



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE  
ESCUELA DE INGENIERIA

**IMPLEMENTACIÓN DE UN SISTEMA  
TRONCAL Y ALIMENTADOR DE BUSES  
DE ACERCAMIENTO AL TRABAJO:  
¿CUÁNDO CONVIENE?**

**DANIEL EDUARDO SOTO FAÚNDEZ**

Tesis para optar al grado de  
Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Profesor Supervisor:  
**HOMERO LARRAÍN IZQUIERDO**

Santiago de Chile, Enero, 2021.

© 2021, Daniel Eduardo Soto Faúndez



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE  
ESCUELA DE INGENIERIA

# IMPLEMENTACIÓN DE UN SISTEMA TRONCAL Y ALIMENTADOR DE BUSES DE ACERCAMIENTO AL TRABAJO: ¿CUÁNDO CONVIENE?

**DANIEL EDUARDO SOTO FAÚNDEZ**

Tesis presentada a la Comisión integrada por los profesores:

**HOMERO LARRAÍN IZQUIERDO** 

**MARILÈNE CHERKESLY** 

**RICARDO GIESEN ENCINA** 

**SERGIO EDUARDO VERA ARAYA** 

Para completar las exigencias del grado de  
Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Santiago de Chile, Enero, 2021.

© 2021, Daniel Eduardo Soto Faúndez

*A Dios; a mis padres, Jaime y  
Lizette; a mis hermanos,  
Esteban, Benjamín y Jaime; y a  
mi Nohemí.*

## **AGRADECIMIENTOS**

En primer lugar, agradezco mucho a Dios, a mi familia y a mi novia, que me brindaron el apoyo necesario en el difícil contexto en que se desarrolló esta investigación.

También le agradezco en gran manera a mi profesor supervisor, Homero Larraín, por su entusiasmo, constante apoyo, confianza y consejos que me ayudaron en el desarrollo de la tesis.

Extiendo mis agradecimientos a la profesora Marilène Cherkesly, de la Universidad de Quebec en Montreal, por sus ideas, su apoyo y confianza en el trabajo desarrollado.

## ÍNDICE GENERAL

DEDICATORIA .....	i
AGRADECIMIENTOS .....	ii
ÍNDICE GENERAL.....	iii
ÍNDICE DE TABLAS .....	v
ÍNDICE DE FIGURAS.....	viii
RESUMEN.....	x
ABSTRACT .....	xii
1 INTRODUCCIÓN .....	1
2 REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA .....	5
3 METODOLOGÍA .....	11
3.1 Descripción del problema.....	11
3.2 Modelación del problema.....	12
3.3 Algoritmo de solución .....	16
3.3.1 Heurística de solución inicial .....	19
3.3.2 Búsqueda local de alimentadores .....	24
3.3.3 Cortes para el problema troncal y alimentador .....	28
3.3.4 Búsqueda de cortes.....	30
4 EXPERIMENTOS Y RESULTADOS .....	32
4.1 Parámetros generales de experimentos.....	33
4.2 Calibración y prueba de algoritmo .....	36
4.2.1 Resultados y análisis de la calibración del algoritmo .....	38
4.3 Análisis de sensibilidad .....	41
4.3.1 Análisis preliminar de sensibilidad .....	42

4.3.2	Experimento de sensibilidad del valor del tiempo .....	49
4.3.3	Experimento multifactorial de sensibilidad .....	57
4.4	¿Cuándo y cuánto conviene implementar troncales y alimentadores?.....	68
4.4.1	Modelo 1: ¿cuándo conviene el sistema troncal y alimentador?.....	68
4.4.2	Modelo 2: ¿cuánto conviene utilizar el sistema troncal y alimentador? ....	76
5	CONCLUSIONES .....	82
5.1	Cumplimiento de objetivos.....	82
5.2	Conclusiones generales de la investigación .....	83
5.2.1	Conclusiones del algoritmo de solución .....	83
5.2.2	¿Cuándo conviene utilizar el sistema troncal y alimentador?.....	84
5.3	Recomendaciones prácticas.....	85
5.4	Limitaciones de la investigación .....	87
5.5	Líneas futuras de investigación .....	89
	BIBLIOGRAFÍA .....	91
	ANEXOS .....	95
ANEXO A.	Pseudocódigo de la heurística de construcción de solución inicial ....	96
ANEXO B.	Pseudocódigo de la heurística de búsqueda local de alimentadores ...	97
ANEXO C.	Obtención de los cortes para la modelación .....	100
ANEXO D.	Ejemplo de aplicación de los cortes en una instancia.....	111
ANEXO E.	Pseudocódigo de la búsqueda de cortes.....	116
ANEXO F.	Resultados del experimento de calibración .....	119
ANEXO G.	Resultados del experimento preliminar de sensibilidad .....	125
ANEXO H.	Resultados del experimento de sensibilidad del valor del tiempo....	133
ANEXO I.	Resultados del experimento multifactorial de sensibilidad.....	136

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 4-1. Resumen de los experimentos realizados. ....	33
Tabla 4-2. Parámetros costo y capacidad utilizados en experimentos. ....	34
Tabla 4-3. Resumen de los parámetros de los experimentos. ....	36
Tabla 4-4. Configuraciones de algoritmos a comparar. ....	37
Tabla 4-5. Parámetros del experimento de comparación de algoritmos. ....	37
Tabla 4-6. Resultados del <i>gap</i> obtenido por cada configuración, tamaño de instancia y posición de planta. ....	38
Tabla 4-7. Resultados del <i>gap</i> obtenido por cada configuración y cada posición de planta. ....	39
Tabla 4-8. Resultados del tiempo de ejecución para instancias de 50 nodos. ....	39
Tabla 4-9. Configuración del experimento inicial de parámetros y sistemas. ....	42
Tabla 4-10. Promedios de los <i>gaps</i> obtenidos en la resolución de cada sistema. ....	45
Tabla 4-11. Resultados promedios de la solución del sistema T&F. ....	46
Tabla 4-12. Resultados de la comparación de sistemas. ....	48
Tabla 4-13. Parámetros del experimento de sensibilidad del valor del tiempo. ....	50
Tabla 4-14. Resultados de optimización del experimento de sensibilidad del valor del tiempo. ....	50
Tabla 4-15. Parámetros del experimento multifactorial de sensibilidad. ....	58
Tabla 4-16. Resultados de optimización del experimento multifactorial. ....	58
Tabla 4-17. Resultados de los indicadores <i>MGST&amp;F</i> , <i>%VT&amp;F</i> y <i>AOT</i> para cada $\beta$ , $\lambda$ y $\theta$ del experimento multifactorial de sensibilidad. ....	59
Tabla 4-18. Resultados del indicador <i>AOT</i> para cada $\beta$ , $\lambda$ y $\theta$ del experimento multifactorial de sensibilidad. ....	69
Tabla 4-19. Resultados de la regresión lineal para predecir <i>AOT</i> . ....	70
Tabla 4-20. Resultados de la regresión lineal para predecir <i>AOT</i> que considera el número de trabajadores. ....	71

Tabla 4-21. Resultados de la regresión lineal para predecir AOT que considera el número de trabajadores. ....	73
Tabla 4-22. Resultados de la regresión logística para predecir si conviene sistema T&F. ....	75
Tabla 4-23. Resultados de la regresión lineal del <i>MGST&amp;F</i> .....	76
Tabla 4-24. Resultados de la regresión lineal de las mejoras garantizadas sobre el sistema de solo troncales <i>MGST&amp;F, ST</i> .....	78
Tabla 4-25. Resultados de la regresión lineal de las mejoras garantizadas sobre el sistema de solo alimentadores <i>MGST&amp;F, SF</i> .....	78
Tabla 7-1. Parámetros costo y capacidad del ejemplo de solución del problema de relajación lineal. ....	112
Tabla 7-2. Parámetros de tiempo de viaje del ejemplo de solución del problema de relajación lineal. ....	112
Tabla 7-3. Parámetros de tiempo de caminata del ejemplo de solución del problema de relajación lineal. ....	112
Tabla 7-4. Parámetros de distancia del ejemplo de solución del problema de relajación lineal. ....	113
Tabla 7-5. Valores de las variables del ejemplo de solución del problema de relajación lineal. ....	113
Tabla 7-6. Pseudocódigo del proceso de Búsqueda de Cortes. ....	116
Tabla 7-7. Valores ordenados de la suma de los arcos del ejemplo de la Figura 7-5. ...	118
Tabla 7-8. Configuraciones de algoritmos a comparar. ....	119
Tabla 7-9. Resultados del <i>gap</i> obtenido por cada configuración, tamaño de instancia y posición de planta. ....	120
Tabla 7-10. Resultados del <i>gap</i> obtenido por cada configuración y cada posición de planta. ....	120
Tabla 7-11. Resultados del tiempo de ejecución para instancias de 50 nodos. ....	121
Tabla 7-12. Tiempos en <i>callback</i> y mejoras. ....	122
Tabla 7-13. Resultados y figuras del experimento preliminar de sensibilidad. ....	126

Tabla 7-14. Resultados del experimento de sensibilidad del valor del tiempo.....	133
Tabla 7-15. Parámetros de las curvas costo operacional vs tiempo adicional obtenidos para cada instancia. ....	135
Tabla 7-16. <i>Gap</i> promedio por cada valor de $\theta$ , $\beta$ y $\lambda$ , para el sistema T&F.....	137
Tabla 7-17. Tiempo de ejecución promedio por cada valor de $\theta$ , $\beta$ y $\lambda$ , para el sistema T&F.....	137
Tabla 7-18. Tiempo de ejecución promedio y el <i>gap</i> promedio por cada valor de $\theta$ y $\lambda$ , para el sistema ST. ....	138
Tabla 7-19. Tiempo de ejecución promedio por cada valor de $\beta$ , $\lambda$ y $\theta$ , para el sistema SF. ....	139
Tabla 7-20. <i>Gap</i> de optimalidad por cada combinación de parámetros $\beta$ , $\lambda$ y $\theta$ , para el sistema T&F.....	140
Tabla 7-21. Tiempo de ejecución por cada combinación de parámetros $\beta$ , $\lambda$ y $\theta$ para el sistema T&F.....	141
Tabla 7-22. <i>Gap</i> y tiempo de ejecución por cada combinación de parámetros $\lambda$ y $\theta$ para el sistema ST. ....	142
Tabla 7-23. Tiempo de ejecución por cada combinación de parámetros $\beta$ , $\lambda$ y $\theta$ para el sistema SF. ....	143
Tabla 7-24. Muestra el indicador <i>MSGT&amp;F</i> para cada combinación de parámetros $\beta$ , $\lambda$ y $\theta$ para el sistema T&F.....	144
Tabla 7-25. Valor del indicador <i>VT&amp;F</i> para cada combinación de parámetros $\beta$ , $\lambda$ y $\theta$ para el sistema T&F. ....	145
Tabla 7-26. Valor del indicador AOT para cada combinación de parámetros $\beta$ , $\lambda$ y $\theta$ para el sistema T&F. ....	146

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 3-1. Esquema de la operación de troncal y alimentador.....	12
Figura 3-2. Diagrama general del algoritmo de solución.....	18
Figura 3-3. Heurística agregar-quitar paraderos (AQ).....	20
Figura 3-4. Función de evaluación de costos.....	21
Figura 3-5. Ejemplo de aproximación de alimentadores. ....	23
Figura 3-6. Ejemplo de operación 2-opt. ....	25
Figura 3-7. Ejemplo de inserción de nodo vía caminata.....	26
Figura 3-8. Ejemplo de inserción de nodo en ruta. ....	26
Figura 3-9. Principio de funcionamiento de búsqueda local de alimentadores.....	27
Figura 4-1. Configuración de la posición de la planta. ....	35
Figura 4-2. Gráfico del <i>gap</i> promedio desde los cinco minutos de ejecución. ....	40
Figura 4-3. Gráfico de distribución de viajes, el aumento de costos operacional y el tiempo adicional relativo para $\lambda = 0$ . ....	51
Figura 4-4. Gráfico de distribución de viajes, el aumento de costos operacional y el tiempo adicional relativo para $\lambda = 2$ . ....	52
Figura 4-5. Ilustración de las soluciones de una instancia de 50 nodos, con $\lambda = 2$ , para distintos $\theta$ .....	53
Figura 4-6. Muestra el costo operacional y tiempo adicional total obtenido con cada valor de $\theta$ . ....	54
Figura 4-7. Efecto de $\theta$ sobre las restricciones del tiempo activas.....	56
Figura 4-8. Efecto de $\theta$ sobre la holgura de la restricción del tiempo. ....	56
Figura 4-9. Relación entre los indicadores $MGST\&F$ y $\%VT\&F$ .....	61
Figura 4-10. Relación entre los indicadores $MGST\&F$ y $AOT$ . ....	62
Figura 4-11. Relación entre los indicadores $\%VT\&F$ y $AOT$ , no incluye los valores $AOT = 0$ . ....	63
Figura 4-12. Ilustración de la solución óptima una instancia con parámetros $\lambda = 0$ , $\beta = 3$ y $\theta = 4$ , $AOT = 53\%$ y $\%VT\&F = 8\%$ .....	64

Figura 4-13. Relación entre los viajes en el sistema T&F y los asientos ofrecidos de troncal, por número de troncales en la solución.....	65
Figura 4-14. Relación entre la razón de los costos operacionales de los sistemas puros y el costo relativo aproximado. ....	73
Figura 4-15. Relación entre $\lambda$ , $\beta$ y $MGST\&F$ y los valores en que conviene el sistema T&F. ....	80
Figura 7-1. Ejemplo inserción de nodo en búsqueda local de alimentadores. ....	97
Figura 7-2. Ejemplo de solución del problema con solo alimentadores. ....	105
Figura 7-3. Ejemplo para explicar el corte de tiempo adicional. ....	108
Figura 7-4. Solución de una instancia de la relajación lineal del problema. ....	111
Figura 7-5. Ejemplo donde las variables entre dos nodos se suman. ....	118
Figura 7-6. Gráfico del <i>gap</i> promedio en los primeros cinco minutos de ejecución. ....	123
Figura 7-7. Gráfico del <i>gap</i> promedio desde los cinco minutos de ejecución. ....	124
Figura 7-8. Dispersión del <i>gap</i> de optimalidad del experimento preliminar de sensibilidad.....	125
Figura 7-9. Dispersión del <i>gap</i> de optimalidad del experimento de sensibilidad del valor del tiempo.....	134
Figura 7-10. Costo operacional vs el tiempo adicional total junto a una línea de tendencia para distintas instancias. ....	135
Figura 7-11. Dispersión del <i>gap</i> de optimalidad del experimento multifactorial de sensibilidad.....	136

## RESUMEN

Esta tesis se enmarca en el contexto del problema de ruteo de buses de acercamiento al trabajo. El problema consiste en que cada bus debe recoger pasajeros en distintas paradas para llevarlos al lugar de trabajo. En este problema existen dos aspectos en conflicto: los costos operativos del sistema y el nivel de servicio otorgado a los trabajadores. Se evalúa la implementación de un sistema de troncales y alimentadores, en el cual los alimentadores corresponden a vehículos pequeños que pueden llevar pasajeros a los vehículos con mayor capacidad, llamados troncales, o pueden llevarlos directamente a la planta. El objetivo es dilucidar en qué condiciones un sistema con troncales y alimentadores conviene sobre un sistema con solo troncales o un sistema con solo alimentadores.

Para abordar este problema se plantea un modelo matemático que considera los costos operacionales y el nivel de servicio otorgado. Este modelo fue resuelto con un algoritmo exacto combinado con heurísticas con el *solver* Gurobi. Para mejorar la convergencia del algoritmo exacto se diseñaron: heurísticas de construcción de soluciones, heurísticas de mejoramiento de soluciones y restricciones de corte específicas del problema para añadir a la modelación. El algoritmo de solución fue sometido a un experimento de calibración, en el cual la mejor estrategia resultó ser la implementación de: los cortes, una solución inicial, y una heurística que mejora iterativamente las soluciones encontradas por el *solver*.

El mejor algoritmo se utilizó para evaluar cuándo es mejor un sistema troncal y alimentador en comparación con los otros sistemas. Se diseñaron diversos escenarios en los cuales se variaron los siguientes parámetros: número de trabajadores, posición de la planta, costos y nivel de servicio. Se evaluó la influencia individual y conjunta de estos parámetros sobre la utilización y beneficios del sistema troncal y alimentador. La principal conclusión de esta investigación es que un sistema de troncales y alimentadores puede convenir cuando la planta se encuentra en la periferia o fuera de la ciudad, y cuando el costo de implementar un sistema puro de solo troncales es similar al de implementar uno de solo alimentadores. Por último, se desarrollaron herramientas para evaluar casos basados en problemas reales.

Palabras clave: buses de acercamiento; ruteo; troncal y alimentador; algoritmo exacto; heurísticas; Gurobi.

## **ABSTRACT**

This thesis is framed in the context of the home-to-work transportation problem. The problem is that each bus must pick up passengers at different stops to take them to their workplace. There are two conflicting aspects: the costs of the system and the level of service provided to the workers. To solve this problem, the implementation of a trunk and feeder system was evaluated. This system operates with small vehicles called feeders that can carry passengers to vehicles with greater capacity called trunks or can carry the passengers directly to the workplace. The objective is to know the conditions in which a system with trunks and feeders is better than a system with only trunks or a system with only feeders.

To address this problem, a mathematical model that considers operational costs and the level of service provided is proposed. This model was solved with an exact algorithm combined with heuristics with Gurobi solver. Construction heuristics, improvement heuristics and problem-specific cuts constraints were designed to complement the exact algorithm and improve its convergence. An experiment was created to define the best strategy to solve the problem. The results indicate that the best strategy to improve convergence was the implementation of cuts, an initial solution constructed by heuristics and an improvement heuristic.

The best algorithm is used to run several scenarios to identify when the trunk and feeder system is better than the others. The number of workers, plant position, costs and level of service are tested in those scenarios. The impact of the key parameters and the scenarios in which the trunk and feeder system brings more benefits are discussed. The main conclusion of this research is that a trunk and feeder system could be suitable when the plant is located on the periphery or outside the city, and when the cost of implementing a pure trunk-only system is similar to the cost of implementing a feeder-only system. Finally, tools were developed to evaluate real life scenarios.

Keywords: home to work buses; routing; trunk and feeder; exact algorithms; heuristics; Gurobi.

## 1 INTRODUCCIÓN

Actualmente la congestión del tránsito urbano es un problema a nivel mundial que trae distintas consecuencias ambientales, psicológicas y sociales. Esta situación trae diversos problemas a la salud de las personas. Por un lado, aumenta la contaminación en la ciudad, y esta puede producir o agravar problemas respiratorios en las personas (Amable et al., 2017). Por otro lado, estudios indican que a medida que crece la congestión, el tiempo de viaje al trabajo aumenta, y esto disminuye el bienestar subjetivo de las personas (Choi, Coughlin, & D'Ambrosio, 2013). Esto puede afectar a un individuo en diversos ámbitos de su vida, como en su relación familiar o la productividad en el trabajo (Warr & Nielsen, 2018). En Santiago de Chile, debido al continuo crecimiento del parque automotor, los viajes al trabajo pueden ser de hasta dos horas en algunos sectores de la ciudad (Cárdenas & Fernández, 7 de mayo de 2019). En este contexto, algunas empresas privadas ofrecen un servicio de buses de acercamiento para sus empleados con el fin de mejorar sus viajes al trabajo y/o a sus hogares. Por ejemplo, la industria minera en Chile es un sector importante que otorga este beneficio a sus trabajadores, a los cuales les provee de buses de acercamiento y otros modos de transporte para el traslado entre la mina y el hogar, sistema que conlleva un costo importante para la compañía (Minería Chilena, 2019). Si un sistema de buses de acercamiento es atractivo, tanto para la empresa como para los trabajadores, este podría inducir el cambio de modalidad del auto a estos buses de acercamiento para más empresas. Esto implica una mejor utilización del espacio vial, lo que ayuda a reducir la congestión.

La investigación de esta tesis nace por el caso real de una empresa que requería optimizar el servicio de buses de acercamiento entregado a sus trabajadores. Esta empresa posee una planta en la periferia de la ciudad, en la cual terceros proveen la flota y operación de buses de acercamiento. Estos buses comienzan su recorrido en algún paradero definido dentro de la ciudad y visitan otros paraderos para recoger trabajadores hasta que llegan a la planta. El problema es que dos aspectos importantes entran en conflicto con este servicio: los costos y el nivel de servicio otorgado a su personal. Los costos son parámetros externos a

la empresa, ya que son impuestos por el tercero que presta el servicio, el cual fija los precios para las rutas de acuerdo con el largo de estas y el vehículo utilizado para recorrerlas. En cuanto al nivel de servicio, es importante para la empresa que sus trabajadores lleguen a tiempo a la planta, que su trayecto sea seguro y cómodo. Con el fin de reducir los costos del sistema y otorgarles a sus trabajadores un mejor nivel de servicio, la empresa requirió evaluar la implementación de vehículos pequeños que llevaran a sus trabajadores a los buses de acercamiento, como un sistema de vehículos troncales y alimentadores. Los resultados de esta evaluación (realizada por el alumno con el profesor guía de esta tesis) mostraron que para su caso particular los costos de este nuevo sistema eran similares al actual con una mejora en el nivel de servicio, en el mejor de los casos. Los resultados de esta evaluación no son mostrados en esta tesis debido a términos de confidencialidad, pero motivó a la pregunta: ¿en qué casos un sistema con vehículos troncales y alimentadores es conveniente?

El problema de buses de acercamiento se ha estudiado previamente y se le conoce como *Home-to-work transportation problem* (HWTP) (Perugia, Moccia, Cordeau, & Laporte, 2011). El problema presentado en esta tesis es una variación del HWTP, ya que se consideran dos etapas, el ruteo de los alimentadores y el de los troncales. Por esta razón se le define como *Two echelon home-to-work transportation problem* (2E-HWTP). Estos problemas presentan una complejidad NP-complejo. Esto implica en la práctica que a medida que crece el tamaño del problema, obtener una solución óptima se hace extremadamente difícil. Por lo tanto, para responder la pregunta planteada es necesario disponer de herramientas que permitan resolver el problema para distintos escenarios. Por esto, el primer objetivo de esta tesis es plantear un modelo matemático eficiente, que al resolverlo permita obtener buenas soluciones en instancias pequeñas, entre 20 y 30 trabajadores. El segundo, es construir heurísticas que ayuden a obtener mejores soluciones para los escenarios más difíciles de resolver. El tercero, es responder a la pregunta planteada con las herramientas desarrolladas e identificar los factores que influyen en la utilización de un sistema de buses de acercamiento con alimentadores.

Para alcanzar el primer objetivo se hicieron algunos supuestos y se diseñó un modelo matemático que fue refinado a través de pruebas preliminares de resolución del problema. Las pruebas preliminares y todos los experimentos que involucraron algoritmos exactos fueron resueltos con el *solver* Gurobi (Gurobi Optimization Inc., 2019), programados a través del lenguaje Python. Las heurísticas y programas para interpretar resultados también fueron programados en el lenguaje Python. Además, para mejorar la modelación, se idearon restricciones de corte para ayudar al algoritmo utilizado por el *solver* a obtener mejores soluciones. Es importante obtener soluciones óptimas o con cierta certeza de optimalidad para poder comparar los distintos escenarios propuestos, de otra forma es incierto si un escenario resultó mejor que otro por sus características o por el desempeño del algoritmo. Por esta razón, se diseñaron heurísticas para construir y mejorar soluciones, las cuales están orientadas a mejorar el desempeño del *solver*. Esto da como resultado distintos componentes orientados a perfeccionar el rendimiento del *solver*. Las combinaciones de estos componentes fueron comparadas y se eligió la que obtuvo mejores resultados para la ejecución de los experimentos.

Para responder la pregunta central se diseñaron tres experimentos. El primero, se diseñó para comparar los beneficios del sistema troncal y alimentador (T&F, por *trunk and feeder* en inglés), con uno de solo troncales (ST) y otro de solo alimentadores (SF). Este experimento se realizó para: cuatro tamaños de instancia, o número de trabajadores; dos posiciones de la planta, al centro y fuera de la ciudad; y cinco distribuciones espaciales de los trabajadores para cada tamaño de instancia. El segundo, se diseñó para dilucidar el efecto de exigir un mayor nivel de servicio en los costos operativos, los tiempos de viaje de cada persona y la utilización del sistema T&F. Este experimento se realizó para: un tamaño de instancia, dos posiciones de la planta, 11 niveles de exigencia de nivel de servicio y cinco distribuciones de trabajadores. Por último, se diseñó un experimento para analizar los efectos sobre la utilización del sistema T&F y los beneficios que puede tener sobre los sistemas ST y SF, al variar: los costos, la posición de la planta y el nivel de servicio exigido. En este experimento se ejecutó: un tamaño de instancia, cinco niveles de

costos, cuatro posiciones de la planta, cinco niveles de exigencia de nivel de servicio y cinco distribuciones de trabajadores.

Esta tesis está organizada de la siguiente manera. Primero, se desarrolla una revisión bibliográfica para tener una visión de las particularidades del problema, problemas similares y métodos de resolución. Luego de esto, se presenta la definición del problema, el modelo y sus supuestos, el desarrollo de las heurísticas y restricciones de corte diseñadas. Posterior a esto se presentan los resultados y análisis de los experimentos de comparación de algoritmos y los tres experimentos de parámetros. Por último, se desarrollan las conclusiones y se plantean los lineamientos para futuras investigaciones.

## 2 REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

El problema estudiado corresponde a la familia de *Location routing problem* (LRP) (Laporte, 1998) y posee similitudes con el *School bus routing problem* (SBRP) y su derivado *Home-to-work transportation problem* (HWTP). El LRP apunta a determinar la localización de las plantas en un sistema de distribución a la vez que se diseñan las rutas de la red. Este tiene similitud con el 2E-HWTP debido a que la localización de los paraderos y las rutas son variables de decisión, sin embargo, este último considera la posición de la planta como dada. El SBRP consiste en que estudiantes de distintas ubicaciones deben ser recogidos en puntos de parada por un vehículo y llevados a su escuela a tiempo. Una revisión reciente de publicaciones con respecto a este tema se puede encontrar en la publicación de Ellegood, Solomon, North y Campbell (2019) y también en la de Park y Kim (2010). El HWTP es similar al SBRP, pero con la diferencia que se deben llevar a los trabajadores a su lugar de trabajo. Este problema es estudiado en la publicación de Perugia, Moccia, Cordeau y Laporte (2011). A continuación, se presenta una revisión bibliográfica que aborda: los subproblemas del SBRP, algoritmos utilizados, criterios de nivel de servicio, revisión del HWTP y una breve revisión de problemas similares.

De acuerdo a Ellegood et al. (2019) existen cinco subproblemas del SBRP que son relevantes de resolver: selección de paradas, generación de rutas de buses, programación de rutas de buses, ajuste a la campana de la escuela y la política de transporte estratégico. La selección de paradas corresponde a la asignación de los estudiantes a un paradero de bus. Este problema suele ser formulado como un problema en que se minimiza el número de paradas, la distancia que caminan los estudiantes, o ambas a la vez. Generalmente este problema se resuelve junto a la generación de rutas de buses, que corresponde a la asignación del orden de paradas a recorrer por los buses. La programación de ruta de buses corresponde a la logística de utilización estos y coordinación de la hora de su llegada y salida. El subproblema de ajuste a la campana de la escuela se enfoca en determinar las ventanas de tiempo en que el bus debe llegar a la escuela y la hora en que puede comenzar la ruta para cada estudiante. Por último, el subproblema de políticas de transporte

estratégico se enfoca en definir las políticas que determinan el tipo de servicio que se va a entregar, como determinar qué tipo de flota se utilizará.

Para resolver el problema de selección de paradas en conjunto con el de generación de rutas, de acuerdo con Ellegood et al. (2019), existen tres enfoques que difieren en el orden en que son resueltos. El primero, *location-allocation-routing* (LAR), consiste en que en un comienzo se seleccionan los paraderos, luego se asigna a los estudiantes a los paraderos, y por último se construyen las rutas. El segundo, *allocation-routing-location* (ARL), consiste en crear agrupar a los estudiantes de acuerdo con la capacidad del bus, luego se seleccionan los paraderos dentro de estos grupos, y por último, se crean las rutas. El tercero, el *location-routing-allocation* (LRA), primero identifica las paradas factibles para cada estudiante, luego crea las rutas minimizando las distancias con estas paradas factibles, y por último, asigna a los estudiantes a cada parada. Estos enfoques están mayormente orientados a la construcción de heurísticas de solución. Si bien la metodología para solucionar el 2E-HWTP que se presenta en esta tesis es a través de algoritmos exactos, se construyeron heurísticas de solución y mejora, las cuales siguen un enfoque LRA.

Según la investigación de Ellegood et al. (2019) las metaheurísticas más utilizadas en este tipo de problemas son: Algoritmo genético, Colonia de hormigas, Búsqueda tabú, *Greedy randomized adaptive search procedure* (GRASP), *Simulated Annealing* y Búsqueda local iterada. Para la construcción de soluciones, las heurísticas más utilizadas son: métodos de dos fases, métodos de inserción y algoritmos de ahorros. Dentro de los métodos de dos fases el más utilizado es el *cluster-first route-second*. En este, primero se agrupa a los estudiantes para elegir los paraderos más convenientes y luego se construyen las rutas. Los métodos de inserción son heurísticas que construyen rutas iterativamente al añadir paraderos a rutas incompletas. Para añadir los paraderos a las rutas se utilizan criterios de distancia u otros parámetros (Spada, Bierlaire, & Liebling, 2005), criterios probabilísticos, o una mezcla de criterios dentro de una subrutina en un proceso de generación de columnas

(Caceres, Batta, & He, 2019). Los algoritmos de ahorros están basados en el algoritmo de Clark y Wright (Clarke & Wright, 1964), adaptándolos al problema particular estudiado. Estos algoritmos de construcción de solución en general son complementados por métodos de mejora, que perturban la solución con el fin de mejorarla. Los métodos más utilizados en este ámbito son los  $k$ -opt (Helsgaun, 2009) dentro de las rutas de los buses o entre las rutas de los buses. Con respecto a los algoritmos exactos, estos se utilizan para resolver instancias relativamente pequeñas. Generalmente se utilizan algoritmos exactos como el de Ramificación y acotamiento (*Branch and bound* en inglés) (Kumar & Jain, 2016), Ramificación y poda (*Branch and cut* en inglés) (Riera-Ledesma & Salazar-González, 2012) o generación de columnas (Kinable, Spieksma, & Vanden Berghe, 2014).

El nivel de servicio otorgado a las personas es un elemento clave en ese tipo de sistemas. De acuerdo con Savas (1978) existen tres índices clave para evaluar el rendimiento de un servicio en general: eficiencia, efectividad y equidad. La eficiencia mide el nivel de servicio comparado con los costos de los recursos requeridos para proveerlo. En general, la eficiencia de un servicio en el contexto del SBRP, y sus derivados, se mide en los costos. Existen dos componentes principales del costo total de proveer el servicio: el costo fijo, reflejado en el costo de adquisición y mantención de la flota; y el costo variable, que refiere a los costos que incrementan con la distancia del recorrido (Bowerman, Hall, & Calamai, 1995). Por lo tanto, optimizar los costos de proveer el servicio implica mejorar la eficiencia. Por otro lado, la efectividad de un servicio se mide por el nivel en que la necesidad es satisfecha. Esto se traduce en que la prestación sea capaz de satisfacer la necesidad de todas las personas que participan en ella con un adecuado nivel de servicio. En los problemas estudiados, esto se traduce en la optimización de diversos indicadores que apuntan al nivel de servicio, como: minimizar el tiempo de viaje de las personas (Kang, Kim, Felan, Choi, & Cho, 2015), minimizar el tiempo o distancia de caminata (Bertsimas, Delarue, & Martin, 2019) o minimizar el tiempo adicional que se incurre en comparación con viajar directamente al destino (Spada et al., 2005, Perugia et al., 2011). Por último, la equidad se define como la igualdad o imparcialidad del servicio. Un servicio

puede ser efectivo en tiempo, pero la distribución de los beneficios del sistema puede ser desigual. Para abordar este criterio se han planteado medidas como: distribuir equitativamente a los usuarios en los vehículos, distribuir el tiempo de ruta de los vehículos, o distribuir el tiempo de caminata (Li & Fu, 2002, Bowerman et al., 1995, Perugia et al., 2011). El modelo presentado en esta tesis plantea la eficiencia como la minimización de costos, la efectividad como minimización de los tiempos adicionales (Spada et al., 2005) y la equidad con una medida de distribución de los tiempos adicionales (Perugia et al., 2011). A continuación, se presentará cómo se abordaron estos tres criterios.

El HWTP es definido en Perugia et al. (2011). Los autores proponen una optimización multiobjetivo que aborda los criterios de eficiencia, efectividad y equidad. Los dos primeros criterios se capturan en la función objetivo, que minimiza los costos fijos y variables de los buses a la vez que minimiza el tiempo adicional que incurre cada trabajador. El tiempo adicional en este contexto se define como la diferencia que existe entre el tiempo de viaje del trabajador y el tiempo de viaje que tendría al ir directamente a la planta. En este mismo trabajo los autores señalan que este modelo puede tender a castigar con tiempos de acceso excesivamente altos a los pasajeros que se encuentran alejados del destino. Como medida de equidad, los autores incorporan una restricción que limita el tiempo de acceso a nivel individual. El modelo así planteado es resuelto mediante la metaheurística de búsqueda tabú. El problema estudiado en la presente tesis puede clasificarse como un HWTP, ya que ambos apuntan a resolver esencialmente el mismo problema. La principal diferencia entre el HWTP presentado por Perugia et al. (2011) y el 2E-HWTP estudiado en esta tesis, es que en este último existe la posibilidad de que vehículos pequeños, llamados alimentadores, lleven pasajeros hacia un bus que los llevará finalmente a la planta, mientras que el HWTP solo permite viajes directos a la planta.

Bögl, Doerner y Parragh (2015) incorporan transbordos en un SBRP con múltiples escuelas. El problema consiste en proveer de un sistema de líneas de buses que permitan

a los estudiantes llegar a su respectiva escuela, en forma similar a como se utiliza un sistema de transporte público. De esta manera, en un mismo bus puede haber estudiantes que tienen distintos destinos. En este problema se minimizan los tiempos de viaje de los usuarios y se penalizan los transbordos. Se utiliza una flota homogénea y no se consideran los costos de los vehículos en la función objetivo. Su principal resultado es que un sistema con transbordos, en comparación con uno sin transbordos, puede reducir los costos operativos y los tiempos de viaje resultan ser similares. Se abordó este problema con un algoritmo jerárquico que divide el problema en subproblemas pequeños que fueron resueltos con heurísticas dedicadas, como búsqueda local y perturbación de soluciones.

Otro problema que guarda relación con el 2E-HWTP es el *Two echelon capacitated vehicle routing problem* (2E-CVRP). Este último es un problema de transporte de carga en dos etapas, en que se debe respetar la capacidad del vehículo en cada etapa. La primera etapa corresponde al transporte de la carga desde una central a un intermediario o satélite. La segunda, al transporte de la carga del intermediario al cliente. Una revisión de este problema se encuentra en la publicación de Cuda, Guastaroba, y Speranza (2015). La principal diferencia es que el 2E-CVRP suele no considerar dentro de sus criterios de optimización el nivel de servicio, aspecto crucial para el transporte de pasajeros. La familia de los 2E-CVRP suelen ser abordados con metaheurísticas como: GRASP, *Simulated annealing*, Búsqueda local iterada y Búsqueda tabú (Cuda et al., 2015). Con respecto a los algoritmos exactos, Contardo, Hemmelmayr, y Crainic (2012) resuelven este problema con el método de *Brunch and cut* para instancias pequeñas de 50 clientes y 10 satélites. Para instancias más grandes utilizan la metaheurística *Adaptive large neighbourhood search* (ALNS), en conjunto con heurísticas de búsqueda local y construcción de soluciones.

Para cerrar esta revisión bibliográfica, vale la pena mencionar que los esquemas basados en servicios troncales y alimentadores han sido estudiados ampliamente en el ámbito del transporte público. Este tipo de sistema puede traer beneficios en una ciudad debido a las

economías de densidad, pero depende de factores como la dispersión de la demanda en los orígenes de los viajes y la longitud de los viajes (Gschwender, Jara-díaz, & Bravo, 2016). Un sistema bien coordinado de troncales y alimentadores podría traer beneficios al operador y a los usuarios (Sivakumaran, Li, Cassidy, & Madanat, 2012). Este problema es distinto al 2E-HWTP, porque implica múltiples orígenes y destinos, redes densas, demanda aleatoria, entre otras diferencias. Sin embargo, un resultado a destacar es que la densidad y cantidad de personas en un sistema son factores que pueden favorecer a un sistema troncal y alimentador en ambos contextos.

### 3 METODOLOGÍA

En el presente capítulo se examinará la metodología para abordar el problema en cuestión, el cual se tratará indistintamente como *Two echelon Home-to-work Transportation problem* (2E-HWTP), HWTP con troncales y alimentadores, o problema troncal y alimentador. En ese contexto se comenzará con la descripción del problema, luego su modelación matemática y, por último, se describirá el algoritmo de solución y cada uno de sus componentes.

#### 3.1 Descripción del problema

Una empresa posee una planta a la cual deben llegar sus trabajadores. Esta desea proveer un servicio de acercamiento en el que tiene la posibilidad de combinar dos tipos de vehículos en un sistema de troncal y alimentador. Esos vehículos presentan distintas capacidades y distintos costos fijos y variables. Con respecto a los recorridos de los vehículos, se define un servicio troncal como uno que comienza su ruta en un paradero y termina en la planta. Por otro lado, un alimentador es un servicio que comienza en un paradero, pero que puede terminar su recorrido en un paradero visitado por un troncal o directamente en la planta. Cada pasajero tiene un paradero potencial en una ubicación próxima a su hogar, el cual puede ser paradero de troncal o alimentador. Si la parada próxima al trabajador no es visitada por un vehículo, el trabajador también puede acceder a un paradero más lejano. A este acceso se le llama caminata, y es considerado dentro del tiempo de viaje total. En cambio, si su paradero próximo es visitado, entonces el trabajador aborda el vehículo en este. El tiempo de viaje de un trabajador no puede sobrepasar un tiempo máximo predefinido. En la Figura 3-1 se muestra el esquema de un sistema solo de troncales y otro con troncales y alimentadores para contrastar su diferencia. La empresa desea proveer de este servicio con un bajo costo operativo, y a la vez ofrecer un buen nivel de servicio.

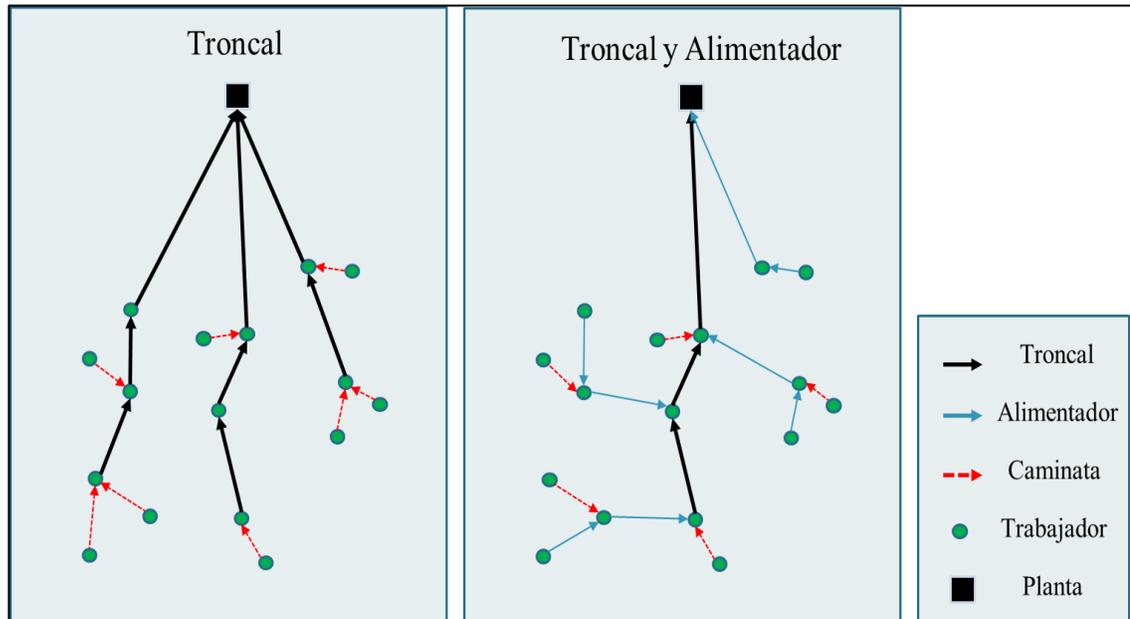


Figura 3-1. Esquema de la operación de troncal y alimentador.

Fuente: elaboración propia.

### 3.2 Modelación del problema

Para modelar este problema, se asume que el pasajero accede a su paradero próximo sin costo, dado que este se encuentra cerca de su hogar. La ubicación de cada paradero potencial se representa por el conjunto  $N = \{1, \dots, n\}$ . Además, cada paradero representa a un solo trabajador: si existe un trabajador con la misma ubicación que otro, se utilizan dos nodos distintos. La planta se representa por el nodo  $d$ , y para facilitar la modelación se incluye un nodo  $o$  en el que se originan los viajes de los vehículos, el cual posee arcos de acceso a todos los nodos sin costo. El tipo de vehículo troncal se representa por  $b$  y el alimentador por  $a$ , y se define el conjunto  $U := \{b, a\}$  para representar de forma genérica los tipos de vehículo. De esta forma,  $Q^u$  representa la capacidad del vehículo  $u \in U$ , así como  $c_v^u$  y  $c_f^u$  representan los costos variables por unidad de distancia y costo fijo por vehículo utilizado para  $u \in U$ . Se define el conjunto  $A := \{(i, j) : i \in N \cup \{o\}, j \in N \cup$

$\{d\}, i \neq j\}$  como los arcos que pueden recorrer los vehículos, y el conjunto  $A_c := \{(i, j): i \in N, j \in N \cup \{d\}\}$  para representar el acceso vía caminata de un trabajador a un nodo. El tiempo de viaje en vehículo entre dos paraderos y el tiempo de acceso a un paradero se representan por  $t_{ij}$  y  $\tau_{ij}$  respectivamente, con  $(i, j) \in A$ .

El tiempo máximo de viaje permitido para el pasajero asociado a un nodo  $i$  es función de su tiempo de viaje directo a la planta, y del tiempo de viaje directo más largo de la instancia, como muestra la ecuación (3-1), en la que  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son parámetros conocidos. La función tiene esta forma con el objetivo de distribuir los tiempos adicionales de manera que las personas que se encuentren más lejos no sean más afectadas.

$$T_i^{Max} = t_{id} + \min\left(\alpha_1 \cdot t_{id}, \alpha_2 \cdot \max_{j \in N}\{t_{jd}\}\right), \quad \forall i \in N \quad (3-1)$$

Para simplificar el problema, se considera que los transbordos están perfectamente coordinados, de forma que el tiempo de detención es igual en todas las paradas. De esta forma se puede agregar el tiempo de detención a cada arco correspondiente en el problema para modelar los tiempos de transbordos y tiempos en paradero.

Se minimizan los costos operacionales, fijos y variables, para determinar la combinación óptima entre troncales y alimentadores. Las variables por definir representan las rutas de cada tipo de vehículo y los pasajeros asignados a cada parada. Por otro lado, en la función objetivo se considera el nivel de servicio al minimizar el tiempo adicional que le toma al pasajero respecto al tiempo de viajar directamente a la planta.

Siguiendo las definiciones de la sección previa, se plantea el modelo matemático del problema. Los conjuntos utilizados en este modelo son:

- $N$ : conjunto de trabajadores y potenciales paraderos.
- $V$ : conjunto de vértices de la red,  $N \cup \{o, d\}$ .
- $A$ :  $\{(i, j): i \in N \cup \{o\}, j \in N \cup \{d\}, i \neq j\}$ .

- $A_c: \{(i, j): i \in N, j \in N \cup \{d\}\}$ .
- $U: \{a, b\}$  conjunto de los tipos de vehículo.

Lo parámetros conocidos para el modelo son:

- $d_{ij}$ : distancia de  $i$  a  $j$ ,  $\{i, j\} \in N$ .
- $t_{ij}$ : tiempo de viaje de  $i$  a  $j$ ,  $\{i, j\} \in N$ .
- $\tau_{ij}$ : tiempo de caminata de  $i$  a  $j$ ,  $\{i, j\} \in N$ .
- $c_v^u$ : costo variable por unidad de distancia del vehículo tipo  $u \in U$ .
- $c_F^u$ : costo fijo por vehículo utilizado del tipo  $u \in U$ .
- $Q^u$ : capacidad del vehículo de tipo  $u \in U$ .
- $T_i^{Max}$ : tiempo máximo de viaje que se permite para el usuario  $i \in N$ .

Las variables del modelo son:

- $x_{ij}^u$ : 1 si el vehículo tipo  $u \in U$  utiliza el arco  $(i, j) \in A$ , 0 si no lo utiliza.
- $z_{ij}$ : 1 si el usuario  $i$  es asignado al paradero  $j$ ,  $(i, j) \in A_c$ , 0 en otro caso.
- $p_i^u$ : 1 si el nodo  $i$  es una parada de un vehículo tipo  $u \in U$ .
- $T_i$ : tiempo total de viaje del usuario  $i$  a la planta,  $i \in N \cup \{d\}$ .
- $w_i$ : tiempo adicional de viaje del usuario  $i \in N$  respecto a viajar directamente a la planta.
- $f_{ij}$ : carga de pasajeros en el arco  $(i, j) \in A$ .
- $q_i$ : número de pasajeros que aborda un vehículo en el paradero  $i \in N$ .
- $D_i$ : número de alimentadores que combinan con un troncal en el nodo  $i \in N$ .

El modelo minimiza los costos operativos totales y también el nivel de servicio del sistema, calculado como el valor del tiempo adicional de viaje respecto al tiempo de viaje directo.

$$\min \sum_{u \in U} \sum_{(i,j) \in A} x_{ij}^u \cdot d_{ij} \cdot c_v^u + \sum_{u \in U} \sum_{j \in N} x_{oj}^u \cdot c_F^u + \theta \sum_{i \in N} w_i \quad (3-2)$$

$$\text{S. a. } \sum_{j \in \{o\} \cup N} x_{ji}^b = \sum_{j \in NU\{d\}} x_{ij}^b, \quad \forall i \in N \quad (3-3)$$

$$\sum_{j \in \{o\} \cup N} x_{ji}^a = \sum_{j \in NU\{d\}} x_{ij}^a + D_i, \quad \forall i \in N \quad (3-4)$$

$$D_i \leq p_i^b \cdot n, \quad \forall i \in N \quad (3-5)$$

$$p_i^u = \sum_{j \in NU\{d\}} x_{ij}^u, \quad \forall i \in N, u \in U \quad (3-6)$$

$$q_i = \sum_{j \in N} z_{ji}, \quad \forall i \in N \quad (3-7)$$

$$\sum_{j \in NU\{d\}} z_{ij} = 1, \quad \forall i \in N \quad (3-8)$$

$$\sum_{u \in U} p_i^u \leq z_{ii}, \quad \forall i \in N \quad (3-9)$$

$$\sum_{j \in NU\{d\}} f_{ij} - \sum_{j \in NU\{o\}} f_{ji} = q_i, \quad \forall i \in N \cup \{o\} \quad (3-10)$$

$$f_{ij} \leq \sum_{u \in U} x_{ij}^u \cdot Q^u, \quad \forall (i, j) \in A, i \neq o \quad (3-11)$$

$$T_j + t_{ij} - T_i \leq (1 - x_{ij}^u) \cdot M_{ij}^1, \quad \forall (i, j) \in A, i \neq o, u \in U \quad (3-12)$$

$$T_j + \tau_{ij} - T_i \leq (1 - z_{ij}) \cdot M_{ij}^2, \quad \forall (i, j) \in A_c, i \neq j \quad (3-13)$$

$$T_i - t_{id} \leq w_i, \quad \forall i \in N \quad (3-14)$$

$$T_i \leq T_i^{Max}, \quad \forall i \in N \quad (3-15)$$

$$x_{ij}^u \in \{0,1\}, \quad \forall (i, j) \in A, u \in U \quad (3-16)$$

$$z_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall (i, j) \in A_c \quad (3-17)$$

$$p_i^u \in \{0,1\}, \quad \forall i \in N, u \in U \quad (3-18)$$

$$q_i \geq 0, \quad \forall i \in N \cup \{d\} \quad (3-19)$$

$$T_i \geq 0, \quad \forall i \in N \cup \{d\} \quad (3-20)$$

$$w_i \geq 0, \quad \forall i \in N \cup \{d\} \quad (3-21)$$

$$D_i \geq 0, \quad \forall i \in N \quad (3-22)$$

$$f_{ij} \geq 0, \quad \forall (i, j) \in A \quad (3-23)$$

En esta formulación  $M_{ij}^1 = T_j^{Max} + t_{ij} - t_{id}$  y  $M_{ij}^2 = T_j^{Max} + \tau_{ij} - t_{id}$ . La función objetivo (3-2) minimiza el costo variable por distancia recorrida y el costo de la flota utilizada en la solución, a la vez que minimiza el tiempo total adicional de viaje respecto

al tiempo de viaje directo. El parámetro  $\theta$  corresponde al valor del tiempo adicional, a mayor valor más importancia tienen los tiempos adicionales de los usuarios, por lo tanto, se podría alcanzar un mejor nivel de servicio. Si el valor de  $\theta$  es cero, el enfoque de la optimización es solamente en costos sujeto a un nivel de servicio mínimo impuesto por las restricciones de tiempo máximo de viaje. El efecto del valor de  $\theta$  se analizará en la sección de experimentos.

Las restricciones (3-3) y (3-4) definen la conservación de flujo de los troncales y alimentadores en los nodos, respectivamente. La variable  $D_i$  en esta última restricción conserva el flujo del alimentador en el caso de que  $i$  sea también una parada de troncal, esto permite que pueda terminar su recorrido en un nodo que no sea  $d$ . La variable  $D_i$  indica cuántos alimentadores hacen combinación con el troncal en  $i$ . La restricción (3-5) es para que la variable  $D_i$  solo se active cuando hay una parada de troncal en ese nodo. Las restricciones (3-6) y (3-7) definen las variables auxiliares de parada y demanda en un nodo respectivamente. La restricción (3-8) implica que un pasajero es asignado a un solo nodo de parada o si es posible al nodo  $d$ . La restricción (3-9) indica que si existe un paradero en el nodo  $i \in N$ , la persona aborda el vehículo en su misma parada. Las restricciones (3-10) y (3-11) modelan la carga de pasajeros en los arcos y la capacidad máxima de estos. Las restricciones (3-12) y (3-13) modelan el registro del tiempo en el caso de que un arco de algún tipo de vehículo conecte dos nodos, o si es un arco de acceso a un paradero, respectivamente. Por último, la restricción (3-14) define la variable  $w_i$  y la (3-15) define la restricción de tiempo máximo para cada usuario.

### 3.3 Algoritmo de solución

En esta sección se presentan las estrategias que se utilizaron para abordar el 2E-HTWP. Primero se analizará la estructura general de la estrategia, luego se verá en detalle cada una de las partes que conforman el algoritmo de solución, partiendo con la heurística de

solución inicial, luego la búsqueda local enfocada en alimentadores, y por último los cortes añadidos a la formulación.

El objetivo del algoritmo es obtener soluciones óptimas o que otorguen alguna noción de optimalidad con el fin de tener mejores puntos de comparación para los experimentos. Por lo tanto, se utilizó el *solver* Gurobi (Gurobi Optimization Inc., 2019) que permite resolver problemas lineales enteros mixtos con el algoritmo de ramificación y poda (*Branch and bound* en inglés). Además, permite interactuar con el algoritmo a través de *callback*, con el cual se pueden entregar soluciones y/o nuevos cortes para acelerar la solución.

Teniendo en consideración estas herramientas y que este problema es difícil de resolver solamente con el algoritmo principal de Gurobi, se añadieron mejoras al algoritmo para mejorar su rendimiento. Estas mejoras se dividen en tres categorías, heurísticas de solución inicial, mejoras basadas en solución y mejoras de modelamiento. La primera se enfoca en construir soluciones a través de alguna heurística con el fin de tener una solución factible que luego pueda ser entregada al algoritmo de Gurobi. La segunda se enfoca en las mejoras que se pueden hacer vía *callback*, ya que estas se basan en la información de una solución entera o del problema relajado, y entrega una nueva solución o corte al algoritmo principal. La tercera categoría se basa en añadir restricciones adicionales que funcionen como cortes para la relajación lineal del problema, de esta manera se pueden obtener mejores cotas inferiores iniciales para el valor de la función objetivo, esto debería mejorar el *gap* final de la optimización.

Se considera el *gap* final de optimización o *gap* de optimalidad a la diferencia porcentual entre la mejor solución, o cota superior, y la mejor cota inferior que se logró encontrar. Es decir, si se considera  $LB^f$  y  $UB^f$  la cota inferior y superior final respectivamente, el *gap* de optimalidad se calcula como:

$$Gap^f = \frac{UB^f - LB^f}{UB^f} \quad (3-24)$$

Las distintas partes de este algoritmo se resumen en el diagrama de la Figura 3-2, en el cual se muestran las posibles mejoras implementadas al algoritmo principal P y cómo interactúan de una forma general. Del diagrama, la solución inicial corresponde con la primera categoría de mejora, la búsqueda local y de cortes a la segunda, y los cortes iniciales a la tercera.

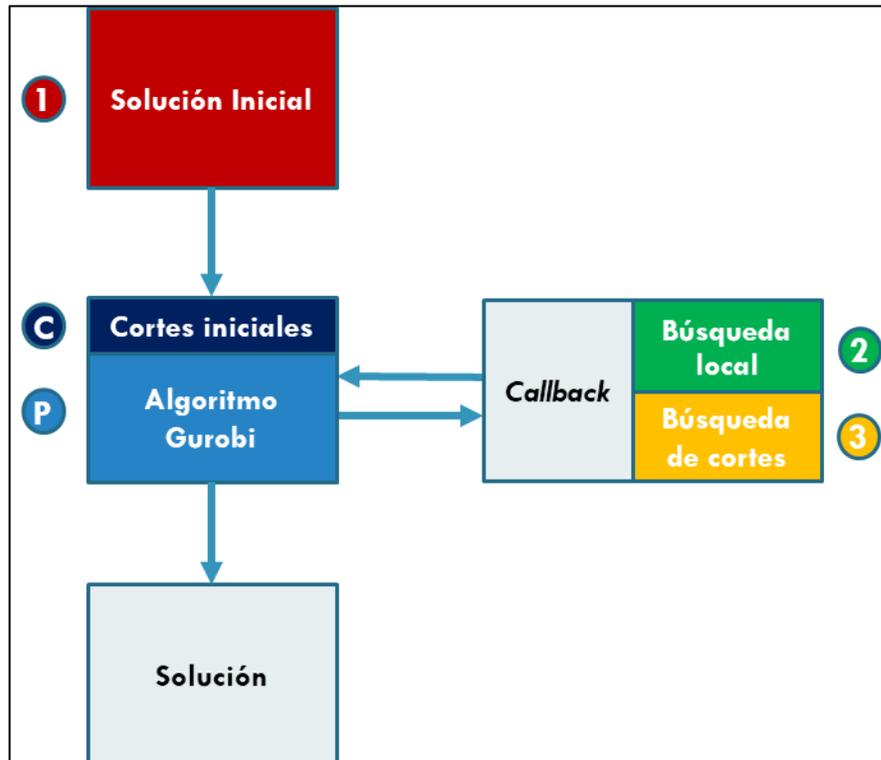


Figura 3-2. Diagrama general del algoritmo de solución.

Fuente: elaboración propia.

### 3.3.1 Heurística de solución inicial

A continuación, se describe la heurística de solución inicial que corresponde al bloque 1 del algoritmo de la Figura 3-2. Se explicarán dos variaciones para calcular los costos y construir una solución. Esta heurística es una adaptación del algoritmo que se usó en el trabajo realizado del cual nació el tema de esta tesis. Se enfoca en encontrar el mejor grupo de paraderos de troncal a servir, donde cada combinación de paraderos tiene un costo distinto dependiendo de las rutas y el tiempo de la solución. Con el fin de evaluar combinaciones, se utilizó la dinámica de agregar y quitar paraderos iterativamente hasta encontrar la mejor combinación y una función que calcula los costos para cada combinación. Esta última función tiene dos variaciones, una construye una solución y obtiene sus costos, y la otra construye solo las rutas de troncales y aproxima con una fórmula el costo de los alimentadores. En el ANEXO A se puede encontrar más detallada la lógica del algoritmo.

En la Figura 3-3 se muestra un diagrama que representa el funcionamiento en un nivel general de la heurística de solución inicial, a la cual de aquí en adelante se le llamará algoritmo agregar-quitar, o AQ. Esta comienza con el paradero disponible más cercano a la planta, y entra a un proceso iterativo de agregar y quitar paraderos de troncal. Este proceso comienza con una primera iteración en que se agregan secuencialmente todos los paraderos que mejoren los costos. Esto se evalúa en orden de cercanía al conjunto, es decir, primero se evalúan los paraderos más cercanos al conjunto y luego los más lejanos. Una vez agregados todos los paraderos que mejoran los costos, se procede a remover paraderos para evaluar si estos mejoran la función objetivo. Esto se realiza en orden de demanda, los paraderos con menos demanda son evaluados primero para removerlos. Se realiza esta última operación con todos los paraderos del conjunto. Desde la segunda iteración en adelante, si se encuentra un paradero que mejore los costos se avanza inmediatamente al proceso de quitar paraderos, y si se quita un paradero que mejore los costos se avanza al proceso de agregar paraderos. Esta diferencia entre la primera iteración

y el resto se debe a que, en pruebas preliminares, resultó mejor hacerlo de esta forma en términos de tiempo de ejecución y solución alcanzada. Con respecto al criterio de parada, el algoritmo termina si se alcanza el tiempo límite o si la función objetivo no cambió desde la última evaluación de este criterio.

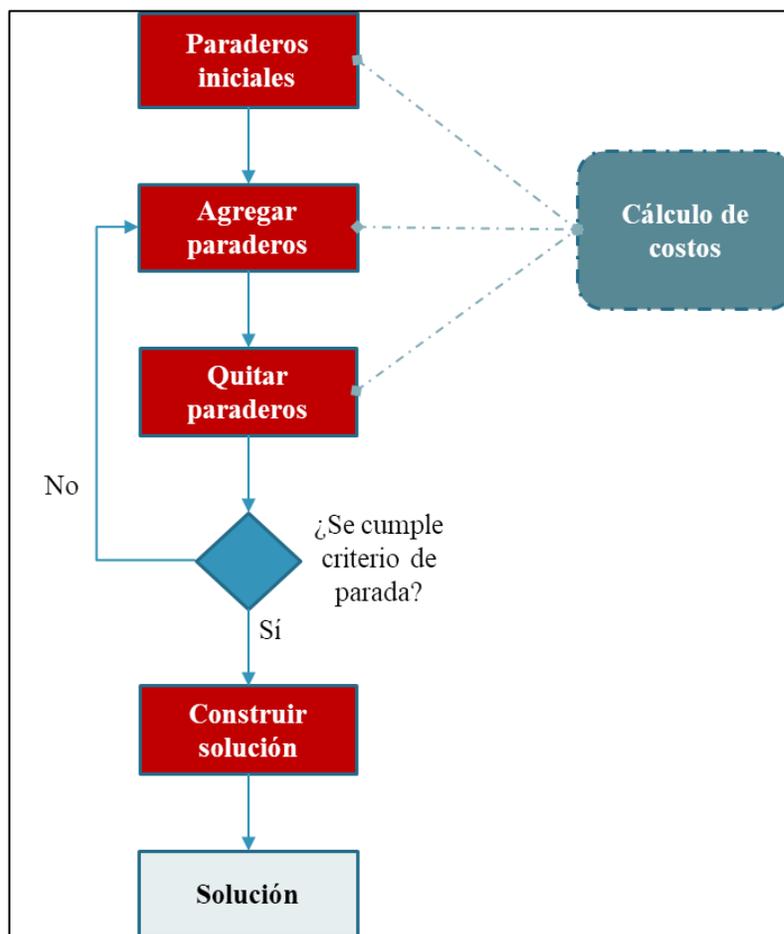


Figura 3-3. Heurística agregar-quitar paraderos (AQ).

Fuente: elaboración propia.

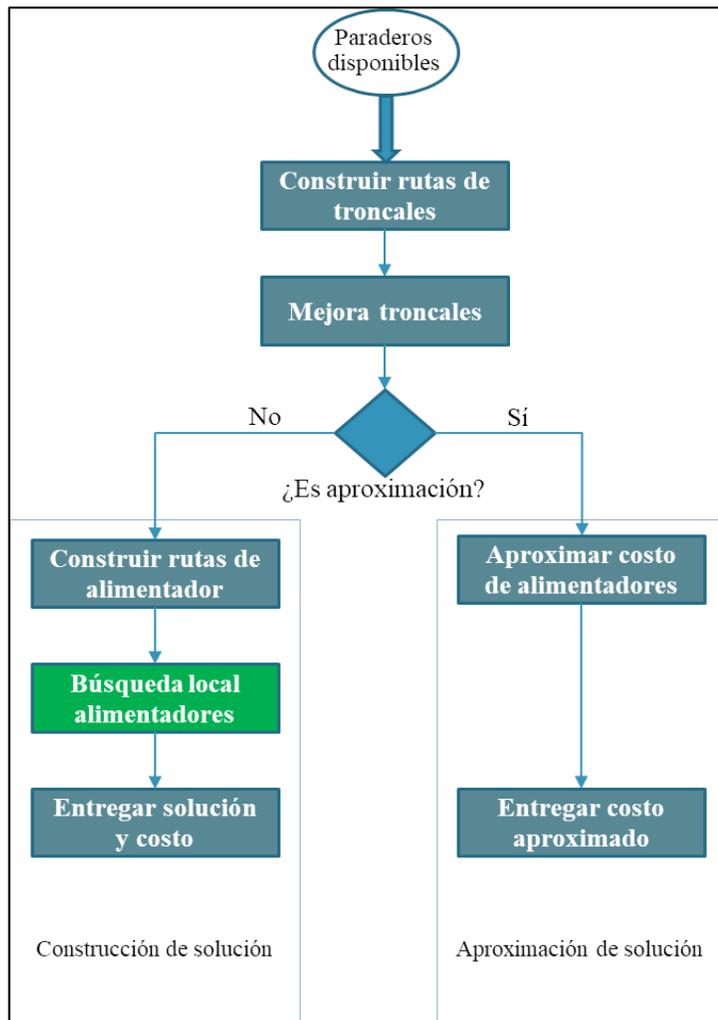


Figura 3-4. Función de evaluación de costos.

Fuente: elaboración propia.

El componente más determinante de la heurística AQ es el cálculo de los costos, ya que esta evalúa cada combinación de paraderos de troncal y además determina el tiempo de ejecución de cada iteración. En la Figura 3-3 se muestra que, en las etapas de paraderos iniciales, agregar paraderos y quitar paraderos, se llama a la función de cálculo de costos, la cual se utiliza cada vez que se requiera evaluar un conjunto de paraderos. Por esta razón se construyeron dos variaciones de esta función, las que se muestran en la Figura 3-4: una

que construye una solución factible del problema a partir de los paraderos de troncal disponibles y entrega los costos, y otra que construye solamente las rutas de troncales y aproxima con una fórmula el costo de los alimentadores. A la primera se le llama Construcción de solución, la cual también se utiliza en el paso Construir solución de la Figura 3-3, y a la segunda, Aproximación de solución.

Por un lado, esta heurística puede entregar soluciones razonables en términos de costos para un grupo de paraderos de troncal dado. Por otro lado, evaluar cada combinación de paraderos puede hacer este proceso lento para instancias grandes. Por esta razón, se implementó una alternativa menos costosa en términos computacionales, la cual, en vez de construir una solución completa en cada evaluación, solo construye los troncales y utiliza una fórmula para aproximar las rutas de los alimentadores.

Si se utiliza la Aproximación de solución en la función de evaluación de costos en el algoritmo AQ, en cada iteración no se sabrá con exactitud el costo de una solución construida en base a cada grupo de paraderos de troncal, pero sí se tendrá una aproximación del costo, lo que permite de igual forma comparar distintos grupos de paradas. Como se muestra en la Figura 3-3, una vez que se cumple el criterio de parada, a partir del mejor grupo de paraderos se construye una solución con la función de construcción de solución descrita anteriormente y se entrega una solución factible. En esta heurística existen dos elementos clave, uno es la ya mencionada construcción de la solución final, y el otro es la fórmula de aproximación del ruteo de alimentadores. Esta última se basa en fórmulas de aproximación del trabajo de Robust, Daganzo, y Souleyrette de 1990, pero adaptada al problema de troncal y alimentador.

En la Figura 3-5 se ve una instancia en la cual ya se construyeron las rutas de troncales y se asignaron las caminatas posibles a los troncales. Los nodos que no están ruteados (blancos) son considerados para la aproximación. Primero, se calcula el área  $S$  que definen estos nodos y se dejan fuera los valores atípicos, es decir, los nodos que están muy lejanos

al centro de masa del área definida. En este caso, se dejó fuera a los nodos que estaban a una distancia mayor que  $\bar{d}_{cm}^S + 2 \cdot \sigma_{cm}^S$ , donde  $\bar{d}_{cm}^S$  es la distancia promedio de los nodos no ruteados al centro de masa que ellos componen, y  $\sigma_{cm}^S$  es la desviación estándar de las distancias al centro de masa. Luego, como no se tiene certeza de qué paradero de troncal servirá como nodo de transbordo, y bajo la suposición de que algún paradero de troncal servirá como nodo de transbordo, y bajo la suposición de que algún paradero de troncal se encuentra dentro o cerca del área descrita, se aproxima el ruteo de estos alimentadores como un TSP dentro de esta área, con la siguiente fórmula:

$$L \approx 0,9\sqrt{S \cdot n_{nr}} \quad (3-25)$$

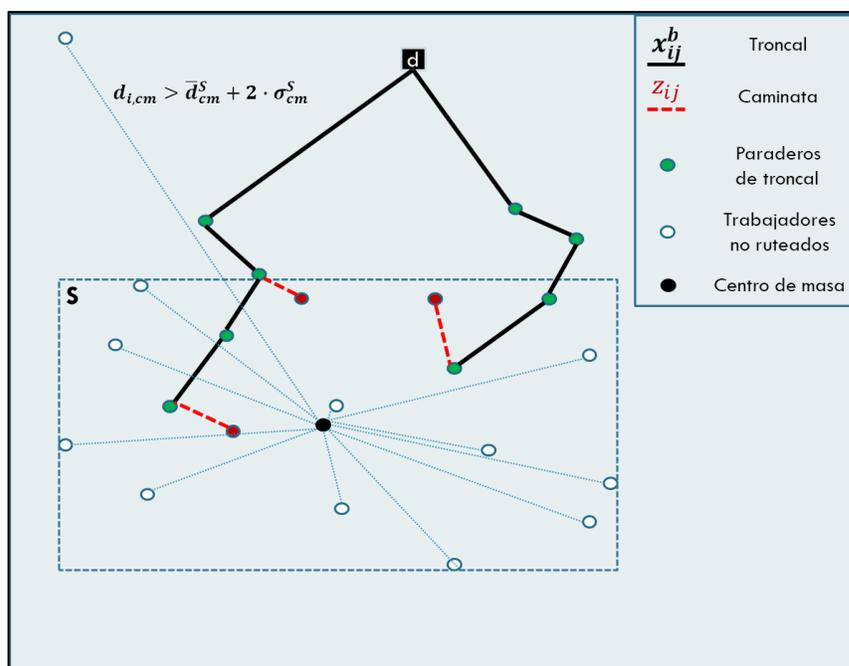


Figura 3-5. Ejemplo de aproximación de alimentadores.

Fuente: elaboración propia.

Donde  $L$  es el largo aproximado de la suma de las rutas y  $n_{nr}$  la cantidad de nodos no ruteados. Si  $n_{nr}$  es menor a la capacidad remanente de los troncales disponibles, significa

que todos los trabajadores podrán ser acercados a un troncal. En cambio, si  $n_{nr}$  es mayor que la capacidad remanente, existirán alimentadores que tendrán que ir directo a la planta. Si  $h_S$  representa la distancia promedio a la planta de los nodos en  $S$ , y  $n_b$  la cantidad de troncales en la solución, el largo total de las rutas sería:

$$L \approx 0,9\sqrt{S \cdot n_{nr}} + \frac{h_S}{Q^a} \cdot \max\{|N| - n_b \cdot Q^b; 0\} \quad (3-26)$$

Entonces, para aproximar el costo de los alimentadores  $CT_a$ :

$$CT_a \approx c_v^a \cdot \left( 0,9\sqrt{S \cdot n_{nr}} + \frac{h_S}{Q^a} \cdot \max\{|N| - n_b \cdot Q^b; 0\} \right) + c_f^a \cdot \frac{n_{nr}}{Q^a} \quad (3-27)$$

Aparte de la suposición de aproximar un TSP en el área  $S$ , otra suposición y limitación en esta fórmula es que no considera las caminatas y su impacto en el costo. Además, solo se considera el costo del ruteo y no el del tiempo adicional de los usuarios. Sin embargo, esta fórmula sigue siendo útil para comparar las distintas configuraciones de paraderos de troncal al aproximar una configuración simple de alimentadores.

En pruebas preliminares se determinó que la heurística de aproximación provee mejores soluciones en menos tiempo que la heurística completa, por lo tanto, esta se utiliza en los experimentos.

### 3.3.2 Búsqueda local de alimentadores

En esta sección se explican los componentes del algoritmo de búsqueda local para mejorar una solución factible dada, que corresponde al bloque 2 de la Figura 3-2. La estrategia seguida en este módulo se basa en mejorar las rutas de alimentadores de la solución, ya que por simplicidad y por pruebas preliminares se determinó que la mayor oportunidad de mejora podría presentarse en estas rutas. Esto quiere decir que las soluciones vecinas de

una solución dada son todas las soluciones con las mismas rutas de troncales, pero distintos alimentadores y caminatas.

Esta búsqueda local se basa en estrategias  $k$ -opt en sus distintas fases. Principalmente se aplican dos algoritmos, 2-opt e inserción de nodo. Se utilizó un 2-opt para buscar mejoras dentro de las rutas de cada vehículo y también entre las rutas al intercambiar arcos de distintos vehículos del mismo tipo. En la Figura 3-6 se muestra una movida tipo 2-opt entre rutas que podría darse en esa instancia.

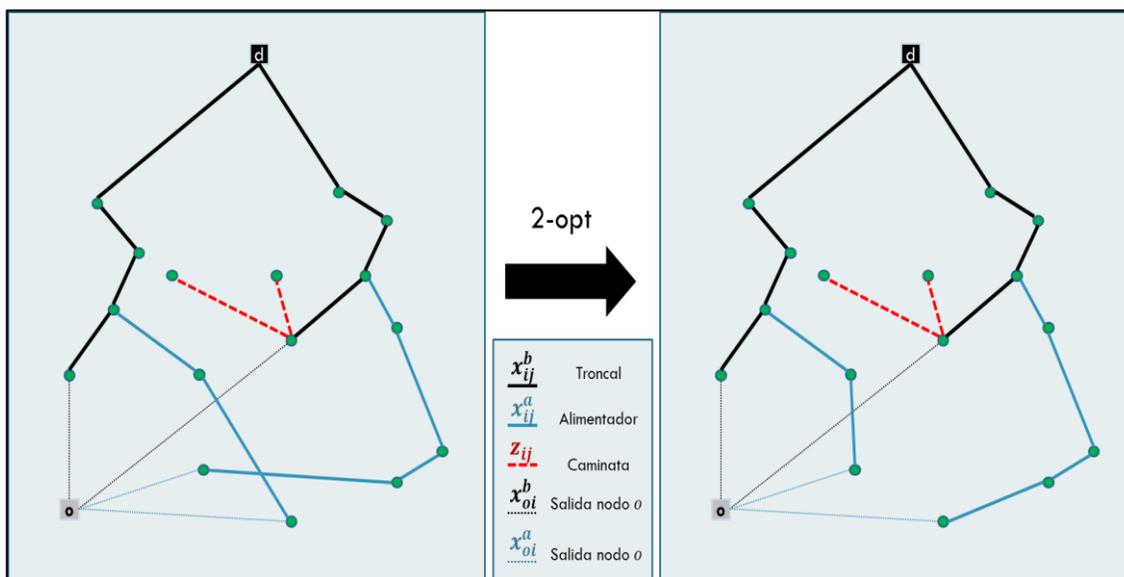


Figura 3-6. Ejemplo de operación 2-opt.

Fuente: elaboración propia.

El segundo tipo de movida, en términos generales, selecciona un nodo de una ruta o caminata, elimina sus arcos y lo inserta en otra ruta, reconstruyendo las rutas divididas si las hay. Si el costo de la función objetivo mejora se realiza el cambio y se sigue con otro nodo. Esto permite que un usuario que antes estaba en la ruta de un alimentador, después

de la mejora pueda estar conectado por un arco de caminata o por un arco de alimentador, como muestran la Figura 3-7 y Figura 3-8 respectivamente.

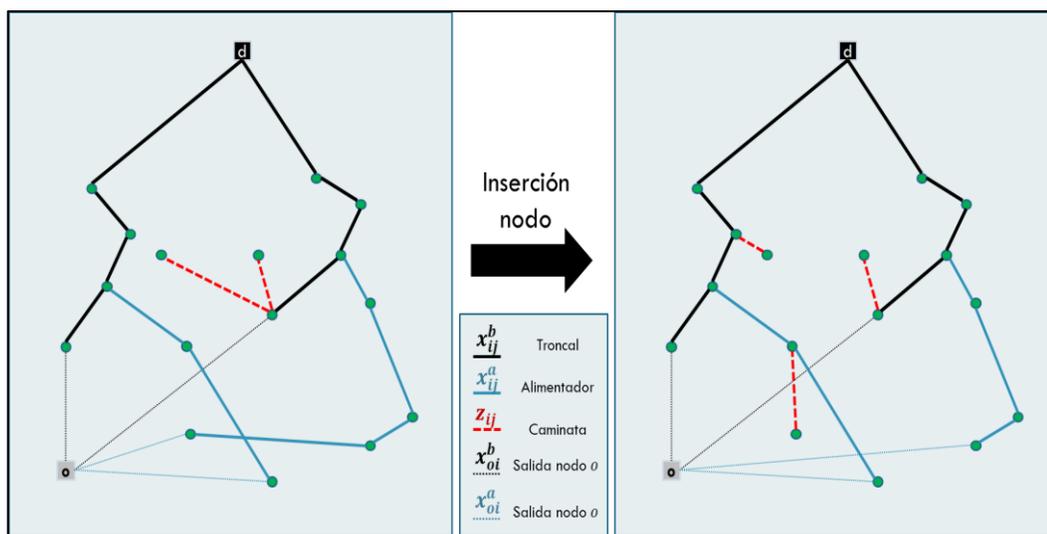


Figura 3-7. Ejemplo de inserción de nodo vía caminata.

Fuente: elaboración propia.

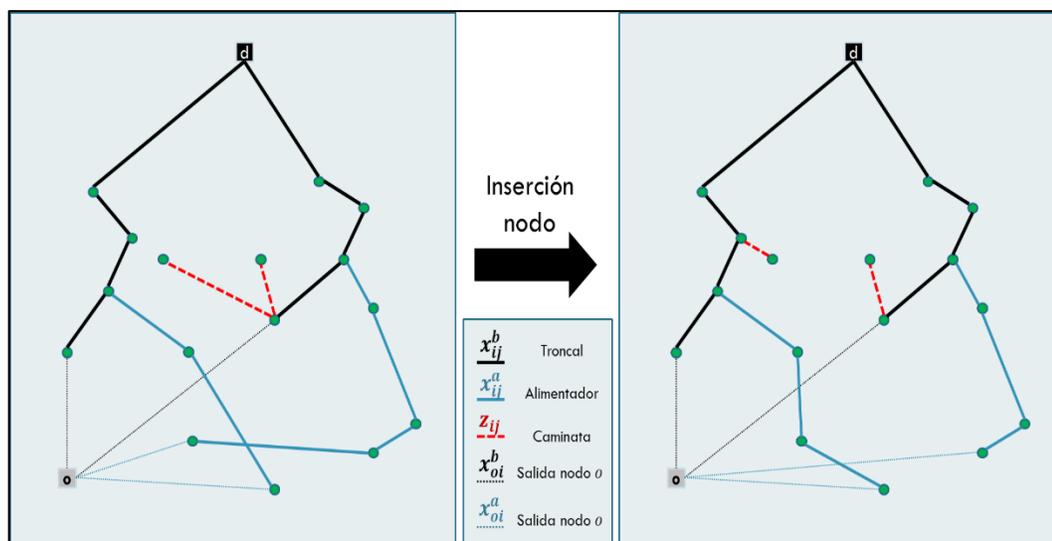


Figura 3-8. Ejemplo de inserción de nodo en ruta.

Fuente: elaboración propia.

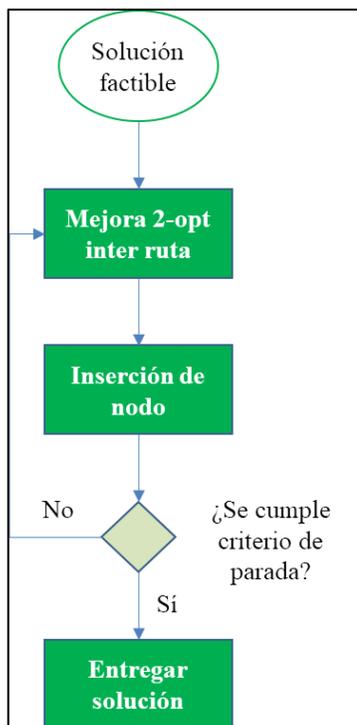


Figura 3-9. Principio de funcionamiento de búsqueda local de alimentadores.

Fuente: elaboración propia.

Como muestra la Figura 3-9, la incorporación del 2-opt y la inserción en el algoritmo de búsqueda local se realiza en un proceso iterativo entre ambos, ya que al hacer una mejora de inserción puede que se abran nuevas oportunidades de 2-opt o viceversa. Esto ocurre porque las búsquedas no son exhaustivas en cada iteración para privilegiar el tiempo. El algoritmo termina si no se encuentran más mejoras o se cumple una cierta cantidad de iteraciones. Un aspecto para considerar de este algoritmo es que el módulo de inserción permite movidas a soluciones no factibles en capacidad de troncal, que en pruebas preliminares consiguió mejores resultados que solo permitir movidas factibles. Esto se corrige antes de entregar la solución distribuyendo de la mejor manera el exceso de

capacidad. Más detalles sobre el funcionamiento de este módulo se puede encontrar en el ANEXO B.

### 3.3.3 Cortes para el problema troncal y alimentador

En esta sección se explican los cortes añadidos al modelo, lo que corresponde al bloque C de la Figura 3-2.

Para resolver este problema mediante métodos exactos es útil encontrar restricciones que realicen cortes válidos en el espacio de soluciones para acercarse a la envoltura convexa del problema. Esto ayuda al algoritmo de *Branch & Bound* a obtener mejores cotas inferiores del problema. Por esta razón, a partir del análisis del comportamiento de las soluciones del problema relajado se obtuvieron cortes válidos para la modelación. En el ANEXO C se muestra cómo se obtuvieron estos cortes, y en el ANEXO D se puede encontrar un ejemplo en el cual se aplican algunos de estos. A continuación, se muestra la formulación de cada corte y una breve descripción.

#### 3.3.3.1 Corte 1

La formulación de este corte se muestra a continuación.

$$z_{ij} + z_{ji} + \sum_{u \in U} (x_{ij}^u + x_{ji}^u) \leq 1, \quad \forall i \in N, j \in N, i \neq j \quad (3-28)$$

Este implica que solo puede existir un arco que conecte cualquier par de nodos. Para el problema entero, esta situación se deriva de las restricciones del problema, pero para el problema relajado algunas de estas restricciones no se activan, lo que permite soluciones en que este corte no es respetado.

### 3.3.3.2 Corte 2

El segundo corte es similar al primero, pero generalizado para grupos de nodos. Notar que este representa un número combinatorial de restricciones, por lo que no es práctico agregarlos directamente a la modelación. Por esta razón se creó un módulo de búsqueda de cortes que los agrega iterativamente a través de un *callback*. La formulación se muestra a continuación.

$$\sum_{i \in S, j \in S, i \neq j} (z_{ij} + x_{ij}^a + x_{ij}^b) \leq |S| - 1, \quad \forall S \subseteq N, 2 \leq |S|. \quad (3-29)$$

### 3.3.3.3 Corte 3

El tercer corte fuerza a que en la solución relajada se generen los vehículos desde el nodo  $o$ , de esta forma se activan los costos fijos y sube la cota inferior del problema entero. La formulación se muestra a continuación.

$$\sum_{(i,j) \in A, i \neq o} x_{ij}^u \leq \sum_{i \in N} x_{oi}^u \cdot Q^u, \quad \forall u \in U \quad (3-30)$$

### 3.3.3.4 Corte 4

Este corte se origina como una forma de encontrar una cota máxima del flujo de pasajeros relacionada con otras variables del problema, de manera que no afecte la solución óptima del problema original pero sí corte alguna solución del problema relajado. La formulación es la siguiente.

$$\sum_{(i,j) \in A, i \neq 0} f_{ij} \leq \sum_{u \in U} \min \left\{ \frac{Q^u(Q^u + 1)}{2} \cdot \sum_{i \in N} x_{oi}^u, Q^u \cdot \sum_{(i,j) \in A, i \neq 0} x_{ij}^u \right\} \quad (3-31)$$

### 3.3.3.5 Corte 5

Este corte es una cota inferior para el tiempo adicional  $w_i$ ,  $i \in N$  que depende de las variables  $z_{ij}$  y  $x_{ij}$  involucradas. Esto favorece la resolución del problema relajado debido a que en la solución del problema relajado las variables  $w_i$  toman valor cero, como consecuencia de que las restricciones de tiempo (3-12) y (3-13) no se activan. Su formulación se muestra a continuación.

$$\sum_{j \in N} \left( z_{ij} \cdot (\tau_{ij} + t_{jd}) + \sum_{u \in U} x_{ij}^u \cdot (t_{ij} + t_{jd}) \right) - t_{id} \cdot \left( 1 - z_{id} - \sum_{u \in U} x_{id}^u \right) \leq w_i, \forall i \in N \quad (3-32)$$

### 3.3.3.6 Corte 6

Este corte es otra forma de expresar los tiempos adicionales totales, pero relacionado a otras variables, de forma que en el problema relajado las variables de tiempo adicional tengan un valor mayor a cero. La fórmula del corte es la siguiente.

$$\sum_{(i,j) \in A, i \neq 0} (f_{ij} \cdot t_{ij} + z_{ij} \cdot \tau_{ij}) - \sum_{i \in N} t_{id} \leq \sum_{i \in N} w_i \quad (3-33)$$

## 3.3.4 Búsqueda de cortes

En esta sección se explica la incorporación del corte 2 mencionado en la sección 0 a través de *callback*, este método corresponde al bloque 3 de la Figura 3-2. En la sección 0 se mencionó que el corte 2 no podía ser agregado como restricción al problema debido a que

añade un número combinatorial de restricciones. Por esta razón, se agregó este corte por medio de una función de *callback*. Esta se ejecuta cada vez que se encuentra una nueva solución del problema relajado en el nodo que se está explorando, de forma que sea capaz de cortar esa solución y ayudar a mejorar la cota inferior del problema. El objetivo de esta búsqueda es encontrar la mayor cantidad de cortes con el menor costo computacional, ya que una búsqueda exhaustiva de todas las posibilidades en instancias grandes podría conllevar un alto costo. La búsqueda de cortes funciona a nivel general como se muestra en el pseudocódigo del ANEXO E.

## 4 EXPERIMENTOS Y RESULTADOS

En este capítulo se presentan los experimentos diseñados para responder la pregunta ¿cuándo conviene utilizar un sistema troncal y alimentador en un problema de buses de acercamiento al trabajo? Para responder esta pregunta se plantearon dos objetivos principales:

1. Probar y calibrar los componentes del algoritmo de solución descritos en la sección 3.3, con el fin de obtener mejores soluciones en los experimentos de sensibilidad.
2. Realizar un análisis de sensibilidad para entender cuándo es mejor un sistema troncal y alimentador (T&F, por *Trunk and Feeder* en inglés) para un servicio de buses de acercamiento al trabajo.

Primero, se presentan los parámetros generales utilizados en los experimentos. Luego, se presenta el experimento de calibración del algoritmo que tiene como objetivo elegir la mejor combinación de algoritmo de solución de los elementos descritos en la sección 3.3. Posterior a esto, se explican tres experimentos de análisis de sensibilidad. Los primeros dos experimentos de sensibilidad tienen como objetivo definir los rangos de los parámetros a sensibilizar en el tercer experimento, el cual es un experimento multifactorial. Este último también compara la implementación del sistema T&F con dos sistemas puros: uno de solo troncales (ST) y otro de solo alimentadores (SF). Los experimentos, sus objetivos y un resumen de los resultados se muestran en la Tabla 4-1. Por último, con los resultados de los experimentos se calibran modelos de regresión para responder a las preguntas: ¿cuándo conviene utilizar un sistema troncal y alimentador? y ¿cuánto conviene utilizar el sistema troncal y alimentador?

Tabla 4-1. Resumen de los experimentos realizados.

Experimento	Parámetros analizados	Objetivos	Resultados
Experimento de calibración	Siete combinaciones de algoritmos.	Calibrar el algoritmo y evaluar su desempeño para distintos números de trabajadores.	- La mejor combinación resultó ser entregarle una solución inicial al <i>solver</i> y luego mejorar las nuevas soluciones encontradas iterativamente.
Experimento preliminar de sensibilidad	Número de trabajadores y posición de la planta.	Observar el efecto del número de trabajadores y la posición de la planta en los sistemas T&F, ST y SF, para diseñar el experimento del valor del tiempo y multifactorial.	- A medida que se aleja la planta del centro de la ciudad, conviene implementar el sistema T&F.  - Conviene realizar el experimento del valor del tiempo y multifactorial con instancias de 50 trabajadores.
Experimento de sensibilidad del valor del tiempo	Valor del tiempo y posición de la planta.	Observar el efecto del valor del tiempo en el sistema T&F para acotar el número de combinaciones en el experimento multifactorial.	- A medida que aumenta el valor del tiempo, el sistema T&F tiene mayor utilización cuando la planta está lejos de la ciudad, hasta cierto punto.  - Se eligieron cinco valores representativos para el diseño del experimento multifactorial.
Experimento multifactorial	Posición de la planta, valor del tiempo y costos de los vehículos.	Evaluar el efecto de la posición de la planta, el valor del tiempo y el costo de los vehículos en la utilización del sistema T&F.	- A mayor distancia de la planta, es más conveniente implementar un sistema T&F.  - Si los costos de utilizar los sistemas puros son similares, entonces conviene combinarlos en un sistema T&F.

Fuente: elaboración propia.

#### 4.1 Parámetros generales de experimentos

Las instancias utilizadas en los experimentos se obtuvieron de la librería de acceso público *Operation Research Library* (OR-LIB) (Beasley, 2018), y se complementaron con instancias obtenidas del repositorio de HEC Montreal (HEC Montreal, s.f.). De estas

instancias se escogieron aquellas que tuvieran las coordenadas de los clientes, que fue la única información que se utilizó de ellas. Estas fueron escaladas de forma que pudieran representar las dimensiones de una ciudad como Santiago. Para analizar distintos tamaños de instancia se escogieron cuatro niveles del número de trabajadores ( $n$ ): 50, 75, 100 y 150 personas.

Para los experimentos se utilizaron las coordenadas de los clientes en un plano cartesiano, de la cuales se obtienen las distancias euclidianas. Se asumió una velocidad promedio de vehículo de 20 Km/hr y de caminata de 5 Km/hr. Los costos y capacidades de los vehículos están basados en el trabajo realizado que motivó esta tesis, lo cuales se procesaron de forma que sean adimensionales. Los costos y capacidades de cada tipo de vehículo se muestran en la Tabla 4-2. Además, el valor del tiempo  $\theta$  se definió como 2 \$/hr<sup>[\*]</sup>, que es similar al precio social del tiempo de viaje adaptada a las unidades de costo (Ministerio de Desarrollo Social y Familia de Chile, 2020).

Tabla 4-2. Parámetros costo y capacidad utilizados en experimentos.

	<b><i>a</i></b>	<b><i>b</i></b>
<b><math>Q^u</math></b>	4	45
<b><math>c_f^u</math> (\$/veh)<sup>[*]</sup></b>	4	40
<b><math>c_v^u</math> (\$/Km)<sup>[*]</sup></b>	1	4

Fuente: elaboración propia.

[\*] El valor monetario de los costos corresponde a una unidad ficticia equivalente a CLP\$1.000.

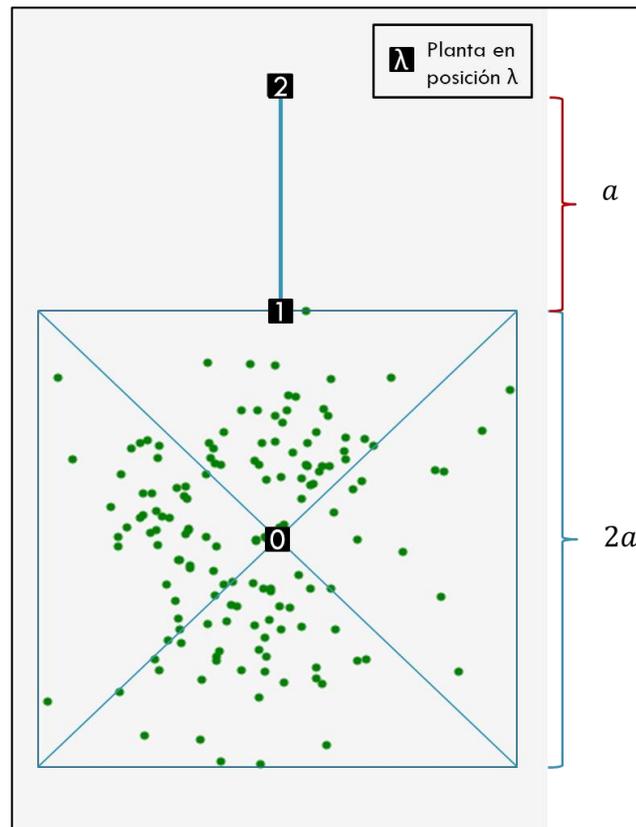


Figura 4-1. Configuración de la posición de la planta.

Fuente: elaboración propia.

Para variar los costos se definió un ponderador  $\beta$  que amplifica tanto los costos fijos como variables de los vehículos alimentadores. Para configurar la posición de la planta para cada instancia se consideró el centro geométrico de una zona rectangular definida por la distribución de los trabajadores, como muestra la Figura 4-1. El lado vertical del rectángulo se toma como valor de referencia  $2a$ , de forma que la planta varía en el eje vertical positivo desde el centro geométrico en  $\lambda \cdot a$  unidades de distancia. De esta manera, si  $\lambda = 0$ , la planta se encuentra en el centro de la instancia, si  $\lambda = 1$ , la planta se encuentra en la periferia y si  $\lambda = 2$ , la planta se encuentra fuera de la ciudad.

Los experimentos se procesaron en la supercomputadora Niagara en el consorcio SciNet HCP. Para más información sobre esta supercomputadora revisar Ponce et al. (2019). En la siguiente tabla se muestra un resumen de los parámetros analizados en cada experimento.

Tabla 4-3. Resumen de los parámetros de los experimentos.

Parámetro	Experimento			
	Calibración de algoritmo	Preliminar de sensibilidad	Sensibilidad del valor del tiempo	Multifactorial
n	50; 75; 100; 150	50; 75; 100; 150	50	50
Ubicaciones de clientes	5	5	5	5
Valores $\beta$	1	1	1	0,5; 1; 2; 3; 4
Valores $\lambda$	0; 2	0; 2	0; 2	0; 1; 2; 3
Valores $\theta$	2	2	0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20	0; 2; 4; 8; 20
Instancias totales	40	40	110	500
Sistemas	T&F	T&F/SF/ST	T&F	T&F/SF/ST
Algoritmos	7	1	1	1
Ejecuciones totales	280	120	110	1100*

\*Para ST no se considera la variación del parámetro  $\beta$ .

Fuente: elaboración propia.

## 4.2 Calibración y prueba de algoritmo

Este experimento tenía como objetivo comparar las distintas partes del algoritmo para poder dilucidar su efecto individual y conjunto, de manera que se pueda utilizar la mejor combinación para los experimentos más grandes. Con base en experimentos preliminares,

se definieron siete configuraciones de algoritmo (CAs) a comparar, cuyas componentes específicas se detallan en la Tabla 4-4.

Tabla 4-4. Configuraciones de algoritmos a comparar.

Módulo	Capítulo	Descripción	CA						
			1	2	3	4	5	6	7
<b>P: Gurobi</b>	3.3	Algoritmo principal de Gurobi	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
<b>C: Cortes iniciales</b>	3.3.3	Cortes añadidos a la modelación	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X
<b>1: Solución inicial</b>	3.3.1	Heurística que entrega solución inicial a Gurobi	✓	✓	✓	X	X	X	X
<b>2: Búsqueda local</b>	3.3.2	Realiza una búsqueda local en las rutas de alimentadores a partir de una solución dada	✓	✓	X	✓	X	X	X
<b>3: Búsqueda de cortes</b>	0	Búsqueda de cortes a partir de una solución de la relajación lineal del problema	✓	X	X	X	✓	X	X

Fuente: elaboración propia.

Tabla 4-5. Parámetros del experimento de comparación de algoritmos.

$n$	Ubicaciones de clientes	Valores $\lambda$	Instancias totales	CAs	Ejecuciones totales
50; 75; 100; 150	5	0; 2	40	7	280

Fuente: elaboración propia.

En la Tabla 4-5 se presentan los parámetros de cada ejecución del experimento, en el cual se utilizaron cuatro niveles de número de trabajadores ( $n$ ), cinco configuraciones de posición de trabajadores por cada nivel y dos posiciones de planta distintas,  $\lambda = 0$  y  $\lambda = 2$ , lo que da un total de 40 instancias por cada configuración de algoritmo. Cada instancia se ejecutó con un tiempo límite de una hora en el servidor.

El principal indicador de este experimento será el *gap* de optimalidad que entrega cada algoritmo, y en el caso de que se llegue a la solución óptima se considerará el tiempo de ejecución.

#### 4.2.1 Resultados y análisis de la calibración del algoritmo

En la Tabla 4-6 se muestran los promedios de *gap* de optimalidad obtenidos para cada configuración de algoritmo, tamaño de instancia y posición de la planta. En la Tabla 4-7 se entregan los promedios de *gap* optimalidad por posición de planta. Y en la Tabla 4-8, los tiempos promedio en que se alcanzó la solución óptima en instancias pequeñas. En cada columna de la tabla se muestra del peor *gap* al mejor en escala de color, de rojo a verde respectivamente.

Tabla 4-6. Resultados del *gap* obtenido por cada configuración, tamaño de instancia y posición de planta.

		Gap (p.p.)												Prom. general
		n = 50			n = 75			n = 100			n = 150			
CA		$\lambda=0$	$\lambda=2$	Prom										
1	0	4,9	2,5	3,7	16,1	9,9	13,1	17,3	15,2	28,8	18,6	23,7	12,8	
2	0	5,4	2,7	2,5	15,1	8,8	13,2	17,3	15,2	27,4	17,5	22,4	12,3	
3	0	4,3	2,1	2,2	18,2	10,2	12,9	17,3	15,1	29,7	18,7	24,2	12,9	
4	0	4,4	2,2	2,2	16,3	9,3	13,1	16,7	14,9	35,6	18,7	27,1	13,4	
5	0	3,8	1,9	2,0	16,8	9,4	14,2	17,1	15,7	29,5	18,5	24,0	12,7	
6	0	4,4	2,2	2,5	16,7	9,6	13,9	16,9	15,4	30,2	17,8	24,0	12,8	
7	0	11,0	5,5	3,0	26,1	14,6	16,1	24,9	20,5	26,4	27,1	26,8	16,8	

Fuente: elaboración propia.

Tabla 4-7. Resultados del *gap* obtenido por cada configuración y cada posición de planta.

CA	Gap		
	$\lambda=0$	$\lambda=2$	Promedio
1	11,4%	14,2%	12,8%
2	10,8%	13,8%	12,3%
3	11,2%	14,6%	12,9%
4	12,7%	14,0%	13,4%
5	11,4%	14,0%	12,7%
6	11,6%	13,9%	12,8%
7	11,4%	22,3%	16,8%

Fuente: elaboración propia.

Tabla 4-8. Resultados del tiempo de ejecución para instancias de 50 nodos.

CA	Tiempo de ejecución (min) $n = 50$		
	$\lambda=0$	$\lambda=2$	Promedio
1	1,6	54,7	28,2
2	1,6	52,9	27,2
3	1,2	52,0	26,6
4	1,6	48,0	24,8
5	1,3	51,7	26,5
6	1,0	54,4	27,7
7	2,6	60,0	31,3

Fuente: elaboración propia.

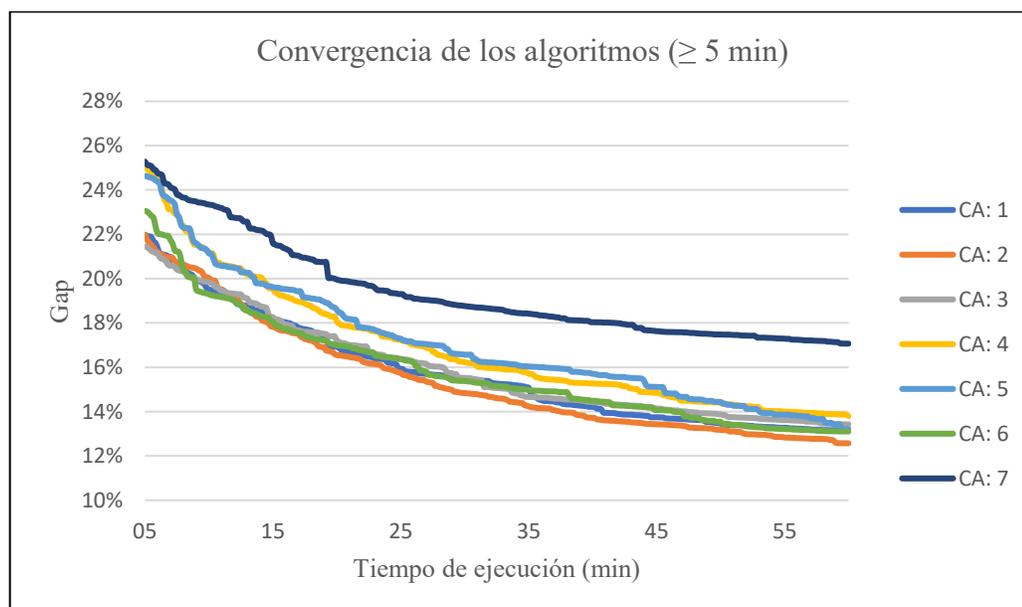


Figura 4-2. Gráfico del *gap* promedio desde los cinco minutos de ejecución.

Fuente: elaboración propia.

Con respecto a los módulos analizados, los cortes iniciales (CA 6) fueron los que más aportaron en la mejora del *gap*, con una mejora promedio de 4 p.p. en comparación al modelo sin ellos (CA 7) siendo las instancias con  $\lambda = 2$  donde se tiene un mayor impacto, con una mejora promedio de 8,4 p.p. en una hora de ejecución. Por otro lado, el módulo de búsqueda de cortes (CA 5) mejoró en 0,1 p.p. con respecto a solo agregar los cortes iniciales, sin embargo, al combinarlo con los otros módulos no logra mejorar el *gap*. La heurística de búsqueda local de alimentadores ayuda a mejorar el *gap* cuando se implementa en conjunto con una mejor solución inicial, de otra forma pierde su efectividad. Por último, los resultados anteriores muestran que la importancia de la solución inicial es entregar un mejor punto de partida para el *solver*, para que luego la heurística de búsqueda local de alimentadores mejore las soluciones encontradas. Como se mencionó en la sección 3.3.1, la heurística de solución inicial tiene dos valores de función objetivo, uno aproximado y el otro es el costo de la solución construida. El costo aproximado resultó ser en promedio un 22% menor que la solución construida por la

heurística, y presentó una diferencia absoluta promedio de 8% con respecto a la mejor solución encontrada con el algoritmo completo. El costo de la solución inicial construida fue en promedio 32% mayor que la mejor solución. Un análisis con más detalle de los módulos se puede encontrar en el ANEXO F.

De acuerdo con el criterio de *gap* de optimalidad, la CA 2 otorgaría un mejor *gap* en términos promedios. Por otro lado, de acuerdo con el criterio de tiempo de optimalidad, la CA 4, búsqueda local, sería la mejor combinación en este parámetro en promedio. Sin embargo, en situaciones específicas otras configuraciones parecieran funcionar mejor. En la Figura 4-2, se ve la convergencia promedio de cada configuración, en la que CA 2 presenta mejor *gap* desde los 15 minutos aproximadamente. En vista de los resultados anteriores, se eligió la CA 2 para los experimentos posteriores, ya que presenta un menor *gap* promedio y mayor consistencia en instancias fáciles y difíciles de resolver para el *solver*. Esta configuración posee los cortes iniciales, una heurística de solución inicial y una heurística de búsqueda local enfocada en alimentadores.

### **4.3 Análisis de sensibilidad**

En esta sección se presentan tres análisis de sensibilidad. El primero es un análisis preliminar para determinar el tamaño de las instancias a utilizar en los siguientes experimentos. El segundo corresponde a un análisis de sensibilidad del valor del tiempo con el fin de acotar la cantidad de valores para el último experimento. El último experimento corresponde a un análisis de sensibilidad multifactorial, en el cual se sensibilizaron tres parámetros: la posición de la planta, el valor del tiempo y el costo de los vehículos.

### 4.3.1 Análisis preliminar de sensibilidad

El objetivo de este experimento es analizar el efecto del número de trabajadores y la posición de la planta en un sistema troncal y alimentador (T&F) para diseñar el experimento de sensibilidad del valor del tiempo y multifactorial. Además, se analiza este y se compara con dos sistemas puros: un sistema de solo troncales (ST) y un sistema de solo alimentadores (SF). Para esto, se utilizaron las mismas instancias y configuraciones de planta que el experimento comparativo de algoritmos, descritas en la Tabla 4-5. En la Tabla 4-9 se muestra el resumen de los experimentos realizados, a los cuales se les aumentó de una a dos horas el tiempo de ejecución para obtener mejor *gap* de optimalidad.

Tabla 4-9. Configuración del experimento inicial de parámetros y sistemas.

Experimento	Sistema	Instancias	Tiempo máximo de ejecución por instancia
1	Troncal y alimentador (T&F)	40	2 hrs.
2	Solo troncal (ST)	40	2 hrs.
3	Solo alimentador (SF)	40	2 hrs.

Fuente: elaboración propia.

Lo importante de los resultados de este experimento y su análisis es poder obtener conclusiones a nivel macroscópico del impacto del sistema T&A comparado con un sistema ST y un SA, además de analizar los impactos de la posición de la planta en la solución. Para hacer esta comparación hay que considerar que no todas las instancias llegan a optimalidad, por lo que en ese caso no se podría hacer una comparación certera. Sin embargo, a pesar de que en algunos casos no se llegue a optimalidad, de todas formas, es posible hacer una comparación entre los sistemas. Si se consideran  $LB_s^f$  y  $UB_s^f$  la cota inferior y superior final respectivamente, obtenidas con el sistema  $s \in SIS := \{T\&F, ST, SF\}$ , entonces el *gap* final se calcula como:

$$Gap_s^f = \frac{UB_s^f - LB_s^f}{UB_s^f}, \quad \forall s \in SIS \quad (4-1)$$

Además, se define  $CT_s^*$  como el costo total de la solución óptima del sistema  $s \in S$ , entonces se tiene la siguiente relación:

$$LB_s^f \leq CT_s^* \leq UB_s^f, \quad \forall s \in S \quad (4-2)$$

Como las soluciones factibles de los problemas de ST y SF son subconjuntos de las soluciones factibles del problema T&F, y estos son problemas de minimización, entonces se tiene que:

$$CT_{T\&F}^* \leq CT_{ST}^* \quad (4-3)$$

$$CT_{T\&F}^* \leq CT_{SF}^* \quad (4-4)$$

Por lo tanto, se puede concluir lo siguiente:

$$Si \quad UB_{T\&F}^f < LB_{ST}^f \rightarrow CT_{T\&F}^* < CT_{ST}^* \quad (4-5)$$

$$Si \quad UB_{T\&F}^f < LB_{SF}^f \rightarrow CT_{T\&F}^* < CT_{SF}^* \quad (4-6)$$

Es decir, si la cota superior del problema T&F obtenida con Gurobi es menor que la cota inferior de algún otro sistema, entonces se puede asegurar que el sistema T&F otorga beneficios respecto al sistema con el que se compara. En otro caso no es posible concluir qué sistema tiene un menor costo. Para poder comparar el costo total de los sistemas se define un indicador de mejora garantizada del sistema (MGS) basado en esta relación, que es el siguiente:

$$MGS_{T\&F,S} = \max \left\{ \frac{LB_s^f - UB_{T\&F}^f}{LB_s^f}; 0 \right\}, \quad \forall s \in \{ST, SF\} \quad (4-7)$$

Con este indicador, si  $MGS_{T\&F,s} > 0$ , entonces el sistema T&F asegura una mejora sobre el sistema  $l \in \{ST, SF\}$ . Se considera este índice siempre positivo porque, dadas las relaciones (4-3) y (4-4), si la mejora resulta negativa no se puede asegurar una mejora o empeoramiento en los costos. Esto es análogo a decir que, si la mejora es incierta, entonces se asume un escenario pesimista en que no existen beneficios del sistema. Se define también un indicador que representa la mejora garantizada del sistema T&F sobre los otros sistemas, este es  $MGS_{T\&F}$ , que representa el mínimo de las mejoras en los otros sistemas, es decir:

$$MGS_{T\&F} = \min\{MGS_{T\&F,SF}, MGS_{T\&F,ST}\}. \quad (4-8)$$

Con respecto al nivel de servicio, se compara el promedio de la razón entre el tiempo adicional de viaje y el tiempo total de cada pasajero, es decir, el tiempo adicional relativo. Para una instancia del sistema  $s \in SIS$  se calcula:

$$r_w^s = \frac{1}{n} \sum_{i \in N} \frac{w_i}{T_i}. \quad (4-9)$$

#### 4.3.1.1 Resultados de optimización del experimento preliminar

A continuación, se muestran los resultados del experimento preliminar de sensibilidad, en que los números mostrados en la Tabla 4-10, Tabla 4-11 y

Tabla 4-12, en el caso de T&F, se construyeron combinando los resultados de este experimento con los de la sección 4.2. Ya que, en algunas instancias particulares se obtuvieron mejores resultados con otros algoritmos. De esta forma, se utilizan las mejores cotas y soluciones disponibles para la comparación.

Tabla 4-10. Promedios de los *gaps* obtenidos en la resolución de cada sistema.

$\lambda$	$n$	Instancias	Promedio <i>Gap</i> final T&F	Promedio <i>Gap</i> final ST	Promedio <i>Gap</i> final SF
0	<b>Total</b>	<b>20</b>	<b>8%</b>	<b>10%</b>	<b>0%</b>
	50	5	0%	0%	0%
	75	5	1%	5%	0%
	100	5	9%	14%	0%
	150	5	21%	21%	0%
2	<b>Total</b>	<b>20</b>	<b>12%</b>	<b>10%</b>	<b>0%</b>
	50	5	3%	10%	0%
	75	5	13%	12%	0%
	100	5	15%	8%	0%
	150	5	16%	11%	0%
		<b>40</b>	<b>10%</b>	<b>10%</b>	<b>0%</b>

Fuente: elaboración propia.

En la Tabla 4-10 se muestran los *gaps* finales que se obtuvieron para cada sistema, de amarillo a verde se muestran de peor a mejor *gap* respectivamente. Se observa que para el sistema SF se llega al óptimo en todos los casos, y en los otros sistemas se tiene un *gap* promedio de 10%. La desviación estándar del *gap* del sistema T&F fue de 7,8 p.p. Por otro lado, la desviación estándar del *gap* del sistema ST fue de 6,7 p.p.

En vista de que en las instancias de 50 trabajadores se llegó a optimalidad en la mayoría de los casos, y en las instancias complicadas se obtuvieron *gaps* razonables, entonces se

eligió este tamaño de instancia para realizar los experimentos de sensibilidad del valor del tiempo y el experimento multifactorial.

#### 4.3.1.2 Resultados y análisis del análisis preliminar de sensibilidad

A continuación, se muestran los resultados del análisis preliminar de sensibilidad. Se destaca de estos resultados que, si la planta se aleja del centro de la ciudad, puede ser conveniente implementar un sistema troncal y alimentador.

Tabla 4-11. Resultados promedios de la solución del sistema T&F.

$\lambda$	$n$	Troncales utilizados	Alimentadores Utilizados	%Caminatas	%AOT	% $V_{T&F}$	% $V_T$	% $V_F$
0	<b>Promedio</b>	<b>0.1</b>	<b>24</b>	<b>29%</b>	<b>2%</b>	<b>2%</b>	<b>1%</b>	<b>97%</b>
	50	0	13	16%	0%	0%	0%	100%
	75	0	19	25%	0%	0%	0%	100%
	100	0	25	33%	0%	0%	0%	100%
	150	0.4	37	42%	10%	8%	3%	89%
2	<b>Promedio</b>	<b>2</b>	<b>8</b>	<b>72%</b>	<b>72%</b>	<b>29%</b>	<b>62%</b>	<b>9%</b>
	50	1	9	64%	57%	52%	34%	14%
	75	2	6	71%	78%	33%	67%	0%
	100	2	9	75%	72%	23%	65%	11%
	150	3	7	77%	82%	9%	81%	10%
<b>Promedio</b>	<b>1</b>	<b>16</b>	<b>50%</b>	<b>50%</b>	<b>16%</b>	<b>31%</b>	<b>53%</b>	

Fuente: elaboración propia.

En la Tabla 4-11 se presentan algunos indicadores de los resultados del sistema T&F. Estos indican el nivel de utilización de vehículos para cada tipo y el porcentaje de caminatas presentes en la solución. Además, se muestra un indicador de proporción de

asientos ofrecidos de troncal (AOT) y un indicador del porcentaje de viajes realizados por sistema ( $V_s, s \in SIS$ ). El índice AOT resume la utilización de los troncales o alimentadores, si  $AOT = 1$ , solo se ocupan troncales, si  $AOT = 0$  solo se ocupan alimentadores. Este indicador está solo enfocado en la utilización de vehículos y no en las caminatas. La cantidad de asientos ofrecidos se calcula a partir del número de vehículos en la solución multiplicado por su capacidad. Para calcular el AOT se divide la cantidad de asientos de troncal ofrecidos por el total de asientos ofrecidos, en la notación de la sección 3.2:

$$AOT = \frac{\sum_{j \in N} x_{oj}^b \cdot Q^b}{\sum_{u \in U} \sum_{j \in N} x_{oj}^u \cdot Q^u}. \quad (4-10)$$

El indicador  $\%V_s, s \in SIS$  muestra la proporción de viajes realizados en un sistema con respecto al total, en el cual toda persona que acceda a un alimentador que conecte con un troncal se considera como viaje en troncal y alimentador (T&F). De la misma manera, si una persona accede a un troncal directamente se considera viaje en troncal (T), y si una persona accede a un alimentador y este va directo a la planta se considera viaje en alimentador (F). Se entiende como acceso a una caminata hacia un vehículo o si una persona espera al vehículo en su paradero.

Los resultados de la Tabla 4-11 indican que al aumentar la distancia de la planta aumenta la utilización de los troncales, de un 2% a un 72% de asientos ofrecidos en promedio, así como la utilización del sistema T&F, de un 2% a un 29% en promedio. En el caso en que  $\lambda = 2$ , al aumentar el número de trabajadores aumentan los viajes en troncal, pero disminuye la utilización del sistema T&F. Por otro lado, las caminatas aumentan de un 29% a un 72% en promedio cuando la planta está fuera de la ciudad, esto probablemente ocurre debido a que los tiempos máximos de viaje permitidos son proporcionales a la distancia a la planta: si aumenta la distancia a la planta el tiempo máximo permitido aumenta, lo que permite mayor distancia de acceso o caminata.

Tabla 4-12. Resultados de la comparación de sistemas.

$\lambda$	$n$	$MGS_{T\&F,ST}$	$MGS_{T\&F,SF}$	$MGS_{T\&F}$	$r_w^{T\&F}$	$r_w^{ST}$	$r_w^{SF}$
0	<b>Promedio</b>	<b>61%</b>	<b>0%</b>	<b>0%</b>	<b>13%</b>	<b>21%</b>	<b>13%</b>
	50	75%	0%	0%	11%	19%	11%
	75	68%	0%	0%	12%	21%	12%
	100	60%	0%	0%	13%	21%	14%
	150	44%	0%	0%	15%	22%	16%
2	<b>Promedio</b>	<b>18%</b>	<b>30%</b>	<b>14%</b>	<b>21%</b>	<b>22%</b>	<b>17%</b>
	50	40%	21%	21%	22%	23%	19%
	75	19%	26%	19%	23%	24%	18%
	100	14%	34%	14%	21%	23%	17%
	150	1%	39%	1%	19%	19%	15%
<b>Promedio</b>		<b>40%</b>	<b>14%</b>	<b>7%</b>	<b>17%</b>	<b>22%</b>	<b>15%</b>

Fuente: elaboración propia.

Los resultados de la Tabla 4-11 indican que el sistema T&F es utilizado cuando la planta se encuentra fuera de la ciudad, y cuando está dentro, conviene utilizar solamente vehículos pequeños. Esta tendencia se refuerza con los resultados de la

Tabla 4-12. Estos indican que cuando  $\lambda = 0$  es más conveniente utilizar vehículos pequeños, ya que el sistema T&F no otorga beneficios en las instancias de 50 y 75 nodos. En las instancias de 100 y 150 no se puede asegurar que existan o no beneficios, ya que en estas no se llegó a optimalidad. Sin embargo, es probable que la solución óptima involucre solo alimentadores, o que, si existe un beneficio, no sea considerable. En cambio, cuando  $\lambda = 2$  el sistema T&F asegura un beneficio promedio de 18% sobre ST y 30% sobre SF. El beneficio sobre ST disminuye a medida que se aumenta el número de trabajadores, esto parece indicar que si se aumenta el número de nodos en algún momento será conveniente utilizar solo troncales. Además, la posición de la planta en la cual se comienza a utilizar el sistema T&F pareciera ser más cerca a medida que el número de trabajadores crece. Esto se ve por la tendencia de los beneficios para cada número de trabajadores. Teóricamente debe existir un punto en que el beneficio sobre ambos sistemas es máximo para cada número de trabajadores. Ya que, a medida que la planta se aleja de la ciudad el bus se hace más atractivo y los alimentadores menos atractivos. Para instancias de 50 trabajadores, este punto debe estar cerca de  $\lambda = 2$ , para instancias más grandes este punto debería encontrarse en  $0 < \lambda < 2$ .

Con respecto al tiempo adicional de viaje, definido en el capítulo 3.2, de la

Tabla 4-12 se extrae que el sistema con menor tiempo adicional de viaje relativo es SF, le sigue T&F y por último ST. Por la capacidad de los alimentadores es lógico que estos tengan un viaje más directo a la planta, ya que solo pueden tener un máximo de cuatro paradas, por lo que el tiempo adicional de viaje es menor en comparación con los otros sistemas. Por otro lado, el sistema ST tiene más posibilidades de paradas lo que implica un mayor tiempo adicional de viaje. El sistema T&F es más utilizado cuando  $\lambda = 2$  y  $|N| = 50$  y  $75$ , y estas instancias tienen un tiempo adicional de viaje muy similar al ST. Los beneficios del sistema T&F en este caso se dan por los costos operacionales.

### 4.3.2 Experimento de sensibilidad del valor del tiempo

El objetivo del experimento de sensibilidad es analizar el impacto de la variación del valor del tiempo  $\theta$  en el nivel óptimo de utilización del sistema T&F y en el nivel de servicio. Y con esto acotar los valores que se utilizarán en el experimento multifactorial. Se eligieron las instancias de 50 trabajadores para hacer los experimentos debido a que permiten llegar a optimalidad en un tiempo razonable. En la Tabla 4-13 se muestran los parámetros de este experimento, los que dan un total de 110 instancias ejecutadas, y a cada una se le impuso un tiempo máximo de ejecución de dos horas.

Tabla 4-13. Parámetros del experimento de sensibilidad del valor del tiempo.

$n$	Ubicaciones de clientes	Valores $\lambda$	Valores $\theta$	Total de instancias
50	5	0; 2	0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20	110

Fuente: elaboración propia.

### 4.3.2.1 Resultados de optimización del experimento del valor del tiempo

En la Tabla 4-14 se muestran los resultados de optimización del experimento. Esta indica que el *gap* promedio para las instancias con  $\lambda = 0$  fue de 0% con un tiempo de ejecución de 1 minuto, y para las instancias con  $\lambda = 2$  fue de 1% con un tiempo de ejecución de 47 minutos en promedio. El *gap* en promedio general fue de 0,5% con una desviación estándar de 1,9 p.p. El tiempo de ejecución promedio fue de 24 minutos, con una desviación estándar de 40 minutos. Para revisar la tabla completa consultar el ANEXO H.

Tabla 4-14. Resultados de optimización del experimento de sensibilidad del valor del tiempo.

$\lambda$	<i>Gap</i> promedio	Tiempo de ejecución promedio (min)
<b>0</b>	<b>0%</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>1%</b>	<b>47</b>
<b>Promedio</b>	<b>0,5%</b>	<b>24</b>

Fuente: elaboración propia.

### 4.3.2.2 Resultados y análisis del experimento del valor del tiempo

En la Figura 4-3 y Figura 4-4 se muestra el cambio en la distribución de los tipos de ruta, el aumento del costo de operación (CO) y el tiempo adicional relativo en función del parámetro  $\theta$  para las instancias con  $\lambda = 0$  y  $\lambda = 2$  respectivamente, calculado con el promedio de las cinco instancias. En la codificación de las rutas W representa caminata, F representa viaje en alimentador y T representa viaje en troncal. Por ejemplo, la ruta  $W \rightarrow F \rightarrow T$  representa los viajes que comienzan con una caminata a un alimentador, luego este alimentador combina con un troncal y este último llega a la planta. El aumento del costo operacional se calcula con referencia al costo cuando  $\theta = 0$ .

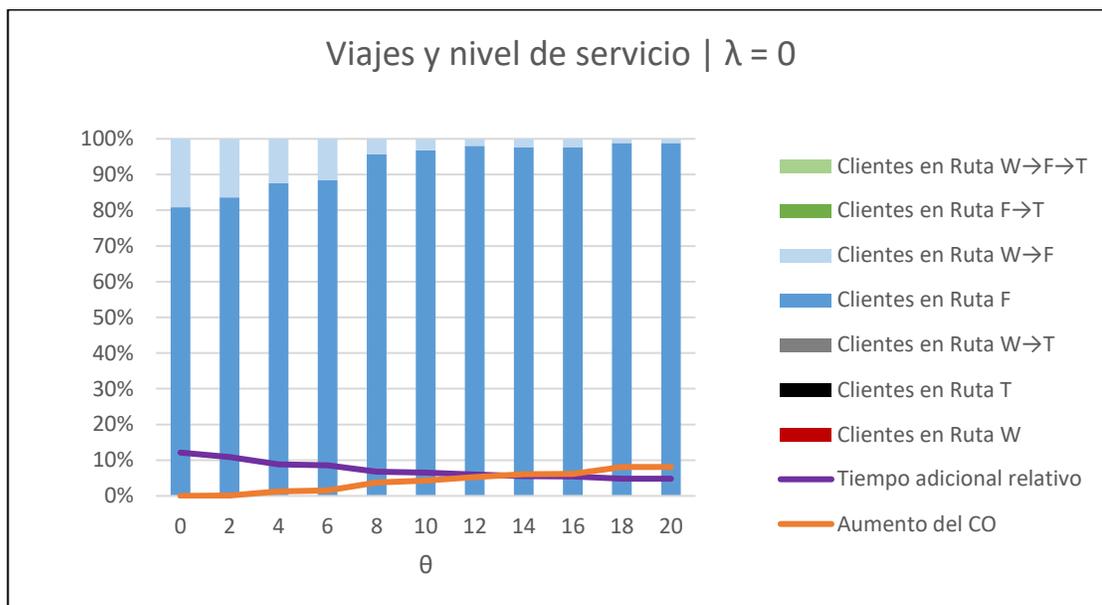


Figura 4-3. Gráfico de distribución de viajes, el aumento de costos operacional y el tiempo adicional relativo para  $\lambda = 0$ .

Fuente: elaboración propia.

De la Figura 4-3 se puede ver que para  $\lambda = 0$  todos los viajes llegan a la planta en alimentador (barras azules y celestes), por lo tanto, para estas configuraciones el sistema T&F no otorga beneficios. Con respecto al efecto de  $\theta$ , cuando  $\theta = 0$ , solo la restricción de tiempo máximo actúa como parámetro de nivel de servicio. En este caso, las caminatas a alimentador representan un 20% de los viajes y estas disminuyen gradualmente a medida que  $\theta$  crece, llegando a representar un 2% de los viajes cuando  $\theta = 20$ . Por otro lado, el tiempo adicional relativo promedio que experimentan los pasajeros disminuye en 7 p.p. al comparar  $\theta = 0$  y  $\theta = 20$ . Es decir, si se elige un parámetro de  $\theta = 0$  en esta configuración, los usuarios experimentan un 12% de tiempo adicional. En cambio, si se elige un parámetro de  $\theta = 20$ , los usuarios experimentarán un 5% de tiempo adicional con respecto a viajar directamente. Esta mejora de 7 p.p. conlleva un aumento del 8% en los costos operacionales.

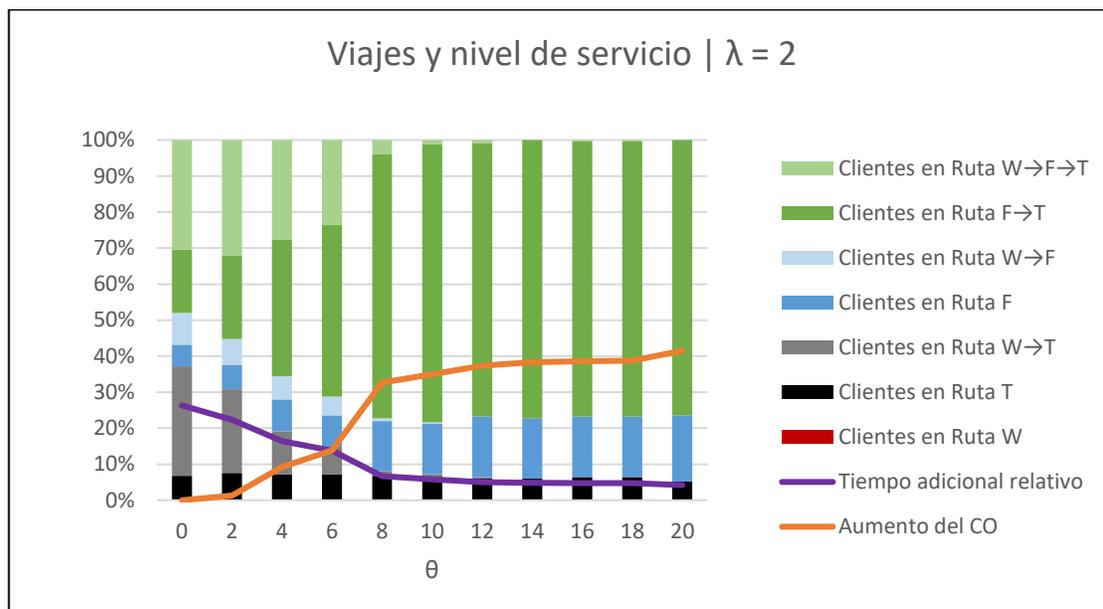


Figura 4-4. Gráfico de distribución de viajes, el aumento de costos operacionales y el tiempo adicional relativo para  $\lambda = 2$ .

Fuente: elaboración propia.

De la Figura 4-4 se extrae que cuando  $\lambda = 2$  el sistema T&F es utilizado y aumenta su utilización a medida que el parámetro  $\theta$  crece (ver barras verdes claras y oscuras). Esto ocurre porque al aumentar el parámetro  $\theta$  las caminatas disminuyen, y gran parte de las personas que caminaban a un troncal ahora son acercados a este mediante un alimentador. Este efecto también se puede ver en las soluciones mostradas en la Figura 4-5 que muestra dos soluciones óptimas de la misma instancia, pero una es con  $\theta = 0$  y la otra con  $\theta = 20$ . En esta se observa que los arcos de caminata (rojos) desaparecen cuando  $\theta = 20$ . Por otro lado, aumentar el valor del tiempo  $\theta$  de 2 a 20 disminuye en 22 p.p. el tiempo adicional relativo (línea morada), pero esto conlleva un aumento del 42% de los costos operacionales (línea naranja). En comparación con las instancias en que  $\lambda = 0$ , como T&F es un sistema con viajes menos directos que un sistema de solo alimentadores, existe un mayor espacio de mejora para la disminución del tiempo adicional, por lo que los cambios del parámetro  $\theta$  influyen de mayor manera en las soluciones.

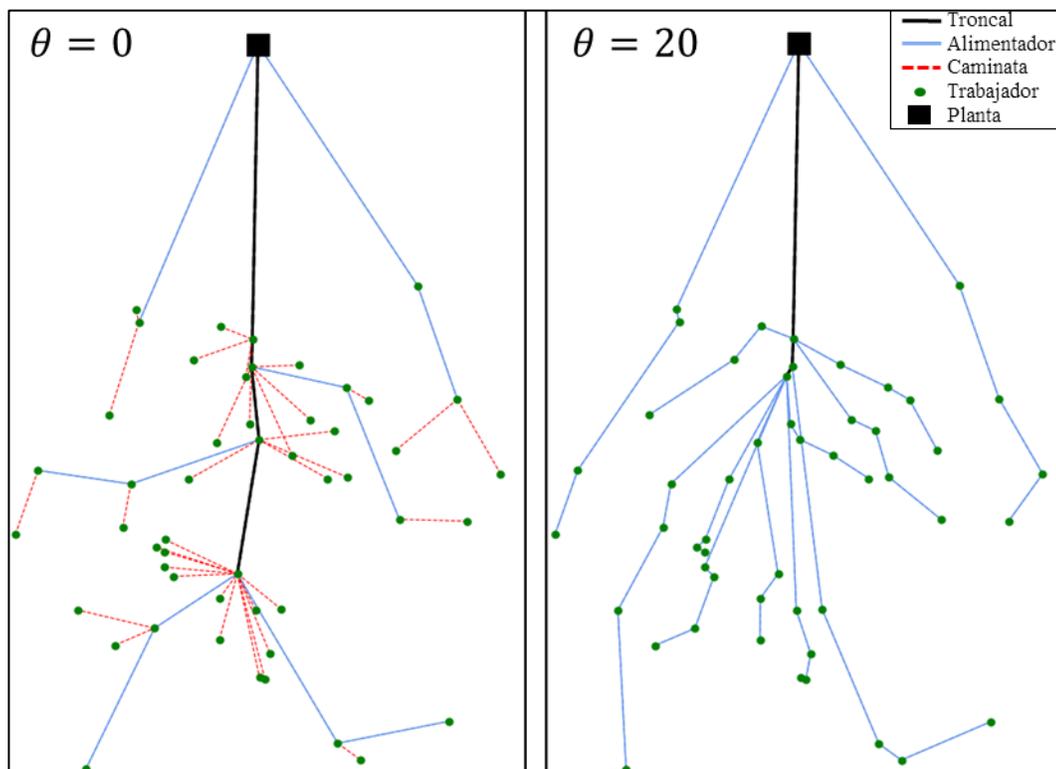


Figura 4-5. Ilustración de las soluciones de una instancia de 50 nodos, con  $\lambda = 2$ , para distintos  $\theta$ .

Fuente: elaboración propia.

Si bien, en el caso de  $\lambda = 2$  el aumento del parámetro  $\theta$  aumenta la utilización del sistema T&F, hay que tener en consideración que al aumentar  $\theta$ , en algún valor de este, el sistema T&F probablemente ya no será utilizado. Esto debido a que, para disminuir más el tiempo adicional se requerirá de viajes más directos y menos caminatas, por lo que se utilizarían vehículos directos a la planta. Es decir, en algún momento el aumento del parámetro  $\theta$  disminuirá el uso del sistema T&F.

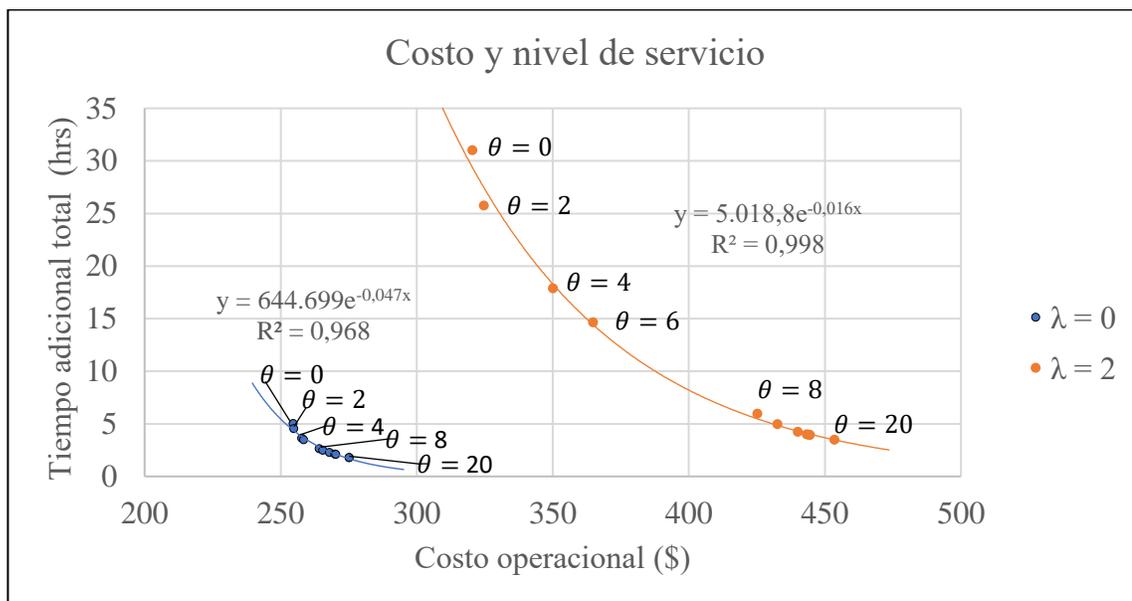


Figura 4-6. Muestra el costo operacional y tiempo adicional total obtenido con cada valor de  $\theta$ .

Fuente: elaboración propia.

En la Figura 4-6 se muestra el impacto del parámetro del costo del tiempo ( $\theta$ ) en el costo operacional y el tiempo adicional total, que son los dos elementos que se minimizan en la función objetivo del problema, es decir, muestra la frontera de Pareto para cada valor de  $\lambda$ . Este gráfico se construye con el promedio de la mejor solución de cinco instancias para cada valor de  $\theta$  y  $\lambda$ . Para cada valor de  $\lambda$  se ajusta una curva exponencial cuyos parámetros se muestran en la misma figura. Estas curvas se ajustan bien a los datos, con un  $R^2 > 0,95$ , y parecieran predecir adecuadamente los valores del tiempo adicional total cuando  $0 \leq \theta \leq 20$ , todo esto considerando el caso promedio. La curva de costo y nivel de servicio para cada una de estas instancias se puede encontrar en el ANEXO H.

En la Figura 4-6 se observa el comportamiento que tiene el valor de  $\theta$  con respecto al costo de la solución y el nivel de servicio. Su comportamiento no es lineal, es decir, que pasar de  $\theta = 4$  a  $\theta = 6$  no da el mismo cambio en la solución en términos de costos y nivel de servicio que pasar de un  $\theta = 18$  a un  $\theta = 20$ . Por esta razón, para el experimento

multifactorial de sensibilidad descrito en la sección 4.3.3, se utilizaron valores de  $\theta$  que permitan seguir la tendencia de estas curvas, pero con cinco valores distintos de  $\theta$  en lugar de los 11 que se utilizaron para el experimento de esta sección.

Con respecto a las restricciones de tiempo máximo, a medida que aumenta el valor del tiempo adicional  $\theta$ , estas restricciones dejan de ser activas para algunos trabajadores. Como el tiempo de viaje de un trabajador  $i$ ,  $T_i$ , es una variable continua, es probable que la restricción de tiempo máximo esté activa, pero  $T_i < T_i^{Max}$ . Con el fin de analizar el efecto de  $\theta$  sobre la restricción de tiempo, se analiza la holgura relativa,  $hlg_i$ , que tiene la restricción.

$$hlg_i = \frac{T_i^{Max} - T_i}{T_i^{Max}} \quad (4-11)$$

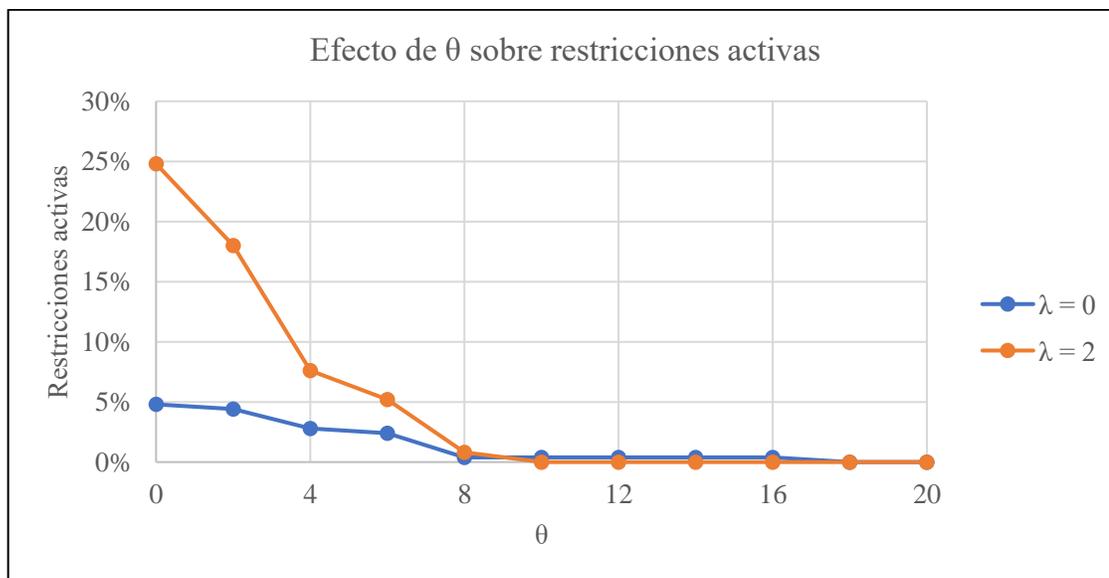


Figura 4-7. Efecto de  $\theta$  sobre las restricciones del tiempo activas.

Fuente: elaboración propia.

En la Figura 4-7 se muestra el porcentaje de restricciones de tiempo activas para cada  $\theta$  del experimento, calculado como el promedio de las cinco instancias. Se consideró que una restricción se encuentra activa cuando  $hlg_i < 5\%$ . Estos resultados parecen indicar que, independiente de la posición de la planta, para un  $\theta \geq 8$  las restricciones de tiempo máximo ya no son necesarias.

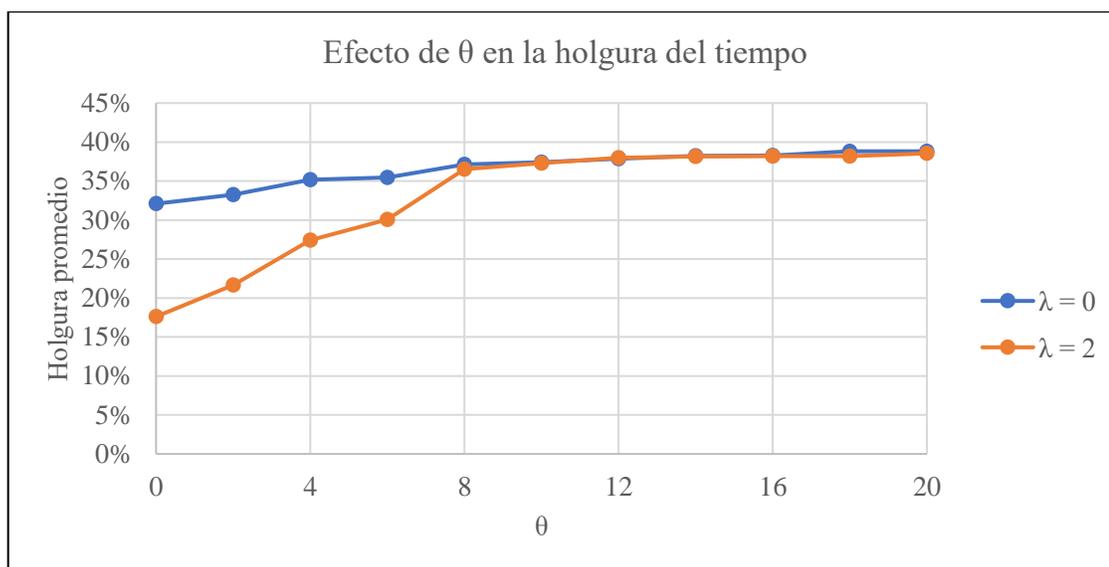


Figura 4-8. Efecto de  $\theta$  sobre la holgura de la restricción del tiempo.

Fuente: elaboración propia.

En la Figura 4-8 se muestra la holgura promedio para cada  $\theta$ , calculado con el promedio de las cinco instancias. De este gráfico se extrae que para un  $\theta \geq 8$ , la holgura promedio es similar para  $\lambda = 0$  y  $\lambda = 2$ . Pero, para  $\theta < 8$ , el efecto de aumentar el  $\theta$  es mayor cuando  $\lambda = 2$ . Esto implica que hay mayores cambios en la estructura de la solución cuando se varía  $\theta$  entre los valores 0 y 8. Para  $\theta > 8$ , la estructura de la solución tiene una menor variación. Esto también se ve en que los costos operacionales tienen menor tasa de crecimiento cuando  $\theta > 8$ , como muestra la Figura 4-3 y Figura 4-4. Esto también se

puede ver en la Figura 4-6, en que los puntos en que  $\theta > 8$  se encuentran más juntos que en el resto de la curva.

### 4.3.3 Experimento multifactorial de sensibilidad

El objetivo de este experimento es analizar el impacto de la variación de tres parámetros de interés en la solución del problema troncal y alimentador, tanto de forma individual como conjunta. Estos parámetros son: posición de la planta ( $\lambda$ ), valor del tiempo ( $\theta$ ), y costos de los vehículos ( $\beta$ ). Dado que se tienen dos tipos de costos, fijos y variables, y dos tipos de vehículos, son cuatro costos que se pueden variar, lo que puede resultar en una gran cantidad de experimentos. Con el fin de simplificar la variación del parámetro se define un único ponderador  $\beta$  que amplifica tanto los costos fijos como variables de los vehículos alimentadores.

Para este experimento se utilizaron: instancias de 50 trabajadores, cinco ubicaciones de clientes distintas, cuatro niveles del parámetro  $\lambda$ , cinco niveles del parámetro  $\theta$  y cinco niveles del parámetro  $\beta$ . Se incluyó cada combinación de estos parámetros, es decir, 500 instancias en las que el tiempo máximo de ejecución se definió en 2 horas. Cada conjunto de 500 instancias se resolvió para el sistema troncal y alimentador (T&F), solo troncales (ST) y solo alimentadores (SA). En el caso de ST, el parámetro  $\beta$  no tiene influencia, por lo tanto, en este caso se ejecutaron 100 instancias. Todo esto da un total de 1100 ejecuciones. Para el sistema T&F se utilizó el algoritmo escogido en el capítulo 4.3.1, que involucra una solución inicial, cortes iniciales a la modelación y búsqueda local de alimentadores. Los valores de cada uno de estos parámetros se muestran en la Tabla 4-15. Los valores de  $\theta$  se escogieron para que sean representativos de acuerdo con los resultados mostrados en la Figura 4-6 de la sección 4.3.2.1. Los valores del parámetro  $\beta$  se eligieron de forma que el máximo valor igualara el costo variable del alimentador con el troncal. Y los parámetros de  $\lambda$  se eligieron los valores 0, 1, 2 y 3, en el cual los valores más lejanos

podrían ser representación de la ubicación de una mina con respecto a la ciudad, ya que estas suelen estar lejos de la ciudad.

Tabla 4-15. Parámetros del experimento multifactorial de sensibilidad.

Sistema	$n$	Ubicaciones de clientes	$\lambda$	$\theta$	$\beta$	Total instancias
T&F	50	5	0; 1; 2; 3	0; 2; 4; 8; 20	0,5; 1; 2; 3; 4	500
ST	50	5	0; 1; 2; 3	0; 2; 4; 8; 20	1	100
SF	50	5	0; 1; 2; 3	0; 2; 4; 8; 20	0,5; 1; 2; 3; 4	500

Fuente: elaboración propia.

#### 4.3.3.1 Resultados de optimización del experimento multifactorial

En la Tabla 4-16 se muestran los resultados de optimización del experimento multifactorial. Se observa que los *gaps* de optimalidad para el sistema T&F y ST son similares a pesar de que el sistema T&F es más complejo de resolver. Esto es gracias a las mejoras que se le hicieron al método exacto para resolver el problema con troncales y alimentadores. Por otro lado, las ejecuciones del sistema SF lograron llegar a optimalidad en todos los casos. Se pueden encontrar tablas más detalladas del tiempo de ejecución y *gap* de optimalidad en el ANEXO I.

Tabla 4-16. Resultados de optimización del experimento multifactorial.

Sistema	<i>Gap</i> promedio (ST)	Desviación estándar del <i>gap</i>	Tiempo de ejecución (min)	Desviación estándar del tiempo de ejecución
T&F	3,0%	4,9%	65,3	48,0
ST	3,1%	5,2%	51,5	55,0
SF	0%	0%	0,7	1,1

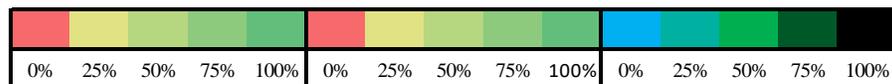
Fuente: elaboración propia.

### 4.3.3.2 Resultados y análisis del experimento multifactorial de sensibilidad

En esta sección se muestran los resultados del experimento multifactorial y se analizan sus principales indicadores que son: la mejora garantizada del sistema troncal y alimentador  $MGS_{T\&F}$ , los viajes en el sistema troncal y alimentador  $\%V_{T\&F}$  y los asientos ofrecidos de troncal  $AOT$ .

Tabla 4-17. Resultados de los indicadores  $MGS_{T\&F}$ ,  $\%V_{T\&F}$  y  $AOT$  para cada  $\beta$ ,  $\lambda$  y  $\theta$  del experimento multifactorial de sensibilidad.

		%MGS T&F					%V T&F					%AOT				
		$\beta$					$\beta$					$\beta$				
$\lambda$	$\theta$	0.5	1	2	3	4	0.5	1	2	3	4	0.5	1	2	3	4
0	0	0%	0%	0%	4%	11%	0%	0%	0%	51%	48%	0%	0%	0%	65%	82%
	2	0%	0%	0%	3%	11%	0%	0%	0%	50%	48%	0%	0%	0%	65%	80%
	4	0%	0%	0%	2%	11%	0%	0%	0%	26%	49%	0%	0%	0%	47%	80%
	8	0%	0%	0%	1%	9%	0%	0%	0%	21%	43%	0%	0%	0%	37%	80%
	20	0%	0%	0%	1%	6%	0%	0%	0%	2%	48%	0%	0%	0%	11%	81%
1	0	0%	1%	18%	15%	5%	0%	25%	54%	44%	34%	0%	21%	58%	77%	82%
	2	0%	1%	17%	15%	6%	0%	12%	53%	42%	30%	0%	10%	58%	77%	85%
	4	0%	0%	15%	14%	6%	0%	14%	59%	40%	29%	0%	10%	57%	75%	85%
	8	0%	0%	14%	14%	5%	0%	0%	54%	45%	29%	0%	0%	56%	71%	84%
	20	0%	0%	7%	13%	4%	0%	0%	68%	51%	32%	0%	0%	52%	65%	80%
2	0	0%	24%	14%	4%	1%	0%	48%	28%	16%	7%	0%	58%	80%	89%	94%
	2	0%	21%	17%	6%	1%	0%	55%	36%	17%	10%	0%	56%	71%	89%	92%
	4	0%	17%	17%	8%	3%	0%	66%	36%	20%	11%	0%	52%	74%	88%	91%
	8	0%	12%	19%	10%	5%	0%	77%	46%	24%	15%	0%	49%	63%	82%	90%
	20	0%	6%	22%	10%	4%	0%	76%	71%	39%	23%	0%	48%	54%	77%	86%
3	0	3%	30%	4%	0%	0%	55%	42%	21%	1%	0%	56%	61%	77%	99%	100%
	2	0%	27%	5%	0%	0%	29%	38%	22%	5%	0%	20%	62%	74%	98%	100%
	4	0%	25%	5%	0%	0%	0%	58%	26%	5%	0%	0%	55%	72%	98%	100%
	8	0%	23%	6%	1%	0%	0%	76%	40%	10%	5%	0%	49%	66%	94%	98%
	20	0%	16%	21%	7%	3%	0%	78%	68%	37%	22%	0%	48%	55%	82%	89%



Min Prom Máx  
0% 6% 30%

Min Prom Máx  
0% 25% 78%

Min Prom Máx  
0% 49% 100%

Fuente: elaboración propia.

En la Tabla 4-17 se presentan, para cada combinación de los parámetros ponderador del costo  $\beta$ , posición de la planta  $\lambda$  y valor del tiempo  $\theta$ , los resultados de tres indicadores relevantes para el análisis. El primer indicador es la mejora garantizada que presenta el sistema T&F con respecto a los sistemas puros, en términos de función objetivo. Este indicador se definió como  $MGS_{T\&F}$  en la sección 4.3.1. El segundo indicador es el porcentaje de viajes en el modo troncal y alimentador  $\%V_{T\&F}$ . Este indicador representa la utilización del sistema T&F en cada instancia. El tercer indicador corresponde a la proporción de asientos ofrecidos de troncal, AOT. Con este indicador se puede diferenciar qué tipo de vehículo se utiliza para cada combinación. Estos tres parámetros se muestran lado a lado con escala de colores para una mejor comparación visual.

El indicador AOT en la Tabla 4-17 está clasificado en colores de forma que el color celeste corresponde a los alimentadores, el verde a la flota mixta y el negro a los troncales. Se puede ver de esta tabla que las zonas rojas en las matrices de los indicadores  $MGS_{T\&F}$  y  $\%V_{T\&F}$  corresponden a la utilización de un solo tipo de vehículo, pero no se diferencia si solo se utilizan alimentadores o troncales. Con el indicador AOT se distingue que las zonas de solo troncales se dan cuando la planta se aleja de la ciudad y cuando el alimentador se hace más costoso con respecto al troncal, hacia la derecha y abajo en la matriz. En cambio, las zonas de solo alimentadores se dan hacia la izquierda y arriba en la matriz. Esto deja una diagonal en medio de la matriz en que se utiliza flota mixta, la que también se encuentra en la matriz de los indicadores de beneficio y utilización del sistema T&F. Esta diagonal es importante para dilucidar cuándo conviene utilizar el sistema T&F. En instancias con mayor número de trabajadores es probable que esta diagonal se desplace hacia arriba y a la izquierda de acuerdo con los resultados de la sección 4.3.1.

En la Tabla 4-17 se puede ver que para los indicadores  $MGS_{T\&F}$  y  $\%V_{T\&F}$ , existen zonas rojas que representan que el sistema no otorga beneficios y que el sistema T&F no está siendo utilizado, respectivamente. Estos dos indicadores suelen coincidir cuando

$\%V_{T\&F} = 0\%$ , ya que, como no hay viajes realizados con el sistema T&F, entonces lógicamente no hay beneficios de utilizar el sistema T&F en ese caso. Sin embargo, teóricamente puede darse el caso en que  $MGS_{T\&F} \approx 0\%$  y  $\%V_{T\&F} > 0$ , ya que pueden existir soluciones de distintos sistemas que sean aproximadamente iguales en función objetivo. Esto último se da en el caso en que  $\lambda = 3$ ,  $\theta = 2$  y  $\beta = 0,5$ , en que el beneficio sobre los otros sistemas es de un 0,3% y los viajes en el sistema T&F corresponden a un 27% en promedio.

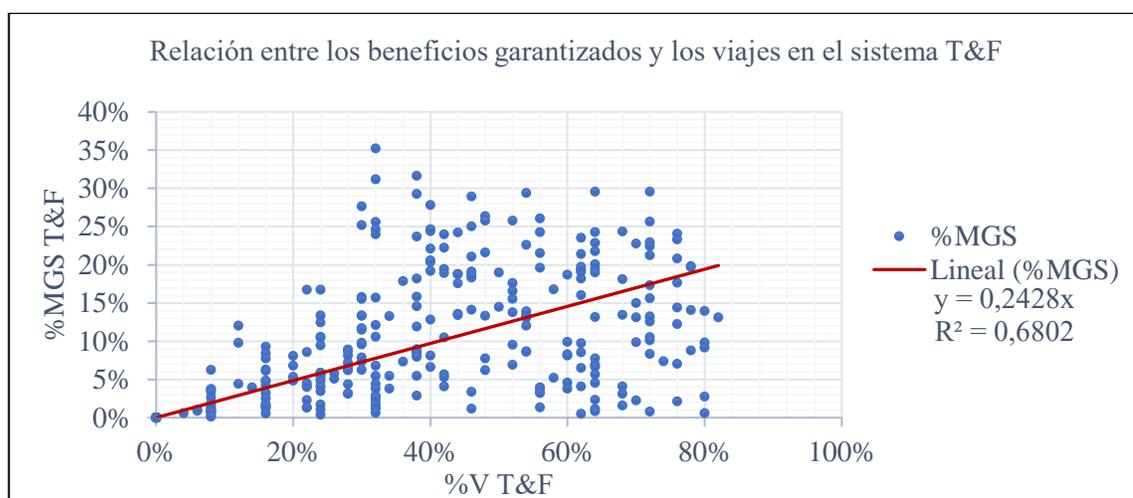


Figura 4-9. Relación entre los indicadores  $MGS_{T\&F}$  y  $\%V_{T\&F}$ .

Fuente: elaboración propia.

Visualmente, las tablas de los indicadores  $MGS_{T\&F}$  y  $\%V_{T\&F}$  están correlacionadas en las zonas de la matriz en que se utiliza y no se utiliza el sistema. Numéricamente, estas dos variables resultan ser no normales, y tienen un coeficiente de correlación de Spearman de 0,891, lo que indica una alta correlación. Sin embargo, esta alta correlación se debe a que el 44% de los datos corresponde a ceros, los cuales coinciden. Cuando se quitan los cero del análisis,  $MGS_{T\&F} > 0$  y  $\%V_{T\&F} > 0$ , el coeficiente de correlación de Spearman es de 0,43, lo que indica una asociación moderada. En la Figura 4-9 se muestra gráficamente la relación entre ambas variables, y se puede ver que existe una alta dispersión de los datos.

Esto implica que, para las zonas en que ambos indicadores son mayores que cero, no se puede obtener una asociación certera entre estos.

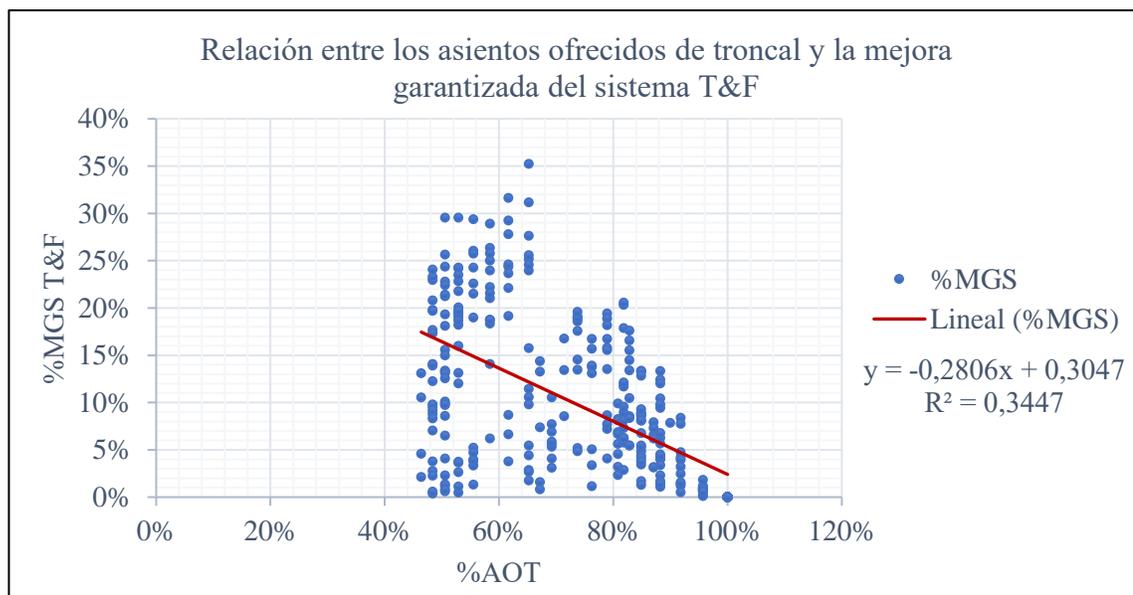


Figura 4-10. Relación entre los indicadores  $MGS_{T\&F}$  y  $AOT$ .

Fuente: elaboración propia.

Una asociación visual también existe entre el indicador de asientos ofrecidos de troncal (AOT) y la mejora garantizada de sistema ( $MGS_{T\&F}$ ). Sin embargo, el coeficiente de correlación de Spearman entre AOT y el indicador  $MGS_{T\&F}$  es de 0,356, y cuando se considera  $AOT > 0$ , este coeficiente es de -0,641, lo que indica una asociación negativa moderada. En la Figura 4-10 se muestra el gráfico de dispersión de estos dos indicadores, sin considerar cuando  $AOT = 0$ . Se puede ver una gran dispersión de los datos, por lo que sería difícil predecir el  $MGS_{T\&F}$  a partir del AOT. Sin embargo, se puede ver que los  $MS_{T\&F}$  más altos se dan cuando  $AOT \in [45\%, 65\%]$ .

La relación entre el indicador AOT y  $\%V_{T\&F}$  no necesariamente es directa. Puede existir una flota mixta, 50% asientos alimentadores y 50% asientos de troncal, y que estos

vehículos lleguen directamente a la planta, sin transbordo, por lo que no habría viajes en el sistema T&F. Sin embargo, estos dos parámetros tienen una correlación de Spearman de 0,289 cuando se incluyen los ceros, y cuando  $AOT > 0$  tiene valor de -0,854. La baja correlación cuando se incluyen los ceros se debe a que cuando  $AOT = 0$  y  $AOT = 1$ , entonces  $V_{T\&F} = 0$ , por lo que la correlación vista de esta forma no es clara. En la Figura 4-11 se puede ver la relación entre estos dos parámetros. Visualmente estos tienen mayor relación que  $MGS_{T\&F}$  y  $\%V_{T\&F}$ . En este mismo gráfico se ajusta una línea de tendencia sin considerar  $AOT = 0$ , lo que da un  $R^2 = 0,686$ . Si se excluyen también los puntos en que  $AOT = 1$ , el  $R^2$  tiene un valor de 0,522. Este gráfico muestra que todos los casos en que hay flota mixta también se utiliza el sistema T&F.

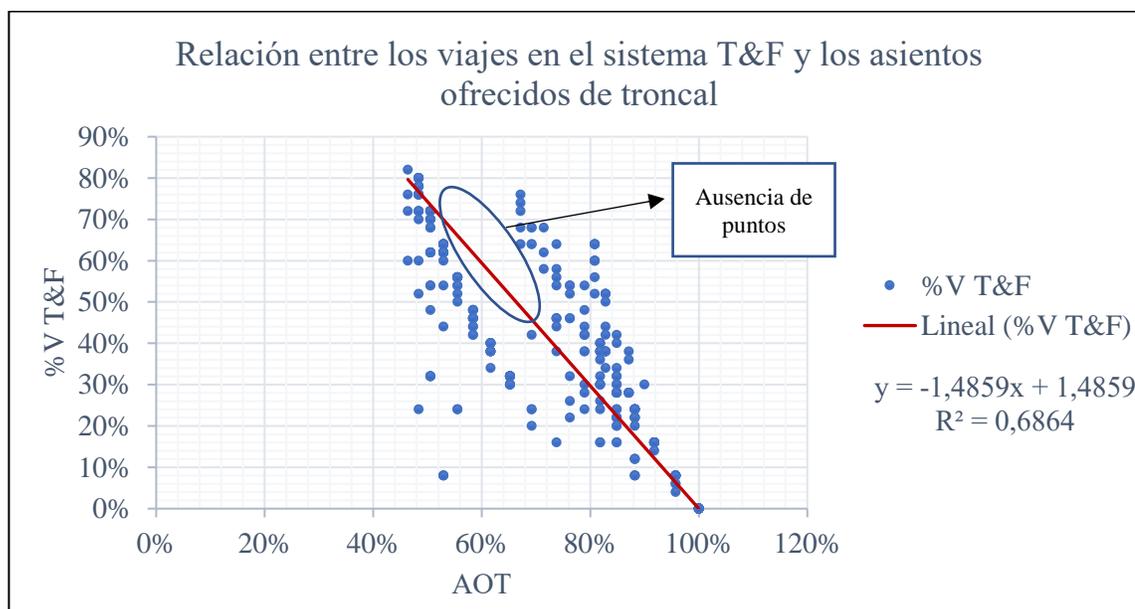


Figura 4-11. Relación entre los indicadores  $\%V_{T\&F}$  y AOT, no incluye los valores  $AOT = 0$ .

Fuente: elaboración propia.

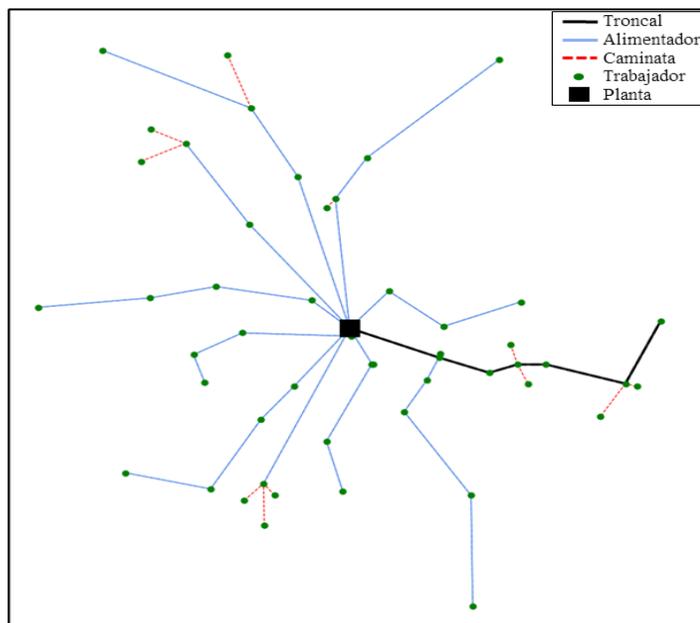


Figura 4-12. Ilustración de la solución óptima una instancia con parámetros  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 3$  y  $\theta = 4$ ,  $AOT = 53\%$  y  $\%V_{T\&F} = 8\%$ .

Fuente: elaboración propia.

En la Figura 4-11 se ven puntos atípicos en que el sistema T&F tiene baja utilización, pero existe flota mixta con  $AOT \in [40\%, 60\%]$ . Estos casos corresponden a instancias en que la planta está ubicada en el centro de la ciudad,  $\lambda = 0$ , y un ponderador de costos  $\beta = 3$ . En la Figura 4-12 se muestra un ejemplo de estos casos, en que  $AOT = 53\%$  y  $\%V_{T\&F} = 8\%$ . La solución muestra que los vehículos tienen rutas radiales y solo se utiliza un troncal. Esto implica que es más conveniente ir directamente al destino que combinar con el troncal para los vehículos que comienzan en el lado opuesto al del troncal, respecto a la planta. Esto da un menor porcentaje de viajes en el sistema T&F.

Un aspecto para considerar del gráfico de la Figura 4-11 es que se observa que existen dos tendencias separadas por un vacío de puntos (señalado en el gráfico). Estas tendencias se dan de acuerdo con el número de troncales presentes en la solución. Existen límites teóricos para los valores de los asientos ofrecidos de troncal y para los viajes en el sistema

troncal y alimentador. Estos dependen del número de troncales presente en la solución y el número de alimentadores. A continuación, se analizan estos límites teóricos que permitirán acotar el AOT para poder predecir la utilización del sistema T&F.

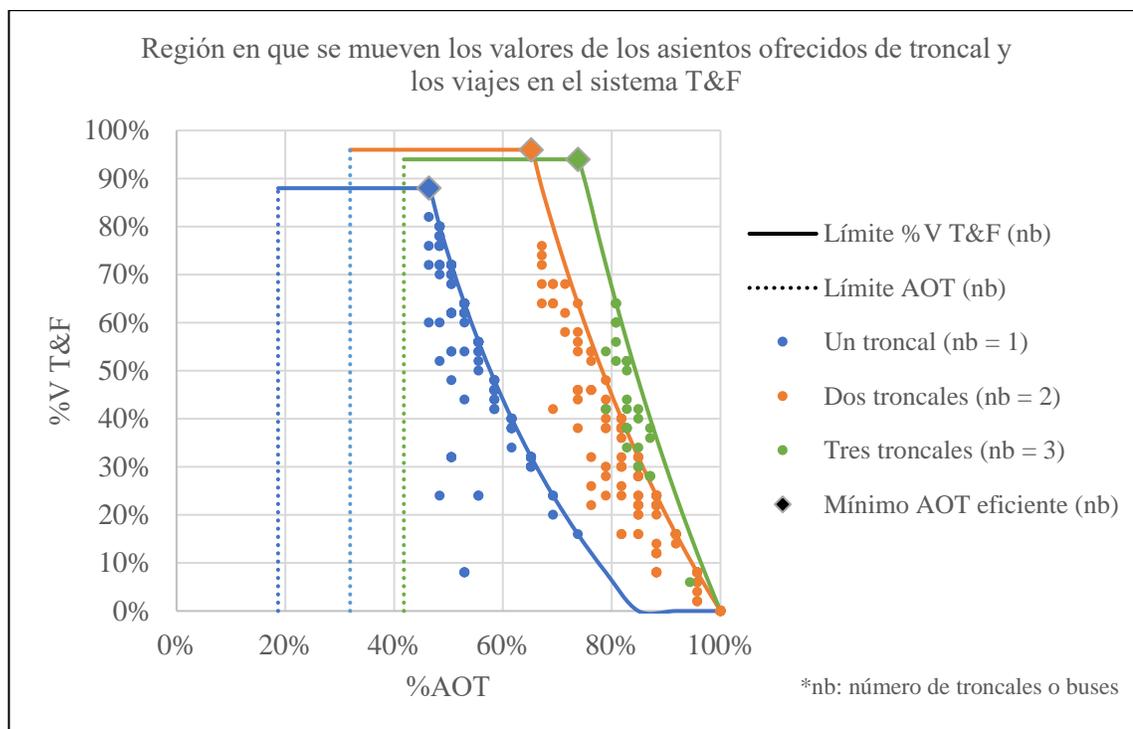


Figura 4-13. Relación entre los viajes en el sistema T&F y los asientos ofrecidos de troncal, por número de troncales en la solución.

Fuente: elaboración propia.

El gráfico de la Figura 4-13 muestra los datos del gráfico de la Figura 4-11 pero separados por cantidad de troncales en la solución. En este se muestran los límites teóricos de los indicadores dependiendo de cuántos troncales se utilizan,  $n^b$ . El máximo número de viajes en T&F se da cuando cada troncal visita exactamente una parada y todos los alimentadores conectan con esta, respetando la capacidad. Sin embargo, puede existir un caso en que la capacidad total de los troncales sea menor a la cantidad de trabajadores, por lo que deben

existir alimentadores que conecten directamente con la planta. El máximo número de viajes en el sistema T&F se obtiene de la siguiente fórmula:

$$V_{T\&F}^{Max}(n^b) = \min(Q^b \cdot n^b; n) - n^b. \quad (4-12)$$

En esta fórmula:  $Q^b$  representa la capacidad de los troncales,  $n^b$  el número de troncales y  $n$  el número de trabajadores. Para cada combinación de número de troncales y número de alimentadores posible, existe un  $V_{T\&F}$  máximo, que se da cuando todos los alimentadores posibles combinan con troncales. Al considerar esto último y la ecuación (4-12), el número máximo de viajes en el sistema T&F por número de troncales y alimentadores se representa en la siguiente ecuación:

$$V_{T\&F}^{Max}(n^b, n^a) = \max \left\{ \min \left\{ V_{T\&F}^{Max}(n^b); Q^a \cdot \left( n^a - \max \left( \left\lfloor \frac{n - n^b \cdot Q^b}{Q^a} \right\rfloor; 0 \right) \right) \right\}; 0 \right\}. \quad (4-13)$$

En la cual  $n^a$  representa el número de alimentadores y  $Q^a$  su capacidad. Por otro lado, el número de asientos ofrecidos de troncal se define como:

$$AOT = \frac{n^b \cdot Q^b}{n^b \cdot Q^b + n^a \cdot Q^a}. \quad (4-14)$$

Entonces, con esto es posible obtener las curvas del gráfico de la Figura 4-13. El límite inferior de los asientos ofrecidos de troncal, para una cantidad de troncales dado, se da cuando existe un máximo de alimentadores y los troncales en la solución visitan solo una parada, esto es:

$$AOT^{Min}(n^b) = \frac{n^b \cdot Q^b}{n^b \cdot Q^b + (n - n^b) \cdot Q^a}. \quad (4-15)$$

Estos límites ayudan a tener una noción del comportamiento de los dos parámetros. Se puede ver en la Figura 4-13 que los puntos tienden a acercarse a la curva de viajes máximos en el sistema troncal y alimentador dado el número de troncales en la solución. Esto parece indicar que, frente a la posibilidad de una flota mixta, en general conviene utilizar un sistema con transbordos. Con respecto al comportamiento de las curvas de los  $\%V_{T\&F}$  máximos, si se utiliza solo un troncal, el punto en que comienza a decrecer se da cuando  $AOT = 46\%$ , para dos troncales es  $65\%$  y para tres troncales  $74\%$ . Este número en que comienza a decrecer, definido como el mínimo AOT eficiente dependiente del número de troncales,  $AOT_n^{Ef}(n^b)$ , se calcula con la siguiente fórmula:

$$AOT_n^{Ef}(n^b) = \frac{n^b \cdot Q^b}{\min(Q^b \cdot n^b; n) + n^b \cdot (Q^b - 1) + Q^a \cdot \max\left(\left\lceil \frac{n - n^b \cdot Q^b}{Q^a} \right\rceil; 0\right)}. \quad (4-16)$$

Al observar el mínimo valor de AOT para cada número de troncales utilizados, este nunca es menor que el  $AOT_n^{Ef}(n^b)$  en que comienza a decrecer la curva (puntos en forma de rombo en la Figura 4-13). Esto puede implicar que un AOT menor que este no es eficiente para la solución que utiliza un determinado número de troncales, independiente del costo, ubicación de la planta y nivel de servicio de la instancia. Más aún, la zona comprendida entre  $AOT_n^{Ef}(n^b = 1)$  y  $AOT = 1$  determina los puntos en que el AOT es eficiente y se utiliza el sistema T&F. Esto significa que, si se estima el indicador de asientos ofrecidos de troncal relativo y la predicción cae fuera del límite inferior en que el AOT es eficiente, entonces el AOT se puede asumir como 0 y en este caso el sistema T&F no se utiliza. Si el número predicho está dentro del rango en que el AOT es eficiente, entonces es probable que convenga implementar el sistema T&F.

#### **4.4 ¿Cuándo y cuánto conviene implementar troncales y alimentadores?**

En esta sección se muestran distintos modelos y herramientas que predicen la utilización y beneficios de un sistema troncal y alimentador, en función de parámetros característicos de la instancia.

##### **4.4.1 Modelo 1: ¿cuándo conviene el sistema troncal y alimentador?**

Para estimar cuándo conviene utilizar un sistema troncal y alimentador (T&F) en un problema de buses de acercamiento al trabajo se utilizaron dos enfoques. El primero, consiste en predecir el índice de asientos ofrecidos de troncal (AOT) y determinar si se utiliza el sistema T&F de acuerdo con los rangos descritos en la sección anterior, en que el AOT es eficiente. El segundo, corresponde a una regresión logística en que la variable a predecir es si se utiliza el sistema T&F o no. Esta variable toma el valor uno si implementar el sistema T&F tiene alguna mejora garantizada sobre los otros sistemas ( $MGS_{T\&F} > 0$ ), y valor cero en otro caso. Se diseñaron parámetros característicos de las instancias con el fin de capturar el cambio en la posición de la planta ( $\lambda$ ) y en los costos de los vehículos ( $\beta$ ), para que puedan ser utilizados en instancias reales.

Tabla 4-18. Resultados del indicador *AOT* para cada  $\beta$ ,  $\lambda$  y  $\theta$  del experimento multifactorial de sensibilidad.

		%AOT					Promedio	Promedio
		$\beta$						
$\lambda$	$\theta$	0,5	1	2	3	4		
0	0	0%	0%	0%	65%	82%	29%	25%
	2	0%	0%	0%	65%	80%	29%	
	4	0%	0%	0%	47%	80%	25%	
	8	0%	0%	0%	37%	80%	23%	
	20	0%	0%	0%	11%	81%	18%	
1	0	0%	21%	58%	77%	82%	48%	44%
	2	0%	10%	58%	77%	85%	46%	
	4	0%	10%	57%	75%	85%	45%	
	8	0%	0%	56%	71%	84%	42%	
	20	0%	0%	52%	65%	80%	39%	
2	0	0%	58%	80%	89%	94%	64%	59%
	2	0%	56%	71%	89%	92%	62%	
	4	0%	52%	74%	88%	91%	61%	
	8	0%	49%	63%	82%	90%	57%	
	20	0%	48%	54%	77%	86%	53%	
3	0	56%	61%	77%	99%	100%	79%	66%
	2	20%	62%	74%	98%	100%	71%	
	4	0%	55%	72%	98%	100%	65%	
	8	0%	49%	66%	94%	98%	61%	
	20	0%	48%	55%	82%	89%	55%	
<b>Promedio</b>		4%	29%	48%	74%	88%	49%	

Fuente: elaboración propia.

La Tabla 4-18 muestra el índice AOT para cada ponderador de costo  $\beta$ , posición de la planta  $\lambda$  y valor del tiempo  $\theta$ , con los promedios para cada parámetro. Se muestran los números junto con barras porque estas muestran la relación de cada parámetro con respecto a AOT. Se puede ver que el parámetro  $\beta$  tiene una correlación positiva con el índice. Esto es esperable dado a que un mayor  $\beta$  implica un mayor costo del alimentador, lo que hace el troncal más atractivo. Por otro lado, el parámetro  $\lambda$  tiene una correlación positiva con el índice. Esto implica que a medida que la planta se aleja del centro de la ciudad, un sistema con vehículos de mayor capacidad se hace más atractivo, lo que es natural porque permiten consolidar viajes y aumentar la eficiencia. Por último, el parámetro  $\theta$  está negativamente correlacionado con el índice AOT. Esto es esperable dado

los resultados obtenidos en la sección 4.3.2 debido a que al aumentar el valor del tiempo  $\theta$  se hace más importante el tiempo adicional de viaje, lo que disminuye las caminatas y privilegia el uso de vehículos de menor capacidad que permiten viajes más directos, y esto disminuye el tiempo adicional de viaje.

Con estas relaciones se puede teorizar el ajuste de una curva para poder predecir el índice AOT con los parámetros  $\beta$ ,  $\lambda$  y  $\theta$ . Los crecimientos/decrecimientos que se dan en la Tabla 4-18 para el AOT parecen ser no son lineales con respecto a los parámetros, por lo que se ajustó el siguiente modelo de regresión:

$$\widehat{AOT} = \kappa_0 + \kappa_1 \cdot \ln(\beta) + \kappa_2 \cdot \ln(\lambda + 1) + \kappa_3 \cdot \ln(\theta + 1). \quad (4-17)$$

En el que  $\kappa_i$  corresponde al coeficiente de regresión para cada parámetro. En esta regresión se incluyeron los resultados de las instancias de 75, 100 y 150 nodos del experimento preliminar de sensibilidad de la sección 4.3.1. Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 4-19. Resultados de la regresión lineal para predecir AOT.

Variable	Coficiente	Error estándar	Coficiente estandarizado	t	Pr >  t	R <sup>2</sup> ajustado	Validación cruzada
Intercepto	-0,367	0,027	-	-13,802	<0,0001	0,808	0,779
$\ln(\lambda + 1)$	0,318	0,015	0,437	20,654	<0,0001		
$\ln(\beta)$	0,678	0,019	0,764	36,121	<0,0001		
$\ln(\theta + 1)$	-0,053	0,008	-0,134	-6,356	<0,0001		

Fuente: elaboración propia.

Este modelo fue sometido a pruebas de validación cruzada con cinco divisiones aleatorias en los datos. Se estima el modelo con el 80% de los datos y luego con el 20% se prueba su validez, para cada división de los datos. Con esto, se obtuvo un  $R^2$  promedio de 0,779. Es decir, el modelo explica aproximadamente el 80% de la varianza del AOT. Por otro

lado, el coeficiente estandarizado indica que el ponderador del costo  $\beta$  posee mayor efecto en el indicador AOT, seguido por la posición de la planta  $\lambda$  y, por último, el costo del tiempo adicional  $\theta$ .

Al modelo descrito se le puede agregar la variable del número de trabajadores. Ya que, los resultados de la Tabla 4-11 del experimento de la sección 4.3.1 muestran una cierta correlación positiva entre el número de trabajadores y el AOT. Por lo tanto, se agrega esta variable para ver su efecto en la predicción. Sin embargo, para este parámetro se tienen tan solo 30 instancias distintas a 50 trabajadores: 10 instancias de 75 trabajadores, 10 de 100 y 10 de 150. Esto puede implicar un sesgo hacia las instancias de 50 trabajadores, las cuales tienen 500 muestras. No obstante, el efecto esperable de este parámetro, y como también muestra la Tabla 4-11, es que a medida que aumenta el número de trabajadores se hace más atractivo el uso de vehículos de mayor capacidad, lo que aumenta el AOT. Los resultados de la regresión se muestran en la Tabla 4-20. De esta tabla se confirma que la variable del número de trabajadores tiene una correlación positiva con el aumento de los asientos ofrecidos de troncal. Este modelo presenta una leve mejora en el puntaje de la validación cruzada que el anterior.

Tabla 4-20. Resultados de la regresión lineal para predecir AOT que considera el número de trabajadores.

Variable	Coefficiente	Error estándar	Coefficiente estandarizado	t	Pr >  t	R <sup>2</sup> ajustado	Validación cruzada
Intercepto	-0,744	0,161	-	-4,6	<0,0001	0,813	0,8
$\ln(\lambda + 1)$	0,325	0,014	0,452	23,9	<0,0001		
$\ln(\beta)$	0,397	0,010	0,780	41,0	<0,0001		
$\ln(\theta + 1)$	-0,046	0,007	-0,121	-6,4	<0,0001		
$\ln(n)$	0,217	0,040	0,105	5,4	<0,0001		

Fuente: elaboración propia.

Los parámetros  $\lambda$  y  $\beta$  utilizados en la regresión están diseñados para los objetivos de los experimentos presentados. Esto quiere decir que, para una instancia real, es difícil obtenerlos para poder predecir el AOT. Sin embargo, se pueden estimar con datos de las instancias. Sea  $\bar{h}$  la distancia promedio a la planta y  $\bar{d}_c$  la distancia promedio entre clientes, entonces la posición de la planta respecto de la configuración de la ciudad se puede calcular como:

$$\tilde{\lambda} = \frac{\bar{h}}{\bar{d}_c} \quad (4-18)$$

Por otro lado, se puede obtener un costo relativo aproximado de los vehículos si se considera el costo basado en la aproximación mostrada en la ecuación (3-27) que se utilizó para la heurística de solución inicial, explicado en el capítulo 3.3.1. En esta aproximación, se estima la distancia recorrida como una aproximación del problema del vendedor viajero añadiendo la distancia que cada vehículo tiene que recorrer en promedio a la planta. Se calcula el costo aproximado para cada sistema puro, solo troncales (ST) y solo alimentadores (SF), y se comparan ambos. Por lo tanto, el indicador propuesto es el costo operacional relativo aproximado  $\tilde{\beta}$ .

$$\tilde{\beta} = \frac{c_f^a \cdot \left(\frac{n}{Q^a}\right) + c_v^a \cdot \left(0,9 \cdot \sqrt{S \cdot n} + \left(\frac{n}{Q^a}\right) \cdot \bar{h}\right)}{c_f^b \cdot \left(\frac{n}{Q^b}\right) + c_v^b \cdot \left(0,9 \cdot \sqrt{S \cdot n} + \left(\frac{n}{Q^b}\right) \cdot \bar{h}\right)} \quad (4-19)$$

En esta expresión  $a$  representa a los alimentadores,  $b$  a los buses o trocales,  $Q^u$  es la capacidad de cada vehículo  $u \in \{a, b\}$ ,  $S$  es el área rectangular descrita por la posición de los trabajadores,  $n$  el número de trabajadores,  $c_f^u$  y  $c_v^u$  es el costo fijo y variable, respectivamente, de cada vehículo  $u \in \{a, b\}$ .

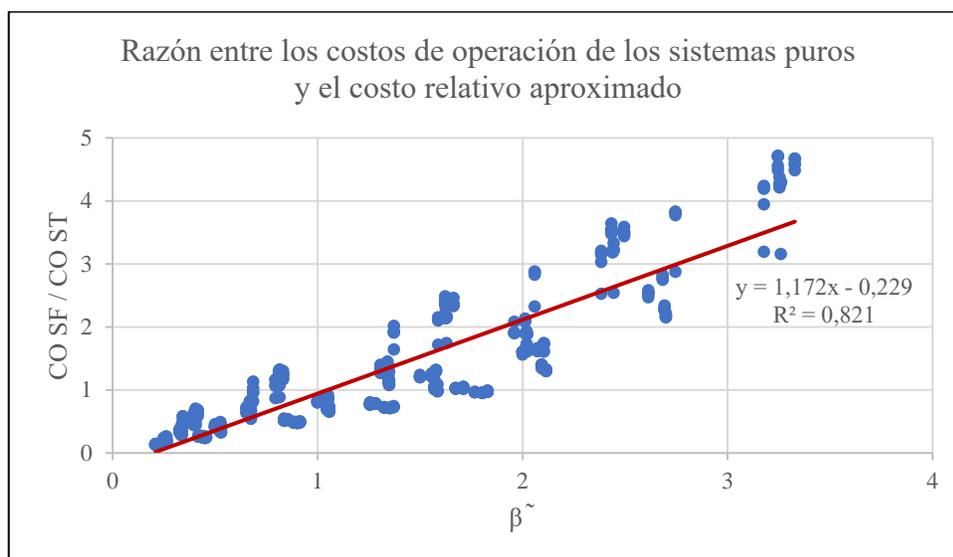


Figura 4-14. Relación entre la razón de los costos operacionales de los sistemas puros y el costo relativo aproximado.

Fuente: elaboración propia.

En la Figura 4-14 se muestra la aproximación de los costos relativos y la relación que tiene con la razón de los costos operacionales de los sistemas puros que se obtuvieron en los experimentos. De este se puede ver que la aproximación es adecuada para la razón de los costos real. Con esta aproximación, los resultados de la regresión se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 4-21. Resultados de la regresión lineal para predecir AOT que considera el número de trabajadores.

Variable	Coefficiente	Error estándar	Coefficiente estandarizado	t	Pr >  t	R <sup>2</sup> ajustado	Validación cruzada
$\ln(\tilde{\lambda})$	0,134	0,013	0,202	10,2	<0,0001	0,809	0,8
$\ln(\tilde{\beta})$	0,396	0,010	0,814	40,7	<0,0001		
$\ln(\theta + 1)$	-0,045	0,007	-0,121	-6,3	<0,0001		
$\ln(n)$	0,130	0,130	0,049	35,6	<0,0001		

Fuente: elaboración propia.

En el modelo la constante no fue significativa, por lo tanto, se retiró de este. La tabla indica que la variable con mayor influencia en el indicador AOT es el costo operacional relativo aproximado  $\tilde{\beta}$ , seguido de  $\tilde{\lambda}$ , luego  $\theta$  y por último  $n$ . Este modelo es útil para predecir la distribución de la flota en términos relativos, lo que también permite predecir cuándo es probable convenga implementar el sistema troncal y alimentador.

Para predecir cuándo es probable que se utilice el sistema T&F con este modelo, se puede utilizar el AOT en el cual la flota mixta comienza a ser eficiente para predecir el rango en que se utiliza el sistema T&F. Para poder establecer un límite inferior para AOT, se utiliza el punto  $AOT_n^{Ef}(n^b)$ , pero calculado para el máximo número posible de troncales que no genera un exceso de capacidad del sistema. Es decir, se considera  $n^b$  de tal forma que, si se agrega un troncal más, la capacidad sumada de los troncales es mayor que el número de trabajadores.

$$AOT_n^{Ef*} = AOT_n^{Ef} \left( \left\lfloor \frac{n}{Q^b} \right\rfloor \right) \quad (4-20)$$

Para instancias de 50 trabajadores se considera un solo troncal, lo que da  $AOT_{50}^{Ef*} = 46\%$ . Para 75 trabajadores también se considera un solo troncal, lo que da  $AOT_{75}^{Ef*} = 37\%$ . Para 100 trabajadores se consideran dos troncales, lo que da  $AOT_{100}^{Ef*} = 47\%$ . Para 150 trabajadores se consideraron tres troncales, lo que da  $AOT_{150}^{Ef*} = 48\%$ . Por lo tanto, si se tiene la estimación de los asientos ofrecidos de troncal relativos,  $\widehat{AOT}$ , el sistema T&F se utilizaría si:

$$AOT_n^{Ef*} < \widehat{AOT} < 1. \quad (4-21)$$

Al utilizar este modelo, la predicción acierta un 83,2% de las veces.

Como la utilización del sistema T&F es una variable binaria, se puede ajustar una regresión logística con las variables de la regresión previa. Se crea una variable binaria  $Y_{MGS}$ , la cual es 1 si hay beneficios,  $MGS_{T\&F} > 0$ , y es cero en caso contrario. En la Tabla 4-22 se muestran los resultados del mejor modelo.

Tabla 4-22. Resultados de la regresión logística para predecir si conviene sistema T&F.

Variable	Coefficiente	Error estándar	z	P> z	Puntaje de acierto (validación cruzada)
$\ln(\tilde{\beta})$	1,448	0,150	9,586	<0,0001	0,825
$\ln(\tilde{\lambda})$	0,594	0,146	4,387	<0,0001	

Fuente: elaboración propia.

En la muestra,  $Y_{MGS} = 1$  corresponde al 55% de los casos, y el restante 45% a  $Y_{MGS} = 0$ , por lo que se descarta un posible sesgo de muestra con respecto a esta variable. La Tabla 4-22 muestra que tan solo dos variables fueron significativas,  $\ln(\tilde{\beta})$  y  $\ln(\tilde{\lambda})$ . Se hizo una prueba de validación cruzada con 5 divisiones aleatorias en los datos, la cual tuvo un puntaje de acierto promedio del 82,5%, al considerar  $Y_{MGS} = 1$  a las predicciones con probabilidad mayor a 50%. Con los resultados de la tabla anterior, la probabilidad de que convenga implementar el sistema T&F, de acuerdo con el modelo logístico, se obtiene con la fórmula a continuación.

$$p(\tilde{\beta}, \tilde{\lambda}) = \frac{1}{1 + e^{-(1,448 \cdot \ln(\tilde{\beta}) + 0,594 \cdot \ln(\tilde{\lambda}))}} \quad (4-22)$$

#### 4.4.2 Modelo 2: ¿cuánto conviene utilizar el sistema troncal y alimentador?

En esta sección se mostrarán los modelos que intentan predecir la mejora que tiene el sistema troncal y alimentador sobre el sistema puro de solo troncales y el de solo alimentadores. Primero, se mostrará un modelo que predice directamente el indicador de mejora sobre ambos sistemas  $MGS_{T\&F}$ . Luego se mostrarán modelos que predicen la mejora del sistema T&F sobre un sistema de solo troncales  $MGS_{T\&F,ST}$  y otro modelo que predice la mejora del sistema T&F sobre un sistema de solo alimentadores  $MGS_{T\&F,SF}$ , y con esto obtener el  $MGS_{T\&F}$ . Finalmente, se muestra la relación conjunta de los parámetros: posición de la planta y los costos operacionales relativos aproximados, y su influencia sobre la mejora del sistema T&F. Esto define los rangos de valores en que un sistema T&F tiene mayor porcentaje de mejora sobre los otros sistemas.

El valor de la mejora  $MGS_{T\&F}$  para una instancia es difícil de predecir con un modelo lineal. Con las variables utilizadas en los modelos anteriores, e interacciones de ellas, se ajustó un modelo de regresión para intentar predecir la mejora que tendría el sistema T&F sobre la mejor alternativa. Para esta regresión se utilizó la transformación de Yeo y Johnson (Yeo & Johnson, 2000) para normalizar la variable de respuesta, con un parámetro  $\lambda$  de esta transformación de -11,19. Los resultados del mejor modelo se muestran a continuación.

Tabla 4-23. Resultados de la regresión lineal del  $MGS_{T\&F}$

Variable	Coficiente	Error estándar	Coficiente estandarizado	t	Pr >  t	R <sup>2</sup> ajustado	Validación cruzada
$\ln(\tilde{\beta})$	0,203	0,008	3,788	25,4	<0,0001	0,552	0,533
$\tilde{\lambda} \cdot \tilde{\beta}$	0,028	0,001	2,558	26,3	<0,0001		
$\tilde{\lambda} \cdot \ln(\tilde{\beta})$	-0,162	0,006	-5,932	-29,2	<0,0001		
$\tilde{\beta} \cdot \ln(\tilde{\beta})$	-0,019	0,002	-0,966	-10,0	<0,0001		
$\ln(n) \cdot \ln(\tilde{\beta}) \cdot \ln(\tilde{\lambda})$	0,027	0,001	1,847	17,8	<0,0001		

Fuente: elaboración propia.

Las variables presentadas en esta regresión son el resultado de una elección de modelo por  $R^2$ . Se probaron distintas interacciones de variables debido a que los modelos con las variables utilizadas en la regresión del indicador AOT presentaban un ajuste y predicción insuficientes. El modelo presentado posee mayor complejidad que el modelo del AOT debido a que las variables  $\tilde{\lambda}$  y  $\tilde{\beta}$  no poseen una relación monótonamente crecientes o decrecientes con el indicador  $MGS_{T\&F}$ . Por lo tanto, las interacciones de estas variables intentan capturar este fenómeno. Para elegir las variables, se ejecutaron regresiones de máximo cinco variables con tres niveles de interacción. Las variables que se muestran en la tabla resultaron ser las con mejor ajuste de  $R^2$ , las que explican un 55% de la varianza del indicador.

Los coeficientes estandarizados de esta regresión presentan el mismo signo y orden de magnitud que los coeficientes estandarizados de la regresión sin la transformación de Yeo y Johnson. Esto parece indicar que la interacción con mayor influencia es entre la variable  $\tilde{\lambda}$  y la variable  $\tilde{\beta}$ , y es esta interacción que posee un comportamiento no lineal que hace que la regresión no sea suficiente para explicar los datos.

Sin embargo, es posible predecir las mejoras garantizadas sobre cada sistema, es decir, se puede estimar cuánta mejora garantizada hay en implementar un sistema T&F sobre un sistema de solo troncales,  $MGS_{T\&F,ST}$ , y sobre un sistema de solo alimentadores,  $MGS_{T\&F,SF}$ . En las siguientes tablas se muestran los resultados de la predicción del  $MGS_{T\&F,ST}$  y del  $MGS_{T\&F,SF}$ , respectivamente.

Tabla 4-24. Resultados de la regresión lineal de las mejoras garantizadas sobre el sistema de solo troncales  $MGS_{T\&F,ST}$

Variable	Coefficiente	Error estándar	Coefficiente estandarizado	t	Pr >  t	R <sup>2</sup> ajustado	Validación cruzada
Intercepto	1,102	0,072	-	15,3	<0,0001	0,928	0,895
$\ln(\tilde{\lambda})$	-0,089	0,006	-0,183	-15,0	<0,0001		
$\ln(\tilde{\beta})$	-0,320	0,004	-0,896	-72,8	<0,0001		
$\ln(\theta + 1)$	0,016	0,003	0,059	5,0	<0,0001		
$\ln(n)$	-0,194	0,018	-0,127	-10,8	<0,0001		

Fuente: elaboración propia.

La Tabla 4-24 muestra los resultados de la regresión lineal para predecir la mejora del sistema troncal y alimentador sobre un sistema de solo troncales (ST). El coeficiente del parámetro  $\ln(\tilde{\lambda})$  es negativo, lo que es consistente con los resultados de la predicción de los asientos ofrecidos de troncal porque implica que entre más lejos se encuentra la planta un sistema de solo troncales es conveniente. Si bien un sistema T&F también es conveniente a medida que se aleja la planta del centro de la ciudad, la mejora sobre el sistema de solo troncales comienza a disminuir. Análogamente, el coeficiente de los parámetros  $\ln(\tilde{\beta})$  y  $\ln(n)$  son negativos, y el de  $\ln(\theta)$  es positivo, lo que implica que aumentar el valor del tiempo favorece al sistema T&F sobre un sistema ST.

Tabla 4-25. Resultados de la regresión lineal de las mejoras garantizadas sobre el sistema de solo alimentadores  $MGS_{T\&F,SF}$

Variable	Coefficiente	Error estándar	Coefficiente estandarizado	t	Pr >  t	R <sup>2</sup> ajustado	Validación cruzada
$\ln(\tilde{\lambda})$	0,185	0,008	0,439	23,6	<0,0001	0,835	0,830
$\ln(\tilde{\beta})$	0,208	0,006	0,672	36,0	<0,0001		
$\ln(\theta + 1)$	-0,032	0,004	-0,133	-7,6	<0,0001		
$\ln(n)$	0,052	0,002	0,036	24,2	<0,0001		

Fuente: elaboración propia.

La Tabla 4-25 muestra los resultados de la regresión lineal para predecir la mejora del sistema troncal y alimentador sobre un sistema de solo alimentadores (SF). A diferencia del modelo para predecir  $MGS_{T\&F,ST}$ , el intercepto en esta regresión no fue significativo y los parámetros involucrados tienen signos contrarios. Lo que es esperable debido a que a medida que se aleja la planta de la ciudad es más conveniente un sistema T&F sobre el sistema SF. Así también, si aumentan los costos relativos, el sistema SF se hace más costoso, por lo tanto, es más conveniente un sistema T&F. El análisis es análogo para el valor del tiempo y el número de trabajadores. En estos dos modelos, la variable  $\ln(\tilde{\beta})$  es la más influyente en la mejora del sistema T&F sobre el respectivo sistema, seguida de la variable  $\ln(\tilde{\lambda})$ . Es decir, la razón entre los costos operacionales de utilizar un sistema SF y los costos de utilizar ST es el factor más influyente en la conveniencia de un sistema T&F, seguido por la posición en que se encuentra la planta.

Con estas dos regresiones se puede predecir la mejora garantizada del sistema T&F sobre los otros dos sistemas,  $\widehat{MGS}_{T\&F}$ , con la siguiente fórmula.

$$\widehat{MGS}_{T\&F} = \max\{\min(\widehat{MGS}_{T\&F,ST}; \widehat{MGS}_{T\&F,SF}); 0\}. \quad (4-23)$$

Esta predicción no es lineal y tiene un  $R^2 = 0,596$ , que es mejor que el de la regresión de la Tabla 4-23 y presenta mejor parsimonia. La raíz del error cuadrático medio de la predicción con respecto a la muestra es de 7,6 p.p.

Los modelos mostrados están enfocados en predecir las mejoras del sistema T&F sobre dos sistemas definidos. En un caso real, las mejoras dependen de las opciones disponibles del operador. Sin embargo, este análisis ayuda a identificar en qué casos un sistema T&F tiene mayor beneficio sobre otros sistemas, y cuándo es más probable que este convenga implementarlo.

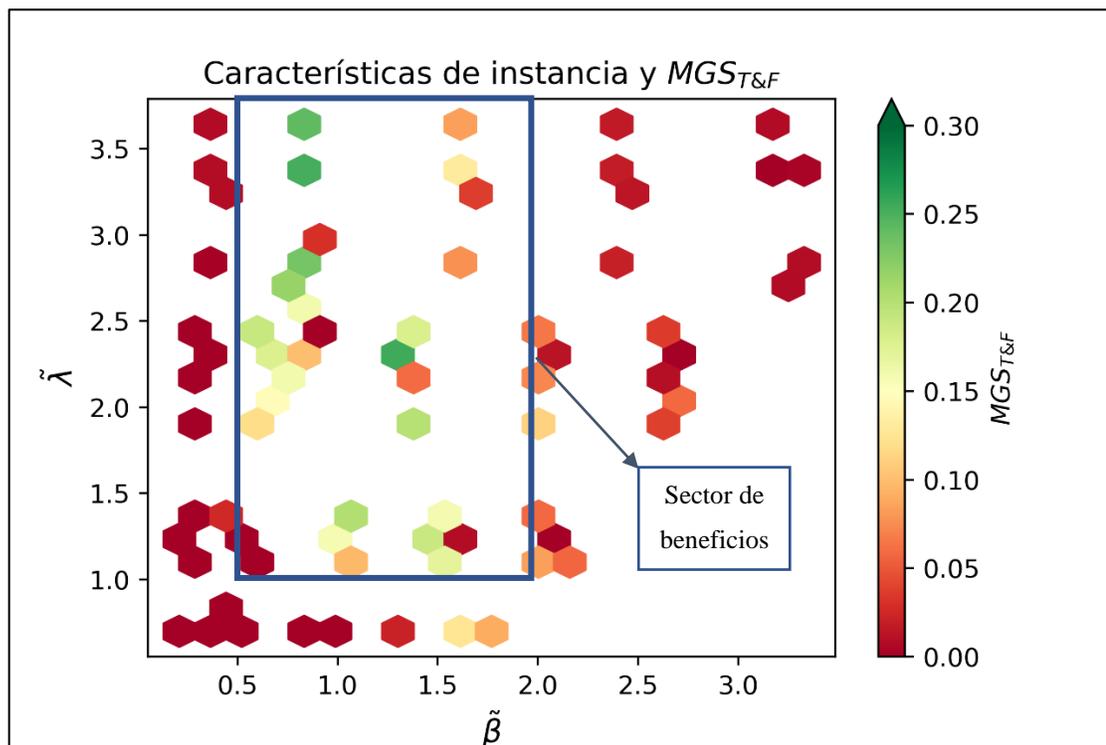


Figura 4-15. Relación entre  $\tilde{\lambda}$ ,  $\tilde{\beta}$  y  $MGS_{T\&F}$  y los valores en que conviene el sistema T&F.

Fuente: elaboración propia.

En la Figura 4-15 se puede ver la interacción de los parámetros de posición de la planta con respecto a los clientes ( $\tilde{\lambda}$ ), y el costo operacional relativo aproximado ( $\tilde{\beta}$ ), y su efecto en la mejora garantizada del sistema T&F ( $MGS_{T\&F}$ ). De esta se puede extraer que se tiene un mejor  $MGS_{T\&F}$  para el sector definido por  $\tilde{\beta} \in [0,5; 2]$  y  $\tilde{\lambda} \geq 1$ . En el cual los mayores beneficios se dan cuando  $\tilde{\beta} \approx 0,8$  y  $\tilde{\lambda} \geq 3$ . Si la planta se encuentra dentro de la ciudad,  $\tilde{\lambda} < 1$ , no es conveniente para  $\tilde{\beta} \leq 1,5$ , para  $\tilde{\beta}$  mayor a este conviene analizar el caso. Por otro lado, no parece ser conveniente utilizar el sistema troncal y alimentador cuando cualquiera de los dos costos operativos aproximados sea mayor al doble del otro, es decir,  $\tilde{\beta} < 0,5$  y  $\tilde{\beta} > 2$ .

Estos resultados indican que es conveniente analizar la implementación de un sistema T&F para los rangos en que la planta se encuentra en la periferia o fuera de la ciudad, y los costos relativos aproximados sean similares. En otras palabras, si los costos esperados de los sistemas puros, solo troncal (ST) y solo alimentador (ST), son similares, entonces puede convenir combinarlos en un sistema troncal y alimentador. Con respecto al tamaño de la instancia, a medida que crece el número de trabajadores la posición de la planta a la cual el sistema T&F podría convenir es más cerca del centro de la ciudad al compararla con una instancia con menos trabajadores. Por último, el valor del tiempo favorece la aparición de vehículos más pequeños en la solución, debido a que son más directos y disminuyen el tiempo adicional. Por lo tanto, si en un escenario se utilizan solo troncales, aumentar el valor del tiempo hace conveniente implementar el sistema troncal y alimentador. Y si en otro escenario ya se utiliza el sistema troncal y alimentador, y no hay caminatas, en algún nivel del valor del tiempo ya no convendrá la implementación de este sistema, y será más conveniente un sistema puro de solo alimentadores.

## 5 CONCLUSIONES

El viaje al trabajo es una actividad diaria que afecta en distintos ámbitos la calidad de vida de las personas. En este contexto, algunas empresas ofrecen a sus trabajadores un servicio de buses de acercamiento al lugar de trabajo. Sin embargo, el proveer de este beneficio trae consigo dos elementos que entran en conflicto: los costos de operación y el nivel de servicio. Con el fin de reducir los costos y proveer de un mejor nivel de servicio, se planteó implementar un sistema con vehículos troncales y alimentadores (T&F), en el que los alimentadores llevan los trabajadores a un troncal para que luego este los lleve a su lugar de trabajo. La pregunta de esta tesis es ¿cuándo conviene implementar un sistema troncal y alimentador en un problema de buses de acercamiento al trabajo? Para abordar esta pregunta se planteó como objetivo diseñar un algoritmo capaz de proponer soluciones eficientes para este problema, que se ha llamado 2E-HWTP, y luego utilizarlo para evaluar distintos escenarios para dilucidar cuándo es conveniente utilizar el sistema. Los resultados mostrados en el capítulo anterior reflejan que se cumplió el objetivo principal de esta tesis, que es responder a la pregunta planteada. Se definieron herramientas cuantitativas validadas estadísticamente, así como herramientas cualitativas.

### 5.1 Cumplimiento de objetivos

Los objetivos específicos de esta tesis: desarrollar un algoritmo y poder evaluar una gran cantidad de escenarios, se cumplieron. Se diseñó un modelo matemático que permitió resolver a optimalidad instancias de 50 trabajadores e incluso algunas de 75 trabajadores en tiempos razonables. Para reforzar este modelo, se desarrollaron cortes específicos para esta modelación que permitieron mejorar las cotas inferiores dadas por el algoritmo de *Branch and cut*. Por otro lado, se desarrollaron heurísticas, las cuales mejoraron el rendimiento del *solver* Gurobi, ayudaron a reducir los *gaps* de optimalidad en las instancias más grandes, y en las instancias pequeñas, redujeron el tiempo de ejecución. Estas herramientas permitieron evaluar una gran cantidad de escenarios. Lo que luego

derivó en el diseño de modelos y herramientas de predicción para poder evaluar cuando conviene utilizar el sistema troncal y alimentador.

## **5.2 Conclusiones generales de la investigación**

A continuación, se presentan las conclusiones generales de la investigación, las cuales se dividen en conclusiones con relación al algoritmo de solución y conclusiones sobre la utilización del sistema troncal y alimentador en un problema de buses de acercamiento al trabajo.

### **5.2.1 Conclusiones del algoritmo de solución**

Con respecto a el algoritmo de solución, durante la investigación, y en vista de los resultados obtenidos, se pudo identificar que los parámetros de las instancias influyen en el *gap* de optimalidad. Instancias con la planta lejos de la ciudad resultaron más difíciles de resolver para el algoritmo e instancias con mayor exigencia de nivel de servicio resultaron más fáciles de resolver. Los costos fijos y variables de operación también influyeron en la dificultad de resolución de las instancias: valores intermedios, que justifican la implementación del sistema mixto, corresponden a instancias más difíciles de resolver. Por otro lado, los módulos añadidos al algoritmo principal de *Gurobi* tuvieron un impacto positivo en la calidad de las soluciones obtenidas. De estos módulos, los cortes añadidos a la modelación fueron un factor clave para mejorar el *gap* de optimalidad. Estos lograron reducir el *gap* final de optimización en 4 p.p. en promedio, llegando a mejorar en 8,4 p.p. en promedio en instancias más complicadas.

Con respecto a la heurística de construcción de solución inicial, la aproximación de los costos resultó tener un error absoluto promedio del 8% con respecto a la mejor solución encontrada por el *solver*. Sin embargo, la solución factible construida fue un 30% mayor que la mejor solución encontrada. Esto implica que la aproximación del costo resultó ser

adecuada para el problema, pero la construcción de la solución tiene espacio de mejora. Sin embargo, junto con los cortes añadidos a la modelación, otorgar una mejor solución de partida y mejorar las soluciones encontradas por el *solver*, resultó ser la mejor estrategia para acelerar la convergencia del algoritmo a nivel general. Los resultados del capítulo 4.2 respaldan que la implementación de estas heurísticas diseñadas para el algoritmo exacto, mejora la calidad de las soluciones de este problema. Si bien mejoraron solo en 0,5 p.p. el *gap* de optimalidad promedio, en comparación con agregar solo los cortes, la mayor ventaja es que añadieron consistencia en las mejoras para instancias fáciles de resolver y para las más complejas.

### **5.2.2 ¿Cuándo conviene utilizar el sistema troncal y alimentador?**

El algoritmo de solución ayudó a evaluar una gran cantidad de escenarios, en los que se evaluaron parámetros como: la posición de la planta, el número de trabajadores, los costos operativos y el valor del tiempo asignado. La posición de la planta resultó ser un parámetro relevante al considerar implementar un servicio de buses de acercamiento con alimentadores. Los resultados indican que, en general, es más conveniente utilizar este sistema cuando la planta se encuentra fuera de la ciudad o en la periferia. Este caso se da en general en la industria minera en Chile, ya que las minas se encuentran lejos de la ciudad por lo que este tipo de sistemas podría ser conveniente en este sector. La estructura de rutas radiales que se da cuando la planta se encuentra dentro de la ciudad produce que vehículos más pequeños sean más atractivos, por lo que en este caso este sistema no otorga beneficios. Sin embargo, el número de trabajadores que participan en el sistema también es un parámetro que influye en la utilización de un sistema troncal y alimentador. A medida que se aleja la planta del centro de la ciudad, la posición en la cual comienza a convenir el sistema T&F pareciera ser más cerca a medida que el número de trabajadores crece. Esto parece indicar que para una instancia muy grande ( $\gg 150$  trabajadores), este sistema podría convenir cuando la planta se encuentra en el centro de la ciudad.

Por otro lado, de acuerdo con el indicador de costos relativos aproximados entregado en el capítulo 4.3.3, si este indica que los costos operativos aproximados son similares, entonces puede convenir utilizar un sistema T&F. En otras palabras, si en una instancia particular se evalúan dos sistemas puros, uno de solo buses y otro de solo vehículos alimentadores, y los costos operacionales son relativamente similares, entonces puede convenir implementar un sistema combinado que permita transbordos. Naturalmente, esto depende de la situación particular que se está evaluando, pero los resultados indican que para instancias en que un sistema puro domine en costos, y el sistema más costoso es aproximadamente más del doble que el otro, los beneficios que se pueden obtener son muy bajos o nulos. Si se considera que los escenarios evaluados y el modelo son casos ideales, entonces es muy probable que en esa situación no convenga implementar un sistema con troncales y alimentadores.

Con respecto al nivel de servicio, un sistema de troncales y alimentadores mejora este indicador en comparación con un sistema de solo troncales, pero puede aumentar los costos de operación, naturalmente. En la situación en que implementar un sistema T&F reduzca los costos operacionales, bajo el esquema de operación planteado en esta tesis, esto también traería una mejora en el nivel de servicio.

### **5.3 Recomendaciones prácticas**

La presente investigación ha permitido identificar las siguientes recomendaciones prácticas con respecto al modelo exacto y a las heurísticas:

- Si se quiere resolver el problema con algoritmos exactos, encontrar cortes válidos para la modelación puede traer grandes beneficios en términos de *gap* de optimalidad sin costo operacional adicional. Esto se extiende a que las variables y tipos de restricciones implementadas en el modelo requieren análisis y refinación, con el fin de que la relajación lineal del modelo otorgue mejores cotas inferiores.

- Implementar heurísticas para mejorar la convergencia del *solver* es una buena estrategia para mejorar las soluciones consistentemente. Sin embargo, existe un límite, ya que se puede tener una solución óptima pero el algoritmo no es capaz de probar optimalidad. Para esto se requiere crear un algoritmo exacto eficiente dedicado a este problema.

Con respecto a la implementación de buses de acercamiento al trabajo y el sistema troncal alimentador, se tienen las siguientes recomendaciones:

- Si se quiere implementar un sistema de buses de acercamiento se debe tener en cuenta que, para el mismo número de trabajadores, un sistema de vehículos de menor capacidad parece ser preferible cuando la planta se encuentra en el centro de la ciudad. A medida que se aleja la planta de la ciudad, vehículos de mayor capacidad son requeridos y el sistema T&F se hace más atractivo.
- Por otro lado, si se quiere evaluar la implementación de un esquema troncal y alimentador en el sistema de buses de acercamiento al trabajo, hay que considerar que, si los costos de implementar un sistema puro con vehículos de alta capacidad son similares a los de implementar uno con vehículos de menor capacidad, entonces puede ser conveniente implementar un sistema que permita transbordos entre los dos tipos de vehículos en un esquema de troncales y alimentadores. Para realizar una evaluación preliminar se pueden utilizar las herramientas descritas en el capítulo 4.4 para determinar si conviene o no realizar una evaluación más detallada. Si bien el modelo es simplificado e idealista, esto implica que, si en las condiciones ideales no conviene implementar el sistema, es muy probable que no convenga en una situación real.

#### **5.4 Limitaciones de la investigación**

El modelo considera un caso ideal en que las distancias son euclidianas, los tiempos son determinísticos, los transbordos están perfectamente coordinados y los vehículos sirven a una sola ruta. En la realidad esto no es así, y pueden existir costos adicionales por operar con transbordos, como costos de logística de coordinación. Sin embargo, estos costos podrían ser parcialmente capturados en los costos fijos que impone el tercero que provee el servicio. Por esta razón, no debería afectar considerablemente la comparación entre sistemas en costos operacionales, debido a que son previamente fijados por el operador. Pero sí afecta el nivel de servicio percibido por las personas. En este contexto, la variabilidad en los tiempos de transbordo puede producir que el sistema de troncales y alimentadores tenga mayores tiempos adicionales de viaje que un sistema con solo troncales. No obstante, hay un factor no evaluado en la modelación que es la comodidad de los trabajadores, en que un sistema troncal y alimentador puede ser percibido mejor que un sistema de solo troncales si los viajes en troncal son largos y el acceso a estos servicios fuera costoso (es poco práctico pasar a buscar muchos pasajeros a sus casas en un troncal). Hay que tener especial cuidado con este fenómeno, ya que si existe un vehículo alimentador que lleva a una persona desde su hogar a un bus para ir al trabajo, puede que ella perciba esta situación como un mejor servicio que su alternativa de acceder al bus por sus propios medios. Pero esta percepción se puede perder si el alimentador no está coordinado con el troncal, y los tiempos de viaje de la persona son muchos más extensos que antes de implementar los alimentadores. Este fenómeno debe ser debidamente estudiado y evaluado. Para futuros análisis es posible agregar una penalidad por cada transbordo realizado, lo que también se puede utilizar para capturar los costos adicionales por transbordo del sistema.

Con respecto a los experimentos, un aspecto interesante para evaluar en futuras investigaciones sería considerar combinaciones de vehículos con distintas capacidades a las estudiadas. Por otra parte, los accesos a los paraderos se consideraron como caminatas

con un costo de acceso proporcional a la distancia. En la realidad, una persona puede acceder al paradero a través del transporte público, en vehículo particular, taxi, u otro modo de transporte, lo que implica que asumir caminata puede sobreestimar los costos de acceso cuando la distancia aumenta. De cualquier forma, un sistema de buses de acercamiento mejora su nivel de servicio si estos accesos se hacen más cortos, y bajo el esquema de caminatas, los accesos tienen una mayor penalización que el tiempo en los vehículos. Sin embargo, un análisis de la influencia de estos modos es interesante de realizar. Por otro lado, el análisis multifactorial de sensibilidad de los parámetros se hizo solo sobre instancias de 50 trabajadores. Esto debido a que el modelo y las heurísticas lograron resolver a optimalidad instancias de hasta 75 trabajadores. Para instancias más grandes no se pudo obtener soluciones óptimas. A pesar de esto, se pudo evaluar la obtención de beneficios de un sistema T&F en las instancias grandes gracias a la comparación con las cotas inferiores otorgadas por el *solver*.

Otra limitación es que la estructura de costos analizada en esta investigación se basa en que el operador define los costos fijos y variables de los vehículos, en los cuales se incluyen los costos de flota, administración y logística. Dependiendo del tipo de contrato, la estructura de costos puede cambiar, por ejemplo, que solo se incluyan costos variables o que la logística de coordinación y sus costos sean responsabilidad de la empresa. Esto puede cambiar el nivel de utilización del sistema T&F, y este efecto no es analizado en la investigación.

Por último, las herramientas de predicción ayudan a tener una referencia de cuándo es conveniente evaluar la implementación de un sistema troncal y alimentador. El cuánto conviene sobre otros sistemas depende de las opciones que estén disponibles, ya que los experimentos realizados contemplaron tres opciones: dos sistemas puros y un sistema combinado.

## 5.5 Líneas futuras de investigación

Considerando las conclusiones y limitaciones de esta tesis, es importante seguir desarrollando investigaciones que amplíen el alcance de esta investigación. Con respecto a los algoritmos de solución y modelos, se propone mejorar las heurísticas presentadas en esta tesis e implementar otras metaheurísticas para solucionar este problema y mejorar el rendimiento del algoritmo exacto. Esto con el fin de que se puedan resolver instancias más grandes y se puedan evaluar escenarios más difíciles de resolver. Además, es importante desarrollar, implementar y analizar modelos que apunten a implementar factores no contemplados en el presentado en esta tesis, como: la variabilidad en los tiempos de viaje, la variabilidad en los tiempos transbordo, la reutilización de la flota, distintos modos de acceso a los paraderos, distintas estructuras de costos, más de un lugar de destino, entre otros. Otra línea de investigación relevante es validar la implementación de las herramientas presentadas en esta tesis en casos reales, para probar su efectividad y alcance. Además, se propone la investigación y desarrollo de herramientas de aproximación (por ejemplo, continua) de los costos óptimos del sistema troncal y alimentador, las que podrían ser validadas con el modelo desarrollado en esta tesis.

En conclusión, esta investigación ayudó a determinar cuándo es conveniente analizar la implementación de un sistema de troncales y alimentadores en un problema de buses de acercamiento al trabajo. Se identificó que es conveniente cuando la planta está en la periferia o fuera de la ciudad y cuando el costo operacional de implementar un sistema puro de solo troncales es similar al costo de implementar un sistema puro de solo alimentadores. Esta última es una de las conclusiones más importantes de esta investigación, porque comprueba un hecho que podría ser intuitivo, pero no necesariamente probado.

A pesar de que esto está enfocado en reducir los costos operacionales de una empresa privada, hacer más atractivo un sistema de buses de acercamiento puede influir en el modo en que las personas se transportan a su trabajo. Si un sistema de este tipo es utilizado por varias empresas, esto puede impactar en la disminución de la congestión en las calles. Esto último se debe a que el sistema de troncales y alimentadores es un medio de transporte más eficiente en la utilización del espacio vial en comparación con un vehículo particular en el que solo hay una persona a bordo. Si este sistema se refuerza con la implementación de flotas de vehículos eléctricos, ayudará también a la descontaminación del aire en la ciudad, lo que haría una implementación como esta amigable con el medio ambiente. Además, podría ayudar a la descongestión del transporte público, sistema que en Santiago y muchas ciudades del mundo ya se encuentra saturado en las horas punta. Por otro lado, mejorar los viajes de los trabajadores puede impactar positivamente en su bienestar y en el rendimiento en su trabajo. Esto es muy importante, porque las personas son la base de la sociedad y crear medidas que ayuden en su bienestar físico y mental, así también como en el medio ambiente, ayuda a desarrollar un país productivo, sustentable y agradable para vivir.

## BIBLIOGRAFÍA

Amable Álvarez, I., Méndez Martínez, J., Bello Rodríguez, B. M., Benítez Fuentes, B., Escobar Blanco, L. M., & Zamora Monzón, R. (2017). Influencia de los contaminantes atmosféricos sobre la salud. *Revista Médica Electrónica*.

Beasley, J. (2018). *OR-Library*. Recuperado del sitio de Internet de Brunel University London: <http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/info.html>

Bertsimas, D., Delarue, A., & Martin, S. (2019). Optimizing schools' start time and bus routes. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. <https://doi.org/10.1073/pnas.1811462116>

Bögl, M., Doerner, K. F., & Parragh, S. N. (2015). The school bus routing and scheduling problem with transfers. *Networks*. <https://doi.org/10.1002/net.21589>

Bowerman, R., Hall, B., & Calamai, P. (1995). A multi-objective optimization approach to urban school bus routing: Formulation and solution method. *Transportation Research Part A*, 29(2), 107–123. [https://doi.org/10.1016/0965-8564\(94\)E0006-U](https://doi.org/10.1016/0965-8564(94)E0006-U)

Caceres, H., Batta, R., & He, Q. (2019). Special need students school bus routing: Consideration for mixed load and heterogeneous fleet. *Socio-Economic Planning Sciences*. <https://doi.org/10.1016/j.seps.2018.02.008>

Cárdenas, R., & Fernández, O. (2019, mayo 7). Santiaguinos registran tiempos de viaje de hasta dos horas cada mañana - La Tercera. *La Tercera*. Recuperado de <https://www.latercera.com/nacional/noticia/santiaguinos-registran-tiempos-viaje-dos-horas-manana/646087/>

Choi, J., Coughlin, J., & D'Ambrosio, L. (2013). Travel time and subjective well-being. *Transportation Research Record*, (2357), 100–108. <https://doi.org/10.3141/2357-12>

Clarke, G., & Wright, J. W. (1964). Scheduling of Vehicles from a Central Depot to a Number of Delivery Points. *Operations Research*. <https://doi.org/10.1287/opre.12.4.568>

Contardo, C., Hemmelmayr, V., & Crainic, T. G. (2012). Lower and upper bounds for the

two-echelon capacitated location-routing problem. *Computers and Operations Research*, 39(12), 3185–3199. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2012.04.003>

Cuda, R., Guastaroba, G., & Speranza, M. G. (2015). A survey on two-echelon routing problems. *Computers and Operations Research*, 55, 185–199. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2014.06.008>

Ellegood, W. A., Solomon, S., North, J., & Campbell, J. F. (2019). School bus routing problem: Contemporary trends and research directions. *Omega (United Kingdom)*, (xxxx). <https://doi.org/10.1016/j.omega.2019.03.014>

Gschwender, A., Jara-díaz, S., & Bravo, C. (2016). Feeder-trunk or direct lines? Economies of density, transfer costs and transit structure in an urban context. *Transportation Research Part A*, 88, 209–222. <https://doi.org/10.1016/j.tra.2016.03.001>

Gurobi Optimization Inc. (2019). Gurobi Optimizer Reference Manual. *Www.Gurobi.Com*.

HEC Montreal (s.f.). Chaire de recherche du Canada en distributique. Recuperado del sitio de Internet de *HEC Montreal*: <http://neumann.hec.ca/chairedistributique/data/>

Helsgaun, K. (2009). General k-opt submoves for the Lin-Kernighan TSP heuristic. *Mathematical Programming Computation*. <https://doi.org/10.1007/s12532-009-0004-6>

Kang, M., Kim, S. K., Felan, J. T., Choi, H. R., & Cho, M. (2015). Development of a genetic algorithm for the school bus routing problem. *International Journal of Software Engineering and its Applications*, 9(5), 107–126. <https://doi.org/10.14257/ijseia.2015.9.5.11>

Kinable, J., Spieksma, F. C. R., & Vanden Berghe, G. (2014). School bus routing—a column generation approach. *International Transactions in Operational Research*. <https://doi.org/10.1111/itor.12080>

Kumar, Y., & Jain, S. (2016). School bus routing based on branch and bound approach. *IEEE International Conference on Computer Communication and Control, IC4 2015*. <https://doi.org/10.1109/IC4.2015.7375684>

- Laporte, G. (1988). Location-routing problems In *Vehicle Routing: Methods and Studies*, BL Golden and AA Assad.
- Li, L. Y. O., & Fu, Z. (2002). The school bus routing problem: A case study. *Journal of the Operational Research Society*. <https://doi.org/10.1057/palgrave.jors.2601341>
- Minería Chilena. (2019). Traslado de trabajadores mineros: un servicio complejo y con diversas aristas. Recuperado 28 de enero de 2021, de <https://www.mch.cl/2019/03/19/traslado-trabajadores-mineros-servicio-complejo-diversas-aristas/>
- Ministerio de Desarrollo Social y Familia de Chile. (2020). *Precios Sociales 2020*.
- Park, J., & Kim, B. I. (2010). The school bus routing problem: A review. *European Journal of Operational Research*. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2009.05.017>
- Perugia, A., Moccia, L., Cordeau, J. F., & Laporte, G. (2011). Designing a home-to-work bus service in a metropolitan area. *Transportation Research Part B: Methodological*. <https://doi.org/10.1016/j.trb.2011.05.025>
- Ponce, M., Van Zon, R., Northrup, S., Gruner, D., Chen, J., Ertinaz, F., ... Peltier, W. R. (2019). Deploying a top-100 supercomputer for large parallel workloads: The Niagara supercomputer. *ACM International Conference Proceeding Series*. <https://doi.org/10.1145/3332186.3332195>
- Riera-Ledesma, J., & Salazar-González, J. J. (2012). Solving school bus routing using the multiple vehicle traveling purchaser problem: A branch-and-cut approach. *Computers and Operations Research*, 39(2), 391–404. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2011.04.015>
- Robust, F., Daganzo, C. F., & Souleyrette, R. R. (1990). Implementing vehicle routing models. *Transportation Research Part B*, 24(4), 263–286. [https://doi.org/10.1016/0191-2615\(90\)90002-G](https://doi.org/10.1016/0191-2615(90)90002-G)
- Savas, E. S. (1978). On Equity in Providing Public Services. *Management Science*, 24(8), 800–808. <https://doi.org/10.1287/mnsc.24.8.800>

Sivakumaran, K., Li, Y., Cassidy, M. J., & Madanat, S. (2012). Cost-saving properties of schedule coordination in a simple trunk-and-feeder transit system. *Transportation Research Part A*, 46(1), 131–139. <https://doi.org/10.1016/j.tra.2011.09.013>

Spada, M., Bierlaire, M., & Liebling, T. M. (2005). Decision-aiding methodology for the school bus routing and scheduling problem. *Transportation Science*, 39(4), 477–490. <https://doi.org/10.1287/trsc.1040.0096>

Steinley, D. (2006). K-means clustering: A half-century synthesis. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*. <https://doi.org/10.1348/000711005X48266>

Warr, P., & Nielsen, K. (2018). Wellbeing and work performance. *Handbook of well-being*.

Yeo, I. N. K., & Johnson, R. A. (2000). A new family of power transformations to improve normality or symmetry. *Biometrika*. <https://doi.org/10.1093/biomet/87.4.954>

**ANEXOS**

## ANEXO A. Pseudocódigo de la heurística de construcción de solución inicial

El siguiente pseudocódigo representa la lógica detrás de la heurística de construcción de solución.

- Paso 0. Recibe los paraderos de troncal disponibles  $i \in N: p_i^b = 1$ .
- Paso 1. Se agrupan los paraderos disponibles con el método de las k-medias (Steinley, 2006), definiendo zonas a servir por un troncal, de forma que ningún grupo supere la capacidad máxima de un bus.
- Paso 2. Se construye la ruta del troncal para cada grupo con la heurística del vecino más cercano.
- Paso 3. Se realizan movidas de mejoras 2-opt dentro de las rutas y entre las rutas, respetando las restricciones de capacidad y tiempo.
- Paso 4. Se elige un nodo en la solución parcial actual que no es visitado por ningún vehículo, es decir, un nodo  $j \in N: p_j^u = 0, \forall u \in U$ . Luego se hace una lista con los paraderos que sí son visitados por algún vehículo, es decir,  $i \in N: \exists u \in U | p_i^u = 1$ , a la cual se le agrega el nodo  $d$ . Se ordena esta lista de nodos desde el más cercano al más lejano.
- Paso 5. Se evalúa la factibilidad de conectar el nodo no visitado  $j$  a un nodo visitado  $i$  con un arco de caminata. En caso positivo se agrega el arco de caminata y se sigue al siguiente nodo  $j$  en el Paso 4. En caso contrario, se evalúa la factibilidad de conectar con un arco de alimentador, si es factible, se agrega el arco de alimentador y este nodo  $j$  a la lista de candidatos para conectar y se continúa con el siguiente nodo  $j$  en el Paso 4. En el caso de que no sea factible ninguna opción, se sigue al siguiente candidato  $i$  hasta que se encuentre alguna conexión factible, para luego continuar con el siguiente nodo  $j$  en el Paso 4.
- Paso 6. Una vez que todos los nodos están conectados y se tenga una solución factible, se hace una mejora de las rutas de alimentador y caminatas con la búsqueda local de alimentadores.
- Paso 7. Se entrega la solución y los costos de esta.

## ANEXO B. Pseudocódigo de la heurística de búsqueda local de alimentadores

La búsqueda local de alimentadores permite explorar nuevas soluciones para el problema troncal y alimentador.

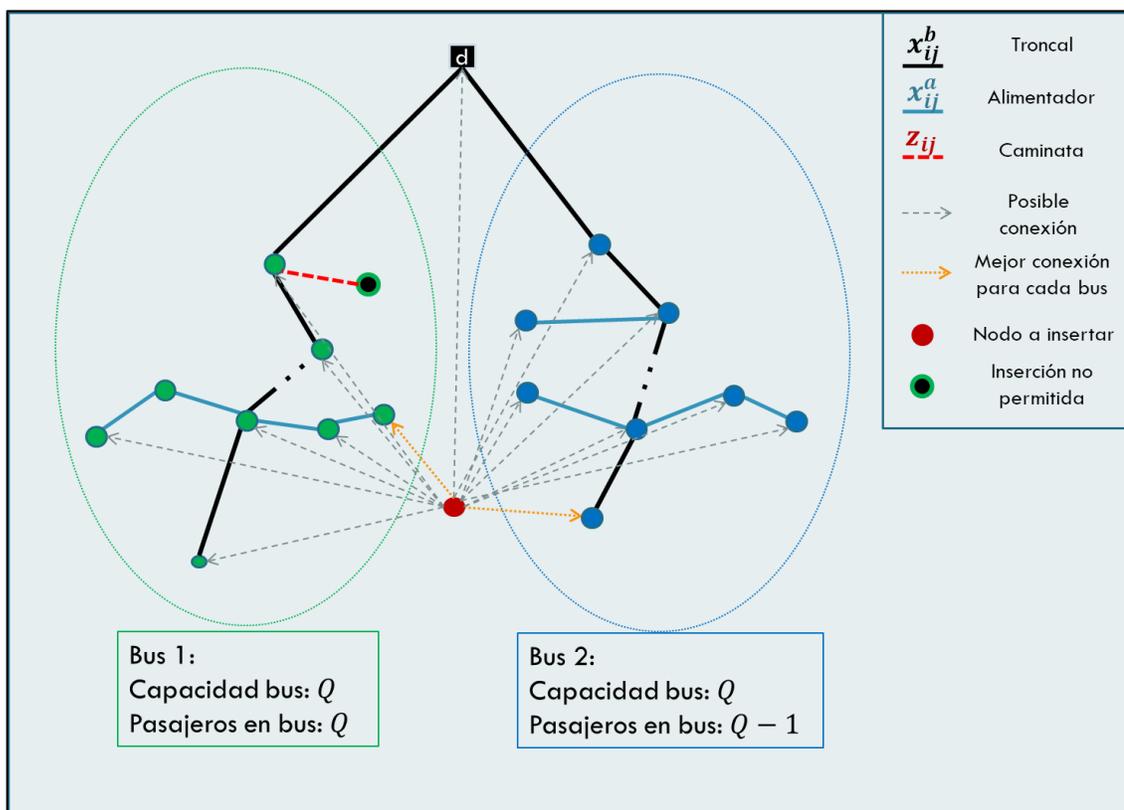


Figura 0-1. Ejemplo inserción de nodo en búsqueda local de alimentadores.

Fuente: elaboración propia.

La lógica detrás del módulo de inserción de la búsqueda local de alimentadores se muestra a continuación.

- *Paso 0.* A partir de la solución actual definir zonas donde cada una corresponde a un bus, sus alimentadores y caminatas. Se define una zona aparte,  $m_d$ , para los

alimentadores y caminatas que conectan directo con el nodo  $d$ . En la se muestra Figura 0-1 la zonificación en círculos de colores.

- *Paso 1.* Se elige un nodo que sea paradero de alimentador o una caminata,  $i \in N: p_i^b \neq 1$ , se eliminan los arcos que lo conectan y se evalúa la inserción a una zona  $m \in Z$ , en la cual se ordenan los candidatos  $j \in m: z_{jh} \neq 1 \forall h \in m$ , desde el más cercano a  $i$ , al más lejano.
- *Paso 2.* Se evalúa la conexión en términos factibilidad en tiempo y capacidad del alimentador, si corresponde, pero la capacidad del troncal se deja irrestricta. Si solo una de las opciones es factible, caminata o inserción en ruta, se escoge inmediatamente esta. En caso contrario, se procede a evaluar el costo de insertarlo como caminata y el de insertarlo en una ruta de alimentador, se elige el de menor costo. Si existen nodos de caminata conectados originalmente al nodo  $i$ , estos se añaden a los próximos nodos a insertar y provisoriamente se conectan estos nodos al nodo  $d$  con un arco de alimentador. Se reconstruyen las rutas cortadas y se avanza al *Paso 3*. En caso de que no sea factible una conexión a  $j$ , se evalúa el siguiente nodo en la lista y se vuelve a realizar este paso.
- *Paso 3.* Se repite el *Paso 1* y *Paso 2* para el mismo  $i$  y se evalúan todas las zonas  $m \in M$ . Una vez evaluadas se escoge la mejor inserción para el nodo  $i$  en alguna zona  $m \in Z$ . En la Figura 0-1 se muestran las posibles conexiones por zonas con arcos grises y punteados, y en naranja se muestran las mejores conexiones por zona, de las cuales se escoge solo una.
- *Paso 4.* Se repite del Paso 1 al Paso 3 para todos los nodos  $i \in N: p_i^b \neq 1$ .
- *Paso 5.* Se evalúa si existen zonas con exceso de capacidad, si existen se pasa al *Paso 6*, en caso contrario, se realiza el *Paso 7*.
- *Paso 6.* Se rectifican la solución si es infactible. Para cada zona  $m \in Z: m \neq m_d, \sum_{i \in m} q_i > Q^b$ , es decir, que exceda la capacidad de troncal, se fuerza a sacar nodos e insertarlos a otra zona distinta que tenga capacidad. Esto se realiza con el mismo método del *Paso 1* y *Paso 2*, solo que esta vez se escogen los nodos a

extraer de la zona con sobrecarga y se insertan en zonas con capacidad remanente. Se redistribuye la carga hasta que se encuentre una solución factible.

- *Paso 7.* Se entrega la solución factible encontrada.

Un aspecto para considerar de este algoritmo es que permite movidas a soluciones no factibles en capacidad de troncal, que en pruebas preliminares consiguió mejores resultados que solo permitir movidas factibles. Otro aspecto es el de la zonificación, esta tiene dos objetivos en la ejecución de la heurística que justifican su existencia. El primero, poder redistribuir la carga sobrante de los buses entre zonas con el mismo algoritmo. Y el segundo, disminuir el tiempo de ejecución por cada zona, ya que al encontrar una inserción conveniente deja de explorar y pasa a la siguiente zona para tener al menos una opción evaluada por cada una.

## ANEXO C. Obtención de los cortes para la modelación

### C.1 Corte 1

El corte 1 es el siguiente:

$$z_{ij} + z_{ji} + \sum_{u \in U} (x_{ij}^u + x_{ji}^u) \leq 1, \quad \forall i \in N, j \in N, i \neq j \quad (0-1)$$

Este corte implica que solo puede existir un arco que conecte cualquier par de nodos. Para el problema entero, esta situación se deriva de las restricciones del problema, pero para el problema relajado algunas de estas restricciones no se activan, lo que permite soluciones en que este corte no es respetado.

En el problema entero, las restricciones de seguimiento de tiempo (3-12) y (3-13) impiden la formación de ciclos, ya que si existe un ciclo de la forma  $z_{ij} = 1$  y  $z_{ji} = 1$  para algún par  $(i, j) \in A_c$  con  $i \neq j$ , entonces tiene que cumplirse que:

$$T_j + \tau_{ij} - T_i \leq 0 \quad (0-2)$$

$$T_i + \tau_{ji} - T_j \leq 0 \quad (0-3)$$

Si se suman las ecuaciones (0-2) y (0-3), se tiene:

$$\tau_{ij} + \tau_{ji} \leq 0 \quad (0-4)$$

Esta situación no se puede dar si los nodos  $(i, j)$  poseen distinta posición, puesto que el tiempo de caminata es un parámetro mayor a cero. Pero en el problema relajado, el lado derecho de las restricciones de tiempo tiene un valor mayor a cero, debido a que los valores  $z_{ij}$  y  $z_{ji}$  están entre 0 y 1, entonces la ecuación (0-4) quedaría:

$$\tau_{ij} + \tau_{ji} \leq (1 - z_{ij}) \cdot (T_j^{Max} + \tau_{ij} - t_{id}) + (1 - z_{ji}) \cdot (T_i^{Max} + \tau_{ji} - t_{jd}) \quad (0-5)$$

El cumplimiento de la ecuación (0-5) depende de los valores de las variables, entonces, la restricción de tiempo (3-12) podría no activarse, lo que permite ciclos entre dos arcos, es decir, que la suma de  $z_{ij} + z_{ji} > 1$ . Esto es análogo para las variables  $x_{ij}^u$  y la restricción (3-13), también para cualquier combinación de las variables  $z$  y  $x$ , debido a que ambas familias de variables utilizan las mismas variables de tiempo. Por lo tanto, los cortes podrían ser:

$$z_{ij} + z_{ji} \leq 1, \quad \forall (i, j) \in A_c, i \neq j \quad (0-6)$$

$$x_{ij}^a + x_{ji}^a \leq 1, \quad \forall i \in N, j \in N, i \neq j \quad (0-7)$$

$$x_{ij}^b + x_{ji}^b \leq 1, \quad \forall i \in N, j \in N, i \neq j \quad (0-8)$$

$$x_{ij}^b + x_{ji}^a \leq 1, \quad \forall i \in N, j \in N, i \neq j \quad (0-9)$$

$$z_{ij} + x_{ji}^b \leq 1, \quad \forall i \in N, j \in N, i \neq j \quad (0-10)$$

$$z_{ij} + x_{ji}^a \leq 1, \quad \forall i \in N, j \in N, i \neq j \quad (0-11)$$

Por otro lado, en el problema entero, la restricción (3-8) y (3-9) impiden la formación de arcos paralelos entre caminatas y algún vehículo. La restricción (3-9) escrita sin la variable auxiliar sería como se muestra a continuación.

$$\sum_{u \in U} \sum_{j \in N \cup \{d\}} x_{ij}^u \leq z_{ii}, \quad \forall i \in N \quad (0-12)$$

Si entre dos nodos  $(i, j) \in A_c$  con  $i \neq j$  se da la situación  $z_{ij} = x_{ij}^u = 1$ , para algún vehículo  $u \in U$ , la ecuación anterior forzaría a la variable  $z_{ii}$  a tomar el valor de 1, pero según la restricción (3-8), que se muestra a continuación, esto no podría ser debido a que  $z_{ij}$  y  $z_{ii}$  no puede tener valor al mismo tiempo si  $i \neq j$ .

$$\sum_{j \in N \cup \{d\}} z_{ij} = 1, \quad \forall i \in N \quad (0-13)$$

La restricción (3-9) también implica que dos vehículos de distinto tipo no pueden tener el mismo origen, es decir, en la solución entera no puede haber arcos paralelos. Por lo tanto, se tienen los siguientes cortes:

$$z_{ij} + x_{ij}^u \leq 1, \quad \forall (i, j) \in A_c, i \neq j, u \in U \quad (0-14)$$

$$x_{ij}^b + x_{ij}^a \leq 1, \quad \forall i \in N, j \in N, i \neq j \quad (0-15)$$

Juntando estos cortes con los anteriores descritos se puede concluir un corte más restrictivo que aplique de igual forma, de aquí deriva el corte 1.

## C.2 Corte 2

Se puede formular un caso más genérico del corte 1 si se toma un conjunto de  $S \subseteq N$  nodos y si se considera que solo pueden existir  $|S| - 1$  arcos que conecten estos nodos sin formar un ciclo, esto considera todos los tipos de arcos, caminata, troncal y alimentador. De esta manera se obtiene una formulación similar a la restricción de eliminación de ciclos de un problema de ruteo de vehículos.

$$\sum_{i \in S, j \in S, i \neq j} (z_{ij} + x_{ij}^a + x_{ij}^b) \leq |S| - 1, \quad \forall S \subseteq N, 2 \leq |S| \quad (0-16)$$

Cabe destacar que el corte 1 es un caso particular del corte 2 cuando  $|S| = 2$ , pero se trata de manera diferente porque este último genera un número combinatorial de restricciones, por lo que no es conveniente implementarlo como restricción. En cambio, el corte 1 agrega

una cantidad manejable de restricciones y puede implementarse directamente a la modelación del problema. Este corte se implementó al problema a través de *callback*.

### C.3 Corte 3

El corte 3 nace como una forma de ligar el valor de los arcos dentro de la solución y el número de vehículos que se generan desde el nodo ficticio  $o$  en la solución del problema relajado. Al considerar la solución entera, el máximo número de arcos que puede recorrer un vehículo desde el inicio de su recorrido hasta la planta es igual a su capacidad, que se da en el caso de que en cada parada recoja solo un pasajero. Esto se representa matemáticamente como:

$$\sum_{(i,j) \in A, i \neq o} x_{ij}^u \leq \sum_{i \in N} x_{oi}^u \cdot Q^u, \quad \forall u \in U \quad (0-17)$$

En la solución entera esta relación se da por la integralidad, continuidad y por la capacidad máxima del vehículo. Pero en la solución fraccionaria puede que, debido a los costos, los vehículos se generen por ciclos y no desde el nodo  $o$ . Es decir, un vehículo es incentivado a generarse en un nodo y luego volver al mismo si es menos costoso que generarse desde el nodo  $o$ , lo que sucede si se da la siguiente relación:

$$x_{ij}^u \cdot d_{ij} \cdot c_v^u \leq x_{oj}^u \cdot c_F^u \quad (0-18)$$

Entonces, que se den este tipo de casos depende de la estructura de costos, y como estos casos alejan el valor de la solución óptima relajada de la solución entera óptima, la estructura de costos podría tener influencia en la eficiencia de un algoritmo de solución basado en *Branch & Bound*, o al menos en su *gap* inicial.

Por lo tanto, el corte 3 fuerza a que un mayor porcentaje de los vehículos fraccionales se genere en el nodo  $o$ , lo que aumenta el costo de la solución y, en consecuencia, acerca la solución del problema relajado al entero.

#### C.4 Corte 4

Con respecto al corte 4, este se origina como una forma de encontrar una cota máxima del flujo de pasajeros relacionada con otras variables del problema, de manera que no afecte la solución óptima del problema original pero sí corte alguna solución del problema relajado. El corte es el siguiente:

$$\sum_{(i,j) \in A, i \neq o} f_{ij} \leq \sum_{u \in U} \min \left\{ \frac{Q^u(Q^u + 1)}{2} \cdot \sum_{i \in N} x_{oi}^u, Q^u \cdot \sum_{(i,j) \in A, i \neq o} x_{ij}^u \right\} \quad (0-19)$$

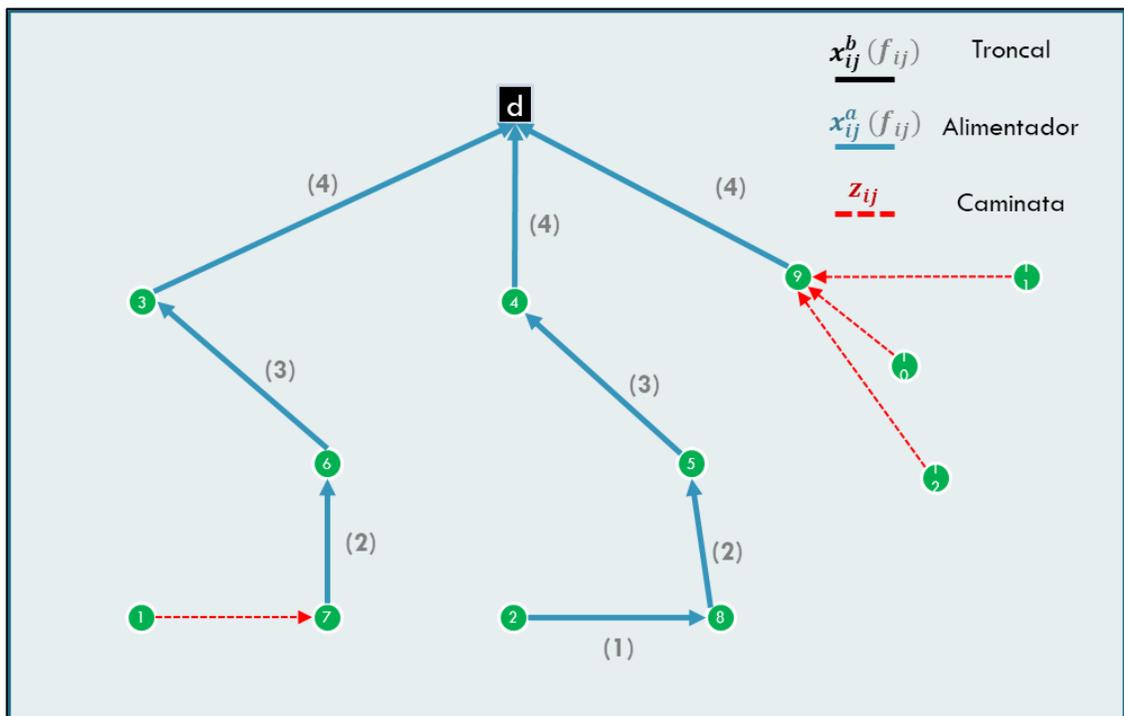


Figura 0-2. Ejemplo de solución del problema con solo alimentadores.

Fuente: elaboración propia.

En la Figura 0-2 se muestra un ejemplo de la solución de un problema entero, no necesariamente la óptima, para mostrar el razonamiento detrás de este corte. Se puede observar de la figura que el máximo número que puede sumar el flujo de pasajeros para un solo vehículo del tipo  $u \in U$  es:

$$\sum_{k=1}^{Q^u} k = \frac{Q^u(Q^u + 1)}{2} \quad (0-20)$$

En el ejemplo, como existe solo un tipo de vehículo en la solución, la relación con el flujo de esta expresión sería:

$$\sum_{(i,j) \in A, i \neq o} f_{ij} \leq \frac{Q^u(Q^u + 1)}{2} \cdot \sum_{i \in N} x_{oi}^u \quad (0-21)$$

Por otro lado, el máximo flujo que puede salir de un nodo es igual a la capacidad del vehículo que lo recorre,  $Q^u$ , por la restricción (3-11). Si se considera la solución del ejemplo, se puede agregar una cota al flujo, que sería:

$$\sum_{(i,j) \in A, i \neq o} f_{ij} \leq Q^u \cdot \sum_{(i,j) \in A, i \neq o} x_{ij}^u \quad (0-22)$$

Sin embargo, dependiendo del caso, la relación (0-21) podría aportar una mejor cota que la relación (0-22) o viceversa. En el ejemplo de la Figura 0-2, si se calcula el valor de estas cotas solo considerando la ruta de más a la derecha, y que la capacidad máxima de los vehículos es de cuatro pasajeros, se obtiene con la relación (0-21) una cota de 10 y con la relación (0-22) una cota de cuatro para la suma de los flujos de ese vehículo. Por otro lado,

si se considera la ruta del medio, se tiene una cota de 10 y 16 respectivamente. En el primer caso mencionado, la cota (0-22) era más cercana al flujo real, y en el segundo, la cota (0-21). Por lo tanto, la relación para este ejemplo sería:

$$\sum_{(i,j) \in A, i \neq o} f_{ij} \leq \min \left\{ \frac{Q^a(Q^a + 1)}{2} \cdot \sum_{i \in N} x_{oi}^a, Q^a \cdot \sum_{(i,j) \in A, i \neq o} x_{ij}^a \right\} \quad (0-23)$$

Y al considerar todos los tipos de vehículos se tiene:

$$\sum_{(i,j) \in A, i \neq o} f_{ij} \leq \sum_{u \in U} \min \left\{ \frac{Q^u(Q^u + 1)}{2} \cdot \sum_{i \in N} x_{oi}^u, Q^u \cdot \sum_{(i,j) \in A, i \neq o} x_{ij}^u \right\} \quad (0-24)$$

La cual no es una restricción lineal, pero se puede linealizar en cuatro restricciones:

$$\sum_{(i,j) \in A, i \neq o} f_{ij} \leq \sum_{u \in U} \frac{Q^u(Q^u + 1)}{2} \cdot \sum_{i \in N} x_{oi}^u \quad (0-25)$$

$$\sum_{(i,j) \in A, i \neq o} f_{ij} \leq \frac{Q^a(Q^a + 1)}{2} \cdot \sum_{i \in N} x_{oi}^a + Q^b \cdot \sum_{(i,j) \in A, i \neq o} x_{ij}^b \quad (0-26)$$

$$\sum_{(i,j) \in A, i \neq o} f_{ij} \leq Q^a \cdot \sum_{(i,j) \in A, i \neq o} x_{ij}^a + \frac{Q^b(Q^b + 1)}{2} \cdot \sum_{i \in N} x_{oi}^b \quad (0-27)$$

$$\sum_{(i,j) \in A, i \neq o} f_{ij} \leq \sum_{u \in U} Q^u \cdot \sum_{(i,j) \in A, i \neq o} x_{ij}^u \quad (0-28)$$

El corte (0-28) es equivalente a la suma de las restricciones (3-11), por lo tanto, no aporta información agregarlo. Por otro lado, el corte (0-25) se puede ajustar al considerar que por cada caminata existente se resta al menos una unidad de flujo de la suma total, de acuerdo con la lógica con la que se obtuvo la expresión (0-21). Por ejemplo, si se observa la ruta de la izquierda de la Figura 0-2, esta contiene una caminata, la cual resta a la suma del

flujo de la ruta una unidad, si la caminata fuera hacia el nodo siguiente restaría dos unidades, y al siguiente tres, por lo que el mínimo que resta es una unidad. Al considerar esto, el corte (0-25) quedaría:

$$\sum_{(i,j) \in A, i \neq o} f_{ij} \leq \sum_{u \in U} \frac{Q^u(Q^u + 1)}{2} \cdot \sum_{i \in N} x_{oi}^u - \sum_{i \in N, j \in N, i \neq j} z_{ij} \quad (0-29)$$

### C.5 Corte 5

Los cortes 5 y 6 están enfocados en mejorar la cota inferior de los tiempos adicionales en la solución, ya que en la solución del problema relajado las variables  $w_i$  toman valor cero, debido a que las restricciones de tiempo (3-12) y (3-13) no se activan, como se vio en el corte 1. El corte 5 es el siguiente:

$$\sum_{j \in N} \left( z_{ij} \cdot (\tau_{ij} + t_{jd}) + \sum_{u \in U} x_{ij}^u \cdot (t_{ij} + t_{jd}) \right) - t_{id} \cdot \left( 1 - z_{id} - \sum_{u \in U} x_{id}^u \right) \leq w_i, \forall i \in N \quad (0-30)$$

Este otorga una cota inferior para cada variable  $w_i$  con  $i \in N$ . Se basa en la situación en que un nodo  $i \in N$  se conecta directamente con algún nodo  $j \in N$ , ya sea a través de un vehículo o caminata, en que el tiempo adicional mínimo se da si es que luego el nodo  $j$  se conecta directamente al nodo  $d$ . En el ejemplo de la Figura 0-3, el valor del tiempo adicional del nodo 1 es  $t_{12} + t_{23} + t_{3d} - t_{1d}$ , y la cota inferior se da suponiendo que el nodo 2 va directamente al nodo  $d$ , el arco ficticio de la figura, lo que sería  $t_{12} + t_{2d} - t_{1d}$ . Esto es cierto siempre que se cumpla la desigualdad triangular:

$$t_{12} + t_{2d} - t_{1d} \leq t_{12} + t_{23} + t_{3d} - t_{1d} \quad (0-31)$$

$$t_{2d} \leq t_{23} + t_{3d} \quad (0-32)$$

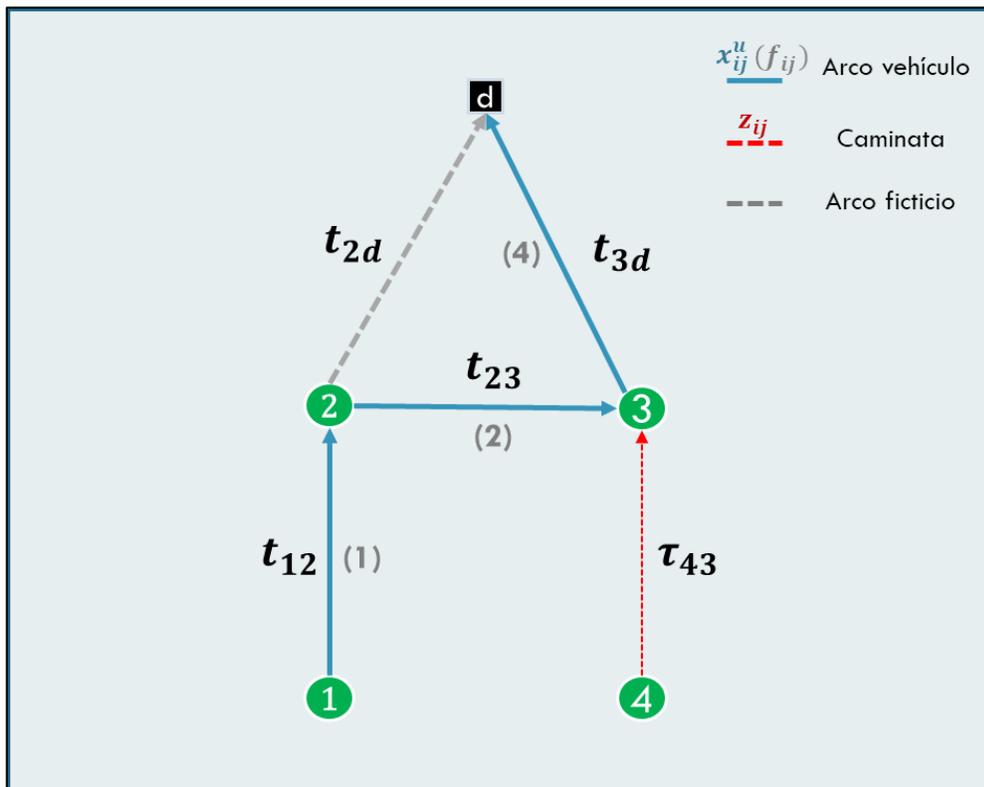


Figura 0-3. Ejemplo para explicar el corte de tiempo adicional.

Fuente: elaboración propia.

## C.6 Corte 6

El corte 6 es otra forma de expresar los tiempos adicionales totales, pero relacionado a otras variables de forma que en el problema relajado las variables de tiempo adicional tengan un valor mayor a cero. Si se considera que cada pasajero que utiliza un arco de vehículo  $(i, j) \in A$  incurre en el mismo tiempo  $t_{ij}$ , y que la cantidad de pasajeros que utilizan el arco es  $f_{ij}$ , entonces la suma de los tiempos en ese arco es de  $f_{ij} \cdot t_{ij}$ . Si el arco es de caminata, solo un pasajero viaja  $\tau_{ij}$ . Por lo tanto, el tiempo total se puede representar por:

$$\sum_{i \in N} T_i = \sum_{(i,j) \in A, i \neq o} (f_{ij} \cdot t_{ij} + z_{ij} \cdot \tau_{ij}) \quad (0-33)$$

Luego, si se le resta a cada término  $T_i$  el tiempo de viaje directo  $t_{id}$ , se obtienen los tiempos adicionales totales:

$$\sum_{i \in N} T_i - \sum_{i \in N} t_{id} = \sum_{(i,j) \in A, i \neq o} (f_{ij} \cdot t_{ij} + z_{ij} \cdot \tau_{ij}) - \sum_{i \in N} t_{id} = \sum_{i \in N} w_i \quad (0-34)$$

Por lo tanto, el corte 6 sería:

$$\sum_{(i,j) \in A, i \neq o} (f_{ij} \cdot t_{ij} + z_{ij} \cdot \tau_{ij}) - \sum_{i \in N} t_{id} \leq \sum_{i \in N} w_i \quad (0-35)$$

Esto se puede ver en el ejemplo de la Figura 0-3.

$$\sum_{i \in N} w_i = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 \quad (0-36)$$

$$\sum_{i \in N} w_i = (t_{12} + t_{23} + t_{3d} - t_{1d}) + (t_{23} + t_{3d} - t_{2d}) + (t_{3d} - t_{3d}) + (\tau_{43} + t_{3d} - t_{4d}) \quad (0-37)$$

$$\sum_{i \in N} w_i = 1 \cdot t_{12} + 2 \cdot t_{23} + 4 \cdot t_{3d} + \tau_{43} - t_{1d} - t_{2d} - t_{3d} - t_{4d} \quad (0-38)$$

$$\sum_{i \in N} w_i = f_{12} \cdot t_{12} + f_{23} \cdot t_{23} + f_{3d} \cdot t_{3d} + z_{43} \cdot \tau_{43} - t_{1d} - t_{2d} - t_{3d} - t_{4d} \quad (0-39)$$

$$\sum_{i \in N} w_i = \sum_{(i,j) \in A, i \neq o} (f_{ij} \cdot t_{ij} + z_{ij} \cdot \tau_{ij}) - \sum_{i \in N} t_{id} \quad (0-40)$$

Por lo tanto, el corte 6 es otra forma de expresar el término de los tiempos adicionales en la función objetivo relacionado con las variables de flujo, lo cual no aporta información

en el problema entero mixto, pero en el problema relajado ayuda a que el término de los tiempos adicionales en la función objetivo tenga un valor distinto de cero.

**ANEXO D. Ejemplo de aplicación de los cortes en una instancia**

En la Figura 0-4 se muestra una solución óptima del problema relajado de una instancia cuyos parámetros se encuentran en la Tabla 0-1, Tabla 0-2, Tabla 0-3 y Tabla 0-4. El valor de cada variable está en la Tabla 0-5, las variables que no aparecen en esta tabla tienen valor cero. La función objetivo de costos tiene un valor de 20,413, y la función objetivo de tiempo adicional tiene valor de cero. En esta solución se procesan previamente los arcos de caminata factibles de forma que  $A_c := \{(i, j): i \in N, j \in N \cup \{d\}, \tau_{ij} + t_{jd} \leq T_i^{Max}\}$ .

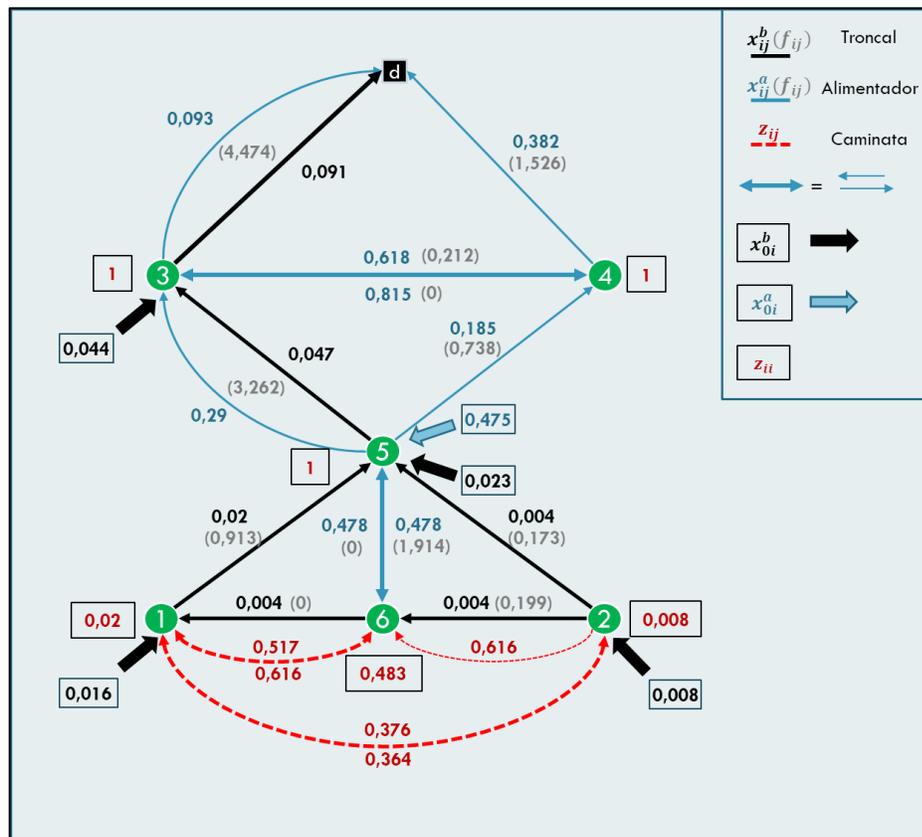


Figura 0-4. Solución de una instancia de la relajación lineal del problema.

Fuente: elaboración propia.

Tabla 0-1. Parámetros costo y capacidad del ejemplo de solución del problema de relajación lineal.

	<b>a</b>	<b>b</b>
<b><math>Q^u</math></b>	4	45
<b><math>c_f^u</math> (\$/veh)</b>	4	40
<b><math>c_v^u</math> (\$/km)</b>	1	4

Fuente: elaboración propia.

Tabla 0-2. Parámetros de tiempo de viaje del ejemplo de solución del problema de relajación lineal.

<b><math>t_{ij}</math> (min)</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>d</b>
<b>1</b>	0,0	1,5	16,5	16,6	7,5	1,1	24,8
<b>2</b>	1,5	0,0	16,6	16,5	7,5	1,1	24,8
<b>3</b>	16,5	16,6	0,0	1,5	9,0	15,8	8,3
<b>4</b>	16,6	16,5	1,5	0,0	9,0	15,8	8,3
<b>5</b>	7,5	7,5	9,0	9,0	0,0	6,8	17,3
<b>6</b>	1,1	1,1	15,8	15,8	6,8	0,0	24,0

Fuente: elaboración propia.

Tabla 0-3. Parámetros de tiempo de caminata del ejemplo de solución del problema de relajación lineal.

<b><math>\tau_{ij}</math> (min)</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>d</b>
<b>1</b>	0,0	12,0	132,0	132,5	60,3	8,5	198,1
<b>2</b>	12,0	0,0	132,5	132,0	60,3	8,5	198,1
<b>3</b>	132,0	132,5	0,0	12,0	72,2	126,1	66,3
<b>4</b>	132,5	132,0	12,0	0,0	72,2	126,1	66,3
<b>5</b>	60,3	60,3	72,2	72,2	0,0	54,0	138,0
<b>6</b>	8,5	8,5	126,1	126,1	54,0	0,0	192,0

Fuente: elaboración propia.

Tabla 0-4. Parámetros de distancia del ejemplo de solución del problema de relajación lineal.

$d_{ij}$ (km)	1	2	3	4	5	6	d
1	0,0	0,5	5,5	5,5	2,5	0,4	8,3
2	0,5	0,0	5,5	5,5	2,5	0,4	8,3
3	5,5	5,5	0,0	0,5	3,0	5,3	2,8
4	5,5	5,5	0,5	0,0	3,0	5,3	2,8
5	2,5	2,5	3,0	3,0	0,0	2,3	5,8
6	0,4	0,4	5,3	5,3	2,3	0,0	8,0

Fuente: elaboración propia.

Tabla 0-5. Valores de las variables del ejemplo de solución del problema de relajación lineal.

$z_{ij}$	Valor	$x_{ij}^a$	Valor	$x_{ij}^b$	Valor	$f_{ij}$	Valor	$w_i$	Valor	$T_i^{Max}$	Valor
(1, 1)	0,020	(0, 5)	0,475	(0, 1)	0,016	(1, 5)	0,913	1	0	1	37,1
(1, 2)	0,364	(3, 4)	0,815	(0, 2)	0,008	(2, 5)	0,173	2	0	2	37,1
(1, 6)	0,616	(3, d)	0,093	(0, 3)	0,044	(2, 6)	0,199	3	0	3	14,9
(2, 1)	0,376	(4, 3)	0,618	(0, 5)	0,023	(3, d)	4,474	4	0	4	14,9
(2, 2)	0,008	(4, d)	0,382	(1, 5)	0,020	(4, 3)	0,212	5	0	5	29,6
(2, 6)	0,616	(5, 3)	0,290	(2, 5)	0,004	(4, d)	1,526	6	0	6	36,4
(3, 3)	1,000	(5, 4)	0,185	(2, 6)	0,004	(5, 3)	3,262				
(4, 4)	1,000	(5, 6)	0,478	(3, 'd')	0,091	(5, 4)	0,738				
(5, 5)	1,000	(6, 5)	0,478	(5, 3)	0,047	(6, 5)	1,914				
(6, 1)	0,517			(6, 1)	0,004						
(6, 6)	0,483										

Fuente: elaboración propia.

Con estos datos se pueden aplicar algunas relaciones que cortan esta solución, lo que mejora el *gap* en una ejecución de *Branch & Bound*. El corte 1 aplicado es el siguiente:

$$z_{ij} + z_{ji} + \sum_{u \in U} (x_{ij}^u + x_{ji}^u) \leq 1, \quad \forall i \in N, j \in N, i \neq j. \quad (0-41)$$

De la solución mostrada en la Figura 0-4, se puede ver que entre los nodos 1 y 6 los arcos que conectan estos dos nodos suman 1,137, por lo tanto, el corte impuesto no permite que esta solución vuelva a aparecer.

El corte 2 es el siguiente:

$$\sum_{i \in S, j \in S, i \neq j} (z_{ij} + x_{ij}^a + x_{ij}^b) \leq |S| - 1, \quad \forall S \subseteq N, 2 \leq |S|. \quad (0-42)$$

Con los datos de la Figura 0-4 y al tomar  $S = \{1,5,6\}$ , se tiene que:

$$\sum_{i \in S, j \in S, i \neq j} (z_{ij} + x_{ij}^a + x_{ij}^b) \leq 2, \quad S = \{1,5,6\} \quad (0-43)$$

$$2,114 \not\leq 2, \quad S = \{1,5,6\}. \quad (0-44)$$

Por lo tanto, esta solución no volvería a aparecer.

El corte 3 es el siguiente:

$$\sum_{(i,j) \in A, i \neq 0} x_{ij}^u \leq \sum_{i \in N} x_{oi}^u \cdot Q^u, \quad \forall u \in U. \quad (0-45)$$

En el ejemplo, entre los nodos 5 y 6 el vehículo fraccional se genera del nodo 5 hacia el nodo 6, esto se ve en que la carga de 5 a 6 es cero y que del 6 al 5 el vehículo fraccional lleva pasajeros hacia el nodo 6. El corte 1 no restringe este tipo de ciclo porque la suma de los arcos entre 5 y 6 no suman más de la unidad. Este ciclo se forma debido a que el costo fijo de generar la fracción de vehículo desde  $o$  es mayor al costo variable de generarlo desde el nodo 5. Si se aplica la ecuación (0-24) al caso de los nodos 5 y 6 se tiene:

$$1,08 \leq 1,91. \quad (0-46)$$

En el ejemplo de la Figura 0-4, si se toman los valores de los arcos de vehículos alimentador, el lado izquierdo del corte 3 tomaría el valor de 3,341 y el lado derecho 1,9, por lo tanto, al agregar el corte esta solución no volvería a aparecer.

El corte 4 es el siguiente:

$$\sum_{(i,j) \in A, i \neq o} f_{ij} \leq \sum_{u \in U} \min \left\{ \frac{Q^u(Q^u + 1)}{2} \cdot \sum_{i \in N} x_{oi}^u, Q^u \cdot \sum_{(i,j) \in A, i \neq o} x_{ij}^u \right\}. \quad (0-47)$$

Si se aplica el corte 4 al ejemplo de la Figura 0-4, el lado izquierdo de este toma un valor de 13,441, y el lado derecho de 12,435, en consecuencia, esta solución sería cortada al agregarlo.

## ANEXO E. Pseudocódigo de la búsqueda de cortes

A continuación, se muestra el pseudocódigo de una búsqueda local de cortes, en la cual se pretende encontrar todos los cortes que infrinjan la siguiente relación en una solución de un problema lineal relajado:

$$\sum_{i \in S, j \in S, i \neq j} (z_{ij} + x_{ij}^a + x_{ij}^b) \leq |S| - 1, \quad \forall S \subseteq N, 2 \leq |S|. \quad (0-48)$$

Tabla 0-6. Pseudocódigo del proceso de Búsqueda de Cortes.

---

Proceso Búsqueda de Cortes

Input:  $x, z$ . Output: **cortes**

**NodosDistintos(arcos)**: Función que recibe un arreglo de arcos y retorna el conjunto de todos los nodos que aparecen en esos arcos sin repetición.

---

Inicialización:  $cortes = [ ]$ ,  $SUM = \{ \}$ :

**Para**  $(i, j) \in A, i \neq 0, j \neq d$ , si  $\sum_{u \in U} x_{ij}^u + x_{ji}^u + z_{ij} + z_{ji} > 0$ :

$SUM[i, j] \leftarrow \sum_{u \in U} x_{ij}^u + x_{ji}^u + z_{ij} + z_{ji}$

$Lista\_arcos \leftarrow [(i, j) \in SUM]$  Ordenados de mayor a menor valor de  $SUM[i, j]$

**Para**  $idx_1$  en los índices de la  $Lista\_arcos$ :

$idx_2 \leftarrow 0$

$(i, j) \leftarrow Lista\_arcos[idx_1]$

$valor \leftarrow SUM[i, j]$

$arcosAgregados \leftarrow [(i, j)]$

$buscar \leftarrow VERDADERO$

**Mientras**  $buscar$ :

**Si**  $idx_1 = idx_2$ :

$idx_2 \leftarrow idx_2 + 1$

**Si**  $idx_2 \geq |Lista\_arcos|$ :

**Salir del ciclo**

$(k, l) \leftarrow Lista\_arcos[idx_2]$

**Si**  $k \in (i, j) \vee l \in (i, j)$ :

$valor \leftarrow valor + SUM[k, l]$

$arcosAgregados.agregar((k, l))$

$n_c \leftarrow NodosDistintos(arcosAgregados)$

$(i, j) \leftarrow (k, l)$

**Si**  $valor > |n_c| - 1$ :

$cortes.agregar(n_c)$

$buscar \leftarrow FALSO$

$idx_2 \leftarrow idx_2 + 1$

**Siguiente**  $idx_1$

Return **cortes**

---

Fuente: elaboración propia.

Esta función genera una variable  $SUM_{ij} = \sum_{u \in U} x_{ij}^u + x_{ji}^u + z_{ij} + z_{ji}$  para  $(i, j) \in A, i \neq 0, j \neq d, i < j$ , lo que en palabras es la suma de las variables  $x$  y  $z$  entre dos nodos, independiente de la direccionalidad. En la Figura 0-5 se muestra un ejemplo de una solución del problema de relajación lineal, en el cual cada arco representa la variable  $SUM_{ij}$ . Primero, se ordenan estos arcos de mayor a menor valor, como se muestra en la Tabla 0-7, de acuerdo con el ejemplo. Luego, se selecciona el arco de mayor valor y se busca lista abajo algún arco que tenga algún nodo en común con el nodo seleccionado. Si se encuentra alguno, se verifica si la suma de estos arcos infringe la condición del corte, y si esto ocurre, se agregan los nodos involucrados a un arreglo. En caso de que no infrinja la condición de corte, se busca lista abajo si hay nodos en común con el último arco revisado partiendo desde este, y en caso de encontrar alguno se verifica la condición de corte con todos los arcos encontrados. Esto se realiza iterativamente hasta agotar la lista. Posterior a esto, se comienza de nuevo con el segundo arco de mayor valor, y se repite el proceso hasta agotar la lista.

En el caso del ejemplo de la Tabla 0-7, los cortes encontrados estarían conformados por el conjunto de nodos  $S \in \{[1, 5, 6], [1, 2, 5, 6]\}$ , con los cuales se agrega la restricción de corte 2 por medio del *callback*. Cabe mencionar que en el ejemplo de la Tabla 0-7 se dan casos donde  $|S| = 2$ , tales como  $[3, 4]$  y  $[1, 6]$ , los cuales no aparecen si se agrega antes el corte 1, pero se usa este ejemplo en forma de ilustración del funcionamiento de la búsqueda de cortes.

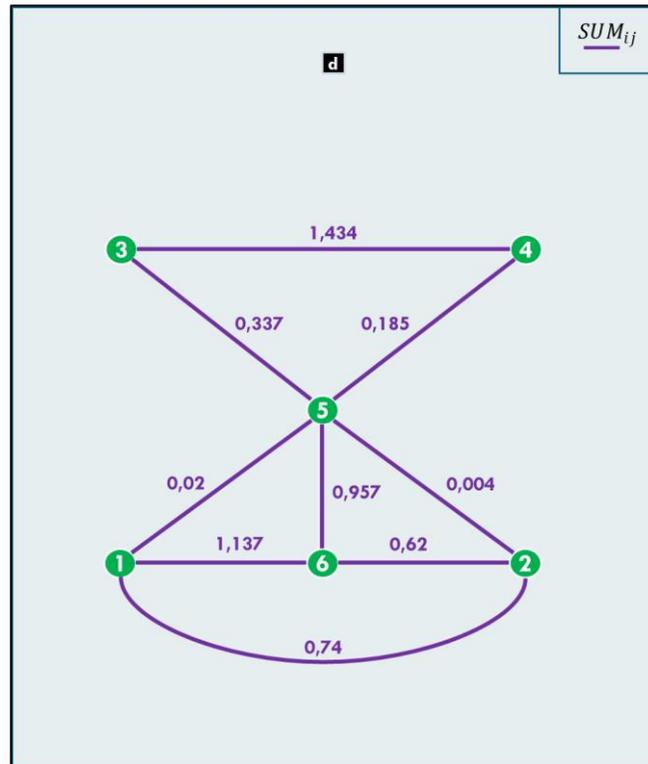


Figura 0-5. Ejemplo donde las variables entre dos nodos se suman.

Fuente: elaboración propia.

Tabla 0-7. Valores ordenados de la suma de los arcos del ejemplo de la Figura 0-5.

$(i, j)$	$SUM_{ij}$
(3, 4)	1,434
(1, 6)	1,137
(5, 6)	0,957
(1, 2)	0,740
(2, 6)	0,620
(3, 5)	0,337
(4, 5)	0,185
(1, 5)	0,020
(2, 5)	0,004

Fuente: elaboración propia.

## ANEXO F. Resultados del experimento de calibración

Este experimento tenía como objetivo comparar las distintas partes del algoritmo para poder dilucidar su efecto individual y conjunto, de manera que se pueda utilizar la mejor combinación para los experimentos más grandes. Con base en experimentos preliminares, se definieron siete configuraciones de algoritmo (CAs) a comparar, cuyas componentes específicas se detallan en la siguiente tabla.

Tabla 0-8. Configuraciones de algoritmos a comparar.

Módulo	Capítulo	Descripción	CA						
			1	2	3	4	5	6	7
<b>P: Gurobi</b>	3.3	Algoritmo principal de Gurobi	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
<b>C: Cortes iniciales</b>	3.3.3	Cortes añadidos a la modelación	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X
<b>1: Solución inicial</b>	3.3.1	Heurística que entrega solución inicial a Gurobi	✓	✓	✓	X	X	X	X
<b>2: Búsqueda local</b>	3.3.2	Realiza una búsqueda local en las rutas de alimentadores a partir de una solución dada	✓	✓	X	✓	X	X	X
<b>3: Búsqueda de cortes</b>	0	Búsqueda de cortes a partir de una solución de la relajación lineal del problema	✓	X	X	X	✓	X	X

Fuente: elaboración propia.

Los resultados de este experimento se muestran en las siguientes tablas, coloreadas por columna de rojo a verde indicando el peor y mejor *gap* respectivamente.

Tabla 0-9. Resultados del *gap* obtenido por cada configuración, tamaño de instancia y posición de planta.

		<i>Gap (p.p.)</i>											
		<i>n</i> = 50			<i>n</i> = 75			<i>n</i> = 100			<i>n</i> = 150		
CA		$\lambda=0$	$\lambda=2$	<b>Prom</b>	$\lambda=0$	$\lambda=2$	<b>Prom</b>	$\lambda=0$	$\lambda=2$	<b>Prom</b>	$\lambda=0$	$\lambda=2$	<b>Prom</b>
1	0	4,9	<b>2,5</b>	3,7	16,1	<b>9,9</b>	13,1	17,3	<b>15,2</b>	28,8	18,6	<b>23,7</b>	<b>12,8</b>
2	0	5,4	<b>2,7</b>	2,5	15,1	<b>8,8</b>	13,2	17,3	<b>15,2</b>	27,4	17,5	<b>22,4</b>	<b>12,3</b>
3	0	4,3	<b>2,1</b>	2,2	18,2	<b>10,2</b>	12,9	17,3	<b>15,1</b>	29,7	18,7	<b>24,2</b>	<b>12,9</b>
4	0	4,4	<b>2,2</b>	2,2	16,3	<b>9,3</b>	13,1	16,7	<b>14,9</b>	35,6	18,7	<b>27,1</b>	<b>13,4</b>
5	0	3,8	<b>1,9</b>	2,0	16,8	<b>9,4</b>	14,2	17,1	<b>15,7</b>	29,5	18,5	<b>24,0</b>	<b>12,7</b>
6	0	4,4	<b>2,2</b>	2,5	16,7	<b>9,6</b>	13,9	16,9	<b>15,4</b>	30,2	17,8	<b>24,0</b>	<b>12,8</b>
7	0	11,0	<b>5,5</b>	3,0	26,1	<b>14,6</b>	16,1	24,9	<b>20,5</b>	26,4	27,1	<b>26,8</b>	<b>16,8</b>

Fuente: elaboración propia.

Tabla 0-10. Resultados del *gap* obtenido por cada configuración y cada posición de planta.

CA	<i>Gap</i>		
	$\lambda=0$	$\lambda=2$	<b>Promedio</b>
1	11,4%	14,2%	<b>12,8%</b>
2	10,8%	13,8%	<b>12,3%</b>
3	11,2%	14,6%	<b>12,9%</b>
4	12,7%	14,0%	<b>13,4%</b>
5	11,4%	14,0%	<b>12,7%</b>
6	11,6%	13,9%	<b>12,8%</b>
7	11,4%	22,3%	<b>16,8%</b>

Fuente: elaboración propia.

Tabla 0-11. Resultados del tiempo de ejecución para instancias de 50 nodos.

CA	Tiempo de ejecución (min)		
	n = 50		
	$\lambda=0$	$\lambda=2$	<b>Promedio</b>
1	1,6	54,7	<b>28,2</b>
2	1,6	52,9	<b>27,2</b>
3	1,2	52,0	<b>26,6</b>
4	1,6	48,0	<b>24,8</b>
5	1,3	51,7	<b>26,5</b>
6	1,0	54,4	<b>27,7</b>
7	2,6	60,0	<b>31,3</b>

Fuente: elaboración propia.

### F.1 Cortes iniciales

De acuerdo con las tablas anteriores, el efecto de agregar los cortes iniciales (CA 6) mejora en promedio 4 p.p. en comparación al modelo sin ellos (CA 7) siendo las instancias con  $\lambda = 2$  donde se tiene un mayor impacto, con una mejora promedio de 8,4 p.p. en una hora de ejecución. Por otro lado, la Tabla 0-9 indica que para instancias de 50 nodos y con  $\lambda = 0$  la CA 6 alcanza la optimalidad más rápido en promedio que las otras configuraciones. Esto puede explicarse porque las instancias con  $\lambda = 0$  son más fáciles de resolver para Gurobi, como se puede ver en la Tabla 0-10, ya que tienen *gaps* más pequeños, y en la Tabla 0-11, con menores tiempos de ejecución. Los cortes iniciales mejoran el *gap* final en todas las configuraciones que los incluyen, estos resultan ser la mejora que aporta más en la reducción del *gap* de optimalidad.

### F.2 Cortes añadidos

Por otro lado, los cortes añadidos mediante la búsqueda (CA 5) mejoran el *gap* final y tiempo de ejecución en instancias de 50 y 75 nodos, mayormente cuando  $\lambda = 0$ . Sin embargo, no tiene mayor impacto en combinación con las heurísticas de solución inicial

y búsqueda local. En la Tabla 0-12 se puede ver que la cantidad de cortes encontrados versus el tiempo utilizado en el *callback* hace que sean mejores las otras estrategias en instancias más grandes.

Tabla 0-12. Tiempos en *callback* y mejoras.

	Tiempo promedio en <i>callback</i> (min)	Promedio mejoras de solución	Promedio cortes añadidos
CA 1	3,8	11,0	22,7
CA 2	1,6	14,4	0
CA 4	2,0	13,7	0
CA 5	2,1	0,0	23,2

Fuente: elaboración propia.

### F.3 Heurística de solución y búsqueda local

Con respecto a la heurística de solución inicial, se limitó la ejecución a 3 minutos, y en promedio se ejecutó por 1,4 minutos. Esta heurística de solución inicial tiene dos valores de función objetivo, uno aproximado y el otro es el costo de la solución construida. El costo aproximado resultó ser en promedio un 22% menor que la solución construida por la heurística, y presentó una diferencia absoluta promedio de 8% con respecto a la mejor solución encontrada con el algoritmo completo. La solución inicial construida fue en promedio 32% mayor en costo que la mejor solución.

Con respecto a *gap* final, la heurística de solución inicial por sí sola (CA 3) tuvo un mayor efecto en las instancias en que  $\lambda = 0$ , pero su efecto conjunto con la búsqueda local de alimentadores y cortes iniciales (CA 2) fue la que produjo mayor reducción de *gap* final en promedio, con una reducción de 4,5 p.p. con respecto a la CA 7, y 0,5 p.p. con respecto a la CA 6. Además, esta configuración pareciera ser más consistente en mejorar tanto instancias simples como más complejas, a diferencia de utilizar solo la búsqueda local y los cortes iniciales (CA 4). Esto último puede explicarse por el hecho de que la CA 4 inicia

buscando mejoras para soluciones encontradas por Gurobi que generalmente tienen costos muy altos al principio. Esto genera un mayor tiempo de ejecución para mejorar estas soluciones, por lo tanto, tiene una convergencia más lenta al principio, como muestra la Figura 0-6. Esto último se refleja también en que el tiempo promedio en el *callback* que muestra la Tabla 0-12 es mayor para la CA 4 que para la CA 2, y que las mejoras promedio entregadas son menores para la CA 4 que para la CA 2.

En la Figura 0-6 y Figura 0-7 se muestra el promedio del *gap* en función del tiempo. De estos gráficos se puede ver que la CA 2 mantiene el *gap* más bajo desde aproximadamente los 15 minutos de ejecución. Considerando estos resultados, se eligió la CA 2 para hacer los experimentos.

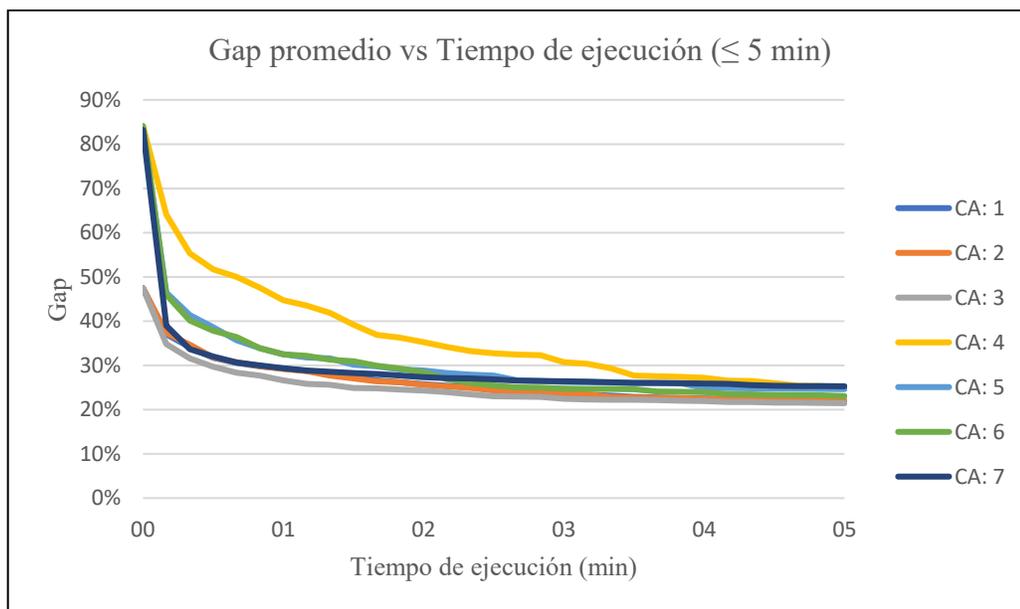


Figura 0-6. Gráfico del *gap* promedio en los primeros cinco minutos de ejecución.

Fuente: elaboración propia.

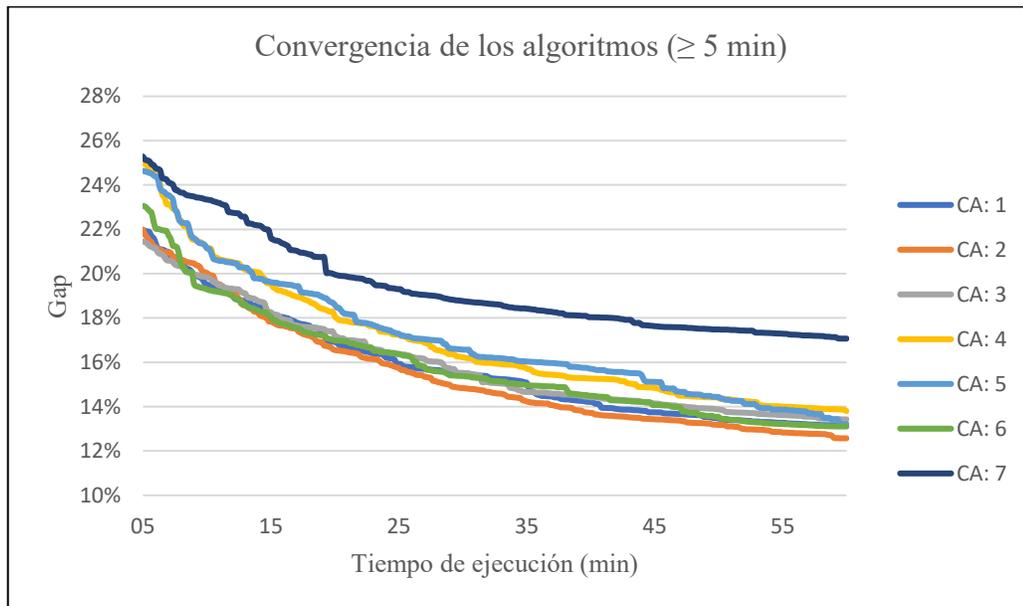


Figura 0-7. Gráfico del *gap* promedio desde los cinco minutos de ejecución.

Fuente: elaboración propia.

### ANEXO G. Resultados del experimento preliminar de sensibilidad

Se ejecutaron 40 instancias para tres sistemas distintos: troncal y alimentador (T&F), solo troncales (ST) y solo alimentadores (SF). Los resultados de los *gaps* de optimalidad se muestran en la Figura 0-8.

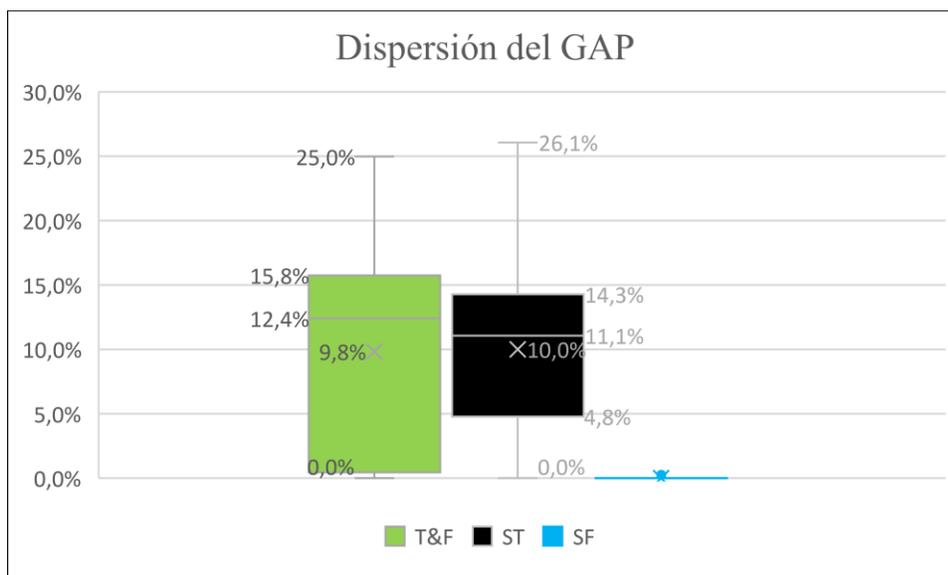
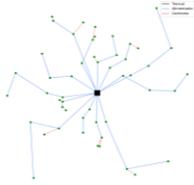
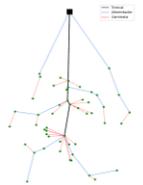
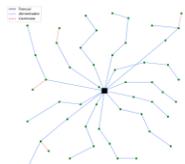
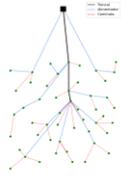


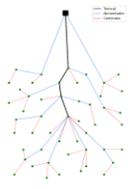
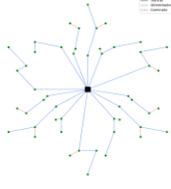
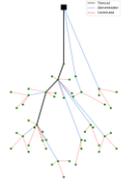
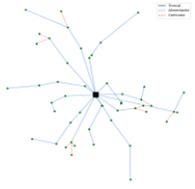
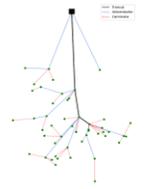
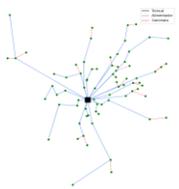
Figura 0-8. Dispersión del *gap* de optimalidad del experimento preliminar de sensibilidad.

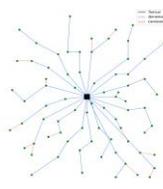
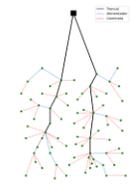
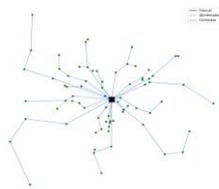
Fuente: elaboración propia.

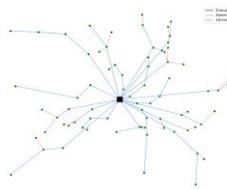
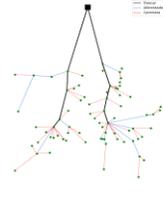
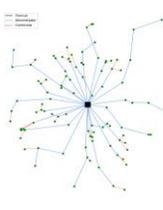
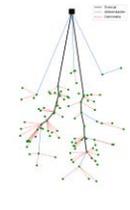
En la siguiente tabla se muestra la solución de cada instancia de este experimento, en términos de *gap*, valor de la función objetivo y la figura de la solución.

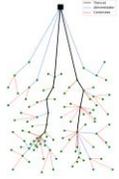
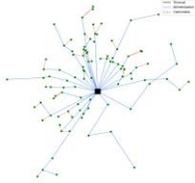
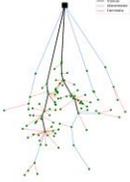
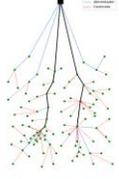
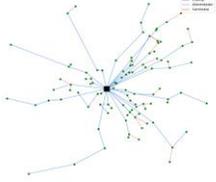
Tabla 0-13. Resultados y figuras del experimento preliminar de sensibilidad.

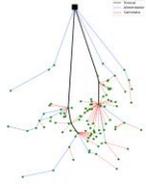
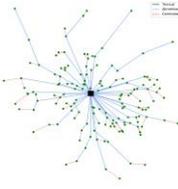
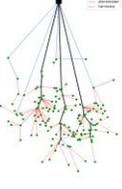
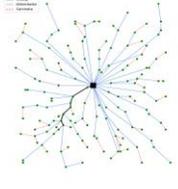
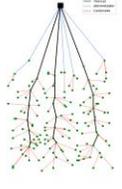
Instancia	$\lambda$	Gap final	Valor FO	Figura
sdmtpvrp1_50	0	0.00%	243.92	
sdmtpvrp1_50	2	0.00%	345.5	
vrpnc1_50	0	0.00%	287.63	
vrpnc1_50	2	0.00%	390.02	
cvrpsstRL1_50	0	0.00%	302.91	

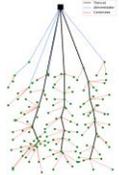
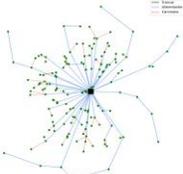
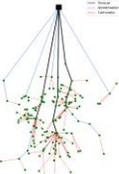
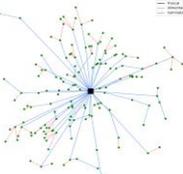
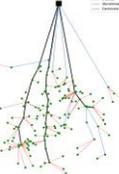
cvrpsstRL1_50	2	0.00%	399.24	
pvrpoldP24_50	0	0.00%	260.74	
pvrpoldP24_50	2	10.40%	390.23	
mdvrptwPR11_50	0	0.00%	224.58	
mdvrptwPR11_50	2	4.50%	352.83	
sdmtpvrp2_75	0	3.46%	291.56	

sdmtpvrp2_75	2	11.88%	463.77	
vrpfeas2_75	0	0.00%	365.4	
vrpfeas2_75	2	14.46%	536.05	
cvrpsstRL1_75	0	0.20%	385.94	
cvrpsstRL1_75	2	15.02%	555.7	
mdvrpij1_75	0	1.22%	292.68	

mdvrpij1_75	2	10.29%	464.91	
mdverptwPR07_75	0	1.74%	320.83	
mdverptwPR07_75	2	14.59%	462.24	
sdmtpvrp3_100	0	13.98%	399.5	
sdmtpvrp3_100	2	13.19%	567.56	
vrpfeas3_100	0	3.23%	460.66	

vrpfeas3_100	2	15.81%	641.9	
sdmtpvrp10a_100	0	12.93%	387.2	
sdmtpvrp10a_100	2	14.35%	546.93	
cvrpsstRL1_100	0	3.23%	460.66	
cvrpsstRL1_100	2	15.81%	641.9	
mdvrptwPR02_100	0	9.74%	371.02	

mdvrptwPR02_100	2	15.33%	555.49	
sdmtpvrp4_150	0	20.22%	532.2	
sdmtpvrp4_150	2	16.47%	828.13	
vrpnc4_150	0	19.46%	637.47	
vrpnc4_150	2	15.12%	865.27	
vrpoldP04_150	0	20.98%	651.63	

vrpoldP04_150	2	15.86%	874.21	
mdvrpik1_150	0	21.22%	532.2	
mdvrpik1_150	2	15.58%	787.79	
mdvrptwPR08_150	0	24.97%	585.48	
mdvrptwPR08_150	2	17.88%	812.87	

Fuente: elaboración propia.

## ANEXO H. Resultados del experimento de sensibilidad del valor del tiempo

En la siguiente tabla se muestran los resultados de este experimento, que consiste en la variación del costo del tiempo, parámetro  $\theta$ , en 11 niveles en un sistema troncal y alimentador (T&F).

Tabla 0-14. Resultados del experimento de sensibilidad del valor del tiempo.

$\lambda$	$\theta$	Gap	T. ejec. (min)	% AOT	% $V_{T\&F}$	$r_w$	Ruta W	Ruta T	Ruta W->T	Ruta F	Ruta W->F	Ruta F->T	Ruta W->F->T
0	Promedio	0%	1	0%	0%	7,3%	-	-	-	47	3	-	-
	0	0%	2	0%	0%	12,1%	-	-	-	40	10	-	-
	2	0%	2	0%	0%	10,9%	-	-	-	42	8	-	-
	4	0%	1	0%	0%	8,9%	-	-	-	44	6	-	-
	6	0%	1	0%	0%	8,5%	-	-	-	44	6	-	-
	8	0%	1	0%	0%	6,8%	-	-	-	48	2	-	-
	10	0%	0,4	0%	0%	6,5%	-	-	-	48	2	-	-
	12	0%	0,4	0%	0%	6,0%	-	-	-	49	1	-	-
	14	0%	0,4	0%	0%	5,5%	-	-	-	49	1	-	-
	16	0%	0,4	0%	0%	5,5%	-	-	-	49	1	-	-
	18	0%	0,4	0%	0%	4,8%	-	-	-	49	1	-	-
20	0%	0,3	0%	0%	4,8%	-	-	-	49	1	-	-	
2	Promedio	1%	47	50%	71%	10,5%	-	3	3	7	1	30	5
	0	4%	116	58%	48%	26,3%	-	3	15	3	4	9	15
	2	3%	85	56%	55%	22,4%	-	4	12	3	4	12	16
	4	2%	70	52%	66%	16,4%	-	4	6	4	3	19	14
	6	1%	51	51%	71%	13,7%	-	4	4	4	3	24	12
	8	1%	46	49%	77%	6,7%	-	3	1	7	0	37	2
	10	0%	34	48%	78%	5,9%	-	3	0	7	0	39	1
	12	0%	20	48%	77%	5,0%	-	3	0	8	-	38	0
	14	0%	15	48%	77%	4,8%	-	3	-	8	-	39	-
	16	0%	29	48%	77%	4,8%	-	3	-	8	-	38	0
	18	0%	19	48%	77%	4,7%	-	3	-	8	-	38	0
20	0%	29	48%	76%	4,2%	-	3	-	9	-	38	-	
	<b>Prom. general</b>	<b>1%</b>	<b>24</b>	<b>25%</b>	<b>35%</b>	<b>8,9%</b>	<b>-</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>27</b>	<b>2</b>	<b>15</b>	<b>3</b>

Fuente: elaboración propia.

El AOT es la proporción de asientos ofrecidos de troncal. El indicador  $\%V_{T\&F}$  es la proporción de viajes realizados en el sistema troncal y alimentador. El indicador  $r_w$  es el tiempo adicional relativo, entendiéndose el tiempo adicional como la diferencia entre el tiempo de viaje real y el tiempo de viaje directo a la planta. Con respecto a las rutas, W representa una caminata o acceso, T representa un viaje en troncal y F representa un viaje en alimentador. Con esto, una ruta  $W \rightarrow F \rightarrow T$  indica una caminata a un paradero de alimentador, un viaje en alimentador a un troncal y un viaje en un troncal a la planta.

A continuación, se muestra los resultados de optimalidad que se obtuvieron en este experimento.

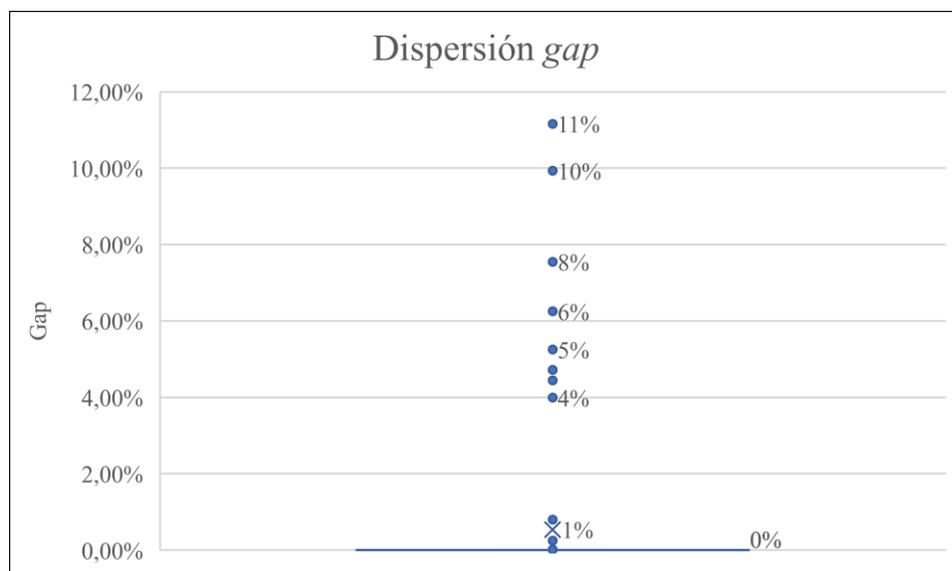


Figura 0-9. Dispersión del *gap* de optimalidad del experimento de sensibilidad del valor del tiempo.

Fuente: elaboración propia.

La Figura 0-10 muestra la curva de costo operacional versus el tiempo adicional total para cada instancia resuelta. Estos dos indicadores están presentes en la función objetivo del problema a minimizar. Se construyó una curva exponencial para cada instancia que

aproxima la tendencia que representa la frontera de Pareto que definen estos puntos. Los parámetros de las curvas se muestran en la Tabla 0-15.

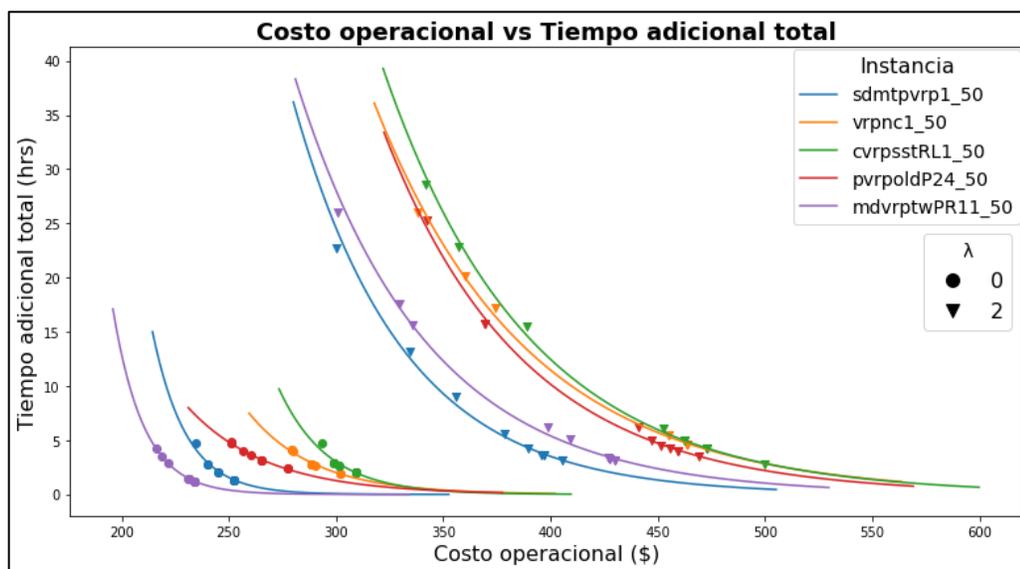


Figura 0-10. Costo operacional vs el tiempo adicional total junto a una línea de tendencia para distintas instancias.

Fuente: elaboración propia.

Tabla 0-15. Parámetros de las curvas costo operacional vs tiempo adicional obtenidos para cada instancia.

Instancia	$\lambda$	Fórmula	R <sup>2</sup>
sdmtpvpr1_50	0	$y = 12.339.402,651 \cdot e^{-0,06352x}$	0,982
sdmtpvpr1_50	2	$y = 8.434,958 \cdot e^{-0,01946x}$	0,995
vrpnc1_50	0	$y = 33.322,220 \cdot e^{-0,03238x}$	0,978
vrpnc1_50	2	$y = 3.045,260 \cdot e^{-0,01395x}$	0,998
cvrpsstRL1_50	0	$y = 1.674.843,924 \cdot e^{-0,04409x}$	0,929
cvrpsstRL1_50	2	$y = 4.479,353 \cdot e^{-0,01471x}$	0,998
pvrpoldP24_50	0	$y = 3.860,032 \cdot e^{-0,02673x}$	0,988
pvrpoldP24_50	2	$y = 4.658,409 \cdot e^{-0,01532x}$	0,995
mdvrptwPR11_50	0	$y = 13.759.749,721 \cdot e^{-0,06939x}$	0,999
mdvrptwPR11_50	2	$y = 3.923,374 \cdot e^{-0,01647x}$	0,995

Fuente: elaboración propia.

## ANEXO I. Resultados del experimento multifactorial de sensibilidad

Para este experimento se utilizaron: instancias de 50 trabajadores, cinco ubicaciones de clientes distintas, cuatro niveles la posición de la planta  $\lambda$ , cinco niveles del costo del tiempo  $\theta$  y cinco niveles del costo relativo entre vehículos troncales y alimentadores  $\beta$ . Se incluyó cada combinación de estos parámetros, es decir, 500 instancias en las que el tiempo máximo de ejecución se definió en 2 horas. Cada conjunto de 500 instancias se resolvió para el sistema troncal y alimentador (T&F), solo troncales (ST) y solo alimentadores (SA). En el caso de ST, el parámetro  $\beta$  no tiene influencia, por lo tanto, en este caso se ejecutaron 100 instancias. Todo esto da un total de 1100 ejecuciones. Los resultados del *gap* de optimización y su dispersión se muestran en la siguiente figura.

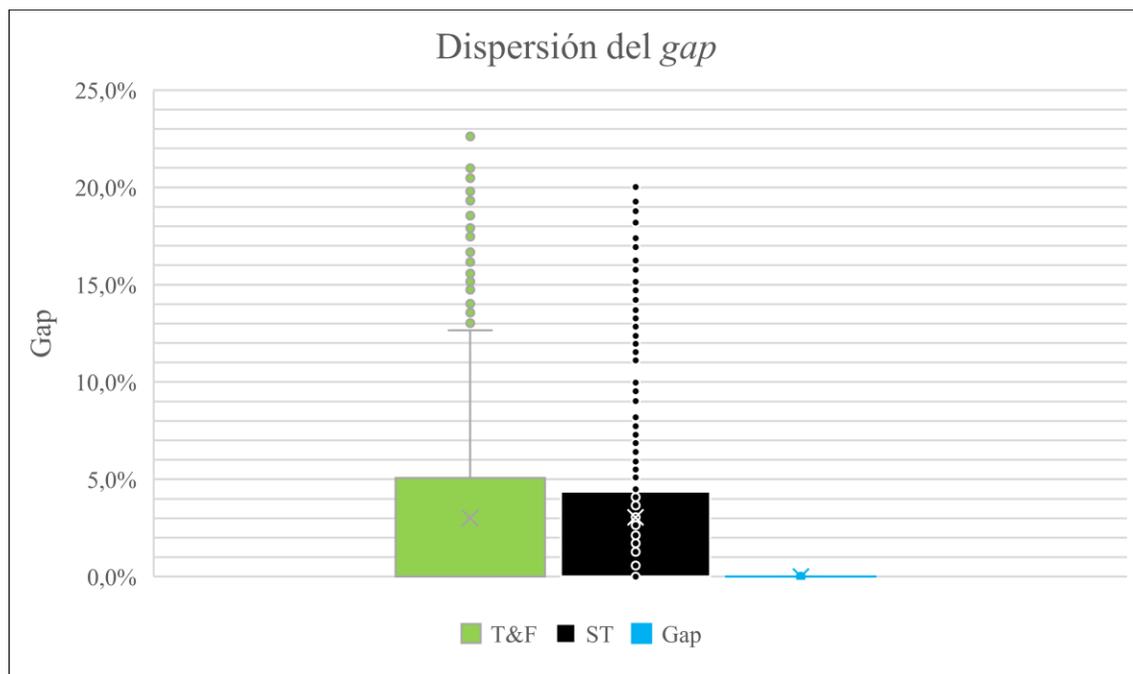


Figura 0-11. Dispersión del *gap* de optimalidad del experimento multifactorial de sensibilidad.

Fuente: elaboración propia.

La Tabla 0-16 y la Tabla 0-17 muestran los indicadores de optimización calculados en promedio para cada parámetro sensibilizado. La Tabla 0-16 muestra el *gap* promedio por cada parámetro, de la cual se pueden identificar las combinaciones de instancias que resultaron con un mayor *gap*. Por ejemplo, las instancias con  $\theta = 0$ ,  $\beta = 2$  y  $\lambda = 1$  parecieran ser las que obtuvieron mayor *gap* de optimalidad. En cambio, las instancias con  $\theta = 20$ ,  $\beta = 0,5$  y  $\lambda = 0$  las con menor *gap*. En promedio, se tuvo un *gap* de 3%, con una desviación estándar de 4,9 p.p.

Tabla 0-16. *Gap* promedio por cada valor de  $\theta$ ,  $\beta$  y  $\lambda$ , para el sistema T&F.

$\theta$	<i>Gap</i> promedio	$\beta$	<i>Gap</i> promedio	$\lambda$	<i>Gap</i> promedio
0	5%	0,5	0%	0	0%
2	4%	1	1%	1	5%
4	3%	2	6%	2	4%
8	2%	3	4%	3	2%
20	1%	4	3%	<b>Promedio</b>	<b>3%</b>
<b>Promedio</b>	<b>3%</b>	<b>Promedio</b>	<b>3%</b>		

Fuente: elaboración propia.

Tabla 0-17. Tiempo de ejecución promedio por cada valor de  $\theta$ ,  $\beta$  y  $\lambda$ , para el sistema T&F.

$\theta$	T. ejec. promedio (min)	$\beta$	T. ejec. promedio (min)	$\lambda$	T. ejec. promedio (min)
0	78	0,5	23	0	31
2	81	1	49	1	78
4	78	2	80	2	81
8	56	3	86	3	71
20	34	4	88	<b>Promedio</b>	<b>65</b>
<b>Promedio</b>	<b>65</b>	<b>Promedio</b>	<b>65</b>		

Fuente: elaboración propia.

La Tabla 0-17 muestra los tiempos de ejecución promedio por cada parámetro sensibilizado, de la cual se puede ver que las instancias que tuvieron un mayor tiempo de ejecución fueron las que tenían  $\theta \leq 4$ ,  $\beta \geq 2$  y  $\lambda \geq 1$ . El tiempo de ejecución promedio fue de 65 minutos, con una desviación estándar de 48 minutos, en el cual el tiempo máximo permitido de ejecución fueron 120 minutos.

Tabla 0-18. Tiempo de ejecución promedio y el *gap* promedio por cada valor de  $\theta$  y  $\lambda$ , para el sistema ST.

$\theta$	<i>Gap</i> promedio (ST)	T. ejec. promedio (ST) (min)	$\lambda$	<i>Gap</i> promedio (ST)	T. ejec. promedio (ST) (min)
0	5%	44	0	0%	4
2	4%	45	1	4%	76
4	3%	47	2	8%	102
8	2%	51	3	0%	24
20	2%	70	<b>Promedio</b>	<b>3%</b>	<b>52</b>
<b>Promedio</b>	<b>3%</b>	<b>52</b>			

Fuente: elaboración propia.

Con respecto a la ejecución del sistema ST, la Tabla 0-18 muestra los *gaps* de optimalidad y los tiempos de ejecución promedios por valor de los parámetros  $\theta$  y  $\lambda$ . El *gap* promedio general fue de 3% con una desviación estándar de 5,2 p.p. El tiempo de ejecución promedio fue de 52 minutos con una desviación estándar de 55 minutos. Las combinaciones de parámetros más difíciles de resolver en términos de *gap* resultaron similares a lo que se dio en la resolución del sistema T&F.

En el sistema SF, a diferencia de los otros dos, se resolvieron las instancias a optimalidad, con un promedio de *gap* 0%. Como muestra la Tabla 0-19, el tiempo de ejecución fue significativamente menor que en los otros dos sistemas con un promedio de 0,7 minutos y una desviación estándar de 1,1 minutos.

Tabla 0-19. Tiempo de ejecución promedio por cada valor de  $\beta$ ,  $\lambda$  y  $\theta$ , para el sistema SF.

$\theta$	T. ejec. Promedio (SF) (min)	$\beta$	T. ejec. promedio (SF) (min)	$\lambda$	T. ejec. Promedio (SF) (min)
0	0,4	0,5	0,8	0	0,1
2	0,5	1	0,8	1	0,7
4	0,7	2	0,7	2	1,0
8	0,9	3	0,8	3	1,1
20	1,2	4	0,6	<b>Promedio</b>	<b>0,7</b>
<b>Promedio</b>	<b>0,7</b>	<b>Promedio</b>	<b>0,7</b>		

Fuente: elaboración propia.

En la Tabla 0-20 se muestra el *gap* de optimalidad que obtuvo el sistema T&F en cada combinación de parámetros. En la Tabla 0-21 se muestra el tiempo de ejecución que se obtuvo con cada combinación de parámetros para el sistema T&F. Cada casilla de cada combinación representa el promedio de cinco instancias.

Tabla 0-20. *Gap* de optimalidad por cada combinación de parámetros  $\beta$ ,  $\lambda$  y  $\theta$ , para el sistema T&F.

		%GAP T&F							
		$\beta$					Promedio	Promedio	
$\lambda$	$\theta$	0,5	1	2	3	4			
0	0	0%	0%	0%	2%	2%		1%	
	2	0%	0%	0%	2%	2%		1%	
	4	0%	0%	0%	1%	2%		1%	
	8	0%	0%	0%	0%	1%		0%	
	20	0%	0%	0%	0%	0%		0%	
									0%
1	0	0%	2%	12%	14%	10%		8%	
	2	0%	1%	9%	11%	8%		6%	
	4	0%	1%	10%	11%	7%		6%	
	8	0%	0%	4%	7%	6%		4%	
	20	0%	0%	2%	2%	3%		1%	
									5%
2	0	0%	4%	17%	11%	8%		8%	
	2	0%	3%	13%	8%	4%		6%	
	4	0%	2%	11%	5%	3%		4%	
	8	0%	1%	7%	2%	2%		2%	
	20	0%	0%	1%	1%	1%		1%	
									4%
3	0	0%	3%	15%	4%	1%		5%	
	2	1%	2%	11%	1%	0%		3%	
	4	1%	2%	9%	1%	1%		3%	
	8	0%	0%	7%	1%	0%		2%	
	20	0%	0%	1%	0%	1%		0%	
									2%
<b>Promedio</b>		0%	1%	6%	4%	3%		<b>3%</b>	

Fuente: elaboración propia.

Tabla 0-21. Tiempo de ejecución por cada combinación de parámetros  $\beta$ ,  $\lambda$  y  $\theta$  para el sistema T&F.

		Tiempo de ejecución T&F (min)							
$\lambda$	$\theta$	$\beta$					Promedio	Promedio	
		0,5	1	2	3	4			
0	0	0,3	2,3	10,0	95,9	112,5	44,2	30,9	
	2	0,3	1,6	8,4	79,2	110,0	39,9		
	4	0,3	1,0	6,9	74,1	112,8	39,0		
	8	0,3	0,6	3,9	30,2	78,5	22,7		
	20	0,2	0,3	1,5	5,1	36,8	8,8		
1	0	6,8	93,2	120,0	120,0	120,0	92,0	78,0	
	2	3,8	87,4	120,0	120,0	120,0	90,2		
	4	2,1	75,9	120,0	120,0	120,0	87,6		
	8	1,0	39,6	91,2	120,0	120,0	74,4		
	20	0,3	4,9	52,8	59,1	110,8	45,6		
2	0	16,6	115,4	120,0	120,0	118,4	98,1	81,4	
	2	70,1	84,6	120,0	120,0	118,8	102,7		
	4	90,8	70,2	120,0	116,1	89,4	97,3		
	8	5,7	44,1	120,0	77,3	81,2	65,7		
	20	1,6	28,8	49,5	60,2	76,8	43,4		
3	0	23,0	96,3	120,0	103,2	39,7	76,4	70,8	
	2	100,0	108,3	120,0	88,5	45,9	92,5		
	4	120,0	74,3	120,0	67,9	57,9	88,0		
	8	23,1	37,5	120,0	83,4	34,4	59,7		
	20	3,3	20,9	46,0	55,0	61,6	37,4		
<b>Promedio</b>		23,5	49,4	79,5	85,8	88,3	<b>65,3</b>		

Fuente: elaboración propia.

En la Tabla 0-22 se muestra el *gap* de optimalidad y el tiempo de ejecución para cada combinación en el sistema ST. En esta tabla cada casilla corresponde al promedio de cinco instancias con distintas ubicaciones de trabajadores.

Tabla 0-22. *Gap* y tiempo de ejecución por cada combinación de parámetros  $\lambda$  y  $\theta$  para el sistema ST.

$\lambda$	<i>Gap</i> optimalidad ST						T. ejec. Promedio ST (min)					
	$\theta$					Prom.	$\theta$					Prom.
	0	2	4	8	20		0	2	4	8	20	
0	0%	0%	0%	0%	0%	0%	2	4	4	4	4	4
1	5%	4%	4%	4%	4%	4%	73	71	73	73	92	76
2	13%	10%	7%	4%	4%	8%	97	98	99	95	120	102
3	0%	0%	0%	0%	1%	0%	4	8	12	30	65	24
Prom.	5%	4%	3%	2%	2%	3%	44	45	47	51	70	52

Fuente: elaboración propia.

En la Tabla 0-23 se muestra el tiempo de ejecución por cada combinación de parámetros para el sistema SF. No se muestra la información del *gap* obtenido debido a que se llegó a optimalidad en todas las instancias. Cada casilla de la tabla representa el promedio de cinco instancias con distintas ubicaciones de trabajadores.

Tabla 0-23. Tiempo de ejecución por cada combinación de parámetros  $\beta$ ,  $\lambda$  y  $\theta$  para el sistema SF.

		T. ejec. Promedio (SF) (min)						
$\lambda$	$\theta$	$\beta$					Promedio	Promedio
		0,5	1	2	3	4		
0	0	0,14	0,13	0,12	0,11	0,13	0,1	0,1
	2	0,09	0,10	0,11	0,12	0,12	0,1	
	4	0,09	0,10	0,11	0,11	0,10	0,1	
	8	0,09	0,09	0,09	0,11	0,10	0,1	
	20	0,06	0,10	0,09	0,10	0,10	0,1	
1	0	0,72	0,58	0,62	0,79	0,79	0,7	0,7
	2	0,92	0,68	0,79	0,79	0,98	0,8	
	4	0,57	0,83	0,69	0,67	0,78	0,7	
	8	0,29	0,59	0,71	0,84	0,57	0,6	
	20	0,14	0,19	0,35	0,78	0,94	0,5	
2	0	0,33	0,54	0,33	0,39	0,35	0,4	1,0
	2	1,81	0,40	0,54	0,30	0,66	0,7	
	4	2,69	1,49	0,40	0,36	0,35	1,1	
	8	0,93	2,89	1,68	0,68	0,36	1,3	
	20	0,43	0,82	2,14	3,21	1,85	1,7	
3	0	0,19	0,17	0,27	0,17	0,17	0,2	1,1
	2	1,48	0,23	0,25	0,23	0,17	0,5	
	4	3,25	1,27	0,25	0,22	0,22	1,0	
	8	1,12	4,25	1,47	0,72	0,31	1,6	
	20	0,35	0,85	2,58	5,61	2,70	2,4	
<b>Promedio</b>		0,8	0,8	0,7	0,8	0,6	<b>0,7</b>	

Fuente: elaboración propia.

Las siguientes tablas muestran los resultados de tres indicadores para  $\beta$ ,  $\lambda$  y  $\theta$ . El primer indicador es  $MGS_{T\&F}$ , que cuantifica el beneficio garantizado de implementar el sistema troncal y alimentador sobre la segunda mejor opción, entre un sistema de solo troncales y uno de solo alimentadores. El segundo es  $\%V_{T\&F}$ , que muestra el porcentaje de los trabajadores que utiliza el sistema T&F. El tercero es el AOT, proporción de asientos ofrecidos de troncal, el cual indica cuántos asientos de troncal se ofrecen en la solución

con respecto al total de asientos ofrecidos. Este último indicador es útil para ver el tipo de flota utilizada.

Tabla 0-24. Muestra el indicador  $MSG_{T\&F}$  para cada combinación de parámetros  $\beta$ ,  $\lambda$  y  $\theta$  para el sistema T&F.

		%MGS T&F							
		$\beta$					Promedio	Promedio	
$\lambda$	$\theta$	0,5	1	2	3	4			
0	0	0%	0%	0%	4%	11%	3%	2%	
	2	0%	0%	0%	3%	11%	3%		
	4	0%	0%	0%	2%	11%	3%		
	8	0%	0%	0%	1%	9%	2%		
	20	0%	0%	0%	1%	6%	1%		
1	0	0%	1%	18%	15%	5%	8%	7%	
	2	0%	1%	17%	15%	6%	8%		
	4	0%	0%	15%	14%	6%	7%		
	8	0%	0%	14%	14%	5%	7%		
	20	0%	0%	7%	13%	4%	5%		
2	0	0%	24%	14%	4%	1%	9%	9%	
	2	0%	21%	17%	6%	1%	9%		
	4	0%	17%	17%	8%	3%	9%		
	8	0%	12%	19%	10%	5%	9%		
	20	0%	6%	22%	10%	4%	8%		
3	0	3%	30%	4%	0%	0%	7%	7%	
	2	0%	27%	5%	0%	0%	6%		
	4	0%	25%	5%	0%	0%	6%		
	8	0%	23%	6%	1%	0%	6%		
	20	0%	16%	21%	7%	3%	9%		
<b>Promedio</b>		0%	10%	10%	6%	5%		6%	

Fuente: elaboración propia.

Tabla 0-25. Valor del indicador  $V_{T\&F}$  para cada combinación de parámetros  $\beta$ ,  $\lambda$  y  $\theta$  para el sistema T&F.

		%V T&F						
$\lambda$	$\theta$	$\beta$					Promedio	Promedio
		0,5	1	2	3	4		
0	0	0%	0%	0%	51%	48%	20%	15%
	2	0%	0%	0%	50%	48%	20%	
	4	0%	0%	0%	26%	49%	15%	
	8	0%	0%	0%	21%	43%	13%	
	20	0%	0%	0%	2%	48%	10%	
1	0	0%	25%	54%	44%	34%	31%	29%
	2	0%	12%	53%	42%	30%	27%	
	4	0%	14%	59%	40%	29%	28%	
	8	0%	0%	54%	45%	29%	26%	
	20	0%	0%	68%	51%	32%	30%	
2	0	0%	48%	28%	16%	7%	20%	29%
	2	0%	55%	36%	17%	10%	24%	
	4	0%	66%	36%	20%	11%	27%	
	8	0%	77%	46%	24%	15%	32%	
	20	0%	76%	71%	39%	23%	42%	
3	0	55%	42%	21%	1%	0%	24%	25%
	2	29%	38%	22%	5%	0%	19%	
	4	0%	58%	26%	5%	0%	18%	
	8	0%	76%	40%	10%	5%	26%	
	20	0%	78%	68%	37%	22%	41%	
<b>Promedio</b>		4%	33%	34%	27%	24%	25%	

Fuente: elaboración propia.

Tabla 0-26. Valor del indicador AOT para cada combinación de parámetros  $\beta$ ,  $\lambda$  y  $\theta$  para el sistema T&F.

		%AOT							
		$\beta$					Promedio	Promedio	
$\lambda$	$\theta$	0,5	1	2	3	4			
0	0	0%	0%	0%	65%	82%	29%	25%	
	2	0%	0%	0%	65%	80%	29%		
	4	0%	0%	0%	47%	80%	25%		
	8	0%	0%	0%	37%	80%	23%		
	20	0%	0%	0%	11%	81%	18%		
1	0	0%	21%	58%	77%	82%	48%	44%	
	2	0%	10%	58%	77%	85%	46%		
	4	0%	10%	57%	75%	85%	45%		
	8	0%	0%	56%	71%	84%	42%		
	20	0%	0%	52%	65%	80%	39%		
2	0	0%	58%	80%	89%	94%	64%	59%	
	2	0%	56%	71%	89%	92%	62%		
	4	0%	52%	74%	88%	91%	61%		
	8	0%	49%	63%	82%	90%	57%		
	20	0%	48%	54%	77%	86%	53%		
3	0	56%	61%	77%	99%	100%	79%	66%	
	2	20%	62%	74%	98%	100%	71%		
	4	0%	55%	72%	98%	100%	65%		
	8	0%	49%	66%	94%	98%	61%		
	20	0%	48%	55%	82%	89%	55%		
<b>Promedio</b>		4%	29%	48%	74%	88%	49%		
<b>Flota:</b>		<b>Alimentadores</b>		<b>Mixta</b>		<b>Troncales</b>			

Fuente: elaboración propia.