los exponentes de la integral:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}(x-\mu)'\Omega^{-1}(x-\mu) - x'\alpha = -\frac{1}{2}(x'\Omega^{-1}x - 2x'\Omega^{-1}\mu + \mu'\Omega^{-1}\mu + 2x'\alpha) \\ & = -\frac{1}{2}(x'\Omega^{-1}x - 2x'\Omega^{-1}(\mu - \Omega\alpha) + \mu'\Omega^{-1}\mu) \\ & = -\frac{1}{2}(x'\Omega^{-1}x - 2x'\Omega^{-1}(\mu - \Omega\alpha) + (\mu - \Omega\alpha)'\Omega^{-1}(\mu - \Omega\alpha)) - \frac{1}{2}(\mu'\Omega^{-1}\mu - (\mu - \Omega\alpha)'\Omega^{-1}(\mu - \Omega\alpha)) \\ & = -\frac{1}{2}(x - (\mu - \Omega\alpha))'\Omega^{-1}(x - (\mu - \Omega\alpha)) - \frac{1}{2}(\mu'\Omega^{-1}\mu - (\mu - \Omega\alpha)'\Omega^{-1}(\mu - \Omega\alpha)) \end{aligned}$$

Como sólo la parte izquierda de la ecuación depende de la tasa, es la única que se integra. Además, corresponde a una distribución normal con una media modificada por la matriz covarianza, y por ende su integral es igual a 1. De esta forma:

$$I = e^{-\left(\mu' - \frac{1}{2}\alpha'\Omega\right)\alpha}$$

ANEXO B : SOLUCIÓN DEL MODELO 1.

Solución Mediante Esperanza Ajustada por Riesgo.

$$B_T = E^Q \left(e^{-\int f_{wd}(t) dt} \right) = E^Q \left(e^{-r_0 t_0 - \tilde{r}(T-t_0)} \right)$$

Donde para encontrar el valor del bono basta encontrar \tilde{r} . Por definición la tasa realizada es la compuesta de todas las innovaciones:

$$\tilde{r} = f_{hoy} + \int_0^{t_0} df(t) + \varepsilon = f_{hoy} + \eta + \varepsilon$$

Con:

$\eta \sim N(-t_0 \lambda \sigma, t_0 \sigma^2)$	Error asociado al cambio de expectativa debido a nueva información.
$\varepsilon \sim N(-\lambda_C \sigma_C, \sigma_C^2)$	El salto asociado a la realización de la tasa.

Tabla 0-1: Definición de los Riesgos del Modelo

$$B_T = E^Q \left(e^{-r_0 t_0 - \tilde{r}(T-t_0)} \right) = E^Q \left(e^{-r_0 t_0 - (f + \eta + \varepsilon)(T-t_0)} \right)$$

Y se puede encontrar la esperanza usando la función generadora de momentos de la distribución normal. El resultado es:

$$B_T = e^{-r_0 t_0 - f(T-t_0) + \frac{1}{2} \sigma_C^2 (T-t_0)^2 + \lambda_C \sigma_C (T-t_0) + \frac{1}{2} t_0 \sigma^2 (T-t_0)^2 + t_0 \lambda \sigma (T-t_0)}$$

Solución Mediante Ecuación Diferencial de Portafolio Libre de Riesgo

Usando el lema de Ito, y tomando en cuenta que el valor del bono depende sólo de la tasa esperada (para plazos mayores al momento del cambio), se tiene que:

$$dB = \frac{\partial B}{\partial t} dt + \frac{\partial B}{\partial f} df + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial f^2} (df)^2$$

Reemplazando, y encontrando su retorno instantáneo

$$\frac{dB}{B} = \frac{\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial f^2} \sigma^2}{B} dt + \frac{\partial B}{\partial f} \sigma d\varpi$$

Y si eliminamos el riesgo comprando un bono a otro plazo (también después del cambio), llegamos a la ecuación diferencial:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 B}{\partial f^2} - \lambda \sigma \frac{\partial B}{\partial f} - \frac{\partial B}{\partial T} - B \cdot r_0 = 0$$

Donde λ es el precio del mercado del riesgo y r_0 es la tasa actual. Se observa que en la medida ajustada por riesgo, el drift del proceso de entrada de información corresponde al negativo del precio de mercado del riesgo ponderado por la volatilidad (que es el proceso que fue usado cuando se encontró la solución mediante esperanzas).

La condición de borde es que si no hay riesgo de cambio de tasa esperada, el precio del bono está dado por la aproximación de probabilidades normales.

Es de notar que en este caso, cuando pasa el tiempo, sólo disminuye el período de la tasa actual, mientras que las otras tasas siguen siendo consideradas por un plazo fijo (hasta el próximo cambio de tasa). Por lo tanto, para hacer el análisis más simple, se usa:

$$T = t_0 + (T - t_0)$$

Y como $\Delta t = T - t_0$ se mantiene fijo, se reemplazará t_0 por $T - \Delta t$.

La solución de la ecuación diferencial del bono es:

$$B_T = e^{-r_0 t_0 - f(T-t_0) + \frac{1}{2} \sigma_c^2 (T-t_0)^2 + \lambda_c \sigma_c (T-t_0) + \frac{1}{2} t_0 \sigma^2 (T-t_0)^2 + t_0 \lambda \sigma (T-t_0)}$$

ANEXO C: SOLUCIÓN DEL MODELO 2.

Sin riesgo de crédito

Solución Mediante Esperanza Ajustada por Riesgo

Al igual que en el modelo univariado:

$$B_T = E^Q \left(e^{-\int f^{wd}(t) dt} \right) = E^Q \left(e^{-r_0 t_0 - \tilde{r}_1 (t_1 - t_0) - \tilde{r}_2 (t_2 - t_1) + \dots + \tilde{r}_N (T - t_{N-1})} \right) = E^Q \left(e^{-r_0 t_0 - \tilde{r}' \Delta t} \right)$$

Donde para encontrar el valor del bono basta encontrar \tilde{r}' . Es de notar que, una vez que un salto se realiza, la tasa esperada de, por ejemplo, 3 períodos, pasa a ser la esperada a 2 períodos, por lo que sigue una dinámica distinta (cambia su proceso). Así:

$$f_N = \begin{cases} f^- + \sigma_N d\varpi_N & T < t_0 \\ \vdots & \\ f^- + \sigma_1 d\varpi_1 & t_{N-1} < T < t_N \\ f^- + \varepsilon & T = t_N \\ 0 & T > t_N \end{cases}$$

$$\tilde{r}_i = f_i + \int_0^{t_i} df + \varepsilon = f_i + \sum_j \eta_j^i + \varepsilon_i$$

Donde, ajustando por riesgo

$$\eta_j^i \sim N(-\lambda_{i-j} \Delta t_j; \sigma_{i-j}^2 \Delta t_j)$$

$$\varepsilon_i \sim N(-\lambda_C \sqrt{C_{ii}}; C_{ii}^2)$$

Y por lo tanto,

$$\tilde{r}' \Delta t = f' \Delta t + \sum_i \eta_i' \Delta t + \varepsilon' \Delta t$$

Donde

$$\eta_i \sim N \left(\Delta t_i \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ -\lambda_1 \sigma_1 \\ \vdots \\ -\lambda_{N-i} \sigma_{N-i} \end{bmatrix}, \Delta t_i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_{1,N-i} \\ 0 & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_{1,N-i} & \cdots & \sigma_{N-i}^2 \end{bmatrix} \right)$$

Y se puede encontrar la esperanza usando los resultados de la función generadora de momentos. El resultado es:

$$B_T = e^{-(r_0 t_0 + f' \Delta t) + L' \Delta t + \frac{1}{2} \Delta t' C \Delta t + \frac{1}{2} \Delta t' \Theta \Delta t + M' \Delta t}$$

Con:

$$L = \begin{bmatrix} \lambda_1^c \sqrt{C_{11}} \\ \lambda_2^c \sqrt{C_{22}} \\ \vdots \\ \lambda_N^c \sqrt{C_{NN}} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{N,1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{N,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1N} & C_{2N} & \cdots & C_{NN} \end{bmatrix}$$

$$\Theta = t_0 \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \cdots & \sigma_{1,N} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N,1} & \sigma_{N,2} & \cdots & \sigma_N^2 \end{bmatrix} + \Delta t_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \sigma_{N-1,1} & \cdots & \sigma_{N-1}^2 \end{bmatrix} + \cdots + \Delta t_{N-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_1^2 \end{bmatrix}$$

$$M = t_0 \begin{bmatrix} -\lambda_1 \sigma_1 \\ -\lambda_2 \sigma_2 \\ \vdots \\ -\lambda_N \sigma_N \end{bmatrix} + \Delta t_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -\lambda_1 \sigma_1 \\ \vdots \\ -\lambda_{N-1} \sigma_{N-1} \end{bmatrix} + \cdots + \Delta t_{N-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -\lambda_1 \sigma_1 \end{bmatrix}$$

Solución Mediante Ecuaciones Diferenciales:

Para eliminar el riesgo con un portafolio sería necesario comprar $N + 1$ bonos a distintos plazos.

$$B = B(f, T)$$

Y usando el lema de Itô:

$$dB = \frac{\partial B}{\partial t} dt + \frac{\partial B}{\partial f} \cdot d\vec{f} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial f^2} : d\vec{f} \cdot d\vec{f}'$$

$$\frac{dB}{B} = \frac{\sum_i \frac{\partial B}{\partial f_i} \sigma_i dw_i}{B} - \frac{\partial B}{\partial T} dt + \frac{1}{2} \frac{\sum_{i,j} \frac{\partial^2 B}{\partial f_i \partial f_j} \sigma_{ij}}{B}$$

$$\frac{dB}{B} = \frac{\sum_{ij} \frac{\partial^2 B}{\partial f_i \partial f_j} \sigma_{ij} - \frac{\partial B}{\partial T}}{B} dt + \frac{\sum_i \frac{\partial B}{\partial f_i} \sigma_j dw_j}{B}$$

Para cualquier bono en el período relevante.

$$\frac{dB_k}{B_k} = \mu_k dt + \sum_i \sigma_{ik} dw_i$$

Donde el subíndice k denota distintos plazos.

Ahora creamos un portafolio de N bonos a distinto plazo, pero en cuyo plazo no hay salto de tasas, comprando y_k de cada uno.

$$\sum_k y_k \frac{dB_k}{B_k} = \sum_k y_k \mu_k dt + \sum_{ik} y_k \sigma_{ik} dw_i$$

Y para eliminar el riesgo queremos que:

$$\sum_{ik} y_k \sigma_{ik} = 0$$

Como no hay riesgo, le exigimos al portafolio la tasa libre de riesgo (actual):

$$\sum_k y_k \mu_k = \sum_k y_k r_0$$

Esto puede ser reescrito como:

$$\sum_k y_k (\mu_k - r_0) = 0, \text{ lo que equivale a decir que el vector de diferencia de retornos es}$$

linealmente dependiente de la matriz de varianzas. Por esto:

$$\mu - r_0 = \sum_i \lambda_i \sigma_i, \text{ , donde se eliminó el subíndice k ya que todos los k cumplen.}$$

Y por lo tanto:

$$\sum_{ij} \frac{1}{2} \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \frac{\partial^2 B}{\partial f_i \partial f_j} + \sum_i \lambda_i \sigma_i \frac{\partial B}{\partial f_i} - \frac{\partial B}{\partial T} - r_0 B = 0$$

Donde λ_i puede ser interpretado como el precio del mercado del riesgo en el período i.

La Condición de Borde es que si no hay cambios en las tasas esperadas ($d\varpi = 0$), entonces el valor del bono viene dado por la esperanza del bono (tomando en cuenta la sorpresa final).

La solución general está dada por:

$$B_T = e^{-(r_0 t_0 + f' \Delta t) + L' \Delta t + \frac{1}{2} \Delta t' C \Delta t + \frac{1}{2} \Delta t' \Theta \Delta t + M' \Delta t}$$

Es necesario tomar en cuenta, además de la condición de borde ya descrita, que si sólo hay cambios en las tasa esperada “i” ($d\varpi_{j \neq i} = 0$), entonces en el valor del bono se debiera ver reflejada sólo esta varianza en el tiempo en que existen tasas a “i” periodos.

Con riesgo de crédito constante

En el marco de Duffie & Singleton, para la valorización de activos con riesgo de default basta modificar el precio del bono de una manera simple. Si el Spread fuera constante en el tiempo, se tendría que:

$$B_T = e^{-(r_0 t_0 + f' \Delta t + sT) + L' \Delta t + \frac{1}{2} \Delta t' C \Delta t + \frac{1}{2} \Delta t' \Theta \Delta t + M' \Delta t}$$

Con riesgo de crédito variable en el tiempo

Supongamos ahora que el Spread de corto plazo sigue el siguiente proceso:

$$ds = \sigma_s d\varpi_s$$

De esta forma, el spread no es constante en el tiempo, sino que cambia como si fuera un movimiento browniano.

Podemos ahora redefinir el problema, de la siguiente forma:

$$g = \begin{bmatrix} \vec{f} \\ s \end{bmatrix}$$

Y la ecuación diferencial que encontramos para el caso en que no hay spread, sigue siendo válida (sólo hay que modificarla).

$$\sum_{ij} \frac{1}{2} \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \frac{\partial^2 B}{\partial g_i \partial g_j} + \sum_i \lambda_i \sigma_i \frac{\partial B}{\partial g_i} - \frac{\partial B}{\partial T} - (r_0 + s)B = 0$$

Lo que muestra que el proceso ajustado por riesgo tiene un drift proporcional a la varianza para todas las variables (incluyendo el spread).

Para encontrar la solución usamos la esperanza ajustada por riesgo (en el marco de Duffie & Singleton). Es decir:

$$B_T = E^Q \left(e^{-\int (fwd(t)+s(t))dt} \right)$$

$$B_T = E^Q \left(e^{-r_0 t_0 - \tilde{r}_1(t_1-t_0) - \tilde{r}_2(t_2-t_1) + \dots + \tilde{r}_N(T-t_{N-1}) - \int s dt} \right) = E^Q \left(e^{-r_0 t_0 - \tilde{r}' \Delta t - \int s dt} \right)$$

Al igual que en el modelo si default:

$$\tilde{r}_i = f_i + \int_0^{t_i} df + \varepsilon = f_i + \sum_j \eta_j^i + \varepsilon_i$$

Donde

$$\eta_j^i \sim N(-\lambda_{i-j} \Delta t_j, \sigma_{i-j}^2 \Delta t_j)$$

$$\varepsilon_i \sim N(-\lambda_c \sqrt{C_{ii}}, C_{ii}^2)$$

Y por lo tanto,

$$\tilde{r}' \Delta t + \int s(t) dt = f' \Delta t + \sum_i (\eta_i' \Delta t + S_i) + \varepsilon' \Delta t +$$

Con

$$S_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} s(u) du = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(s_0 + \int_0^u ds \right) du$$

$$S_i = s_0(t_i - t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_0^u ds du$$

$$S_i = s_0(t_i - t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} u ds(u)$$

Y hay que recordar que el cambio en el spread puede estar correlacionado con el cambio en las tasas esperadas.

Por lo tanto, hay que encontrar:

$$\eta_i' \Delta t + \int_{t_{i-1}}^{t_i} u ds(u) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[u ds(u) + \sum_j d\eta_j^i \Delta t_j \right]$$

$$\eta_i' \Delta t + \int_{t_{i-1}}^{t_i} u ds(u)$$

$$\sim N \left(-\sum_j \lambda_j \Delta t_j \sigma_j^i - \lambda_s \sigma_s \frac{(t_i^2 - t_{i-1}^2)}{2}, \sum_{j,k} \Delta t_j \Delta t_k \sigma_{j,k}^i + 2 \sum_j \Delta t_j \sigma_{j,s}^i \frac{(t_i^2 - t_{i-1}^2)}{2} + \sigma_s^2 \frac{(t_i^3 - t_{i-1}^3)}{3} \right)$$

Ingresando la ecuación anterior en la fórmula de la función generadora de momentos de una variable normal entrega que la solución analítica del bono es:

$$B_T = e^{-\left(r_0 t_0 + sT + f' \Delta t \right) + L' \Delta t + \frac{1}{2} \Delta t' C \Delta t + \left(\frac{1}{2} K + L \right)}$$

Con

$$K = \sum_{i=0}^N \Delta t_i \left(\sum_{j,k < i} \Delta t_j \Delta t_k \sigma_{jk} \right) + \sum_{i=0}^N \Delta t_i \left(\sum_{j < i} \Delta t_j (t_{i+1}^2 - t_i^2) \sigma_{js} \right) + \frac{\sigma_s^2 T^3}{3}$$

$$L = \sum_{i=0}^N \Delta t_i \left(\sum_{j=1..i} \Delta t_j \lambda_j \sigma_j \right) + \frac{T^2 \lambda_s \sigma_s}{2}$$

ANEXO D: SOLUCIÓN DEL MODELO 5

Sin riesgo de default

Suponemos ahora que

$$df_1 = \sigma_f d\varpi_f \quad ds = \sigma_s d\varpi_s$$

Nuevamente:

$$B_T = E^Q \left(e^{-\int f^{wd}(t) dt} \right) = E^Q \left(e^{-r_0 t_0 - \tilde{r}_1 (t_1 - t_0) - \tilde{r}_2 (t_2 - t_1) + \dots + \tilde{r}_N (T - t_{N-1})} \right) = E^Q \left(e^{-r_0 t_0 - \tilde{r}' \Delta t} \right)$$

Donde para encontrar el valor del bono basta encontrar \tilde{r} . Es de notar que, una vez que un salto se realiza, la tasa esperada de, por ejemplo, 3 períodos, pasa a ser la esperada a 2 períodos, por lo que sigue una dinámica distinta (cambia su proceso). Así:

$$f_N = \begin{cases} f_N^- + \sigma_1 (1 + \gamma_N) d\varpi & T < t_0 \\ \vdots & \\ f_N^- + \sigma_1 (1 + \gamma_1) d\varpi & t_{N-1} < T < t_N \\ f_N^- + \varepsilon & T = t_N \\ 0 & T > t_N \end{cases}$$

$$\tilde{r}_i = f_N^- + \int_0^{t_i} df + \varepsilon = f_N^- + [\sigma(1 + \gamma_N)\eta_1 + \sigma(1 + \gamma_{N-1})\eta_2 + \dots + \sigma(1 + \gamma_1)\eta_N] + \varepsilon_i$$

Donde

$$\eta_i \sim N(-\lambda \Delta t_i, \sigma^2 \Delta t_i)$$

$$\varepsilon_i \sim N(-\lambda_C \sqrt{C_{ii}}, C_{ii}^2)$$

Y por lo tanto,

$$\tilde{r}' \Delta t = f' \Delta t + \sum_i \eta_i \sigma (1 + \tilde{\gamma}_i)' \Delta t + \varepsilon' \Delta t$$

Donde $\tilde{\gamma}_i$ es el vector que contiene “i-1” ceros al principio y después siguen los términos asociados al primer gamma, al segundo, y así sucesivamente.

Se puede encontrar la esperanza de la forma mencionada al igual que en el Modelo 2. Basta tomar correlaciones iguales a 1 entre tasas y varianzas asociadas a los gammas ya mencionados. El resultado es:

$$B_T = e^{-\left(r_0 t_0 + (f_1 \cdot \bar{1} + (f_1 - r_0) \bar{\gamma}) \Delta t + sT\right) + L' \Delta t + \frac{1}{2} \Delta t' C \Delta t + \frac{1}{2} \Delta t' W \Delta t + R' \Delta t}$$

Con:

$$W = t_0 \sigma^2 (1 + \bar{\gamma}_0)(1 + \bar{\gamma}_0)' + \Delta t_1 \sigma^2 (1 + \bar{\gamma}_1)(1 + \bar{\gamma}_1)' + \dots + \Delta t_{N-1} \sigma^2 (1 + \bar{\gamma}_{N-1})(1 + \bar{\gamma}_{N-1})'$$

$$R = t_0 \begin{bmatrix} -\lambda_1 \sigma (1 + \gamma_1) \\ -\lambda_2 \sigma (1 + \gamma_2) \\ \vdots \\ -\lambda_N \sigma (1 + \gamma_{N-1}) \end{bmatrix} + \Delta t_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -\lambda_1 \sigma (1 + \gamma_1) \\ \vdots \\ -\lambda_{N-1} \sigma (1 + \gamma_{N-2}) \end{bmatrix} + \dots + \Delta t_{N-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -\lambda_1 \sigma (1 + \gamma_1) \end{bmatrix}$$

Con riesgo de default variable

Como el modelo presentado de estructura fija cumple con los supuestos del modelo general con riesgo de default variable, basta con reemplazar las varianzas y esperanzas que se siguen de la estructura fija. El resultado es:

$$B_T = e^{-\left(r_0 t_0 + sT + (f_1 \cdot \bar{1} + (f_1 - r_0) \bar{\gamma}) \Delta t\right) + L' \Delta t + \frac{1}{2} \Delta t' C \Delta t + \frac{1}{2} W + R}$$

Con

$$W = \sum_{i=0}^N \Delta t_i \left(\sum_{j,k < i} \Delta t_{i-j} \Delta t_{i-k} \sigma_f^2 (1 + \gamma_j)(1 + \gamma_k) \right) + \sum_{i=0}^N \Delta t_i \left(\sum_{j < i} \Delta t_j (t_{i+1}^2 - t_i^2) \sigma_{fs} (1 + \gamma_j) \right) + \frac{\sigma_s^2 T^3}{3}$$

$$R = \sum_{i=0}^N \Delta t_i \left(\sum_{j=1..i} \Delta t_j \lambda_j \sigma_f (1 + \gamma_j) \right) + \frac{T^2 \lambda_s \sigma_s}{2}$$

ANEXO E : MATRIZ DE INFORMACIÓN DE FISHER:

Se muestra a continuación la matriz de información de Fisher estimada para calcular la significancia de los parámetros.

	varrlargo	varr cero	Lc1	cova1	lambda1	sigmaX	sigmaB1	sigmaB2	sigmaB3	sigmaB4
varrlargo	5,3E-14	-4,3E-15	1,3E-10	-1,4E-16	2,1E-11	3,3E-13	3,4E-13	3,7E-13	3,8E-13	3,1E-13
varr cero	-4,3E-15	2,9E-13	3,1E-10	-1,2E-16	5,3E-11	8,5E-13	9,1E-13	9,9E-13	1,0E-12	8,8E-13
Lc1	1,3E-10	3,1E-10	3,7E-04	4,3E-12	-1,8E-06	-2,3E-08	-2,1E-08	-2,9E-08	-2,9E-08	-2,6E-08
cova1	-1,4E-16	-1,2E-16	4,3E-12	2,5E-14	-3,9E-12	9,7E-14	1,9E-13	1,9E-13	1,9E-13	2,0E-13
lambda1	2,1E-11	5,3E-11	-1,8E-06	-3,9E-12	1,0E-05	-1,8E-09	-2,9E-09	-2,5E-09	-2,8E-09	-1,7E-09
sigmaX	3,3E-13	8,5E-13	-2,3E-08	9,7E-14	-1,8E-09	3,1E-09	-1,7E-11	5,4E-12	7,2E-12	-6,6E-12
sigmaB1	3,4E-13	9,1E-13	-2,1E-08	1,9E-13	-2,9E-09	-1,7E-11	6,6E-09	1,7E-10	1,6E-10	2,0E-10
sigmaB2	3,7E-13	9,9E-13	-2,9E-08	1,9E-13	-2,5E-09	5,4E-12	1,7E-10	8,2E-09	1,8E-10	2,3E-10
sigmaB3	3,8E-13	1,0E-12	-2,9E-08	1,9E-13	-2,8E-09	7,2E-12	1,6E-10	1,8E-10	7,9E-09	2,1E-10
sigmaB4	3,1E-13	8,8E-13	-2,6E-08	2,0E-13	-1,7E-09	-6,6E-12	2,0E-10	2,3E-10	2,1E-10	7,3E-09
rhobanco1	-4,3E-12	-9,8E-12	3,0E-07	2,0E-13	5,7E-08	9,2E-10	1,0E-09	1,2E-09	1,2E-09	1,2E-09
rhobanco2	-4,7E-12	-1,1E-11	3,3E-07	3,2E-13	6,4E-08	1,1E-09	1,1E-09	1,2E-09	1,3E-09	1,2E-09
rhobanco3	-4,8E-12	-1,1E-11	3,3E-07	2,9E-13	6,5E-08	1,1E-09	1,1E-09	1,2E-09	1,2E-09	1,1E-09
rhobanco4	-4,7E-12	-1,1E-11	3,3E-07	2,6E-13	6,3E-08	1,0E-09	1,2E-09	1,3E-09	1,3E-09	1,2E-09
rhob1b2	4,7E-12	1,1E-11	-3,2E-07	-2,6E-13	-6,3E-08	-1,0E-09	-1,1E-09	-1,2E-09	-1,3E-09	-1,3E-09
rhob1b3	7,3E-12	1,5E-11	-4,2E-07	-3,7E-12	-1,4E-07	-2,5E-09	-3,6E-09	-4,1E-09	-4,0E-09	-4,3E-09
rhob1b4	9,5E-12	1,9E-11	-5,4E-07	-5,1E-12	-1,9E-07	-3,4E-09	-5,2E-09	-6,1E-09	-5,9E-09	-6,8E-09
rhob2b3	3,1E-12	2,1E-12	-5,8E-08	-6,4E-12	-1,1E-07	-2,4E-09	-5,5E-09	-6,6E-09	-6,4E-09	-7,3E-09
rhob2b4	3,0E-12	2,1E-12	-5,7E-08	-6,3E-12	-1,1E-07	-2,4E-09	-5,4E-09	-6,4E-09	-6,2E-09	-7,2E-09
rhob3b4	2,8E-12	2,0E-12	-5,4E-08	-5,9E-12	-1,0E-07	-2,2E-09	-5,1E-09	-6,0E-09	-5,9E-09	-6,8E-09
beta2	4,2E-11	4,1E-11	-5,3E-06	-1,0E-10	-3,3E-06	-5,3E-08	-2,8E-09	1,6E-08	2,3E-08	2,3E-08
beta3	6,8E-10	1,0E-09	-2,5E-05	-9,0E-10	-2,1E-05	-4,0E-07	-6,5E-07	-7,4E-07	-7,2E-07	-8,2E-07

Tabla 0-1: Matriz de Información de Fisher, parte I

	rhobanco1	rhobanco2	rhobanco3	rhobanco4	rhob1b2	rhob1b3	rhob1b4	rhob2b3	rhob2b4	rhob3b4	beta2	beta3
varrlargo	-4,3E-12	-4,7E-12	-4,8E-12	-4,7E-12	4,7E-12	7,3E-12	9,5E-12	3,1E-12	3,0E-12	2,8E-12	4,2E-11	6,8E-10
varr cero	-9,8E-12	-1,1E-11	-1,1E-11	-1,1E-11	1,1E-11	1,5E-11	1,9E-11	2,1E-12	2,1E-12	2,0E-12	4,1E-11	1,0E-09
Lc1	3,0E-07	3,3E-07	3,3E-07	3,3E-07	-3,2E-07	-4,2E-07	-5,4E-07	-5,8E-08	-5,7E-08	-5,4E-08	-5,3E-06	-2,5E-05
cova1	2,0E-13	3,2E-13	2,9E-13	2,6E-13	-2,6E-13	-3,7E-12	-5,1E-12	-6,4E-12	-6,3E-12	-5,9E-12	-1,0E-10	-9,0E-10
lambda1	5,7E-08	6,4E-08	6,5E-08	6,3E-08	-6,3E-08	-1,4E-07	-1,9E-07	-1,1E-07	-1,1E-07	-1,0E-07	-3,3E-06	-2,1E-05
sigmaX	9,2E-10	1,1E-09	1,1E-09	1,0E-09	-1,0E-09	-2,5E-09	-3,4E-09	-2,4E-09	-2,4E-09	-2,2E-09	-5,3E-08	-4,0E-07
sigmaB1	1,0E-09	1,1E-09	1,1E-09	1,2E-09	-1,1E-09	-3,6E-09	-5,2E-09	-5,5E-09	-5,4E-09	-5,1E-09	-2,8E-09	-6,5E-07
sigmaB2	1,2E-09	1,2E-09	1,2E-09	1,3E-09	-1,2E-09	-4,1E-09	-6,1E-09	-6,6E-09	-6,4E-09	-6,0E-09	1,6E-08	-7,4E-07
sigmaB3	1,2E-09	1,3E-09	1,2E-09	1,3E-09	-1,3E-09	-4,0E-09	-5,9E-09	-6,4E-09	-6,2E-09	-5,9E-09	2,3E-08	-7,2E-07
sigmaB4	1,2E-09	1,2E-09	1,1E-09	1,2E-09	-1,3E-09	-4,3E-09	-6,8E-09	-7,3E-09	-7,2E-09	-6,8E-09	2,3E-08	-8,2E-07
rhobanco1	2,0E-07	-8,1E-09	-8,1E-09	-8,1E-09	8,0E-09	4,8E-09	-1,1E-08	-8,7E-09	-8,6E-09	-8,0E-09	-3,0E-08	-8,6E-07
rhobanco2	-8,1E-09	2,5E-07	-9,2E-09	-9,0E-09	9,0E-09	5,2E-09	-1,3E-08	-1,0E-08	-1,0E-08	-9,4E-09	-5,3E-08	-1,0E-06
rhobanco3	-8,1E-09	-9,2E-09	2,6E-07	-9,2E-09	9,1E-09	5,3E-09	-1,3E-08	-1,1E-08	-1,0E-08	-9,8E-09	-6,1E-08	-1,0E-06
rhobanco4	-8,1E-09	-9,0E-09	-9,2E-09	2,4E-07	8,9E-09	5,2E-09	-1,2E-08	-1,0E-08	-9,8E-09	-9,3E-09	-4,8E-08	-9,9E-07
rhob1b2	8,0E-09	9,0E-09	9,1E-09	8,9E-09	2,4E-07	-5,2E-09	1,2E-08	9,8E-09	9,6E-09	9,0E-09	4,9E-08	9,6E-07
rhob1b3	4,8E-09	5,2E-09	5,3E-09	5,2E-09	-5,2E-09	3,2E-07	1,1E-07	1,1E-07	1,0E-07	9,7E-08	6,7E-07	1,9E-05
rhob1b4	-1,1E-08	-1,3E-08	-1,3E-08	-1,2E-08	1,2E-08	1,1E-07	3,7E-07	1,6E-07	1,6E-07	1,5E-07	8,5E-07	2,5E-05
rhob2b3	-8,7E-09	-1,0E-08	-1,1E-08	-1,0E-08	9,8E-09	1,1E-07	1,6E-07	3,9E-07	1,6E-07	1,5E-07	8,2E-07	2,5E-05
rhob2b4	-8,6E-09	-1,0E-08	-1,0E-08	-9,8E-09	9,6E-09	1,0E-07	1,6E-07	1,6E-07	3,7E-07	1,5E-07	8,1E-07	2,5E-05
rhob3b4	-8,0E-09	-9,4E-09	-9,8E-09	-9,3E-09	9,0E-09	9,7E-08	1,5E-07	1,5E-07	1,5E-07	3,3E-07	7,5E-07	2,3E-05
beta2	-3,0E-08	-5,3E-08	-6,1E-08	-4,8E-08	4,9E-08	6,7E-07	8,5E-07	8,2E-07	8,1E-07	7,5E-07	5,2E-04	1,6E-04
beta3	-8,6E-07	-1,0E-06	-1,0E-06	-9,9E-07	9,6E-07	1,9E-05	2,5E-05	2,5E-05	2,5E-05	2,3E-05	1,6E-04	4,8E-03

Tabla 0-2: Matriz de Información de Fisher, parte II

ANEXO F : VEROSIMILITUD TOTAL DEL MODELO

La verosimilitud total del modelo se define como:

$$L(\psi) = \Pr(f_{1,1} = a_{1,1}, f_{2,1} = a_{2,1}, \dots, r_1 = b_1, f_{1,2} = a_{1,2}, f_{2,2} = a_{2,2}, \dots, r_2 = b_2, \dots / \Omega_0)$$

Con

$f_{i,j}$ = tasa esperada en el día i después del cambio de tasa j .

r_j = tasa realizada en j períodos más.

Ω_0 = información en el momento de la estimación.

Por independencia,

$$L(\psi) = \Pr(f_{1,1} = a_{1,1} / \Omega_0) \Pr(f_{2,1} = a_{2,1} / f_{1,1} = a_{1,1}) \cdot \dots \cdot \Pr(r_1 = b_1 / \Omega_0, f_{N,1} = a_{N,1}) \cdot$$

$$\Pr(f_{1,2} = a_{1,2} / r_1 = b_1) \Pr(f_{2,2} = a_{2,2} / f_{1,2} = a_{1,2}) \cdot \dots \cdot \Pr(r_2 = b_2 / \Omega_0, r_1 = b_1, f_{N,2} = a_{N,2}) \cdot \dots \cdot$$

$$\Pr(f_{1,M} = a_{1,M} / r_{M-1} = b_{M-1}) \Pr(f_{2,M} = a_{2,M} / f_{1,M} = a_{1,M}) \cdot \dots \cdot \Pr(r_{M+1} = b_{M+1} / \Omega_0, r_1 = b_1, \dots, r_M = b_M, f_{N,M} = a_{N,M})$$

Tomando el Logaritmo y reordenando se encuentra que:

$$\begin{aligned} \log L(\psi) &= \sum_j \log \Pr(f_{1,j} = a_{1,j} / r_{j-1} = b_{j-1}) + \log \Pr(f_{i,j} = a_{i,j} / f_{i-1,j} = a_{i-1,j}) \\ &\quad + \sum_j \log \Pr(r_{j+1} = b_{j+1} / \Omega_j) \end{aligned}$$

Con Ω_j = información hasta el momento j .

Lo que equivale a decir que la verosimilitud total del modelo se puede descomponer en la verosimilitud del filtro de Kalman (primeros dos términos) y la verosimilitud asociada a expectativas racionales.

ANEXO G: MODELO DE HEIDARI Y WU: POR QUÉ NO CUMPLE LA HIPÓTESIS DE EXPECTATIVAS

Heidari y Wu proponen el siguiente modelo:

$$r_t = a_r + b_r^T X_t$$

Donde a_r es un escalar y b_r^T es un vector.

Suponen que existen tres variables de estado, y que el salto afecta sólo a la tercera variable, que llaman “expectativa de tasa”.

La dinámica ajustada por riesgo de las variables de estado, X es:

$$dX_t = (-b_\gamma - k^* X_t)dt + dW_t^* \quad \text{si no hay salto}$$

$$X_{\tau+dt}^3 = X_{\tau+dt}^3 + a_j \quad \text{cuando hay salto (t= } \tau \text{)}$$

Donde a_j es el salto asociado al momento τ .

De esta forma, y suponiendo que el salto tiene una distribución normal ajustada por riesgo, con media \bar{a}_j y varianza σ_j^2 se llega a que:

$$P(Z, t) = \exp(-c(t) - d(t)^T Z_t)$$

Con:

$$Z_t = [X_t^T; a_j]$$

$$c(t) = a(t) - \frac{1}{2} b(t - \tau)_3^2 \sigma_j^2$$

$$d(t)_{1,3} = b(t)$$

$$d(t)_4 = b(t - \tau)_3$$

Donde, para cumplir la condición de no arbitraje se debe cumplir que:

$$a'(t) = a_r - b(t)^T b_\gamma - \frac{1}{2} b(t)^T b(t)$$

$$b'(t)_4 = b_r - k^{*T} b(t)$$

Los autores no hablan sólo de la posibilidad de que los factores sufran un salto, sino que muestran y comparan este salto con el cambio de tasa del Banco Central. Esto indica que una transformación del salto es tratada como la expectativa de la próxima tasa. Para hacer esto notorio, es mejor citar parte del texto:

“To illustrate the impact of an anticipated jump, we propose an anticipated short rate hike (positive jump) by 100 basis points three months later. The impact of an anticipated jump on the mean short rate is given by $b_3 a_j$. Given the estimate for $b_3 = 0.0054$, a 100-basis-point anticipated short-rate jump implies an anticipated jump on the third factor by $a_j = 1.853$.”

Es evidente que fijando el salto en la media (varianza del salto nula), la expresión del precio del bono (con madurez mayor al momento del salto) se convierte en una muy distinta a la que se tendría si se hubiera supuesto la hipótesis de expectativas, que sería:

$$P(Z, t)_{HE} = \exp(-c(t) - d(t)^T Z_t)$$

Con:

$$Z_t = [X_t^T; \bar{a}_j]$$

$$c(t) = r_0 \tau$$

$$d(t)_{1:3} = 0$$

$$d(t)_4 = \max[(t - \tau); 0]$$

Con r_0 la tasa actual.

Esto se debe a que $a(t)$ y $b(t)$ son variables en el tiempo.

Lo que es equivalente a argumentar que en realidad la variable de estado con salto que suponen Heidari y Wu no puede ser interpretada como una expectativa.