



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

**MODELO MULTICOMMODITY CON
VOLATILIDAD ESTOCÁSTICA -
ESTIMACIÓN EN AUSENCIA DE
PRECIOS DE OPCIONES**

FEDERICO ANTONIO ALONSO SOTO-LUQUE

Tesis para optar al grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Profesor Supervisor:
GONZALO CORTÁZAR S.

Santiago de Chile, Marzo, 2012



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

MODELO MULTICOMMODITY CON VOLATILIDAD ESTOCÁSTICA - ESTIMACIÓN EN AUSENCIA DE PRECIOS DE OPCIONES

FEDERICO ANTONIO ALONSO SOTO-LUQUE

Tesis presentada a la Comisión integrada por los profesores:

GONZALO CORTÁZAR

PEDRO GAZMURI

AUGUSTO CASTILLO

ALFREDO SERPELL

Para completar las exigencias del grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Santiago de Chile, Marzo, 2012

A mis Padres, hermanos, amigos y
seres queridos

AGRADECIMIENTOS

En primera instancia me gustaría dar las gracias al profesor Gonzalo Cortázar, por el tiempo, dedicación, preocupación, comentarios y constante apoyo durante todo el transcurso de esta tesis. Su orientación fue fundamental en este trabajo.

A su vez, agradezco a todos mis compañeros de FinlabUC, por su constante disposición a la discusión constructiva, aportes y consejos, los cuales fueron de gran ayuda en esta tesis. Un reconocimiento especial para Rodrigo Érices, Rodrigo Lártiga y Christian Soto, por su ayuda y disposición.

Se agradece el apoyo financiero recibido por parte de FONDECYT (proyecto #1100597)

Finalmente, agradezco a mi familia, amigos y seres queridos, por su constante compañía, apoyo y ayuda incondicional.

INDICE GENERAL

	Pág.
DEDICATORIA.....	i
AGRADECIMIENTOS	ii
INDICE DE TABLAS	v
INDICE DE FIGURAS	vi
RESUMEN	ix
ABSTRACT	x
1. INTRODUCCIÓN	1
2. MODELACION DE ACTIVOS	6
2.1 Futuros y tasas de interés.....	6
2.1.1 Schwartz 97	7
2.1.2 Cortázar & Naranjo 2006	11
2.1.3 Duffie & Kan 96.....	13
2.1.4 Dai & Singleton 2000.....	15
2.2 Opciones	17
2.2.1 Black & Scholes 73	18
2.2.2 Heston 93.....	19
2.2.3 Richter & Sorensen 2002	23
3. Metodología de Calibración.....	27
3.1 El filtro de Kalman	27
3.2 El filtro de Kalman extendido.....	31
4. ESTUDIO DATOS DE MERCADO.	34
4.1 Futuros	34
4.2 Opciones	37
4.3 Volatilidades implícitas en los precios de opciones	40

5. EL MODELO	47
5.1 El modelo base para un commodity.....	47
5.2 Precios de futuros	48
5.3 Precios de opciones.....	49
5.4 Extensión a Multicommodity	54
6. Modelos y Resultados.	56
6.1 Datos utilizados	56
6.2 Modelos implementados.....	58
6.3 Resultados	63
6.3.1 Parámetros obtenidos	63
6.3.2 Ajuste a los precios Futuros	65
6.3.2 Ajuste a los precios de Opciones.....	69
7. Conclusiones.	88
BIBLIOGRAFÍA.....	90
ANEXOS.....	92
Anexo A. Técnicas estándar de valorización de derivados	93
Anexo B. Forma de la función $C(T)$, Schwartz 97 modelo 3.	96
Anexo C. Momentos Condicionales	97
Anexo D. Deducción ecuaciones diferenciales para las funciones que definen los precios futuros.....	98
Anexo E. Forma funcional de Svensson 94 y Nelson & Siegel 87	99
Anexo F. Derivadas parciales de la fórmula de Black 76.....	99
Anexo G. Deducción de las ecuaciones diferenciales de las funciones que definen la función característica.....	100
Anexo H. Aspectos Numéricos.....	102

INDICE DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1. Características numéricas de los contratos futuros estudiados	37
Tabla 2. Datos de opciones	40
Tabla 3. Correlaciones de Volatilidad Implícita Instantánea	44
Tabla 4. Volatilidades de Largo Plazo	44
Tabla 5. Media del Half-life de las Volatilidades Implícitas	45
Tabla 6. Desviación Estándar de la Volatilidad Implícita Instantánea	46
Tabla 7. Descripción de datos utilizados para los paneles de estudio	58
Tabla 8. Modelos implementados y sus principales características.	63
Tabla 9. Parámetros Obtenidos	64
Tabla 10. MAE precios futuros – Todos los modelos, distintos plazos.	69
Tabla 11. Errores de Ajuste para Modelos Implementados (MAE).....	86

INDICE DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Disponibilidad de contratos Futuros	34
Figura 2. Serie de tiempo de los petróleos WTI y Brent.....	35
Figura 3. Gráficos de plazos máximos disponibles para los futuros de WTI y Brent.	36
Figura 4. Cantidad de contratos disponibles de futuros para los petróleos WTI y Brent.....	36
Figura 5. Disponibilidad de Opciones por cantidad de contratos. Izquierda: WTI, derecha: Brent.....	39
Figura 7. Open Interest – WTI y Brent. Izquierda: WTI, derecha: Brent	40
Figura 8. Volatilidades implícitas de opciones ATM	41
Figura 9. Estructura de Volatilidades en el Plazo	45
Figura 10. Paneles de datos utilizados para los futuros y opciones.	57
Figura 11. Futuros de WTI y Brent, ajuste de modelos - 29/06/2009.....	66
Figura 12. Futuros de WTI y Brent, ajuste de modelos – 14/06/2010	67
Figura 13. Futuros de WTI y Brent, ajuste de modelos – 30/11/2010	68
Figura 14 - Volatilidades implícitas corto plazo – Volatilidades de corto plazo correspondientes a los precios de mercado y a las obtenidas utilizando el modelo “WTI simple”	71
Figura 15. Volatilidades implícitas mediano plazo – Volatilidades de mediano plazo correspondientes a los precios de mercado y a las obtenidas utilizando el modelo “WTI simple”	72
Figura 16. Volatilidades implícitas largo plazo – Volatilidades de largo plazo correspondientes a los precios de mercado y a las obtenidas utilizando el modelo “WTI simple”	73
Figura 17. MAE de volatilidades implícitas – Diferencias entre las volatilidades de mercado y las del modelo “WTI simple” para distintas madureces de opciones....	74

Figura 18 Volatilidades implícitas corto plazo – Volatilidades de corto plazo correspondientes a los precios de mercado y a las obtenidas utilizando el modelo “Brent no-Multi”	75
Figura 19. Volatilidades implícitas mediano plazo – Volatilidades de mediano plazo correspondientes a los precios de mercado y a las obtenidas utilizando el modelo “Brent no-Multi”	76
Figura 20. Volatilidades implícitas largo plazo – Volatilidades de largo plazo correspondientes a los precios de mercado y a las obtenidas utilizando el modelo “Brent no-Multi”	77
Figura 21. MAE de volatilidades implícitas – Diferencias entre las volatilidades de mercado y las del modelo “Brent no-Multi” para distintas madureces de opciones.....	78
Figura 22. Volatilidades implícitas corto plazo – Volatilidades de corto plazo correspondientes a los precios de mercado y a las obtenidas utilizando el modelo “WTI completo”.....	79
Figura 23. Volatilidades implícitas de mediano plazo – Volatilidades de mediano plazo correspondientes a los precios de mercado y a las obtenidas utilizando el modelo “WTI completo”	80
Figura 24. Volatilidades de largo plazo – Volatilidades de largo plazo correspondientes a los precios de mercado y a las obtenidas utilizando el modelo “WTI completo”.....	81
Figura 25. MAE de volatilidades implícitas – Diferencias entre las volatilidades de mercado y las del modelo “WTI completo” para distintas madureces de opciones.....	82
Figura 26. Volatilidades implícitas corto plazo – Volatilidades de corto plazo correspondientes a los precios de mercado y a las obtenidas utilizando el modelo “Brent Multi”	83

Figura 27. Volatilidades implícitas mediano plazo – Volatilidades de mediano plazo correspondientes a los precios de mercado y a las obtenidas utilizando el modelo “Brent Multi”	83
Figura 28. Volatilidades implícitas largo plazo – Volatilidades de largo plazo correspondientes a los precios de mercado y a las obtenidas utilizando el modelo “Brent Multi”	84
Figura 29. MAE volatilidades implícitas – Diferencias entre las volatilidades de mercado y las del modelo “Brent Multi” para distintas madureces de opciones	85

RESUMEN

El objetivo de esta investigación es proponer y estimar un modelo dinámico con volatilidad estocástica que explique de forma satisfactoria el comportamiento de los precios de *commodities* que carecen de datos para efectos de calibración, en particular cuando no se dispone de precios de opciones, lo que dificulta la obtención de dinámicas realistas para la volatilidad del *commodity* en estudio.

Para abordar el problema, se utiliza un enfoque Multicommodity, similar al de Cortázar & Eterovic 2011, en donde se asume que ciertos factores que explican el proceso de los precios de diferentes *commodities*, pueden ser modelados con dinámicas equivalentes. El modelo propuesto es implementado para el petróleo WTI, con muchos datos disponibles, y petróleo Brent, con pocos datos disponibles, asumiendo que el factor común entre ambos es la volatilidad. Con este modelo se obtienen precios de opciones de largo plazo, para el segundo, que se ajustan a los escasos precios disponibles para éste.

El modelo propuesto es de tres factores de riesgo asume retornos, volatilidad y *cost of carry* estocásticos. La calibración se lleva a cabo mediante el filtro de Kalman extendido, usando tanto precios de futuros como de opciones para ambos *commodities*.

Palabras Claves: Volatilidad estocástica, Multicommodty, valorización de opciones, falta de datos, commodities, filtro de Kalman extendido.

ABSTRACT

The goal of this research is to propose and estimate a dynamic model to explain the stochastic behavior of commodity prices that lack data for calibration purposes, in particular when there are no option prices, making it difficult to obtain realistic dynamics for the volatility of the commodity under study.

To address the problem, a Multicommodity approach is implemented, similar to that of Cortazar & Eterovic 2011, where it is assumed that certain factors that explain the price processes of different commodities, can be modeled with equivalent dynamics. The proposed model is implemented for WTI oil, with many data available, and Brent, with limited data available, assuming that the common factor between them is the volatility, obtaining prices for long term options that match the few data available for the second commodity.

The proposed setting is a three risk factors model, which assumes that the returns, volatility and the cost of carry are stochastic. Calibration is carried out with the extended Kalman filter, using futures and options prices for both commodities.

Keywords: Stochastic volatility, Multicommodity, option valuation, lack of data, commodities, extended Kalman filter

1. INTRODUCCIÓN

En el contexto de la valorización de activos, sean financieros o proyectos reales, se requieren modelos que sean capaces de estimar los flujos futuros que generarán éstos, con el fin de traerlos a valor presente y así obtener su valor.

La forma general y más básica de valorización, es estimar los flujos futuros utilizando ciertos supuestos sobre los factores de mercado que inciden en ellos y, dependiendo del riesgo asociado al proyecto, se determina la tasa de retorno que se le exigirá a éste. Otra forma, más sofisticada, es usar los activos financieros que se transan en el mercado y que logran despejar las incertidumbres generadas por los supuestos del caso anterior, permitiendo utilizar la tasa libre de riesgo para descontar los flujos. Así es posible, por ejemplo, usar precios de futuros de cobre como estimador del precio esperado de este *commodity* y con ello valorizar un yacimiento de este mineral. La diferencia radica en que, como en este caso los flujos están fijos de antemano, no se requiere exigirles un premio por riesgo. Por otra parte, cuando se nos presentan activos con flexibilidades¹, las dos primeras metodologías son ineficientes a la hora de valorizarlos. En este caso, se requieren modelos más complejos y avanzados, llegando incluso a la necesidad de utilizar “Simulación de Montecarlo”, la cual consiste en simular una gran cantidad de trayectorias del precio, obtener los flujos al final de cada simulación, asumir que cada una de ellas es equiprobable y traer esos flujos a valor presente.

Las trayectorias requieren de un modelo que sea capaz de describir en forma fidedigna la dinámica del activo en estudio, lo cual repercute en la necesidad calibrar un modelo. Para ello, deben existir datos de mercado que permitan realizar tal proceso, siendo los precios de futuros los más usados para estos fines.

¹ La flexibilidad en la estructura de los flujos se refiere a que éstos dependen de decisiones que serán tomadas en el futuro.

Una variable muy importante para efectos de valorización y calibración es la volatilidad, la cual se relaciona con el grado de incertidumbre con el cual un precio puede moverse en cualquier sentido. Ella tiene un peso predominante cuando se estudian proyectos o activos que poseen flexibilidades contractuales en sus flujos.

Por ejemplo, un activo financiero con pagos contingentes a ocurrencias futuras es la “opción”, en particular una opción de compra *Call*. La flexibilidad de ésta radica en que otorga, al que la compra, el derecho y no la obligación de comprar en una fecha futura un activo a un precio pre acordado (precio de ejercicio). Por ende, el pago futuro está indeterminado hasta el vencimiento del contrato. Así, la volatilidad es fundamental para este tipo de activos, ya que el hecho de que exista una gran incertidumbre agrega valor a la opción, debido a que si el precio del activo baja, el poseedor de la opción no pierde dinero ya que no ejercería su opción, en cambio si el precio sube, él sí la ejercerá y comprará a un precio más barato que el de mercado. Esa estructura convexa de los pagos finales hace que la volatilidad aporte valor, a diferencia de los contratos futuros donde grandes movimientos esperados del activo no marcan la diferencia en el pago esperado de éste.

Las opciones se transan y existen diversos métodos para valorizarlas, siendo el primero y más simple de todos, el modelo de Black & Scholes ⁷³. Éste, a partir de datos de mercado como el precio futuro del activo, la madurez de la opción, el precio de ejercicio y la volatilidad, entrega un valor para la opción. En general, todos los inputs del modelo son conocidos exceptuando la volatilidad, pero dado que las opciones se transan y se tienen precios de mercado para ellas, es posible obtener la volatilidad que hace que el precio estimado por el modelo sea igual al que se transa en el mercado. A esa volatilidad se le llama “Volatilidad Implícita”. Ahora, el modelo original supone que la volatilidad es constante, pero si se estudian datos históricos para cualquier activo, se encuentran volatilidades implícitas que varían en gran medida a lo largo del tiempo. Esta evidencia empírica lleva a la noción intuitiva de que la volatilidad no es constante y por ende está

continuamente en movimiento. Lo anterior lleva a la necesidad de suponer que la volatilidad es estocástica, teniendo que agregar al modelo de valorización tal efecto.

Tomando en cuenta que las opciones son los instrumentos más sensibles a la volatilidad, es necesario incluirlas al proceso de calibración del modelo para obtener una dinámica realista del activo en estudio.

Dado que la necesidad de datos es fundamental para el proceso de calibración, es importante analizar si el mercado en estudio posee la suficiente liquidez y un gran rango de madureces disponibles. Nos referimos a liquidez en cuanto a la cantidad de contratos distintos disponibles y montos transados, y a madurez en relación al plazo restante para que el contrato venza. La primera característica hace creíbles a los precios observados y la segunda entrega información en cuanto a la dinámica de largo plazo del activo en estudio. Si en los datos disponibles no se encuentran ambas características, entonces el proceso de calibración se hace menos robusto y el modelo no sería capaz de valorizar proyectos o activos que contemplen plazos elevados.

Un caso particular es el del petróleo WTI, que es uno de los commodities más líquidos del mundo, el que posee futuros con madureces que varían entre un mes y los nueve años, con altísimos montos transados. A su vez, en este mercado se transan opciones, tanto de compra como de venta para distintos precios de ejercicio, y se dispone de transacciones de contratos con madurez desde un día hasta los cinco años. Otro caso es el petróleo Brent, un mercado menos profundo que el WTI, que en los últimos años ha igualado al WTI en los futuros, en cuanto a plazos disponibles. Pero, si bien posee precios de opciones, éstas tienen montos transados mucho menores, con menor número de precios de ejercicio disponible y con una madurez que no supera los dos años en promedio. A la fecha, se tienen opciones de mayor plazo pero con montos transados muy bajos y una cantidad de precios de ejercicio reducida.

Considerando que existe una carencia de datos de opciones para el petróleo Brent, pero dado que ambos petróleos mencionados debiesen comportarse de forma similar, en cuanto a la dinámica que siguen sus precios, es sensato cuestionarse si sería posible usar la información disponible del petróleo WTI en el proceso de calibración del modelo asociado al petróleo Brent. Lo que se propone en esta tesis, es que la relación entre ambos commodities existe, y dada la ausencia de datos de opciones del petróleo Brent, se utiliza la información del petróleo con mayor cantidad de datos para estimar de mejor manera la estructura de la volatilidad del segundo, lo cual se implementa en un modelo Multicommodity con volatilidad estocástica.

Al hecho de aprovechar la información disponible de un *commodity* en otro, se le llama modelación conjunta o Multicommodity. Existen trabajos que han realizado supuestos similares, como Cortázar, Milla & Severino 2008 quienes extrapolan la curva de futuros del petróleo Brent usando la información del petróleo WTI. La solución fue propuesta por estos autores, en evidencia de que el petróleo Brent, para la fecha del estudio, presentaba madureces menores para sus contratos de futuros. En un trabajo posterior, Cortázar & Eterovic 2011, siguen la misma línea de estudio, logrando extrapolar precios de futuros para otros *commodities*, como el Cobre y la Plata. Ellos calibran la dinámica del petróleo WTI y utilizan los parámetros relacionados con los precios de futuros de largo plazo, para insertarlos en la dinámica de largo plazo de cualquier otro *commodity*.

La forma en que se aborda el problema y se plantea la solución en esta tesis, se acerca más al segundo estudio en cuanto a los supuestos asumidos. En primer lugar, se calibra la dinámica del petróleo WTI para luego copiar los parámetros de la variable de estado volatilidad, y usarlos en la variable de estado análoga pero del petróleo Brent. El objetivo es obtener una dinámica de los precios más robusta y realista para el *commodity* con menor cantidad de datos, considerando volatilidad estocástica, que permita usar el modelo propuesto para efectos de valorización a plazos elevados en forma confiable.

El resto de la presente tesis se organiza como sigue. El capítulo 2 describe el estado del arte en cuanto a modelación de activos se refiere. El capítulo 3 discute la forma de calibración mediante el filtro de Kalman. Luego, en el capítulo 4 se revisan los datos disponibles y también se estudia el comportamiento de los precios del mercado del petróleo. El capítulo 5 describe el modelo implementado en esta tesis. En el capítulo 6 se describen los modelos implementados, entregando los respectivos resultados y finalmente, el capítulo 7 concluye.

2. MODELACION DE ACTIVOS

El objetivo de este capítulo es presentar las bases para la valorización de futuros y opciones, fundamental para el posterior entendimiento del proceso estocástico elaborado en este trabajo. Para ello, se muestran distintos modelos que van aumentando en complejidad, y cada uno de ellos va haciendo un aporte sobre el anterior, llegando hasta el modelo de Richter & Sorensen 2002, sobre el cual se basa el propuesto de esta tesis. A su vez, dada la diferencia entre la naturaleza de los futuros y las opciones, la revisión bibliográfica se separa en dos subsecciones para abarcar cada uno de ellos en forma individual.

La modelación en tiempo continuo comienza con el trabajo realizado por Black & Scholes 73. Ellos, asumiendo un proceso estocástico para los retornos de un activo, logran obtener una fórmula para la valorización de opciones del tipo *Call* y *Put*. A partir de este trabajo se han hecho infinidad de extensiones, aplicándose a todo tipo de derivados, agregando complejidad para obtener dinámicas cada vez más realistas.

En esta sección se dan a conocer algunos modelos representativos de ésta forma de valorización. Partiendo por trabajos dedicados a obtener la curva de futuros de *commodities* y la estructura de tasas de interés. Luego se presentan trabajos que tienen como enfoque la valorización de opciones, pasando por modelos que asumen volatilidad constante, a otros que relajan ese supuesto y agregan volatilidad estocástica al estudio.

2.1 Futuros y tasas de interés

Dentro de los activos más estudiados en términos de valorización se encuentran los futuros de *commodities* y las estructuras de tasas de interés. La ventaja de éstos es que las fórmulas que se obtienen son de fácil implementación, lo cual los hace muy atractivos para la calibración de la dinámica del activo que quiere modelarse.

A continuación se presenta una de las familias más clásicas de modelación en tiempo continuo, donde la dinámica del sistema queda determinada por una combinación lineal de las variables de estado, y donde éstas siguen un proceso en el cual sus componentes son combinaciones lineales de ellas mismas.

2.1.1 Schwartz 97

En este artículo se estudian y comparan tres modelos que intentan describir el comportamiento estocástico de precios de *commodities*. El primero de ellos considera sólo un factor estocástico, asumiendo que el logaritmo del precio sigue un proceso del tipo Ornstein-Uhlenbeck con reversión a la media². El segundo, agrega un segundo factor, añadiendo estocacidad al retorno por conveniencia³ del *commodity*. Finalmente el tercer modelo adiciona, al modelo anterior, tasas de interés estocásticas. La implementación se realiza sobre tres *commodities* en particular, cobre, petróleo y oro.

A medida que se van agregando variables de estado al sistema, se van complejizando las fórmulas de valorización y con ello el respectivo proceso de calibración, debido a la inclusión de nuevos parámetros. En los modelos que se presentan a continuación, sólo se valorizan futuros de *commodities*, considerando volatilidad constante. Siendo ésta una de las implementaciones más simples que permite describir, en forma aceptable, estos mercados.

2.1.1.1 Modelo 1

Se asume que el *commodity* sigue el siguiente proceso estocástico:

$$dS/S = \kappa(\mu - \ln(S))dt + \sigma dz \quad 2.1$$

² Un proceso con reversión a la media sigue una dinámica que con el paso del tiempo vuelve a su media de largo plazo, permitiendo desviaciones de ésta en el corto plazo.

³ El retorno por conveniencia puede ser interpretado como el flujo de caja que recibe el poseedor del activo físico y que no es recibido por la parte dueña del contrato futuro.

Donde S es el precio *Spot*. Definiendo $X = \ln(S)$, la dinámica de la nueva variable sigue un proceso estocástico del tipo Ornstein-Uhlenbeck, donde:

$$\begin{aligned} dX &= \kappa(\alpha - X)dt + \sigma dz \\ \alpha &= \mu - \frac{\sigma^2}{2\kappa} \end{aligned} \quad 2.2$$

Donde dz corresponde a un movimiento browniano. Así, movimientos infinitesimales de X quedan descritos por su velocidad de reversión a la media κ , su media de largo plazo α , y la volatilidad de éste σ .

Ahora, el mismo proceso puede ser escrito bajo la medida neutral al riesgo, en cuyo formato la valorización de activos que dependan de X se facilita. El nuevo proceso sigue la siguiente dinámica:

$$dX = \kappa(\alpha^* - X)dt + \sigma dz^* \quad 2.3$$

Donde $\alpha^* = \alpha - \lambda$, λ es el precio del riesgo de mercado y dz^* son los nuevos incrementos del movimiento browniano bajo la medida neutral al riesgo.

Utilizando técnicas estándar de valorización de derivados⁴, se obtiene que la fórmula de contratos futuros bajo este modelo es:

$$F(S, T) = \exp \left[e^{-\kappa T} \ln(S) + (1 - e^{-\kappa T}) \alpha^* + \frac{\sigma^2}{4\kappa} (1 - e^{-2\kappa T}) \right] \quad 2.4$$

Obteniéndose una fórmula medianamente simple, con pocos parámetros, lo que repercute en una fácil implementación, con la salvedad de que una estructura tan sencilla es muy difícil que logre capturar los precios de mercado de cualquier *commodity*.

⁴ Ver Anexo A.

2.1.1.2 Modelo 2

Este modelo de dos factores, toma como primero de ellos a los retornos del *commodity* y como segundo factor al retorno por conveniencia, δ . Se asume que los factores siguen la dinámica:

$$\begin{aligned} dS/S &= (\mu - \delta)dt + \sigma_1 dz_1 \\ d\delta &= \kappa(\alpha - \delta)dt + \sigma_2 dz_2 \end{aligned} \quad 2.5$$

Donde los movimiento brownianos dz_1 y dz_2 poseen correlación ρ . Bajo la medida neutral al riesgo, la nueva dinámica del sistema es la siguiente:

$$\begin{aligned} dS/S &= (r - \delta)dt + \sigma_1 dz_1^* \\ d\delta &= [\kappa(\alpha - \delta) - \lambda]dt + \sigma_2 dz_2^* \end{aligned} \quad 2.6$$

Donde λ es el precio por riesgo asociado al retorno por conveniencia y la correlación entre dz_1^* y dz_2^* es ρ . La fórmula obtenida en este nuevo caso es:

$$F(S, \delta, T) = S \exp \left[-\frac{\delta(1 - e^{-\kappa T})}{\kappa} + A(T) \right] \quad 2.7$$

Donde,

$$\begin{aligned} A(T) &= \left(r - \left(\alpha - \frac{\lambda}{\kappa} \right) + \frac{1}{2} \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2 \rho}{\kappa} \right) T + \frac{1}{4} \sigma_2^2 \frac{1 - e^{-2\kappa T}}{\kappa^3} + \\ &\quad \left(\left(\alpha - \frac{\lambda}{\kappa} \right) \kappa + \sigma_1 \sigma_2 \rho - \frac{\sigma_2^2}{\kappa} \right) \frac{1 - e^{-\kappa T}}{\kappa^2} \end{aligned} \quad 2.8$$

La fórmula obtenida resulta ser más compleja que en el modelo anterior, pero a su vez sigue siendo fácil de implementar. La mayor dificultad de este modelo radica en la obtención de $A(T)$, aunque al desarrollar las ecuaciones diferenciales que la definen, la tarea de deducirla es más laboriosa que complicada.

2.1.1.3 Modelo 3

Este modelo es similar al modelo 2 pero añade tasas de interés estocásticas. Pasando inmediatamente a la forma del modelo en la medida neutral al riesgo, se tiene:

$$\begin{aligned} dS/S &= (r - \delta)dt + \sigma_1 dz_1^* \\ d\delta &= \kappa(\hat{a} - \delta)dt + \sigma_2 dz_2^* \\ dr &= a(m^* - r)dt + \sigma_3 dz_3^* \end{aligned} \quad 2.9$$

Donde la estructura de correlaciones de los movimiento brownianos entre dz_1^* y dz_2^* es ρ_1 , entre dz_2^* y dz_3^* es ρ_2 y entre dz_1^* y dz_3^* es ρ_3 . Así, la fórmula de valorización para precios futuros queda descrita por:

$$F(S, \delta, r, T) = S \exp \left[-\frac{\delta(1 - e^{-\kappa T})}{\kappa} + \frac{r(1 - e^{-aT})}{a} + C(T) \right] \quad 2.10$$

Donde $C(T)$ se describe por la fórmula del Anexo B.

El haber añadido un nuevo factor al sistema extiende la fórmula para los futuros, pero la obtención de ésta es simple, requiriendo un mayor desarrollo algebraico para deducirla. La dificultad implícita en este modelo es su calibración, ya que posee un mayor número de parámetros, con la ventaja de ser una dinámica mucho más realista para los precios de mercado y por ende se ajusta de mejor manera a éstos.

2.1.2 Cortázar & Naranjo 2006

El modelo propuesto por estos autores está escrito para una cantidad de factores indefinida, expresándose en forma vectorial. Las variables de estado del sistema siguen un proceso Gaussiano (con volatilidad constante), las cuales no son observables, pero sí son deducibles a partir de precios de mercado, gracias a la utilización del Filtro de Kalman.

En este modelo, la dinámica del precio *spot* del *commodity* puede ser descrita por:

$$\log(S_t) = \mathbf{1}' \mathbf{x}_t + \mu t \quad 2.11$$

Donde \mathbf{x}_t es un vector de variables de estado de dimensión $n \times 1$ y μ , la tasa de crecimiento de largo plazo del proceso $\log(S_t)$, se asume constante. Se define el siguiente proceso para el vector \mathbf{x}_t :

$$d\mathbf{x}_t = -\mathbf{K}\mathbf{x}_t dt + \mathbf{\Sigma}d\mathbf{w}_t \quad 2.12$$

Donde,

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \kappa_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \kappa_n \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix} \quad 2.13$$

son matrices diagonales de $n \times n$ con componentes constantes positivas. Además, $d\mathbf{w}_t$ es un vector de $n \times 1$ con movimientos Brownianos, tal que la correlación de sus incrementos queda descrita por $(d\mathbf{w}_t)'(d\mathbf{w}_t) = \mathbf{\Omega}dt$, donde el elemento (i, j) de $\mathbf{\Omega}$ es $\rho_{ij} \in [-1, 1]$, corresponde a la correlación instantánea entre las variables i y j .

Esta especificación del modelo implica que las variables de estado tienen una distribución Normal multivariada. La primera de éstas sigue una caminata aleatoria, mientras que el resto revierte a cero, que equivale a sus respectivas medias de largo plazo, a una velocidad determinada por κ_i .

Asumiendo un premio por riesgo constante λ , el proceso en la medida neutral para el vector de variables de estado, es:

$$d\mathbf{x}_t = -(\lambda + \mathbf{K}\mathbf{x}_t)dt + \Sigma d\mathbf{w}_t^* \quad 2.14$$

Donde λ es un vector de $n \times 1$ compuesto de constantes reales. Bajo esta estructura, es posible valorizar contratos futuros con técnicas de valorización estándar. El resultado es el siguiente:

$$F(\mathbf{x}_t, t, T) = \exp \left(x_1(t) + \sum_{i=2}^N e^{-\kappa_i(T-t)} x_i(t) + \mu t + \left(\mu - \lambda_1 + \frac{1}{2} \sigma_1^2 \right) (T-t) - \sum_{i=2}^N \frac{1 - e^{-\kappa_i(T-t)}}{\kappa_i} \lambda_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq 1} \frac{\sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \left(1 - e^{-(\kappa_i + \kappa_j)(T-t)} \right)}{\kappa_i + \kappa_j} \right) \quad 2.15$$

Si bien este modelo sigue un proceso Gaussiano, hace una extensión a una cantidad de variables de estado indeterminada, entregando fórmulas cerradas para futuros en forma concisa, lo que le entrega facilidad de implementación.

2.1.3 Duffie & Kan 96

El gran aporte de Duffie & Kan 96 es el estudio de los modelos estocásticos en una forma muy general para “n” factores⁵ y obtienen la forma funcional para bonos que asuman la dinámica propuesta para las tasas de interés (con aplicación directa sobre *commodities*). Este modelo puede ser pensado como una versión multifactorial del modelo CIR⁶ incluyendo volatilidad estocástica, como una combinación lineal de las variables de estado, y donde los precios de Bonos, similar a los de Futuros, son el resultado de la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales.

El modelo se plantea de la siguiente manera. Supongamos que X_t (vector de variables de estado) satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica en la medida real:

$$dX_t = v(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \quad 2.16$$

Y que su respectivo análogo en la medida neutral es:

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t^* \quad 2.17$$

Donde $X_t \in \mathbb{R}^n$ y las funciones $\mu(X_t)$ y $\sigma(X_t)$ son funciones de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ lineales en X_t . En particular puede tomarse la siguiente nomenclatura:

$$dX_t = (aX_t + b)dt + \Sigma \begin{pmatrix} \sqrt{v_1(X_t)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{v_2(X_t)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{v_n(X_t)} \end{pmatrix} dW_t^* \quad 2.18$$

⁵ Asumiendo que estos son las tasas de retorno de bonos cero cupón.

⁶ CIR referido al trabajo de Cox, Ingersol y Ross 85 en tasas de interés.

Donde $a \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, y $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$, con:

$$v_i(X_t) = \alpha_i + \beta_i X_t \quad 2.19$$

Donde, para i α_i es un escalar y $\beta_i \in \mathbb{R}^n$ ⁷.

Notar que los coeficientes β_i son los que le otorgan volatilidad estocástica al sistema, a menos que todos ellos sean cero, en cuyo caso se estaría en presencia de un modelo Gaussiano, originalmente tratados en Vasicek 77 y Langetieg 80.

La solución a este modelo, pasa por obtener la ecuación diferencial parcial que define el precio del bono $P(X_t, t, T)$, para luego suponer una solución con la forma funcional propuesta por Duffie & Kan 96:

$$P(X_t, t, T) = e^{A(t, T) + B^T(t, T) X_t} \quad 2.20$$

Donde $A(t, T) \in \mathbb{R}$ y $B(t, T) \in \mathbb{R}^n$.

El resultado de esta metodología entrega un set de ecuaciones diferenciales ordinarias del tipo Ricatti para $A(t, T)$ y $B(t, T)$, que en algunos casos tiene solución cerrada, pero que para la mayoría de los casos, hay que recurrir a métodos numéricos para resolverlas⁸.

Este modelo entrega gran flexibilidad debido a la amplia cantidad de parámetros a determinar y el hecho de que se puede elegir todos los factores que uno desee. Si bien el

⁷ Análogo al modelo CIR existen restricciones de admisibilidad a los parámetros, estas son.

(a). Para todo x tal que $v_i(x) = 0$, $\beta_i^T(ax + b) > \beta_i^T \Sigma \Sigma^T \beta_i / 2$

(b). Para todo j , si $(\beta_i^T \Sigma)_j$ distinto de 0, entonces $v_i = v_j$

⁸ No se entra en el detalle ya que estas ecuaciones serán obtenidas en forma explícita para el modelo de Richter Sorensen.

modelo es muy general, Duffie & Kan 96 no nos entrega las herramientas para valorizar opciones en esta economía.

2.1.4 Dai & Singleton 2000

En este paper se tratan diferencias estructurales y ajuste de modelos *affine*⁹. Pero a su vez entregan herramientas para construir modelos que contienen la menor cantidad de parámetros posibles para describir una dinámica¹⁰. El modelo es propuesto de la siguiente manera.

Sin presencia de oportunidades de arbitraje, el precio de un bono cero cupón que madura en T, $P(T, t)$, está dado por:

$$P(T, t) = E_t^Q \left[e^{\int_t^T r_s ds} \right] \quad 2.21$$

Donde E^Q denota a la esperanza en la medida neutral al riesgo. Un modelo *affine* para las tasas de interés asume que la tasa instantánea $r(t)$ es una función lineal de un vector de estados no observable $Y(t) = (Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_n(t))$:

$$r(t) = \delta_0 + \sum_{i=1}^n \delta_i Y_i(t) = \delta_0 + \delta_Y' Y(t) \quad 2.22$$

Donde $Y(t)$ sigue el siguiente proceso:

⁹ *Affine* hace relación a la estructura lineal de la modelación, de los cuales todos los modelos mostrados en esta tesis califican como tal.

¹⁰ Esto hace referencia a que distintos set de parámetros pueden generar una misma dinámica para el activo que se está modelando, y de lo cual se obtiene que un subconjunto de éstos requieren menor cantidad de parámetros que el resto.

$$dY(t) = \bar{K}(\bar{\theta} - Y(t))dt + \Sigma\sqrt{S(t)}dW(t) \quad 2.23$$

$\bar{W}(t)$ es un movimiento Browniano independiente de dimensión N en la medida neutral, \bar{K} y Σ son matrices de $N \times N$, que pueden ser no diagonales y asimétricas, y $S(t)$ es una matriz diagonal donde la componente i de la diagonal está dada por:

$$[S(t)]_{ii} = \alpha_i + \beta_i'Y(t) \quad 2.24$$

Siendo así, tanto el *drift*¹¹ como la varianza condicional, lineales en las variables de estado. Ahora, dado el resultado de Duffie & Kan 96, se sabe que:

$$P(T, t) = e^{A(T-t)+B(T)'Y(t)} \quad 2.25$$

De donde, $A(\tau)$ y $B(\tau)$, se obtienen a partir de la resolución de un set de ecuaciones diferenciales. Ahora, asumiendo una estructura lineal para los premios por riesgo, Δ , para cada variable de estado tal que:

$$\Delta(t) = \sqrt{S(t)}\lambda \quad 2.26$$

Con λ un vector de constantes con dimensión $N \times 1$, el proceso en la medida real para las variables de estado puede escribirse de la siguiente manera:

$$dY(t) = K(\theta - Y(t))dt + \Sigma\sqrt{S(t)}dW(t) \quad 2.27$$

De donde los autores deducen que la forma general de representar las matrices que definen el sistema, con la menor cantidad de parámetros posible, para un modelo de N factores y m grados de libertad de las varianzas condicionales¹², es la siguiente¹³:

¹¹ *Drift* se refiere a la pendiente media del proceso, que está determinada por lo que acompaña al dt

$$K = \begin{bmatrix} K_{m \times m}^{BB} & 0_{m \times (N-m)} \\ K_{(N-m) \times m}^{DB} & K_{(N-m) \times (N-m)}^{DD} \end{bmatrix} \quad 2.28$$

Para $m > 0$, y K triangular superior o inferior en caso que $m = 0$:

$$\begin{aligned} \theta &= \begin{pmatrix} \theta_{m \times 1}^B \\ 0_{(N-m) \times 1} \end{pmatrix} \\ \Sigma &= I \\ \alpha &= \begin{pmatrix} 0_{m \times 1} \\ 1_{(N-m) \times 1} \end{pmatrix} \\ B &= [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N] = \begin{bmatrix} I_{m \times m} & B_{m \times (N-m)}^{BD} \\ 0_{(N-m) \times m} & 0_{(N-m) \times (N-m)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad 2.29$$

Este modelo es una extensión al de Duffie & Kan 96 en el sentido de eficiencia, disminuyendo la cantidad de parámetros a estimar, dando a entender que la cantidad de parámetros a utilizar se puede disminuir. Pero se limita a la valorización de Bonos y obtención de estructuras de tasas de interés, sin mencionar cómo habría que abordar el problema de la valorización de opciones.

2.2 Opciones

El objetivo de esta subsección es dar a conocer modelos estocásticos que tienen su enfoque en la valorización de opciones. Aquí se comienza por el modelo clásico de Black & Scholes 73, de un solo factor, para luego ir avanzando en complejidad, mediante la inclusión de factores adicionales y agregando volatilidad estocástica. Esta sección finalmente presenta el modelo de Richter & Sorensen 2002, sobre el cual se basa el propuesto en esta tesis.

¹² La forma matemática de expresar m es mediante el rango de la matriz B , donde $B = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_3]$

¹³ Existen más formas, que pueden obtenerse realizando transformaciones invariantes sobre las matrices presentadas.

2.2.1 Black & Scholes 73

Estos autores son los precursores de la modelación en tiempo continuo. En su trabajo original obtienen una fórmula cerrada para la valorización de opciones del tipo *Call* y *Put*. Para llegar ella, modelan la dinámica del activo con la siguiente ecuación diferencial:

$$dS/S = \mu dt + \sigma dW \quad 2.30$$

La modelación asume sólo un factor de riesgo, con volatilidad de los retornos, σ , y retorno promedio, μ , constantes. Luego, la intención está en valorizar activos que dependan de S , y usando cálculo estocástico es posible obtener la dinámica de este nuevo activo C . Luego, a partir de la dinámica de S , de C y asumiendo una tasa libre de riesgo instantánea, r , constante, se puede crear un portafolio que no posea incertidumbres y por ende el retorno de éste debe ser r .

Esta metodología lleva a una ecuación diferencial parcial para el valor de C , que para el caso particular de una opción *Call*¹⁴ su solución es:

$$C(S, T) = SN(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \quad 2.31$$

Donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad 2.32$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

¹⁴ Para una opción del tipo Put, la fórmula es: $P(S, T) = Ke^{-rT} N(-d_2) - SN(-d_1)$

Donde T es el plazo residual para que venza la opción, K el precio de ejercicio y $N(x)$ una distribución normal estándar acumulada.

Al ser éste el modelo precursor en cuanto a valorización de opciones en tiempo continuo, se tiene que corresponde a uno de los más simples disponibles, esto debido al uso de sólo un factor de riesgo y al supuesto de volatilidad constante.

2.2.2 Heston 93

Heston plantea directamente que su propósito es realizar un avance sobre Black & Scholes 73, criticándolo fuertemente por sus supuestos de normalidad de la distribución de los retornos de los precios y el conocimiento de antemano de su media y varianza. A su vez, enumera distintos trabajos con objetivos similares, pero que no han logrado obtener resultados con forma cerrada que no dependan fuertemente de lentos métodos numéricos. Además, comenta sobre trabajos que logran deducir precios de opciones pero en un entorno en el cual la volatilidad no está correlacionada con el retorno del precio, sin esta característica se pierde el *skew* que se observa en la distribución de los retornos de mercado.

Para el desarrollo del modelo se asume el siguiente proceso para los retornos:

$$dS/S = \mu dt + \sqrt{v} dz_1 \quad 2.33$$

Y el siguiente proceso para la varianza:

$$dv = \kappa(\theta - v)dt + \sigma\sqrt{v}dz_2 \quad 2.34$$

Donde μ , κ , θ y σ son constantes mayores a cero y donde los procesos Brownianos dz_1 y dz_2 poseen correlación ρ . Además, por simpleza, se asume que la tasa libre de riesgo r

es constante y por ende el precio de cualquier bono cero cupón es $P(t, T) = e^{-r(T-t)}$. Luego, usando la fórmula de Feynman-Kac¹⁵ sobre cualquier activo de la forma $C(S, v, t)$ y asumiendo que el premio por riesgo por unidad de volatilidad $\lambda(S, v, t)$ es proporcional a v , se obtiene la siguiente ecuación diferencial parcial para C :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}vS^2C_{SS} + \rho\sigma vSC_{Sv} + \frac{1}{2}\sigma^2vC_{vv} + rSC_S + \\ [\kappa(\theta - v) - \lambda v]C_v - rC + C_t = 0 \end{aligned} \quad 2.35$$

En particular, una opción del tipo *Call* satisface esta ecuación diferencial con el siguiente set de condiciones de borde:

$$\begin{aligned} C(S, v, T) &= \text{Max}(0, S - K) \\ C(0, v, t) &= 0 \end{aligned} \quad 2.36$$

Ahora, es razonable suponer que la forma funcional de la solución a esta ecuación debiese seguir la forma de Black & Scholes 73:

$$C(S, v, t) = SP_1 - KP(t, T)P_2 \quad 2.37$$

Por conveniencia se hace el siguiente cambio de variable:

$$x = \ln(S) \quad 2.38$$

Sustituyendo la forma funcional propuesta en la ecuación diferencial, se obtiene que P_1 y P_2 deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales:

¹⁵ Esta fórmula es un atajo para obtener la ecuación diferencial que debe cumplir un activo, siendo el método completo el de plantear un portafolio que sea libre de riesgo y exigirle un retorno r a éste.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}v \frac{\partial^2 P_j}{\partial x^2} + \rho\sigma v \frac{\partial^2 P_j}{\partial x \partial v} + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 P_j}{\partial v^2} + (r + u_j v) \frac{\partial P_j}{\partial x} \\ + (a_j - b_j v) \frac{\partial P_j}{\partial v} + \frac{\partial P_j}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad 2.39$$

Para $j = 1, 2$, donde:

$$u_1 = \frac{1}{2}, \quad u_2 = -\frac{1}{2}, \quad a = \kappa\theta, \quad b_1 = \kappa + \lambda - \rho\sigma, \quad b_2 = \kappa + \lambda \quad 2.40$$

En orden para satisfacer las condiciones de borde para la *Call*, es necesario que las probabilidades cumplan con:

$$P_j(x, v, T; \ln(K)) = 1_{\{x \geq \ln(K)\}} \quad 2.41$$

Las ecuaciones diferenciales parciales propuestas no tienen una solución disponible en forma cerrada, pero Heston 93 demuestra que la función característica de éstas, $f_1(x, v, T; \phi)$ y $f_2(x, v, T; \phi)$ respectivamente, deben satisfacer la misma EDP. Sujetas a la condición de borde:

$$f_j(x, v, T; \phi) = e^{i\phi x} \quad 2.42$$

Con la siguiente forma funcional:

$$f_j(x, v, t; \phi) = e^{C(T-t; \phi) + D(T-t; \phi) + i\phi x} \quad 2.43$$

Donde,

$$C(\tau; \phi) = r\phi i\tau + \frac{a}{\sigma^2} \left\{ (b_j - \rho\sigma\phi i + d)\tau - 2 \ln \left[\frac{1 - g e^{d\tau}}{1 - g} \right] \right\}, \quad 2.44$$

$$D(\tau; \phi) = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d}{\sigma^2} \left[\frac{1 - e^{d\tau}}{1 - g} \right],$$

Y

$$g = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d}{b_j - \rho\sigma\phi i - d}$$

$$d = \sqrt{(\rho\sigma\phi i - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j\phi i - \phi^2)} \quad 2.46$$

$$i = \sqrt{-1}$$

Luego, se puede invertir la función característica para obtener la función de probabilidad deseada:

$$P_j(x, v, T; \ln[K]) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{e^{i\phi \ln[K]} f_j(x, v, T; \phi)}{i\phi} \right] d\phi \quad 2.47$$

El procedimiento de Heston se resume en plantear un modelo estocástico (no necesariamente con volatilidad estocástica) con la cantidad de factores que uno desee, incluso pudiendo hacer que algunas de las variables sean dependientes del tiempo. Con el modelo planteado, usando técnicas estándar como Lemma de Ito, elaboración de portafolios libres de riesgo, valorización neutral al riesgo, etc. se puede llegar a la ecuación diferencial que debe cumplir cualquier derivado sobre el subyacente modelado. Luego, es necesario plantear una forma funcional coherente para el valor del derivado que se está estudiando y así reemplazar las derivadas parciales en la ecuación diferencial obtenida. Para el caso de opciones del tipo *plain vanilla*, el resultado de hacer este reemplazo es obtener una ecuación diferencial para cada probabilidad involucrada que, para modelos lo suficientemente complejos, no tienen forma cerrada. Para enfrentar este problema, Heston 93 demuestra que la función característica de estas probabilidades también cumplen con la misma ecuación diferencial, y en este contexto es que se puede plantear una forma funcional simple, para obtener un sistema de ecuaciones

diferenciales ordinarias que, dependiendo de la complejidad, pueden ser resueltos en forma analítica o numérica. Con la función característica computada, se puede dar vuelta la relación mediante integración numérica.

La ventaja de este modelo es que relaja el supuesto de volatilidad constante, añadiéndola como una variable de estado, lo que es consistente con las observaciones de mercado, donde la volatilidad implícita en las opciones varía constantemente.

2.2.3 Richter & Sorensen 2002

El modelo propuesto en esta tesis es inspirado en la dinámica propuesta por estos autores, la diferencia radica en el tipo de *commodity* modelado y en los supuestos sobre la dinámica de las tasas de interés.

Richter & Sorensen 2002 modelan el *commodity* soja, mercado que posee marcadas estacionalidades, las cuales los autores incluyen en la modelación. La dinámica asumida, en la medida real, considerando tres factores de riesgo, es:

$$\begin{aligned}
 dP_t &= P_t [(r - \delta_t + \lambda_p e^{v(t)} v_t) dt + e^{v(t)} \sqrt{v_t} dW_{1,t}] \\
 d\delta_t &= (\alpha(t) - \beta \delta_t + \lambda_\delta \sigma_\delta e^{v(t)} v_t) dt + \sigma_\delta e^{v(t)} \sqrt{v_t} dW_{2,t} \\
 dv_t &= (\theta - \kappa v_t + \lambda_v \sigma_v v_t) dt + \sigma_v \sqrt{v_t} dW_{3,t}
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

Donde $\beta, \kappa, \theta, \lambda_p, \lambda_\delta, \lambda_v, \sigma_\delta, \sigma_v$ y las correlaciones entre los movimientos brownianos W , son parámetros constantes, $\alpha(t)$ y $v(t)$ son funciones determinísticas que tratan de describir los patrones estacionales del retorno por conveniencia, δ , y la volatilidad, v . Los parámetros λ describen los premios por riesgo asociados a la incertidumbre del precio del *commodity*, retorno por conveniencia y volatilidad.

Ahora, para efecto de valorización, es conveniente pasar el modelo a su forma en la medida neutral al riesgo. Bajo ciertas condiciones de completitud de mercado y regularidad, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 dP_t &= P_t [(r - \delta_t)dt + e^{v(t)} \sqrt{v_t} dW_{1,t}] \quad . \\
 d\delta_t &= (\alpha(t) - \beta\delta_t)dt + \sigma_\delta e^{v(t)} \sqrt{v_t} dW_{2,t} \\
 dv_t &= (\theta - \kappa v_t)dt + \sigma_v \sqrt{v_t} dW_{3,t}
 \end{aligned}
 \tag{2.49}$$

Los parámetros β y κ determinan el grado de reversión a un patrón estacional determinístico en el retorno por conveniencia y la media de largo plazo de la volatilidad θ , respectivamente. σ_δ y σ_v son parámetros que, en conjunto con el nivel de v_t , determinan la volatilidad instantánea del retorno por conveniencia y la volatilidad de la volatilidad estocástica del precio del *commodity*. r es la tasa libre de riesgo de corto plazo (instantánea) que se asume constante.

Las funciones $\alpha(t)$ y $v(t)$ están descritas por:

$$\begin{aligned}
 \alpha(t) &= \alpha_0 + \sum_{k=1}^{K^\alpha} (\alpha_k \cos(2\pi kt) + \alpha_k^* \sin(2\pi kt)) \\
 v(t) &= \sum_{k=1}^{K^v} (v_k \cos(2\pi kt) + v_k^* \sin(2\pi kt)) \quad .
 \end{aligned}
 \tag{2.50}$$

Bajo esta estructura, usando técnicas estándar de valorización de futuros se llega a que la valorización de éstos queda descrita por la siguiente fórmula:

$$F_t = P_t e^{A(T)+B(T)v+D(T)\delta} \tag{2.51}$$

Donde,

$$D(t, T) = -\frac{1}{\beta} (1 - e^{-\beta(T-t)}) \tag{2.52}$$

Y $A(t; T)$ y $B(t; T)$ son la solución a las ecuaciones diferenciales parciales:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma_\delta^2 e^{2\nu(t)}(D(t; T))^2 + \rho_{12}\sigma_\delta e^{2\nu(t)}D(t; T) + \frac{1}{2}\sigma_\nu^2(B(t; T))^2 + (\rho_{13}\sigma_\nu e^{\nu(t)} + \\ \rho_{23}\sigma_\delta\sigma_\nu e^{\nu(t)}D(t; T) - \kappa)B(t; T) + B'(t; T) = 0, \quad B(T; T) = 0 \end{aligned} \quad 2.53$$

Y

$$r + \alpha(t)D(t; T) + \theta B(t; T) + A'(t; T) = 0, \quad A(T; T) = 0 \quad 2.54$$

Soluciones a estas ecuaciones diferenciales no existen en forma cerrada, pero pueden ser obtenidas numéricamente mediante métodos numéricos muy precisos.

Para opciones sobre futuros se procede de la forma propuesta por Heston 93, asumiendo una forma funcional similar a la de Black 76¹⁶, para después obtener la ecuación diferencial que deben cumplir las funciones características, pudiendo así invertirlas para deducir las probabilidades requeridas. La fórmula obtenida para una *Call* es la siguiente:

$$C(F, v, t) = e^{-r(T-t)}[FP_1 - KP_2] \quad 2.55$$

Donde:

$$P_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\phi \ln[K]} f_j(x, v, t; \phi)}{i\phi} \right] d\phi, \quad j = 1, 2 \quad 2.56$$

¹⁶ Se usa Black 76 ya que este es el análogo de Black & Scholes 73 pero para valorización de opciones sobre futuros.

Y donde $x = \ln(F)$ y $f_j(\cdot; \phi)$, $j = 1, 2$, denota la función característica que son obtenidas como la solución a un sistema de ecuaciones diferenciales similar a la de Heston 93¹⁷.

¹⁷ Las ecuaciones diferenciales de este modelo son muy similares a las obtenidas en el modelo propuesto en esta tesis, el cual es desarrollado en forma extensiva en el capítulo 5.

3. METODOLOGÍA DE CALIBRACIÓN

A continuación se muestra la metodología de calibración implementada en esta tesis. Ésta fue elegida por su capacidad de obtener parámetros, mediante criterios de máxima verosimilitud, y la factibilidad de incorporar precios que no son lineales en las variables de estado.

3.1 El filtro de Kalman

Para poder estimar un modelo dinámico, se necesita determinar tanto los parámetros que rigen al modelo como poder obtener las variables de estado en todo instante de tiempo. Si se pasa el sistema al espacio de estados, se puede aplicar el filtro de Kalman (1960), que permite estimar parámetros y a su vez las variables de estado de manera simultánea, gracias a la información observada en el instante de estudio y de las fechas anteriores. El filtro asume que existe cierto grado de error de medición al realizar las observaciones, esto permite asumir una distribución de ellos y así lograr estimaciones de Máxima Verosimilitud. El filtro de Kalman fue diseñado en primera instancia como una solución a problemas de ingeniería de control y telecomunicaciones, sin embargo ha tenido éxito en el área de la ingeniería financiera en el contexto de estimación de parámetros y variables de estado.

En palabras simples, lo que hace el filtro es, a partir de los parámetros, estimar el valor esperado de las variables de estado dada su condición en el periodo anterior, luego con la información observada se actualiza el valor de esas variables. Al asumir una distribución sobre los errores generados, se puede estimar una función de verosimilitud que ayude a estimar los mejores parámetros que definen la dinámica de las variables de estado dado los datos disponibles.

En su concepción, el filtro de Kalman fue desarrollado para procesos gaussianos, con lo cual se requiere el supuesto de que los errores generados en el modelo distribuyan Normal, aunque este supuesto puede ser relajado. El filtro también asume que el panel de datos es completo, en el sentido de que para cada instante se tiene la misma cantidad de observaciones, sin embargo Sorensen 2002 y Naranjo 2002 muestran que este supuesto puede romperse y plantean la metodología para paneles de datos incompletos, incluso permitiendo que para algunos instantes no existan observaciones.

El filtro de Kalman se define en el espacio de estados mediante tres ecuaciones: ecuaciones de medida, ecuación de transición y ecuación de predicción. En primer lugar, la ecuación de medida es la que relaciona las variables de estado con las observaciones de mercado:

$$z_t = H_t x_t + d_t + v_t \quad v_t \sim N(0, R_t) \quad 3.1$$

Definiendo m_t como la cantidad de precios observados en el instante t y n como la cantidad de variables de estado, se tiene que el vector z_t de dimensión $m_t \times 1$ contiene las observaciones de mercado del período t . H_t corresponde a una matriz de $m_t \times n$, x_t es un vector de $n \times 1$ el cual contiene el valor actual de las variables de estado, d_t es un vector de constantes que da cuenta del desplazamiento necesario para llevar las variables no observadas a las observadas y v_t es una variable estocástica Normal no correlacionada de medio cero y varianza R_t que representa la distribución de los errores de medición.

La dinámica de las variables queda descrita por la ecuación de transición, que describe la distribución de las variables de estado para el siguiente instante, sin antes usar las observaciones de aquel periodo:

$$x_t = A_t x_{t-1} + c_t + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, Q_t) \quad 3.2$$

Esta fórmula describe una relación lineal entre estados consecutivos, además de la distribución normal multivariada de las perturbaciones ε_t , con matriz de varianza covarianza Q_t y media cero (En este trabajo se asume Normalidad cuando no es lo más correcto, a este procedimiento se le llama Quasi-Máxima Verosimilitud QML y ha sido implementado en diversos trabajos comprobando que los errores o diferencias de las estimaciones no son significativas, ver Trolle & Schwartz 2009). A partir de estas ecuaciones, Kalman logra obtener estimaciones para las variables de estado usando el criterio de minimización del error cuadrático. Así, llamando \hat{x}_t a la estimación de la variable de estado x_t y dada la información disponible hasta t , se define P_t como la matriz de varianza-covarianza de los errores de estimación:

$$P_t = E(x_t - \hat{x}_t)(x_t - \hat{x}_t)' \quad 3.3$$

El filtro de Kalman es un método recursivo y por ende con la información disponible hasta t , disponemos de \hat{x}_t y P_t , con lo cual, a partir de la información disponible en el siguiente período, es posible obtener los valores de $\hat{x}_{t+\Delta t}$ y $P_{t+\Delta t}$. El algoritmo a seguir es el siguiente.

Dada la información disponible hasta t , o sea conocidos \hat{x}_t y P_t , y asumiendo una dinámica para las variables de estado, es posible estimar el valor de éstos en el período siguiente:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{t+\Delta t|t} &= A_{t+\Delta t} \hat{x}_t + c_{t+\Delta t} \\ P_{t+\Delta t|t} &= A_{t+\Delta t} P_t A_{t+\Delta t}' + Q_{t+\Delta t} \end{aligned} \quad 3.4$$

Con estos valores obtenidos, es posible hacer un pronóstico de las variables observadas del período $t + \Delta t$, donde sólo se requiere usar la ecuación de medida:

$$\hat{z}_{t+\Delta t|t} = H_{t+\Delta t} \hat{x}_{t+\Delta t} + d_{t+\Delta t} \quad 3.5$$

Después, al tener las variables efectivamente observadas, se puede realizar un ajuste al filtro para adaptarlo a lo que serían las nuevas condiciones de mercado, la forma de hacerlo es mediante una ponderación de la nueva información y la antigua:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{t+\Delta t} &= \hat{x}_{t+\Delta t|t} + K_{t+\Delta t}(z_{t+\Delta t} - \hat{z}_{t+\Delta t}) \\ \hat{P}_{t+\Delta t} &= (I - K_{t+\Delta t}H_{t+\Delta t})P_{t+\Delta t} \quad .\end{aligned}\tag{3.6}$$

I corresponde a la matriz identidad de dimensión $n \times n$, mientras que K es lo que se denomina ganancia de Kalman y se define por el siguiente set de ecuaciones:

$$\begin{aligned}K_{t+\Delta t} &= P_{t+\Delta t|t}H'_{t+\Delta t}\Omega_{t+\Delta t}^{-1} \quad . \\ \Omega_{t+\Delta t} &= H_{t+\Delta t}P_{t+\Delta t|t}H'_{t+\Delta t} + R_{t+\Delta t|t}\end{aligned}\tag{3.7}$$

$\Omega_{t+\Delta t}$ es la varianza de la predicción de las innovaciones, y junto a la esperanza de la predicción permiten caracterizar la distribución de las innovaciones y por ende son fundamentales para la estimación de los parámetros del modelo mediante el método de máxima verosimilitud.

El método de máxima verosimilitud busca encontrar el set de parámetros que maximiza la probabilidad de que los datos provengan de una distribución supuesta inicialmente. Bajo ciertas condiciones de regularidad, este método entrega estimaciones consistentes y asintóticamente normales.

Dado los supuestos de normalidad en todas las ecuaciones del filtro y la naturaleza lineal de éste, es que la distribución conjunta de las observaciones sigue la forma de una normal multivariada:

$$f_{z_{t+\Delta t}|t}(z_{t+\Delta t}) = \frac{1}{2\pi |\Omega_{t+\Delta t}|^{\frac{1}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2} (z_{t+\Delta t} - \hat{z}_{t+\Delta t})' \Omega_t^{-1} (z_{t+\Delta t} - \hat{z}_{t+\Delta t}) \right] \quad . \quad 3.8$$

Dada además la independencia de las variables de estado y las perturbaciones, se puede obtener la distribución de los datos de toda la muestra y con ello su forma logarítmica:

$$\log L(\psi) = \sum_t \left(\log \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2} \log |\Omega_t| - \frac{1}{2} (z_{t+\Delta t} - \hat{z}_{t+\Delta t})' \Omega_t^{-1} (z_{t+\Delta t} - \hat{z}_{t+\Delta t}) \right) \quad 3.9$$

De donde la función de verosimilitud depende del set de parámetros escogidos, ψ . Dado que cualquier problema de optimización es invariante a la suma de constantes, la función a maximizar queda expresada como:

$$\log L(\psi) = \sum_t \left(-\frac{1}{2} \log |\Omega_t| - \frac{1}{2} (z_{t+\Delta t} - \hat{z}_{t+\Delta t})' \Omega_t^{-1} (z_{t+\Delta t} - \hat{z}_{t+\Delta t}) \right) \quad 3.10$$

Para efectos de la inicialización del filtro, es necesario calcular los momentos incondicionales de las variables de estado, los que fueron obtenidos mediante la fórmula de momento condicional, llevando el plazo a infinito (Ver Anexo C para el cálculo de momentos condicionales).

3.2 El filtro de Kalman extendido

Como se comentó en la sección anterior, el filtro de Kalman está diseñado para una relación lineal entre las variables observables y las variables de estado a través de la matriz H , pero la modelación de este trabajo valoriza opciones, en cuyo caso la relación no es lineal como cuando se usan sólo Futuros. Dada la forma funcional y naturaleza no lineal, se hace necesaria la aplicación de una extensión del filtro, para lo cual se usa el

desarrollo en series de Taylor de primer orden para linealizar la ecuación de valorización. Esta metodología fue propuesta por Harvey 1990¹⁸.

En el nuevo contexto, la ecuación de medida asume la existencia de una función $P(x_t)$ que relaciona las variables observables con las variables de estado:

$$z_t = P(x_t) + v_t \quad v_t \sim N(0, R_t) \quad 3.11$$

Siguiendo a Harvey 1990, la función $P(x_t)$ puede ser linealizada en torno al punto $\hat{x}_{t|t+\Delta t}$:

$$P(x_t) = P(\hat{x}_{t|t+\Delta t}) + \left. \frac{\partial P(x_t)}{\partial x_t} \right|_{x_t = \hat{x}_{t|t+\Delta t}} (x_t - \hat{x}_{t|t+\Delta t}) \quad 3.12$$

Con esto, se define una nueva ecuación de medida linealizada usando la ecuación anterior.

$$z_t = Hx_t + \bar{d}_t + v_t \quad v_t \sim N(0, R_t) \quad 3.13$$

Donde:

$$H = \left. \frac{\partial P(x_t)}{\partial x_t} \right|_{x_t = \hat{x}_{t|t+\Delta t}} \quad 3.14$$

$$\bar{d}_t = P(\hat{x}_{t|t+\Delta t}) - \left. \frac{\partial P(x_t)}{\partial x_t} \right|_{x_t = \hat{x}_{t|t+\Delta t}} (\hat{x}_{t|t+\Delta t})$$

Para obtener la derivada, se usará el supuesto de Trolle & Schwartz 2009, donde para la valorización de opciones se asume que el subyacente es directamente el Futuro

¹⁸ Implementada también en el trabajo de Cortázar, Schwartz & Tapia 2011. Donde al usar bonos de gobierno amortizables, se ven en la necesidad de linealizar la ecuación de valorización.

respectivo (y no el entregado por la ecuación de valorización mediante el uso de las variables de estado), esto hace que la derivada, y por ende la linealización, de $P(x_t)$ dependa sólo de la variable de estado volatilidad, quedando determinada por:

$$\frac{\partial C}{\partial v} = e^{-rT} \left[F \frac{\partial P_1}{\partial v} - K \frac{\partial P_2}{\partial v} \right] \quad 3.15$$

Con

$$\frac{\partial P_j}{\partial v} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[b_j(t) \frac{e^{-i\phi \ln K} f_j(x, v, t; \phi)}{i\phi} \right] d\phi, \quad j = 1, 2 \quad 3.16$$

4. ESTUDIO DATOS DE MERCADO.

4.1 Futuros

Un contrato futuro es aquél que obliga a una de las partes a comprar y a la otra a vender a un precio determinado un activo (el subyacente) a un plazo fijo. Estos contratos son muy populares, ya que por su naturaleza, ayudan en gran medida a la gestión del riesgo y la especulación. Acorde con lo anterior, este mercado ha aumentado en volumen y en estos momentos es posible encontrar, para el mercado del petróleo, contratos futuros que llegan hasta los nueve años plazo. Esto es importante, ya que son los activos financieros más usados para efectos de calibración de modelos estocásticos, para lo cual se necesita que los datos disponibles sean lo más completos y creíbles posibles (en términos de plazos y liquidez).

En las bolsas internacionales se transan distintos futuros de *commodities*. A continuación se muestra el siguiente cuadro con la disponibilidad de plazos para algunos de ellos.

Commodity	Sigla	Bolsa	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
WTI	CL	NYMEX													
Brent	CB	ICE													
Plata	SI	COMEX													
Cobre	HG	COMEX													
Cobre	MCU	LME													
Oro	GC	COMEX													
Gas Natural	NG	NYMEX													

Figura 1. Disponibilidad de contratos Futuros

Las bolsas nombradas en el cuadro corresponden al “*New York Mercantile Exchange*” o “*Commodity Exchange*” (NYMEX ó COMEX), al “*Intercontinental Exchange*” (ICE) y “*London Metal Exchange*”(LME).

En el estudio de los datos, se tomarán en cuenta los precios de futuros a contar del 03/01/2006 hasta el 07/04/2011 para el WTI y desde el 10/12/2007 hasta el 07/04/2011 para el petróleo Brent. Es interesante observar la serie de tiempo de los precios de ambos *commodities*.

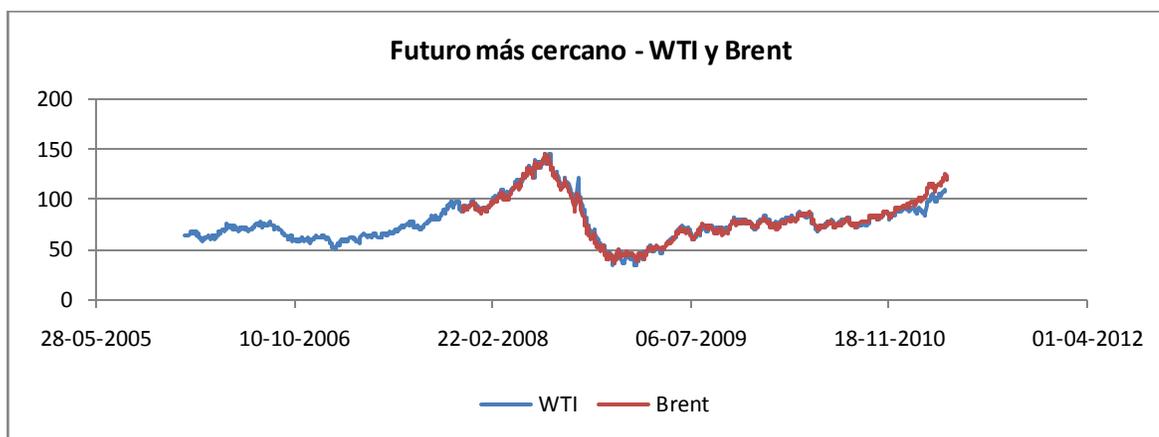


Figura 2. Serie de tiempo de los petróleos WTI y Brent

Se tiene que ambos precios logran llegar a un valor cercano a los 150 dólares el barril¹⁹ a principios del año 2008, para luego caer abruptamente, en línea con la crisis de este mismo año, bajo los 50 dólares. Además, se tiene una relación evidente en los precios de ambos *commodities* en estudio, ya que sus precios siguen una trayectoria prácticamente equivalente en el tiempo.

En los últimos años, los plazos máximos disponibles, para precios de futuros, de estos dos *commodities* se han igualado. En la siguiente figura se muestra, para las fechas antes mencionadas, esta aseveración.

¹⁹ Un barril de petróleo equivale a 159 litros (42 galones)

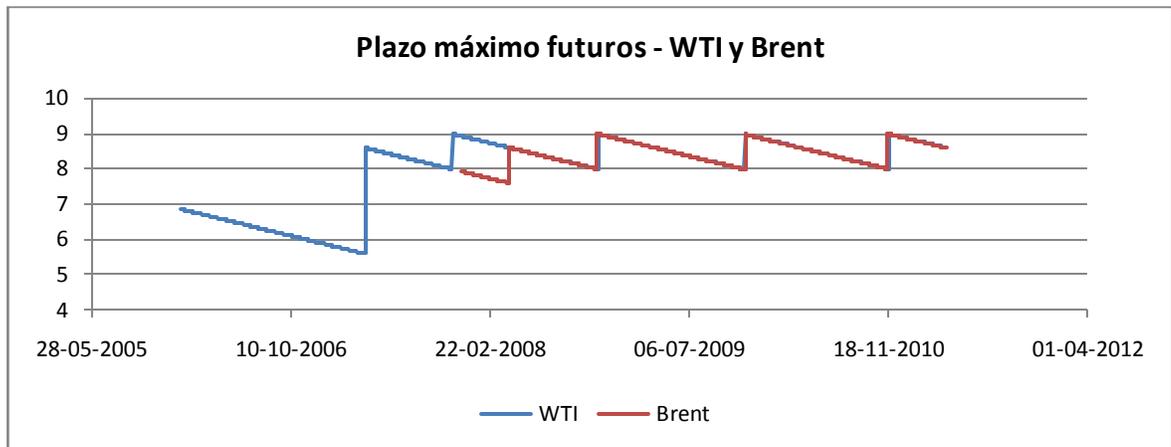


Figura 3. Gráficos de plazos máximos disponibles para los futuros de WTI y Brent.

Aquí se puede apreciar, tanto para el Brent como para el WTI, cómo va decayendo el plazo del futuro más largo para cada uno, a medida que éstos se acercan a su vencimiento y en intervalos de un año, ocurre el salto cuando se crea un nuevo contrato futuro con vencimiento a 9 años, que pasa a ser el futuro con máximo plazo, en reemplazo del anterior. Este indicador llega a ser igual en ambos *commodities* a partir del 08/04/2008. Además, como otra medida de comparación, se pueden chequear la cantidad de contratos disponibles en cada fecha, obteniendo lo siguiente.

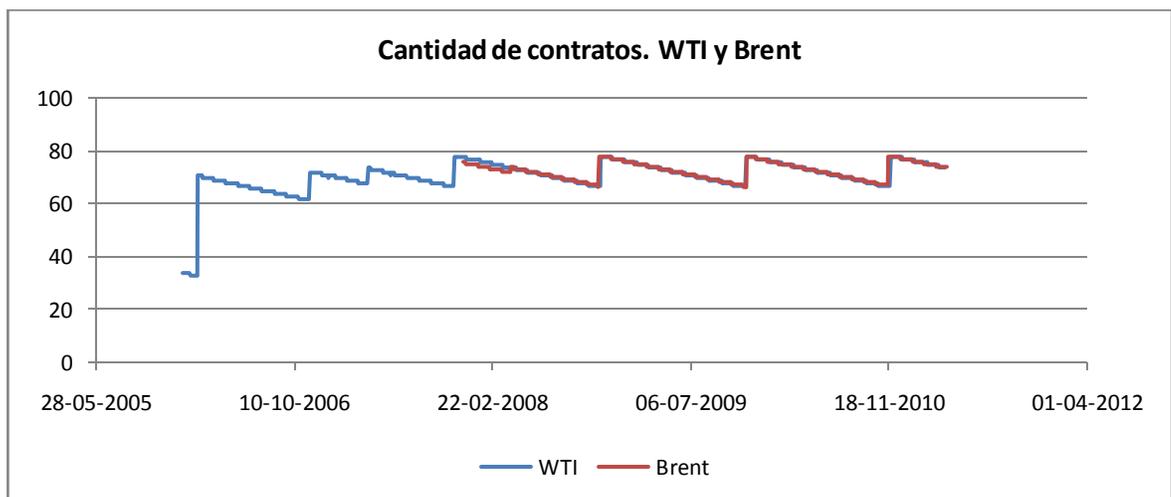


Figura 4. Cantidad de contratos disponibles de futuros para los petróleos WTI y Brent

Se tiene una evolución positiva de la cantidad de contratos, en donde la disponibilidad de éstos se hace equivalente para ambos *commodities* a partir de abril de 2008. En términos numéricos, todos los datos de futuros antes presentados pueden resumirse en la Tabla 1.

Contrato	Sigla	# Contratos	Precio máximo	Precio mínimo	Volatilidad Spot	Volatilidad Retornos
WTI	CL	92630	145.29	33.87	20.44	2.7%
Brent	CB	62364	146.08	36.61	21.5	2.67%

Tabla 1. Características numéricas de los contratos futuros estudiados

La mayor cantidad de contratos de WTI encontrada, se debe al mayor rango de fechas incluidas para éste. Tanto el precio máximo como el mínimo, son similares entre ambos y alcanzados contemporáneamente en los dos *commodities*. Por otra parte, las volatilidades del precio *spot* y de los retornos son prácticamente iguales, pero aún así, son mediciones históricas y no reflejan lo que espera el mercado del comportamiento de estos activos.

4.2 Opciones

Una opción es el derecho, pero no la obligación, de comprar o vender un subyacente a un precio determinado a un plazo fijo. En estos contratos es necesario pagar una prima (a diferencia de los contratos futuros que no requieren un pago), ya que la flexibilidad otorgada sólo da la posibilidad de escenarios con flujos positivos en el futuro, o en el peor de los casos, iguales a cero. Por ende el valor presente de estos contratos siempre es distinto de cero. Las opciones de los *commodities* en estudio son escritas sobre futuros que, a la fecha de vencimiento de la opción, les queda un mes para madurar.

El filtro que se utiliza sobre la base de datos es el mismo que el implementado en Trolle & Schwartz 2009. Se eligieron opciones *out-of-the-money* (OTM) del tipo *Call* y *Put*, y se agruparon según los rangos de *moneyness* 0.78-0.82, 0.82-0.86, 0.86-0.90, 0.90-0.94, 0.94-0.98, 0.98-1.02, 1.02-1.06, 1.06-1.10, 1.10-1.14, 1.14-1.18 y 1.18-1.22, donde *moneyness* se define como el precio de ejercicio de la opción dividido por el precio del contrato futuro respectivo. De las opciones que pertenecen a un mismo intervalo, se selecciona la que es más cercana a la media del rango. Adicionalmente, se consideran sólo opciones con *open interest* mayor a 100 para WTI y mayor a 0 para el Brent. Además de lo anterior, también se exige que las opciones tengan más de 2 semanas de madurez, esto por un tema de liquidez. A diferencia de lo presentado por estos autores, en este trabajo se consideran todos los plazos disponibles y no se usa el *early exercise Premium* (Barone-Adesi & Whaley 87) para transformar precios de opciones americanas a europeas, ya que este alcance requiere muchos supuestos y no aplica para opciones de largo plazo. Por ende, a falta de una herramienta de este tipo, se optó por tomar los precios en su formato original²⁰.

Para realizar una comparación de la disponibilidad de datos entre ambos *commodities*, se procedió a contar la cantidad de contratos a distintos rangos de plazo (menor o igual a 3 meses, entre 3 y 6 meses, entre 6 y 9 meses, entre 9 meses y un año, entre 1 y 1.5 años, entre 1.5 y 2 años, entre 2 y 2.5 años, entre 2.5 y 3 años, entre 3 y 4 años y más de 4 años). Esto fue computado para todas las fechas, y se elaboró un diagrama en tonos de grises, en donde a mayor claridad, mayor cantidad de datos existentes y viceversa. De esta manera se puede visualizar la diferencia entre los dos *commodities* en estudio.

²⁰ Un supuesto similar se encuentra en K. Hughen 2010.

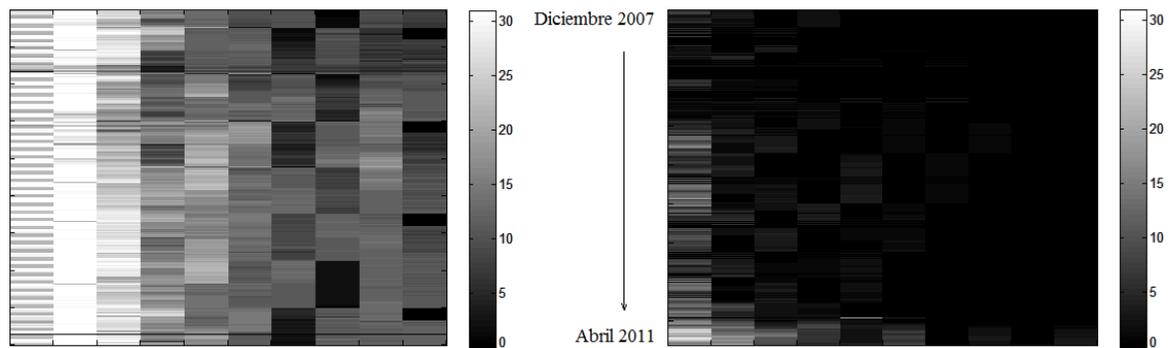


Figura 5. Disponibilidad de Opciones por cantidad de contratos . Izquierda: WTI, derecha: Brent

En la Figura 5, el color negro se interpreta como que no hay contratos con precios disponibles, mientras que el color blanco implica la existencia de más de treinta contratos. Claramente se puede apreciar que el petróleo WTI supera en gran medida la disponibilidad de contratos en comparación con el petróleo Brent. Cabe recalcar que en las primeras seis columnas se grafican los contratos con plazos menores a los dos años y en las últimas cuatro columnas se encuentran todos los contratos con más de dos años de madurez, lo que evidencia la escasez de datos para el petróleo Brent.

Luego, se procedió a computar un gráfico similar, en donde en vez de sumar el número de contratos, se suma el *open interest* para cada uno de los plazos nombrados anteriormente. Siguiendo la misma nomenclatura de la figura anterior, se obtuvo lo siguiente.

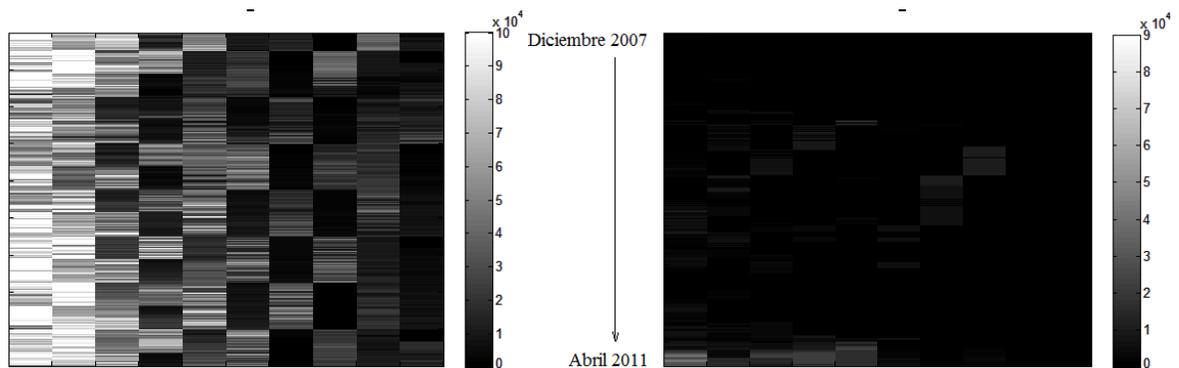


Figura 6. Open Interest – WTI y Brent. Izquierda: WTI, derecha: Brent

Aquí queda en evidencia la mayor profundidad del mercado de opciones en el WTI al ser comparado con el petróleo Brent. Con ello, se puede concluir que no se dispone de liquidez, ni gran cantidad de precios para plazos largos en el petróleo Brent.

En términos numéricos, la siguiente tabla resume los datos de opciones disponibles después de aplicar el filtro mencionado.

<i>Comm.</i>	# opciones	# opciones por día	Suma Open Interest	Open interest promedio	Promedio plazo máximo opciones
WTI	204415	156	452255981	2212	4.39
Brent	12030	18.26	11453032	952	1.88

Tabla 2. Datos de opciones

4.3 Volatilidades implícitas en los precios de opciones

Con la evidencia del capítulo anterior, y entendiendo que para calibrar satisfactoriamente un modelo estocástico, se requiere gran cantidad de datos y de diversa naturaleza, se hace interesante estudiar el comportamiento de la volatilidad en ambos

commodities. De esta observación, si se encontrase algún patrón de comportamiento similar, entonces puede aprovecharse la información del petróleo WTI en el petróleo Brent.

El objeto de esta sección es presentar la forma general con la cual se modela volatilidad, entender la interpretación de los parámetros de ese modelo y con ello estudiar el comportamiento de los datos respecto a cada parámetro. De esta manera, es posible averiguar si las dinámicas de las volatilidades de ambos *commodities* presentan alguna similitud.

Antes de cualquier estudio matemático es interesante visualizar la serie de tiempo de las volatilidades implícitas. Al calcular este indicador, en ambos *commodities*, para las opciones *at-the-money* (ATM) de más corto plazo²¹, se obtiene lo siguiente

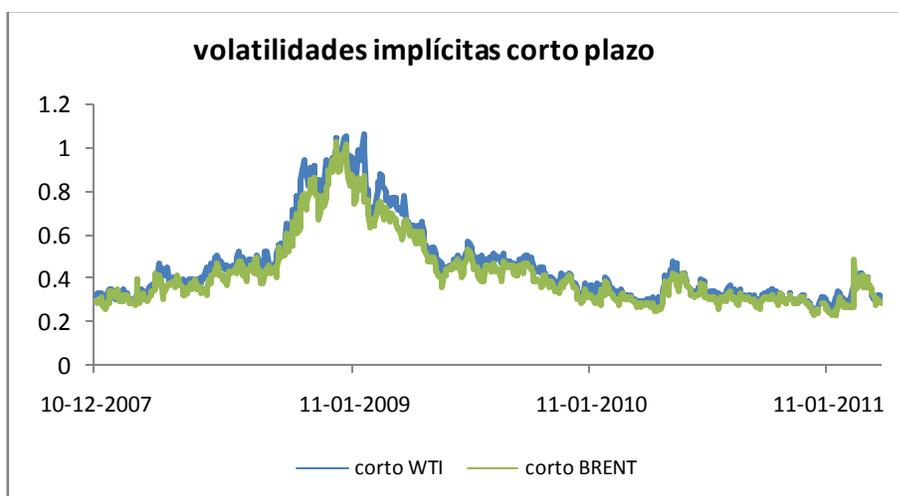


Figura 7. Volatilidades²² implícitas de opciones ATM

²¹ Se usan precios de corto plazo ya que con ellos se puede obtener el mejor estimador de la volatilidad instantánea

²² Medido como desviación estándar de los retornos, obtenida como la volatilidad implícita de las opciones de corto plazo

Lo primero que puede observarse es que la volatilidad varía en gran medida a lo largo del tiempo y por ende es necesario incluir este comportamiento en el modelo, lo cual se logra con volatilidad estocástica. Además, se tiene que la evolución de esta variable en ambos *commodities* es similar, observándose desviaciones temporales entre ellas. Sin embargo, es razonable pensar que ambos *commodities* siguen un proceso similar, en particular en su tendencia de largo plazo, ya que si bien presentan desviaciones en el corto plazo, terminan convergiendo.

Para estudiar el comportamiento de la volatilidad en ambos *commodities*, es útil entender la forma estándar de modelar volatilidad estocástica. La estructura es la siguiente (estructura CIR):

$$dv = \kappa(\theta - v)dt + \sigma\sqrt{v}dW \quad 4.1$$

En palabras simples, se dice que variaciones de la volatilidad (dv) son explicadas por un factor localmente determinístico $\kappa(\theta - v)dt$ y otro estocástico $\sigma\sqrt{v}dW$. El primero se divide en tres, dt es la variación de tiempo, $(\theta - v)$ es la diferencia entre el valor actual de la volatilidad y su media de largo plazo y κ es lo que determina la velocidad con que la volatilidad vuelve a su media de largo plazo. Así, si v se desvía de θ , entonces la parte determinística del proceso va a hacer que ésta vuelva a θ (si v es mayor que θ , entonces $(\theta - v)$ es negativo, lo que empuja a v hacia un valor menor y viceversa), y la fuerza con que lo hará dependerá de κ . Luego, la parte estocástica se explica por un movimiento browniano dW de media cero y desviación estándar \sqrt{dt} , por lo que la varianza de la parte estocástica del proceso queda determinada por σ^2v , donde σ es un factor que pondera el valor instantáneo de v .

Las dificultades que presenta la calibración de una estructura de este tipo, radica en la disponibilidad de los datos utilizados para ello. Los valores de κ y θ están estrechamente relacionados con la esperanza de la evolución de la volatilidad, lo que es determinado

mediante las volatilidades implícitas de largo plazo. Mientras que σ , se relaciona con el comportamiento instantáneo de la volatilidad, por lo que este parámetro depende en gran medida del valor instantáneo de ésta, obtenida a partir de precios de opciones de corto plazo. Por ende, si se tiene un panel de datos en el cual no se dispone de una cantidad representativa de opciones de largo plazo, es difícil poder calibrar los primeros dos parámetros.

Entendiendo esta estructura, se pueden estudiar los datos de ambos *commodities* para verificar si existe alguna relación en los parámetros de la dinámica asumida. Para este caso, se estudiará la media de largo plazo de la volatilidad implícita, la velocidad con la que la volatilidad revierte a su media y la varianza de la varianza. El objetivo es llegar a una relación empírica que dilucide una concordancia entre la estructura de la dinámica de la volatilidad del petróleo WTI y Brent y pueda ser usada en nuestro favor.

El modelo asumido para obtener las volatilidades implícitas fue el de Black 76, que trata sobre valorización de opciones sobre futuros. Las tasas libres de riesgo fueron obtenidas a partir de los datos de la Libor de uno, tres, seis, nueve meses y un año y los swaps de tasas de interés fijo contra flotante (Libor tres meses) con dos, tres, cuatro, cinco y seis años de madurez, ajustando la forma funcional de Svensson 98 a estos datos.

4.3.1 Análisis de correlación entre las volatilidades implícitas de ambos *commodities*

En primer lugar, se calcula la correlación entre las volatilidades implícitas de corto plazo de ambos *commodities*. Esto para determinar si ambas volatilidades son equivalentes, en cuyo caso podría tomarse el valor de esta variable correspondiente al petróleo WTI y usarla en el proceso del petróleo Brent. Siendo consistentes con la modelación clásica de la volatilidad, lo importante es medir la correlación entre las diferencias de volatilidad en el tiempo. Para ello, se separa la muestra en 3 partes, pre, post y en crisis financiera (2008-2009). Los resultados a continuación muestran las correlaciones respectivas.

Periodo	Correlación
Completo	0.6741
Pre Crisis	0.58074
Crisis	0.7498
Post Crisis	0.6376

Tabla 3. Correlaciones de Volatilidad Implícita Instantánea

Las correlaciones no llegan a ser tan elevadas como para suponer que ambas variables de estado son iguales en cada instante.

4.3.2 Análisis respecto de θ

Se toman las fechas en las cuales se dispone de contratos con madurez mayor a 4.5 años y se obtiene la media de las volatilidades implícitas de largo plazo. El resultado se muestra en la siguiente tabla.

Media WTI	Media Brent	Diferencia absoluta	Diferencia %
0.30885	0.319	0.01014	3.18%

Tabla 4. Volatilidades de Largo Plazo

Así, se tiene que la diferencia de este indicador en términos absolutos es pequeña, resultando consistente con la Figura 8, en donde se observa que ambas volatilidades tienden a converger.

4.3.3 Análisis respecto de κ

Se calcula el half-life de la volatilidad. A modo de ejemplo se muestra la estructura de volatilidades para un día en específico, 30/03/2009.

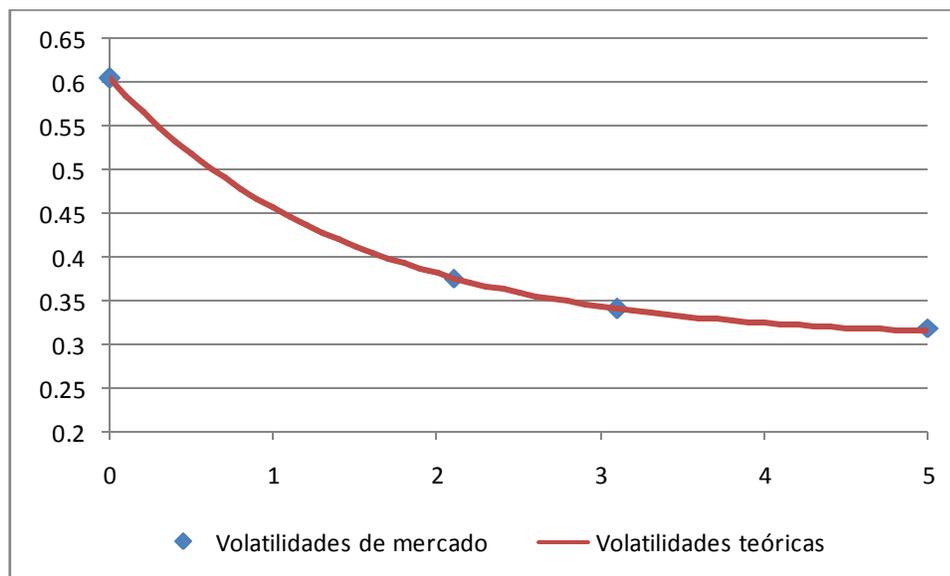


Figura 8. Estructura de Volatilidades en el Plazo

Donde los puntos azules corresponden a datos de mercado y la curva roja es el resultado de ajustar la esperanza de un modelo CIR a éstos. Con ello, se define el half-life como el plazo al cual la volatilidad llega a su nivel medio entre la volatilidad de corto y largo plazo. Para efectos comparativos, se usan los datos con volatilidades instantáneas altas (mayor a 60%), donde el efecto de la reversión a la media de la volatilidad se observa con mayor robustez. Así, se calcula la media de este parámetro para ambos *commodities*.

Med. WTI	Med. Brent	Dif. Absoluta	Dif. %
0.62951797	0.63805835	0.008540	1.35%

Tabla 5. Media del Half-life de las Volatilidades Implícitas

De este estudio se obtiene que la velocidad con que la volatilidad vuelve a su media de largo plazo es similar entre ambos *commodities*.

4.3.4 Análisis respecto de σ

Luego, se procede a calcular la desviación estándar de las volatilidades implícitas de corto plazo, los resultados se presentan a continuación.

Desv. de var. WTI	Desv. de var. Brent	Diferencia absoluta	Diferencia %
0.045022	0.057827	0.0128	22.147%

Tabla 6. Desviación Estándar de la Volatilidad Implícita Instantánea

De donde se obtiene que la magnitud de las desviaciones de la volatilidad del petróleo Brent es mayor a la del WTI.

A modo de resumen del estudio de los datos, en primer lugar se puede extraer que las opciones del petróleo WTI son mucho más líquidas y disponen de una mayor cantidad de datos de largo plazo que el petróleo Brent. En segundo lugar, al estudiar el comportamiento de la volatilidad de ambos commodities, se obtiene que sus medias de largo plazo y velocidades de reversión a la media apenas difieren en un 3,18% y 1,35% respectivamente. Sin embargo, la desviación estándar de la volatilidad de éstos presenta diferencias mayores al 22%. Bajo estos resultados es que se propone el modelo de este paper.

Es interesante también cuestionarse en qué grado estos resultados tienen sentido. El estudio realizado fue hecho en base a dos *commodities* con una estrecha relación, donde ellos son sustitutos entre sí. Es de esperarse que los riesgos asociados a ambos en el largo plazo sea común entre ellos, ya que a plazos elevados, la incertidumbre va a estar determinada por factores sistemáticos que los afecta por igual o en manera muy similar. De ahí que las volatilidades implícitas de mercado tiendan a valores similares en el largo plazo y reviertan a esta con velocidades similares.

5. EL MODELO

5.1 El modelo base para un commodity

El modelo propuesto en esta tesis sigue la misma línea de Richter & Sorensen 2002, realizándole algunos cambios para adaptarlo al mercado del petróleo y relajando algunos supuestos. En primer lugar, se eliminarán todas las componentes estacionales ya que el petróleo no contiene este patrón, además se relajará el supuesto de tasas de interés constantes para hacerlo más general²³. En consecuencia con lo anterior, en vez de asumir que el *convenience yield* es un factor, se modelará directamente la diferencia entre la tasa libre de riesgo y el *convenience yield* ($r - \delta$) el cual se denomina *costo of carry*, y . La dinámica resultante en la medida real es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 dP_t &= P_t [(y_t + \lambda_p v_t)dt + \sqrt{v_t}dW_{1,t}] \\
 dy_t &= (\alpha - \beta y_t + \lambda_y \sigma_\delta v_t)dt + \sigma_y \sqrt{v_t}dW_{2,t} \\
 dv_t &= (\theta - \kappa v_t + \lambda_v \sigma_v v_t)dt + \sigma_v \sqrt{v_t}dW_{3,t}
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Y la respectiva estructura en la medida neutral Q:

$$\begin{aligned}
 dP_t &= P_t [y_t dt + \sqrt{v_t} dW_{1,t}^Q] \\
 dy_t &= (\alpha - \beta y_t)dt + \sigma_y \sqrt{v_t} dW_{2,t}^Q \\
 dv_t &= (\theta - \kappa v_t)dt + \sigma_v \sqrt{v_t} dW_{3,t}^Q
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Donde los parámetros del sistema tienen la misma interpretación que en la versión de Richter & Sorensen 2002.

²³ Se asumirá que existe una estructuras de tasas de interés, pero que ésta no está correlacionada con el precio del commodity, esto se hace por simpleza ya que de querer incluir correlación sería necesario plantear un modelo estocástico para la tasa libre de riesgo, que para ser realista tendría que tener más de 2 factores lo cual amplificaría la complejidad de calibración en manera exponencial.

5.2 Precios de futuros

Considerando que el futuro depende de las variables de estado y de la madurez $F(P_t, y_t, v_t, T)$, se puede aplicar el lema de Ito sobre el derivado y obtener la esperanza del proceso, con lo que es posible deducir la ecuación diferencial que debe cumplir:

$$E[dF]/F = E \left[F_P dP + F_\delta d\delta + F_v dv + \frac{1}{2} F_{PP} (dP)^2 + \frac{1}{2} F_{vv} (dv)^2 + \frac{1}{2} F_{\delta\delta} (d\delta)^2 + F_{Pv} (dP)(dv) + F_{v\delta} (dv)(d\delta) + F_{P\delta} (dP)(d\delta) \right] / F \quad 5.3$$

Dado que el derivado corresponde a un futuro, se sabe que éste debe rentar cero en la medida neutral:

$$\begin{aligned} E[dF]/F &= 0 \\ \frac{1}{2} v P^2 \frac{\partial^2 F}{\partial P^2} + \frac{1}{2} \sigma_y^2 v \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \sigma_v^2 v \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \rho_{1,2} \sigma_y v P \frac{\partial^2 F}{\partial P \partial y} + \rho_{1,3} \sigma_v v P \frac{\partial^2 F}{\partial P \partial v} \\ &+ \rho_{2,3} \sigma_y \sigma_v v \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial v} + y P \frac{\partial F}{\partial P} + (\alpha - \beta y) \frac{\partial F}{\partial y} + \\ &(\theta - \kappa v) \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial T} = 0 \end{aligned} \quad 5.4$$

Con condición de borde $F(P, y, v, 0) = P$.

La solución de la ecuación diferencial para cualquier T sigue la forma propuesta por Schwartz 1997 (Tiene su análogo en tasas de interés en Duffie & Kan 1996):

$$F(P, y, v, T) = P e^{A(T) + B(T)v + D(T)y} \quad 5.5$$

Con esta fórmula, es posible calcular las respectivas derivadas, reemplazarlas en la ecuación diferencial y separar por términos, obteniendo un sistema de ecuaciones

diferenciales ordinarias (desarrollo detallado en el Anexo D). De lo cual se extrae lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 D'(T) &= \alpha D(T) + \theta B(T), \quad D(0) = 0 \\
 \frac{1}{2} \sigma_y^2 D(T)^2 + \rho_{1,2} \sigma_y D(T) + \frac{1}{2} \sigma_v^2 B(T)^2 + \\
 (\rho_{1,3} \sigma_v + \rho_{2,3} \sigma_y \sigma_v D(T) - \kappa) B(T) - B'(T) &= 0, \quad B(0) = 0
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Y

$$\alpha D(T) + \theta B(T) - A'(T) = 0, \quad A(0) = 0. \tag{5.7}$$

No existen soluciones a las ecuaciones diferenciales recién presentadas pero si hay disponible métodos numéricos estándar de resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias para obtener los resultados en forma muy precisa.

5.3 Precios de opciones

Para este estudio y dada la estructura del mercado de opciones de *commodities*, se considerarán precios de opciones escritos sobre futuros. Para ello se requiere obtener la dinámica de éstos, lo cual se logra mediante el lema de Ito:

$$\begin{aligned}
 dF &= F_P dP + F_y dy + F_v dv + \frac{1}{2} F_{PP} (dP)^2 + \frac{1}{2} F_{vv} (dv)^2 + \frac{1}{2} F_{\delta\delta} (d\delta)^2 + F_{Pv} (dP)(dv) \\
 &\quad + F_{vy} (dv)(dy) + F_{Py} (dP)(dy) \\
 \frac{dF_t}{F_t} &= (0)dt + \frac{F_P}{F_t} P_t e^{\nu(t)} \sqrt{v_t} dW_{1,t}^Q + \frac{F_\delta}{F_t} e^{\nu(t)} \sigma_y \sqrt{v_t} dW_{2,t}^Q + \frac{F_v}{F_t} \sigma_v \sqrt{v_t} dW_{3,t}^Q \\
 dF_t &= F_t \sqrt{v_t} [dW_{1,t}^Q + \sigma_v B(T) dW_{3,t}^Q + \sigma_y D(T) dW_{2,t}^Q]
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Donde,

$$F_t = P_t e^{A(T)+B(T)v+D(T)y} \quad 5.9$$

Y se definirá para uso posterior:

$$\begin{aligned} \sigma_F^2(T) &= 1 + \sigma_v^2 B^2(T) + \sigma_y^2 D^2(T) + 2\rho_{1,3} \sigma_v B(T) + 2\rho_{1,2} \sigma_y D(T) \\ &\quad + 2\rho_{2,3} \sigma_v \sigma_y B(T) D(T) \\ \sigma_{Fv}(T) &= \rho_{1,3} \sigma_v + \sigma_v^2 B(T) + \rho_{2,3} \sigma_y \sigma_v D(T) \end{aligned} \quad 5.10$$

Ahora, con la dinámica del futuro, se puede abarcar el problema de la valorización de opciones. Para ello se seguirá la metodología propuesta por Heston 93 y con ese objetivo es necesario suponer una forma funcional del precio de las opciones, para este caso aplica la fórmula de valorización de opciones sobre futuros de Black 76 (A diferencia de Heston 93 que deduce las fórmulas de valorización sobre acciones y por ende usa la forma de Black & Scholes 1973)²⁴:

$$C_t(F, v, T) = e^{-rT} [FP_1 - KP_2] \quad 5.11$$

Usando el lema de Ito y la fórmula de Feynmann-Kac se puede obtener la ecuación diferencial que debe cumplir cualquier derivado sobre un Futuro:

$$\begin{aligned} dC &= -\frac{\partial C}{\partial T} dt + \frac{\partial C}{\partial F} dF + \frac{\partial C}{\partial v} dv + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial F^2} (dF)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial v^2} (dv)^2 + \frac{\partial^2 C}{\partial F \partial v} (dF)(dv) \\ &\quad - C_T + C_v(\theta - \kappa v_t) + \frac{1}{2} C_{FF} F^2 v_t \sigma_F^2(T) + \frac{1}{2} C_{vv} \sigma_v^2 v_t + C_{Fv} F_t v_t \sigma_{Fv}(T) - Cr = 0 \end{aligned} \quad 5.12$$

Con condición de borde $C(F, v, 0) = \max\{F - K, 0\}$ para el caso de una call Europea. Siguiendo los pasos de Heston 93, se cambiará la ecuación diferencial obtenida que está

²⁴ Para las tasas libres de riesgo se usaron las tasas Libor a 3, 6, 9 meses y 1 año y los swaps de tasas de interés fijo contra flotante (contra Libor de 3 meses) con plazos de 2, 3, 4, 5 y 6 años, realizando, para cada día de estudio, mínimos cuadrados sobre la fórmula de Svensson 94, una extensión de Nelson & Siegel 87. Ver Anexo E para ver ambas formas funcionales

en función de F a $x = \ln(F)$. Las repercusiones de esto se resumen en el siguiente cambio en las derivadas parciales de C :

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial F} &= \frac{\partial C}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial F} = \frac{C_x}{F} \\ \frac{\partial^2 C}{\partial F^2} &= \frac{\partial}{\partial F} \left(\frac{\partial C}{\partial F} \right) = \frac{\partial}{\partial F} \left(\frac{C_x}{F} \right) = -\frac{1}{F^2} C_x + \frac{1}{F} \frac{C_{xx}}{F} = -\frac{1}{F^2} C_x + \frac{1}{F^2} C_{xx} \quad 5.13 \\ \frac{\partial C}{\partial F \partial v} &= \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial C}{\partial F} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{C_x}{F} \right) = \frac{C_{xv}}{F}\end{aligned}$$

Quedando lo siguiente:

$$\begin{aligned}-C_T + C_v(\theta - \kappa v_t) + \frac{1}{2}(-C_x + C_{xx})v_t \sigma_F^2(T) \\ + \frac{1}{2}C_{vv}\sigma_v^2 v_t + C_{xv}v_t \sigma_{Fv}(T) - Cr = 0\end{aligned} \quad 5.14$$

Con condición de borde $C(x, v, 0) = \max[e^x - K, 0]$. El siguiente paso consiste en calcular todas las derivadas parciales a la forma funcional supuesta (calculadas en el Anexo F) y luego, corresponde reemplazarlas en la ecuación diferencial del derivado en estudio, quedando:

$$\begin{aligned}-\left[e^x \frac{\partial P_1}{\partial T} - K \frac{\partial P_2}{\partial T} \right] + \left[e^x \frac{\partial P_1}{\partial v} - K \frac{\partial P_2}{\partial v} \right] (\theta - \kappa v_t) \\ + \frac{1}{2} \left(-\left[e^x \left(P_1 + \frac{\partial P_1}{\partial x} \right) - K \frac{\partial P_2}{\partial x} \right] \right. \\ \left. + \left[e^x \left(P_1 + 2 \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} \right) - K \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} \right] \right) v_t \sigma_F^2(T) \quad 5.15 \\ + \frac{1}{2} \left(e^x \frac{\partial^2 P_1}{\partial v^2} - K \frac{\partial^2 P_2}{\partial v^2} \right) \sigma_v^2 v_t \\ + \left(e^x \left(\frac{\partial P_1}{\partial v} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial v} \right) - K \frac{\partial^2 P_2}{\partial x \partial v} \right) v_t \sigma_{Fv}(T) = 0\end{aligned}$$

Dado que la ecuación diferencial recién obtenida debe cumplirse para cualquier contrato (Esto quiere decir, para cualquier x y cualquier K), se puede simplificar en gran medida, en particular se usa la siguiente estructura de contratos:

$K = 0$ y $x = 0$:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial P_1}{\partial T} + \frac{\partial P_1}{\partial v} (\theta - \kappa v_t) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} \right) v_t \sigma_F^2(T) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial v^2} \sigma_v^2 v_t \\
 + \left(\frac{\partial P_1}{\partial v} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial v} \right) v_t \sigma_{Fv}(T) = 0
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

$K = 1$ y $x = -\text{inf}$:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial P_2}{\partial T} + \frac{\partial P_2}{\partial v} (\theta - \kappa v_t) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial P_2}{\partial x} - \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} \right) v_t \sigma_F^2(T) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_2}{\partial v^2} \sigma_v^2 v_t \\
 + \frac{\partial^2 P_2}{\partial x \partial v} v_t \sigma_{Fv}(T) = 0
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Con lo anterior se logra obtener dos ecuaciones diferenciales independientes para P_1 y P_2 pero no tienen forma cerrada conocida. A pesar de lo anterior, Heston 93 demuestra que la función característica de estas probabilidades f_1 y f_2 cumplen el mismo set de ecuaciones diferenciales que P_1 y P_2 respectivamente. Además nos da un *guess* que aprovecha la forma *affine* del modelo entregándonos un set de ecuaciones diferenciales que se pueden resolver con métodos numéricos estándar. La forma planteada por Heston 93 es la siguiente:

$$f_j(x, v, t; \phi) = e^{a_j(T) + b_j(T)v + i\phi x} \tag{5.18}$$

Con condiciones de borde $a_j(0) = 0$ y $b_j(0) = 0$.

Luego de reemplazar las derivadas parciales sobre sus respectivas ecuaciones diferenciales, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (desarrollo detallado en el Anexo G):

$$\begin{aligned}
 b_j(T)' &= \left(-\frac{1}{2}\phi^2 + u_j i\phi\right) \sigma_F^2(T) + \left(K_j + i\phi\sigma_{Fv}(T)\right) b_j(T) + \frac{1}{2}\sigma_v^2 b_j^2(T) \\
 b_j(0) &= 0 \\
 a_j(T)' &= \theta b_j(T), \quad a_j(0) = 0
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

Con:

$$u_1 = \frac{1}{2}, \quad u_2 = -\frac{1}{2}, \quad K_1 = -k + \sigma_{Fv}(T), \quad K_2 = -k \tag{5.20}$$

Es importante recalcar el hecho de que para cada ϕ se obtiene una solución distinta para cada a_j y b_j , esto es importante para calcular las respectivas probabilidades a partir de las funciones característica mediante la siguiente integral:

$$P_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\phi \ln[K]} f_j(x, v, T; \phi)}{i\phi} \right] d\phi, \quad j = 1, 2 \tag{5.21}$$

Ya que la integral es en ϕ y por ende es necesario resolver el sistema de EDOs para cada valor de ésta.²⁵

²⁵ Ver aspectos numéricos en el Anexo H

5.4 Extensión a Multicommodity

Del estudio de los datos realizado en la sección 4.3, se observa que la estructura estocástica de la volatilidad (los parámetros) no difiere en gran medida entre el petróleo WTI y el petróleo Brent, lo cual permite hacer el supuesto de que ambas estructuras son equivalentes (exceptuando la desviación estándar de la volatilidad instantánea), por lo que se procede de la siguiente manera.

En un comienzo se calibra un modelo para el *commodity* (WTI) con gran cantidad de datos y con largas madureces disponibles, esto entregará una dinámica (determinada por los parámetros) que se usará como primera etapa de calibración.

Una vez calibrado el modelo base, se extrae la estructura estocástica obtenida para la volatilidad (sus parámetros) para ser copiada en la estructura del *commodity* con menor cantidad de datos. Esto, aparte de ser consistente con el análisis empírico de los datos, simplifica en gran medida el proceso de calibración ya que disminuye la cantidad de parámetros a estimar sin aumentar ni disminuir la cantidad de factores que determinan el estado del sistema.

Esta metodología es análoga a la implementada por Cortázar & Eterovic 2011, donde el enfoque es netamente en precios futuros y el propósito es extrapolar los precios de largo plazo del *commodity* con menor cantidad de datos. En él, asumen que el factor estocástico que sigue una caminata aleatoria (i.e. no revierte a su media y por ende afecta a toda la estructura de los precios futuros) tiene la misma estructura estocástica para ambos *commodities*, lo cual tiene su mayor impacto en la pendiente de largo plazo de los precios futuros, que tienden a ser iguales y con lo cual el modelo mejora en gran medida la valorización.

En el trabajo realizado en esta tesis se asume que la estructura estocástica de la volatilidad es la que es equivalente, esto en vista de que la falta de datos se encuentra en opciones y por ende es la volatilidad la que tiene el riesgo de quedar mal calibrada.

6. MODELOS Y RESULTADOS.

6.1 Datos utilizados

Del panel de datos original, se selecciona un subgrupo que contiene todos los precios de futuros y opciones de los petróleos WTI y Brent, comprendidos entre el 04/04/2009 y el 04/04/2011. Esta información cubre un total de 730 días, de los cuales 520 son hábiles. Con la intención de simplificar el análisis, el nuevo panel de datos seleccionado se subdivide en dos partes principales; una de las cuales recoge la información de los futuros y la otra de las opciones para el mismo período de tiempo. La muestra de los futuros, a su vez, se divide en dos sub paneles: el I y el II. El primero considera todos los datos comprendidos entre 04/04/2009 y el 04/04/2010 y el segundo contempla los datos restantes hasta el 04/04/2011. Para las opciones se sigue una lógica similar, en donde los paneles Ia y Ib, contienen la información desde el 04/04/2009 hasta el 04/04/2010 y los cuadrantes IIa y IIb consideran el período siguiente, hasta el 04/04/2011. Además, para el caso de las opciones, se agrega una subdivisión adicional, que distingue la madurez de éstas. Así, los paneles Ia y IIa agrupan los precios de opciones de corto plazo, y los paneles Ib y IIb los de mediano y largo plazo. Esta estructura de paneles queda explicitada de forma gráfica con la Figura 9:

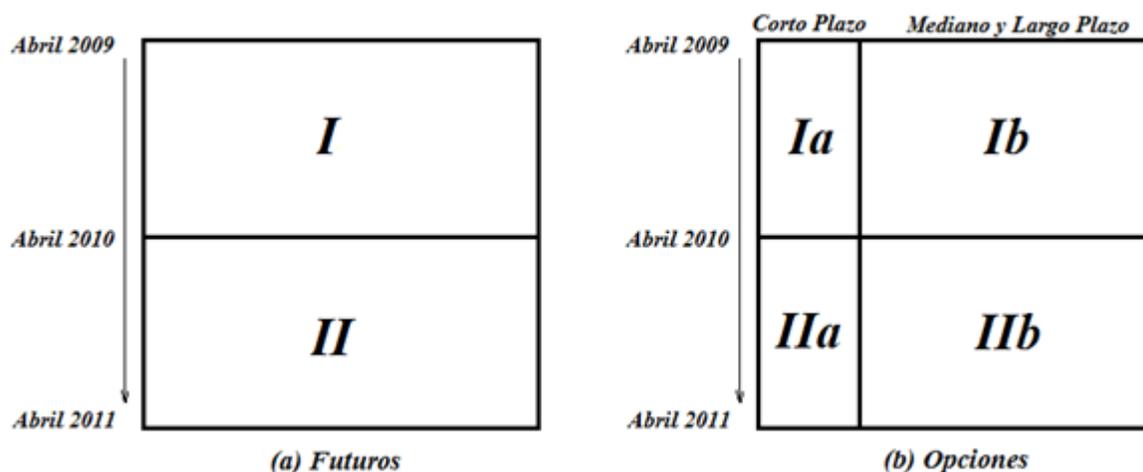


Figura 9. Paneles de datos utilizados para los futuros y opciones.

Dado los objetivos de esta tesis, no se busca extrapolar precios de futuros y por ende, la subdivisión de ese panel sólo radica en la escala de fechas y no en la madurez; dejando todos los plazos disponibles para el proceso de calibración. Con esto, el panel I se utiliza como *in-sample* y el panel II como *out-of-sample*, para todos los modelos a calibrar. Por el contrario, la tesis sí busca extrapolar los precios de opciones de mayor madurez y obtener medidas de comparación para evaluar el mejor desempeño del modelo propuesto. Así, dependiendo del objetivo de cada modelo en estudio, es el modo en que se utilizan los paneles Ia, Ib, IIa y IIb (*in-sample* o *out-of-sample*).

Con el objeto de entender de mejor manera la información utilizada para este análisis y para destacar la mayor disponibilidad de datos del petróleo WTI, se presenta la siguiente tabla:

<i>Commodity</i>	# Futuros	#Opciones	Promedio opciones por día	Promedio Madurez ops. Largas	Open interest prom. por opción por día
WTI	37413	14098	27,007	4,1876	2212
Brent	37378	4241	8,204	1,8476	952

Tabla 7. Descripción de datos utilizados para los paneles de estudio

En primer lugar, se puede observar que la cantidad de precios de futuros, para ambos *commodities*, es prácticamente la misma. No ocurre lo mismo con los datos de opciones, ya que se muestra que el petróleo WTI dispone de más del triple de precios que el Brent, lo que a su vez se refleja en la cantidad promedio de opciones por día para cada caso. Por otra parte, el promedio de madurez de las opciones más largas del WTI, supera por más del doble al de las del Brent. Finalmente, el promedio del *Open interest*, definido como la cantidad de contratos vigentes para una opción en una fecha determinada, también es considerablemente mayor para el WTI, reflejando una liquidez superior para estos contratos por sobre los del Brent.

6.2 Modelos implementados

Para efectos de comparación, se implementan cuatro modelos que se diferencian entre sí en cuanto a los datos de opciones que se utilizan para sus respectivas calibraciones. Dada la naturaleza del problema planteado se presentan los siguientes modelos:

WTI simple: Este modelo considera todos los datos de futuros disponibles del panel I como *in-sample*. Los datos de de los paneles Ia, Ib, II, IIa y IIb, son utilizados como *out-of-sample*, para medir su ajuste al resto de los precios disponibles que no se toman en cuenta en el proceso de calibración.

La estructura de este modelo sigue la forma descrita en el set de ecuaciones 5.2, en donde no se asume ninguna relación entre *commodities*. En él, los parámetros son obtenidos mediante QML a partir de los datos usados para este modelo en particular.

Se dirá que esta implementación es la más simple, ya que considera sólo precios de futuros. Esto facilita en gran medida la tarea de calibración, debido a que los algoritmos numéricos para su cálculo son muy rápidos de computar gracias a su forma cerrada. La cantidad de parámetros estimados en este caso es $N = 13$.

El objetivo de implementar este modelo, es evidenciar la falta de ajuste a los precios de opciones. Esto sería consistente con la noción de que los precios de futuros no son lo suficientemente sensibles a la volatilidad, y con ello sería necesario incluir precios de opciones en la calibración para captar de mejor manera esta variable de estado.

Brent no-Multi: En este modelo, como datos *in-sample*, se utilizan todos los precios de futuros que se encuentran en el panel I y además se incluyen precios de opciones cortas correspondientes al panel Ia. En este caso, los paneles II, Ib, IIa y IIb, que contienen el resto de los precios de futuros y opciones, se usan para medir errores *out-of-sample*.

La estructura de este modelo también sigue la dinámica encontrada en la sección 5.1. Hasta este punto, aun no se considera ninguna relación *inter-commodity*, y al igual que en el modelo anterior, los parámetros son obtenidos mediante QML.

Esta implementación es más compleja debido a la inclusión de precios de opciones, ya que se requiere la resolución numérica de una gran cantidad de ecuaciones diferenciales y es necesario realizar integraciones numéricas para cada precio de opción a computar. Lo anterior conduce a aumentar exponencialmente el tiempo de procesamiento. Adicionalmente se asumen errores distintos para futuros y opciones, teniendo que agregar un parámetro más al sistema ($N+1=14$). Además es necesario el uso de la

versión extendida del filtro de Kalman, lo que duplica el tiempo de trabajo computacional requerido.

El objetivo de implementar este modelo es cuantificar errores sobre opciones de largo plazo, dado que se utilizan opciones de corto plazo en la calibración de éste.

WTI completo: Este modelo usa todos los futuros y opciones disponibles entre las fechas 04/04/2009 al 04/04/2010 correspondientes a los paneles I, Ia y Ib como muestra *in-sample*. Por consiguiente, se utilizan los precios de futuros y opciones restantes de los paneles II, IIa y IIb para medir errores *out-of-sample*.

Esta implementación corresponde a la primera etapa de calibración del modelo *Multicommodity*, siendo en sí mismo un modelo individual descrito por la siguiente dinámica:

$$\begin{aligned}
 dP_t &= P_t [y_t dt + \sqrt{v_t} dW_{1,t}] \\
 dy_t &= (\alpha_{WTI} - \beta_{WTI}) dt + \sigma_{y_{WTI}} \sqrt{v_t} dW_{2,t} \\
 dv_t &= (\theta_{WTI} - \kappa_{WTI} v_t) dt + \sigma_{v_{WTI}} \sqrt{v_t} dW_{2,t}
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Los subíndices WTI fueron incorporados con el objeto de distinguirlos como propios de este modelo. El procedimiento de calibración es implementado mediante QML.

En cuanto a complejidad de implementación, este modelo es equivalente al modelo “Brent no-Multi”, pero con la gran diferencia de que la cantidad de precios de opciones usados en “WTI completo” es más de tres veces mayor²⁶. Además asume varianzas de errores de medición distintas para cada plazo de opciones, teniendo que añadir tres nuevos parámetros al modelo original ($N+3 = 16$).

²⁶ Ver Tabla 7.

Esta implementación tiene dos objetivos: el primero es cuantificar los errores cuando se usan precios de opciones tanto a plazos cortos, como a medianos y largos. El segundo, tiene relación con la naturaleza del modelo planteado en esta tesis, ya que éste corresponde a la primera fase de calibración del modelo *Multicommodity*. Dado esto, se utilizan parte de los parámetros obtenidos en la dinámica de la volatilidad para utilizarlos en la del modelo “Brent Multi”.

Brent Multi: Este modelo considera los mismos datos utilizados que en el modelo “Brent no-Multi”, usando todos los futuros del panel I y opciones del panel Ia como muestra *in-sample*; y los futuros del panel II y opciones de los paneles Ib, IIa y IIb como *out-of-sample*. La diferencia es que éste corresponde a la segunda etapa de calibración del modelo *Multicommodity*.

Dados los argumentos entregados en la sección 4.3, para este modelo se asume que una parte de la dinámica de la volatilidad es igual a la del modelo “WTI completo”. En consecuencia la dinámica es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 dP_t &= P_t [y_t dt + \sqrt{v_t} dW_{1,t}] \\
 dy_t &= (\alpha_{Brent} - \beta_{Brent}) dt + \sigma_{y_{Brent}} \sqrt{v_t} dW_{2,t} \\
 dv_t &= (\theta_{WTI} - \kappa_{WTI} v_t) dt + \sigma_{v_{Brent}} \sqrt{v_t} dW_{2,t}
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

En donde se explicita el uso de los parámetros θ_{WTI} y κ_{WTI} en la dinámica de la volatilidad. La calibración se lleva a cabo mediante QML.

El proceso de calibración de esta etapa es de menor complejidad que el del modelo “Brent no-Multi”, ya que si bien tiene el mismo número de parámetros, θ_{WTI} y κ_{WTI} se dejan fijos, por lo que la cantidad de derivadas parciales a calcular por el optimizador se reducen. Esto, es equivalente a calibrar un modelo “Brent no-Multi” pero con dos parámetros menos ($N+1-2 = 12$).

La finalidad de esta última implementación es poder corroborar si el modelo *Multicommodity* mejora el ajuste a los precios de opciones *out-of-sample*, o sea opciones de mediano y largo plazo, respecto del modelo “Brent no-Multi”

Los cuatro modelos descritos, son elegidos para mostrar los aportes de esta tesis. Si bien todos ellos tienen la misma forma funcional, se van sofisticando desde el sólo uso de datos de futuros a la inclusión de opciones para terminar aprovechando la información de un *commodity* determinado, en otro del cual se disponen pocos datos. El añadir precios de opciones al proceso de calibración, aumenta drásticamente los tiempos de procesamiento debido a la cantidad y complejidad de operaciones computacionales necesarias para obtener sus precios. Además, es importante recalcar que si bien el modelo “WTI completo” es un modelo individual en sí mismo, también corresponde a la primera etapa de la calibración *Multicommodity*, la cual antecede al modelo “Brent Multi”, propio de la segunda etapa de calibración. A modo de resumen, se presenta la siguiente tabla con la información más relevante de cada modelo:

Modelo	Usa Futuros	Usa Opciones	Qué Opciones Usa	Complejidad	Tiempo requerido	Paneles <i>in-sample</i>	Paneles <i>out-of-sample</i>
WTI sim.	Si	No	No usa	Mediana	Bajo	I	Ia, Ib, II, IIa y IIb
Brent no-Multi	Si	Si	Cortas	Alta	Med-alto	I, Ia	Ib, II, IIa y IIb
WTI comp.	Si	Si	Todas	Alta	Alto	I, Ia y Ib	Ib, II y IIb
Brent Multi	Si	Si	Cortas	Alta	Med-bajo	I, Ia	Ib, II, IIa y IIb

Tabla 8. Modelos implementados y sus principales características.

6.3 Resultados

6.3.1 Parámetros obtenidos

Para la obtención de parámetros, es fundamental la metodología de calibración utilizada en cada uno. Para el modelo “WTI simple”, en donde no se usan datos de opciones, se facilita la tarea fundamentalmente debido a que no es necesario computar los precios de éstas, lo que permite usar la versión original del filtro de Kalman, ya que no se requiere una linealización del sistema. Los modelos “Brent no-Multi”, “WTI completo” y “Brent Multi” sí necesitan linealizar la ecuación de valorización, ya que el precio de las opciones no es lineal en las variables de estado y rompe uno de los supuestos del filtro. A esta implementación se le llama filtro de Kalman extendido.

Los supuestos del filtro de Kalman, nos permiten encontrar la función de verosimilitud del sistema, obteniendo los parámetros mediante la maximización de ésta. A su vez, es posible obtener la desviación estándar teórica de cada parámetro, para verificar si éstos son estadísticamente significativos o no. En la siguiente tabla, se presentan los parámetros obtenidos. En ella, se han destacado en gris los parámetros que son obtenidos en el modelo “WTI completo” y luego heredados por el modelo “Brent Multi”. Todos los parámetros resultaron significativos, donde su varianza es menor a veinte veces el valor del parámetro.

Parámetro	WTI simple	Brent	WTI completo	Brent Multi
β	0.3468608	0.5771574	1.068951	1.109441
κ	1.3756866	0.3876909	1.158593	1.158593
σ_y	1.3431696	0.4574676	0.1073514	0.4983189
σ_v	0.17754676	0.0837409	0.3114492	0.34267231
$\rho_{1,2}$	0.15867812	0.1730774	-0.002143	-0.61541277
$\rho_{1,3}$	-0.6244921	-0.530123	-0.6832586	-0.9199870
$\rho_{2,3}$	-0.2097628	-0.165901	0.4557572	-0.8034691
λ_p	0.6827872	-0.4996984	0.1675386	-0.0096435
λ_y	0.22151499	-0.499404	0.0105531	-0.0128868
λ_v	-0.0546388	-0.172848	-0.02650661	-0.032678
α	-0.0529106	-0.037791	0.0213668	0.03087037
θ	0.03485857	0.0934385	0.05946386	0.05946386
r_1	0.00007176	0.00006382	0.0032677	0.00018181
r_2	-	-	0.07060714	-
r_3	-	-	0.02540255	-
r_4	-	0.00231596	0.05658158	1.567E-7
Verosimilitud	81169	72779	59325	79153

Tabla 9. Parámetros Obtenidos

Al comparar el modelo “WTI simple” con el “WTI completo”, se observa una gran diferencia en cuanto a los parámetros obtenidos. Esto se debe fundamentalmente a que en el modelo “WTI simple” no se usan precios de opciones para el proceso de calibración y, por ende, es difícil poder obtener la dinámica de la volatilidad que es captada, en su mayoría, por esos precios. Ahora, si se comparan los resultados para el modelo “Brent no-Multi” y “Brent Multi”, también se ve una diferencia sobre todo en lo que se refiere a la dinámica de la volatilidad, descrita principalmente por los parámetros κ , θ y σ_v . Además, si se realiza la misma comparación entre los modelos “WTI completo” y “Brent Multi” se observa que, por construcción, los parámetros κ y θ son iguales. Por otra parte, σ_v en el modelo “Brent Multi” resulta ser ligeramente mayor que en el modelo “WTI completo”, lo cual es consistente con el análisis de la sección 4.3, en donde el estudio empírico de los datos indica que la varianza de la volatilidad implícita es mayor en el petróleo Brent.

Con respecto a las verosimilitudes, se puede observar que mientras más futuros haya con respecto a opciones, mayor resulta ser la verosimilitud. Esto es consistente si se considera que la naturaleza de las opciones es muy distinta a la de los futuros, por lo que es de esperar que un modelo que trate de ajustar ambos tipos de datos obtenga verosimilitudes menores. Lo anterior se debe a que la verosimilitud es una medida de qué tan probable es que la muestra utilizada, provenga de un modelo con el set de parámetros propuesto.

6.3.2 Ajuste a los precios Futuros

En primer lugar, se define ajuste en los precios de futuros como el *Mean Absolut Error* (MAE) medido como el porcentaje de error que comete el modelo, con respecto al precio observado en el mercado.

$$MAE_{Futuros} = \left| \frac{F_{modelo} - F_{mercado}}{F_{mercado}} \right| \quad 6.3$$

Se estudia el ajuste a los precios futuros de petróleo para verificar si la inclusión de precios de opciones, en el proceso de calibración, no afecta en gran medida los errores cometidos en las curvas de futuros. Los resultados que se muestran a continuación se subdividen en errores de corto, mediano y largo plazo. Para esta subsección en particular, corto plazo se define como futuros con madurez máxima 2 años; mediano plazo como futuros con madurez mayor a 2 años y menor a 4 y largo plazo quedará determinado por precios de futuros con madurez mayor a 4 años.

En cada uno de los siguientes cuadros se muestra gráficamente el desempeño de los cuatro modelos, en donde se colocan en un mismo gráfico los datos de mercado del petróleo WTI y petróleo Brent. En ellos, se trazan dos curvas para cada tipo de petróleo, correspondientes a los cuatro modelos implementados. Los gráficos presentados a continuación comprenden 3 fechas en particular:

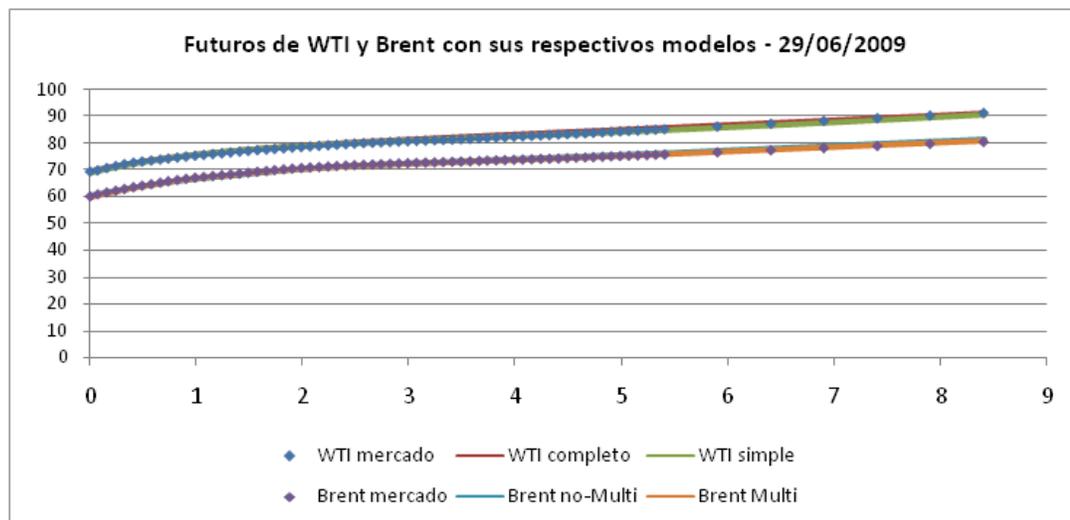


Figura 10. Futuros de WTI y Brent, ajuste de modelos - 29/06/2009

En esta gráfica, se aprecia el ajuste de cada modelo implementado. Las líneas sólidas corresponden a los precios de futuros entregados por cada modelo, mientras que los rombos representan los datos de mercado. Para la fecha en cuestión, se debe considerar que los datos de mercado se utilizan en el proceso de calibración, por lo que era de esperarse un ajuste como el observado. Además, se puede apreciar una estructura similar entre ambos *commodities*, pero con un nivel diferente para cada uno.

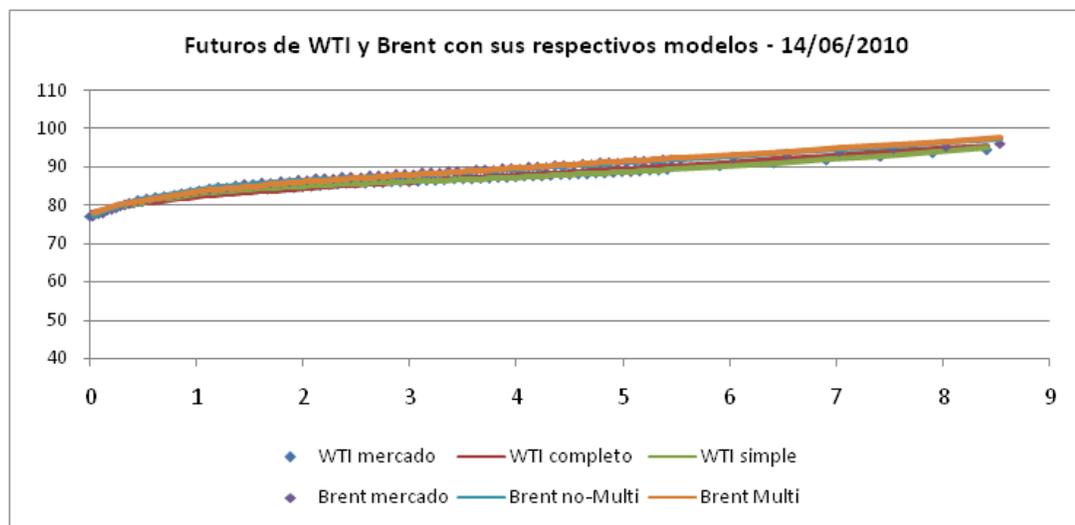


Figura 11. Futuros de WTI y Brent, ajuste de modelos – 14/06/2010

La información presentada en este gráfico, proviene de una fecha que califica como *out-of-sample*, pero es relativamente cercana al periodo *in-sample*. Además, aquí se tiene un buen ajuste a los precios futuros, presentando pequeñas desviaciones en los de largo plazo. En este período, los precios Spot de ambos *commodities* llegaron a ser iguales, observándose algunas diferencias en el comportamiento de sus respectivos precios futuros.

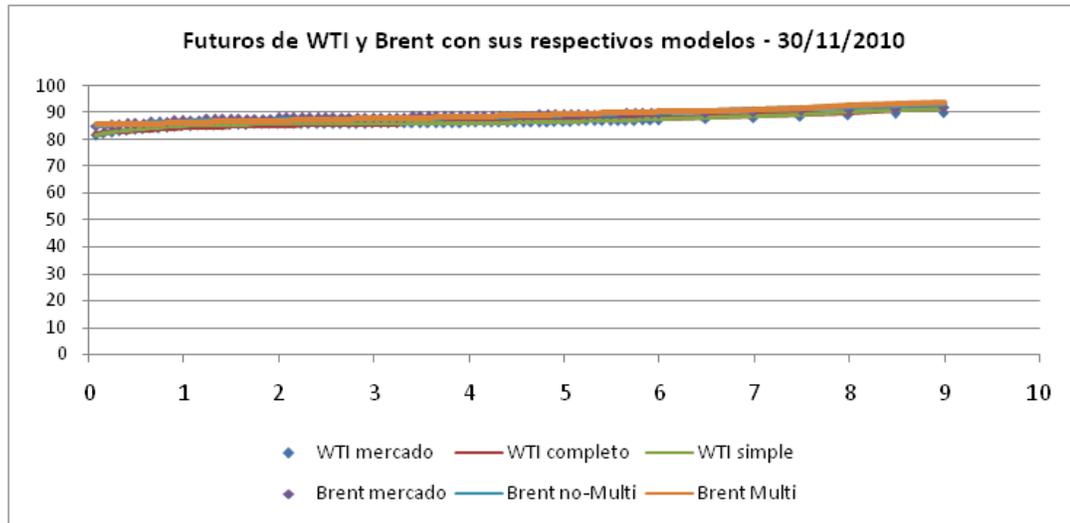


Figura 12. Futuros de WTI y Brent, ajuste de modelos – 30/11/2010

En esta figura, la estructura cambia, ambas curvas se aplanan y a su vez aumenta el nivel del Spot para ambos *commodities*. El ajuste sigue siendo aceptable, inclusive considerando que la fecha del gráfico es *out-of-sample* y bastante lejana del período considerado *in-sample*.

Resumiendo, en forma gráfica se observa que se logra un buen ajuste, de todos los modelos, a los precios futuros, independientemente de si se usan opciones en la metodología de calibración o no.

Para cuantificar los errores cometidos en cada implementación, se presenta la siguiente tabla, en donde se muestra el MAE de los respectivos modelos para cada plazo de futuros en los paneles I y II.

WTI simple	Corto panel I	Mediano panel I	Largo panel I
	0.393%	0.343%	0.401%
	Corto panel II	Mediano panel II	Largo panel II
	0.403%	0.363%	0.405%
Brent no-Multi	Corto panel I	Mediano panel I	Largo panel I
	0.292%	0.273%	0.291%
	Corto panel II	Mediano panel II	Largo panel II
	0.298%	0.281%	0.313%
WTI completo	Corto panel I	Mediano panel I	Largo panel I
	0.973%	0.963%	0.982%
	Corto panel II	Mediano panel II	Largo panel II
	1.023%	0.973%	0.992%
Brent Multi	Corto panel I	Mediano panel I	Largo panel I
	0.705%	0.678%	0.696%
	Corto panel II	Mediano panel II	Largo panel II
	0.713%	0.688%	0.706%

Tabla 10. MAE precios futuros – Todos los modelos, distintos plazos.

La información entregada en esta tabla, evidencia que los errores cometidos por los modelos en los precios de futuros son bajos, donde si bien se ven errores que llegan a ser el triple en algunos casos, estos en términos absolutos siguen siendo pequeños. Por lo tanto, no se está sacrificando una cantidad significativa de ajuste a los datos de mercado por la inclusión de opciones en el proceso de calibración.

6.3.2 Ajuste a los precios de Opciones

En esta tesis se pone énfasis en lo que se refiere a la mejora del ajuste a precios de opciones, por lo que en esta sección se entrará en mayor detalle con respecto a los

resultados obtenidos en esta materia. La forma en que se mide el error en opciones sigue la metodología que se presenta a continuación.

El enfoque con el cual se miden los errores cometidos por los modelos es mediante diferencias en volatilidades implícitas y no en precios de opciones. En teoría, la volatilidad implícita depende del modelo utilizado para valorizar la opción, pero dado que el estándar es entregarla a partir del modelo más simple, en este caso se utilizó el modelo de Black 76²⁷. Obtener la volatilidad implícita es posible debido a que todos los demás parámetros de este modelo son observables (precio futuro, precio de la opción, madurez de la opción, tasa de interés y precio de ejercicio) lo cual le quita ambigüedad al cálculo de ésta. Así, la metodología consiste en obtener las volatilidades implícitas de los precios de mercado, luego se corre el modelo calibrado obteniendo precios estimados de opciones, después se calcula la volatilidad implícita de esos nuevos precios, para finalmente calcular la diferencia en valor absoluto de ambas volatilidades (MAE de volatilidades).

Para mostrar los resultados de ajuste se grafican las volatilidades implícitas y MAE, comparando cada modelo implementado con los datos de mercado.

El primer modelo estudiado es el “WTI simple”. Se corre el modelo para todas las fechas de estudio y se valorizan todas las opciones disponibles. A partir de ello, se procede a calcular las volatilidades implícitas obtenidas según este modelo. A continuación se muestran los gráficos obtenidos para estas volatilidades, de opciones ATM en plazos cortos, medianos y largos.

²⁷ Ya que son opciones sobre futuros, en cambio, si fueran precios de opciones sobre el subyacente, lo correcto sería usar el modelo de Black & Scholes 73

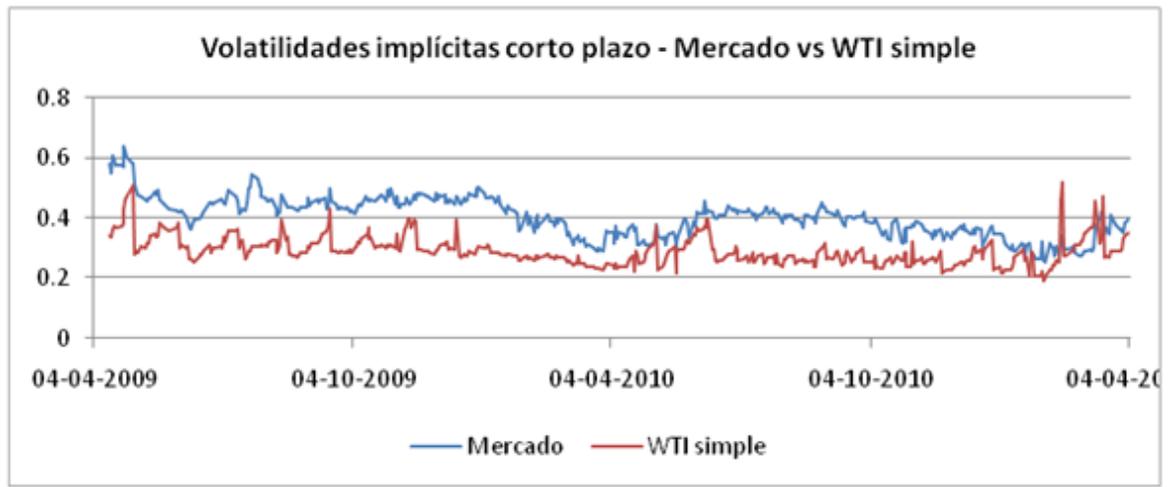


Figura 13 - Volatilidades implícitas corto plazo – Volatilidades de corto plazo correspondientes a los precios de mercado y a las obtenidas utilizando el modelo “WTI simple”

Corto plazo equivale a opciones con la madurez menor

En la Figura 13 se observan las volatilidades implícitas de corto plazo de mercado y las estimadas por el modelo “WTI simple”. Se evidencian diferencias de hasta 0,3 entre ambas series, pero logrando seguir una tendencia medianamente razonable. Las discontinuidades presentes son consecuencia de que para el cálculo de las volatilidades implícitas, en este caso, se usa la opción de menor madurez disponible. Por ende, ocurre que a medida que una opción se acerca mucho a su vencimiento, llega un punto en que ella deja de ser la opción más corta y pasa a serlo la que le sigue en proximidad.

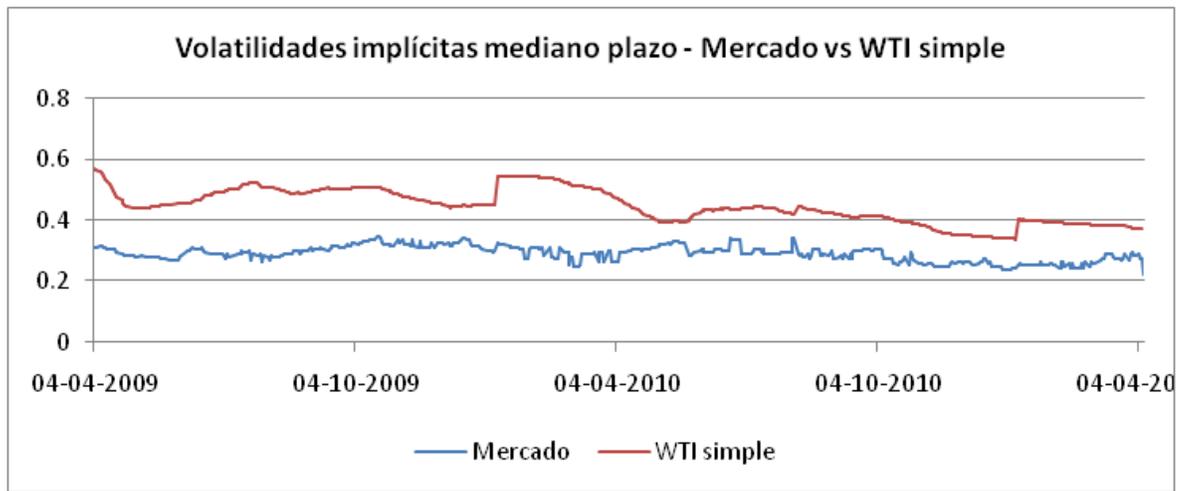


Figura 14. Volatilidades implícitas mediano plazo – Volatilidades de mediano plazo correspondientes a los precios de mercado y a las obtenidas utilizando el modelo “WTI simple”

Mediano plazo equivale a opciones con la madurez más cercana a un medio de las de más largo plazo

Las diferencias observadas en este caso son mayores que en las de corto plazo. Esto se debe fundamentalmente a que no se consideran opciones en el proceso de calibración, lo que produce que la dinámica de la volatilidad no sea captada en forma óptima. En este caso, a diferencia del gráfico anterior, no se observa en forma clara una tendencia común entre ambas series obtenidas.

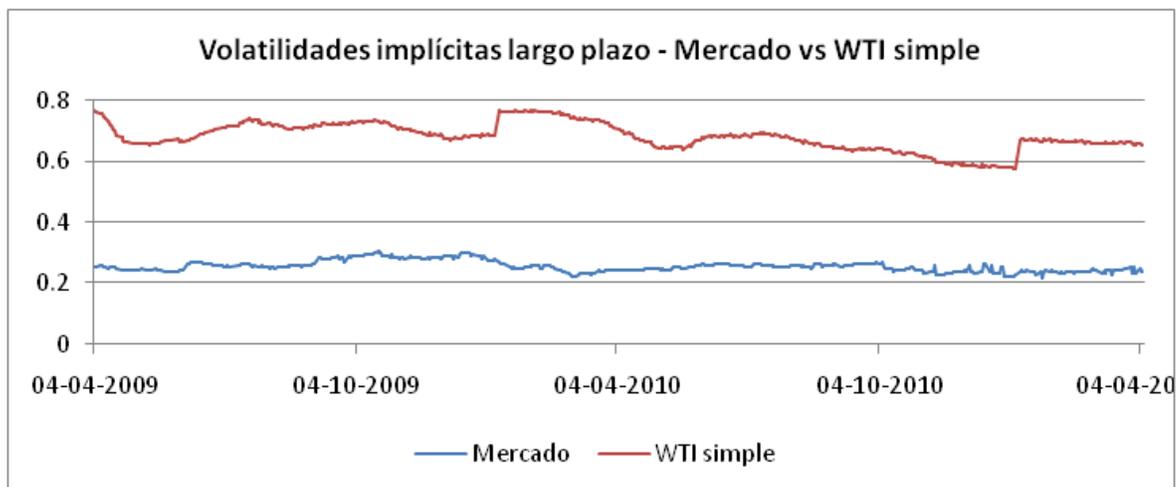


Figura 15. Volatilidades implícitas largo plazo – Volatilidades de largo plazo correspondientes a los precios de mercado y a las obtenidas utilizando el modelo “WTI simple”

Largo plazo equivale a opciones con la mayor madurez disponible

En esta figura, los errores cometidos son aún mayores, sobrepasando incluso los 0,5 entre ambas series. Sin embargo, son entendibles ya que al igual que en el caso anterior, las opciones no se usan para calibrar este modelo, por lo que la dinámica de la volatilidad obtenida no logra captar en forma satisfactoria la verdadera estructura de ésta. Para complementar el estudio de este modelo, se presenta la serie de tiempo de los MAE resultantes de los tres gráficos anteriores.

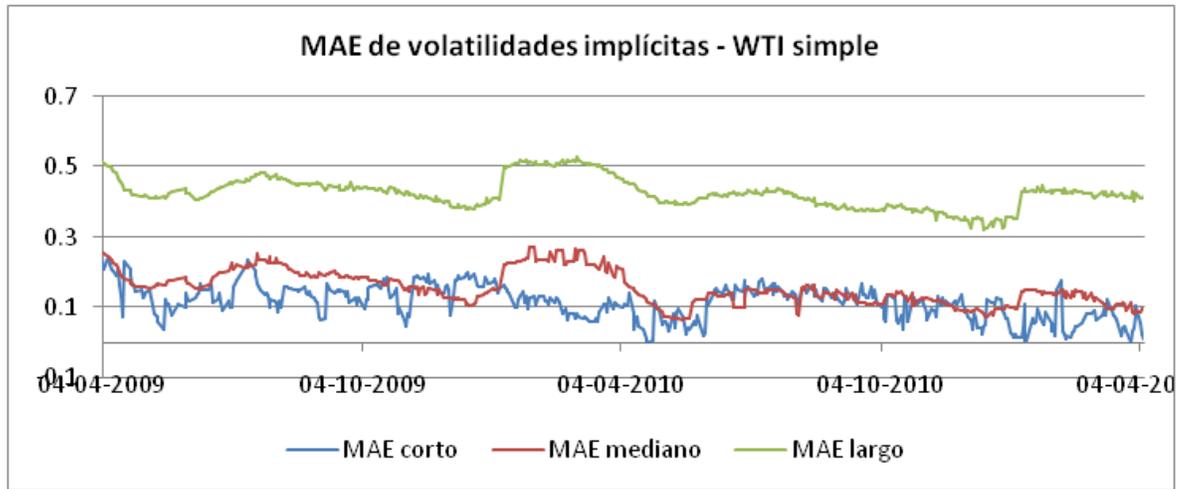


Figura 16. MAE de volatilidades implícitas – Diferencias entre las volatilidades de mercado y las del modelo “WTI simple” para distintas madureces de opciones

Esta figura resume de forma clara lo observado en las tres anteriores. Los errores del modelo “WTI simple” son de gran magnitud y resultan inaceptables para efecto de medir riesgos y valorización de proyectos mediante simulación de Monte Carlo.

En presencia de los resultados anteriores, se implementa el modelo “Brent no-Multi” que sigue la misma estructura del modelo “WTI simple” pero considera el precio de las opciones en su proceso de calibración y actualización de variables de estado, aceptando el hecho de que los futuros no captan en forma óptima el factor de volatilidad. Al igual que en el caso anterior, se corre el modelo para todas las fechas en estudio y se obtienen las volatilidades implícitas correspondientes, las que pueden compararse directamente con las de mercado.

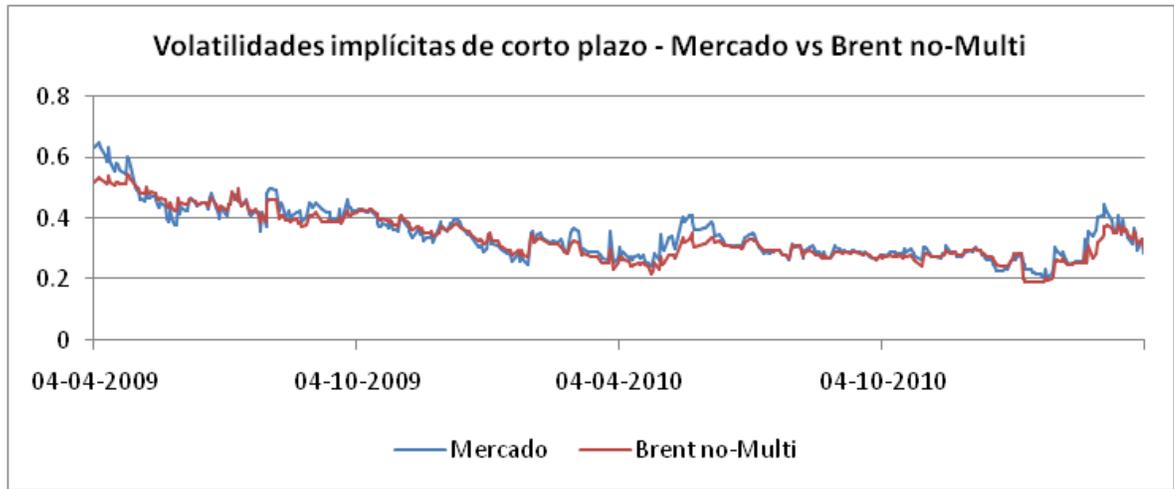


Figura 17 Volatilidades implícitas corto plazo – Volatilidades de corto plazo correspondientes a los precios de mercado y a las obtenidas utilizando el modelo “Brent no-Multi”

Corto plazo equivale a opciones con la madurez menor

En este caso, se evidencia una mejora con respecto al modelo “WTI simple”, la cual era esperable dado que las opciones cortas fueron consideradas en la calibración y por lo que sería inconsistente no obtener resultados como los que se aprecian en esta gráfica. Si bien se observa un error no menor al principio de la serie, éste es propio de la inicialización del filtro de Kalman. Entendiendo que, al comienzo se asume que cada una de las variables de estado es su propia esperanza incondicional y que no necesariamente el estado inicial del sistema responde a esta lógica. A pesar de lo anterior, el modelo se comporta de buena manera, ajustándose de forma aceptable a los datos de mercado. Ahora, para poder verificar si el modelo es consistente en toda la estructura de la volatilidad, es necesario estudiar las volatilidades implícitas de mediano y largo plazo, información presentada a continuación.

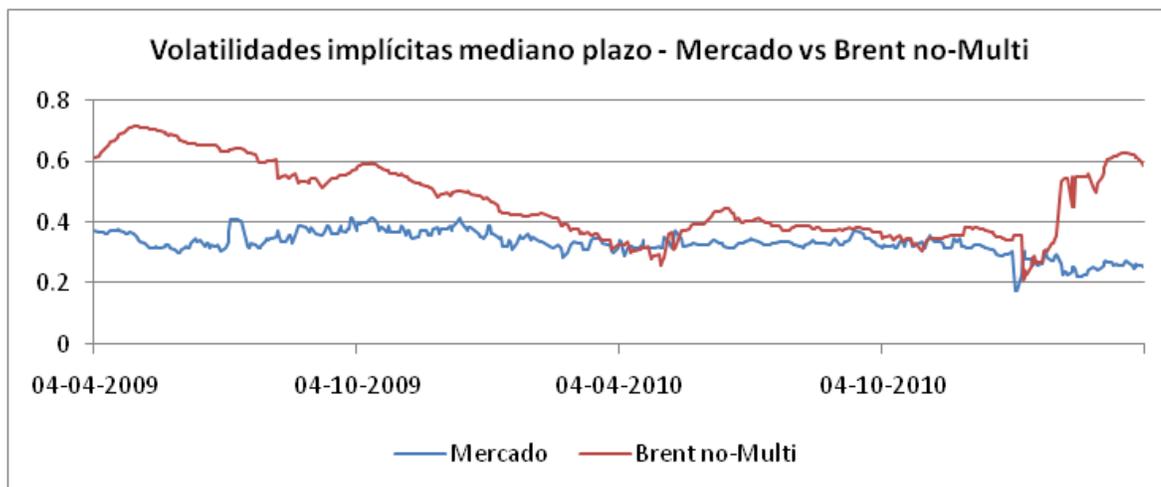


Figura 18. Volatilidades implícitas mediano plazo – Volatilidades de mediano plazo correspondientes a los precios de mercado y a las obtenidas utilizando el modelo “Brent no-Multi”

Mediano plazo equivale a opciones con la madurez más cercana a un medio de las de más largo plazo

La Figura 18 nos señala que en la primera mitad de la muestra se cometen errores bastante significativos, llegando prácticamente a los 0,4 de diferencia entre ambas series. Estas diferencias se atenúan parcialmente en la segunda mitad, para finalmente volver a incrementarse en la parte final de la muestra.

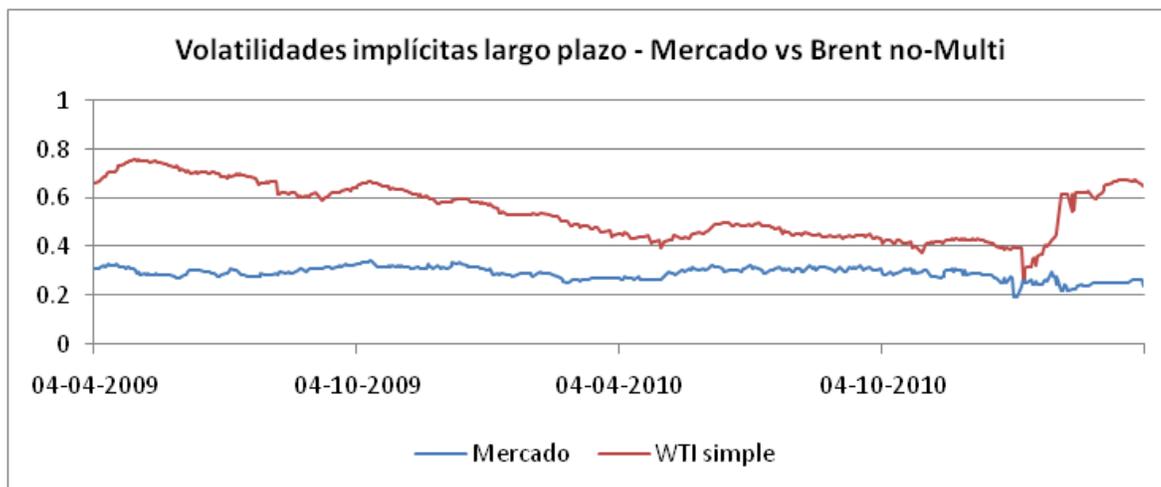


Figura 19. Volatilidades implícitas largo plazo – Volatilidades de largo plazo correspondientes a los precios de mercado y a las obtenidas utilizando el modelo “Brent no-Multi”

Largo plazo equivale a opciones con la mayor madurez disponible

En esta figura, los errores cometidos son aún más altos y llevan a concluir en conjunto con el gráfico de volatilidades de mediano plazo, que el modelo “Brent no-Multi” no capta de forma satisfactoria la dinámica de la volatilidad. En este gráfico se tienen las volatilidades implícitas de las opciones más largas disponibles. Desde el comienzo de esta muestra, existían opciones con madurez máxima que varía entre 1,5 y 2,5 años. Sin embargo, en el último tramo, donde se observa una abrupta variación en la serie generada por el modelo, se iniciaron transacciones con madurez cercana a los 4,5 años. Lo anterior lleva asociado una significativa disminución del ajuste al mercado, lo que lleva a concluir que en este modelo no se capta la dinámica de la volatilidad de largo plazo.

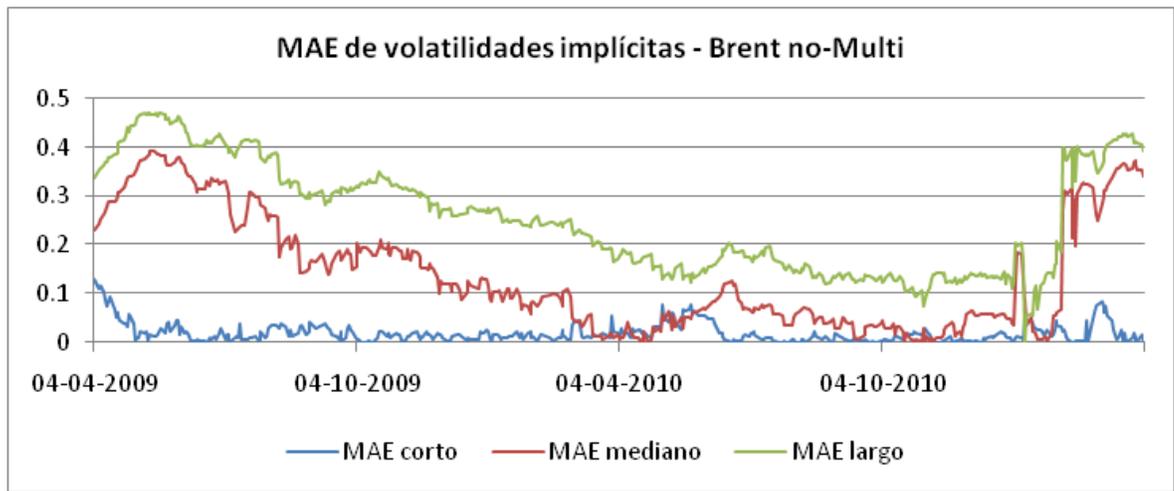


Figura 20. MAE de volatilidades implícitas – Diferencias entre las volatilidades de mercado y las del modelo “Brent no-Multi” para distintas madureces de opciones

Este cuadro resume los errores cometidos por el modelo “Brent no-Multi”, tanto a corto como a mediano y largo plazo. En términos generales, esta implementación no satisface los requerimientos mínimos que permitirían su utilización para efectos de valorización y medición de riesgo.

En el afán de hacer un avance y aporte sobre lo observado hasta el momento, es que se plantea el modelo *Multicommodity*, que tiene como primera etapa al modelo “WTI completo”, que considera todas las opciones disponibles en su proceso de calibración y actualización de variables de estado. Dada esa incorporación, se espera observar un gran avance en cuanto al ajuste respecto de los dos modelos previamente presentados.

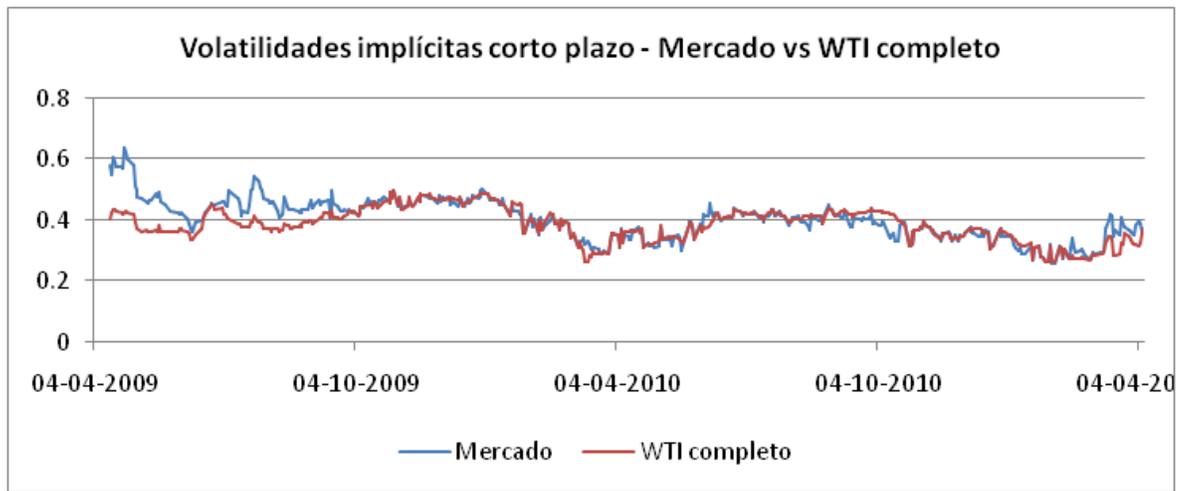


Figura 21. Volatilidades implícitas corto plazo – Volatilidades de corto plazo correspondientes a los precios de mercado y a las obtenidas utilizando el modelo “WTI completo”

Corto plazo equivale a opciones con la madurez menor

Tal como se puede apreciar, el ajuste a las volatilidades implícitas de corto plazo, es mejorado con respecto al modelo “WTI simple”. Consistentemente con la inicialización del filtro de Kalman, los errores cometidos son mayores en los primeros días de la serie de tiempo, pero una vez que el modelo se adapta al estado del sistema, éste sigue en forma fiel los precios de mercado. A continuación, se presentan las volatilidades de mediano y largo plazo:

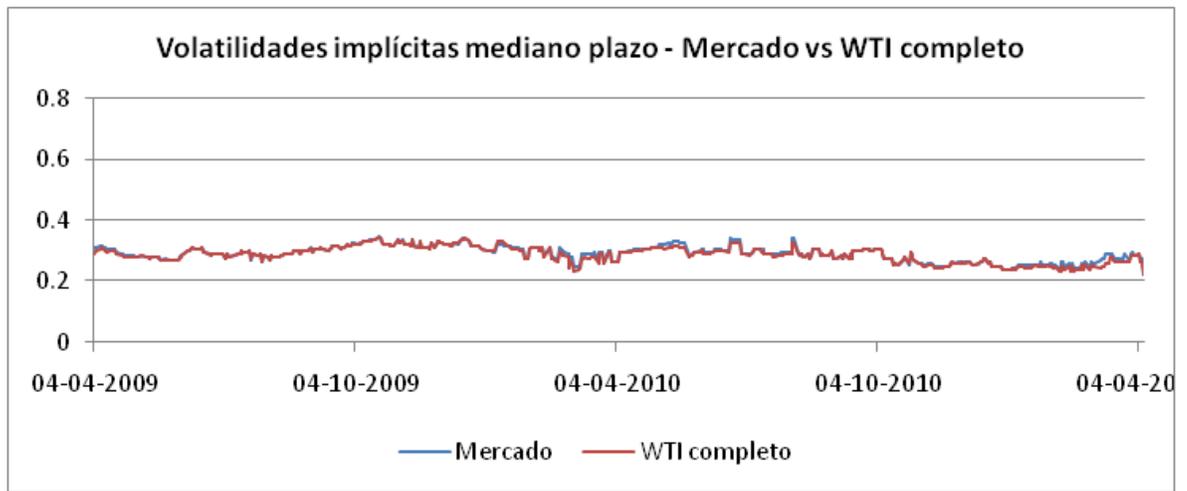


Figura 22. Volatilidades implícitas de mediano plazo – Volatilidades de mediano plazo correspondientes a los precios de mercado y a las obtenidas utilizando el modelo “WTI completo”

Mediano plazo equivale a opciones con la madurez más cercana a un medio de las de más largo plazo

A través de esta figura, se evidencia que el ajuste de volatilidades implícitas de mediano plazo es notoriamente mejor que en el modelo “WTI simple”. Los errores que aquí se cometen son muy poco significativos, lo que se explica por la inclusión de precios de opciones que logran que el modelo capte en forma consistente la dinámica de la volatilidad.

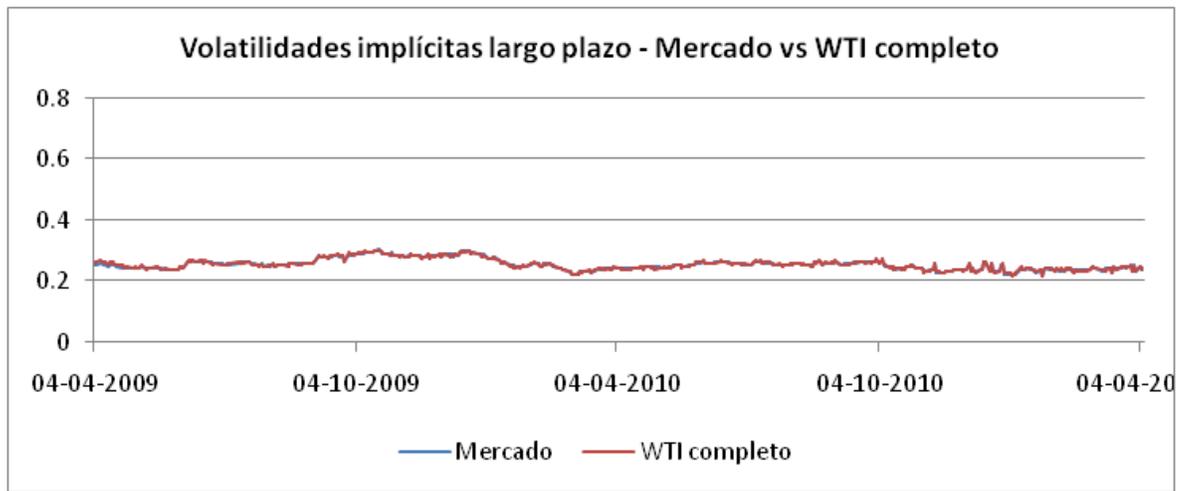


Figura 23. Volatilidades de largo plazo – Volatilidades de largo plazo correspondientes a los precios de mercado y a las obtenidas utilizando el modelo “WTI completo”

Largo plazo equivale a opciones con la mayor madurez disponible

Al igual que en las volatilidades de mediano plazo, y por las mismas razones, en este caso el error de ajuste a las volatilidades implícitas de largo plazo es prácticamente imperceptible. Tanto en este análisis, como en el de mediano plazo, no se observa el error cometido en los primeros datos de la serie. Esto se atribuye a que mientras mayor sea el plazo de la opción, menor relevancia tiene la variable de estado “volatilidad” y es la esperanza de ésta la que adquiere más importancia.

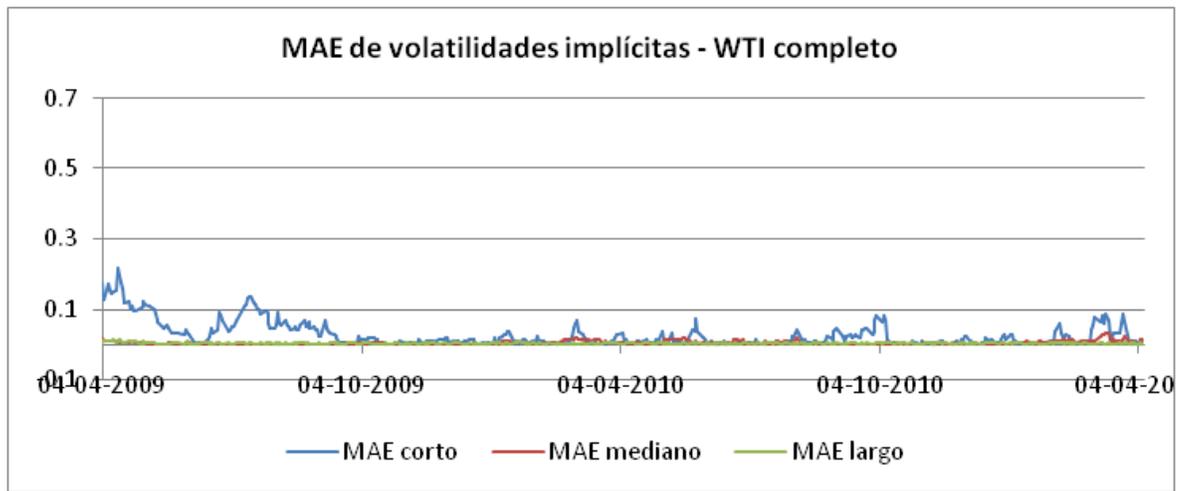


Figura 24. MAE de volatilidades implícitas – Diferencias entre las volatilidades de mercado y las del modelo “WTI completo” para distintas madureces de opciones

Consistentemente con lo obtenido en las figuras anteriores, los errores cometidos por el “WTI completo” son notoriamente menores a los de los modelos previamente presentados. Esto lleva a pensar que este modelo es lo suficientemente robusto como para poder realizar análisis de riesgo y evaluación de proyectos que tengan como subyacente al petróleo WTI. Por otra parte, es fundamental que los resultados de esta implementación fueran tales como los obtenidos, ya que ésta es la base para la elaboración del modelo *Multicommodity* y corresponde a la primera etapa de calibración del modelo conjunto.

El siguiente paso en el desarrollo del modelo *Multicommodity* es implementar la segunda etapa de calibración, llamado para estos efectos modelo “Brent Multi”. Este último, se corre para las mismas fechas que los anteriores, obteniendo las volatilidades implícitas para todos los plazos de estudio. Los resultados son los que se presentan a continuación.

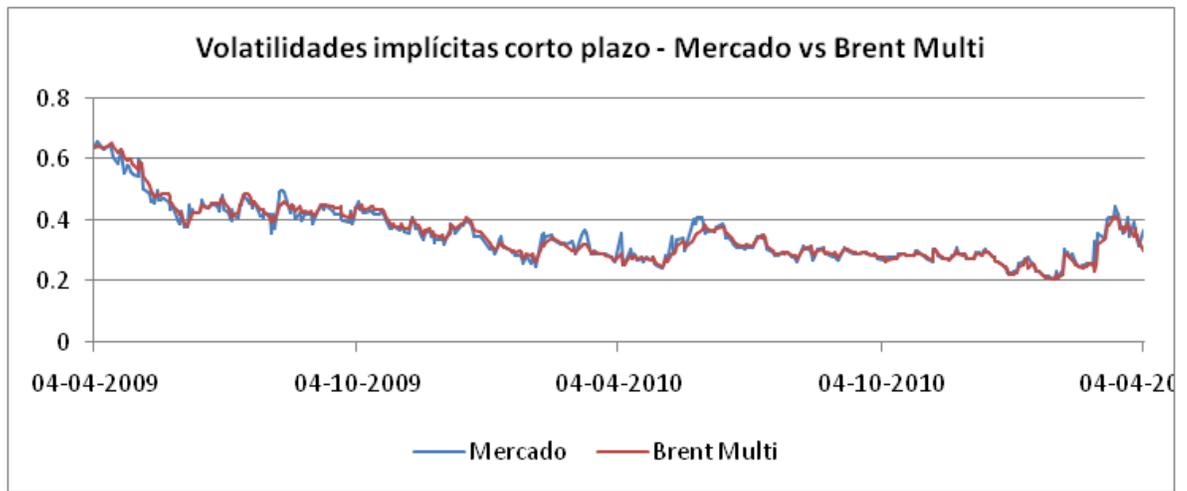


Figura 25. Volatilidades implícitas corto plazo – Volatilidades de corto plazo correspondientes a los precios de mercado y a las obtenidas utilizando el modelo “Brent Multi”

Corto plazo equivale a opciones con la madurez menor

Similar a lo obtenido con el modelo “Brent no-Multi”, este modelo logra captar la dinámica de la volatilidad de corto plazo, lo cual no sorprende, dado que las opciones de corto plazo fueron incluidas en la calibración. Es interesante observar el resultado para las volatilidades de mediano y largo plazo que se presentan a continuación.

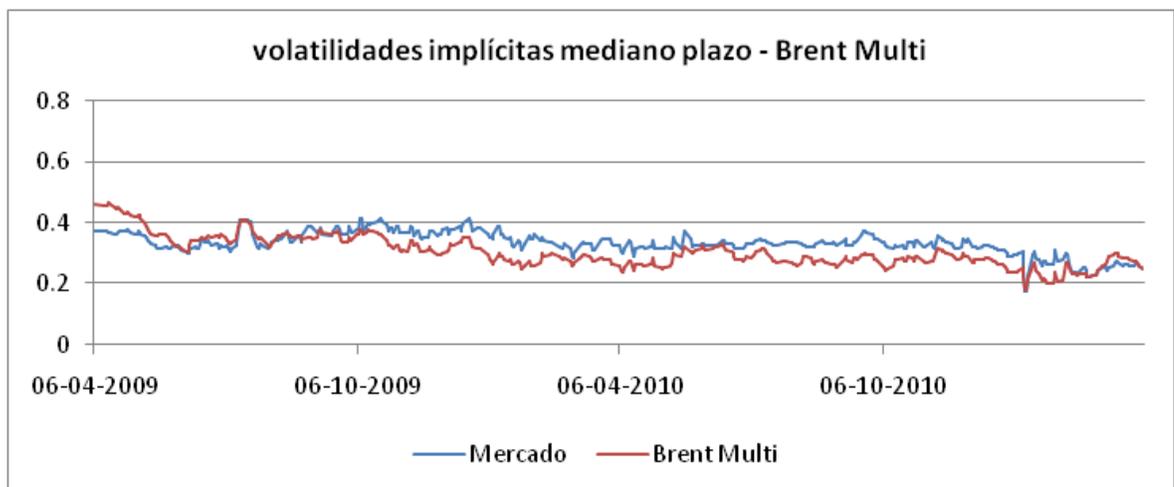


Figura 26. Volatilidades implícitas mediano plazo – Volatilidades de mediano plazo correspondientes a los precios de mercado y a las obtenidas utilizando el modelo “Brent Multi”

Mediano plazo equivale a opciones con la madurez más cercana a un medio de las de más largo plazo

Tomando en cuenta que este modelo no considera opciones de mediano plazo, tal como tampoco lo hace el “Brent no-Multi”, el ajuste logrado a las volatilidades implícitas correspondientes, mejora considerablemente. Sin embargo, para poder concluir que el modelo “Brent Multi” capta de mejor manera la dinámica de la volatilidad, se requiere también el estudio de las volatilidades de largo plazo.

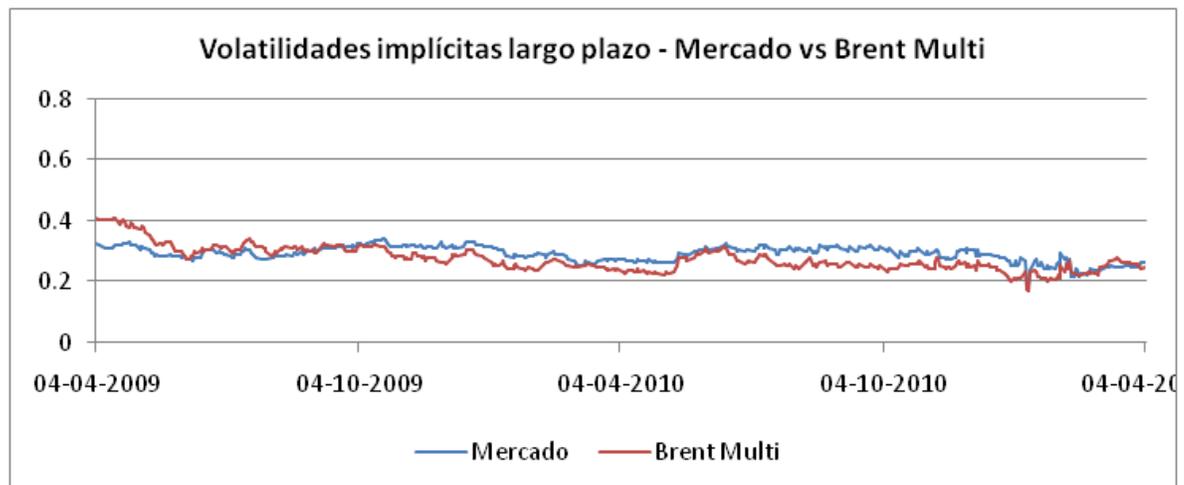


Figura 27. Volatilidades implícitas largo plazo – Volatilidades de largo plazo correspondientes a los precios de mercado y a las obtenidas utilizando el modelo “Brent Multi”

Largo plazo equivale a opciones con la mayor madurez disponible

Tal como se muestra en la ilustración, los errores en las volatilidades de largo plazo disminuyen en gran medida con respecto al modelo “Brent no-Multi”. Este resultado, sumado a lo obtenido en el de las volatilidades de mediano plazo, lleva a concluir que la dinámica de la volatilidad es captada de forma mucho más robusta gracias a la modelación *Multicommodity*, en donde se asume que la estructura de la volatilidad del petróleo Brent y el WTI comparten una parte de su estructura (parámetros), siguiendo una dinámica similar.

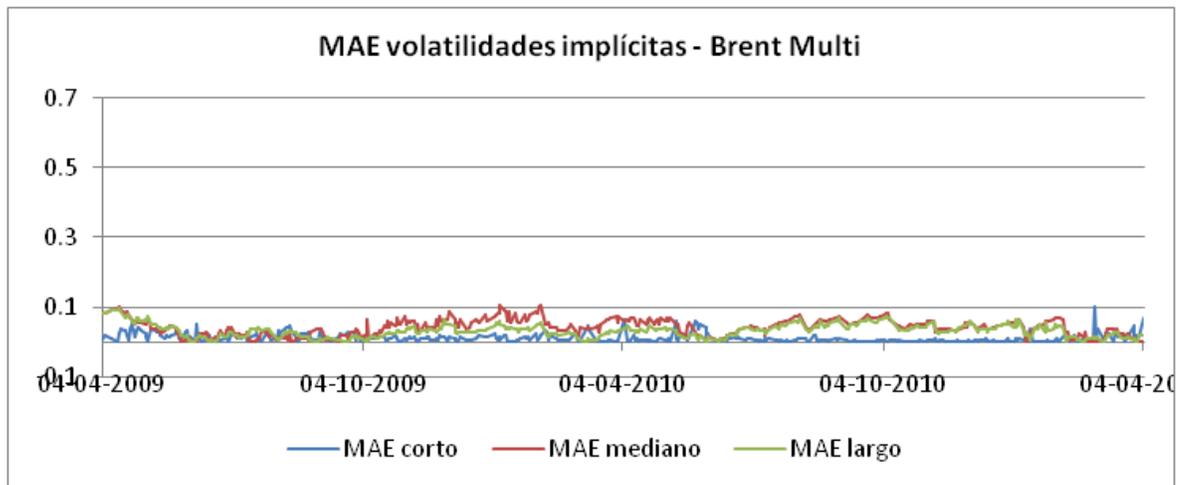


Figura 28. MAE volatilidades implícitas – Diferencias entre las volatilidades de mercado y las del modelo “Brent Multi” para distintas madureces de opciones

A modo de resumir los errores en los gráficos anteriores, se presenta una serie de tiempo con los MAE de volatilidades implícitas para cada plazo de estudio. Aquí se puede observar que en comparación con el modelo “Brent”, la mejora en ajuste al mercado es evidente. Los errores cometidos se logran disminuir en gran medida, llegando a los 0,1 de diferencia con el mercado, lo que representa prácticamente un quinto de los errores máximos que se obtuvieron en el modelo “Brent no-Multi”.

Finalmente, es necesario realizar una comparación numérica de los resultados de cada modelo. Para estos fines, se obtiene el MAE para cada implementación en los distintos paneles y plazos de estudio. Además, se agrega una columna con el MAE de los precios futuros. Los errores están expresados en porcentaje, donde un XX% para las opciones equivale a un error de 0.XX de los gráficos anteriores.

WTI Simple	Cortas Panel Ia	Mediano Panel Ib	Largas Panel Ib
	25.05%	13.78%	50.42%
	Cortas Panel Iia	Mediano Panel Iib	Largas Panel Iib
	17%	18.4%	46.69%
Brent no-Multi	Cortas Panel Ia	Mediano Panel Ib	Largas Panel Ib
	4.61%	9.59%	22.49%
	Cortas Panel Iia	Mediano Panel Iib	Largas Panel Iib
	2.66%	6.98%	15.05%
WTI Completo	Cortas Panel Ia	Mediano Panel Ib	Largas Panel Ib
	5.83%	0.73%%	0.51%%
	Cortas Panel Iia	Mediano Panel Iib	Largas Panel Iib
	4.72%	1.02%%	0.32%
Brent Multi	Cortas Panel Ia	Mediano Panel Ib	Largas Panel Ib
	3.04%	2.67%	1.99%
	Cortas Panel Iia	Mediano Panel Iib	Largas Panel Iib
	1.43%	2.17%	1.9%

Tabla 11. Errores de Ajuste para Modelos Implementados (MAE)

La tabla ratifica lo observado en los gráficos anteriores. El modelo “WTI simple”, al no considerar precios de opciones en el proceso de calibración, comete grandes errores que lo invalidan para valorizar activos con una naturaleza distinta a la de los futuros. Por otra parte, el modelo “Brent no-Multi” que sí considera opciones, logra un buen ajuste a las volatilidades de corto plazo, pero falla al tratar de extrapolar las volatilidades de mediano y largo plazo. Luego, el modelo “WTI completo” que incluye toda la información disponible y corresponde a la primera etapa de calibración del modelo *Multicommodity*, ajusta con precisión, las volatilidades de todos los plazos. Por último, el modelo “Brent Multi” que usa exactamente la misma información que el modelo “Brent no-Multi” en su calibración, mejora en forma significativa el ajuste respecto de este último. Dado lo anterior, este modelo es capaz de valorizar activos con

flexibilidades presentes en su estructura contractual y realizar mediciones de riesgo confiables.

7. CONCLUSIONES.

En esta tesis se plantea un nuevo modelo para la estimación de los precios de opciones sobre contratos futuros, en donde dada una carencia de datos de opciones para un *commodity* en particular, se utiliza la información de otro con mayor cantidad de precios transados disponibles para suplirla. Este último, debe presentar evidencias de comportamiento similar al primero en lo que a volatilidad respecta.

La hipótesis de este trabajo plantea que ciertas variables macroeconómicas afectan de manera similar a determinados *commodities*. Bajo esa noción es que la información disponible para un *commodity*, puede ser valiosa para efectos de la valorización de otro que comparta las mismas incertidumbres. Dado esto, se implementa un modelo *affine*, en el que se fuerza a que ciertos parámetros de la dinámica de la volatilidad, de ambos *commodities*, sean iguales.

Por otra parte, existen trabajos que abordan un problema similar, como Cortázar, Milla & Severino 2008, que plantean un modelo en el que los *commodities* comparten variables de estado, tanto en estructura como en el valor de cada instante. Sin embargo, este alcance es de gran utilidad para precios que presentan altísimos niveles de correlación en sus procesos (sobre el 90%), y además se complejiza en gran medida el proceso de calibración. Bajo ese problema es que Cortázar & Eterovic 2011 plantean lo que sería lo más cercano al trabajo de esta tesis, en donde aprovecha la estructura estocástica de una de las variables de estado del *commodity* que presenta mayor información en el modelo del que tiene menos datos disponibles. Esto da buenos resultados para *commodities* que presentan una mediana correlación, a diferencia del estudio anterior. Los trabajos recién nombrados tienen como foco la extrapolación de precios de futuros, y no usan precios de opciones ni volatilidad estocástica en su estudio, aspectos que sí son abordados en esta tesis.

En la presente tesis, se calibran cuatro modelos con la misma estructura estocástica, dos de los cuales utilizan precios del petróleo WTI y los otros dos del petróleo Brent, siendo el primero el que dispone de una mayor cantidad de precios. Estos modelos se diferencian en lo que se refiere a los datos utilizados y a cómo se aprovecha la información de un *commodity* en otro. De éstos, se obtuvo que no considerar precios de opciones en la calibración, entrega precios erróneos y sin ningún patrón similar a los precios de mercado. Así también, al calibrar un modelo sin considerar las opciones de mediano y largo plazo, se obtuvo que la valorización de éste también diverge de los precios observados que fueron omitidos en el proceso de calibración. Por el contrario, si se aprovecha la información de un *commodity* con gran cantidad de datos, para valorizar opciones de otro con pocos, se obtiene una gran mejora en ajuste al mercado de opciones. Esto evidencia la importancia de contar con una estructura estocástica que describa de buena forma los precios de largo plazo, y así obtener dinámicas realistas y confiables para el precio del activo en estudio.

Extensiones a esta tesis se pueden realizar en el mercado de futuros y opciones de monedas, en donde el mercado CLP/USD presenta tres productos disponibles para obtención de la dinámica de ésta; Basis swap Cámara/Libor 6m (transable hasta una madurez de 10 años pero con liquidez muy limitada), Puntos forward (relativamente líquidos hasta 1 año) y opciones CLP/USD con muy poca liquidez. Sería interesante estudiar si existe alguna relación entre este par de monedas y otro, para así extrapolar precios de opciones de mayor plazo.

BIBLIOGRAFÍA

Barone-Adesi, G., R. Whaley. (1987). Efficient Analytic Approximation of American Option Values. *Journal of Finance* 42, 301-320.

Black. F. (1976). The Pricing of Commodity Contracts. *Journal of Political Economy*, 81, 637-659.

Black, F., Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81(3), 637-654.

Cassasus, J., Collin-Dufresne, P., Goldstein, B. (2005). Unspanned Stochastic Volatility and Fixed Income Derivatives Pricing. *Journal of Banking & Finance*, 29, 2723-2749.

Cortázar, G., Eterovic, F. (2010). Can oil Prices Help Estimate Commodity Futures Prices? The Cases of Cooper and Silver. *Resources Policy*. 35(4), 283-291.

Cortazar, G., Naranjo, L. ff (2006). An N-Factor Gaussian Model of Oil Futures. *Journal of Futures Markets*. 26(3), 243-268.

Cortázar, G, Milla, C., y Severino, F. (2008). A Multicommodity Model of Futures Prices: Using Futures Prices of One Commodity to estimate the stochastic process of another. *Journal of Futures Markets*. Vol. 26. N° 6, 537-560

Cortázar, G., Schwartz, E., Tapia, C. (2011). Credit Spreads in Illiquid Markets. Working Paper.

Cox, C., Ingersoll, J., Ross, S. (1985). A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, 53(2), 385-407.

Dai, Q., Singleton, K. (2000). Specification Analysis of Affine Term Structure Models. *The Journal of Finance*, 55(5), 1943-1978.

Duffie, D., Kan, K. (1996). A Yield-Factor Model of Interest Rates. *Mathematical Finance*, 6(4), 379-406.

Duffie, D., Pan, J., Singleton, K. (2000). Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-Diffusions. *Econometrica*, 68(6), 1343-1376.

Harvey, A. (1990). Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter. *Cambridge University Press*.

- Heath, D., Jarrow, R., Morton A. (1992). Bond Pricing and the Term Structure of Interest rates: A new Methodology for Contingent Claims Valuation. *Econometrica*, 60(1), 77-105.
- Heston, S. (1993). A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *The Review of Financial Studies*, 6(2), 327-343.
- Kalman, R. (1960). A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Journal of Basic Engineering*. 82(1), 35-45.
- Langetieg, T. (1980). A Multivariate Model of the Term Structure. *Journal of Finance*, 35(1), 71-97.
- Nelson. C., Siegel, A. (1987). Parsimonious Modeling of Yield Curves. *Journal of Business*, 60(4), 473.
- Richter, M., Sorensen, C. (2002). Stochastic Volatility and Seasonality in Commodity Futures and Options: The Case of Soybeans. Working Paper, Copenhagen Business School.
- Schwartz, E. (1997). The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging. *The Journal of Finance*, 52(3), 923-973.
- Sorensen, C. (2002). Modeling Seasonality in Agricultural Commodity Futures. *Journal of Future Markets*, 22(5), 393-426.
- Svensson, L. (1994). Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994. *National Bureau of Economic Research Cambridge, Mass., USA*.
- Trolle, A., Schwartz, E. (2008). A General Stochastic Volatility Model for the Pricing of Interest Rate Derivatives. *Review of Financial Studies*, (22), 2007-2057.
- Trolle, A., Schwartz, E. (2009). Unspanned Stochastic Volatility and the Pricing of Commodity Derivatives. *The Review of Financial Studies*, 22(11), 4423-4461.
- Vasicek, O.A. (1977). Interest-Rate Risk and the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Financial Economics*, 78, 457-470.

ANEXOS

Anexo A. Técnicas estándar de valoración de derivados

La forma estándar de abordar un problema de valoración de derivados, a partir de un proceso estocástico para el precio de un activo, es aplicando el lema de Ito sobre el nuevo activo.

Supongamos un activo S que depende de tres variables de estado X , Y y Z , las cuales a su vez siguen un proceso de Ito.

$$dH = \mu(H, t)dt + \sigma(H, t)dW$$

Ahora, supongamos además que existe otro activo, C , del cual sus pagos dependen de S . Entonces C , puede ser escrito como $C(X, Y, Z, T)$, de donde el lema de Ito nos dice que el proceso que sigue éste queda determinado por

$$\begin{aligned} dC = & C_X dX + C_Y dY + C_Z dZ + \frac{1}{2} C_{XX} (dX)^2 + \frac{1}{2} C_{YY} (dY)^2 + \frac{1}{2} C_{ZZ} (dZ)^2 \\ & + C_{XY} (dX)(dY) + C_{XZ} (dX)(dZ) + C_{YZ} (dY)(dZ) + C_T dt \end{aligned}$$

El lema de Ito hace que aparezcan los términos cuadráticos, de donde debe considerarse que si dW es un proceso browniano, entonces $(dW)^2 = dt$, y si dW_1 y dW_2 son procesos brownianos con correlación ρ , entonces $(dW_1)(dW_2) = \rho dt$.

Luego, si los procesos X , Y y Z fueron planteados en la medida neutral al riesgo, entonces el proceso para C también estará en esta medida, y si este es un activo transable (o puede ser asumido como tal), entonces $E[dC/C]$ debe ser la tasa libre de riesgo.

A partir de ello, se obtiene una ecuación diferencial que debe cumplir cualquier derivado escrito sobre S . Lo que diferencia a un derivado de otro son sus pagos, por lo que las

distintas fórmulas de valorización provienen de distintas condiciones de borde aplicadas a la ecuación diferencial original. A continuación se realizará la metodología para el caso de la existencia de una y dos variables de estado.

Para el caso de una variable de estado, se asumirá el proceso planteado por Black & Scholes 73:

$$dS = rSdt + \sigma SdW$$

Notar que la esperanza de dS/S es la tasa libre de riesgo, por lo que este proceso está escrito directamente en la medida neutral al riesgo. Ahora, supongamos un derivado escrito sobre S , $C(S,T)$, entonces el proceso que sigue este nuevo activo queda descrito por:

$$dC = C_S dS + \frac{1}{2} C_{SS} (dS)^2 + C_t dt$$

Reemplazando el proceso de S se obtiene:

$$dC = C_S (rSdt + \sigma SdW) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 C_{SS} dt + C_t dt$$

De donde agrupando:

$$dC = \left(C_S rS + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 C_{SS} + C_t \right) dt + \sigma S C_S dW$$

Ahora, asumiendo que C puede transarse, entonces se tiene que cumplir que:

$$C_S rS + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 C_{SS} + C_t = Cr$$

Esta es la ecuación diferencial de Black & Scholes 73, que para el caso particular de una opción del tipo *Call*, las condiciones de borde son:

$$\begin{aligned} C(0, t) &= 0 \\ C(S, t) &\rightarrow S, \text{ si } S \rightarrow \infty \\ C(S, T) &= \max(S - K, 0) \end{aligned}$$

Lo cual tiene como resultado la fórmula de Black & Scholes 73 para la opción *Call*.

Para dos variables de estado, se toma en cuenta la siguiente dinámica:

$$\begin{aligned} dS &= rSdt + \sigma SdW_1 \\ dr &= \kappa(\theta - r)dt + \sigma_r dW_2 \end{aligned}$$

Se asumirá que ambos procesos están siendo modelados en la medida neutral al riesgo. Ahora, supongamos un derivado escrito sobre S, C(S,r,T), entonces el proceso que sigue este nuevo activo queda descrito por:

$$dC = C_S dS + C_r dr + \frac{1}{2} C_{SS} (dS)^2 + \frac{1}{2} C_{rr} (dr)^2 + C_{rS} (dr)(dS) + C_t dt$$

Reemplazando el proceso de S, se obtiene:

$$\begin{aligned} dC &= C_S (rSdt + \sigma SdW) + C_r (\kappa(\theta - r)dt + \sigma_r dW_2) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 C_{SS} dt + \frac{1}{2} \sigma_r^2 C_{rr} dt \\ &\quad + C_{rS} \sigma \sigma_r \rho dt + C_t dt \end{aligned}$$

De donde agrupando:

$$dC = \left(C_S r S + C_r \kappa (\theta - r) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 C_{SS} + \frac{1}{2} \sigma_r^2 C_{rr} + C_{rS} \sigma \sigma_r \rho dt + C_t \right) dt + \sigma S C_S dW_1 + C_r \sigma_r dW_2$$

Ahora, asumiendo que C puede transarse, entonces se tiene que cumplir que:

$$C_S r S + C_r \kappa (\theta - r) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 C_{SS} + \frac{1}{2} \sigma_r^2 C_{rr} + C_{rS} \sigma \sigma_r \rho dt + C_t = Cr$$

Luego, la solución de la ecuación diferencial depende de las condiciones de borde que se apliquen a ésta. Dependiendo de ellas, la solución puede tener forma cerrada o, en el peor de los casos, puede ser resuelta numéricamente.

Anexo B. Forma de la función C(T), Schwartz 97 modelo 3.

Luego de resolver las ecuaciones diferenciales pertenecientes al modelo, se obtiene la siguiente forma para la función en cuestión.

$$C(T) = \frac{(\kappa \hat{\alpha} + \sigma_1 \sigma_2 \rho_1)((1 - e^{-\kappa T}) - \kappa T)}{\kappa^2} - \frac{\sigma_2^2(4(1 - e^{-\kappa T}) - (1 - e^{-2\kappa T}) - 2\kappa T)}{4\kappa^3} \\ - \frac{(am^* + \sigma_1 \sigma_3 \rho_3)((1 - e^{-aT}) - aT)}{a^2} \\ - \frac{\sigma_3^2(4(1 - e^{-aT}) - (1 - e^{-2aT}) - 2aT)}{4a^3} \\ + \sigma_2 \sigma_3 \left(\frac{(1 - e^{-\kappa T}) + (1 - e^{-aT}) - (1 - e^{-(\kappa+a)T})}{\kappa a (\kappa + a)} \right) \\ + \frac{\kappa^2(1 - e^{-aT}) + a^2(1 - e^{-\kappa T}) - \kappa a^2 T - a \kappa^2 T}{\kappa^2 a^2 (\kappa + a)}$$

Anexo C. Momentos Condicionales

Los momentos condicionales son obtenidos a partir de la forma propuesta por Richter & Sorensen 2002.

Sea $p_t = \log P_t$. La media y varianza condicional del proceso $X_t = (p_t, y_t, v_t)$, están dadas por.

$$E_t[X_{t+\Delta}] = \Phi(t + \Delta) \left(X_t + \int_t^{t+\Delta} \Phi^{-1}(u) l(u) du \right)$$

$$\text{Var}[X_{t+\Delta}] = \Phi(t + \Delta) \left(\int_t^{t+\Delta} E_t[v_u] \Phi^{-1}(u) \Sigma(u) \Phi^{-1}(u)' du \right) \Phi(t + \Delta)'$$

Donde

$$l(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \theta \end{pmatrix}, \quad \Sigma(u) = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{1,2}\sigma_y & \rho_{1,3}\sigma_v \\ \rho_{1,2}\sigma_y & -\beta & \rho_{2,3}\sigma_y\sigma_v \\ \rho_{1,3}\sigma_v & \rho_{2,3}\sigma_y\sigma_v & \sigma_v^2 \end{pmatrix}$$

Y donde Φ es la solución a la ecuación diferencial matricial

$$\frac{d\Phi(u)}{du} = L(u)\Phi(u), \quad \Phi(t) = I$$

Con

$$L(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} + \lambda_p \\ 0 & -\beta & \lambda_y\sigma_y \\ 0 & 0 & -\kappa + \lambda_v\sigma_v \end{pmatrix}$$

En particular, la esperanza condicional de la varianza está dada por

$$E[v_t] = v_t e^{-\kappa(u-t)} + \frac{\theta}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(u-t)}).$$

Anexo D. Deducción ecuaciones diferenciales para las funciones que definen los precios futuros

La forma funcional del precio futuro está descrita por

$$F(P, y, v, T) = P e^{A(T) + B(T)v + D(T)y}$$

Luego, al reemplazar las derivadas parciales en la ecuación diferencial respectiva, se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sigma_y^2 v D(T)^2 F + \frac{1}{2} \sigma_v^2 v B(T)^2 F + \rho_{1,2} \sigma_y v D(T) F + \rho_{1,3} \sigma_v v B(T) F \\ & + \rho_{2,3} \sigma_y \sigma_v v B(T) D(T) F + y F + (\alpha - \beta y) D(T) F + (\theta - \kappa v) B(T) F \\ & - \left(\frac{\partial A(T)}{\partial T} + \frac{\partial B(T)}{\partial T} v + \frac{\partial D(T)}{\partial T} y \right) F = 0 \end{aligned}$$

Con condición de borde $F(P, y, v, 0) = P$.

Las ecuaciones diferenciales presentadas son el resultados de agrupar todas las constantes, factorizar por v y por y , dejando todo igualado a cero. Y dado que la ecuación diferencial debe cumplirse para cualquier v e y , entonces tanto la constante como las componentes que acompañan a ambas variables de estado, deben ser cero simultáneamente, entregando tres ecuaciones diferenciales.

Anexo E. Forma funcional de Svensson 94 y Nelson & Siegel 87

Nelson & Siegel 1987 proponen la siguiente forma funcional para la curva que define las tasas de interés.

$$r(T) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{T}{t_1}\right)}{\frac{T}{t_1}} \right) + \beta_2 \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{T}{t_1}\right)}{\frac{T}{t_1}} - \exp\left(-\frac{T}{t_1}\right) \right)$$

Pero, dada la evidencia empírica de que se necesita mayor flexibilidad en la forma funcional, Svensson extiende el modelo y propone el siguiente.

$$r(T) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{T}{t_1}\right)}{\frac{T}{t_1}} \right) + \beta_2 \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{T}{t_1}\right)}{\frac{T}{t_1}} - \exp\left(-\frac{T}{t_1}\right) \right) \\ + \beta_3 \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{T}{t_2}\right)}{\frac{T}{t_2}} - \exp\left(-\frac{T}{t_2}\right) \right)$$

Esta es la forma funcional usada en este paper y fue calibrada para cada día con el método de mínimos cuadrados.

Anexo F. Derivadas parciales de la fórmula de Black 76

A partir de la forma funcional de Black 76,

$$C = e^{-rT} (FP_1 - KP_2)$$

Y dado Es posible calcular todas las derivadas parciales necesarias

$$C_T = -rC + e^{-rT} \left[e^x \frac{\partial P_1}{\partial T} - K \frac{\partial P_2}{\partial T} \right]$$

$$C_v = e^{-rT} \left[e^x \frac{\partial P_1}{\partial v} - K \frac{\partial P_2}{\partial v} \right]$$

$$C_x = e^{-rT} \left[e^x \left(P_1 + \frac{\partial P_1}{\partial x} \right) - K \frac{\partial P_2}{\partial x} \right]$$

$$C_{xx} = e^{-rT} \left[e^x \left(P_1 + 2 \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} \right) - K \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} \right]$$

$$C_{vv} = e^{-rT} \left[e^x \frac{\partial^2 P_1}{\partial v^2} - K \frac{\partial^2 P_2}{\partial v^2} \right]$$

$$C_{xv} = e^{-rT} \left[e^x \left(\frac{\partial P_1}{\partial v} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial v} \right) - K \frac{\partial^2 P_2}{\partial x \partial v} \right]$$

Donde,

$$x = \ln(F)$$

Las cuales son reemplazadas en la respectiva ecuación diferencial

Anexo G. Deducción de las ecuaciones diferenciales de las funciones que definen la función característica.

Las ecuaciones diferenciales que deben cumplir las funciones características respectivas son:

$$-\frac{\partial f_1}{\partial T} + \frac{\partial f_1}{\partial v} (\theta - \kappa v_t) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} \right) v_t \sigma_F^2(T) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial v^2} \sigma_v^2 v_t$$

$$+ \left(\frac{\partial f_1}{\partial v} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial v} \right) v_t \sigma_{Fv}(T) = 0$$

y

$$-\frac{\partial f_2}{\partial T} + \frac{\partial f_2}{\partial v} (\theta - \kappa v_t) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} \right) v_t \sigma_F^2(T) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial v^2} \sigma_v^2 v_t + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial v} v_t \sigma_{Fv}(T) = 0$$

Con

$$f_j(x, v, t; \phi) = e^{a_j(T) + b_j(T)v + i\phi x}$$

Calculando las derivadas parciales respectivas se tiene

$$\frac{\partial f_j}{\partial x} = i\phi f_j$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial x^2} = -\phi^2 f_j$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial v} = b_j(T) f_j$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial v^2} = b_j^2(T) f_j$$

$$\frac{\partial^2 f_j}{\partial x \partial v} = b_j(T) i\phi f_j$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial T} = \left(\frac{\partial a_j(T)}{\partial T} + \frac{\partial b_j(T)}{\partial T} v \right) f_j$$

Reemplazando estas derivadas en las ecuaciones diferenciales, agrupando por términos e igualando a cero, se obtiene el set de ecuaciones diferenciales requerido.

Anexo H. Aspectos Numéricos

Para computar la solución a todos los sets de ecuaciones diferenciales, se usó el método Runge-Kutta de cuarto orden y para la solución de las integrales numéricas se utilizó el *Adaptive Simpson Quadrature* recursivo. Las ecuaciones diferenciales dependientes de ϕ se evaluaron para valores que variaban entre 0 y 50, tomando una grilla de 0.05 entre los valores 0 y 20 y una de 0.3 para los que se encontraban entre 20 y 50, estos valores fueron elegidos a partir de la medición de error realizada en el modelo de Heston, donde la referencia correspondía a una integral completa usando la forma cerrada que define la función característica obtenida por Heston y se comparaba con la valorización de resolver el sistema de ecuaciones diferenciales numéricamente para los ϕ recién nombrados, los errores obtenidos no eran mayores a 10^{-6} .

Para calcular las derivadas de los precios de opciones con respecto a la variable de estado volatilidad se deriva la integral de las probabilidades quedando una función análoga a la que se necesita para computar las probabilidades originales, por lo que se usa la misma metodología pero con una función levemente modificada (la única diferencia es que en la derivada, baja b_j y desaparece la constante).