PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

MODELACIÓN DE SPREADS EN MERCADOS EMERGENTES: ESTIMACIÓN MULTI-FAMILIA USANDO FILTRO DE KALMAN

CLAUDIO RODRIGO TAPIA ÑANCUVILU

Tesis para optar al grado de
Magister en Ciencias de la Ingeniería

Profesor Supervisor:
GONZALO CORTAZAR

Santiago de Chile, Septiembre 2008

© MMVIII, CLAUDIO RODRIGO TAPIA ÑANCUVILU

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

MODELACIÓN DE SPREADS EN MERCADOS EMERGENTES: ESTIMACIÓN MULTI-FAMILIA USANDO FILTRO DE KALMAN

CLAUDIO RODRIGO TAPIA ÑANCUVILU

Tesis presentada a la Comisión integrada por los profesores:

GONZALO CORTAZAR
JAIME CASASSUS
NICOLÁS MAJLUF
AUGUSTO CASTILLO
JUAN DIXON

Para completar las exigencias del grado de
Magister en Ciencias de la Ingeniería

Santiago de Chile, Septiembre 2008

A mis padres y hermano...

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar me gustaría agradecer a mi profesor guía, Gonzalo Cortazar, por el tiempo dedicado, sus contantes aportes y consejos durante el desarrollo de esta tesis, y por el crecimiento académico alcanzado gracias al trabajo junto a él en estos años.

Además quisiera agregar un reconocimiento a mis padres y hermano por el gran apoyo que me han brindado durante este período, por la educación y disciplina que me han entregado y su cariño incondicional. Quisiera también hacer una mención especial a Catalina, por su constante compañía y comprensión en el tiempo que he dedicado a esta investigación.

Agradezco el apoyo financiero proporcionado por Conicyt a través del proyecto Fondecyt 1070771 y por IMTrust en el marco del proyecto "Internacionalización de Metodologías y Herramientas desarrolladas para Instrumentos de Renta Fija del Mercado Nacional y Mejoramiento de Metodologías para la Estimación de Spreads".

Finalmente me gustaría agradecer a mis compañeros de FinlabUC, cuyos consejos y ayuda me permitieron llevar este trabajo a buen puerto. Gracias por el tiempo dedicado y por hacer de este período una etapa muy grata de mi vida.

ÍNDICE GENERAL

DEDICATORIA II

AGRADECIMIENTOS III

ÍNDICE DE FIGURAS VII

ÍNDICE DE TABLAS IX

RESUMEN XI

ABSTRACT XII

Capítulo 1. Introducción 1

Capítulo 2. Modelos de Estimación de Spreads 5

2.1. Modelos Estructurales. 5

2.2. Modelos Reducidos. 7

2.2.1. Enfoque de Jarrow y Turnbull (1995) 8

2.2.2. Enfoque de Duffie y Singleton (1999). 9

2.3. Modelación de la Estructura Libre de Riesgo. 13

2.4. Metodología de Estimación: El Filtro de Kalman Extendido. 16

2.4.1. Extensión del Filtro de Kalman para una Ecuación de Medida No Lineal. 21

Capítulo 3. Caracterización del Mercado de Renta Fija Chileno 23

3.1. Instrumentos de Renta Fija Chilenos. 23

3.2. Los Bonos Empresariales. 28

3.3. Principales Inversionistas del Mercado Chileno 34

Capítulo 4. Modelo de Estimación de Spreads Multi-Familia 37

4.1. Modelo para el Spread de Papeles con Riesgo. 37

4.2. Metodología de Estimación Conjunta. 40

4.3. Estimación Conjunta mediante Filtro de Kalman. 42

4.4. Metodología de estimación en dos etapas. 43

Capítulo 5. Implementación y Resultados 47
5.1. Datos 47
5.2. Implementación 50
5.2.1. Estimación de Parámetros del Modelo. 51
5.2.2. Ajuste del Modelo a las Transacciones dentro de la Muestra. 54
5.2.3. Ajuste a la Estructura de Volatilidad de los Datos. 63
5.3. Análisis de los Componentes del Spread en el Modelo. 65
5.4. Comparación con Otras Metodologías de Obtención de Spreads. 68
5.4.1. Primera Metodología de Estimación Alternativa. 68
5.4.2. Segunda Metodología de Estimación Alternativa. 73
5.5. Análisis de Spreads del Mercado Chileno. 77

Capítulo 6. Conclusiones 81

BIBLIOGRAFÍA 85

ANEXOS 89

ANEXO A. Planteamiento Estructural de los Modelos de Nelson-Siegel y Svensson 90
A.1. Modelo de Nelson-Siegel. 90
A.2. Modelo de Svensson 90

ANEXO B. Valor de un Bono de Descuento en el Modelo Vasicek Multifactorial para la Tasa Libre de Riesgo 92

ANEXO C. Matrices de la Ecuación de Medida del Filtro de Kalman con una Relación Lineal y una Linealizada 94

ANEXO D. Derivación del Modelo Canónico para la Tasa de un Bono con Default 97

ANEXO E. Descripción de las Nuevas Matrices del Filtro de Kalman para Estimación en dos Etapas 100

ANEXO F. Elección del número de Factores del Modelo 103
F.1. Modelo de Tolmasky y Hindanov. 103
F.2. Modelo de Cortazar, Milla y Severino. 104

ANEXO G. Análisis del Comportamiento del Modelo Frente a un Cambio Estructural en la Relación entre Clases de Spread 106

ANEXO H. Derivación de la Estructura de Volatilidad para un Bono modelado con una Dinámica tipo Vasicek 109

ÍNDICE DE FIGURAS

3.1. Evolución de saldos vigentes al fin de cada año en bonos gubernamentales(BG), empresariales (BE) y letras hipotecarias (LH) entre los años 2003 y 2007 . . . 27

3.2. Evolución de montos transados en bonos gubernamentales(BG) y empresariales (BE) por trimestre entre los años 2003 y 2007 en la Bolsa de Comercio de Santiago. 28

3.3. Serie de Tiempo de saldos vigentes de bonos de empresa en CLP y UF entre los años 2003 y 2007. 29

3.4. Saldos vigentes a diciembre de 2007 de bonos empresariales con y sin opción de prepago por plazo de emisión. 31

3.5. Transacciones por plazo durante diciembre de 2007 de bonos en UF. (a) Bonos Gubernamentales. (b) Bonos Empresariales sin opción de prepago. 33

3.6. Transacciones por plazo durante diciembre de 2007 de bonos en UF. (a) Bonos Gubernamentales. (b) Bonos Empresariales con opción de prepago. 33

3.7. Distribución del mercado de renta fija de largo plazo entre los principales inversionistas. Porcentajes calculados en base a valor de los activos a diciembre de 2007. 35

3.8. Separación de las carteras de activos de los principales inversionistas del mercado chileno en bonos gubernamentales (BG), bonos empresariales (BE) y letras hipotecarias (LH). 36

5.1. Curvas Cero Cupón y Curvas de Spread por clasificación de riesgo para el 06/12/2006 55

5.2. Curvas Cero Cupón y Curvas de Spread por clasificación de riesgo para el 06/06/2006 55

5.3. Curvas Cero Cupón y Curvas de Spread por clasificación de riesgo para el 29/06/2005 55

5.4. Curvas Cero Cupón y Curvas de Spread por clasificación de riesgo para el 09/08/2004 56
5.5. Curva Cero Real por años para distintas fechas dentro de la muestra 57
5.6. Curvas Cero Cupón y transacciones por clasificación para el 06/12/2006 . . . 58
5.7. Curvas Cero Cupón y transacciones por clasificación para el 06/06/2006 . . . 58
5.8. Curvas Cero Cupón y transacciones por clasificación para el 29/06/2005 . . . 59
5.9. Curvas Cero Cupón y transacciones por clasificación para el 09/08/2004 . . . 59
5.10. Estructura de Volatilidad Empírica v/s Teórica para clasificación AAA 64
5.11. Estructura de Volatilidad Empírica v/s Teórica para clasificación AA 64
5.12. Estructura de Volatilidad Empírica v/s Teórica para clasificación A 64
5.13. Estructura de Volatilidad Empírica v/s Teórica para clasificación BBB 65
5.14. Curvas de spreads de la metodología de estimación en 2 etapas (modelo original) y metodología alternativa 1 para el 06/12/2006 69
5.15. Curvas de spreads de la metodología de estimación en 2 etapas (modelo original) y metodología alternativa 1 para el 06/06/2006 70
5.16. Curvas de spreads de la metodología de estimación en 2 etapas (modelo original) y metodología alternativa 1 para el 29/06/2005 70
5.17. Curvas de spreads de la metodología de estimación en 2 etapas (modelo original) y metodología alternativa 1 para el 09/08/2004 70
5.18. Desviación estándar de cambios de spread en las estructuras generadas por la metodología de estimación en 2 etapas y la alternativa 1 de estimación de spreads. 71
5.19. Serie de tiempo de spreads a 5 y 20 años del modelo de estimación en dos etapas dentro del período de la muestra. 77

ÍNDICE DE TABLAS

3.1. Número de Papeles y Saldos Vigentes por Mercado y Moneda al 28/12/2007 . 24

3.2. Distribución por tipo de papel del mercado de renta fija de largo plazo el 28/12/2007. 26

3.3. Descripción de bonos empresariales por moneda de emisión al 28/12/2007. . 29

3.4. Bonos de Empresas por clasificación de riesgo, Montos promedio diarios transados entre 2003 y 2007 y saldos vigentes al 28/12/2007. 30

3.5. Montos promedio transados diariamente durante el período 2003-2007 y saldos vigentes a diciembre de 2007 de Bonos Empresariales con y sin opción de prepago. 32

5.1. Transacciones y Saldos de Bonos Empresariales en UF por clasificación, dentro del período muestral. Los saldos vigentes se calculan al 28/12/2006. . 48

5.2. Media y Desviación Estándar de Bonos Empresariales en UF por clasificación dentro de la muestra. 49

5.3. Parámetros estimados para curva libre de riesgo en el período dentro de muestra (01/01/2003 a 31/12/2006). Entre paréntesis se muestra la desviación estándar del error. 52

5.4. Estimación de parámetros Segunda Etapa para usando el período 01/01/2003 a 31/12/2006. Entre paréntesis se muestra la desviación estándar del error. . . 53

5.5. Indicadores de bondad de ajuste para observaciones dentro del período 2003 a 2006 en puntos base (p.b.). 61

5.6. Indicadores de bondad de ajuste para el período 2007. 62

5.7. Porcentaje de varianza del spread modelo a 1 año explicado por sus factores determinantes, usando datos de todo el período muestral. 67

5.8. Porcentaje de varianza del spread modelo a 5 años explicado por sus factores determinantes, usando datos de todo el período muestral. 67

5.9. Comparación de errores de metodología de estimación en 2 etapas con primera metodología alternativa en el período *in sample*. 72
5.10. Comparación de RMSE y Sesgo entre modelo de estimación en 2 etapas y segunda metodología alternativa (Método Estático) para el año 2006. 74
5.11. Comparación de RMSE entre spread papel y las dos alternativas de valorización, modelo de 2 etapas y método estático. 75
5.12. Comparación de sesgo entre spread papel y las dos alternativas de valorización, modelo de 2 etapas y método estático. 75
5.13. Número de valorizaciones por clase de spread del modelo estático durante el año 2006 de bonos empresariales en UF dentro de la muestra. 76
5.14. Comparación de Spreads Empíricos v/s Spread Modelo por año dentro de la muestra. 78
5.15. Inclinación de las curvas de spreads por clasificación, aproximada como la variación anual promedio que explica las diferencias entre spreads diarios a 2 y 20 años. La tabla resume la media aritmética para cada año en puntos base. 79

G.1. Indicadores de bondad de ajuste para al año 2007, conseguidos por el modelo de estimación en 2 etapas propuesto. 106
G.2. Desglose de sesgo por *bucket* de plazo de la estructura para clasificación A, durante el período fuera de muestra. Cada bucket está compuesto por 2 años. . 108

RESUMEN

Con el desarrollo de los mercados, la deuda privada ha aumentado su importancia dentro de las carteras de los inversionistas institucionales. Su crecimiento ha motivado la creación de modelos que sean capaces de explicar y predecir el spread que los actores del mercado exigen por asumir el mayor riesgo de estos instrumentos. Sin embargo su medición se dificulta por su poca liquidez, lo que genera alta incertidumbre en la estimación de una estructura temporal con riesgo para la valorización de estos activos.

La presente investigación propone una metodología para estimar spreads en un mercado poco líquido mediante un modelo dinámico reducido incluyendo información de la curva libre de riesgo y de papeles riesgosos, con el fin de crear estructuras temporales de spreads que se ajusten a los precios observados y que sean consistentes con la teoría. Para hacer frente a la falta de observaciones propia de un mercado poco profundo, se propone la agrupación de los papeles riesgosos en clases de riesgo, que reúnen activos con características comunes. El modelo se estima usando estimación conjunta entre estas clases, a través de una variación del Filtro de Kalman, que posibilita la estimación del modelo en dos etapas para usar más eficientemente la información de la estructura libre de riesgo.

El modelo se aplica a una muestra de bonos empresariales del mercado Chileno, separando las observaciones por clasificación crediticia. Los resultados muestran que la metodología permite superar las dificultades originadas por la diferencia de liquidez entre los papeles con y sin riesgo, mientras que la estimación conjunta entre clases de riesgo permite obtener spreads consistentes con el riesgo asumido en toda la estructura.

Palabras Claves: Spreads, Modelos Reducidos, Filtro de Kalman, Estimación Conjunta, Bonos Corporativos, Riesgo de Crédito.

ABSTRACT

Private debt has increasingly become more important inside mayor investors portfolios. This growing market has motivated the searching for new models with the ability of predict and explain the spread demanded by the market for the addition of this higher risk into their portfolios. However, measuring this spread is difficult because of the iliquidity of private instruments, creating great uncertainty in the estimation of a risky term structure for the valuation of these assets.

Current investigation propose a methodology for the estimation of credit spreads in a market with infrequent trading through a dynamic reduce form model including information from risk free term structure as well as risky assets, in order to provide consistent spreads curves, capable of adjust observed transactions. To solve the problem of lack of observations at some maturities, common in emerging markets, the grouping of transactions into risk classes is proposed, generating more completed panel data by joining securities with similar characteristics. The model is estimated using joint estimation between these classes, by means of a variation of the Extended Kalman Filter, that allows the separation of the estimation in two stages for a more efficient use of the risk free term structure.

The model is tested using a sample of Chilean corporate bonds, grouping the transactions by credit rating. The results show the success of the methodology in overcome the drawbacks caused by the liquidity differences between risky and risk free securities, while the joint estimation between classes generate spread structures consistent with the risk assumed by investors at any maturity.

Keywords: Credit Spreads, Reduced Form Models, Kalman Filter, Joint Estimation, Corporate Bonds, Credit Risk.

Capítulo 1. INTRODUCCIÓN.

El riesgo de crédito es la posibilidad de que una entidad incurra en pérdidas como consecuencia de que sus deudores o contrapartes fallen en el cumplimiento oportuno, total o parcial, de los términos acordados en los contratos de crédito. Esto se conoce también como riesgo de *default*. Como resultado del riesgo crediticio, a las firmas se les cobra un spread sobre la tasa libre de riesgo para compensar a los prestamistas por la incertidumbre que toman al invertir en empresas con una mayor probabilidad de *default*. Sin embargo, las últimas investigaciones en este campo han postulado que los spreads de mercado podrían tener otros componentes que también influyen en su determinación y que no pueden ser obviados a la hora de intentar modelarlos.

El desarrollo de estos instrumentos como fuente de financiamiento de las empresas ha motivado la creación de modelos que sean capaces de explicar los spreads observados y relacionarlos con el riesgo adicional que se incorpora al incluirlos en las carteras de los inversionistas. El acuerdo de Basilea II, propone la creación de modelos internos de riesgo de crédito que permitan establecer el capital necesario para asegurar la operación de los bancos inversionistas con un alto nivel de probabilidad. Para esto es fundamental tener un buen modelo de spreads que permita valorizar día a día sus portafolios y cuantificar el riesgo asociado a sus exposiciones.

Un aspecto clave de un modelo de spreads es que permite introducir múltiples factores de variación en las tasas de bonos con riesgo, permitiendo un mejor ajuste de los modelos, ya que se ha comprobado que existen correlaciones imperfectas entre los movimientos de bonos con y sin riesgo de default, más aun, en algunos mercados desarrollados se registra una correlación negativa entre la tasa libre de riesgo y el spread de bonos privados (Longstaff y Schwartz, 1992; Duffee, 1998).

La principal dificultad a la hora de modelar los spreads proviene de la carencia de observaciones tanto de transacciones como de eventos de *default* que permitan calibrar los modelos. Esto provoca que se necesiten largos períodos de tiempo para obtener datos suficientes para la calibración abarcando distintos ciclos económicos. Todo lo anterior

resulta en estimaciones de spreads tremendamente volátiles e inconsistentes con las frecuencias de *default* calculadas a partir de los datos. Otra limitación importante proviene del hecho de que los spreads están directamente ligados a la estructura libre de riesgo, por cuanto para obtener estimaciones consistentes se necesita como base una curva creíble y estable tanto en corte transversal como en serie de tiempo.

Existen dos corrientes principales de modelación de spreads. Una de ellas, los modelos estructurales, se basan en el trabajo de Merton (1974), donde la clave para describir el riesgo está en considerar a los bonos y acciones de una firma como derechos contingentes sobre sus activos. De esta forma, se modela la deuda con riesgo como una función del valor de los activos de la firma y del tiempo, donde el umbral que gatilla el *default* está dado por el valor presente de esta deuda representada como un único instrumento. Este enfoque es útil cuando lo que se quiere es explicar los niveles de spreads observados, sin embargo se ha comprobado que usar tasas históricas de *default* para calibrarlo, genera spreads muy pequeños e inconsistentes con los observados en el mercado, problema denominado como *the credit spread puzzle* (Huang y Huang (2003), Eom et al. (2004), Ericsson et al. (2006)).

Las extensiones de esta literatura tienen que ver con la relajación de algunos supuestos poco realistas de Merton (1974). Longstaff y Schwartz (1995) incorpora tasas de interés estocásticas. Collin-Dufresne y Goldstein (2001) crea un planteamiento donde el nivel de deuda de las firmas cambia en el tiempo presentando reversión a una media de largo plazo, lo que ayuda a obtener mayores niveles de spreads. Duffie y Lando (2001) incluye información imperfecta en el modelo, argumentando que ésta justifica parte de los altos spreads observados en bonos corporativos.

La segunda corriente principal son los modelos reducidos, también llamados modelos de intensidad. Este tipo de modelos generalmente demandan una menor cantidad de información que los señalados anteriormente, lo que junto a su modelación dinámica, que posibilita la generación de estructuras temporales, ha permitido su generalización para la evaluación de riesgo de crédito. El enfoque fundamental de los modelos de intensidad

consiste en evaluar los instrumentos riesgosos descontando sus flujos a una tasa mayor a la libre de riesgo. Esta tasa puede modelarse como un proceso de intensidad, donde el spread con el que se ajusta la tasa está determinado por la intensidad de un proceso de saltos que representa el *default*. Duffie y Singleton (1999) demuestra que, bajo ciertas condiciones de regularidad, en la estimación de este tipo de modelos pueden usarse las mismas herramientas que las usadas en modelación de estructuras libres de riesgo, incluso si se usa un modelo con saltos implícitos en la dinámica de las variables. Una importante ventaja de este tipo de modelos, es que son capaces de generar spreads de crédito más acordes con los observados en el mercado, sin embargo carecen de una definición estructural de *default*, y por lo tanto no son tan útiles si lo que se desea es encontrar la razón económica que los explica.

En este contexto Liu et al. (2006) plantea un modelo para estimar en forma conjunta la dinámica de swaps de tasas de interés y la estructura libre de riesgo implícita en sus transacciones, encontrando correlaciones negativas entre ambas. Driessen (2005) propone un modelo con saltos para el spread de bonos corporativos usando factores comunes y específicos entre las firmas, concluyendo que los primeros están más presentes en los precios observados. Por otro lado Houweling et al. (2001) concluye que se obtienen mejores estructuras de spread al estimarlas en forma conjunta con la estructura libre de riesgo.

En un mercado emergente la modelación de spreads es aún más desafiante, por cuanto no sólo se registra falta de liquidez en el mercado privado, sino también en el mercado de renta fija gubernamental, aumentando la incertidumbre en las estructuras libres de riesgo generadas debido a la ausencia de observaciones para ciertos plazos. Esto tiene como efecto generar estructuras de spreads aun más volátiles y con formas poco conservadoras, especialmente en los plazos con menos observaciones.

Una solución planteada por Cortazar et al. (2007) es la utilización de modelos dinámicos para la estimación de las estructuras temporales. Estos se imponen por sobre los modelos estáticos por cuanto aprovechan la información histórica para extraer la

dinámica de las observaciones, permitiendo generar estructuras consistentes día a día, incluso cuando no existen observaciones para ciertos plazos. De esta forma los precios que el modelo estime para cada papel serán una combinación de la información contemporánea (corte transversal) y de la información histórica actualizada (serie de tiempo). En esta misma línea Duffee (1999) aplica un modelo dinámico para estimar la probabilidad de *default* de una firma, asumiendo independencia de la estructura libre de riesgo. Su modelo de un factor individual para cada firma no es capaz de explicar en conjunto el nivel y la pendiente de las estructuras de spreads de los bonos de las mismas.

En un mercado poco desarrollado, la iliquidez imposibilita la estimación de modelos individuales de spreads por emisor, lo que hace imprescindible la agrupación de la información disponible. La agrupación más común es la clasificación de riesgo, la que considera que el *rating* refleja los factores que pueden afectar la solvencia financiera de una entidad, pues proviene de un análisis exhaustivo de entidades especializadas que otorgan una determinada clasificación, englobando empresas con capacidad de cumplimiento similar y que por tanto debieran pagar spreads similares en el mercado.

El objetivo central de esta tesis es proponer y estimar un modelo dinámico para tasas de bonos riesgosos que permita obtener estructuras temporales de spreads consistentes con las observaciones de un mercado emergente. El modelo planteado es un aporte por cuanto se desarrolla una metodología que aprovecha la información de la curva libre de riesgo y las correlaciones históricas entre las distintas clases, de modo de poder superar la carencia de transacciones de un mercado emergente y hasta donde se conoce es pionero en la estimación de dinámicas conjuntas entre clases de riesgo para papeles privados.

El resto de la tesis se organiza como sigue. El capítulo 2 describe el estado del arte en lo que a modelación de spreads y estructuras temporales se refiere. El capítulo 3 describe las principales características del mercado de renta fija chileno. Luego, el capítulo 4 plantea el modelo propuesto para el spread y la metodología de estimación. El capítulo 5 muestra los resultados de la aplicación del modelo al mercado chileno y finalmente el capítulo 6 concluye.

Capítulo 2. MODELOS DE ESTIMACIÓN DE SPREADS.

El constante aumento de papeles privados en la cartera de inversionistas institucionales, junto con su uso cada vez más frecuente como alternativa de financiamiento de las empresas ha estimulado el desarrollo de metodologías que sean capaces de modelar la forma en la que el mercado incorpora el riesgo adicional de estos instrumentos. El spread es la forma en la que el mercado refleja este riesgo y corresponde a la diferencia de tasa con la que se valoriza un papel privado con respecto a la tasa que tendría uno de idénticas características pero libre de riesgo. Su modelación es dificultosa por cuanto el mercado secundario de papeles privados es menos líquido que el gubernamental, generando gran incertidumbre en torno a como obtener el precio de instrumentos que pueden no haberse transado hace largo tiempo.

Una de las principales corrientes de investigación nace a partir del trabajo de Merton (1974), los modelos estructurales, que modelan el proceso que siguen los activos de una firma, para determinar con que probabilidad estos tendrán un valor de mercado por debajo de sus obligaciones, determinando su *default*. La segunda nace de Jarrow y Turnbull (1992), los modelos reducidos que modelan directamente el proceso que siguen las tasas a las que están sujetos los papeles privados, por ser información presente en el mercado. Este capítulo se inicia con una breve mirada a estos dos enfoques de modelación de spreads, para luego describir la forma de obtener la estructura libre de riesgo en un mercado poco profundo y finalmente especificar una metodología de estimación de estructuras de tasas de interés aplicable bajo las condiciones que establece un mercado emergente.

2.1. Modelos Estructurales.

Los modelos estructurales nacen a partir de Merton (1974) que plantea un enfoque para modelar la deuda emitida por agentes privados. Estos modelos se caracterizan porque el *default* proviene del proceso que siguen los activos de la firma, existiendo un umbral que lo desencadena. En particular el enfoque consiste en representar la deuda como un derecho contingente sobre los activos de la firma y por lo tanto se puede valorizar usando

la teoría de valorización de opciones. Se supone un mercado perfecto y sin fricciones, junto a una estructura de riesgo conocida y plana, aunque la mayoría de estos supuestos pueden ser relajados fácilmente. Se asume además que el valor de la firma V sigue un proceso Browniano Geométrico dado por:

$$dV = (\alpha V - C)dt + \sigma V dz \tag{2.1}$$

Donde C es el pago de dividendos o intereses hecho por la firma o los flujos recibidos por nuevos financiamientos si es negativo, σ representa la volatilidad de los activos de la firma. Por lo tanto un activo de esta firma tiene un valor $Y = F(V,t)$ cuyo proceso está dado por la ecuación 2.2

$$dY = (\alpha_y Y - C_y)dt + \sigma_y Y dz_y \tag{2.2}$$

Los términos en 2.2 se relacionan con 2.1 mediante el lema de Îto, obteniéndose la ecuación diferencial que cumple el valor del activo:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{vv} + (rV - C)F_v - rF + F_t + C_y = 0 \tag{2.3}$$

De esta forma, si se considera que el activo Y es un instrumento de deuda emitido por la firma con valor cara B, vencimiento T, y se asume que el no pago de esta deuda entrega los activos de la firma a los acreedores, se puede obtener la condición de borde que permite resolver la ecuación 2.3, la que proviene del hecho de que los accionistas de la firma pagarán la deuda B sólo en caso de que el valor de sus activos en T supere este pago.

$$F = \text{mín}(B, V_T) \qquad \Rightarrow \qquad F = B - \text{máx}(B - V_T, 0) \tag{2.4}$$

Por otro lado si E representa el valor del patrimonio con $E = f(V,t)$, usando la relación contable $V = B + E$ se tiene que:

$$F = \text{máx}(V_T - B, 0) \tag{2.5}$$

Las ecuaciones 2.3 y 2.5 corresponden a las mismas ecuaciones de valorización de una opción de compra europea que dan origen a la fórmula de valorización de Black-Scholes. De esta forma el patrimonio puede ser visto como una opción de compra sobre los activos de la firma con precio de ejercicio B equivalente a la deuda mantenida por la misma. Por otra parte la deuda se representa como un bono con valor cara B menos una opción de venta. Es así como el *default* ocurre cuando el valor de los activos traspasa el umbral determinado por el nivel de deuda de la firma.

Un análisis de las ecuaciones anteriores permite observar que el valor de la deuda depende de la tasa de interés r, la volatilidad de los activos de la firma σ, su valor V y la política de pago de dividendos o intereses C. Sin embargo no depende del retorno esperado de la firma ni de la aversión al riesgo de los inversionistas.

Las principales dificultades a la hora de aplicar esta forma de valorización tienen que ver con la dificultad de representar la deuda como un activo homogéneo y constante, ya que muchas veces esto resulta ser un supuesto poco realista, Además se debe señalar que en un mercado emergente no existe suficiente información histórica de la firma como para estimar la volatilidad de sus activos, no siempre hay certeza acerca del valor de mercado de la empresa y pocas veces se cumple con la jerarquía de pago de la deuda a la hora de repartir los activos entre los acreedores. Todo lo anterior, hace que este tipo de modelos sea poco aplicable, pues además de ser demandante en cuanto al tipo de información requerida, el uso de variables propias de la firma dificulta la agrupación de datos, tópico relevante en mercados con pocas transacciones.

2.2. Modelos Reducidos.

Este tipo de modelos nace a partir de Jarrow y Turnbull (1992) y son estudiados y profundizados en Jarrow y Turnbull (1995) y Duffie y Singleton (1999). En contraste con los modelos estructurales, esta corriente de modelación asume que el mercado posee información incompleta acerca de la situación de las firmas, es decir, no es posible conocer

completamente su estructura de capital y/o el valor de los activos, por lo tanto se valen de la información de mercado para valorizar los instrumentos con riesgo de crédito.

2.2.1. Enfoque de Jarrow y Turnbull (1995)

El planteamiento se basa en una analogía entre la valorización de activos en otra moneda y la valorización de activos con riesgo de crédito. En concreto se asume que el valor $v_1(t,T)$ de un activo con probabilidad de *default* y promesa de pago de 1 al vencimiento T es:

$$v_1(t,T) = p_1(t,T)e_1(t) \tag{2.6}$$

donde $p_1(t,T)$ es el valor presente en t de obtener 1 unidad en T libre de riesgo y $e_1(t)$ es la razón de pago del bono riesgoso, distinta de la unidad prometida debido a la probabilidad de incumplimiento. De esta forma esta razón de pago es análoga al tipo de cambio cuando se intenta valorizar un activo nominado en otra moneda. Para simplificar el análisis se supone que los procesos de la tasa de interés y la probabilidad de *default* son independientes, además de un pago de $\delta < 1$ si la firma quiebra.

Usando la estructura anterior e imponiendo condiciones de no arbitraje, se concluye que para que éste no exista, el valor de un bono con riesgo de crédito debe estar entre el de un bono que paga δ sin riesgo y uno que paga el mismo nominal en esta misma condición. En este sentido, la importancia del trabajo de Jarrow y Turnbull consiste en demostrar la existencia de un spread que de cuenta del riesgo de crédito asociado a una emisión con probabilidad de *default* para que la economía asociada no admita arbitraje.

En su derivación, los autores asumen independencia entre la probabilidad de incumplimiento y el proceso de la tasa *spot*, argumentando que si bien el supuesto es fácilmente relajable, se obtendrían soluciones complejas para las ecuaciones de valorización, factibles de ser solucionadas sólo mediante métodos numéricos.

En tiempo continuo, la ecuación de valorización de un bono riesgoso en este tipo de modelos es:

$$v(t,T) = \left[e^{-\lambda(T-t)} + \delta(1 - e^{-\lambda(T-t)})\right] p(t,T) \tag{2.7}$$

donde p(t,T) es el factor de descuento libre de riesgo para traer los flujos recibidos en T a valor presente. El parámetro λ representa la intensidad media de un proceso de llegadas de Poisson que representa el *default* y por tanto el factor exponencial es la probabilidad de incumplimiento en el intervalo. De la ecuación se deduce que el planteamiento permite valorizar un bono con riesgo de crédito en base a los pagos que se reciben en los escenarios de existencia o no de incumplimiento.

Como se observa, este planteamiento es menos demandante en cuanto a la información requerida para poder estimar el modelo (sólo se necesita conocer los parámetros λ y δ), de hecho si se asumen probabilidades de *default* constantes, sólo se necesita un par de observaciones de bonos riesgosos para estimar la estructura de spreads asociada.

2.2.2. Enfoque de Duffie y Singleton (1999).

2.2.2.1. Descripción del Enfoque de Modelación.

Un importante desarrollo de los modelos reducidos es el enfoque planteado por Duffie y Singleton (1999). En él se establece que bajo ciertas condiciones técnicas, un bono con *default* puede ser valorizado igual como un bono libre de riesgo, descontando a una tasa R ajustada por el riesgo de incumplimiento. Es decir, que esta tasa puede ser parametrizada con modelos multifactoriales tal como en el caso de la tasa libre de riesgo, independiente del proceso seleccionado para las variables que las representan.

En primer lugar se asume que existe una medida de probabilidad equivalente Q, bajo la cual existen una tasa de mortalidad instantánea o *hazzard rate* h_t y una pérdida fraccional de valor del bono L_t al momento del *default*[1]. La tasa h_t es común entre los modelos reducidos, los que asumen que el proceso de incumplimiento puede ser modelado como un proceso de mortalidad donde h_t representa la frecuencia con la que una firma sale de la muestra, modelado típicamente como un proceso de llegadas de Poisson con intensidad media h_t. L_t por su parte, representa la pérdida fraccional de valor de un activo debido a la ocurrencia del *default* en el tiempo t. En su definición debe establecerse

[1]En la notación de Jarrow y Turnbull (1995), h_t es equivalente a λ y L_t corresponde a $(1-\delta)$.

si la pérdida es una fracción del valor cara de la emisión o del valor de mercado. Lo más correcto es suponer que representa un porcentaje del valor cara, sin embargo por simplicidad y debido al ahorro computacional que significa a la hora de estimar el modelo, se asume que representa una fracción del valor de mercado del activo.

La primera condición técnica exigida por los autores es que ambas tasas h_t y L_t sean determinadas exógenamente, es decir, que no dependan del valor de mercado del activo. El supuesto sobre h_t es común entre los modelos reducidos, mientras que el de L_t es concordante con su definición como fracción constante del valor de mercado del activo (RMV - *Recovery of Market Value*). De lo anterior se desprende que para otras definiciones de L_t, por ejemplo su representación como una fracción constante de recuperación del valor cara del instrumento, éste no puede suponerse exógeno. Si bien este supuesto no es imprescindible, en cuanto a que las ecuaciones de valorización de un bono sin él siguen siendo válidas, es importante ya que permite obtener ecuaciones diferenciales lineales en los parámetros que a su vez se traducen en soluciones con formas cerradas para poder estimarlos[2].

La segunda condición, denominada condición de regularidad supone que no existen saltos en el valor del bono justo en el momento del *default*. Es decir, si bien el modelo permite saltos sorpresivos, éstos ocurren justo en el momento del *default* con probabilidad cero. Esta condición permite que la estructura planteada sea extensible a modelos con saltos asegurando la existencia de una solución única para la ecuación de valorización del bono bajo una martingala Q, sin embargo no es necesaria para modelos de difusión sin saltos, donde el supuesto se cumple por definición.

Planteadas estas condiciones, los autores desarrollan la estructuración para valorización de papeles con riesgo de *default*. La derivación en tiempo discreto entrega una forma más intuitiva de comprender las relaciones que permiten la valorización de estos papeles, y por tanto de explicar el modelo planteado en esta tesis. Duffie y Singleton (1999) generaliza luego los resultados para tiempo continuo.

[2]Duffie y Singleton (1999) aborda el planteamiento del problema con un L_t endógeno, obteniendo ecuaciones diferenciales no lineales que deben ser resueltas mediante métodos numéricos.

2.2.2.2. Derivación de la Ecuación de Valorización de un Bono con *Default* en Tiempo Discreto bajo el Enfoque de Duffie y Singleton (1999).

Se tiene un activo riesgoso con promesa de pago X_T a la madurez. Se supone una probabilidad de *default* entre s y $s+1$, h_s bajo una medida neutral al riesgo Q, condicional a que no lo ha habido hasta s, φ_s es la recuperación en unidades de valorización en caso de *default* en s. Además se supone la existencia de una tasa libre de riesgo r_s bajo la misma medida de probabilidad Q. Bajo este planteamiento el valor V_t de este activo es:

$$V_t = (1 - h_t)e^{-r_t}E_t^Q(V_{t+1}) + h_t e^{-r_t}E(\varphi_{t+1}) \tag{2.8}$$

El primer término del lado derecho de la ecuación representa el valor esperado bajo la medida Q de recibir el mismo papel en $t + 1$ dado que no hubo *default*, donde $(1 - h_t)$ representa la probabilidad de que no haya habido *default* entre t y $t+1$. El segundo término representa el flujo esperado en caso de *default* en $t + 1$, multiplicado por la probabilidad de ocurrencia de este evento, en conjunto ambos flujos representan el equivalente cierto del papel y por tanto, debe ser traído a valor presente mediante la tasa libre de riesgo[3].

La fórmula anterior muestra el valor de un bono de descuento expresado en forma recursiva en base a su valor en un período de tiempo más. Despejando recursivamente hacia delante se llega a la fórmula general expresada en la ecuación 2.9.

$$\begin{aligned} V_t &= E_t^Q\left[e^{-\sum_{k=0}^{T-1} r_{t+k}} X_T \prod_{j=0}^{T-1}(1 - h_{t+j})\right] \\ &+ E_t^Q\left[\sum_{j=0}^{T-1}\left(h_{t+j}e^{-\sum_{k=0}^{j} r_{t+k}}\varphi_{t+j+1}\prod_{m=0}^{j}(1 - h_{t+m-1})\right)\right] \end{aligned} \tag{2.9}$$

La expresión anterior es válida sólo si se supone que $h_{t-1} = 0$, lo cual es consistente con la definición de h_t como una probabilidad condicional a que no ha habido default hasta t. Si bien la fórmula entrega una expresión válida y general para la valorización

[3]En valorización neutral al riesgo, el Equivalente Cierto ($EC[X]$) representa el flujo por el cual un inversionista racional estaría indiferente a intercambiar un activo riesgoso por el flujo X prometido por este activo.

de un activo riesgoso, su evaluación es compleja por cuanto implica conocer los valores intertemporales de r, h y L en cada período de tiempo entre t y la madurez T del activo, sin embargo la forma en la que t fue definido (supuesto de recuperación del valor de mercado) permite simplificarla aplicando la relación:

$$\varphi_{t+1} = (1 - L_t)V_{t+1} \tag{2.10}$$

Reemplazando la expresión anterior en la fórmula de valorización se obtiene el valor de un instrumento con riesgo bajo las condiciones planteadas anteriormente.

$$V_t = X_T e^{-\sum_{j=0}^{T-1} r_{t+j}} \prod_{k=0}^{T-1} (1 - h_{t+k}L_{t+k}) \tag{2.11}$$

Finalmente cada uno de los términos de la pitatoria pueden ser reformulados usando la aproximación $e^c = (1+c)$ válida para c suficientemente pequeño [4]. Se obtiene entonces la expresión aproximada para un bono con riesgo de *default* bajo las condiciones técnicas especificadas anteriormente, dada por la fórmula 2.12.

$$V_t = X_T e^{-\sum_{j=0}^{T-1} r_{t+j} + h_{t+j}L_{t+j}} \tag{2.12}$$

Se observa que la expresión anterior es equivalente a la fórmula de valorización de un bono de descuento libre de riesgo, descontado a una tasa R ajustada por el riesgo adicional del papel. Duffie y Singleton (1999) concluyen que este ajuste puede incluir otros términos para considerar por ejemplo diferencias de liquidez o tributarias entre papeles con y sin riesgo, y que cada uno de estos términos adicionales puede ser modelado en el espacio de estados usando las mismas técnicas que en la modelación de tasas de interés libres de riesgo.

La importancia de este enfoque, es que demuestra que la modelación de la tasa de un papel con riesgo de default como la suma de la tasa libre de riesgo más un spread determinado por múltiples factores, puede ser aplicada en modelos para la dinámica de los

[4] El uso de tasas anuales y divisiones en intervalos de tiempo pequeños (por ejemplo días) permite que la aproximación mantenga un error del orden de 1E-07 con respecto al valor real de la expresión e^c.

factores que determinan esta tasa, tanto del tipo de difusión Markoviana como en modelos de difusión con saltos. En una representación en el espacio de estados, el término $h_t L_t$ puede ser representado por una o más variables no observables sin la necesidad de suponer un valor para L_t, sin embargo su separación de h_t es sólo posible si se usa en la estimación información de probabilidades de *default* además de los bonos riesgosos.

2.3. Modelación de la Estructura Libre de Riesgo.

Para medir y modelar spreads, es necesario contar con una estructura libre de riesgo que permita obtenerlos, ya que usualmente se tienen observaciones de tasas o precios de bonos riesgosos, a partir de los cuales deben derivarse los spreads. Para la modelación de estructuras temporales de tasas de interés existen dos corrientes principales, los métodos estáticos y los dinámicos.

Los más comunes dentro de los primeros son los modelos paramétricos de Nelson y Siegel y Svensson. El anexo A resume las características de ambos modelos. En ellos se usa la información contemporánea para calibrar los parámetros período a período. Este tipo de modelos es aplicado con éxito en mercados profundos debido a su simplicidad y buen desempeño cuando se tienen datos bien distribuidos en el corte transversal, sin embargo en mercados emergentes, con bajos niveles de liquidez, pueden generar estructuras poco consistentes día a día ante la falta de observaciones en determinados plazos, sobrestimando la volatilidad real de la curva.

Los modelos dinámicos son una respuesta a este problema. Estos permiten aprovechar la información histórica para estimar en forma conjunta la estructura de tasas actual y su dinámica. De esta forma se extrae la mayor cantidad posible de información del mercado, lo que posibilita una mejor estimación de estructuras temporales, pues se considera tanto la información contemporánea de corte transversal, como la información de serie de tiempo, actualizada por la dinámica ajustada por el modelo de los movimientos estocásticos, de la tasa que se desea modelar.

Para modelar la tasa libre de riesgo en un mercado de pocas transacciones, Cortazar et al. (2007) plantea un modelo generalizado de Vasicek basándose en la formulación de Langetieg (1980). En él se modela la tasa de interés dependiendo de N factores estocásticos x que siguen un proceso de reversión a una media de largo plazo.

$$r = 1^{r\prime}x^r + \delta_r^0 \tag{2.13}$$

La dinámica de cada uno de los factores x queda determinada por la expresión 2.14

$$dx_t = -Kx_t dt + \Sigma dw_t \tag{2.14}$$

En la ecuación anterior K y Σ son matrices diagonales donde cada elemento k_{ii} y σ_{ii} representa la velocidad de reversión a la media y volatilidad del factor x_i respectivamente. El término dw_t por su parte representa un vector de movimientos Brownianos correlacionados tal que:

$$(dw)'(dw) = \Omega dt \tag{2.15}$$

Donde cada elemento de la matriz Ω, ρ_{ij} representa la correlación entre el factor i y j. Para lograr la estacionariedad de la tasa se pide como condición que cada uno de los elementos κ_i de la matriz K sean distintos de cero con el fin de evitar raíces unitarias. Bajo esta especificación, la tasa r tiende a una media de largo plazo δ_0 dado que cada uno de los factores determinantes tiende a una media de largo plazo igual a 0.

Finalmente asumiendo un precio de mercado del riesgo λ, el proceso ajustado por riesgo para los factores x_i queda:

$$dx_t = -(\lambda + Kx_t)dt + \Sigma dw_t \tag{2.16}$$

Aplicando el Lema de Îto sobre la estructura planteada anteriormente, es posible encontrar una expresión cerrada para el valor de un bono de descuento en función de los factores que determinan la tasa, cuyo valor esta dado por las ecuaciones 2.17 y 2.18.

La derivación de los términos $u(t)$ y $v(t)$ se muestra en el Anexo B.

$$P(x_t, \tau) = e^{(u(\tau)' x_t + v(\tau))} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned} u_i(\tau) &= -\left(\frac{1 - e^{-k_i \tau}}{k_i}\right) \\ v(\tau) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{k_i}\left(\tau - \frac{1 - e^{-k_i \tau}}{k_i}\right) - \delta_0^r \tau \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{\sigma_i \sigma_j \rho_{ij}}{k_i k_j}\left(\tau - \frac{1 - e^{-k_i \tau}}{k_i} - \frac{1 - e^{-k_j \tau}}{k_j} + \frac{1 - e^{-(k_i + k_j)\tau}}{k_i + k_j}\right) \end{aligned} \tag{2.18}$$

Esta modelación es una representación canónica en el sentido de Dai y Singleton (2000), en cuanto posee el mínimo número de factores necesarios para hacer el modelo identificable. Esto se logra luego de aplicar una transformación lineal $T(x)$ a las variables de estado, factible gracias al hecho de que estas son variables no observables y por lo tanto cualquier conjunto de ellas puede ser usado para explicar a la variable observable. Más adelante, cuando se establezca el modelo para la tasa de un papel con riesgo, se especificará la forma de obtener esta matriz $T(x)$, aprovechándola para obtener un modelo canónico identificable para la tasa con riesgo.

Otros modelos multifactoriales de tasas de interés necesitan asegurar un valor positivo para la misma, puesto que se modelan estructuras nominales, usando para la dinámica de los factores un proceso CIR [5]. Para la creación de una estructura real de tasas de interés, es decir, ajustada por inflación, un modelo Vasicek permite obtener tasas negativas, las que se dan en períodos de alta inflación, principalmente en los plazos cortos de la estructura.

El número N de factores que afectan la dinámica de la tasa libre de riesgo es una elección que implica un *trade-off* entre dificultad de estimación y flexibilidad para ajustar de mejor forma estructuras temporales complejas. Cortazar et al. (2007) aplica este

[5]Un proceso CIR (Cox, Ingersoll y Ross) es un proceso de difusión de raíz cuadrada donde la dinámica de los factores está dada por la ecuación:

$$dx = (\alpha - \beta x)dt + \sigma\sqrt{x}dw$$

El segundo término de la derecha implica que el factor x sólo puede tomar valores positivos para conservar las soluciones dentro del espacio de números reales.

planteamiento al mercado chileno usando 3 factores para modelar la tasa libre de riesgo en UF, logrando un buen ajuste a los datos y explicando un 99 % de la varianza de los mismos.

2.4. Metodología de Estimación: El Filtro de Kalman Extendido.

Para estimar un modelo dinámico se necesita determinar por un lado los parámetros que rigen el modelo y por otro las variables de estado que representan la variable que se desea modelar. El filtro de Kalman (1960), permite estimar parámetros y variables de estado de forma simultánea, usando la información observada en la fecha que se quiere estimar, así como en fechas anteriores, permitiendo un cierto grado de error en la observación de la variable dependiente, aspecto importante en un mercado poco desarrollado, pues la observación podría estar determinada por condiciones específicas de la transacción que no representan información de mercado. Originalmente el filtro de Kalman fue desarrollado como respuesta a problemas de ingeniería de control y telecomunicaciones, sin embargo ha sido aplicado con éxito a problemas de ingeniería financiera.

Para realizar la estimación de parámetros, el filtro calcula la distribución de las innovaciones de observaciones en el proceso, entendiendo por innovaciones al cambio de la curva generada por el filtro en dos días consecutivos. Esta distribución permite obtener una función de verosimilitud que al ser maximizada da lugar a estimaciones consistentes de los parámetros que rigen la dinámica de las variables de estado. La metodología propuesta por Kalman se define para procesos gaussianos, por lo tanto para aplicarlo es necesario suponer que los errores de observación del modelo distribuyen normal, aunque este supuesto puede ser relajado. Originalmente el filtro de Kalman requiere paneles de datos completos lo que puede redundar en la pérdida de información disponible o agrupación de la misma para cumplir con esta condición, sin embargo Sørensen (2002) y Naranjo (2002) muestran que este requerimiento puede ser relajado, ya que las ecuaciones del filtro aplican para un número m_t de observaciones dependientes del tiempo t.

El filtro de Kalman se define en el espacio de estados mediante ecuaciones de medida, transición y predicción. La ecuación de medida es la que relaciona las variables observadas y no observadas.

$$z_t = H_t x_t + d_t + v_t \qquad v_t \sim N(0, R_t) \tag{2.19}$$

El vector z_t de longitud $(m_t \text{x} 1)$ reúne las variables observadas en el período t. H_t es una matriz de $(m_t \text{x} n)$, donde n es el número de factores del modelo o, dicho de otra forma, de variables de estado x_t que explican las observaciones, d_t es un vector de constantes que da cuenta del desplazamiento necesario para llevar de las variables no observables a las observadas y v_t es una variable estocástica no correlacionada de media cero y varianza R_t que representa los errores de medición de distribución normal que se suponen al plantear el filtro.

La dinámica de las variables de estado se representa en el filtro mediante la ecuación de transición.

$$x_t = A_t x_{t-1} + c_t + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim N(0, Q_t) \tag{2.20}$$

La fórmula anterior describe la relación lineal que existe entre estados, así como la distribución normal multivariada de las perturbaciones ε que permiten modelar la incertidumbre en la estimación de las variables de estado del período siguiente. Definidas ambas ecuaciones, Kalman determina la forma de estimación del espacio de estados mediante una minimización del error cuadrático de estimación, es decir si $\hat{x}_t$ es la estimación de la variable de estado x_t dada la información disponible hasta t, el error cuadrático de estimación se define por:

$$P_t = E(x_t - \hat{x}_t)(x_t - \hat{x}_t)' \tag{2.21}$$

Dado que $\hat{x}_t$ y P_t reúnen toda la información disponible hasta t, el filtro de Kalman es un método recursivo de estimación, esto implica que de haber nueva información observada en $t + \Delta t$ ($z_{t+\Delta t}$), se puede estimar los nuevos valores $\hat{x}_{t+\Delta t}$ y $P_{t+\Delta t}$. A continuación se explica el procedimiento para realizar esta estimación.

Dada la información disponible hasta t, es decir conocidos $\hat{x}_t$ y P_t, es posible estimar sus valores en un período Δt más adelante gracias a las ecuaciones de predicción:

$$\hat{x}_{t+\Delta t|t} = A_{t+\Delta t}\hat{x}_t + c_{t+\Delta t} \tag{2.22}$$

$$P_{t+\Delta t|t} = A_{t+\Delta t}P_t{A_{t+\Delta t}}' + Q_{t+\Delta t} \tag{2.23}$$

La forma en la que se describen las ecuaciones anteriores resalta la naturaleza bayesiana del filtro en el sentido de que la estimación de los valores en $t + \Delta t$ es condicional a los valores estimados para el tiempo t. Con estos estimadores, es posible hacer una predicción de las observaciones del próximo período gracias a la ecuación de medida:

$$\hat{z}_{t+\Delta t|t} = H_{t+\Delta t}\hat{x}_{t+\Delta t} + d_{t+\Delta t} \tag{2.24}$$

Luego al recibir nueva información, es posible contrastar la predicción del filtro con las nuevas variables observadas, haciendo posible encontrar la nueva predicción del filtro que es un promedio ponderado entre la información contemporánea y toda la historia contenida en las predicciones antes detalladas.

$$\hat{x}_{t+\Delta t} = \hat{x}_{t+\Delta t|t} + K_{t+\Delta t}\left(z_{t+\Delta t} - \hat{z}_{t+\Delta t|t}\right) \tag{2.25}$$

$$\hat{P}_{t+\Delta t} = \left(I - K_{t+\Delta t}H_{t+\Delta t}\right)P_{t+\Delta t|t} \tag{2.26}$$

En las ecuaciones anteriores (también llamadas paso de actualización), I corresponde a la matriz identidad de dimensión $(n\text{x}n)$[6], mientras que K es la denominada ganancia de Kalman y está definida por las ecuaciones 2.27 y 2.28.

$$K_{t+\Delta t} = P_{t+\Delta t|t}{H_{t+\Delta t}}'\Omega^{-1}_{t+\Delta t} \tag{2.27}$$

$$\Omega_{t+\Delta t} = H_{t+\Delta t}P_{t+\Delta t|t}H'_{t+\Delta t} + R_{t+\Delta t} \tag{2.28}$$

[6]Cabe recordar que n define el número de variables de estado usadas para representar la variable observable que se está modelando.

$\Omega_{t+\Delta_t}$ es la varianza de la predicción de las innovaciones y junto a la esperanza de la predicción permiten caracterizar la distribución de las innovaciones y por lo tanto son la base para realizar la estimación de los parámetros del modelo mediante el método de máxima verosimilitud.

El método de máxima verosimilitud busca encontrar el set de parámetros que maximiza la probabilidad de que los datos provengan de una distribución supuesta inicialmente. Bajo ciertas condiciones de regularidad, este método entrega estimaciones consistentes y asintóticamente normales.

La distribución inicial que se supone, proviene de las distribuciones de los errores descritos en las ecuaciones 2.19 y 2.20. Las variables x_t y v_t distribuyen normal, lo que implica que z_t y por lo tanto $\hat{z}_{t+\Delta t}$ distribuyan normal, como la suma de variables normales y una constante. De esta forma, dado que ya se definió la media y la varianza de las innovaciones en las ecuaciones 2.24 y 2.28, es posible describir su función de distribución de probabilidad según:

$$f_{z_{t+\Delta t|t}}(z_{t+\Delta t}) = \frac{1}{2\pi|\Omega_{t+\Delta t}|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(z_{t+\Delta t} - \hat{z}_{t+\Delta t|t})'\Omega_t^{-1}(z_{t+\Delta t} - \hat{z}_{t+\Delta t|t})\right] \quad (2.29)$$

Dada la ecuación 2.29 que describe la densidad de probabilidad de las innovaciones $z_{t+\Delta t|t}$ y la independencia de las variables $x_{t+\Delta t|t}$ y $v_{t+\Delta t|t}$, es posible obtener la densidad de probabilidad conjunta de las innovaciones como la multiplicación de las funciones expresadas en 2.29, representada en su forma logarítmica en la ecuación 2.30.

$$\log L(\psi) = \sum_t \left(\log\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2}\log|\Omega_t| - \frac{1}{2}(z_t - \hat{z}_{t|t+\Delta t})'\Omega_t^{-1}(z_t - \hat{z}_{t|t+\Delta t})\right) \quad (2.30)$$

La ecuación anterior resalta la dependencia de la función de verosimilitud del vector ψ que reúne los parámetros que rigen la dinámica del modelo. De esta forma maximizando la ecuación 2.30 es posible obtener estimaciones de los parámetros consistentes con las observaciones diarias. Como esta maximización es invariante frente a constantes, en

realidad se maximiza la función de verosimilitud descrita por:

$$\log \bar{L}(\psi) = -\frac{1}{2}\sum_t \log|\Omega_t| - \frac{1}{2}\sum_t (z_t - \hat{z}_{t|t+\Delta t})'\Omega_t^{-1}(z_t - \hat{z}_{t|t+\Delta t}) \tag{2.31}$$

Se ha descrito la forma en la que se estimarán de manera conjunta los parámetros y variables de estado del modelo, sin embargo aún quedan pendientes dos tópicos para poder aplicar el método de estimación. El primero son los valores iniciales que tomará el filtro y el segundo describe cómo aplicar el filtro cuando la relación entre las variables de estado y las observables es no lineal.

Para inicializar el filtro es necesario definir los valores primitivos del vector de estados y la matriz de varianza-covarianza de los errores de estimación. Dado que estamos frente a un modelo estacionario (se han supuesto todos los componentes de la matriz de reversión distintos de cero) es posible utilizar los momentos incondicionales de las variables de estado, puesto que no se dispone de mayor información.

En Øksendal (2003) se demuestra que los momentos condicionales del vector de estados están dados por:

$$E_t(x_i(T)) = e^{-k_i(T-t)}x_i(t) \qquad i = 1, ..., N \tag{2.32}$$

$$Cov_t(x_i(T), x_j(T)) = \sigma_i\sigma_j\rho_{ij}\frac{1 - e^{-(k_i+k_j)(T-t)}}{k_i + k_j} \qquad i, j = 1, ..., N \tag{2.33}$$

Donde las ecuaciones 2.32 y 2.33 representan los elementos de las matrices de esperanza y varianza-covarianza que describen los dos primeros momentos condicionales del vector de estados. De esta forma, los momentos incondicionales se obtienen del valor de largo plazo de las ecuaciones anteriores dado por:

$$\lim_{T\to\infty} E_t(x_i(T)) = 0 \tag{2.34}$$

$$\lim_{T\to\infty} Cov_t(x_i(T), x_j(T)) = \frac{\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}}{k_i + k_j} \tag{2.35}$$

Por lo tanto el vector de variables de estado se inicializa en 0, mientras que la matriz de varianza-covarianza de los errores de estimación tiene como componentes iniciales cada uno de los términos descritos en la ecuación 2.35.

2.4.1. Extensión del Filtro de Kalman para una Ecuación de Medida No Lineal.

Originalmente el filtro de Kalman supone una relación lineal entre las variables observables y no observables a través de la matriz H, sin embargo en modelación de tasas de interés esto se cumple sólo para bonos de descuento. La existencia de cupones en la mayoría de los papeles de largo plazo, hace necesario la aplicación de la extensión del filtro de Kalman, que define la ecuación de medida cuando no se cumple este supuesto, propuesta por Harvey (1990) quien aplica un desarrollo de Taylor de primer orden.

La ecuación de medida en este caso supone que existe alguna función $P(x_t)$ que relaciona las variables observables y no observables según la ecuación:

$$z_t = P(x_t) + v_t \qquad v_t \sim N(0, R_t) \tag{2.36}$$

Según Harvey (1990), la ecuación anterior puede ser linealizada utilizando una aproximación de primer orden mediante el desarrollo de Taylor donde el punto en torno al cual se linealiza está dado por la predicción del filtro $\hat{x}_{t|t-\Delta t}$.

$$P(x_t) = P(\hat{x}_{t|t-\Delta t}) + \left.\frac{\partial P(x_t)}{\partial x_t'}\right|_{x_t=\hat{x}_{t|t-\Delta t}} (x_t - \hat{x}_{t|t-\Delta t}) \tag{2.37}$$

De esta forma se define una nueva ecuación de medida linealizada dada por la ecuación 2.38.

$$z_t = \bar{H}_t x_t + \bar{d}_t + v_t \qquad v_t \sim N(0, R_t) \tag{2.38}$$

donde

$$\bar{H}_t = \left.\frac{\partial P(x_t)}{\partial x_t'}\right|_{x_t=\hat{x}_{t|t-\Delta t}} \tag{2.39}$$

$$\bar{d}_t = P(\hat{x}_{t|t-\Delta t}) - \left. \frac{\partial P(x_t)}{\partial x_t'} \right|_{x_t=\hat{x}_{t|t-\Delta t}} (\hat{x}_{t|t-\Delta t}) \tag{2.40}$$

El anexo C muestra el desarrollo que permite comparar la matriz H para un bono de descuento y la matriz linealizada para un bono con cupones, de donde se obtiene que los términos de la matriz $\bar{H}$ en 2.39 correspondiente a la observación i y el factor j y de la observación i del vector $\bar{d}$ están dados por:

$$\bar{H}_t^{i,j} = \frac{u^{i,j} \sum_{k=1}^{Ncup} C_k^i e^{u_k' x + v_k}}{\sum_{k=1}^{Ncup} C_k^i t_k e^{u_k' x + v_k}} \tag{2.41}$$

$$\bar{d}_t^i = TIR_0^i - \bar{H}_t^i \hat{x} \tag{2.42}$$

Donde TIR_0^i es la predicción de la tasa interna de retorno del filtro para el papel i, dado un vector de variables de estado predichas $\hat{x}$ y está dada por el valor que resuelve numéricamente la ecuación 2.43.

$$TIR_0^i = y_0 \qquad | \qquad \sum_{k=1}^{Ncup} C_k e^{y_0 t_k} = \sum_{k=1}^{Ncup} C_k e^{u_k' x + v_k} \tag{2.43}$$

Aplicando la linealización anterior, es decir reemplazando la matriz H en las ecuaciones 2.26 a 2.28 por la nueva matriz $\bar{H}$ linealizada, se cumplen todas las condiciones para estimar un modelo dinámico usando papeles con cupones mediante el filtro de Kalman Extendido.

Capítulo 3. CARACTERIZACIÓN DEL MERCADO DE RENTA FIJA CHILENO.

El Mercado de Renta Fija Chileno está compuesto por todos aquellos instrumentos de deuda emitidos por el Banco Central de Chile, la Tesorería General de la República o las Instituciones Financieras y Empresas del país. A continuación se presenta una breve descripción de los instrumentos que lo componen para luego analizar su presencia en el mercado y en las carteras de los principales inversionistas.

3.1. Instrumentos de Renta Fija Chilenos.

En Chile, los instrumentos de renta fija son emitidos en 3 monedas principales: Pesos (CLP), Dólares (USD) y Unidades de Fomento (UF) [7]. Esta última es una moneda reajustable, indexada a la inflación vigente en el país que se calcula a principios de cada mes para el período comprendido entre el día 10 de dicho mes y el día 9 del mes siguiente, de acuerdo a la tasa promedio geométrica de la variación del IPC del mes anterior[8], según la fórmula:

$$UF_t = UF_{t-1}(1 + IPC_{mes-1})^{1/dias_{mes}} \tag{3.1}$$

Separando por madurez de las emisiones, el mercado puede clasificarse en Instrumentos de Intermediación Financiera (IIF) e Instrumentos de Renta Fija (IRF). Los primeros corresponden a instrumentos de corto plazo, mayoritariamente menores a 1 año, emitidos como alternativa de financiamiento de las empresas e instituciones financieras o bien como herramienta de regulación monetaria por el Banco Central. El mercado IRF por su parte, está compuesto por obligaciones de largo plazo y constituye una de las principales fuentes de financiamiento de empresas e instituciones financieras.

La tabla 3.1 muestra una descripción del número de papeles por mercado y moneda. Una comparación por mercado denota que si bien el mercado IRF tiene un

[7]Existe una cuarta moneda, el Indice Valor Promedio (IVP) que se calcula en base a variaciones de la UF, pero representa menos de un 1 % de los saldos vigentes de renta fija al 28/12/2007.

[8]La inflación de un determinado mes es estimada mediante la variación del Índice de Precios al Consumidor (IPC) que publica mensualmente el Instituto Nacional de Estadísticas. Este se calcula en base al valor de mercado de una canasta de bienes representativa del consumo de una familia.

TABLA 3.1. Número de Papeles y Saldos Vigentes por Mercado y Moneda al 28/12/2007

Mercado	Moneda	Número de Papeles	Saldo (billones CLP)	Porcentaje de Saldo
IIF	CLP	2.176	14,71	47,43 %
	UF	4.429	11,14	35,90 %
	USD	664	5,17	16,67 %
Total IIF		**7.269**	**31,02**	**46,15 %**
IRF	CLP	34.129	3,18	8,78 %
	UF	15.953	32,75	90,49 %
	USD	27	0,27	0,73 %
Total IRF		**50.109**	**36,20**	**53,85 %**
Total General		**57.378**	**67,22**	**100 %**

mayor número de emisiones vigentes, los saldos se distribuyen equitativamente. La Intermediación Financiera está compuesta principalmente por depósitos a plazo fijo emitidos por instituciones financieras que operan en el país, observándose un mayor número de emisiones en UF, pero saldos vigentes mayores en pesos. Los saldos de papeles de largo plazo, por su parte se concentran casi totalmente en emisiones en UF.

El mercado IRF puede clasificarse en distintos papeles que difieren tanto en sus emisores como en su finalidad. A continuación se describen los principales tipos de papeles que lo componen:

Renta Fija Gubernamental: Papeles emitidos por el Banco Central o la Tesorería General de la República.

- **Bonos del Banco Central**
  - **BCP**: Papeles del tipo *bullet* emitidos por el Banco Central en pesos, pagan intereses semestrales y la totalidad del principal al vencimiento. Se emiten en plazos de 2, 5 y 10 años con tasas de emisión de 6 % y 8 %.
  - **BCU**: Papeles del tipo *bullet* emitidos por el Banco Central en UF, pagan intereses semestrales y la totalidad del principal al vencimiento. Se emiten a plazos de 5, 10 y 20 años con tasas de emisión de 3 % y 5 %. La primera emisión de papeles BCU fue en septiembre de 2002.

- **PRC**: Papeles amortizables emitidos por el Banco Central en UF, pagan cupones semestrales e iguales. Las tasas de emisión varían entre 5 % y 6,5 % y sus plazos entre 4 y 30 años. Estos papeles dejaron de emitirse en agosto de 2002, pero continúan transándose activamente en el mercado.
- **CERO**: Cupones de Emisión Reajustable Opcional, bono cero cupón emitido por el Banco Central como opción para sustitución o canje de cupones de pagarés reajustables (PRC).
- **Bonos en USD**: Papeles cero cupón, bullet o amortizables emitidos en dólares de Estados Unidos.

- **Bonos de Reconocimiento**
  - **BR**: Bono emitido por el Instituto de Normalización Previsional para reconocer cotizaciones de trabajadores previas al cambio de sistema previsional en 1980.
- **Bonos de Tesorería**
  - **BTP**: Igual a los BCP en estructura de pagos, emitido por la Tesorería General de la República en pesos. Sólo existe una serie emitida en marzo de 2007, a tasa de emisión de 6 % con plazo de 20 años.
  - **BTU**: Iguales a los BCU en estructura de pagos, emitidos por la Tesorería General de la República en UF. Se emiten en plazos entre 10 y 30 años, con tasa de emisión entre 2,1 % y 4,5 %. Comienzan a emitirse a partir de octubre de 2003.

Renta Fija Privada: Papeles emitidos por Instituciones Financieras y Empresas que operan en el país.

- **Bonos Bancarios (BB)**: Instrumentos de deuda de largo plazo emitidos por bancos u otras instituciones financieras como alternativa de financiamiento.
- **Bonos Corporativos (BC)**: Instrumentos de deuda de largo plazo emitidos por empresas como alternativa de financiamiento.
- **Bonos Securitizados (BS)**: Instrumentos de deuda de largo plazo emitidos por empresas securitizadoras formando patrimonios separados con objetivos

específicos fijados por sus clientes. Normalmente están constituidos por una serie *premium* y una subordinada de peor clasificación crediticia.

- **Bonos Subordinados (BU)**: Bonos emitidos por bancos para cumplir con los requerimientos de capital impuestos por la superintendencia que los regula.
- **Letras Hipotecarias (LH)**: Instrumentos de deuda emitidos por bancos e instituciones financieras para el otorgamiento de créditos con garantía hipotecaria.

La tabla 3.2 muestra la distribución de papeles y saldos de renta fija de largo plazo en los distintos tipos antes mencionados [9], separados por moneda de emisión.

TABLA 3.2. Distribución por tipo de papel del mercado de renta fija de largo plazo el 28/12/2007.

Moneda	Tipo	Número de Papeles	Saldo (billones CLP)	Porcentaje Saldo
CLP	**Bono Bancario**	3	0,21	0,58 %
	Bono Banco Central	10	1,89	5,21 %
	Bono Reconocimiento	34049	0,08	0,21 %
	Bono Tesorería	1	0,17	0,47 %
	Bono Corporativo	15	0,30	0,83 %
	Bono Securitizado	44	0,53	1,46 %
	Letra Hipotecaria	7	0,00	0,00 %
UF	**Bono Bancario**	69	4,67	12,89 %
	Bono Banco Central	1093	7,65	21,14 %
	Bono Tesorería	5	1,37	3,79 %
	Bono Corporativo	228	9,36	25,87 %
	Bono Securitizado	169	0,82	2,27 %
	Letra Hipotecaria	14235	6,65	18,37 %
	Bono Subordinado	96	2,20	6,08 %
	Otros	60	0,03	0,08 %
USD	**Bono Banco Central**	21	0,19	0,53 %
	Bono Corporativo	4	0,04	0,11 %
	Bono Securitizado	2	0,03	0,09 %

[9]Para aproximar los saldos se utiliza los nominales vigentes de los instrumentos de renta fija presentes en la custodia del Depósito Central de Valores de Chile (DCV).

De ella se observa que con 9,7 billones de pesos en saldos vigentes [10], los bonos corporativos constituyen el principal activo de largo plazo de la economía chilena. De hecho si se consideran además los bonos bancarios, subordinados y securitizados, en un grupo llamado bonos empresariales (BE) este monto aumenta a 15,96 billones de pesos, representando más del 40 % del total de saldos de renta fija de largo plazo. El segundo grupo en importancia es del Banco Central con 9,54 billones de pesos. Estos papeles son los que permiten construir la estructura libre de riesgo en el mercado nacional. La figura 3.1 muestra la evolución de los saldos vigentes al final de cada año, separando el mercado de renta fija en 3 grandes subconjuntos, bonos de gobierno y tesorería (BG), bonos de empresa (BE) y letras hipotecarias (LH), para las dos principales monedas del mercado. Se aprecian notables diferencias entre la renta fija nominada en pesos y en UF en cuanto a saldos vigentes de BG y LH. Mientras los BG en pesos han aumentado su saldo total a una tasa de crecimiento de 9,9 % promedio, su total en UF ha disminuido un 2,6 % en promedio por año, en línea con la nominalización de la politica monetaria del Banco Central a partir de agosto de 2001. Por su parte las letras hipotecarias se encuentran emitidas casi completamente en UF, presentando sin embargo una tasa de decrecimiento de un 6,7 % en promedio, debido a la aparición de otras alternativas de financiamiento de los bancos para los creditos hipotecarios.

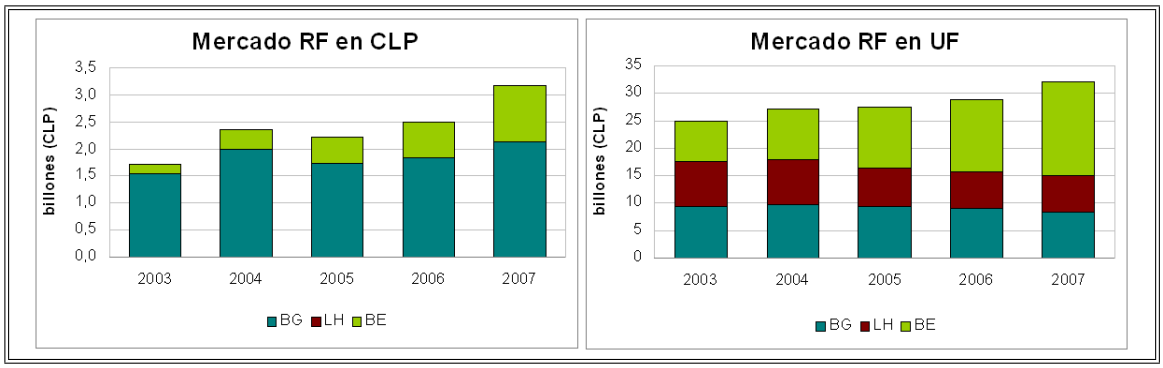

FIGURA 3.1. Evolución de saldos vigentes al fin de cada año en bonos gubernamentales(BG), empresariales (BE) y letras hipotecarias (LH) entre los años 2003 y 2007

[10]Se entiende por 1 billón de pesos a 10^{12} pesos. Esta terminología es la misma que se utiliza en el resto del documento.

Por otro lado los bonos de empresa han mostrado una notable tasa de crecimiento anual de 55,6 % y 23,4 % en promedio en pesos y UF respectivamente entre los años 2003 y 2007. Aun así, un 94 % de los saldos vigentes a 2007 corresponden a BE nominados en UF, denotando que la nominalización del mercado nacional no ha tenido los efectos esperados en el mercado privado.

La figura 3.2 muestra la evolución del promedio de pesos transados diariamente de bonos empresariales (BE) y gubernamentales(BG) emitidos en UF entre enero de 2003 y diciembre de 2007. En ella se observa la evolución del mercado de renta fija, aumentando al triple el promedio diario de transacciones en 4 años. Por otro lado se observa las diferencias de liquidez entre ambos mercados, donde las transacciones de bonos gubernamentales constituyen en promedio más de un 71 % de los montos diarios transados, sin embargo los montos transados de bonos empresariales han logrado un aumento de 5.7 veces con respecto al inicio del período, lo que muestra la mayor trascendencia que han logrado estos instrumentos, no sólo como alternativa de financiamiento, sino también como alternativa de inversión para los actores del mercado.

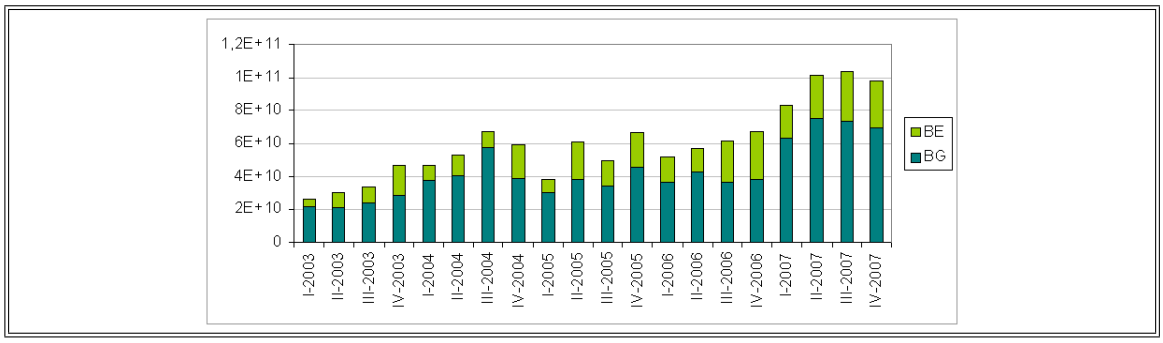

FIGURA 3.2. Evolución de montos transados en bonos gubernamentales(BG) y empresariales (BE) por trimestre entre los años 2003 y 2007 en la Bolsa de Comercio de Santiago.

3.2. Los Bonos Empresariales.

El principal instrumento en montos emitidos de la renta fija privada chilena lo constituyen los bonos empresariales. Ellos engloban todas las emisiones de largo plazo de

empresas e instituciones financieras que no son letras hipotecarias. La figura 3.3 muestra la evolución que ha tenido su emisión, separando por los distintos tipos de instrumentos clasificados dentro de este grupo. En pesos, la mayoría del mercado está formado por bonos securitizados, sin embargo los bonos corporativos han aumentado su saldo vigente en 6,6 veces en 4 años. Del mercado en UF se observa que en promedio un 65 % de los saldos corresponde a bonos corporativos, sin embargo los bonos bancarios han experimentado un crecimiento de un 550 % con respecto al nominal vigente al inicio del año 2003.

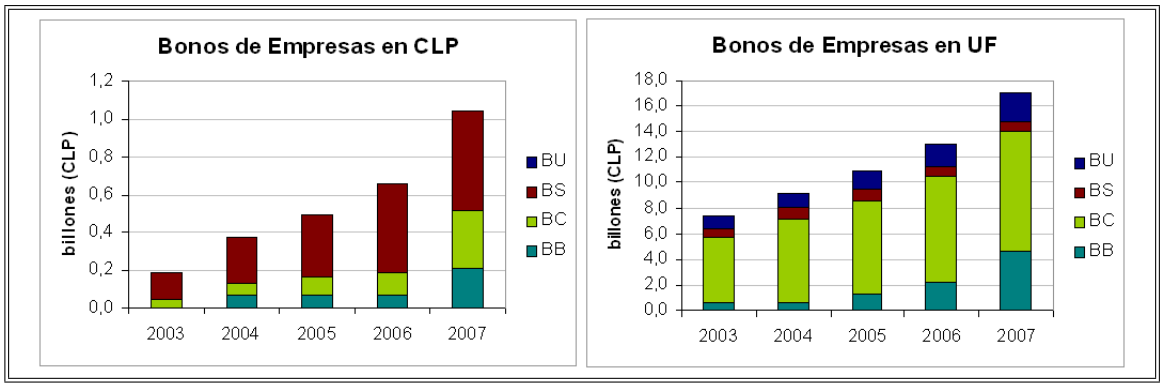

FIGURA 3.3. Serie de Tiempo de saldos vigentes de bonos de empresa en CLP y UF entre los años 2003 y 2007.

La Tabla 3.3 muestra una descomposición por moneda de las emisiones de bonos empresariales, el número de transacciones, montos promedio transados diariamente en el período 2003-2007 y los saldos vigentes a fines del año 2007.

TABLA 3.3. Descripción de bonos empresariales por moneda de emisión al 28/12/2007.

Moneda	Número de Emisiones	Número de Transacciones	Montos Transados (MM CLP)	Saldos Vigentes (billones CLP)
CLP	49 (6,6 %)	2.118 (10,0 %)	1.222,97 (7,1 %)	1,04 (6,5 %)
UF	678 (91,3 %)	18.677 (88,4 %)	15.814,80 (91,7 %)	14,85 (93,0 %)
USD	16 (2,1 %)	335 (1,6 %)	213,93 (1,2 %)	0,07 (0,4 %)
Total	**743**	**21.130**	**17.251,70**	**15,96**

Los Bonos nominados en UF representan más del 90 % de las transacciones de bonos corporativos y el 93 % de saldos vigentes. Esto se explica por la composición de la

demanda de instrumentos, donde los mayores inversionistas tienen carteras de largo plazo que requieren estar cubiertas frente al riesgo de inflación. Si separamos por clasificación de riesgo, la mayoría de las firmas emisoras se concentran en las clasificaciones AA y A, abarcando entre ambas más del 70 % del mercado de bonos de empresas. La tabla 3.4 describe el mercado de bonos empresariales separando por clasificación de riesgo.

TABLA 3.4. Bonos de Empresas por clasificación de riesgo, Montos promedio diarios transados entre 2003 y 2007 y saldos vigentes al 28/12/2007.

Clasificación Consolidada	**Clasificación**	**Montos Transados (MM CLP)**		**Saldos Vigentes (billones CLP)**	
AAA	**AAA**	3.320,80	19,25 %	4,82	30,2 %
Total AAA		**3.320,80**	**19,25 %**	**4,82**	**30,2 %**
AA	**AA+**	2.718,44	15,76 %	1,94	12,1 %
	AA	3.739,18	21,67 %	3,14	19,7 %
	AA-	2.550,32	14,78 %	2,56	16,0 %
Total AA		**9.007,93**	**52,21 %**	**7,63**	**47,8 %**
A	**A+**	1.776,70	10,30 %	1,43	9,0 %
	A	1.512,52	8,77 %	1,54	9,6 %
	A-	657,74	3,81 %	0,16	1,0 %
Total A		**3.946,97**	**22,88 %**	**3,13**	**19,6 %**
BBB	**BBB+**	335,62	1,95 %	0,02	0,1 %
	BBB	81,73	0,47 %	0,02	0,1 %
	BBB-	197,68	1,15 %	0,08	0,5 %
Total BBB		**615,03**	**3,57 %**	**0,12**	**0,7 %**
BB	**BB+**	23,44	0,14 %	0,00	0,0 %
	BB	37,43	0,22 %	5,3E-04	0,0 %
Total BB		**60,87**	**0,35 %**	**5,3E-04**	**0,0 %**
B	**B**	2,43	0,01 %	1,7E-03	0,0 %
Total B		**2,43**	**0,01 %**	**1,7E-03**	**0,0 %**
Otra		**297,66**	**1,73 %**	**0,25**	**1,6 %**
Total		**17.251,70**	**100,00 %**	**15,96**	**100 %**

Se observa que prácticamente el 95 % del mercado se concentra en las 3 primeras clasificaciones de riesgo, mientras que en saldos vigentes alcanzan el 97 %, siendo la clasificación predominante la AA, que abarca alrededor del 50 % del mercado con un promedio diario de transacciónes de 9 mil millones de pesos.

Adicionalmente las emisiones de bonos de empresas pueden clasificarse según si contienen o no opciones implícitas en su conformación. Estas opciones pueden ser por un lado la opción de redención anticipada o prepago, en la que los emisores tienen el derecho a rescatar parte o la totalidad de la deuda contraída, previo aviso. Usualmente estas emisiones tienen un período inicial durante el cual el emisor no puede prepagar su deuda. Estos bonos se emiten y transan activamente en el mercado primario y secundario chileno. Otro tipo de opción presente es la opción de convertibilidad, en la cual el comprador de la emisión tiene el derecho de convertir los bonos adquiridos en acciones de la misma empresa emisora. No existen sin embargo papeles transados en la Bolsa de Comercio de Santiago con este tipo de opcionalidad entre los años 2003 a 2007.

La tabla 3.5 muestra una comparación en montos transados y saldos emitidos por clasificación de bonos con y sin opciones de prepago. De ella se deduce que en general en el mercado chileno se emiten y se transan más bonos con opción de prepago, constituyendo aproximadamente un 59 % de los saldos vigentes del mercado de bonos empresariales. La diferencia entre bonos con y sin opción de prepago es más fuerte para bonos A y AA, mientras que los AAA se distribuyen de forma similar.

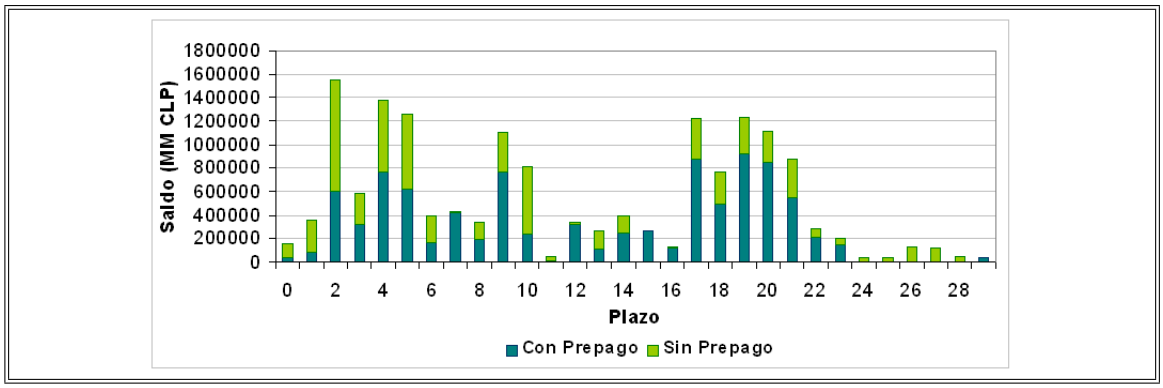

FIGURA 3.4. Saldos vigentes a diciembre de 2007 de bonos empresariales con y sin opción de prepago por plazo de emisión.

La figura 3.4 muestra la distribución de las emisiones por plazo. De ella se observa que las mayores concentraciones se producen en torno a los 5 y 20 años, debido a las necesidades de las empresas de financiar proyectos de corto o largo plazo, donde los bonos

TABLA 3.5. Montos promedio transados diariamente durante el período 2003-2007 y saldos vigentes a diciembre de 2007 de Bonos Empresariales con y sin opción de prepago.

Clasificación Consolidada	Prepago	Montos Transados (MM CLP)		Saldos Vigentes (billones CLP)	
AAA	**Sin Prepago**	1.344,13	7,79 %	2,36	14,81 %
	Con Prepago	1.976,67	11,46 %	2,46	15,41 %
Total AAA		**3320,80**	**19,25 %**	**4,82**	**30,22 %**
AA	**Sin Prepago**	4.088,63	23,70 %	3,18	19,95 %
	Con Prepago	4.919,31	28,51 %	4,45	27,87 %
Total AA		**9.007,93**	**52,21 %**	**7,63**	**47,82 %**
A	**Sin Prepago**	1.198,53	6,95 %	0,89	5,59 %
	Con Prepago	2.748,44	15,93 %	2,24	14,02 %
Total A		**3.946,97**	**22,88 %**	**3,13**	**19,62 %**
BBB	**Sin Prepago**	375,09	2,17 %	0,06	0,40 %
	Con Prepago	239,94	1,39 %	0,05	0,34 %
Total BBB		**615,03**	**3,57 %**	**0,12**	**0,74 %**
BB	**Sin Prepago**	32,92	0,19 %	0,00	0,00 %
	Con Prepago	27,95	0,16 %	5,30E-04	0,00 %
Total BB		**60,87**	**0,35 %**	**5,30E-04**	**0,00 %**
B	**Sin Prepago**	0,22	0,00 %	0,00	0,00 %
	Con Prepago	2,21	0,01 %	1,66E-03	0,01 %
Total B		**2,43**	**0,01 %**	**1,66E-03**	**0,01 %**
Otra	**Sin Prepago**	118,59	0,69 %	0,04	0,25 %
	Con Prepago	179,07	1,04 %	0,21	1,34 %
Total Otra		**297,66**	**1,73 %**	**0,25**	**1,58 %**
Total general		**17.251,70**	**100,00 %**	**15,96**	**100,00 %**

de bancos se concentran en torno a los 5 años y los corporativos en torno a los 20. A su vez se observa que si bien existe un predominio general de los bonos con prepago, las mayores diferencias se producen en bonos de largo plazo, lo que se explica por el deseo de las empresas de poder rescatar deuda de largo plazo ya sea para refinanciarse si las condiciones actuales de mercado son favorables o manejar la duración de sus pasivos.

Finalmente se realiza una caracterización de liquidez del mercado gubernamental y de empresas de renta fija. Las figuras 3.5 y 3.6 muestran una comparación del panel de datos para diciembre de 2007 de bonos empresariales con y sin opción de prepago

versus bonos gubernamentales, donde los puntos negros implican que al menos uno de los papeles del grupo ha sido transado. En primer lugar se observa que los papeles gubernamentales se transan hasta un plazo de 20 años, mientras que en el mercado privado existen transacciones hasta 30 años, generando incertidumbre en cuanto a los spreads en los puntos largos de la estructura temporal, acrecentada por la constante disminución de observaciones a medida que se aumenta en los plazos de la estructura.

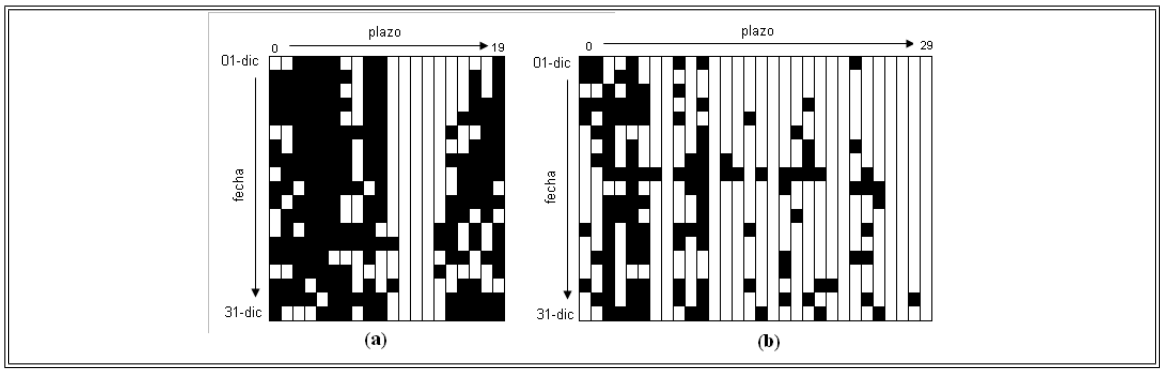

FIGURA 3.5. Transacciones por plazo durante diciembre de 2007 de bonos en UF. (a) Bonos Gubernamentales. (b) Bonos Empresariales sin opción de prepago.

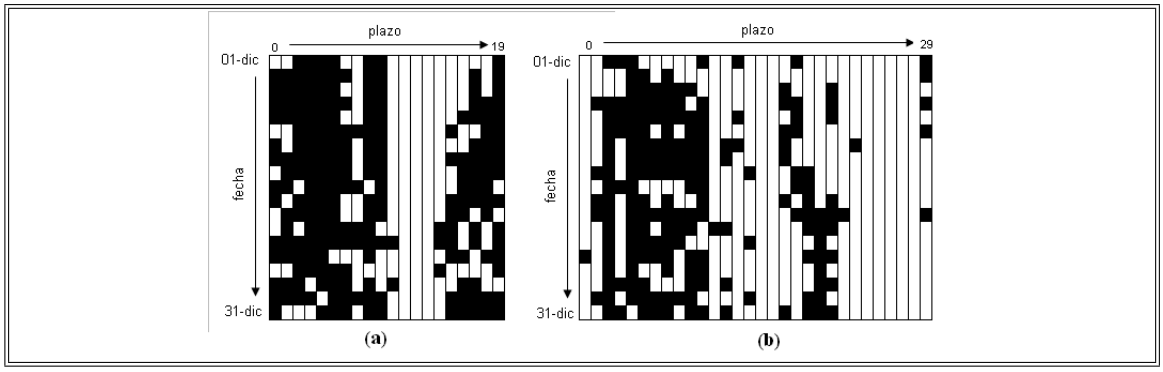

FIGURA 3.6. Transacciones por plazo durante diciembre de 2007 de bonos en UF. (a) Bonos Gubernamentales. (b) Bonos Empresariales con opción de prepago.

Además se extrae que las diferencias de liquidez entre ambos mercados se hacen más patentes a partir de los 10 años para bonos con prepago, habiendo una disminución considerable en los días con observaciones de ambos mercados, sin embargo si se realiza la misma comparación para bonos sin opción de prepago, se aprecia una notable diferencia en la frecuencia de transacciones para todos los plazos.

3.3. Principales Inversionistas del Mercado Chileno

A continuación se describe la estructura de la demanda de valores en el mercado chileno. Esta puede separarse en inversionistas institucionales, privados o extranjeros. Los primeros corresponden a bancos, sociedades financieras, compañías de seguros, entidades nacionales de reaseguro y administradoras de fondos autorizados por la ley. Por otro lado los inversionistas privados son todos aquellos intermediarios de valores y personas naturales o jurídicas que declaren y acrediten contar con inversiones financieras no inferiores a 2.000 UF. Los principales inversionistas institucionales son:

- **Fondos de Pensiones**: son los inversionistas institucionales más importantes en términos de volúmenes de inversión. Su administración es ejercida por sociedades anónimas especiales llamadas Administradoras de Fondos de Pensiones (AFP).
- **Compañías de Seguros**: sociedades anónimas especializadas. Se dividen en compañías de seguros de vida (CSV) o generales (CSG), las primeras invierten prioritariamente en instrumentos de deuda de largo plazo, en tanto las generales son inversionistas de más corto plazo, como consecuencia de la naturaleza de sus negocios.
- **Fondos Mutuos(FM)**: son patrimonios integrados por aportes de personas naturales y jurídicas para su inversión en valores de oferta pública. El patrimonio de cada fondo mutuo se divide en cuotas rescatables, todas ellas de igual valor y características.
- **Fondos de Inversión(FI)**: son patrimonios integrados por aportes de personas naturales y jurídicas para su inversión en valores y bienes que autorice la Ley de Fondos de Inversión. Los aportes quedan expresados en cuotas que no pueden ser rescatadas antes de la liquidación del fondo.
- **Fondos de Inversión de Capital Extranjero (FICE)**: su patrimonio está formado por aportes realizados fuera del territorio chileno por personas naturales o jurídicas.

- **Fondos para la Vivienda**: patrimonio constituido con los recursos depositados en las cuentas de ahorro para arrendamiento de viviendas con promesa de compraventa.

De los inversionistas anteriores, los con mayor participación de mercado en cuanto a inversión en renta fija nacional de largo plazo se refiere son los tres primeros, la figura 3.7 muestra su distribución. Como se ve, la mayoría del mercado se encuentra concentrado en las administradoras de fondos de pensiones, seguidos por las compañías de seguros de vida. En conjunto ambos poseen más del 70 % del mercado, lo que determina la alta demanda por papeles de largo plazo, debido a la conformación de su cartera de activos.

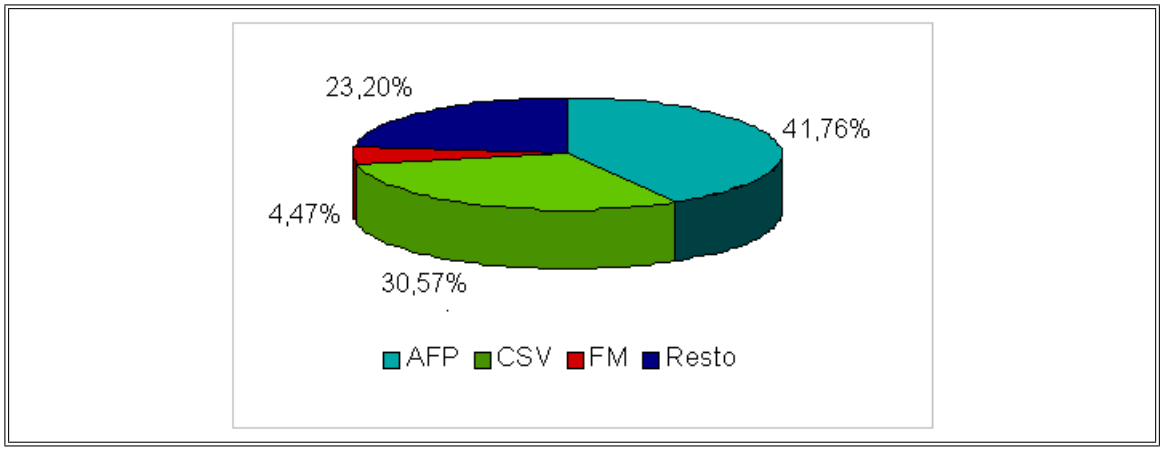

FIGURA 3.7. Distribución del mercado de renta fija de largo plazo entre los principales inversionistas. Porcentajes calculados en base a valor de los activos a diciembre de 2007.

La figura 3.8 muestra una descomposición de las carteras de renta fija de los tres principales inversionistas. Para los tres casos se observa un predominio de la inversión en bonos empresariales, aunque el dominio es mucho más marcado en las AFP y CSV.

En este capítulo se ha caracterizado el mercado chileno identificando los tipos de papeles emitidos, la composición del mercado y los principales inversionistas, presentando características tales como falta de liquidez, escasez de papeles y pocos inversionistas que concentran gran parte de la demanda, lo que lo determinan como un mercado emergente.

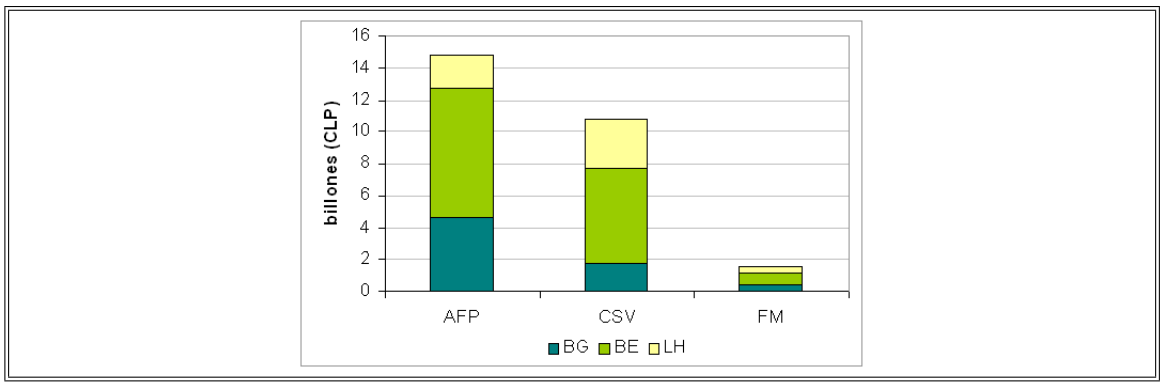

FIGURA 3.8. Separación de las carteras de activos de los principales inversionistas del mercado chileno en bonos gubernamentales (BG), bonos empresariales (BE) y letras hipotecarias (LH).

De esta forma, es interesante plantear un modelo aplicable a este mercado y luego observar su desempeño en relación a la superación de las dificultades antes descritas.

Capítulo 4. MODELO DE ESTIMACIÓN DE SPREADS MULTI-FAMILIA.

El presente capítulo describe el modelo dinámico de spreads propuesto para un mercado de pocas transacciones. Este modelo plantea el uso de información de papeles con riesgo de crédito para estimar los spreads, en una modelación que incluye la curva libre de riesgo y la separación de los papeles riesgosos en clases de riesgo. Para esto, se usa el enfoque desarrollado por Duffie y Singleton (1999) descrito en la sección 2.2.2.

4.1. Modelo para el Spread de Papeles con Riesgo.

En esta sección se presenta el modelo para estimar la estructura de spreads de papeles con riesgo. El modelo se enmarca dentro de la literatura de modelos reducidos introducidos a partir del planteamiento presentado por Jarrow y Turnbull (1992). Este enfoque, junto con las condiciones planteadas por Duffie y Singleton (1999) permiten modelar el proceso de *default* como una función de variables de estado estocásticas y aplicar las mismas técnicas válidas para la modelación de tasas libres de riesgo.

El modelo planteado en esta tesis usa la estructura propuesta por Liu et al. (2006) para el spread de papeles con riesgo en el sentido de que incorpora las variables que modelan la curva libre de riesgo directamente en la determinación del spread. Dado que en un mercado poco desarrollado no existen suficientes observaciones como para calibrar modelos individuales para cada firma, se plantea la segmentación de la muestra en categorías.

De esta forma el spread se modela con n^c factores comunes y n^g factores adicionales para cada una de las agrupaciones que mejor reúnen los papeles con características comunes, de ahora en adelante llamadas clases de riesgo, además se incluyen los n^r factores con los que se modela la curva libre de riesgo. La representación en el espacio de estados para la estructura antes descrita está dada por la ecuación 4.1.

$$s_j = \gamma_j 1^{r\prime} x^r + \delta_j^{c\prime} x^c + \delta_j^{g\prime} x_j^g + \delta_j^0 \tag{4.1}$$

En la ecuación anterior s_j representa el spread de la clase j, x^r son las n^r variables que modelan la tasa libre de riesgo y γ_j es un coeficiente que permite ajustar la correlación entre el spread de la clase j y la tasa r. δ_j^c y δ_j^g son los vectores de coeficientes para las variables de estado comunes x^c y las propias de la clase x^g de largo $(n^c\text{x}1)$ y $(n^g\text{x}1)$ respectivamente.

Esta representación permite modelar el spread en el espacio de estados sin restringir la procedencia de las variables. De esta forma una variable de estado o una combinación de ellas puede ser interpretada como un factor de liquidez, la probabilidad media de pérdida hL o cualquier otro factor que influya en la determinación del spread del papel con riesgo. Esto es importante por cuanto Collin-Dufresne et al. (2001) muestra que no existen factores económicos ni financieros que sean capaces de explicar la correlación entre los spreads de distintas firmas, justificando el uso de variables latentes en el modelo. Además esta estructura de modelación del spread permite una correlación directa con la tasa libre de riesgo, a través del primer término de la derecha, y una correlación indirecta mediante correlaciones entre las variables de estado que modelan la tasa r y las propias del spread s.

La dinámica de las variables de estado comunes y de las clases siguen un proceso de difusión de Vasicek, tal como el planteado anteriormente para la modelación de la estructura libre de riesgo.

$$dx_t = -(\lambda + Kx_t)dt + \Sigma dW_t \tag{4.2}$$

Dada la dinámica gaussiana para las variables de estado y la relación lineal entre ellas y el spread presentada en la ecuación 4.1, si sólo se quisiera representar éste spread como proveniente de la probabilidad de *default*, el proceso gaussiano podría no ser el mejor supuesto, pues se permitirían probabilidades negativas. Sin embargo existen estudios que revelan que la probabilidad de *default* no es el único factor que genera este spread. Chen et al. (2007) prueba el efecto significativo de la liquidez en los precios de bonos privados, Bedendo et al. (2007) asevera que existen factores idiosincráticos de la firma, el mercado

y las tasas de interés que afectan la forma de la estructura de spreads, Elton et al. (2001) encuentra la existencia de un premio por riesgo adicional a la probabilidad de *default* en bonos corporativos, mientras que Delianedis y Geske (2001) demuestra la influencia de impuestos y liquidez en la determinación de los spreads corporativos. Finalmente Dai y Singleton (2002) argumenta que los modelos gaussianos capturan de mejor forma la dinámica del premio por riesgo en modelos afines. Todo lo anterior sugiere que suponer una dinámica gaussiana para las variables que modelan el spread es un supuesto razonable.

En la ecuación 4.2, K y Σ son matrices diagonales cuyos elementos representan las velocidades de reversión a la media y la volatilidad de las variables de estado x_t, λ es un vector de precios de mercado del riesgo para estas variables y dW_t es un vector de movimientos brownianos tales que la correlación entre ellos esta dada por:

$$dW_t' dW_t = \Omega dt \tag{4.3}$$

donde la matriz Ω esta formada por elementos ρ_{ij} que representan las correlaciones entre los movimientos de la variable i y j. Esta modelación permite que las variables de estado reviertan a una media de cero de largo plazo, lo que redunda en que el spread converja al parámetro δ_j^0.

Dada la estructura para modelar el spread y la tasa libre de riesgo descrita en la sección 2.3, es posible obtener la representación en el espacio de estados para la tasa de un bono con *default* perteneciente a la clase j, como la suma de la tasa libre de riesgo más el spread, quedando:

$$R_j = (1 + \gamma^j) 1^{r\prime} x^r + \delta_j^{c\prime} x^c + \delta_j^{g\prime} x_j^g + \delta_r^0 + \delta_j^0 \tag{4.4}$$

La ecuación 4.4 permite modelar la tasa de un bono con *default*. En la próxima sección se establecerá un método de estimación que permite reducir el número de factores del modelo, con el fin de evitar una sobre-especificación del mismo.

Para un bono con esta tasa, su valor sigue siendo el establecido en la ecuación 2.17, con un pequeño cambio en los términos $u(T)$ y $v(T)$, debido a los coeficientes de las variables de estado en la tasa R. De esta forma los valores de $u(T)$ y $v(T)$ para un bono

con *default* según la modelación anterior son los mostrados en 4.5.

$$\begin{aligned} u_i(\tau) &= -\delta_i^x \left(\frac{1 - e^{-k_i \tau}}{k_i} \right) \\ v(\tau) &= \sum_{i=1}^{n} \delta_i^x \frac{\lambda_i}{k_i} \left(\tau - \frac{1 - e^{-k_i \tau}}{k_i} \right) - \delta_0^r \tau \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} (\delta_i^x)^2 \frac{\sigma_i \sigma_j \rho_{ij}}{k_i k_j} \left(\tau - \frac{1 - e^{-k_i \tau}}{k_i} - \frac{1 - e^{-k_j \tau}}{k_j} + \frac{1 - e^{-(k_i + k_j)\tau}}{k_i + k_j} \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Donde δ_i^x=$(1 + \gamma^j)$ para las variables de estado que modelan la tasa libre de riesgo en la tasa de un bono de la clase j, δ_i^x = $\delta_j^c(i)$ para las n^c variables de estado comunes y δ_i^x = $\delta_j^g(i)$ para las n^g variables de estado propias de la clase j.

4.2. Metodología de Estimación Conjunta.

En las secciones 2.3 y 4.1 se definió una estructura para modelar la tasa libre de riesgo y el spread de papeles con riesgo. En este capítulo se propone un método de estimación conjunta para la tasa de estos papeles separados por clases de riesgo.

La estimación conjunta permite describir la dinámica de dos o más variables a modelar, incorporando información de ambos procesos y aprovechando movimientos comunes entre ellos para incluir estas correlaciones en el modelo y a la vez reducir el número de parámetros totales, facilitando la estimación y el descubrimiento del set de parámetros óptimo.

Esta metodología de estimación ya ha sido aplicada al estudio de tasas de interés. Ahn (2004) y Mosburger y Schneider (2005) la usan para modelar de forma conjunta las tasas de interés y el tipo de cambio usando datos de bonos locales e internacionales. En el área de spreads, Houweling et al. (2001) propone un método de estimación conjunta entre bonos libres de riesgo y spreads corporativos, argumentando que se obtiene una forma teóricamente más consistente para las curvas de spreads. Jankowitsch y Pichler (2004) muestra que la estimación conjunta permite reducir irregularidades de la curva

de spreads causadas por la metodología de estimación obteniendo virtualmente el mismo poder explicatorio que los métodos tradicionales de estimación.

Los beneficios de la estimación conjunta se aprovecharán no sólo para plasmar las correlaciones de tasas de bonos privados con la curva libre de riesgo[11], sino además para estimar correlaciones entre la dinámica de las distintas clases en que se agrupan los papeles con riesgo[12]. La estimación conjunta entre clases permite aprovechar la información de transacciones de una clase para actualizar las variables regentes de otra según las correlaciones históricamente presentadas entre ambas.

Al momento de plantear el modelo para la tasa de un bono con riesgo, la ecuación 4.4 no contiene el número mínimo de parámetros para representar esta tasa, es decir, existe una transformación invariante que permite reducir el número de parámetros del modelo sin modificar sus propiedades. Una vez definida la metodología de estimación, es posible aplicar esta transformación invariante, la que resulta en que para los factores individuales se puede encontrar una transformación tal que el coeficiente que los acompaña sea igual a 1. Por el contrario, para los factores comunes, no es posible encontrar tal transformación sino para sólo una de las clases que se estiman en forma conjunta. El anexo D muestra la derivación de la ecuación final para la tasa de un bono con *default*, donde se reduce el número total de parámetros a estimar, dada por la ecuación 4.6.

$$\begin{aligned} R_j \quad &= \quad (1+\gamma^j)1^{r\prime}x^r + \delta_j^{c\prime}x^c + 1^{g\prime}x_j^g + \delta_j^{0,R} \\ &con \qquad \delta_1^c = 1^c \end{aligned} \tag{4.6}$$

En la ecuacion anterior 1^r y 1^g son vectores de largo $(n^r\text{x}1)$ y $(n^g\text{x}1)$. El escalar $\delta_j^{0,R}$ y el vector δ^c representan la versión rotada de los términos originales, luego de la transformación que permite llegar esta ecuación. En la ecuación anterior, si bien, para una clase es posible obtener una transformación que lleve a 1 el coeficiente de las variables

[11]Longstaff y Schwartz (1992) y Duffee (1998) consignan la correlación negativa entre spreads y tasas de interés.

[12]Houweling et al. (2001) propone una estimación multicurva para papeles con distintas categorías de riesgo, modelando la curva de tasas libres de riesgo y spreads mediante *splines*, sin relacionar su dinámica.

de estado de la curva real, se decidió no transformarla con el fin de poder analizar la correlación entre la tasa libre de riesgo y el spread de cada una de las clases.

4.3. Estimación Conjunta mediante Filtro de Kalman.

A continuación se deriva la forma funcional de las matrices del filtro de Kalman para estimar de forma conjunta las tasas de bonos libres de riesgo y bonos privados dentro de las G clases en los que se agrupan estos papeles riesgosos.

Al aplicar el filtro de Kalman a una metodología de estimación conjunta es necesario definir una forma estructural para las matrices de la ecuación de medida, determinada por el grupo al que pertenezca una observación dada. El nuevo vector z_t que reúne las variables observadas en el tiempo t está dado por la ecuación 4.7.

$$z_t = \begin{bmatrix} z_t^r \\ z_t^1 \\ \vdots \\ z_t^G \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

En la ecuación anterior, z_t^r representa el vector de observaciones de papeles usados para estimar la curva libre de riesgo, de largo igual al número de observaciones de estos papeles m_t^r en el tiempo t. Adicionalmente, cada uno de los vectores z_t^j reúnen las m_t^j observaciones de papeles con riesgo pertenecientes a la clase j en el tiempo t. Con lo anterior, el largo total del nuevo vector z_t es de:

$$M_t = m_t^r + \sum_{j=1}^{G} m_t^j \tag{4.8}$$

El ordenamiento definido anteriormente debe ser consistente en cada una de las matrices que representan los parámetros del modelo, de modo que en el proceso de estimación, estos parámetros sean asignados a la observación correspondiente. Para esto, es necesario identificar cada una de las clases en las que se dividen los papeles con riesgo con un número j que representará su posición en las matrices. A su vez, este orden, junto

al modelo propuesto para el spread de cada una de las clases, define la forma estructural de la matriz $\bar{H}$.

$$\bar{H}_t = \begin{bmatrix} \bar{H}_t^r & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \bar{H}_t^{r,1} & \bar{H}_t^{c,1} & \bar{H}_t^{g,1} & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \bar{H}_t^{r,G} & \bar{H}_t^{c,G} & 0 & \cdots & \bar{H}_t^{g,G} \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

La nueva matriz $\bar{H}$ es de dimensión $(M_t \text{x} N)$, donde N no depende del tiempo y representa el número total de factores del modelo, dado por la suma de las variables de estado usadas para modelar la tasa libre de riesgo, los factores comunes de papeles privados y los factores específicos de cada clase, según la ecuación 4.10.

$$N = n^r + n^c + \sum_{j=1}^{G} n^{g,j} \tag{4.10}$$

Cada uno de los términos de la ecuación 4.9 son matrices cuyo número de filas corresponde al número de observaciones de la clase que se está modelando y el número de columnas es la cantidad de factores usados para modelarla.

La modelación conjunta permite identificar y aprovechar los movimientos comunes entre las distintas variables que se modelan, permitiendo que el filtro de Kalman estime estas correlaciones y las use para integrar la mayor cantidad de información contemporánea para estimar los movimientos de los distintos grupos.

4.4. Metodología de estimación en dos etapas.

Aun cuando Houweling et al. (2001) y Jankowitsch y Pichler (2004) señalan los beneficios de usar una estimación conjunta entre la tasa libre de riesgo y el spread, por cuanto se genera una estimación más parsimoniosa y mejores estructuras temporales para el spread, existen características de los mercados riesgosos y libres de riesgo que pueden dificultar una estimación de este tipo.

Una de estas dificultades tiene que ver con las diferencias de liquidez entre las clases que se quiere estimar simultáneamente. De existir tal relación entre una o más de las clases, la estimación conjunta puede sesgar la estimación de los papeles menos líquidos buscando encontrar un mejor ajuste del grupo que presenta un mayor número de observaciones.

Para resolver este inconveniente, una alternativa es suponer una forma funcional para las varianzas de los errores de estimación (componentes de la matriz R del modelo), restringiendo de antemano a que la clase con un menor número de observaciones tenga varianzas menores, lo que implica que el filtro permita un menor nivel de error a la hora de ajustar la estructura de estos papeles. Sin embargo, este método implica suponer a priori que la relación de liquidez se mantiene entre las clases (y que es la única diferencia entre ellas), ya que de haber una inversión en la relación, el modelo debería modificarse. Otro punto en contra es que la elección de la magnitud de la restricción para modificar las varianzas es arbitraria y no puede ser optimizada.

Una mejor solución es el método de estimación usado en Driessen (2005) donde se propone separar las estimaciones de la curva libre de riesgo, y los factores del spread en etapas, argumentando que se obtienen mejores resultados debido a la reducción del número de parámetros a estimar en cada etapa, aunque una estimación simultánea es teóricamente más correcta.

Para efectos del modelo planteado en esta tesis, la estimación se separa en 2 etapas. En un primer paso se estiman las variables de estado de la curva libre de riesgo usando observaciones de bonos gubernamentales y de tesorería de largo plazo. En un segundo paso se estima la tasa de papeles con riesgo usando como conocidas las n^r variables de estado estimadas anteriormente. Se modela la tasa de bonos privados en vez de únicamente el spread, para permitir utilizar tanto las estructuras libres de riesgo y de spread modeladas, para ajustar las observaciones de papeles riesgosos, posibilitando que en este segundo paso se estimen además correlaciones entre las variables de estado de ambas etapas para sacar provecho de los movimientos conjuntos entre ellos.

Si bien, la estimación en dos etapas no es en rigor una estimación conjunta, permite aprovechar la relación de la curva libre de riesgo en la determinación de la tasa con riesgo observada. Desde este punto de vista, una forma más adecuada de plantear esta relación sería como un modelo de 4 factores comunes para cada clase de riesgo, con 3 de ellos determinados completamente por la estructura libre de riesgo vigente. Esta separación es válida cuando se tiene suficiente información como para estimar una curva libre de riesgo confiable, ya que el supuesto subyacente es que las observaciones de papeles riesgosos no son necesarias para determinar la curva libre de riesgo, pero esto no se cumple en el sentido contrario.

Lo anterior provoca algunos cambios en las matrices del modelo. Si bien las dimensiones de los vectores y matrices que reúnen los parámetros siguen siendo las mismas, sólo parte de ellas serán estimadas en esta etapa. De esta forma cada una de estas matrices puede ser dividida en una parte desconocida cuyos términos se estimarán en base a las observaciones de bonos riesgosos y una conocida que fue calibrada en la etapa anterior, determinando en conjunto la tasa final del modelo para el bono con riesgo. Esto se cumple también para el vector de variables de estado:

$$X = \begin{bmatrix} X^r \\ -- \\ X^c \\ X^g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^r \\ -- \\ X^s \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

Esta división implica que al realizar el paso de predicción del filtro de Kalman, para las n^r variables que se consideran conocidas, no es necesario estimar una predicción, puesto que ya se conoce el verdadero valor de la variable en el período $t + \Delta t$. El anexo E demuestra que lo anterior permite reducir las matrices del filtro de Kalman, extrayendo los términos correspondientes a la curva libre de riesgo. En particular la nueva ecuación de medida queda definida por:

$$z_t^S = \bar{H}_t^S X^S + \bar{d}_t^S + v_t \tag{4.12}$$

donde

$$\bar{H}_t^S = \begin{bmatrix} \frac{\sum_{k=1}^{Ncup_1} u_{1,k}^c C_k^1 e^{u'_{1,k}x+v_{1,k}}}{\sum_{k=1}^{Ncup_1} C_k^1 t_k e^{TIR_0^1 t_k}} & \frac{\sum_{k=1}^{Ncup_1} u_{1,k}^{g,1} C_k^1 e^{u'_{1,k}x+v_{1,k}}}{\sum_{k=1}^{Ncup_1} C_k^1 t_k e^{TIR_0^1 t_k}} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sum_{k=1}^{Ncup_m} u_{m,k}^c C_k^m e^{u'_{m,k}x+v_{m,k}}}{\sum_{k=1}^{Ncup_1} C_k^m t_k e^{TIR_0^m t_k}} & 0 & \frac{\sum_{k=1}^{Ncup_m} u_{m,k}^{g,G} C_k^m e^{u'_{m,k}x+v_{m,k}}}{\sum_{k=1}^{Ncup_1} C_k^m t_k e^{TIR_0^m t_k}} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$\bar{d}_t^S = TIR_0 - \bar{H}_t^S \hat{X}^S \quad (4.14)$$

Esta reducción en el tamaño de las matrices, se traduce en una notable disminución del esfuerzo computacional, pues se evita el procesamiento de las observaciones libres de riesgo, sin perder con esto la capacidad de estimar correlaciones entre sus variables de estado y las estimadas en este segundo paso, solucionando a su vez el problema de sesgo en la estimación hacia un mejor ajuste de la clase más líquida en desmedro del resto de ellas. Más aún, la inclusión de las variables de estado libres de riesgo, permite aprovechar la forma y dinámica de esta curva para generar estructuras de spread más consistentes con la teoría, tal como los resultados obtenidos por Houweling et al. (2001) al aplicar una modelación conjunta.

Capítulo 5. IMPLEMENTACIÓN Y RESULTADOS.

En este capítulo se implementa el modelo dinámico y la metodología de estimación conjunta antes planteadas de modo de ilustrar sus resultados y analizar las estructuras de spreads generadas, para evaluar si permite superar las dificultades presentadas en la estimación de spreads en un mercado de pocas transacciones.

5.1. Datos

Se testea el modelo usando el mercado de bonos empresariales chileno. Su elección como papel riesgoso se debe a su notable crecimiento en montos emitidos y presencia en las carteras de grandes inversionistas, además de constituir el principal activo de renta fija en saldos vigentes del mercado chileno. Para ello se toma una muestra de transacciones de estos bonos ocurridas en la Bolsa de Comercio de Santiago entre el 01/01/2003 y el 31/12/2006, dejando como período fuera de muestra todo el año 2007. Esta muestra incluye únicamente bonos nominados en UF sin ningún tipo de opción implícita, lo que implica aproximadamente 39 % de los saldos vigentes de bonos de empresas al fin del período muestral y un 41 % de los montos transados durante la muestra.

El modelo se aplica únicamente a papeles *Investment grade*, es decir para el caso chileno, de clasificación de riesgo consolidada mayor o igual a BBB[13]. La tabla 5.1 muestra una descripción por clasificación de los montos transados, transacciones y saldos vigentes de bonos por clasificación y opción de prepago dentro del período muestral[14]. En ella se observa que la muestra está compuesta por alrededor de un 50 % de bonos de clasificación AA, mientras que los bonos BBB son los menos transados y representan menos de un 1 % de los saldos vigentes de bonos empresariales.

El modelo se implementa para el mediano y largo plazo de la curva de spreads, esto debido a que en el corto plazo existen factores distintos que determinan el comportamiento

[13]Esta es la restricción de inversión del principal inversionista institucional de Chile, las asociaciones de fondos de pensiones (AFP).
[14]El porcentaje de saldos vigentes se calcula en base a la información del último día de la muestra.

TABLA 5.1. Transacciones y Saldos de Bonos Empresariales en UF por clasificación, dentro del período muestral. Los saldos vigentes se calculan al 28/12/2006.

Clasificación Consolidada	Prepago	Nº de Papeles	Montos Transados	Transacciones	Saldos Vigentes
AAA	**Sin Prepago**	31	10,06 %	5,28 %	14,81 %
	Con Prepago	54	14,16 %	7,09 %	15,60 %
Total AAA		**85**	**24,22 %**	**12,37 %**	**30,42 %**
AA	**Sin Prepago**	134	22,17 %	21,53 %	20,43 %
	Con Prepago	182	29,27 %	25,46 %	30,09 %
Total AA		**316**	**51,43 %**	**46,99 %**	**50,52 %**
A	**Sin Prepago**	89	5,21 %	11,18 %	4,72 %
	Con Prepago	130	14,50 %	20,97 %	13,44 %
Total A		**219**	**19,72 %**	**32,15 %**	**18,16 %**
BBB	**Sin Prepago**	30	3,15 %	5,31 %	0,58 %
	Con Prepago	18	0,92 %	1,17 %	0,32 %
Total BBB		**48**	**4,08 %**	**6,48 %**	**0,90 %**

de la curva libre de riesgo, junto a una disminución en la liquidez de transacciones [15], lo que dificulta la aplicación de la metodología para papeles cercanos a su madurez. De esta forma se tomarán únicamente transacciones con plazo al vencimiento mayor a un año, obteniendo una muestra final que incorpora un 90 % de las observaciones factibles y un 97 % de los montos transados durante el período.

La curva libre de riesgo se estima usando transacciones de bonos de largo plazo emitidos en UF por el Banco Central de Chile (BCU y PRC) y por la Tesorería General de la República (BTU). Tal como se explicó en el capítulo 3 éstos son bonos con cupones, con plazos de emisión entre 4 y 30 años. En conjunto representan un 73 % de los saldos vigentes de bonos gubernamentales.

Para implementar la metodología de estimación por clases se decide usar como criterio de separación la clasificación de riesgo. Esta separación ha sido usada por

[15]Dado que se trata de una curva indexada a la inflación, uno de los factores relevantes son las expectativas de inflación para los meses siguientes, las que provocan movimientos bruscos de la curva corta con un menor impacto en el largo plazo. Adicionalmente, durante el período analizado, existen aproximadamente 50 % menos de transacciones con madurez menor a un año que en los plazos entre 1 y 2 y entre 3 y 4 años.

Houweling et al. (2001) y Elton et al. (2001), entre otros y considera que el *rating* de crédito agrupa emisores con capacidad de pago similar y que están sujetos a riesgos comparables, por cuanto deberían enfrentar spreads parecidos en el mercado.

TABLA 5.2. Media y Desviación Estándar de Bonos Empresariales en UF por clasificación dentro de la muestra.

Clasificación Consolidada	**Clasificación**	**Spread Promedio**	**Desviación Estándar del Spread**	**Número de Observaciones**
AAA	**AAA**	0,70 %	0,39 %	728
Total AAA		**0,70 %**	**0,39 %**	**728**
AA	**AA+**	1,16 %	0,50 %	426
	AA	1,18 %	0,68 %	1037
	AA-	1,34 %	0,84 %	1505
Total AA		**1,25 %**	**0,75 %**	**2968**
A	**A+**	1,32 %	1,12 %	773
	A	1,34 %	0,99 %	517
	A-	1,83 %	0,85 %	251
Total A		**1,41 %**	**1,06 %**	**1541**
BBB	**BBB+**	2,60 %	1,24 %	501
	BBB	0,58 %	2,63 %	81
	BBB-	1,51 %	0,44 %	150
Total BBB		**2,15 %**	**1,53 %**	**732**

La tabla 5.2 resume la media y desviación estándar de los spreads por clasificación observados durante el período muestral. De ella se obtienen dos conclusiones importantes. Por un lado se observa que en promedio se cumple la relación de orden teórica para los spread según el nivel de riesgo que representa cada clasificación consolidada y por otro se observa una volatilidad creciente a medida que se empeora en clasificación crediticia, característica acorde con los resultados obtenidos en Delianedis y Geske (2001) que se explica por precios más ruidosos debido a la mayor incertidumbre en la solvencia de sus emisores. Además se observa que el orden de magnitud de spreads se mantiene para el

segundo nivel de clasificación para las clasificaciones AA y A [16]. Por el contrario, para la clasificación BBB, la relación de orden no se verifica en el segundo nivel de clasificación, sugiriendo que se trata de una clase heterogénea donde la clasificación de riesgo no es el mayor determinante del spread al que están sujetos los papeles.

De esta forma podemos suponer en principio que la clasificación de riesgo permite categorizar de forma satisfactoria los bonos empresariales del mercado chileno incluyendo la clasificación BBB, aunque este supuesto será contrastado más adelante con los resultados obtenidos luego de aplicar el modelo.

5.2. Implementación

Para implementar la metodología es necesario definir en primer lugar el número de factores a usar. Para la modelación de la curva libre de riesgo se usan 3 factores tal como Cortazar et al. (2007), que aplica un modelo dinámico del tipo Vasicek a la renta fija chilena libre de riesgo nominada en UF. Para la elección del número de factores que modelan el spread, dada la inclusión de factores comunes entre las clases que se estiman conjuntamente, existen métodos alternativos como los planteados por Tolmasky y Hindanov (2002) y Cortazar et al. (2008) descritas en el anexo F, sin embargo ambos requieren paneles completos para encontrar las matrices de correlación que permiten desarrollar el análisis.

Dada la gran cantidad de datos eliminados al aplicar los métodos de determinación de factores en la estructura de modelación planteada, se probará el modelo con el número mínimo de factores posible, esto es 1 factor común entre clases de riesgo y 1 factor propio de cada una de ellas. Si bien esto puede disminuir la capacidad de ajuste del modelo, permite obtener curvas más influenciadas por la curva libre de riesgo dando lugar a estructuras de spreads bien comportadas, manteniendo la simplicidad en la estimación. El modelo para la tasa de un bono riesgoso de una determinada clasificación entonces

[16] Se observa un pequeño cruce entre los papeles AA- y A+, sin embargo dadas sus altas desviaciones estándar en comparación con el resto de las observaciones de sus respectivas clasificaciones, ambas medias resultan no ser estadísticamente diferenciables.

contiene 5 factores, los tres factores de la tasa libre de riesgo, el factor común entre clases y el propio. De esta forma la ecuación para la tasa de un bono riesgoso de la clase de riesgo j queda:

$$\begin{aligned} R_j &= (1+\gamma^j)(x_1^r + x_2^r + x_3^r) + \delta_j^c x_1^c + x_{1,j}^g + \delta_j^{0,R} \\ con \quad & \delta_1^c = 1^c \\ & dx_i = -(\lambda_i + \kappa_i x_i)dt + \sigma_i dw_i \end{aligned} \tag{5.1}$$

Como métrica de evaluación se usa el ajuste de las curvas a los datos observados, medido a través de la raíz del error cuadrático medio (RMSE) y el error promedio como una medida del sesgo de la estimación. Para medir la calidad de estimación de los parámetros estimados se obtiene la estructura de volatilidad implícita del modelo comparándola con la volatilidad empírica de los datos. Finalmente se analiza el desempeño del modelo planteado frente a otras alternativas metodológicas de estimación.

5.2.1. Estimación de Parámetros del Modelo.

Aplicando el modelo planteado para el spread de bonos empresariales y usando como observaciones las TIR de transacción de papeles con riesgo de clasificaciones AAA, AA, A y BBB, y una selección de papeles sin riesgo nominados en UF, se estima mediante la metodología de estimación conjunta en dos etapas la curva libre de riesgo relevante para este tipo de papeles y luego las 4 curvas de spread para cada una de las clases del modelo.

En primer lugar se presentan los parámetros estimados para la curva libre de riesgo en UF, llamada curva real debido a que la UF es una moneda indexada a la inflación. En esta etapa se tiene un modelo Vasicek de 3 factores con matriz de reversión a la media diagonal.

La Tabla 5.3 muestra los resultados de la estimación para la curva libre de riesgo nominada en UF. Los parámetros ν representan la raíz cuadrada de la varianza de los errores de medición para cada tipo de papel, ellos denotan un error de entre 13 y 22 puntos base, siendo más alto para los papeles PRC. Se observa que todos los parámetros

TABLA 5.3. Parámetros estimados para curva libre de riesgo en el período dentro de muestra (01/01/2003 a 31/12/2006). Entre paréntesis se muestra la desviación estándar del error.

Parámetro	**Estimación**	**Parámetro**	**Estimación**
ν_{BCU}	0,001327 (0,00004)	σ_3	0,12773 (0,00425)
ν_{BTU}	0,001688 (0,00004)	ρ_{21}	0,34305 (0,08565)
ν_{PRC}	0,002196 (0,00006)	ρ_{31}	-0,0818 (0,0802)
κ_1	0,005344 (0,00002)	ρ_{32}	-0,2527 (0,04023)
κ_2	0,42833 (0,00433)	λ_1	-0,0008 (0,00003)
κ_3	6,960949 (0,12174)	λ_2	0,00908 (0,00253)
σ_1	0,006583 (0,00017)	λ_3	-0,2681 (0,0235)
σ_2	0,021357 (0,00142)	δ_r^0	0,0106 (0,00497)

son estadísticamente significativos y están en línea con los resultados reseñados en Cortazar et al. (2007). El filtro de Kalman usado para esta estimación, permite obtener al mismo tiempo las variables de estado para todo el período de la muestra. Tanto los parámetros estimados como estas variables son considerados como los parámetros y variables verdaderas para la segunda etapa de estimación, por lo que son fijos en esta parte del modelo.

Dada la elección del número de factores descrita en el capítulo anterior, se tiene en esta segunda etapa un modelo de 8 factores de los cuales 3 fueron estimados previamente y pasan a formar parte del *input* del modelo. Para mantener la coherencia de la estimación se disponen las observaciones diarias desde la de mejor clasificación crediticia a la peor, mientras que los factores se ordenan de tal forma que los primeros corresponden a la curva libre de riesgo (considerados fijos), luego el factor común entre papeles con riesgo y finalmente los factores específicos de cada clase. De esta forma, los parámetros con subíndice 4 corresponden al factor común entre clasificaciones y los 5, 6, 7 y 8 a las clasificaciones AAA, AA, A y BBB respectivamente[17].

[17]Para mantener la estabilidad de las curvas en el corto plazo, se incluye como punto de partida de la estructura, el promedio a 1 año de las curvas generadas en los últimos 7 días. Esta ancla permite reducir en un 70 % la sobreestimación de la volatilidad de los datos de corto plazo.

TABLA 5.4. Estimación de parámetros Segunda Etapa para usando el período 01/01/2003 a 31/12/2006. Entre paréntesis se muestra la desviación estándar del error.

Parámetro	**Estimación**		**Parámetro**	**Estimación**	
ν_{AAA}	0,00254383	(0,0005)	ρ_{73}	-0,0096813	(0,6946)
ν_{AA}	0,00284541	(0,0001)	ρ_{83}	0,00030509	(0,3745)
ν_{A}	0,00277438	(0,0001)	ρ_{54}	-0,1085955	(0,1752)
ν_{BBB}	0,00190698	(0,0000)	ρ_{64}	-0,30985569	(0,0050)
ν_{Ancla}	0,01092216	(0,0003)	ρ_{74}	-0,18374735	(0,0622)
κ_4	0,24726199	(0,0043)	ρ_{84}	-0,16820467	(0,0335)
κ_5	4,11788732	(0,0401)	ρ_{65}	0,05989033	(0,3381)
κ_6	2,61541273	(0,0048)	ρ_{75}	0,00401495	(0,1194)
κ_7	2,97551708	(0,0223)	ρ_{85}	0,02606305	(0,235)
κ_8	2,94337642	(0,0800)	ρ_{76}	0,00524886	(0,1000)
σ_4	0,01881462	(0,0003)	ρ_{86}	-0,00542866	(0,0865)
σ_5	0,33152723	(0,0208)	ρ_{87}	-0,00268305	(0,2060)
σ_6	0,43487769	(0,0048)	λ_4	-0,00135251	(0,0000)
σ_7	0,33622219	(0,0031)	λ_5	0,07399285	(0,0013)
σ_8	0,36717598	(0,0090)	λ_6	0,00326244	(0,0008)
ρ_{41}	0,02380569	(0,1738)	λ_7	-0,06822559	(0,0014)
ρ_{51}	0,26259078	(0,1880)	λ_8	-0,05688807	(0,0108)
ρ_{61}	0,22083723	(0,0493)	γ_{AAA}	-0,12591521	(0,0206)
ρ_{71}	0,25417274	(0,2394)	δ^0_{AAA}	0,03207525	(0,0007)
ρ_{81}	-0,04303242	(0,1071)	γ_{AA}	-0,16288219	(0,0092)
ρ_{42}	-0,98649389	(0,0891)	δ^c_{AA}	1,16747706	(0,0266)
ρ_{52}	-0,2549835	(1,7343)	δ^0_{AA}	0,03249442	(0,0002)
ρ_{62}	0,15141641	(0,3293)	γ_{A}	-0,35901622	(0,0098)
ρ_{72}	0,16261586	(0,3124)	δ^c_{A}	1,03211147	(0,0608)
ρ_{82}	-0,02596767	(0,2667)	δ^0_{A}	0,01030767	(0,0006)
ρ_{43}	0,24538857	(0,2709)	γ_{BBB}	-0,11069008	(0,0171)
ρ_{53}	-0,8044074	(3,2784)	δ^c_{BBB}	2,00977049	(0,0868)
ρ_{63}	0,28830856	(0,6524)	δ^0_{BBB}	0,01460092	(0,0056)

La tabla 5.4 entrega los resultados obtenidos en la segunda etapa del modelo. Ella permite observar ciertas características relevantes como los coeficientes γ, que indican la correlación directa existente entre la tasa de un papel con riesgo y la tasa de papeles libres de riesgo. Para todas las clasificaciones se comprueba una relación negativa indicando que para un mayor nivel de tasas los spreads se contraen, consistente con la evidencia empírica encontrada en Longstaff y Schwartz (1992) y Duffee (1998) para el mercado de Estados Unidos.

Por otro lado, los parámetros ρ registran las correlaciones entre las variables de estado. De esta forma, los coeficientes que relacionan las tres primeras variables de estado y el resto, dan cuenta de la correlación indirecta entre los papeles con riesgo y la curva libre de riesgo estimada, medida a través de la relación entre los factores que determinan ambas variables. Sus desviaciones estándar revelan que no es posible obtener conclusiones certeras acerca de ellas, sugiriendo que probablemente toda la correlación entre el spread y la tasa libre de riesgo es cubierta mediante los coeficientes γ. Finalmente las bajas desviaciones estándar del resto de los parámetros revelan que el modelo planteado para el spread de cada clase está bien específicado.

5.2.2. Ajuste del Modelo a las Transacciones dentro de la Muestra.

A continuación se analiza el ajuste del modelo a las transacciones observadas dentro del período de la muestra. Para realizar este análisis el primer paso consiste en observar la forma de las curvas de tasa generadas por el modelo, las curvas de spread implícitas y finalmente obtener los errores promedio calculados al valorizar los instrumentos observados día a día.

En primer lugar se presenta en un mismo gráfico las curvas para cada clase, en conjunto con la curva libre de riesgo para distintas fechas de la muestra. En paralelo se muestran las estructuras de spreads generadas para cada una de estas fechas para poder comparar tanto el nivel de tasas estimado por el modelo como la estabilidad de las curvas de spreads implícitas.

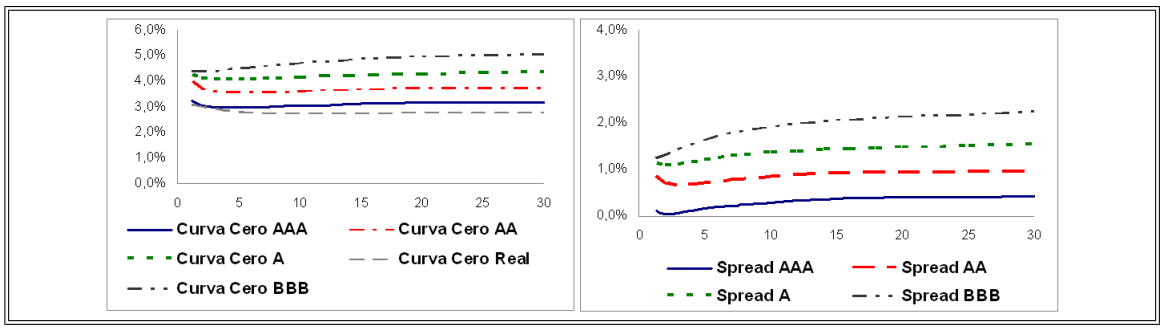

FIGURA 5.1. Curvas Cero Cupón y Curvas de Spread por clasificación de riesgo para el 06/12/2006

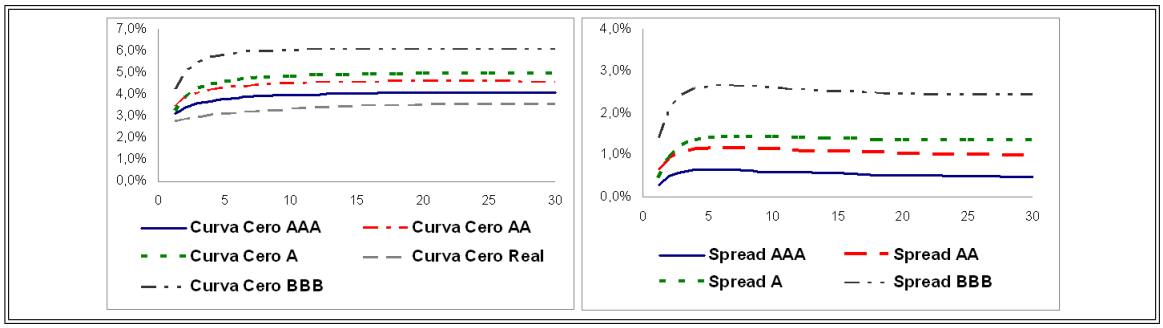

FIGURA 5.2. Curvas Cero Cupón y Curvas de Spread por clasificación de riesgo para el 06/06/2006

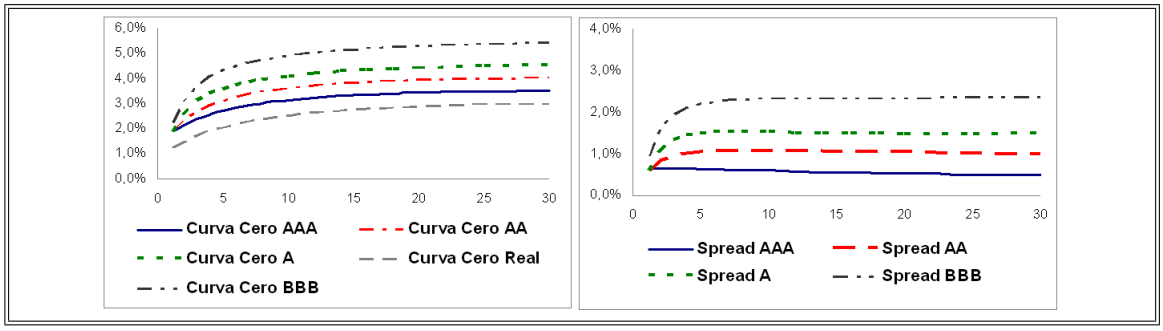

FIGURA 5.3. Curvas Cero Cupón y Curvas de Spread por clasificación de riesgo para el 29/06/2005

Las figuras 5.1 a 5.4 permiten visualizar la relación entre las curvas estimadas. En primer lugar podemos observar la correspondencia que mantienen todas las curvas con la estructura libre de riesgo, generando spreads crecientes o decrecientes según la fecha y tendiendo a un nivel de largo plazo estable a lo largo de la muestra. Esta es una de las bondades conseguidas mediante la estimación conjunta de curvas riesgosas con la curva

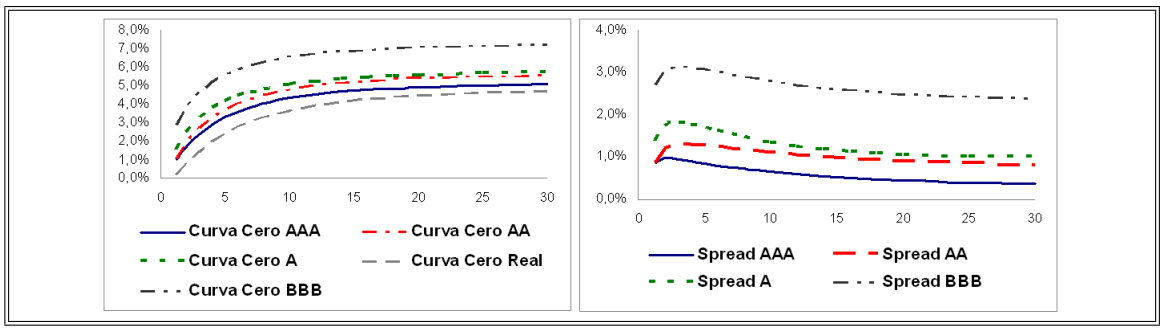

FIGURA 5.4. Curvas Cero Cupón y Curvas de Spread por clasificación de riesgo para el 09/08/2004

libre de riesgo, pero en este caso es una característica que se consigue con la metodología de estimación en 2 etapas propuesta en esta tesis.

Otra característica importante que se observa corresponde a la relación de orden entre las curvas de clasificaciones distintas. Estas mantienen consistencia con la teoría que predice que papeles con más riesgo están sometidos a mayores spreads. Esto se comprueba para todas las clasificaciones usadas en la muestra, en todas las fechas. Para lograr esta relación de orden es fundamental la estimación multi-familia, ya que esta permite que incluso si no hay transacciones de una clase en alguna fecha, las correlaciones históricas actualicen la información de la curva correspondiente, manteniendo la relación consistentemente para el mediano y largo plazo.

Las fechas escogidas para ejemplificar los resultados obtenidos en la muestra, pretenden graficar cómo se comporta el modelo frente a distintos escenarios de tasas. Tomando como proxi del nivel de tasas, la curva libre de riesgo, la figura 5.5 permite comparar el nivel y pendiente de ésta para 1, 5 y 15 años en las mismas fechas antes mostradas. Definiendo como base la estructura de curva libre de riesgo del 06/12/2006, una de las últimas fechas dentro de la muestra, el resto de las fechas fueron escogidas para representar estructuras distintas. De esta forma, el 06/06/2006 se tiene un nivel de tasas más alto, el 07/09/2005 se tiene una estructura de menor nivel que la estructura base y finalmente el 09/08/2004 se tiene una estructura con una marcada pendiente positiva a medida que se avanza en madurez.

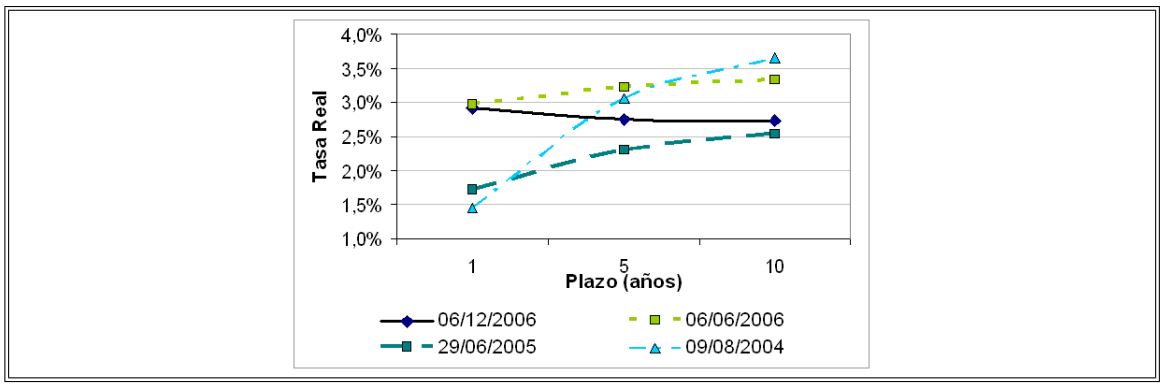

FIGURA 5.5. Curva Cero Real por años para distintas fechas dentro de la muestra

De la comparación de las primeras tres figuras, se observa que las diferencias en el nivel de tasas no generan grandes cambios en las estructuras de spreads implícitas en las tasas de bonos riesgosos. Sin embargo la elevada pendiente de la curva libre de riesgo el 09/08/2004 muestra curvas de spreads descendientes en los plazos, posibilitando mantener la estabilidad de las tasas riesgosas a lo largo de los plazos de la curva.

Una vez analizadas las curvas cero cupón generadas por el modelo y sus interrelaciones, podemos comparar el nivel de ajuste logrado con las curvas de papeles con riesgo. En primer lugar se plantea un análisis gráfico, observando las curvas cero cupón en conjunto con la representación de los bonos empresariales como un bono de descuento usando su duración de Macaulay. Se decide realizar de esta forma el análisis debido a que los papeles de una misma clasificación presentan tablas de desarrollo muy distintas y con tasas de emisión diferentes lo que impide obtener una curva de tasas aproximada que sea aplicable a todas las observaciones. La representación como bono de descuento agrega un cierto nivel de error, dado que se trata de una aproximación de primer orden[18].

[18]Idealmente el spread debe ser obtenido sustrayendo las tasas de papeles con los mismos flujos y en los mismos plazos. Como no siempre es posible encontrar papeles de gobierno con flujos similares a los papeles privados, una buena aproximación para el spread se logra restando la tasa del bono riesgoso a la estructura cero cupón vigente, usando como plazo la duración de Macaulay del papel con cupones.

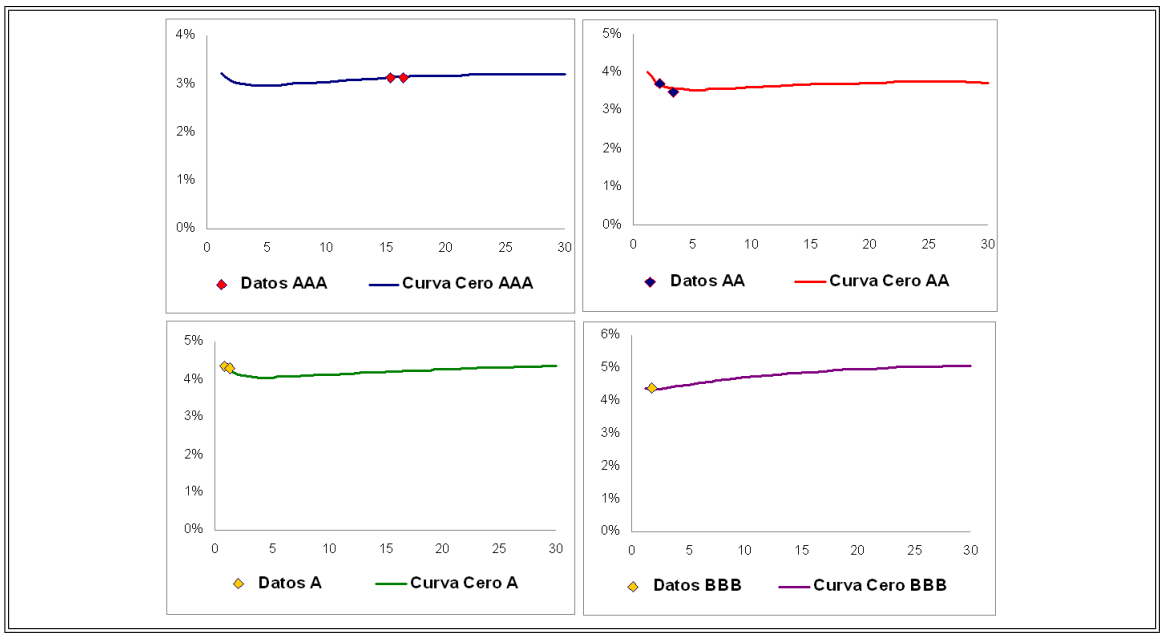

FIGURA 5.6. Curvas Cero Cupón y transacciones por clasificación para el 06/12/2006

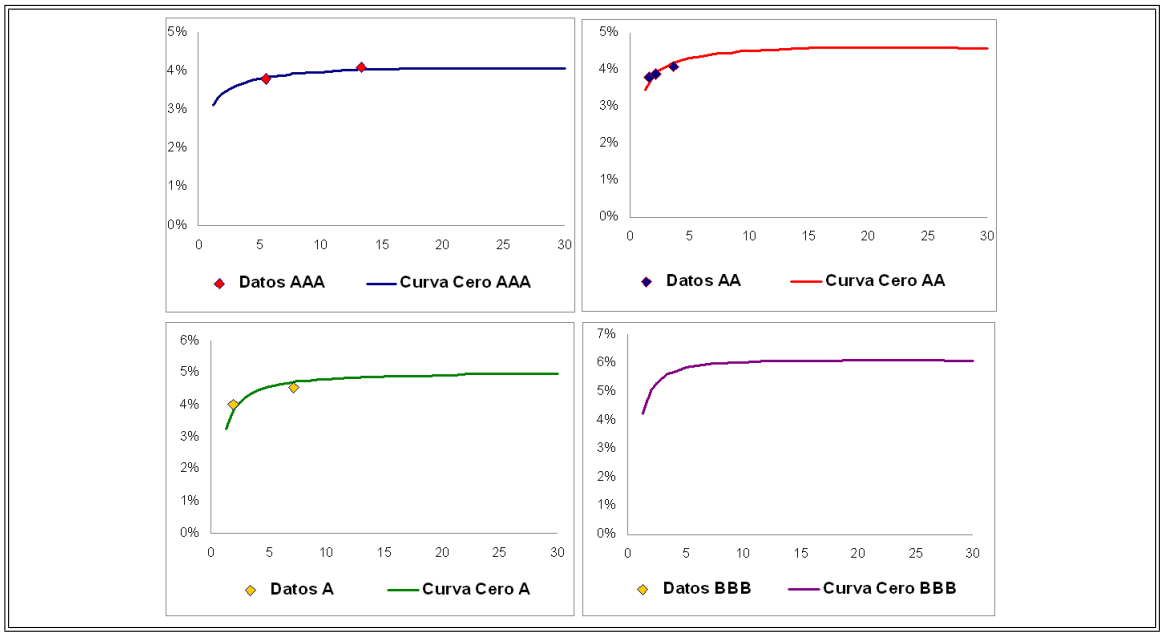

FIGURA 5.7. Curvas Cero Cupón y transacciones por clasificación para el 06/06/2006

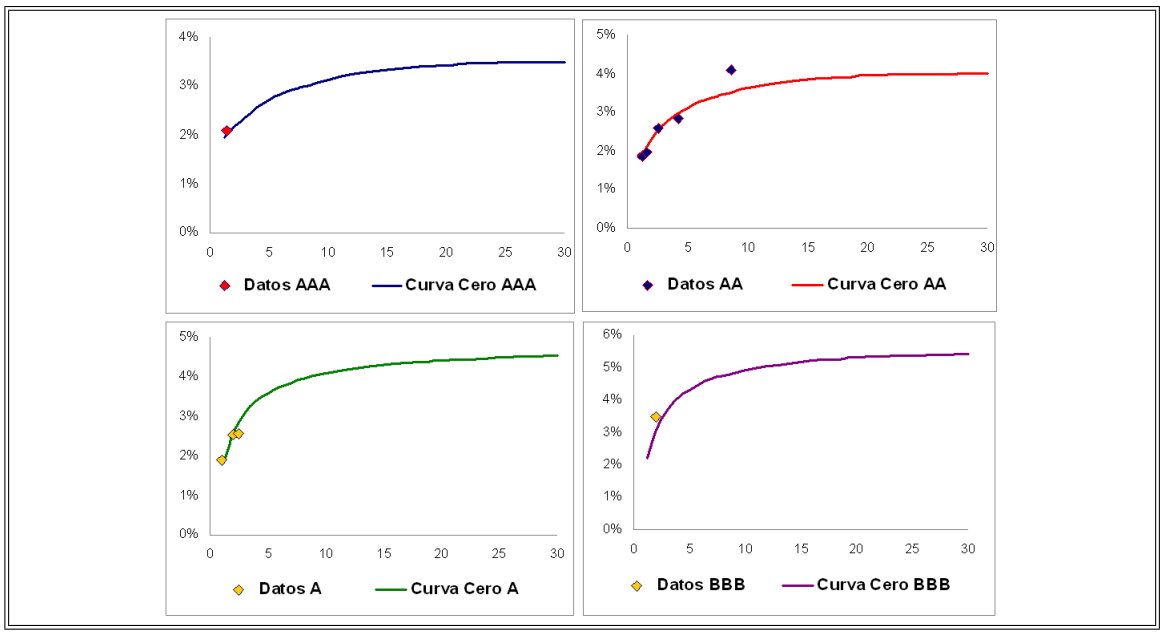

FIGURA 5.8. Curvas Cero Cupón y transacciones por clasificación para el 29/06/2005

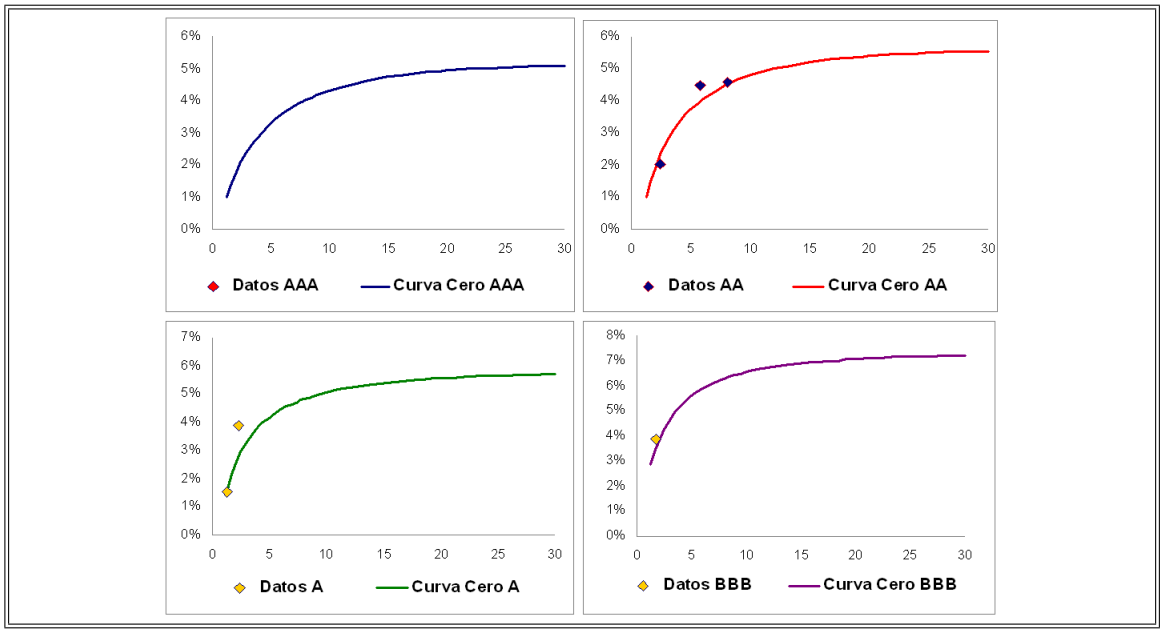

FIGURA 5.9. Curvas Cero Cupón y transacciones por clasificación para el 09/08/2004

Las figuras 5.6 a 5.9 muestran que el modelo genera curvas que se ajustan con un nivel de error reducido a las transacciones de bonos riesgosos. De esta forma para los distintos niveles de tasas analizados, el modelo genera curvas cero cupón que permiten descontar los flujos de los bonos de cada clasificación obteniendo valorizaciones consistentes con las observaciones del día. Una vez más, esta característica se logra gracias a la estimación en dos etapas, puesto que en el segundo paso, sólo se ingresan observaciones de bonos con riesgo, lo que permite que sólo con dos factores por clasificación, el modelo sea capaz de ajustar suficientemente bien las observaciones diarias.

Asimismo, de las figuras anteriores se observa que incluso cuando no existe ninguna transacción para alguna clasificación, la estimación conjunta entre clasificaciones permite que las curvas generadas tengan formas similares entre sí, de modo de evitar cruces entre ellas que generarían spreads mayores para una clasificación de riesgo menor. Esto, junto al modelo dinámico para la tasa de cada clase, permite obtener curvas consistentes tanto en la serie de tiempo como en el corte transversal a través de las clasificaciones. Por tanto los spreads estimados se condicen con los niveles de spreads mostrados por los datos resumidos en la tabla 5.2, donde un mayor riesgo de una determinada empresa genera en promedio spreads mayores en sus papeles.

Ya examinadas las curvas creadas por el modelo, se mide el ajuste del mismo a las observaciones dentro de la muestra, para esto se calculan dos medidas de bondad de ajuste. La primera de ellas es la raíz del error cuadrático medio (RMSE) obtenido según la fórmula:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(TIR^{i}_{modelo} - TIR^{i}_{observada})^2} \tag{5.2}$$

La segunda medida es el sesgo. Este se obtiene como el promedio de la diferencia entre la TIR del modelo y la observada. De esta forma, obtener un valor positivo significa que el modelo sobrestima en promedio las observaciones, y por lo tanto tendría un sesgo positivo. La tabla 5.5 resume los resultados obtenidos en RMSE y sesgo para cada clasificación de riesgo usada.

TABLA 5.5. Indicadores de bondad de ajuste para observaciones dentro del período 2003 a 2006 en puntos base (p.b.).

Clasificación Consolidada	Clasificación	RMSE (p.b.)	Sesgo (p.b.)
AAA	**AAA**	15,29	0,72
Promedio AAA		**15,29**	**0,72**
AA	**AA+**	25,05	4,72
	AA	28,70	1,10
	AA-	38,15	-0,75
Promedio AA		**33,47**	**0,70**
A	**A+**	30,60	6,84
	A	32,59	1,97
	A-	32,08	-14,88
Promedio A		**31,57**	**0,89**
BBB	**BBB+**	45,56	4,40
	BBB	51,21	33,74
	BBB-	7,65	1,89
Promedio BBB		**40,55**	**4,85**
Total con BBB		**32,25**	**1,28**

En promedio, la estimación para las 4 clasificaciones logra un error de ajuste de 32 puntos base en RMSE. Sin embargo este es un promedio considerando los 4 años de la muestra, en el cual se incluyen distintos estados del ciclo económico, lo cual limita la capacidad de ajuste del modelo. De hecho un análisis por año muestra que el RMSE es consistentemente decreciente en el tiempo, llegando a 18 puntos base el año 2006, resultado explicado por una mayor liquidez general del mercado, lo que permite obtener estimaciones más certeras.

Por otro lado una mirada a los sesgos al interior de las clasificaciones AA y A denota que en principio el mercado diferencia la clasificación crediticia de un papel en su segundo nivel de calificación, dado que para estas clasificaciones se cumple que el modelo sobrestima las transacciones de mejor clasificación (AA+ y A+) y subestima las de peor clasificación (AA- y A-). De esta forma, para estas clasificaciones, el modelo podría ser aplicado en una segunda iteración, considerando las transacciones dentro de

una única clasificación consolidada. Sin embargo, para la clasificación BBB no se cumple este orden lógico, lo que en conjunto con el mayor sesgo presentado por esta clasificación deja entrever que la separación por clasificación podría no ser la mejor diferenciación a este nivel o al menos que no es capaz de reunir todos los factores que la afectan. Si no se consideran estas transacciones, se obtiene un promedio de 30 puntos base en RMSE y un sesgo de 0,87 puntos base.

Otra forma de evaluar el desempeño del modelo es observar su comportamiento fuera del período de estimación. Como período fuera de muestra se usa el año 2007. La tabla 5.6 resume los resultados obtenidos para las medidas de bondad de ajuste calculadas anteriormente.

TABLA 5.6. Indicadores de bondad de ajuste para el período 2007.

Clasificación Consolidada	**Clasificación**	**RMSE (p.b.)**	**Sesgo (p.b.)**
AAA	**AAA**	11,98	0,07
Promedio AAA		**11,98**	**0,07**
AA	**AA+**	9,79	-0,90
	AA	12,33	-1,02
	AA-	14,17	-2,31
Promedio AA		**12,57**	**-1,61**
A	**A+**	19,49	6,45
	A	13,02	2,08
	A-	16,11	4,95
Promedio A		**16,67**	**4,62**
BBB	**BBB+**	11,16	6,40
	BBB-	3,04	-0,81
Promedio BBB		**6,88**	**1,58**
Promedio Total		**13,17**	**0,36**

En ella se observa una disminución de un 59 % en el RMSE promedio logrado durante el período muestral, continuando con la tendencia a obtener un mejor ajuste año a año, y una estimación en promedio insesgada. Sin embargo el sesgo al interior de la clase A aumenta hasta 4 puntos base, debido a un cambio en la relación de nivel de spreads entre esta clase y la clasificación AA, privilegiando el modelo mantener una estimación

insesgada en promedio. El anexo G detalla los cambios estructurales producidos en este período y la reacción del modelo frente a ellos.

5.2.3. Ajuste a la Estructura de Volatilidad de los Datos.

Se entiende por estructura de volatilidad a la curva que relaciona la volatilidad de las observaciones para distintos plazos. En un modelo dinámico, un buen ajuste de esta estructura es fundamental para lograr una correcta representación de las observaciones, puesto que la volatilidad de las variables de estado está directamente ligada a la fórmula de valorización. Por otro lado este ajuste en volatilidad determina que la actualización en serie de tiempo de los datos, cuando no existen observaciones, sea consistente con las variabilidades y correlaciones observadas históricamente, logrando una mayor credibilidad en las predicciones del filtro ante la ausencia de observaciones, pues es una medida de la estabilidad de las mismas.

El anexo H muestra que para el modelo planteado, dada una dinámica del tipo Vasicek en las variables de estado, la estructura de volatilidad instantánea para los retornos de un bono, puede ser obtenida según la fórmula 5.3.

$$\sigma_p^2(t) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \left(\frac{e^{-k_i t} - 1}{k_i}\right)\left(\frac{e^{-k_j t} - 1}{k_j}\right) \tag{5.3}$$

Por otro lado, para calcular la volatilidad de los datos se usa la aproximación propuesta por Cortazar et al. (2007), donde se plantea una metodología para aproximar la estructura de volatilidad empírica en un mercado con paneles incompletos. Para ello se agregan las transacciones en intervalos de madurez, calculando el promedio diario de cada intervalo y luego se obtiene la desviación estándar de las diferencias de observaciones diarias para cada uno de estos grupos. Adicionalmente se calcula la duración promedio del intervalo, generando la estructura como si fuera la volatilidad de un bono de descuento con madurez igual a esta duración. Debido a la gran diversidad en los flujos de los bonos usados, estos se agrupan por su duración de Macaulay, para considerar de antemano su representación como bono cero cupón. De esta forma se puede comparar esta estructura de volatilidad

con la de la estructura cero cupón generada por el modelo. Dado el proceso de reversión a una media de largo plazo, supuesto para la tasa de un bono con riesgo, la estructura de volatilidad debería presentar una forma decreciente.

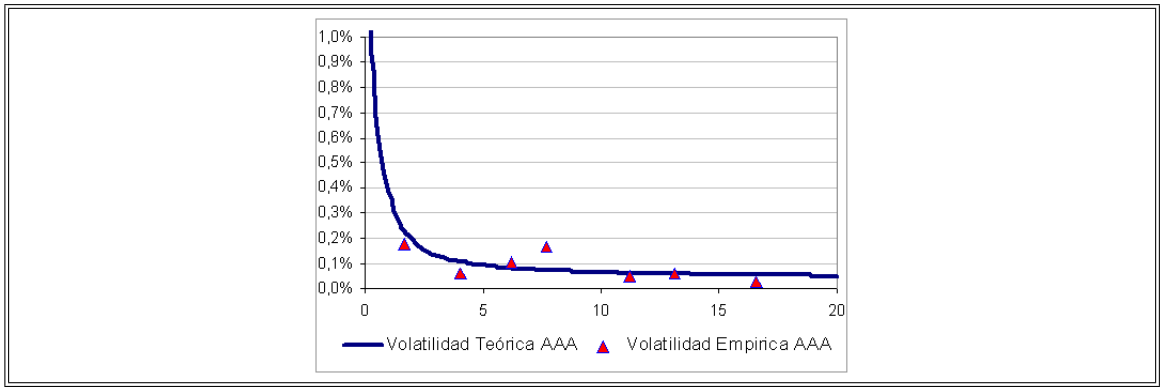

FIGURA 5.10. Estructura de Volatilidad Empírica v/s Teórica para clasificación AAA

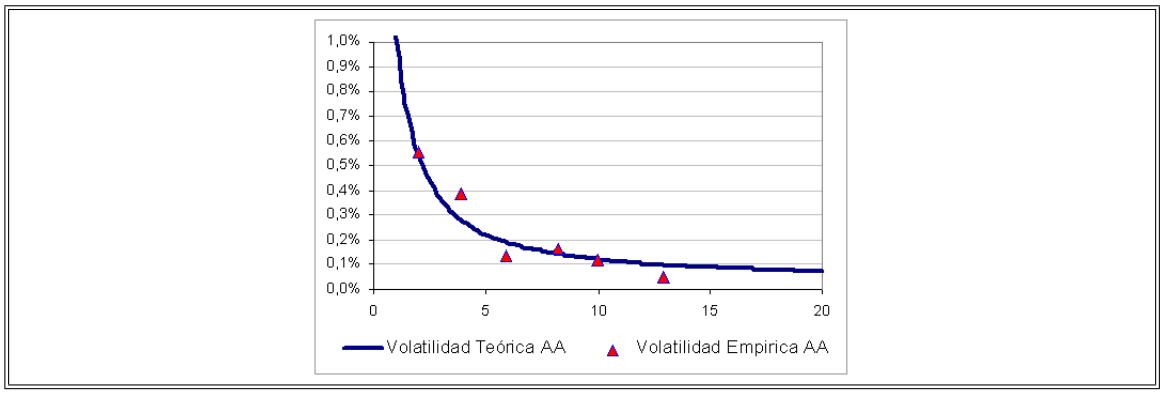

FIGURA 5.11. Estructura de Volatilidad Empírica v/s Teórica para clasificación AA

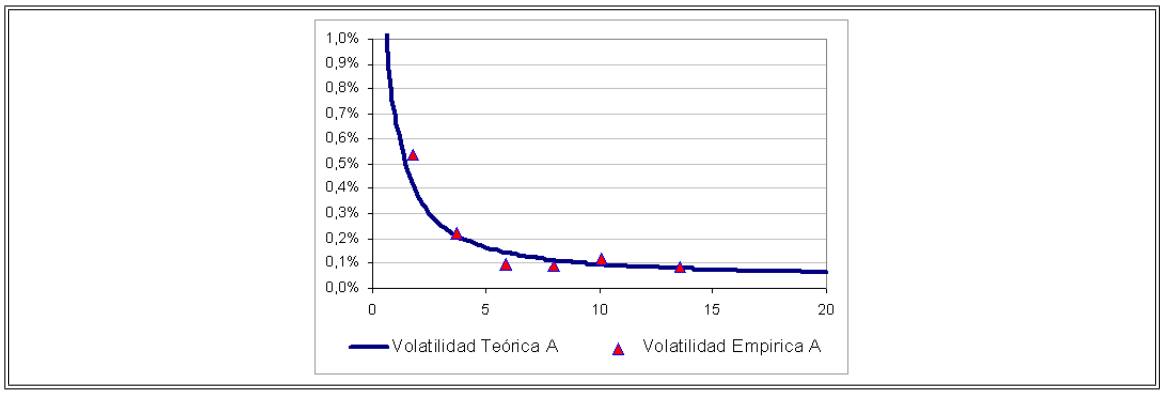

FIGURA 5.12. Estructura de Volatilidad Empírica v/s Teórica para clasificación A

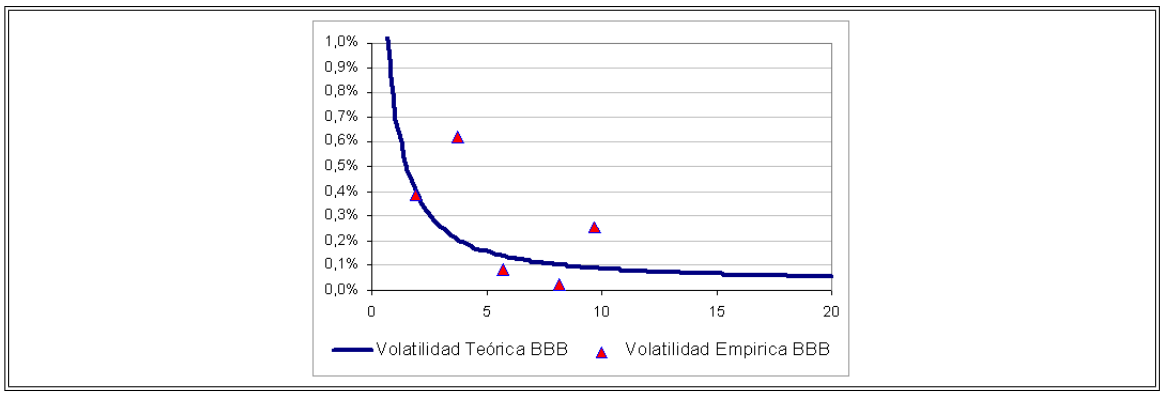

FIGURA 5.13. Estructura de Volatilidad Empírica v/s Teórica para clasificación BBB

Las figuras 5.10 a 5.13 muestran los resultados teóricos y empíricos obtenidos para cada clasificación de riesgo. En ellas se observa el buen ajuste de la estructura de volatilidad logrado por el modelo para todas las clasificaciones, excepto para la BBB. En esta última no se cumple el supuesto de volatilidad decreciente en los plazos. De hecho el intervalo con mayor duración tiene mayor volatilidad que los dos intervalos anteriores. Para el resto de las clasificaciones el ajuste permite validar las estimaciones del filtro para el caso en que no hay transacciones, ya que ellas estarán de acuerdo con los movimientos históricos generados día a día durante el resto de los períodos de la muestra.

5.3. Análisis de los Componentes del Spread en el Modelo.

Una vez estimado el modelo y comprobado su buen desempeño en el ajuste de los spreads observados, es interesante analizar la contribución de cada factor en la determinación del spread final. Para esto se realiza un análisis de varianza, descomponiéndola en los factores que la determinan. El spread del modelo para la clase de riesgo j es de la forma:

$$s_j = \beta_j^0 + \beta_j^1 x_1 + \beta_j^2 x_2 + \beta_j^3 x_3 + \beta_j^c x_c + \beta_j^g x_j^g \tag{5.4}$$

donde los términos β_i están determinados por los parámetros antes estimados y son los detallados en la ecuación 5.5.

$$\begin{aligned} \beta_i^j(T) &= -\frac{1}{T}\frac{\delta_j^i}{\kappa_i}\left(e^{-\kappa_i T}-1\right) \\ \delta_j^i &= \gamma_j \qquad\qquad i=1,2,3 \\ \beta_j^0 &= \delta_j^0 - \delta_r^0 \end{aligned} \tag{5.5}$$

De esta forma, si agrupamos los factores que corresponden a la curva libre de riesgo, las covarianzas entre las variables que modelan la curva libre de riesgo y el spread por un lado y las covarianzas entre los dos factores que modelan el spread de la clase, la varianza total del spread modelado está dada por la ecuación 5.6.

$$\begin{aligned} \sigma_{s,j}^2 &= \sum_{i=1}^{3}\left(\beta_j^i\right)^2\sigma_i^2 + \left(\beta_j^c\right)^2\sigma_c^2 + \left(\beta_j^g\right)^2\sigma_{g,j}^2 \\ &+ \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=c,g} 2\beta_j^i\beta_j^k \mathrm{cov}\left(x_i, x_{k,j}\right) + 2\beta_j^c\beta_j^g \mathrm{cov}\left(x_c, x_{g,j}\right) \\ con &\qquad x_{c,j} = x_c \qquad\qquad \forall j \end{aligned} \tag{5.6}$$

La ecuación anterior permite separar la varianza del spread en 5 factores, posibilitando el análisis del porcentaje aportado por cada uno de ellos en la determinación del spread final. El primer término de la derecha corresponde a la varianza proveniente de los factores que modelan la curva libre de riesgo (Y_{lr}). El segundo y el tercero corresponden a la varianza aportada por los factores del spread, el común (Y_c) y el propio de la clase j ($Y_{g,j}$) respectivamente. El cuarto término reúne las covarianzas de factores que modelan la curva libre de riesgo con los que modelan el spread ($Y_{lr,s}^{cov}$), mientras que el quinto corresponde a la covarianza entre el factor común y el propio de la clase j ($Y_{c,j}^{cov}$).

Para obtener las varianzas se utiliza la estructura de spread estimada por el modelo a 1 y a 5 años, usando todo el período muestral, mientras que para los factores se utilizan los parámetros y variables de estado estimadas mediante el filtro de Kalman en las dos etapas

de la metodología. Las tablas 5.7 y 5.8 muestran el porcentaje de varianza explicado por los factores anteriores.

TABLA 5.7. Porcentaje de varianza del spread modelo a 1 año explicado por sus factores determinantes, usando datos de todo el período muestral.

Clasificación	Y_{lr}	Y_c	$Y_{g,j}$	$Y^{cov}_{lr,s}$	$Y^{cov}_{c,j}$
AAA	2,03 %	11,02 %	38,04 %	13,41 %	35,49 %
AA	4,24 %	18,73 %	42,02 %	12,63 %	22,37 %
A	21,29 %	15,11 %	26,20 %	28,95 %	8,45 %
BBB	0,89 %	25,19 %	29,71 %	9,25 %	34,95 %
promedio	**7,11 %**	**17,51 %**	**33,99 %**	**16,06 %**	**25,32 %**

TABLA 5.8. Porcentaje de varianza del spread modelo a 5 años explicado por sus factores determinantes, usando datos de todo el período muestral.

Clasificación	Y_{lr}	Y_c	$Y_{g,j}$	$Y^{cov}_{lr,s}$	$Y^{cov}_{c,j}$
AAA	5,87 %	30,29 %	10,30 %	22,90 %	30,63 %
AA	9,48 %	39,87 %	9,92 %	24,87 %	15,86 %
A	32,91 %	22,25 %	4,08 %	36,71 %	4,05 %
BBB	1,96 %	52,77 %	6,61 %	14,80 %	23,86 %
promedio	**12,55 %**	**36,30 %**	**7,73 %**	**24,82 %**	**18,60 %**

De las tablas se observa que para el spread de 1 año, en promedio la mayor parte de su varianza está explicada por el factor propio, lo que implica que en el corto plazo se producen las mayores diferencias en los movimientos de papeles de distinta clasificación. El segundo factor en importancia es la covarianza entre el factor común y el propio de la clase, denotando la importancia de incluir las correlaciones entre estas variables de estado a la hora de especificar el modelo para el spread. Para la clasificación A, sin embargo, existe una gran influencia de la curva libre de riesgo a través de la covarianza con los factores del spread principalmente. Esto proviene de la alta correlación negativa reflejada en la magnitud del coeficiente γ_A, la más alta entre todas las clases de riesgo.

Por otro lado el análisis del spread a 5 años muestra una mayor influencia del factor común en la explicación de la varianza del spread total, en desmedro del factor propio

cuyo porcentaje explicado baja drásticamente. Este resultado proviene de los parámetros κ resultantes de la estimación los que representan la velocidad de reversión a la media de 0 de las variables de estado en un modelo como el planteado. De la tabla 5.4 se observa que el factor común revierte más lento, por lo tanto tiene mayor influencia que el factor propio en la determinación del spread de más largo plazo. A su vez se observa una mayor relevancia del factor que recoge la covarianza entre la estructura libre de riesgo y la del spread, sugiriendo que la inclusión de los factores libres de riesgo en el modelo tienen una mayor influencia a medida que se avanza en los plazos de la estructura, resultado que se encuentra en línea con lo reportado en Longstaff y Schwartz (1995), donde la duración de los papeles es un factor relevante en la determinación de la correlación entre deuda riesgosa y libre de riesgo.

5.4. Comparación con Otras Metodologías de Obtención de Spreads.

En esta sección se contrastan los resultados obtenidos por el modelo propuesto en esta tesis con 2 metodologías alternativas, lo que permite validar que el modelo planteado obtiene mejores resultados a la hora de superar las dificultades encontradas para la estimación de spreads en mercados emergentes. La primera de ellas consiste en modelar directamente el spread sin incluir la información de la curva libre de riesgo en la estimación. La segunda alternativa corresponde a un modelo estático, donde no se modela la dinámica de los spreads, sino más bien se aprovecha la información histórica para asignar el spread que mejor corresponde a un papel que no se ha transado en el mercado. Dadas las incongruencias encontradas para los bonos de clasificación BBB en las bases de aplicación de la metodología de agrupación por clasificación, los contrastes se realizan únicamente para clasificaciones AAA a A.

5.4.1. Primera Metodología de Estimación Alternativa.

La primera metodología alternativa usada para comparar los resultados obtenidos con el modelo original es una que, también usando el enfoque estructural de Duffie y Singleton

(1999), modela directamente el spread que debe sumarse a la estructura libre de riesgo para obtener la tasa R ajustada por riesgo. El objetivo de esta comparación es validar la estabilidad de las curvas en los plazos para los cuales no existen transacciones, debido a la evidencia encontrada en la literatura que consigna estructuras de spreads con formas poco creíbles desde un punto de vista económico y con alta volatilidad cuando se deja de lado la curva libre de riesgo en la estimación (Houweling et al., 2001). Para hacer los modelos comparables, el spread de cada clase se representa en el espacio de estados mediante 2 factores tal como en el modelo propuesto, con 1 factor común y uno específico para la clase de riesgo del papel como indica la ecuación 5.7. De esta forma se intenta cuantificar el *trade-off* entre estructuras de spreads más estables y capacidad de ajuste del modelo.

$$s_j = \delta_j^c x_1 + x_g^j + \delta_0^{s,j} \tag{5.7}$$

La estimación se realiza en forma conjunta entre clasificaciones. Las figuras 5.14 a 5.17 muestran una comparación de las curvas de spreads generadas por esta alternativa de modelación en contraste con las del modelo original, para las mismas fechas analizadas anteriormente.

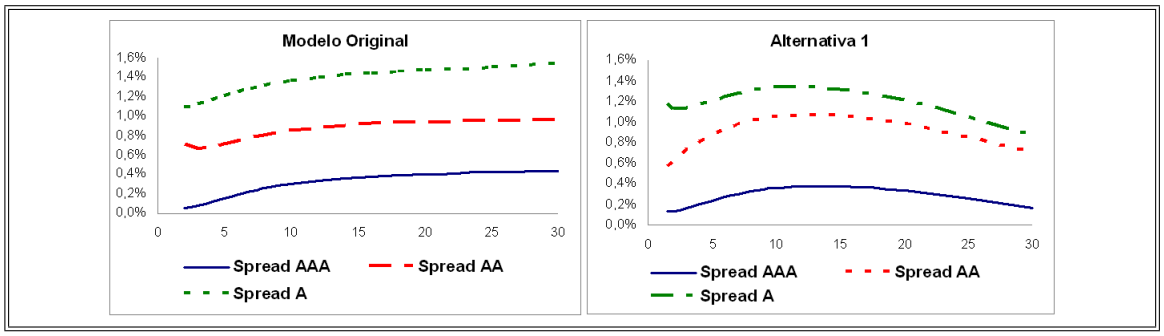

FIGURA 5.14. Curvas de spreads de la metodología de estimación en 2 etapas (modelo original) y metodología alternativa 1 para el 06/12/2006

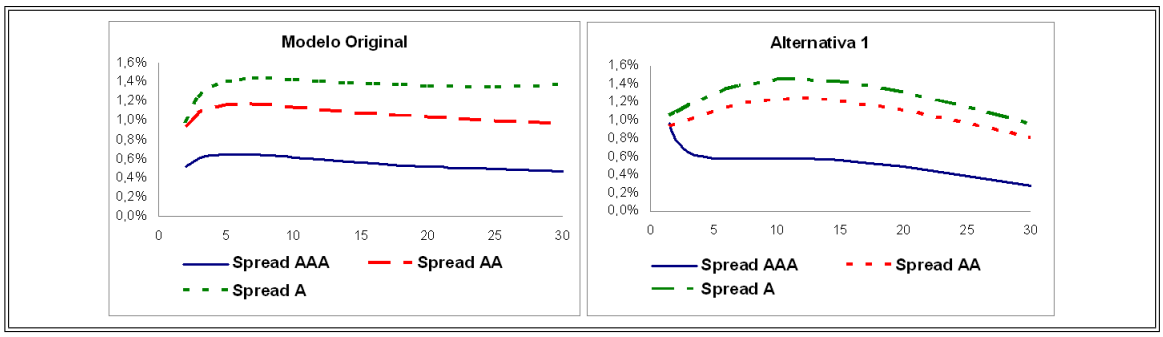

FIGURA 5.15. Curvas de spreads de la metodología de estimación en 2 etapas (modelo original) y metodología alternativa 1 para el 06/06/2006

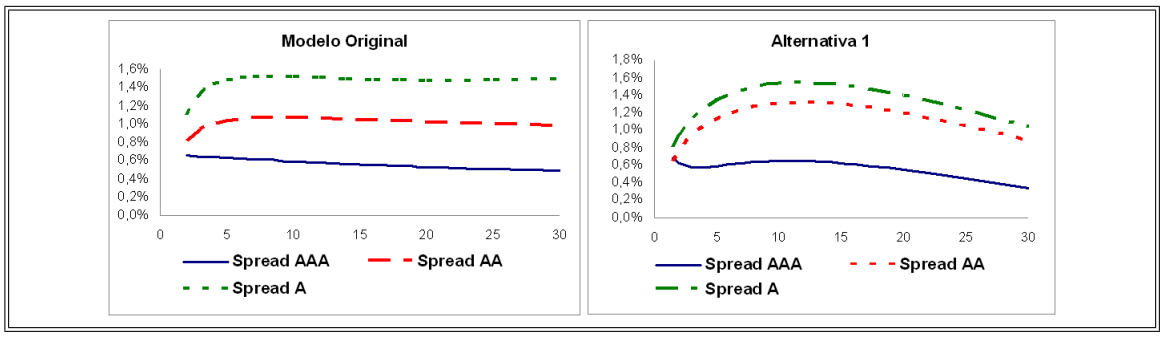

FIGURA 5.16. Curvas de spreads de la metodología de estimación en 2 etapas (modelo original) y metodología alternativa 1 para el 29/06/2005

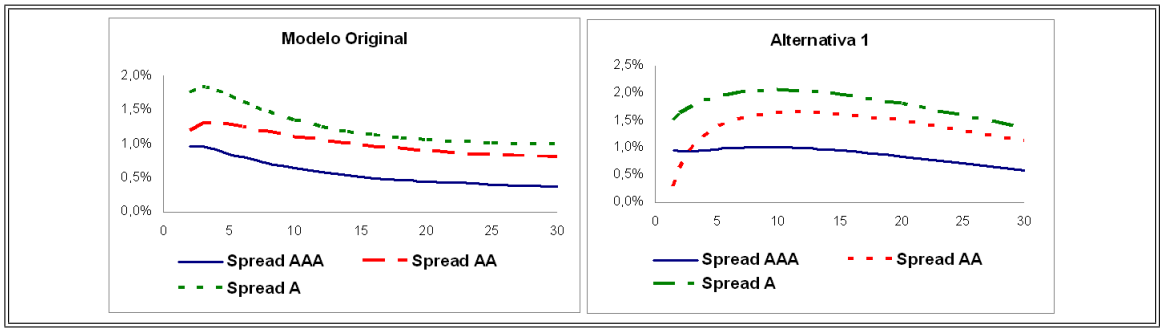

FIGURA 5.17. Curvas de spreads de la metodología de estimación en 2 etapas (modelo original) y metodología alternativa 1 para el 09/08/2004

Las figuras muestran curvas de spread poco estables en corte transversal. Dadas las pocas transacciones observadas en el largo plazo, la solución del modelo original parece ser un resultado más conservador, desde el punto de vista de que no hay información certera que justifique el descenso en el nivel de las curvas a partir de cierto plazo.

Un problema similar es el que obtiene Cortazar et al. (2008) al modelar de forma independiente dos commodities usando futuros, donde uno de ellos presenta observaciones más largas en madurez que el otro. El problema es solucionado modelando en forma conjunta la dinámica de ambos activos. De las mismas figuras se puede observar cómo el método de estimación en dos etapas soluciona el problema de extrapolación al aprovechar la información de la curva libre de riesgo, que presenta una estructura más estable en el largo plazo, característica que se propaga a las estructuras de spreads estimadas mediante ésta metodología.

Para evaluar la estabilidad de las curvas de spreads generadas por ambos modelos se calcula la desviación estándar de los cambios de spread diarios en los distintos plazos de la estructura de spread derivada de ellos. La figura 5.18 grafica los resultados obtenidos para las tres clasificaciones.

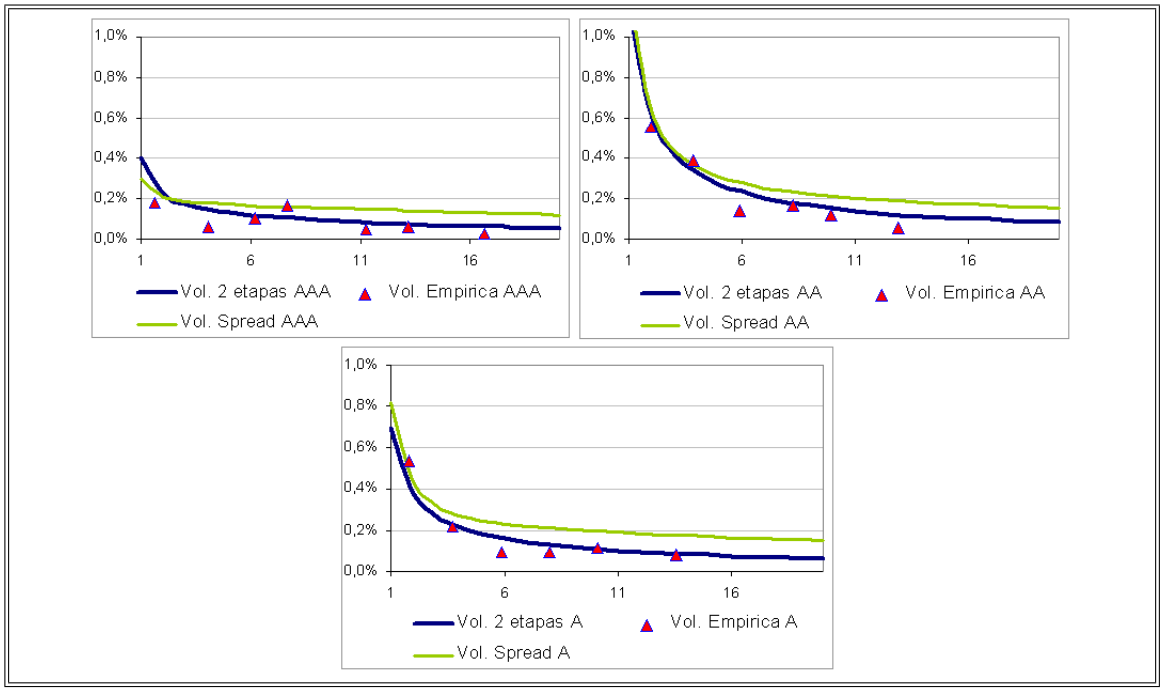

FIGURA 5.18. Desviación estándar de cambios de spread en las estructuras generadas por la metodología de estimación en 2 etapas y la alternativa 1 de estimación de spreads.

Esta comparación permite resaltar la relevancia de incluir la estructura libre de riesgo en la determinación de los spreads de las demás clases, pues al hacerlo se generan curvas de spreads menos volátiles que al no incluirla. Al ser una clase más líquida, la estabilidad de la curva libre de riesgo contribuye en la reducción de los cambios de spread en las clases con menos observaciones, influyéndo más notoriamente en los plazos largos de la estructura, característica deseable por cuanto en estos plazos no existe suficiente información que valide cambios bruscos de un día a otro.

Posteriormente se realiza una comparación de bondad de ajuste de ambas estimaciones, para evaluar cuanto se restringe el modelo al pedirle que mantenga una consistencia con la curva libre de riesgo. La tabla 5.9 presenta una comparación de los resultados obtenidos por clasificación. En promedio se produce una disminución en el error de ajuste de 3 puntos base aproximadamente en la metodología alternativa, lo que representa una mayor capacidad de ajuste de 9 %.

TABLA 5.9. Comparación de errores de metodología de estimación en 2 etapas con primera metodología alternativa en el período *in sample*.

Clasificación Consolidada	**Clasificación**	**Metodología de estimación en 2 etapas**		**Metodología Alternativa 1**	
		RMSE	**Sesgo**	**RMSE**	**Sesgo**
AAA	**AAA**	14,78	-0,12	14,51	0,55
Promedio AAA		**14,78**	**-0,12**	**14,51**	**0,55**
AA	**AA+**	23,31	5,12	21,55	4,56
	AA	25,53	2,26	27,52	1,74
	AA-	33,37	-1,28	31,29	-2,75
Promedio AA		**29,56**	**0,87**	**28,81**	**-0,19**
A	**A+**	31,72	7,51	23,63	5,39
	A	29,52	-0,32	18,97	-0,51
	A-	30,91	-13,41	27,14	-11,55
Promedio A		**30,84**	**0,72**	**22,95**	**0,09**
Promedio Total		**28,19**	**0,68**	**25,62**	**0,00**

Los contrastes anteriores sugieren que la metodología de estimación en dos etapas genera estructuras de spreads parsimoniosas en el sentido que se logran estimaciones más estables en corte transversal, con una pequeña disminución en los indicadores de bondad de ajuste. Sin embargo se comprueba que la inclusión de los factores que modelan la curva libre de riesgo en la estimación disminuye la incertidumbre de los spreads modelados ante la ausencia de transacciones.

5.4.2. Segunda Metodología de Estimación Alternativa.

En este segundo contraste se busca evaluar los beneficios logrados al crear un modelo dinámico para los spreads. Para ello, se define un modelo estático que si bien no genera curvas para todos los plazos propiamente tal, establece una metodología para obtener un vector de precios para todos los instrumentos vigentes, basándose en la información histórica de transacciones de mercado.

Dado que el modelo propuesto contempla el uso de información de la misma clasificación de riesgo, se definirá en primer lugar una única clase de spread asignado en base a la información proveniente de la clasificación de riesgo, usando como spread para un papel no transado el spread promedio de las transacciones de papeles de la misma clasificación ocurridas hasta un plazo de 1 año hacia atrás. El uso del promedio se justifica por la necesidad de usar un gran número de observaciones con el fin de evitar la asignación de spreads influenciados por eventualidades propias de la transacción, que no reflejan las condiciones de mercado.

Una forma de contrastar el modelo dinámico de estimación en 2 etapas y este modelo estático es comparando en el momento de una transacción, la valorización que hubiesen entregado ambos en caso de que la transacción no hubiera existido, calculando variables de estado y spreads alternativos respectivamente, sin considerar esta observación. Una vez obtenidas las nuevas valorizaciones se calculan el RMSE y sesgo, comparándolas con la transacción real. La tabla 5.10 resume los resultados obtenidos para ambos indicadores durante el año 2006.

TABLA 5.10. Comparación de RMSE y Sesgo entre modelo de estimación en 2 etapas y segunda metodología alternativa (Método Estático) para el año 2006.

		RMSE (p.b.)		Sesgo (p.b.)	
Clasificación Consolidada	**Clasificación**	**Estimación en 2 etapas**	**Método Estático**	**Estimación en 2 etapas**	**Método Estático**
AAA	AAA	27,17	28,80	2,80	4,39
Promedio AAA		**27,17**	**28,80**	**2,80**	**4,39**
AA	AA+	19,24	33,52	7,64	9,90
	AA	23,09	30,85	0,14	1,03
	AA-	21,10	32,47	-1,74	-3,24
Promedio AA		**21,50**	**32,12**	**0,36**	**0,25**
A	A+	29,82	38,01	6,61	18,42
	A	33,76	50,05	14,06	35,81
	A-	37,96	34,80	-21,91	-8,75
Promedio A		**33,61**	**44,31**	**5,04**	**22,40**
Promedio Total		**26,57**	**36,03**	**2,14**	**7,71**

La tabla muestra una mejora tanto en RMSE como en sesgo de la capacidad de ajuste mostrada por el modelo propuesto. Esto se explica por el uso de un modelo dinámico en lugar de spreads estáticos, donde la actualización de los spreads gracias a la dinámica calibrada permite predecir con mayor exactitud el valor actual de un papel que no se ha transado hace largo tiempo. En sesgo se produce una disminución de un 72 % con respecto al alcanzado por el metodo estático, el que se hace más patente precisamente en las clasificaciones con menor número de transacciones, confirmando que la estimación de una dinámica conjunta entre ellos ayuda a obtener una mejor actualización de spreads, y con ello aprovechar de mejor forma la información histórica disponible.

Se realiza además una segunda comparación, esta vez incluyendo otra clase de spread, denominada spread papel. Esta clase usa la información de transacciones del mismo papel que se intenta valorizar, observada dentro de un plazo de un mes anterior a la fecha de valorización. Así, se busca cuantificar la mejoría alcanzada por el uso de información reciente de un mismo papel, en lugar de usar información de la clasificación de riesgo que no contempla aspectos específicos de la emisión en particular.

TABLA 5.11. Comparación de RMSE entre spread papel y las dos alternativas de valorización, modelo de 2 etapas y método estático.

		RMSE		
Clasificación Consolidada	**Clasificación**	**Estimación en 2 etapas**	**Spread Papel**	**Método Estático**
AAA	**AAA**	29,20	26,91	30,72
Promedio AAA		**29,20**	**26,91**	**30,72**
AA	**AA+**	18,86	12,63	33,49
	AA	22,42	13,65	31,24
	AA-	20,76	10,05	32,44
Promedio AA		**20,99**	**11,71**	**32,25**
A	**A+**	31,02	16,71	39,95
	A	33,83	12,67	50,14
	A-	39,10	17,34	32,91
Promedio A		**34,08**	**14,64**	**45,18**
Promedio Total		**26,78**	**15,16**	**36,69**

TABLA 5.12. Comparación de sesgo entre spread papel y las dos alternativas de valorización, modelo de 2 etapas y método estático.

		Sesgo		
Clasificación Consolidada	**Clasificación**	**Estimación en 2 etapas**	**Spread Papel**	**Método Estático**
AAA	**AAA**	1,83	1,15	2,69
Promedio AAA		**1,83**	**1,15**	**2,69**
AA	**AA+**	7,48	1,66	9,11
	AA	1,21	1,32	3,16
	AA-	-0,49	1,43	-1,74
Promedio AA		**1,35**	**1,44**	**1,57**
A	**A+**	4,95	2,41	21,54
	A	14,06	0,72	35,85
	A-	-20,42	3,27	-6,89
Promedio A		**6,00**	**1,58**	**25,09**
Promedio Total		**2,88**	**1,45**	**9,16**

La comparación de bondad de ajuste se muestra en las tablas 5.11 y 5.12. En ellas se observa que el uso de información de un mismo papel obtiene mejores resultados que agrupar datos provenientes de otros emisores, lo que era esperable, aun así se hace patente

la mejoría alcanzada al usar el modelo dinámico por sobre el estático en esta sub-muestra, logrando un nivel de sesgo similar y una reducción de aproximadamente un 50 % con respecto al RMSE adicionado ante la ausencia de transacciones. Sin embargo la poca liquidez del mercado hace que este spread papel pueda ser usado en menos de la mitad de las valorizaciones del año.

La tabla 5.13 muestra una descripción del número de papeles valorizados por cada clase de spread durante el año 2006. Las observaciones del mercado representan en promedio un 2,6 % de las valorizaciones del año, lo que justifica la creación de un método confiable para cuando no se dispone de ellas. Por otro lado se observa que en total un 62 % de las valorizaciones se realizan sin usar información directa del papel transado, resaltando la importancia de contar con un método que logre aprovechar de la mejor forma posible la información de la clasificación de riesgo para obtener valorizaciones confiables cuando estos papeles no se transan.

TABLA 5.13. Número de valorizaciones por clase de spread del modelo estático durante el año 2006 de bonos empresariales en UF dentro de la muestra.

Clasificación Consolidada	**Clasificación**	**Transacción**		**Spread Papel**		**Spread Clas.**		**Total**
		Nº	**%**	**Nº**	**%**	**Nº**	**%**	**Nº**
AAA	**AAA**	181	(2,1)	3.607	(41,5)	4.904	(56,4)	8.692
Total AAA		**181**	**(2,1)**	**3.607**	**(41,5)**	**4.904**	**(56,4)**	**8.692**
AA	**AA+**	125	(2)	1.848	(29,9)	4.207	(68,1)	6.180
	AA	314	(2,1)	4.564	(31,1)	9.808	(66,8)	14.686
	AA-	483	(2,5)	6.387	(33,1)	12.423	(64,4)	19.293
Total AA		**922**	**(2,3)**	**12.799**	**(31,9)**	**26.438**	**(65,8)**	**40.159**
A	**A+**	227	(2,4)	3.284	(34,3)	6.051	(63,3)	9.562
	A	294	(8,9)	1.953	(58,8)	1.072	(32,3)	3.319
	A-	86	(2,1)	1.604	(39,7)	2.354	(58,2)	4.044
Total A		**607**	**(3,6)**	**6.841**	**(40,4)**	**9.477**	**(56)**	**16.925**
Total General		**1.710**	**(2,6)**	**23.247**	**(35,3)**	**40.819**	**(62,1)**	**65.776**

Finalmente, los contrastes anteriores sugieren que, de ser el objetivo la creación de un vector de precios para bonos empresariales, la mejor solución sería una combinación de los métodos, que aprovechara los beneficios de usar información del mismo papel y actualizar

la información con mayor antigüedad para reflejar de mejor forma las condiciones actuales del mercado mediante el modelo dinámico de estimación en 2 etapas propuesto.

5.5. Análisis de Spreads del Mercado Chileno.

Los resultados y comparaciones de las secciones previas permiten validar el método propuesto en esta tesis para la estimación de spreads en el mercado chileno. En esta sección se busca caracterizar los spreads del mercado nacional aprovechando los resultados obtenidos por el modelo. En primer lugar se caracterizan los spreads empíricos y los del modelo tanto en media como desviación estándar.

De la tabla 5.14 se confirma el bajo nivel de error alcanzado y el correcto ajuste a la volatilidad de los datos. A su vez se observa una disminución general en los niveles de spread año a año, lo que coincide con una tendencia de alza de tasas en el mercado, resultado que confirma la correlación negativa entre tasas riesgosas y libres de riesgo encontrada en los parámetros.

La figura 5.19 grafica la serie de tiempo tomando dos puntos de la estructura diaria a 5 y 20 años de plazo dentro del período 2003-2007. Esto permite observar el desarrollo temporal de los spreads en la parte corta y larga de la estructura.

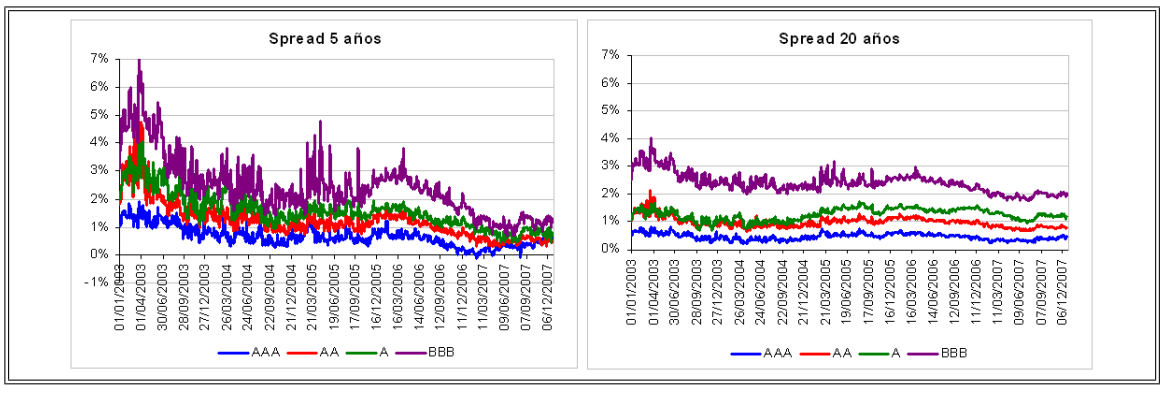

FIGURA 5.19. Serie de tiempo de spreads a 5 y 20 años del modelo de estimación en dos etapas dentro del período de la muestra.

En las figuras se observan dos puntos relevantes, el primero dice relación con una reducción general del spread a 5 años observado entre los años 2003 y 2007.

TABLA 5.14. Comparación de Spreads Empíricos v/s Spread Modelo por año dentro de la muestra.

Año	Clasificación Consolidada	Promedio		Desviación Estándar	
		Empírico	Modelo	Empírico	Modelo
2003	AAA	0,95 %	0,97 %	0,37 %	0,31 %
	AA	2,09 %	2,17 %	1,11 %	0,99 %
	A	2,64 %	2,56 %	0,81 %	0,70 %
	BBB	3,21 %	3,31 %	1,39 %	1,24 %
Promedio 2003		2,30 %	2,34 %	1,25 %	1,16 %
2004	AAA	0,55 %	0,54 %	0,24 %	0,17 %
	AA	1,21 %	1,19 %	0,49 %	0,37 %
	A	1,43 %	1,40 %	0,74 %	0,65 %
	BBB	2,02 %	2,11 %	0,70 %	0,49 %
Promedio 2004		1,27 %	1,26 %	0,68 %	0,61 %
2005	AAA	0,57 %	0,58 %	0,25 %	0,21 %
	AA	0,99 %	0,99 %	0,42 %	0,29 %
	A	1,17 %	1,19 %	0,44 %	0,43 %
	BBB	1,86 %	1,85 %	0,88 %	0,61 %
Promedio 2005		1,05 %	1,06 %	0,56 %	0,48 %
2006	AAA	0,43 %	0,45 %	0,30 %	0,29 %
	AA	1,00 %	1,01 %	0,32 %	0,27 %
	A	1,08 %	1,13 %	0,41 %	0,39 %
	BBB	1,69 %	1,68 %	0,66 %	0,59 %
Promedio 2006		1,03 %	1,05 %	0,48 %	0,45 %
2007	AAA	0,46 %	0,46 %	0,18 %	0,19 %
	AA	0,67 %	0,65 %	0,16 %	0,13 %
	A	0,81 %	0,85 %	0,21 %	0,22 %
	BBB	1,13 %	1,14 %	0,35 %	0,37 %
Promedio 2007		0,72 %	0,72 %	0,26 %	0,26 %
Promedio Total		1,19 %	1,20 %	0,82 %	0,78 %

Esto está directamente relacionado con la estabilización de la economía nacional y el consiguiente aumento de las emisiones empresariales como alternativa de financiamiento, lo que hace que el mercado las vea como inversiones menos riesgosas, reduciendo los spreads asociados. En este mismo sentido se observa también una notable reducción de la volatilidad de los spreads, especialmente para las clasificaciones de mayor riesgo.

El segundo punto corresponde a la evidente estabilización de los spreads de largo plazo. En el gráfico de la derecha se observan series de tiempo prácticamente planas para todas las clasificaciones y con una baja volatilidad. Este hecho tiene sentido por cuanto es más difícil predecir variaciones en el nivel de riesgo de una emisión en plazos tan largos. A su vez se observa una separación de los spreads de clasificaciones AA y A a partir de fines del año 2004, debido a un aumento de los spreads de clasificación A, confirmando que el mercado diferencia el nivel de riesgo de los papeles en base a su clasificación crediticia.

A continuación se realiza un análisis de la inclinación de las curvas de spread por clasificación y por año. Para aproximar la inclinación, se calcula diariamente la variación anual promedio que explica las diferencias entre las curvas de spread a 2 y 20 años de cada clasificación. La tabla 5.15 muestra los resultados obtenidos.

TABLA 5.15. Inclinación de las curvas de spreads por clasificación, aproximada como la variación anual promedio que explica las diferencias entre spreads diarios a 2 y 20 años. La tabla resume la media aritmética para cada año en puntos base.

Clasificación	2003	2004	2005	2006	2007	Total
AAA	-3,59	-2,01	-0,60	0,61	-2,55	-1,62
AA	-8,94	-2,84	0,81	0,79	0,60	-1,91
A	-11,39	-5,26	1,16	2,50	3,72	-1,85
BBB	-4,98	3,21	4,96	4,63	6,12	2,80
Libre de Riesgo	18,89	18,83	8,11	2,21	3,27	10,28

De la tabla se observa el descenso de la pendiente de las estructuras diarias generadas, llegando a menos de 1 punto base en promedio para las clasificaciones AAA y AA en los dos últimos años del período dentro la muestra. Estos años también se comprueba una mayor variación para las clasificaciones de mayor riesgo, principalmente motivada por un aumento en la incertidumbre de las emisiones de mayor plazo. Las altas pendientes negativas durante los dos primeros años, se explican por una aun más fuerte pendiente positiva de la curva libre de riesgo, la que se estabiliza a partir del año 2005. El año 2007 sin embargo se produce un revertimiento de la tendencia, presentando un mayor cambio entre el spread de corto y largo plazo, tanto para las curvas riesgosas como para la libre

de riesgo, excepto para la clasificación AA, cuya inclinación prácticamente no varía con respecto al año anterior. En particular, se observa que para las clasificaciones más riesgosas se producen los mayores aumentos en la inclinación de la curva, consignando que estas emisiones son las que más reaccionan ante períodos de alta inestabilidad económica.

Capítulo 6. CONCLUSIONES.

Esta tesis propone una nueva metodología de estimación para spreads de papeles con riesgo mediante un modelo dinámico multifactorial del tipo Vasicek. Esta metodología busca resolver los problemas de alta incertidumbre y baja bondad de ajuste experimentados por otros modelos de estimación de spreads. Para ello se plantea una variación de la estimación conjunta entre tasas de bonos con riesgo y libres de riesgo que permite enfrentar los problemas ocasionados por diferencias notables de liquidez entre ambos mercados. Asimismo, se propone una estimación conjunta entre clases de spread que permite por un lado plasmar las diferencias registradas por papeles pertenecientes a clases distintas y aprovechar por otro correlaciones en sus movimientos para usar la mayor cantidad posible de información contemporánea a la hora de actualizar spreads de papeles no transados.

Para probar el modelo se aplica a una muestra de bonos empresariales sin opción de prepago del mercado chileno. Los resultados arrojan que la metodología de estimación propuesta permite obtener estructuras de spreads consistentes para todos los plazos, gracias a la influencia de la curva libre de riesgo en la determinación de las curvas por clasificación. De esta forma se logra tener una mejor estimación tanto de la curva libre de riesgo como de las curvas de spreads al reemplazar la estimación conjunta por una metodología de estimación en 2 etapas donde los parámetros de la primera influyen en la determinación de los parámetros de la etapa que le sigue. Esta separación es posible toda vez que una de las clases que se requiere estimar en forma conjunta posea suficiente información para estimar consistentemente los parámetros relacionados a ella.

Por otro lado, la estimación multi-familia permite generar curvas de spread consistentes entre ellas, de modo de evitar cruces en las curvas no determinados por los datos, evitando con esto asignar un mayor spread a papeles con menor riesgo relativo que otros. Si bien en teoría una estimación conjunta disminuye la capacidad de ajuste del modelo, los resultados obtenidos confirman que se obtienen niveles de error acotados y de

un orden de magnitud similar a los encontrados al usar otras metodologías alternativas de estimación de spreads.

La aplicación al mercado de bonos empresariales chileno, demuestra que el mercado valoriza de forma distinta bonos con clasificación de riesgo diferente, validando esta separación para crear clases de riesgo dentro de la muestra. Sin embargo los resultados obtenidos para la clasificación BBB no son concluyentes por cuanto no presentan una estructura de volatilidad factible de ser ajustada por el modelo y presentan ciertas inconsistencias en su segundo nivel de clasificación, lo que sugiere que se necesita considerar otros factores por sobre la clasificación crediticia para modelarlos.

El análisis de los parámetros obtenidos de la calibración del modelo revela la adecuada especificación del mismo. De ellos se comprueba una correlación negativa entre la curva libre de riesgo y los spreads, en concordancia con la evidencia empírica encontrada en mercados desarrollados. El modelo permite estimar la dinámica de las clasificaciones de riesgo en forma conjunta, identificando las correlaciones entre ellas, lo que posibilita un mejor aprovechamiento de la información de corte transversal para actualizar las estructuras en plazos donde no existen observaciones. Esto implica un mejor uso de la información con mayor antigüedad, sin embargo la comparación con el modelo estático deja claro que el uso de información reciente de una misma firma entrega mejores valorizaciones en la medida en la que esté disponible.

Analizando los spread estimados por el modelo, se demuestra una estabilización de los spreads observados en el mercado chileno y una disminución general en su nivel, probablemente debido a las buenas condiciones generales de la economía nacional, lo que ha hecho más líquido el mercado tanto de deuda gubernamental como privada. Se comprueba que el modelo obtiene una mejor bondad de ajuste frente a estas condiciones actuales. En este sentido, una posible mejora al modelo planteado sería el uso de volatilidad estocástica en los procesos que gobiernan las variables que modelan el spread, lo que pudiera permitir un mejor desempeño, al ajustarse a los cambios de volatilidad registrados durante los años de la muestra.

El modelo en consecuencia es un aporte en el sentido de que permite obtener estimaciones poco volátiles de los spread que se ajusten a las observaciones del mercado. Desde este punto de vista, se da lugar a paneles de datos completos que permiten utilizar métodos estadísticos para identificar los factores que determinan los spread entre clasificaciones, su pendiente y su relación con otras variables descriptivas de las firmas.

Investigaciones posteriores podrían considerar la aplicación del modelo a bonos con opción de prepago. Para ello existen dos alternativas factibles. La primera implica usar información de una única clasificación, donde las clases de riesgo estén representadas por bonos con y sin opción de prepago, existiendo una o más variables que modelen el spread entre ellas. La segunda alternativa es aplicar el modelo tal cual como se plantea en esta tesis, pero usando información de bonos con prepago para calibrarlo. De ser posible evaluar esta opción, puede usarse tasas ajustadas por este valor (*option adjusted*) para incluir información de ambos mercados aumentando el número de papeles usados para estimar el modelo. En ambos casos sería necesario un estudio previo de la relación que existe entre bonos con prepago de una misma clasificación para validarla como alternativa de separación o buscar otro tópico que permita agrupar de mejor forma papeles con riesgo similar.

Otra extensión tiene que ver con la creación de una tercera etapa del modelo, en la cual se analicen los residuos generados por el mismo para identificar posibles errores sistemáticos que puedan ser modelados. En este sentido, los resultados obtenidos en esta tesis demuestran que al menos el segundo nivel de diferenciación en la clasificación de riesgo debiera ser tomado en cuenta para llevar a cabo este análisis. Para hacerlo una alternativa es simplemente reestimar el modelo usando información únicamente de la clase, donde la primera etapa del modelo incluiría las variables de estado estimadas para la clasificación consolidada y la segunda permitiría dar cuenta de las diferencias al interior de ella a través de la variable propia de la clase.

Sin duda una desarrollo importante sería hacer frente a la modelación de las curvas cuando la madurez de los papeles es menor a 1 año. Desde este punto de vista sería

necesario identificar los factores que rigen los movimientos de la curva libre de riesgo en el corto plazo, para luego poder proponer una forma de modelar el spread en este sector de la curva. No se encuentra evidencia de que al poseer una curva libre de riesgo creíble en estos plazos, el método no sea aplicable directamente.

Finalmente se deja planteada la aplicación de la metodología a la modelación de otros papeles con riesgo como letras hipotecarias (*mortgages*) o swaps. Ambos instrumentos se encuentran tremendamente ligados a la curva libre de riesgo, lo que hace prever que esta metodología sería exitosa en la creación de curvas consistentes para valorizarlos.

BIBLIOGRAFÍA

Ahn, D. (2004). Common Factors and Local Factors: Implications for Term Structures and Exchange Rates. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, *39*(1), 69–102.

Bedendo, M., Cathcart, L., El-Jahel, L. (2007). The Slope of the Term Structure of Credit Spreads: An Empirical Investigation. *Journal of Financial Research*, *30*(2), 237–257.

Chen, L., Lesmond, D., Wei, J. (2007). Corporate Yield Spreads and Bond Liquidity. *The Journal of Finance*, *62*(1), 119–149.

Collin-Dufresne, P., Goldstein, R. (2001). Do Credit Spreads Reflect Stationary Leverage Ratios? *The Journal of Finance*, *56*(5), 1929–1957.

Collin-Dufresne, P., Goldstein, R., Martin, J. (2001). The Determinants of Credit Spread Changes. *The Journal of Finance*, *56*(6), 2177–2207.

Cortazar, G., Milla, C., Severino, F. (2008). A Multicommodity Model of Futures Prices: Using Futures Prices of one Commodity to Estimate the Stochastic Process of Another. *Journal of Futures Markets*, *28*(6), 537.

Cortazar, G., Schwartz, E., Naranjo, L. (2007). Term-Structure Estimation in Markets with Infrequent Trading. *International Journal of Finance & Economics*, *12*(4), 353–369.

Dai, Q., Singleton, K. (2000). Specification Analysis of Affine Term Structure Models. *The Journal of Finance*, *55*(5), 1943–1978.

Dai, Q., Singleton, K. (2002). Expectation puzzles, Time-varying Risk Premia, and Affine Models of the Term Structure. *Journal of Financial Economics*, *63*(3), 415–441.

Delianedis, G., Geske, R. (2001). The Components of Corporate Credit Spreads: Default, Recovery, Tax, Jumps, Liquidity, and Market Factors. *University of California, Working Paper*.

Driessen, J. (2005). Is Default Event Risk Priced in Corporate Bonds? *Review of Financial Studies*, *18*(1), 165–195.

Duffee, G. (1998). The Relation Between Treasury Yields and Corporate Bond Yield Spreads. *The Journal of Finance*, *53*(6), 2225–2241.

Duffee, G. (1999). Estimating the Price of Default Risk. *Review of Financial Studies*, *12*(1), 197–226.

Duffie, D., Lando, D. (2001). Term Structures of Credit Spreads with Incomplete Accounting Information. *Econometrica*, *69*(3), 633–664.

Duffie, D., Singleton, K. (1999). Modeling Term Structures of Defaultable Bonds. *Review of Financial Studies*, *12*(4), 687–720.

Elton, E., Gruber, M., Agrawal, D., Mann, C. (2001). Explaining the Rate Spread on Corporate Bonds. *The Journal of Finance*, *56*(1), 247–277.

Eom, Y., Helwege, J., Huang, J. (2004). Structural Models of Corporate Bond Pricing: An Empirical Analysis. *Review of Financial Studies*, *17*(2), 499–544.

Ericsson, J., Reneby, J., Wang, H. (2006). Can Structural Models Price Default Risk? New Evidence from Bond and Credit Derivative Markets. *Working Paper*.

Harvey, A. (1990). *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*. Cambridge University Press.

Houweling, P., Hoek, J., Kleibergen, F. (2001). The Joint Estimation of Term Structures and Credit Spreads. *Journal of Empirical Finance*, *8*(3), 297–323.

Huang, J., Huang, M. (2003). How Much of the Corporate-Treasury Yield Spread is Due to Credit Risk? *Working Paper*.

Jankowitsch, R., Pichler, S. (2004). Parsimonious Estimation of Credit Spreads. *The Journal of Fixed Income*, *14*(3), 49–63.

Jarrow, R., Turnbull, S. (1992). Credit Risk: Drawing the Analogy. *Risk Magazine*, *5*(9), 63–70.

Jarrow, R., Turnbull, S. (1995). Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk. *Journal of Finance*, *50*(1), 53–85.

Kalman, R. (1960). A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Journal of Basic Engineering*, *82*(1), 35–45.

Langetieg, T. (1980). A Multivariate Model of the Term Structure. *Journal of Finance*, *35*(1), 71–97.

Liu, J., Longstaff, F., Mandell, R. (2006). The Market Price of Risk in Interest Rate Swaps: The Roles of Default and Liquidity Risks*. *The Journal of Business*, *79*(5), 2337–2359.

Longstaff, F., Schwartz, E. (1992). Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model. *Journal of Finance*, *47*(4), 1259–1282.

Longstaff, F., Schwartz, E. (1995). A Simple Approach to Valuing Risky Fixed and Floating Rate Debt. *Journal of Finance*, *50*(3), 789–852.

Merton, R. (1974). On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates. *Journal of Finance*, *29*(2), 449–470.

Mosburger, G., Schneider, P. (2005). Modelling International Bond Markets with Affine Term Structure Models. (Working Paper)

Naranjo, L. (2002). *Modelos Lognormales De Precios De Commodities Y Calibración Mediante El Filtro De Kalman Utilizando Paneles De Datos Incompletos De Futuros De Cobre Y Petróleo*. Unpublished master's thesis, Pontificia Universidad Católica de Chile.

Nelson, C., Siegel, A. (1987). Parsimonious Modeling of Yield Curves. *Journal of Business*, *60*(4), 473.

Øksendal, B. (2003). *Stochastic Differential Equations: An Introduction With Applications*. Springer.

Sørensen, C. (2002). Modeling Seasonality in Agricultural Commodity Futures. *Journal of Futures Markets*, *22*(5), 393–426.

Svensson, L. (1994). *Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994.* National Bureau of Economic Research Cambridge, Mass., USA.

Tolmasky, C., Hindanov, D. (2002). Principal Components Analysis for Correlated Curves and Seasonal Commodities: The Case of the Petroleum Market. *Journal of Futures Markets*, *22*(11), 1019–1035.

ANEXOS

ANEXO A. PLANTEAMIENTO ESTRUCTURAL DE LOS MODELOS DE NELSON-SIEGEL Y SVENSSON.

A.1. Modelo de Nelson-Siegel.

El modelo planteado en Nelson y Siegel (1987) entrega una representación paramétrica para la tasa *forward* en el tiempo T dada por la ecuación:

$$f(T) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\frac{T}{\tau}} + \beta_2 \frac{T}{\tau} e^{-\frac{T}{\tau}} \tag{A.1}$$

Esta tasa forward puede ser integrada para obtener la tasa spot del modelo.

$$R(T) = \frac{1}{T} \int_0^T f(s) ds \tag{A.2}$$

$$R(T) = \beta_0 + \beta_1 \left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right) \frac{\tau}{T} + \beta_2 \left(\left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right) \frac{\tau}{T} - e^{-\frac{T}{\tau}}\right) \tag{A.3}$$

Los parámetros β_0, β_1 y β_2 representan los coeficientes de los componentes de largo, corto y mediano plazo que permiten que el modelo ajuste distintas formas de la estructura de tasas de interés, donde:

$$R(0) = \beta_0 + \beta_1 \qquad R(\infty) = \beta_0 \tag{A.4}$$

Las ecuaciones anteriores permiten interpretar los parámetros de modo de validar el set de parámetros estimado mediante la minimización de los errores cuadráticos con respecto a las observaciones del día.

A.2. Modelo de Svensson

El modelo de Svensson (1994) es una extensión al modelo de Nelson-Siegel en el sentido de que agrega dos parámetros adicionales para permitir un mejor ajuste a estructuras más complejas, modelando la tasa *forward* como:

$$f(T) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\frac{T}{\tau_1}} + \beta_2 \frac{T}{\tau_1} e^{-\frac{T}{\tau_1}} + \beta_3 \frac{T}{\tau_2} e^{-\frac{T}{\tau_2}} \tag{A.5}$$

Integrando se obtiene la ecuación para la tasa spot.

$$\begin{aligned} R(T) &= \beta_0 + \beta_1 \left(1 - e^{-\frac{T}{\tau_1}}\right) \frac{\tau_1}{T} + \beta_2 \left(\left(1 - e^{-\frac{T}{\tau_1}}\right) \frac{\tau_1}{T} - e^{-\frac{T}{\tau_1}}\right) \\ &+ \beta_3 \left(\left(1 - e^{-\frac{T}{\tau_2}}\right) \frac{\tau_2}{T} - e^{-\frac{T}{\tau_2}}\right) \end{aligned} \tag{A.6}$$

ANEXO B. VALOR DE UN BONO DE DESCUENTO EN EL MODELO VASICEK MULTIFACTORIAL PARA LA TASA LIBRE DE RIESGO.

En un modelo dinámico de tasas de interés, normalmente el valor de esta tasa se representa como una combinación lineal de variables de estado como en la ecuación B.1.

$$r = \delta^{r\prime} x^r + \delta_0^r \tag{B.1}$$

Donde la dinámica ajustada por riesgo de cada uno de los factores x queda determinada por la expresión:

$$dx = -(\lambda + Kx_i)dt + \Sigma dw \tag{B.2}$$

El término dw por su parte representa un vector de movimientos Brownianos correlacionados tal que:

$$(dw)'(dw) = \Omega dt \tag{B.3}$$

Donde cada elemento de la matriz Ω, ρ_{ij} representa la correlación entre el factor i y j. El valor del bono P cuya tasa de descuento es r puede obtenerse aplicando el lema de Îto:

$$dP(x,T) = \sum_{i=1}^{N} P_{x_i} dx + P_T dT + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} P_{x_i x_j} dw_i dw_j \tag{B.4}$$

En la ecuación anterior P_x representa la derivada con respecto al factor x. Reemplazando los términos dx, usando la relación $dT = -dt$, y desechando los términos dt con exponente mayor a 1, la ecuación B.4, se transforma en:

$$\begin{aligned} dP(x,T) &= \left(-\sum_{i=1}^{N} P_{x_i}(\lambda i + \kappa_i x_i) - P_T + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} P_{x_i x_j}\sigma_i\sigma_j\rho_{ij} \right)\partial t \\ &+ \left(\sum_{i=1}^{N} P_x \sigma_i \right)\partial w \end{aligned} \tag{B.5}$$

Por valorización neutral al riesgo, el *drift* de la ecuación anterior debe ser igual a la tasa libre de riesgo r, con lo cual se obtiene la ecuación diferencial para el valor del bono,

dada por la ecuación B.6.

$$-\sum_{i=1}^{N} P_{x_i}(\lambda i + \kappa_i x_i) - P_T + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} P_{x_i x_j}\sigma_i\sigma_j\rho_{ij} = \delta_0 + \sum_{i=1}^{N}\delta_i x_i \tag{B.6}$$

La ecuación anterior tiene soluciones analíticas de la forma descrita en B.7.

$$P(x,T) = e^{(u(T)'x+v(T))} \tag{B.7}$$

Por lo tanto los valores de las derivadas en la ecuación B.6 en función de los términos $u(T)$ y $v(T)$ son:

$$\begin{aligned} P_{x_i} &= u_i(T)P \\ P_{x_i x_j} &= u_i(T)u_j(T)P \\ P_{x_i} &= \left(\sum_{i=1}^{N} u_i'(T) + v'(T)\right)P \end{aligned} \tag{B.8}$$

Reemplazando estas ecuaciones en B.6 y agrupando términos comunes, se obtienen las expresiones para los términos $u(T)$ y $v(T)$, lo que a su vez permite definir una solución cerrada para el valor de un bono de descuento bajo esta modelación.

$$\begin{aligned} u_i(\tau) &= -\delta_i\left(\frac{1-e^{-k_i\tau}}{k_i}\right) \\ v(\tau) &= \sum_{i=1}^{n}\delta_i\frac{\lambda_i}{k_i}\left(\tau - \frac{1-e^{-k_i\tau}}{k_i}\right) - \delta_0^r\tau \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(\delta_i)^2\frac{\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}}{k_i k_j}\left(\tau - \frac{1-e^{-k_i\tau}}{k_i} - \frac{1-e^{-k_j\tau}}{k_j} + \frac{1-e^{-(k_i+k_j)\tau}}{k_i+k_j}\right) \end{aligned} \tag{B.9}$$

ANEXO C. MATRICES DE LA ECUACIÓN DE MEDIDA DEL FILTRO DE KALMAN CON UNA RELACIÓN LINEAL Y UNA LINEALIZADA.

En su forma original, el filtro planteado por Kalman (1960) supone una relación lineal entre las variables observables y no observables del modelo. Esto se traduce en una ecuación de medida dada por la expresión C.1.

$$z_t = H_t x_t + d_t + v_t \qquad v_t \sim N(0, R_t) \tag{C.1}$$

El valor de un bono de descuento que paga 1 en el período de vencimiento T y su representación en el espacio de estados, asumiendo que estas variables siguen un proceso de reversión a la media del tipo Vasicek, están dados por las ecuaciones C.2 y C.3.

$$P = e^{-rT} \tag{C.2}$$

$$P_s = e^{(u(T)'X + v(T))} \tag{C.3}$$

Igualando ambas expresiones, se encuentra la relación lineal existente entre las variables observables r y las variables de estado X.

$$r = -\frac{1}{T}(u(T)'X + v(T)) \tag{C.4}$$

De esta forma, las matrices para la ecuación de medida del filtro resultan ser:

$$z_t = \begin{bmatrix} r_t^1 \\ \vdots \\ r_t^{M_t} \end{bmatrix} \qquad H_t = \begin{bmatrix} -u_1^1(T)/T & \cdots & -u_N^1(T)/T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -u_1^{M_t}(T)/T & \cdots & -u_N^{M_t}(T)/T \end{bmatrix}$$

$$d_t = \begin{bmatrix} -v^1(T)/T \\ \vdots \\ -v^M(T)/T \end{bmatrix} \tag{C.5}$$

Donde N es el número total de factores para modelar la tasa r y M_t es el número de observaciones en el período t. La ausencia de cupones, permite despejar una expresión cerrada para la tasa r en función de las variables de estado donde se observa la relación

lineal de éstas con la variable observable. Para el caso de un bono con cupones, su valor y su representación en el espacio de estados están dados por las ecuaciones C.6 y C.7.

$$P = \sum_{i=1}^{T} C_i e^{-rt_i} \tag{C.6}$$

$$P_s = \sum_{i=1}^{T} C_i e^{-(u(t_i)'X + v(t_i))} \tag{C.7}$$

Igualando las expresiones anteriores, no es posible obtener una relación lineal entre la tasa r y las variables de estado X. Para resolver este asunto, Harvey (1990) propone una extensión al filtro de Kalman que permite usarlo frente a ecuaciones de medida no lineal, linealizando la función que relaciona ambas variables a través de un desarrollo de Taylor de primer orden.

$$f(x_t) = f(\hat{x}_{t|t-\Delta t}) + \left.\frac{\partial f(x_t)}{\partial x_t'}\right|_{x_t = \hat{x}_{t|t-\Delta t}} (x_t - \hat{x}_{t|t-\Delta t}) \tag{C.8}$$

Donde $f(x)$ representa la función que relaciona el espacio de estados con la variable observada. La linealización se realiza en torno a la predicción del filtro dada la información disponible hasta $t - \Delta t$ para asegurar que una aproximación de primer orden sea suficientemente aceptable. Igualando las expresiones C.6 y C.7 y derivando implícitamente se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} &= \sum_{i=1}^{T} C_i u(t_i) e^{(-u(t_i)'X + v(t_i))} \\ \frac{\partial P}{\partial r} &= \sum_{i=1}^{T} C_i t_i e^{-rt_i} \end{aligned} \tag{C.9}$$

Aplicando esta linealización, se obtiene la nueva ecuación de medida linealizada.

$$z_t = \hat{H}_t x_t + \hat{d}_t + v_t \qquad v_t \sim N(0, R_t) \tag{C.10}$$

donde

$$
\begin{aligned}
\bar{H}_t &= \begin{bmatrix} \bar{H}_t^1 \\ \vdots \\ \bar{H}_t^{M_t} \end{bmatrix} \qquad\qquad \bar{d}_t = \begin{bmatrix} \bar{d}_t^1 \\ \vdots \\ \bar{d}_t^{M_t} \end{bmatrix} \\
\bar{H}_t^m &= \frac{1}{\sum_{i=1}^{T_m} C_i^m t_i e^{-r_0 t_i}} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{T_m} C_i^m u_i^{1,m} e^{-r(u'X+v)} & \cdots & \sum_{i=1}^{T_m} C_i^m u_i^{N,m} e^{-r(u'X+v)} \end{bmatrix} \\
\bar{d}_t^m &= r_0 - \bar{H}_t^m \hat{x}_{t|t-\Delta t} \qquad r_0 = r(\hat{x}_{t|t-\Delta t})
\end{aligned} \tag{C.11}
$$

En la ecuación C.11, $\bar{H}_t^m$ y $\bar{d}_t^m$ representa el término *m-ésimo* de las matrices $\bar{H}_t$ y $\bar{d}_t$, r_0 corresponde a la tasa obtenida de evaluar la expresión C.7 en las variables de estado estimadas por el filtro y luego igualarla a la expresión C.6, despejando la tasa r por algún método numérico.

ANEXO D. DERIVACIÓN DEL MODELO CANÓNICO PARA LA TASA DE UN BONO CON DEFAULT.

Se tiene un modelo para la tasa de un bono con *default*, cuya representación en el espacio de estados está dada por la ecuación D.1.

$$R_j = (1+\gamma^j)1^{r\prime}x^r + \delta_j^{c\prime}x^c + \delta_j^{g\prime}x_j^g + \delta_r^0 + \delta_j^0 \tag{D.1}$$

Esta ecuación presenta un modelo sobre especificado puesto que no tiene el mínimo número de factores posibles para especificar el modelo. Sin embargo, como se trata de variables no observables, es posible aplicar una transformación lineal que permita eliminar los parámetros sobrantes, sin modificar las propiedades estadísticas del proceso original.

Supongamos que se desea estimar conjuntamente la tasa de dos clases distintas de papeles con riesgo. La ecuación D.1 escrita matricialmente para cada una de estas clases es:

$$R_j = \begin{bmatrix} \delta_j^r & \delta_j^c & \delta_j^g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^r \\ x^c \\ x^g \end{bmatrix} + \delta_j^0 = \delta_j' x_j + \tilde{\delta}_j^0 \qquad j = 1,2 \tag{D.2}$$

Donde los términos d_j y x son vectores de largo n^r, n^c y n^g según el superíndice correspondiente. Por simplicidad se asume $n^r = n^c = n^g = 1$, de forma que los componentes de los vectores en D.2 se transforman en escalares. Si los parámetros de ambas tasas R se estiman en forma conjunta, los nuevos vectores son:

$$X' = \begin{bmatrix} x^r & x^c & x_1^g & x_2^g \end{bmatrix} \tag{D.3}$$

$$\delta_1' = \begin{bmatrix} \delta_1^r & \delta_1^c & \delta_1^g & 0 \end{bmatrix} \tag{D.4}$$

$$\delta_2' = \begin{bmatrix} \delta_2^r & \delta_2^c & 0 & \delta_2^g \end{bmatrix} \tag{D.5}$$

Con esta extensión, el proceso para las variables de estado, escrito matricialmente queda:

$$dX = -(\lambda + KX)dt + \Sigma dW \tag{D.6}$$

donde

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda^r \\ \lambda^c \\ \lambda_1^g \\ \lambda_2^g \end{bmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix} \kappa^r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa^c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_1^g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa_2^g \end{bmatrix} \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma^r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1^g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_2^g \end{bmatrix}$$
$$W = \begin{bmatrix} w^r \\ w^c \\ w_1^g \\ w_2^g \end{bmatrix} \qquad \Omega = \Sigma\Theta\Sigma \qquad \Theta = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{12} & 1 & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & 1 \end{bmatrix} \tag{D.7}$$

Se requiere aplicar una matriz de transformación P que reduzca el número de parámetros a estimar. Para esto se define P como:

$$P = \begin{bmatrix} 1/\delta_1^r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\delta_1^c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\delta_1^g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\delta_2^g \end{bmatrix} \tag{D.8}$$

Usando, esta transformación, la ecuación D.2 puede ser reescrita según:

$$R_j = (\delta_j' P)(P^{-1}X) + \delta_j^0$$
$$R_j = \tilde{\delta}_j' \tilde{X} + \delta_j^0$$

Aplicando esta transformación, los nuevos vectores $\tilde{\delta}_j$ son:

$$\tilde{\delta}_1' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{D.9}$$

$$\tilde{\delta}_2' = \begin{bmatrix} \delta_2^r/\delta_1^r & \delta_2^c/\delta_1^c & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\delta}_2^r & \tilde{\delta}_2^c & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{D.10}$$

Las ecuaciones D.9 y D.10 muestran que al estimar el modelo en forma conjunta, no es posible encontrar una transformación que elimine los coeficientes de las variables de estado comunes en el modelo, para todos los grupos, aunque esto si es factible para las variables independientes o propias de cada grupo. Las nuevas variables de estado siguen

un proceso dado por:

$$\begin{aligned} d\tilde{X} &= P^{-1}dX \\ &= \left(P^{-1}\lambda - (P^{-1}KP)(P^{-1}X)\right)dt + (P^{-1}\Sigma)dW \\ &= \left(\tilde{\lambda} - \tilde{K}\tilde{X}\right)dt + \tilde{\Sigma}dW \end{aligned} \tag{D.11}$$

Al ser P una transformación invariante, las propiedades estocásticas de las variables no se ven afectadas. Como $\tilde{K}$ es similar a K, poseen los mismos valores propios. De la misma forma la nueva matriz de varianza covarianza está definida por $\tilde{\Omega}$, en la ecuación D.12.

$$\tilde{\Omega} = \tilde{\Sigma}\Theta\tilde{\Sigma}' = P(\Sigma\Theta\Sigma')P' = P\Omega P' \tag{D.12}$$

Por lo tanto $\tilde{\Omega}$ resulta ser una matriz congruente a Ω, lo que implica que también es estrictamente definida positiva. De esta forma se consigue una transformación invariante que lleva la expresión D.1 a la ecuación canónica identificable D.13.

$$\begin{aligned} R_1 &= 1^{r\prime}x^r + 1^{c\prime}x^c + 1^{g\prime}x_1^g + \delta_0^{R,1} \\ R_j &= (1+\gamma^g)1^{r\prime}x^r + \delta^{c\prime}x^c + 1^{g\prime}x_1^g + \delta_0^{R,2} \end{aligned} \tag{D.13}$$

Sin embargo el término γ^j es importante por cuanto es una medida de la correlación directa existente entre el spread y la tasa libre de riesgo. De esta forma, para lograr el modelo final no se transformarán las variables de estado x^r, de modo de no alterar las correlaciones originales. Dado lo anterior, el modelo final para las G clases de papeles con riesgo a estimar de manera conjunta está dado por la expresión D.14.

$$\begin{aligned} R_j &= (1+\gamma^j)1^{r\prime}x^r + \delta_j^{c\prime}x^c + 1^{g\prime}x_j^g + \delta_0^{R,j} \\ &\quad con \qquad \delta_1^c = 1^c \qquad j = 1, ..., G \end{aligned} \tag{D.14}$$

ANEXO E. DESCRIPCIÓN DE LAS NUEVAS MATRICES DEL FILTRO DE KALMAN PARA ESTIMACIÓN EN DOS ETAPAS.

La estimación en etapas permite estimar modelos con un gran número de parámetros y observaciones sin sesgar la estimación a ninguna de las clases estimadas, facilitando el descubrimiento del set de parámetros óptimos para cada una de ellas. Supongamos que se tienen dos clases de variables observables que se quieren estimar en forma conjunta. Las nuevas matrices de la ecuación de medida se obtienen de concatenar las matrices de cada una de las estimaciones individuales.

$$Z_t = \begin{bmatrix} Z_t^1 \\ -- \\ Z_t^2 \end{bmatrix} \quad H_t = \begin{bmatrix} H_1^A & H_1^B \\ -- & -- \\ H_2^A & H_2^B \end{bmatrix} \quad X_t = \begin{bmatrix} X_t^A \\ -- \\ X_t^B \end{bmatrix} \quad d_t = \begin{bmatrix} d_t^1 \\ -- \\ d_t^2 \end{bmatrix} \tag{E.1}$$

La estimación en dos etapas considera que las variables de estado de la primera etapa se estiman en un primer paso en base a las observaciones de la variable que se desea modelar con el vector de variables de estado X^A, con el método de filtro de Kalman extendido original. Esto permite que para el segundo paso, ya no sea necesario incluir las m^1 observaciones de esta clase, pues sus variables ya han sido estimadas, lo que redunda en que en este paso sólo se use la parte de las matrices Z, H y d con superíndice 2 de la expresión .

Usando la separación del vector de variables de estado donde los superíndices A y B indican las variables de estado pertenecientes a la primera y segunda etapa respectivamente, la nueva ecuación de medida del filtro para la segunda etapa se escribe:

$$Z^2 = H^A X^A + H^B X^B + d^2 + v \qquad v \sim N(0, R) \tag{E.2}$$

Tal como se vio en el anexo C para el caso de un bono con cupones, es necesario usar un desarrollo de Taylor de primer orden para linealizar la ecuación de medida, lo que implica que la ecuación de medida linealizada es de la forma descrita en E.3.

$$z = TIR_0 + \bar{H}(X - \hat{X}) + v \tag{E.3}$$

Esto escrito en la forma de E.2 queda:

$$z = TIR_0 + \bar{H}^A(X^A - \hat{X}^A) + \bar{H}^B(X^B - \hat{X}^B) + v \tag{E.4}$$

Como las variables de estado X^A ya fueron estimadas en el primer paso, en esta segunda etapa no es necesario predecirlas, por lo tanto se puede imponer que la predicción del filtro sea exactamente igual al set de variables estimadas para este período, es decir que $\hat{X}^A = X^A$, lo que hace que la submatriz $\bar{H}^A$ no sea necesaria en la ecuación de medida al estar multiplicada por un factor 0, quedando finalmente:

$$z = TIR_0 + \bar{H}^B(X^B - \hat{X}^B) + v \qquad v \sim N(0, R) \tag{E.5}$$

Del desarrollo planteado anteriormente se deduce que la nueva ecuación de medida de la segunda etapa tiene un vector z de largo $\bar{M} = M - m^r$, ya que las observaciones de papeles sin riesgo sólo se usan para estimar el set de parámetros X^A en la primera etapa. En tanto la matriz H linealizada corresponde únicamente a aquellas variables que serán estimadas en este paso, es decir es de dimensión $\bar{M}$x$\bar{N}$ con $\bar{N} = N - n^r$.

Del mismo modo la variable aleatoria v distribuye normal multivariada de dimensión $\bar{M}$, con su diagonal correspondiente a las varianzas de los errores de medición en las observaciones de papeles con riesgo. Finalmente, dado que se tiene un modelo de $\bar{N}$ factores a estimar, la matriz P de errores de estimación tendrá dimensión $\bar{N}$x$\bar{N}$. Esto implica que las correlaciones entre las variables de estado que modelan los papeles con riesgo y las variables X^A que modelan la tasa libre de riesgo no influyen en la dinámica del proceso seguido por este set X^B, pero sí en la estructura contemporánea que estima el filtro, a través del término TIR_0. Recordemos que:

$$TIR_0 = y_0 \qquad | \qquad \sum_{k=1}^{Ncup} C_k e^{y_0 t_k} = \sum_{k=1}^{Ncup} C_k e^{u_k' x + v_k} \tag{E.6}$$

con

$$
\begin{aligned}
v_k(\tau) &= \sum_{i=1}^{n} \delta_i \frac{\lambda_i}{k_i} \left(\tau - \frac{1 - e^{-k_i \tau}}{k_i} \right) - \delta_0^r \tau \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} (\delta_i)^2 \frac{\sigma_i \sigma_j \rho_{ij}}{k_i k_j} \left(\tau - \frac{1 - e^{-k_i \tau}}{k_i} - \frac{1 - e^{-k_j \tau}}{k_j} + \frac{1 - e^{-(k_i + k_j)\tau}}{k_i + k_j} \right) \quad \text{(E.7)}
\end{aligned}
$$

En conclusión, las variables de estado que modelan la curva libre de riesgo influyen en la estimación del set de variables para modelar las distintas clases de riesgo a través de la tasa estimada TIR_0, lo que permite registrar la relación entre la tasa de bonos con riesgo y la tasa libre de riesgo, obteniéndose beneficios similares a los logrados mediante estimación conjunta.

ANEXO F. ELECCIÓN DEL NÚMERO DE FACTORES DEL MODELO.

Para la elección de los factores de un modelo, uno de los métodos más utilizados es el análisis de componentes principales. En él se busca identificar el número mínimo de factores que explican un porcentaje deseado de la varianza de un set de datos, reduciendo la cantidad de variables necesarias para representar el modelo. Para ello se representa la matriz de varianza covarianza de los datos usando sus valores y vectores propios y se elije, ordenándolos de mayor a menor, el subconjunto que mejor explica un nivel deseado del porcentaje total de varianza. Sin embargo, cuando existen factores comunes como en el modelo planteado para el spread, esta metodología no es directamente aplicable. A continuación se presentan dos metodologías propuestas en la literatura que pueden ser usadas para estimar el número de factores comunes a usar para la especificación del modelo.

F.1. Modelo de Tolmasky y Hindanov.

Tolmasky y Hindanov (2002) proponen un método para estimar el número de factores comunes a usar para modelar 2 commodities con movimientos correlacionados usando una variación del análisis de componentes principales. Para ello plantean una estructura para la matriz de correlaciones de dos clases de instrumentos distintos que correlacionan μ entre ellos. De esta forma, si C_ρ es la matriz de correlaciones de cada uno de estos instrumentos por separado, se obtiene una matriz de correlaciones conjunta dada por:

$$C_{\rho,\mu} = \begin{pmatrix} C_\rho & \mu C_\rho \\ \mu C_\rho & C_\rho \end{pmatrix} \tag{F.1}$$

Donde si λ y V son los valores y vectores propios de la matriz C_ρ, los vectores propios de $C_{\rho,\mu}$ serán de la forma (V, V) o $(V, -V)$ con valores propios $\lambda(1+\mu)$ o $\lambda(1-\mu)$ respectivamente, lo que implica que altas correlaciones entre las clases generarán vectores propios con movimientos conjuntos altamente correlacionados.

De esta forma, la metodología se aplica disponiendo las matrices de varianza covarianza como en la ecuación F.1 y luego realizando un análisis de componentes principales. Así, recuperando la disposición original, se puede separar los vectores propios en dos partes y luego analizar gráficamente su similitud con los del segundo activo, determinando con ello el número de factores comunes en base a la similitud de los vectores propios parcializados.

Una crítica que se realiza a este análisis es que en general, en un análisis de componentes principales, el primer factor representa el nivel, por lo que el modelo predecirá siempre al menos un factor común entre los activos analizados.

F.2. Modelo de Cortazar, Milla y Severino.

Cortazar et al. (2008) plantea un método más acabado para la estimación de factores comunes en un modelo de estimación conjunta de activos correlacionados, en particular se testea el modelo sobre dos commodities. Para ello se usa el análisis de *Partial Common Principal Components (CPC(p))*, que permite la determinación de p factores comunes en el análisis de componentes principales. Para llevarlo a cabo se calculan los valores y vectores propios de las matrices de varianza-covarianza de los activos por separado.

$$A = \beta'_A \lambda_A \beta_A \qquad\qquad B = \beta'_B \lambda_B \beta_B \tag{F.2}$$

Donde β representa los vectores propios de cada matriz y λ es una matriz diagonal que contiene los valores propios de las mismas. El método de CPC(p) postula que existe un determinado número de factores comunes tales que los parámetros β pueden ser estimados por $\tilde{\beta} = (\beta_c, \beta_i)$, donde β_c representa los vectores propios de los factores comunes y β_i los de los factores propios de cada una de las matrices de varianza covarianza individuales.

La estimación de estos parámetros se realiza maximizando la función de verosimilitud que maximiza la probabilidad de que los datos provengan de una estructura como la

impuesta, dada por la ecuación F.3.

$$L(\psi_1, ..., \psi_m) = C \prod_{i=1}^{m} \text{e}tr \left(-\frac{n_i}{2} \psi_i^{-1} S_i \right) (\det \psi_i)^{-\frac{n_i}{2}} \tag{F.3}$$

donde ψ_i es la matriz de varianza covarianza estimada del activo i, con i=1,...,m. S_i representa la matriz de varianza covarianza de la muestra y n_i es el número de observaciones del activo i. Sin embargo como el análisis de componentes principales requiere de paneles completos, se tiene necesariamente que $n_i = n$. Separando por factores comunes y propios, maximizar la función anterior es equivalente a minimizar la expresión:

$$g = \sum_{i=1}^{m} n_i \left[\sum_{j=1}^{r} \log \lambda_{ij} + \sum_{j=1}^{p} \frac{\beta_j' S_i \beta_j}{\lambda_{ij}} + \sum_{j=p+1}^{r} \frac{\beta_j^{(i)\prime} S_i \beta_j^{(i)}}{\lambda_{ij}} \right] \tag{F.4}$$

donde r es la dimensión de las matrices de varianza covarianza de los datos. El método planteado por Cortazar et al. (2008), evalúa la función de verosimilitud aumentando el número de factores comunes, disponiendo finalmente de una serie de especificaciones para el modelo. Para elegir la que mejor representa los datos se utiliza el criterio de información de Schwarz (SIC), que penaliza la adición de parámetros al modelo según:

$$SIC(i) = -2 \log \frac{L_i}{L_c} + (q_i - q_1) \log(n) \tag{F.5}$$

La ecuación anterior presenta el SIC en función del mayor likelihood (L_c), conseguido con el menor número de factores comunes posible (q_1), para asegurar un valor positivo de la función, facilitando la optimización en términos computacionales.

ANEXO G. ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DEL MODELO FRENTE A UN CAMBIO ESTRUCTURAL EN LA RELACIÓN ENTRE CLASES DE SPREAD.

A continuación se presenta un análisis del comportamiento del modelo frente a un cambio estructural que no ha sido capturado por los parámetros estimados. En Chile, el año 2007 esta marcado por un período de inestabilidad económica internacional que ha traído fuertes presiones inflacionarias al interior del país. Esto ha llevado a un alza en el nivel de tasas, con la consecuente contracción de spreads en los papeles privados, principalmente en los papeles de mayor riesgo de crédito. La tabla G.1 muestra los indicadores de bondad de ajuste del modelo durante este año.

TABLA G.1. Indicadores de bondad de ajuste para al año 2007, conseguidos por el modelo de estimación en 2 etapas propuesto.

Clasificación Consolidada	**Clasificación**	**RMSE (p.b.)**	**Sesgo (p.b.)**
AAA	**AAA**	11,98	0,07
Promedio AAA		**11,98**	**0,07**
AA	**AA+**	9,79	-0,90
	AA	12,33	-1,02
	AA-	14,17	-2,31
Promedio AA		**12,57**	**-1,61**
A	**A+**	19,49	6,45
	A	13,02	2,08
	A-	16,11	4,95
Promedio A		**16,67**	**4,62**
BBB	**BBB+**	11,16	6,40
	BBB-	3,04	-0,81
Promedio BBB		**6,88**	**1,58**
Promedio Total		**13,17**	**0,36**

Se observa un leve aumento en el sesgo de la clasificación A. Este se explica por un descenso de 28 puntos base en la media de los spreads de esta clasificación, lo que representa una disminución de 25 % con respecto al año anterior, principalmente motivado por un descenso en el spread promedio de bonos subordinados de esta clasificación, los que bajan 52 puntos base en promedio, es decir un 37 % menor que el año anterior. La mayoría de estos papeles se encuentran concentrados en la clasificación A-, lo que provoca además que se pierda la relación de orden experimentada al interior de la clasificación.

El efecto de lo anterior en el modelo es el descenso en el nivel de spread de una clase. Tal como se explica en la sección 5.3, el factor propio de las clasificaciones influye prioritariamente en las variaciones del spread de corto plazo, mientras que para plazos más largos esta influencia se distribuye entre los demás factores, que toman información proveniente de otras clases. En este sentido, el descenso en la clasificación A genera un cambio en su interrelación con las demás clases que sólo es captado por el factor propio de la misma.

La tabla G.2 muestra una descomposición por plazos de este sesgo, donde se observa claramente la influencia del factor individual en disminuir los spreads en el corto plazo y el alto sesgo positivo del largo plazo generado por la influencia del factor común, afectado por los movimientos disímiles de las demás clases de riesgo que se estiman en forma conjunta.

En este sentido, los resultados sugieren que si se quisiera reducir el sesgo experimentado se necesitaría al menos un factor individual adicional que fuera capaz de ajustar estos cambios en las relaciones de nivel entre dos clases de riesgo o bien plasmar este cambio estructural en los parámetros del modelo original.

TABLA G.2. Desglose de sesgo por *bucket* de plazo de la estructura para clasificación A, durante el período fuera de muestra. Cada bucket está compuesto por 2 años.

Bucket de Plazo	**Sesgo**
2	-6,26
3	-2,35
4	-3,54
5	-0,86
6	21,14
7	6,73
8	21,47
9	20,75
10	7,41
11	17,60
12	18,82
Promedio	**4,62**

ANEXO H. DERIVACIÓN DE LA ESTRUCTURA DE VOLATILIDAD PARA UN BONO MODELADO CON UNA DINÁMICA DEL TIPO VASICEK.

A continuación se presenta el desarrollo para la obtención de una fórmula general para la estructura de volatilidad de un bono modelado bajo una dinámica de Vasicek con reversión a la media. Si se asume un proceso para el precio del bono $P(x,T)$ del tipo:

$$\frac{dP}{P} = \mu_P dt + \sigma_P dw \tag{H.1}$$

Donde x representa el vector de variables de estado que modelan el precio del bono y T es la madurez del mismo. Aplicando el lema de Îto, se obtiene:

$$\frac{dP}{P} = \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{N} P_{x_i} dx_i + \frac{1}{2}\frac{1}{P}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j - \frac{1}{P} P_T dt \tag{H.2}$$

Por otro lado, de la ecuación H.1 es claro que al despreciar términos dt con exponente mayor a 1, se tiene:

$$\left(\frac{dP}{P}\right)\left(\frac{dP}{P}\right) = \sigma_P dt \tag{H.3}$$

Luego considerando que la correlación entre las variables de estado x_i y x_j es ρ_{ij}, y combinando H.2 en H.3 se obtiene la expresión para la volatilidad de un bono modelado bajo las variables de estado x_i.

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \left(\frac{1}{P} P_{x_i}\right)\left(\frac{1}{P} P_{x_j}\right) \tag{H.4}$$

Dada la dinámica de Vasicek impuesta para las variables de estado, la representación en el espacio de estados para un bono de descuento es:

$$P = e^{\sum_{i=1}^{N} u_i x_i + v} \tag{H.5}$$

Reemplazando H.5 en H.4 se obtiene la expresión final para la estructura de volatilidad instantánea cero cupón teórica del modelo dada por H.6.

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}u_iu_j \qquad con \qquad u_i = \frac{e^{k_i}-1}{k_i} \tag{H.6}$$