PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

FACULTAD DE EDUCACIÓN

PROGRAMA DE MAGÍSTER EN EDUCACIÓN

CARACTERIZACIÓN DE LAS TAREAS MATEMÁTICAS PROPUESTAS POR DOCENTES DE EDUCACIÓN MEDIA PARA EVALUAR LA COMPETENCIA MATEMÁTICA DE RESOLVER PROBLEMAS

POR

FELIPE DAVID MÁRQUEZ SALINAS

Proyecto de Magister presentado a la Facultad de Educación de la Pontificia Universidad Católica de Chile para optar al grado académico de Magíster en Educación con Mención en Evaluación de Aprendizajes

Profesores Guía:

Horacio Solar Bezmalinovic

Joaquim Barbé Farré

Abril, 2021

Santiago, Chile

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, a mi esposa Cynthia por ser mi compañera de vida y quién ha caminado, con mucha paciencia y comprensión, junto a mí durante todo este proceso.

A mis hijos Joaquín y Renato. Son el motor que me motivan a seguir creciendo como persona y como profesional.

A mis padres, quienes son mi mayor orgullo, por el amor y el apoyo que me han dado siempre. Han sido los mejores maestros.

A mi hermano, mis hermanas y sus familias, por su cariño, preocupación constante y por amar a mis hijos.

A mis suegros, mi cuñado y mis cuñadas, por su constante apoyo y amor hacia mí y mis hijos.

A mis amigos, la familia que elegí para compartir el presente y el futuro.

A los profesores Horacio Solar y Joaquim Barbé, quienes guiaron este trabajo a buen puerto y con quienes compartimos el mismo amor hacia la matemática y hacia la educación.

A los y las profesoras del Magister en Educación por aportar con su conocimiento y experiencia en mi formación profesional. Son un equipo de excelencia.

Al Centro Felix Klein y a sus profesionales que trabajan día a día para mejorar el aprendizaje de la matemática, por todo el aprendizaje que he tenido en estos años de trabajo y también porque fue la llave para poder participar en el estudio TALIS Video.

A la OECD y al Centro de Estudios de Ministerio de Educación por facilitar los datos usados en esta investigación.

A CONICYT por su apoyo financiero durante el desarrollo del Magister.

Y a todos y todas quienes este trabajo les puede servir y, de alguna manera, aprovecharán todas las horas invertidas en él.

TABLA DE CONTENIDOS

INDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMEN

La resolución de problemas ocupa un lugar central en el estudio de la matemática, por lo que ha adquirido cada vez mayor importancia en los currículos nacionales e internacionales. Sin embargo, los resultados en evaluaciones internacionales son insatisfactorios y muestran que los estudiantes solo son capaces de resolver problemas en contextos rutinarios y con información explícita.

Frente a esta problemática surge la necesidad de saber de qué manera y bajo qué niveles de complejidad los docentes evalúan esta competencia matemática. Para esto, se analizaron 98 instrumentos de evaluación sobre el tema de ecuaciones cuadráticas con el propósito de caracterizar las tareas matemáticas propuestas por los profesores chilenos en dichos instrumentos. Posteriormente, se seleccionaron aquellos problemas contextualizados, se definieron criterios para establecer la complejidad de los procesos matemáticos involucrados en la resolución de estos problemas y se caracterizó la complejidad de esos procesos en base a los criterios definidos.

Los resultados arrojan que persiste un enfoque tradicional para evaluar la resolución de problemas, con contextos empobrecidos y poco pertinentes a un modelo por competencias. Además, el foco de la evaluación está puesto mayoritariamente, en el resultado y no en los procesos involucrados, siendo frecuente encontrar problemas que omiten algunos de ellos.

Palabras clave

Resolución de problemas - procesos matemáticos – evaluación de los aprendizajes – competencias matemáticas

ABSTRACT

Problem solving occupies a central place in the study of mathematics, so it has become increasingly important in national and international curricula. However, the results in international assessments are unsatisfactory and show that students are only able to solve problems in routine contexts and with explicit information.

Due with this problem arises the need to know how and at what levels of complexity teachers evaluate this mathematical competence. For this, 98 assessment instruments on the topic of quadratic equations were analyzed in order to characterize the mathematical tasks proposed by Chilean teachers in these instruments. Subsequently, those problems that had a context were selected, In addition, the criteria to establish the complexity of the mathematical processes involved in solving these problems, were defined. Finally, the complexity of these processes was characterized based on the previously defined criteria.

The results show that a traditional approach to assess problem solving persists, that they have impoverished contexts and a low concordance with a competency model. Furthermore, the evaluation is mostly focused on the result and not on the processes involved, so it is common finding problems that omit some of these criteria.

Keywords
Problem solving - mathematical processes - assessment of learning - mathematical literacy

INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas es uno de los temas centrales en el aprendizaje de la matemática. Innumerables estudios dan cuenta de la relevancia que tanto la investigación en matemática como los principales referentes curriculares internacionales le dan a esta competencia matemática (NCTM, 2000; OECD, 2019a). De hecho, en nuestro país las Bases Curriculares de matemática para educación básica (MINEDUC, 2012) y media (MINEDUC, 2015) proponen que el foco de la asignatura sea la resolución de problemas, ya que no solo pone en juego un amplio número de habilidades, sino que también la creatividad para buscar y probar diversas soluciones. Además, mediante la resolución de problemas los y las estudiantes descubren el sentido y la importancia de la matemática en la vida y, adicionalmente, genera espacios para vincular la matemática con otras disciplinas.

No obstante, pese a que, en nuestro currículo tanto en educación básica como en educación media se promueve la resolución de problemas como foco primordial del aprendizaje matemático, se observa que en evaluaciones internacionales que evalúan esta competencia matemática, como la prueba PISA, el nivel de logro obtenido en matemática por los estudiantes chilenos es bajo en comparación con los estándares internacionales (OECD, 2019b). Además, se evidencia que nuestros estudiantes en general solo resuelven problemas simples, en contextos familiares y con la información explícita, lo que da cuenta de un pobre desarrollo en la realización de aquellos procesos matemáticos involucrados en la resolución de problemas más complejos y desafiantes. En otras palabras, pese a la explicitación del foco en la resolución de problemas definido por el Marco Curricular vigente, queda en evidencia que nuestros estudiantes no alcanzan las competencias necesarias para ser considerados buenos resolutores de problemas. Frente a esto surge la necesidad de estudiar la manera en que la resolución de problemas se evalúa en el aula y bajo qué niveles de complejidad los estudiantes la desarrollan.

Para responder a esta necesidad nace este proyecto de magister, cuyo propósito es caracterizar las tareas matemáticas que los y las docentes de educación media de la asignatura de matemática proponen a sus estudiantes para evaluar la competencia matemática de resolver problemas. Además, se identificarán aquellos procesos matemáticos involucrados en la resolución de problemas contextualizados, que son justamente los tipos de problemas que se evalúan en la prueba PISA, y se establecerán criterios que permitan definir niveles de complejidad en el desarrollo de estos procesos.

En la primera parte de este proyecto se entrega evidencia acerca de la relevancia que se le da a la resolución de problemas tanto en didáctica de la matemática como en los currículos de matemática de muchos países, incluido Chile. Luego se analizarán los principales resultados obtenidos por los y las estudiantes en la evaluación PISA de matemática para evidenciar la problemática presentada. Esta problemática justifica la investigación realizada en este proyecto de magister, cuyo propósito general es caracterizar el modo en que los profesores de matemática de enseñanza media evalúan la competencia matemática de resolver problemas, considerando diferentes niveles de complejidad.

En el segundo capítulo se presentarán los referentes teóricos que estructurarán esta investigación. Se dará un recorrido en torno a qué es un problema matemático y a sus diferentes clasificaciones de acuerdo con lo que literatura señala. Luego se profundizará en la competencia matemática de resolver problemas y en su evaluación, considerando tanto los procesos matemáticos involucrados en su desarrollo, como algunos referentes taxonómicos con los que se pueden establecer diferentes niveles de complejidad.

En el capítulo tres se definirá la metodología diseñada para este proyecto: se explicitará la muestra utilizada y el contexto de su selección, y también se darán a conocer las etapas realizadas en la investigación: (1) la definición de criterios para seleccionar aquellos reactivos que promuevan la competencia matemática de resolver problemas, (2) el análisis de las tareas matemáticas que evalúan esta competencia con el propósito de caracterizar la forma en que los y las docentes las proponen en sus instrumentos de evaluación, (3) la selección de aquellos problemas contextualizados y, (4) la identificación de criterios que permitirán caracterizar de la complejidad de los procesos matemáticos involucrados en la resolución de este tipo de problemas.

En el capítulo cuatro, se presentarán los principales resultados del análisis de los instrumentos de evaluación. En primer lugar, la caracterización de las tareas matemáticas que evalúan la resolución de problemas en estos instrumentos desde el punto de vista del tipo de instrumento, el tipo de contexto y las demandas cognitivas involucradas. Posteriormente, se mostrarán los criterios que permitieron establecer niveles de complejidad en la ejecución de los procesos matemáticos involucrados en la resolución de problemas contextualizados, y finalmente se aplicarán estos criterios para caracterizar la complejidad de los procesos matemáticos propuestos en este tipo de problemas.

Finalmente, se presentarán las principales conclusiones de este trabajo, asociadas a la caracterización tanto de las tareas matemáticas propuestas por los docentes de educación media para evaluar la resolución de problemas como la complejidad de los procesos matemáticos asociados a esta competencia matemática. A su vez, se presentarán las posibles proyecciones y oportunidades de investigación que pueden realizarse en el futuro con los resultados de este proyecto.

1. ANTECEDENTES Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

1.1. ANTECEDENTES

Sin duda, la resolución de problemas es uno de los temas más relevantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Si bien Polya en la década de 1940 ya había escrito en torno a estrategias para resolver problemas matemáticos, el cambio de paradigma de cómo se enseña la matemática hacia un aprendizaje activo ha logrado que este tema adquiera mayor importancia, puesto que, según los enfoques más constructivistas, la resolución de problemas es fundamental para que los estudiantes puedan hacer matemáticas (Brousseau, 2007; O'Sheay y Leavy, 2013; Gasco, 2013). Por ejemplo, Brousseau (2007) sostiene que el conocimiento matemático se va constituyendo esencialmente a partir de reconocer, abordar y resolver problemas que son generados, a su vez por otros problemas. Asimismo, O'Shea y Leavy (2013) plantean que la resolución de problemas matemáticos es parte esencial de la obra de cualquier matemático y para llegar a ser un matemático uno debe convertirse en un solucionador de problemas. Para que esto suceda, los estudiantes deben participar en la solución de problemas reales en las aulas para convertirse en solucionadores de problemas también en la vida cotidiana. De igual manera también se señala la importancia de la resolución de problemas para promover el trabajo interdisciplinario pues tal como lo señala Lorenzo (citado en Gasco, 2013) la resolución de problemas no solo se circunscribe a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, sino que la adquisición de competencias en dichos procedimientos es de gran utilidad para cualquier disciplina científica.

Debido a lo anterior, el foco en la resolución de problemas matemáticos forma parte esencial de los currículos actuales de muchos países tanto en educación primaria como en secundaria (Piñeiro, Castro-Rodríguez y Castro, 2016; Gasco, 2013), como por ejemplo el caso de Singapur, quien desde hace más de 20 años ha promovido una propuesta metodológica de la enseñanza de las matemáticas enfocada en la resolución de problemas

(Ministerio de Educación de Singapur, 2012), orientada a que los y las estudiantes adquieran y apliquen conceptos y desarrollen habilidades cognitivas y metacognitivas, además de promover el desarrollo de actitudes positivas hacia las matemáticas. Actualmente, este país logra los primeros resultados en las pruebas internacionales y su sistema educativo se encuentra entre los de mayor calidad del mundo. En otros países se puede observar que las directrices curriculares respecto de la resolución de problemas matemáticas son aún más específicas que las de Singapur, como el currículo de Estados Unidos, el que también incluye heurísticas específicas y formas de trabajar la resolución de problemas en el aula, entre otros aspectos. A su vez, Piñeiro et al (2016) corroboraron que, en los currículos de diferentes países, la resolución de problemas toma dos posiciones: como una meta por sí misma y como un camino para lograr lo que entendemos como competencia matemática. Esto es coincidente con lo que indica el NCTM (2000), quien indica que resolver problemas no es solo un objetivo del aprendizaje de las matemáticas, sino también un medio importante para hacerlo. Es una parte integral de las matemáticas, no una parte aislada del programa de matemáticas.

En el ámbito nacional, las Bases Curriculares chilenas de educación media (MINEDUC, 2015) proponen que la asignatura de Matemática se focalice en la resolución de problemas, ya que la resolución de un problema "implica no solo poner en juego un amplio conjunto de habilidades, sino también la creatividad para buscar y probar diversas soluciones. Al poner énfasis en la resolución de problemas, se busca, por un lado, que las alumnas y alumnos descubran la utilidad de las matemáticas en la vida real y, por otro, abrir espacios para conectar esta disciplina con otras asignaturas. En este contexto, muchas veces lo que más aporta al aprendizaje de los y las estudiantes no es la solución a un problema matemático, sino el proceso de búsqueda creativa de soluciones". (p.95)

Lo anterior muestra que en las Bases Curriculares se aborda explícitamente la importancia de la resolución de problemas para mostrar la utilidad de la matemática en la vida real, para la búsqueda de diversas soluciones y el trabajo interdisciplinario. Con el foco en la resolución de problemas, se espera que los y las estudiantes adquieran la capacidad de emplear e interpretar las matemáticas en diversos contextos, además de formar estudiantes que perciban la matemática en su entorno y que se valgan de los conocimientos adquiridos para describir y analizar el mundo con el fin de desenvolverse efectivamente en él.

Además de resolver problemas, las Bases Curriculares (MINEDUC, 2015) también propone el desarrollo de otras tres habilidades matemáticas fundamentales: representar, modelar, y argumentar y comunicar: la habilidad de representar se refiere a que las y los estudiantes sean capaces de transitar entre distintos niveles de representación (concretos, pictóricos y simbólicos). Mediante la habilidad de modelar se espera que los y las estudiantes expresen acciones o situaciones reales con lenguaje matemático. Finalmente, la habilidad de argumentar y comunicar se relaciona con la capacidad de expresar ideas con claridad y son muy importantes para comprender el razonamiento que hay detrás de cada problema resuelto o concepto comprendido.

Las Bases Curriculares también señalan que estas cuatro habilidades "se interrelacionan y juegan un papel fundamental en la adquisición de nuevas destrezas y conceptos y en la aplicación de conocimientos en contextos diversos" (p. 107). De hecho, para resolver problemas del mundo real se ponen en juego, en forma articulada, el desarrollo de estas otras tres habilidades matemáticas. Por ejemplo, en un problema de la vida real que involucra la aplicación de operaciones aritméticas, la información del problema, y en particular la relación entre los datos y la incógnita puede representarse mediante un esquema. Luego, se puede formular el problema matemáticamente mediante la construcción del modelo matemático, es decir, la secuencia de operaciones matemáticas que permitirá resolver el problema. Una vez resueltas estas operaciones se obtiene un resultado, el cual debe interpretarse y validarse en función de la situación real. Las habilidades de argumentación y comunicación se desarrollan en forma transversal a lo largo de todo el proceso. En este "ciclo de matematización" (Pedreros, 2016), se puede observar que la representación, el modelamiento y la argumentación y comunicación se ponen en juego en forma articulada para concretizar la resolución del problema.

Asimismo, en las Bases Curriculares de educación media también se evidencia lo descrito por el NCTM (2000) y documentado por Piñeiro et al (2016) en los currículos de seis países, entre los cuales se encuentran las Bases Curriculares de Chile para educación básica, en relación con el doble foco de la resolución de problemas: como una meta por sí misma, vinculada a un conocimiento matemático, y también como competencia matemática. Esto se verifica en que la resolución de problemas no solo aparece como una de las habilidades matemáticas definidas como fundamentales en la adquisición de nuevas destrezas y conceptos y en la aplicación de conocimientos en contextos diversos, sino que también aparece incluido en algunos Objetivos de Aprendizaje específicos asociados a contenidos del currículo, tal como se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1. *Objetivos de Aprendizaje 1 y 2 de matemática 2° medio en que se aborda la resolución de problemas. Recuperado de MINEDUC (2015)*

OA 1 Realizar cálculos y estimaciones que involucren operaciones con números reales: • utilizando la descomposición de raíces y las propiedades de las raíces • combinando raíces con números racionales • **resolviendo problemas** que involucren estas operaciones en contextos diversos
OA 2 Mostrar que comprenden las relaciones entre potencias, raíces enésimas y logaritmos: • comparando representaciones de potencias de exponente racional con raíces enésimas en la recta numérica • convirtiendo raíces enésimas a potencias de exponente racional y viceversa • describiendo la relación entre potencias y logaritmos • **resolviendo problemas rutinarios y no rutinarios** que involucren potencias, logaritmos y raíces enésimas

Frente a estos lineamientos de nuestro currículum de matemática, han ido apareciendo diferentes propuestas orientadas a desarrollar y evaluar las habilidades matemáticas y, en particular, la resolución de problemas. Por ejemplo, la iniciativa ARPA, del Centro de modelamiento de la Universidad de Chile, busca implementar estrategias de desarrollo profesional docente que promuevan la resolución de problemas en las salas de clases. ARPA (2021) señala que a través de la resolución de problemas se ponen en juego un sinfín de estrategias para resolver, que den espacio a la libertad, la creatividad y la diversidad, transformando la matemática en una herramienta para comprender elementos del entorno. Por otra parte, la Facultad de Matemáticas de la UC lleva a cabo el Taller de Razonamiento Matemático (TRM), el que permite a las y los estudiantes potenciar sus habilidades matemáticas y profundizar sus conocimientos a través de desafíos matemáticos y dinámicas grupales e individuales. A su vez, el desarrollo de habilidades matemáticas también se evidencia en iniciativas relacionadas con su integración en otras áreas como el proyecto Aprendo por Proyectos, impulsado por el MINEDUC para los años 2020 y 2021. En esta iniciativa, se acompañarán a 30 establecimientos con el propósito de bridar apoyo formativo a docentes y equipos directivos para que sirvan de modelo en la implementación de la metodología Aprendizaje Basada en Proyectos, fomentando así en los y las estudiantes el desarrollo de habilidades del siglo XXI. De igual manera, existen otras iniciativas de aprendizaje basada en proyectos y aprendizaje basadas en problemas que buscan promover el desarrollo de habilidades matemáticas en el contexto de la resolución de problemas reales relevantes.

Adicionalmente, es posible hallar diferentes instrumentos estandarizados que permiten evaluar las habilidades matemáticas. Por ejemplo, Cáceres, Sepúlveda & Rodríguez (2020) señalan que, para los niveles iniciales, se pueden encontrar las pruebas EGMA (Early Grades Mathematic Assessment), focalizada para medir conocimientos matemáticos tempranos y habilidades que son fundamentales y predictivas de logros posteriores; la prueba de evaluación matemática temprana Utrecht (TEMT-U), que evalúa el nivel de competencia matemática temprana en niños de 4 a 7 años, y la Prueba TEMA-3 (Test of Early Mathematic Ability 3 rd Edition), cuyo principal propósito es proporcionar información útil sobre el nivel de competencia matemática de los niños más pequeños. Estos tres instrumentos están disponibles para ser aplicados en Chile. Respecto de la evaluación de habilidades matemáticas en educación secundaria y superior, hay algunos estudios que muestran algunos resultados de estas evaluaciones. Por ejemplo, Sandoval, Friz, Maldonado & Rodríguez (2011) evaluaron habilidades en matemática y comprensión lectora en estudiantes que ingresan a pedagogía en educación básica, obteniendo como resultado que, en general, el dominio de estas habilidades está debajo de lo esperado, especialmente en el caso de las habilidades matemáticas.

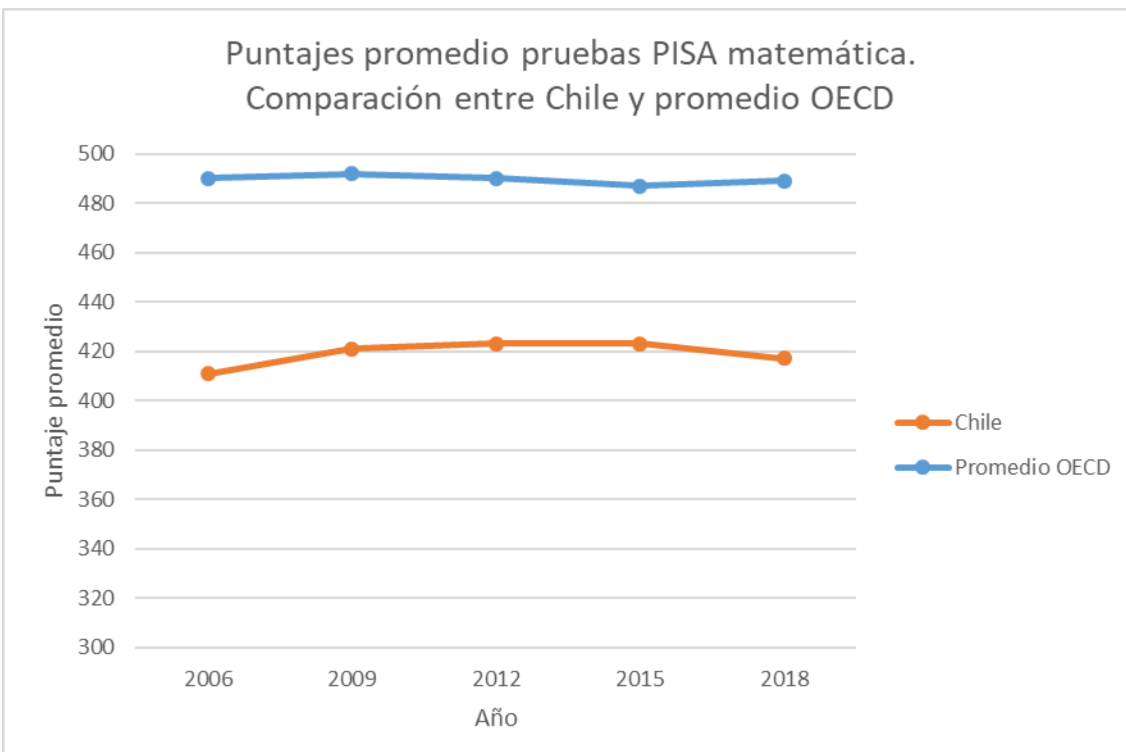
Respecto de la resolución de problemas, dado el protagonismo que esta habilidad matemática ha ido alcanzando en los currículos nacionales e internacionales, ha surgido el interés acerca de evaluar su desarrollo. Rico (2007) señala que los diversos estudios internacionales que evalúan el conocimiento de los escolares en materias específicas han adquirido relevancia en los sistemas educativos de los países participantes, ya que son considerados indicadores de calidad. Uno de los estudios más importantes corresponde al Programme for International Student Assessment (PISA), establecido en el año 1997 por la Organization for Economic Cooperation and Development (OCDE) como un estudio de evaluación internacional de la competencia matemática de los estudiantes a la edad de 15 años. Desde su origen, en este estudio la resolución de problemas ha presentado un papel destacado: “su innovador concepto de alfabetización concierne a la capacidad de los estudiantes de analizar, razonar y comunicar efectivamente cuando inventan, resuelven e interpretan problemas en una variedad de materias” (OCDE, 2005, p.3). A su vez, la OECD (2005) también menciona que esta evaluación se centra en problemas del mundo real, en las que el empleo de un razonamiento cuantitativo o espacial, u otras capacidades matemáticas, contribuirá a aclarar, formular o resolver los problemas que se les planteen.

1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

A partir de los resultados sucesivos en matemática obtenidos en esta evaluación, se puede concluir que sistemáticamente los estudiantes chilenos obtienen un bajo nivel de logro respecto de los estándares internacionales. Esto implica que los y las estudiantes de nuestro país en general no logran las competencias matemáticas suficientes para resolver problemas, pese a las directrices curriculares que ponen el foco en esta competencia matemática.

Por ejemplo, al tomar como referente la prueba PISA de matemática, aplicada el año 2018, según datos de la OCDE (2019), Chile obtuvo 417 puntos, que corresponde a 72 puntos por debajo del promedio internacional. Este resultado es superior al de 18 países participantes pero inferior al de otros 53. Estos bajos resultados respecto del promedio internacional son sistemáticos en el tiempo, pues como se observa en la Figura 1, no se evidencia una disminución significativa en esta brecha.

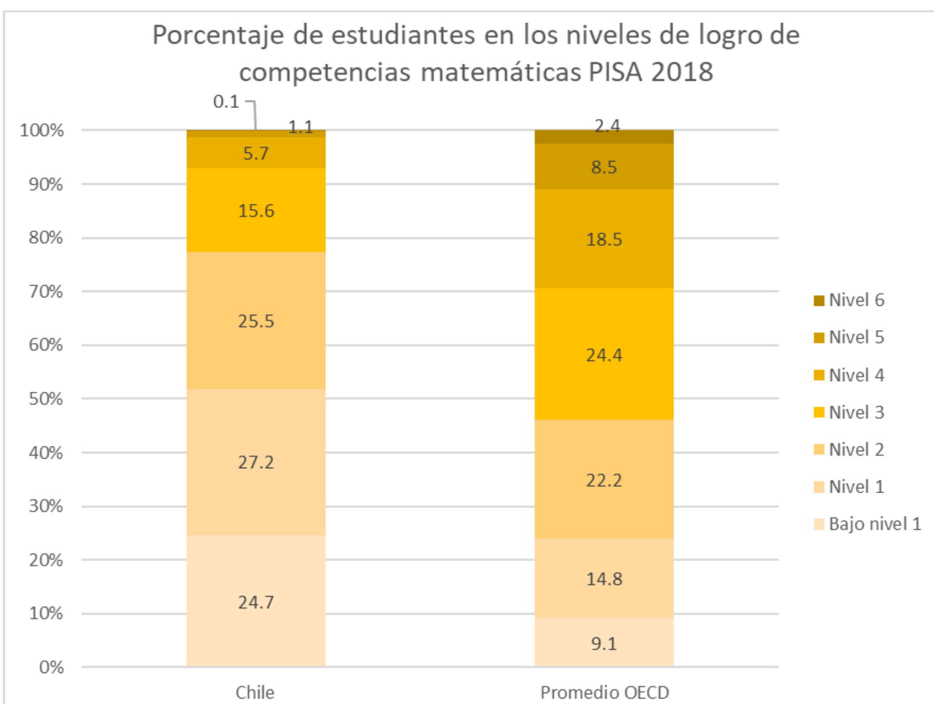
Figura 1. *Puntajes promedio PISA matemática entre 2006 y 2018. Elaboración propia, usando datos provenientes de ACE (2019).*



Adicionalmente, el desempeño de los estudiantes en la prueba PISA también se reporta con una escala con seis niveles de competencias, en que el nivel 6 reúne a aquellos estudiantes que son capaces de realizar las tareas más complejas y demuestran un grado avanzado de razonamiento y pensamiento matemático. Por otra parte, los estudiantes en el nivel 1 son capaces de llevar a cabo tareas simples en contextos familiares y en que la información necesaria para responder es explícita y directa. No obstante, pueden existir casos en que los estudiantes no logran demostrar las competencias mínimas requeridas para quedar categorizados en el nivel 1. En estos casos quedan clasificados bajo el nivel 1. La OECD (2019b), establece que a partir del nivel 2 los estudiantes comienzan a demostrar las habilidades e iniciativa para usar la matemática en situaciones simples de la vida real. Por el contrario, aquellos estudiantes que se ubican bajo el nivel 2, son considerados de bajo logro en matemáticas. En el anexo 1 de este documento se presenta una descripción más detallada de lo que se espera que los estudiantes sean capaces de hacer en cada uno de estos niveles.

En la Figura 2 se muestra el porcentaje de estudiantes chilenos y categorizados en los diferentes niveles de logro definidos en la prueba PISA del año 2018.

Figura 2. *Porcentaje de estudiantes en los niveles de logro de competencias matemáticas PISA 2018. Elaboración propia, con datos de OECD (2019b).*



En la Figura 2, se muestra que el 51,9 % de los estudiantes chilenos que rindieron esta evaluación quedaron categorizados en un nivel inferior al 2. Es decir, más de la mitad de los estudiantes no logran demostrar que poseen las competencias mínimas para resolver problemas matemáticos, o bien los problemas que logran resolver son de baja complejidad cognitiva. Por otra parte, solo el 1,2% de los estudiantes alcanzan niveles 5 o 6, lo que quiere decir que son capaces de modelar situaciones complejas matemáticamente y pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias apropiadas para resolver los problemas que se les presentan (OECD, 2019b). En otras palabras, la distribución anterior muestra que, en general, el grado de desarrollo de la competencia de resolver problemas en los estudiantes chilenos les permite únicamente resolver problemas en contextos muy simples y con información muy explícita, a la vez que presentan graves dificultades en resolver problemas que involucran habilidades matemáticas de orden superior.

En resumen, a partir de los resultados presentados anteriormente, se destacan dos aspectos preocupantes: el bajo promedio de los resultados en matemática que obtiene Chile y la distribución de los estudiantes entre los distintos niveles de logro, donde hay un predominio en los niveles más bajos y muy pocos estudiantes que logran desarrollar un nivel de logro que cumpla los estándares internacionales, lo que se traduce en un bajo desarrollo de la competencia de resolución de problemas. Esto significa que el nivel de especificidad del currículo respecto del foco en la resolución de problemas no se condice con los resultados en esta evaluación, lo que implica que, de acuerdo con Piñeiro et al (2016), "la dificultad de llevar la resolución de problemas al aula no se encuentra en la información incluida en el documento curricular, sino en su implementación. Por tanto, los profesores y la complejidad intrínseca de resolver problemas, debiese ser un interés para la investigación" (p.62).

A su vez cabe agregar que la dificultad de llevar la resolución de problemas al aula también se encuentra en la evaluación, ya que la resolución de un problema involucra una serie de procesos matemáticos, cuya ejecución exitosa de ellos permite obtener una solución a esta problemática, por lo que muchos autores sostienen que la evaluación de la resolución de problemas no solo debiera estar focalizada en la solución encontrada, sino que, principalmente, en los procesos que se siguen para llegar a ella. Así, surge para los y las docentes la necesidad de contar con estrategias que les ayuden a promover en sus evaluaciones la resolución de problemas en forma integral, es decir, incorporando situaciones evaluativas que atiendan en forma observable a los procesos matemáticos que involucra esta competencia y considerando, además, diferentes niveles de complejidad.

Las problemáticas expuestas justifican este proyecto de investigación, cuyo propósito general es caracterizar las tareas matemáticas propuestas por profesores de matemática de enseñanza media para evaluar la competencia matemática de resolver problemas, considerando la complejidad de sus procesos involucrados. De esta manera se obtendrá información relevante acerca de la variedad y riqueza de las situaciones evaluativas que las y los profesores de educación media ofrecen a sus estudiantes para evaluar esta competencia, y, además, en lo que se refiere a la definición de criterios que permitirán establecer niveles de complejidad de los procesos matemáticos asociados a esta competencia matemática. Esto puede contribuir para que docentes puedan caracterizar de manera más precisa y exhaustiva la complejidad de los problemas que proponen a sus estudiantes y a formular problemas contextualizados diversos desde el punto de vista de la complejidad de los procesos involucrados en su resolución.

A su vez, Santos Guerra (2003) propone que la forma de evaluar permite develar las concepciones del evaluador. En particular, respecto del proceso de enseñanza y aprendizaje, la forma de evaluar devela el concepto que el docente tiene de lo que es enseñar y aprender. Esto implica que una caracterización de la forma en que los docentes evalúan el logro de cierto conocimiento matemático puede dar luces acerca de los énfasis con que este conocimiento matemático fue desarrollado durante el proceso de enseñanza y aprendizaje. Esto quiere decir que, si un docente diseña evaluaciones focalizadas en la ejercitación o en la resolución de problemas rutinarios puede suponerse que la metodología de enseñanza que utiliza al estudiar este tema también está focalizada en este tipo de tareas.

Así, las preguntas que guían la presente investigación son:

- ¿Qué características tienen las tareas matemáticas propuestas por las y los profesores de matemática de educación media para evaluar la competencia matemática de resolución de problemas en cuanto a variedad de tipos de problemas propuestos, contextos utilizados y riqueza cognitiva?

- ¿Cuáles son los criterios que permiten caracterizar la complejidad de los procesos matemáticos asociados a la resolución de un problema contextualizado?

- ¿En qué medida las tareas matemáticas propuestas por docentes de matemática de educación media evalúan los procesos matemáticos involucrados en la resolución de problemas contextualizados atendiendo a diversos niveles de complejidad?

2. MARCO TEÓRICO

En este apartado se hace una revisión a algunos referentes teóricos que fundamentan las acciones a realizar en este proyecto. Se partirá con una revisión acerca de lo que es un problema matemático. Luego se profundizará en la resolución de problemas como competencia matemática y en su evaluación considerando tanto los procesos matemáticos involucrados como los niveles de demanda cognitiva.

2.1. Problema matemático

Dado que este proyecto está focalizado en la caracterización de tareas matemáticas que permiten evaluar la resolución de problemas, resulta necesario estudiar lo que la literatura propone como problema matemático. Esta revisión permitirá tener una idea fundamentada acerca de lo que es un problema matemático y qué criterios se debieran considerar para categorizar una actividad como problemática.

Debido a la importancia que la resolución de problemas ha tenido en la investigación en matemática desde la segunda mitad del siglo XX, se ha publicado mucho acerca de este tema, por lo que en la literatura se pueden encontrar diferentes propuestas en torno a la definición de “problema matemático”. Por ejemplo, Polya (1981), quien es uno de los pioneros y principales referentes de este tema, señala que “tener un problema significa buscar conscientemente alguna acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no inmediatamente alcanzable” (p.117). Polya también afirma que en todo problema hay cierto nivel de complejidad, aunque sea una problema “pequeño”, ya que la dificultad pertenece a la noción misma de problema: donde no hay dificultad, no hay problema. Esta idea de problema como una situación más compleja que un simple ejercicio también lo recoge Schoenfeld (1989), quien sostiene que la dificultad de definir el término “problema” radica en que es relativo: un problema no es inherente a una tarea matemática, más bien es una relación particular entre el individuo y la tarea; utiliza la palabra problema para referirse a una tarea que resulta difícil para el individuo que está tratando de resolverla. Schoenfeld también destaca que para que una actividad de aprendizaje pueda ser definida como un verdadero problema es necesario que el alumno se interese e implique en la obtención de la solución, y que el alumno no tenga medios matemáticos de fácil acceso para alcanzar la solución.

Según Wallace y Johnson (citado en Blanco y Pino, 2015), problema matemático es:

“una situación que supone una meta para ser alcanzada donde existen obstáculos para alcanzar ese objetivo que requiere deliberación, y se parte del desconocimiento del algoritmo útil para resolver el problema. La situación es usualmente cuantitativa o requiere técnicas Matemáticas para su solución, y debe ser aceptado como problema por alguien antes de que pueda ser llamado problema” (p.10).

Por otra parte, Blanco (1993) lo define como:

“una situación en la que se formula una tarea a ser desarrollada, en la cual, en un ambiente de discusión, de incertidumbre y de comunicación se intenta alcanzar un objetivo. Se requiere en todo caso una voluntad de atacar el problema planteado, por la necesidad de la solución o bien por algún tipo de motivación” (p.23).

Díaz y Poblete (2001) mencionan que una de las definiciones más comúnmente usadas de la resolución de problemas estipula que un problema debe ser una tarea compleja. Según esta definición una tarea es “un problema para un alumno si ella requiere de una solución bajo ciertas condiciones específicas, si este estudiante comprende la tarea, pero no encuentra una estrategia inmediata para su solución y, finalmente, si es motivado para buscar la solución” (p.34).

También podemos hallar definiciones de problema matemático en referentes curriculares nacionales e internacionales. Por ejemplo, los estándares curriculares del NCTM (2000) establecen que: “La resolución de problemas significa comprometerse en una tarea para la que el método de resolución no se conoce de antemano” (p.55). A su vez, las Bases Curriculares de matemática para educación media (MINEDUC, 2015) señala que:
“Se habla de resolver problemas (en lugar de ejercicios) cuando el estudiante logra solucionar una situación problemática dada, contextualizada o no, sin que se le haya indicado un procedimiento a seguir. Para ello, necesita usar estrategias, comprobar y comunicar: los alumnos experimentan, escogen o inventan y aplican diferentes estrategias (ensayo y error, usar metáforas o algún tipo de representación, modelar, simulación, transferencia desde problemas similares ya resueltos, por descomposición, etc.), comparan diferentes vías de solución, y evalúan las respuestas obtenidas y su pertinencia. De este modo, se fomenta el pensamiento reflexivo, crítico y creativo” (p.107).

Con las definiciones anteriores se pueden vislumbrar elementos en común que nos permitirán determinar las principales componentes de lo que llamaremos un problema matemático:

En primer lugar, hay un componente actitudinal. La persona debe aceptar el desafío de resolver el problema y comprometerse en alcanzar una solución. Respecto de esto Blanco y Pino (2015) señalan que entre el problema y la persona que lo resuelve hay una relación, que parte porque el resolutor quiere resolver dicho problema. A su vez, en las Bases Curriculares de matemática de educación media se definen un conjunto de actitudes, de las cuales una de ellas está directamente asociada con la resolución de problemas, puesto que señala como Objetivo: “Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor en la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales” (MINEDUC, 2015, p.111).

En segundo lugar, se establece que, en un problema el procedimiento que permite resolverlo no se conoce de antemano. Esto difiere de un ejercicio en el que sí hay un algoritmo preestablecido. Blanco y Pino (2015) señalan que este parece ser uno de los aspectos sobre lo que hay coincidencia entre los autores, indicando que “un problema es una situación que difiere de un ejercicio en que el resolutor de problemas no tiene un proceso algorítmico que le conducirá, con certeza, a la solución” (p.83). Otros autores también apelan a este criterio para distinguir un problema de un ejercicio, como por ejemplo Conejo y Ortega (2013) quienes añaden que la actividad corresponde a un problema si la repuesta no se obtiene de manera inmediata mediante la aplicación de una fórmula, algoritmo o cálculo que se indica en el ejercicio. Esta distinción entre problema y ejercicio también es consistente con lo que se propone en nuestro Marco Curricular, pues el MINEDUC (2012) se señala que “se habla de resolver problemas, en lugar de simples ejercicios, cuando el estudiante logra solucionar una situación problemática dada, contextualizada o no, sin que se le haya indicado un procedimiento a seguir” (p.89). Asimismo, aquellos ejercicios que involucran la memorización de conceptos tampoco se consideran como problema (Butts, 1980, Charles y Lester, 1982 y Borassi, 1986, citados en Blanco y Pino, 1993) puesto que ni siquiera hay procedimientos involucrados y además son de nivel cognitivo inferior (Luengo, 1998).

La tercera componente que aparece en las definiciones de problema matemático corresponde a la multiplicidad de vías de solución. Esto se debe a que, como no hay un camino preestablecido para resolver un problema, este puede resolverse utilizando diferentes estrategias. Incluso, de acuerdo con el MINEDUC (2015) muchas veces lo que más aporta al aprendizaje de los estudiantes no es la solución de un problema matemático, sino el proceso de búsqueda creativa de soluciones. Ahora bien, el hecho de que una actividad pueda resolverse de diferentes maneras no permite asegurar por sí solo que efectivamente corresponda a un problema, ya que un ejercicio también puede resolverse usando diferentes procedimientos algorítmicos. Por ejemplo, se puede utilizar la “fórmula general” para resolver la ecuación cuadrática $x^2 - 4 = 0$, pero también puede resolverse por radicación, reescribiendo la ecuación como $x^2 = 4$ y luego despejando x, o bien se puede factorizar el lado izquierdo de la igualdad, obteniéndose $(x + 2)(x – 2) = 0$ y luego escribiendo $(x + 2) = 0$ o $(x – 2) = 0$.

A modo de síntesis, Santos establece los componentes que aparecen en las tareas que serán consideradas como problemas:

- La existencia de un interés, es decir, una persona o grupo de individuos quiere o necesita encontrar una solución.
- La no existencia de una solución inmediata. Es decir, no hay un procedimiento o regla que garantice la solución completa de la tarea. Por ejemplo, la aplicación directa de algún algoritmo o conjunto de reglas no es suficiente para determinar la solución.
- La presencia de diversos caminos o métodos de solución (algebraico, geométrico, numérico). Aquí también se considera la posibilidad de que el problema pueda tener más de una solución.
- La atención por parte de una persona o un grupo de individuos para llevar a cabo un conjunto de acciones tendientes a resolver esa tarea. Es decir, un problema es tal hasta que exista un interés y se emprenden acciones específicas para intentar resolverlo (Santos, 2007, p.51).

No obstante, a pesar de que las componentes anteriores resultan útiles para determinar si una tarea matemática especifica puede considerarse como un problema matemático, en la práctica también hay que tomar en cuenta la relación entre la tarea y la persona que se dispone a desarrollarla, puesto que, de acuerdo con Santos (2007), “El hecho de que exista un problema no es una propiedad inherente de la tarea matemática” (p.49). Esto significa que hay una interacción clara entre el problema y la persona que se enfrenta a él, pues una tarea puede ser inicialmente considerada como un problema para alguien que se enfrenta por primera vez a ella, pero luego dejar de serlo una vez que ya se ha apropiado el proceso de resolución. Respecto de esto, Chacel (2006) sostiene que un factor importante a considerar en la definición de un problema es el estadio mental de la persona que se enfrenta a ofrecer una solución, lo que trae como consecuencia que una misma situación puede resultar problemática para una persona, pero no para otra. Chacel lo ejemplifica con la tarea: ¿Cómo repartes 96 lápices entre 16 niños de modo que a cada uno le toque la misma cantidad? Sostiene que esta tarea puede llegar a ser problemática para estudiantes de primero básico, mientras que a uno de nosotros esta pregunta solo sugiere un ejercicio rutinario: "dividir ".

2.1.1. Tipos de problemas

No existe una única clasificación de problemas de matemática. De los muchos criterios de clasificación posibles definidos por diversos autores, en este proyecto interesa particularmente revisar la clasificación de los problemas respecto de su estructura, de qué tan familiar es para los estudiantes y de los tipos de contextos que ofrecen:

González Mari (2009) propone que los problemas pueden clasificarse según la estructura que presentan, es decir, si la información está organizada, si es explícita y accesible. Bajo este criterio un problema puede ser muy estructurado o poco estructurado. Respecto de esta categorización, Pino (2015) señala que los problemas altamente estructurados "son aquellos que se encuentran habitualmente en los textos escolares donde toda la información necesaria para resolverlos está contenida en el enunciado, las reglas para encontrar la solución correcta son claras y se tienen criterios definidos para verificar la solución" (p.190). Por otro lado, los problemas mal estructurados son más parecidos a los que encontramos en la vida diaria. En este tipo de problemas, al carecer de una estructura definida, la información puede ser excesiva o insuficiente, y su resolución requiere un nivel de pensamiento diferente a los problemas más estructurados.

Respecto de la familiaridad del problema, estos se pueden clasificar como problemas rutinarios y no rutinarios. De acuerdo con las Bases Curriculares (MINEDUC, 2012) un problema rutinario es aquel problema que resulta familiar para los estudiantes, es decir, que problemas similares ya han sido trabajados previamente. La resolución de este tipo de problemas implica seleccionar y aplicar conceptos y procedimientos aprendidos. Por contraparte, los problemas no rutinarios son muy poco familiares. Esto no quiere decir que no se puedan resolver utilizando los conocimientos aprendidos, sino que son problemas con situaciones novedosas y/o complejas, que pueden tener más de una solución, cuyas estrategias de resolución son innovadoras y que involucran diferentes áreas del conocimiento.

En relación con los contextos que se presentan en los problemas rutinarios, Díaz y Poblete (2001) proponen las siguientes cuatro categorías:

- Problemas reales: son aquellos que efectivamente ocurren en la realidad y comprometen al estudiante a actuar de una forma activa interactuando con esta realidad. Un ejemplo de problema de este tipo asociado al estudio de la función cuadrática es que se realice el experimento de lanzar un proyectil verticalmente hacia arriba y se registren los tiempos en que el proyectil alcanza diferentes alturas, con el propósito de modelar la ecuación itinerario y así, responder a diferentes preguntas, como por ejemplo la altura máxima que alcanzó al proyectil.

- Problemas realistas: son aquellos problemas que eventualmente podrían ocurrir en la realidad, debido a que el contexto es factible de ser replicado, pero que por lo general corresponden a situaciones ficticias que no involucran el actuar en forma activa del estudiante. En general los problemas con contextos familiares o laborales que se presentan en los textos escolares son de este tipo, siempre y cuando la situación sea imitable en la realidad. Ejemplos típicos de problemas realistas en el contexto del estudio de la ecuación cuadrática son aquellos referidos a la caída libre de objetos. En esta clase de problemas se modela la posición del objeto que va cayendo mediante una función cuadrática, sin que surja a partir de una recogida de datos.

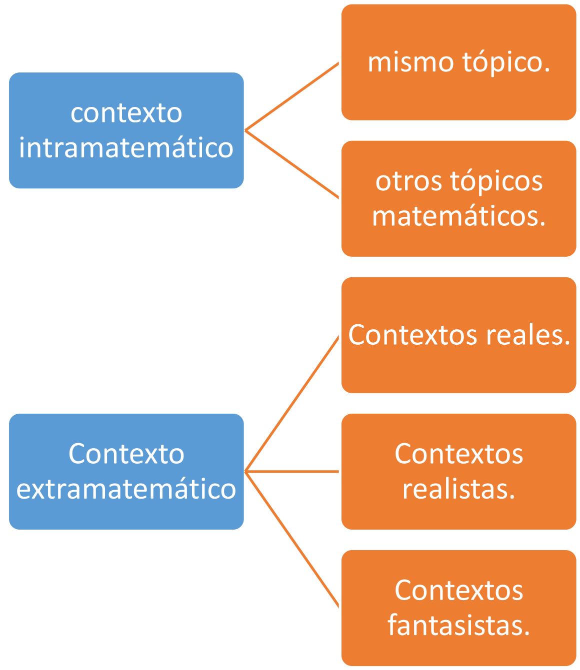
- Problemas fantasistas: son aquellos problemas que jamás podrían ocurrir en la realidad, debido a que poseen características que son imposibles de replicar, como escenarios futuristas o en otros planetas, características sobrehumanas o físicamente imposibles, etcétera. Por ejemplo, problemas referidos a que la variación de la temperatura en cierto planeta durante el día siga un modelo cuadrático.

- Problemas en contextos puramente matemáticos: son aquellos problemas que hacen referencia únicamente a objetos matemáticos. Para este tipo de problema, Pino (2015) propone este ejemplo: "Dada una región rectangular cuyos lados miden a y b. Si duplicamos estas medidas, ¿qué pasa con el perímetro de la figura?, y ¿con el área?" (p.198).

Es importante destacar que las tres primeras categorías corresponden a situaciones en contextos extramatemáticos, es decir, fuera del ámbito de la matemática. A su vez, la cuarta categoría, que corresponde a un contexto intramatemático, se puede subcategorizar considerando si el contexto matemático que se presenta en el problema se relaciona con el mismo ámbito de conocimiento que el requerido para resolver el problema, o bien el conocimiento matemático que se utiliza para resolver el problema pertenece a un tópico diferente al propuesto en la situación problema (por ejemplo, utilizar una ecuación de segundo grado en un contexto geométrico).

Considerando las precisiones anteriores, en la Figura 3 se muestran los tipos de problemas según su contexto adaptados a partir de los definidos por Díaz y Poblete (2001) y que serán los que se utilizarán para caracterizar los tipos de contextos propuestos por los y las docentes para evaluar la resolución de problemas.

__Figura 3.__ Tipos de contextos de problemas matemáticos. Elaboración propia a partir de una adaptación a la clasificación descrita por Díaz y Poblete (2001)



2.2. Competencia matemática de resolver problemas

El foco en el estudio de la resolución de problemas en el aula ha ido cambiando debido al cambio del paradigma con que se concibe la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. De acuerdo con Isoda y Olfos (2009), se observa que, en un paradigma tradicional, los textos de matemática incluyen una serie de ejercicios para poner en práctica y consolidar los conocimientos aprendidos. Además de estos ejercicios en muchos casos también se proponen problemas de aplicación, por lo general verbales, cuyo propósito es que los y las estudiantes utilicen los conceptos asociados a los procedimientos ya estudiados. En este caso los problemas que aparecen se derivan directamente del conocimiento que se está trabajando, de modo que su resolución puede emplearse como medio de verificación de que el conocimiento en estudio ha sido interiorizado. Esta forma de focalizar la resolución de problemas en el proceso de enseñanza-aprendizaje se contrapone al otro foco, consistente en proponer problemas orientados a que los y las estudiantes se enfrenten a situaciones relevantes que deriven en la construcción del conocimiento. En el primer caso la matemática se estudia como área de conocimiento del currículo, mientras que, en el segundo caso, como competencia clave para el aprendizaje.

Goñi (2008) señala que este cambio de perspectiva es radical porque “desplaza el lugar central que ocupaba el conocimiento matemático para situarlo en el uso social que se hace de dicho conocimiento, de manera que lo relevante deja de ser la epistemología del área para pasar a ser la importancia de esos conocimientos como herramienta para el desarrollo personal, social, profesional y académico de los ciudadanos” (p.103). Los principales referentes curriculares de matemáticas a nivel internacional (NTCM, 2000, OECD, 2019a) se han hecho cargo de esta necesidad de cambio de paradigma y actualmente promueven la formación de ciudadanos que apliquen las matemáticas en problemas de la vida diaria en situaciones sociales, laborales e interdisciplinarias. A este enfoque le llamaremos enfoque por competencias.

La OECD (2003) define competencia como la “capacidad para reflejar y aplicar su conocimiento y experiencia a los asuntos del mundo real” (p.16). También señala que se utiliza el término competencia para condensar esta concepción amplia de los conocimientos y destrezas. Si quisiéramos extender esta definición al concepto de Competencia Matemática, podemos presumir que se refiere a la capacidad de utilizar el conocimiento matemático para resolver problemas del entorno. En efecto, la OECD (2019a) define competencia matemática como: “una capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en una variedad de contextos; aquí se incluye el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos” (p.75). A su vez añade que la competencia matemática también ayuda a las personas a reconocer el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo y para tomar decisiones bien fundamentadas para construir ciudadanos comprometidos y reflexivos.

Goñi sistematiza en una sola frase las diferentes acepciones de competencia matemática como “El uso de conocimiento matemático para resolver problemas (situaciones) relevantes desde el punto de vista social”. Esto demuestra que bajo el aprendizaje por competencias el conocimiento matemático está al servicio de la resolución de problemas que son relevantes y es evidente que la resolución de problemas no se traduce a ser capaces de resolver los ejercicios y situaciones planteadas en textos escolares, sino que va más allá.

Nuestro Marco Curricular de enseñanza media también se enfoca en el desarrollo de competencias matemáticas. Si bien no se menciona explícitamente el concepto competencia matemática, agrega que “la asignatura se focaliza en la resolución de problemas, y que, al poner el énfasis en la resolución de problemas, se busca, por un lado, que los alumnos descubran la utilidad de las matemáticas en la vida real y, por otro, abrir espacios para conectar esta disciplina con otras asignaturas”. (MINEDUC, 2015, p.105) Estas características son concordantes con la definición de competencia matemática definida por la OECD (2019a). A su vez, en las Bases Curriculares se definen cuatro habilidades matemáticas: resolver problemas, representar, modelar y argumentar y comunicar. Respecto de estas habilidades el MINEDUC (2015) señala que "se interrelacionan y juegan un papel fundamental en la adquisición de nuevas destrezas y conceptos y en la aplicación de conocimientos en contextos diversos" (p.107). A su vez, respecto de la habilidad de resolver problemas, se menciona que aprender a resolver problemas constituye tanto un medio como un fin en la adquisición de una buena educación matemática. Este énfasis que se le da a la resolución de problemas como un fin, también permite vislumbrar el foco en la competencia matemática que hay detrás. En este caso podemos hablar de habilidad matemática y competencia matemática en forma indistinta.

2.3. Evaluación de la competencia matemática de resolver problemas

Es sabido que la evaluación es uno de los elementos clave del proceso de enseñanza y aprendizaje. En palabras de Sanmarti (2007), "La evaluación es el motor del aprendizaje, ya que de ella depende tanto qué y cómo se enseña, como el qué y el cómo se aprende" (p.19). Esto quiere decir que la evaluación no solo cumple un rol social orientado a certificar, sino que también tiene un rol altamente regulador, puesto que "permite identificar los cambios que hay que introducir en el proceso de enseñanza para ayudar a los alumnos en su propio proceso de construcción del conocimiento." (Sanmarti, 2007, p.21).

Sin embargo, para que la evaluación cumpla este propósito regulador, es importante que las situaciones evaluativas sean coherentes con el enfoque dado en proceso de aprendizaje. En el caso del enfoque por competencias, Goñi (2008) afirma que evaluar competencias implica aportar evidencias en oposición a la evaluación basada en pruebas. Esto debido a que:

“las evidencias deben mostrar, lógicamente, que se es capaz de «hacer» lo que la competencia en cuestión enuncia. Para ello es necesario actuar correctamente en el contexto correspondiente, es decir demostrar que se es capaz de aplicar lo que se sabe para resolver una situación problemática en un contexto determinado” (p.175). Goñi (2008) ilustra el punto anterior con el ejemplo de la prueba PISA en que priman las actividades en que los y las estudiantes se enfrentan a situaciones problemáticas de diversa índole y deben resolverlas utilizando sus conocimientos. No interesa tanto recoger información acerca de lo que sabe, sino más bien de cómo aplicar lo que sabe en un determinado contexto. Esto implica elegir con cuidado las tareas que se vayan a usar para evaluar.

Por otra parte, evaluar una competencia es complejo, puesto que, de acuerdo con Villardón (2006), las competencias no son observables directamente en toda su complejidad. Esto requiere pensar acerca de los procesos involucrados en el desarrollo de esta competencia, que permitirán reunir evidencia, en cantidad y calidad suficiente, para hacer juicios razonables acerca de ella. En el caso de la resolución de problemas, tal como se ha señalado anteriormente esta se centra en ser capaces de reconocer un problema, determinar la información que es relevante para su resolución, usar los conocimientos aprendidos y establecer relaciones para idear estrategias de resolución, hallar una solución o más soluciones y comunicar estas soluciones. Como se podrá ver, evaluar esta competencia matemática no es simple, dado su carácter multidimensional. En consecuencia, las evaluaciones válidas de la resolución de problemas matemáticos requieren que los estudiantes realicen una variedad de procesos involucrados, los que debiesen observarse y valorarse por separado.

Justamente, respecto de los tipos de instrumentos para evaluar la resolución de problemas, Goñi (2008) critica que en la actualidad se usen en exceso los ejercicios descontextualizados y los problemas tradicionales como tareas para la evaluación del aprendizaje matemático. A su vez, varios autores, entre ellos Blanco (2008) justifica el uso de las rúbricas por la versatilidad que presentan como instrumento de evaluación, así como su capacidad de ajustarse a las exigencias de una evaluación de competencias multidimensional. Según Simon y Forgett-Giroux (2001, citado en Hawes, 2004), Una rúbrica es un "descriptor cualitativo que establece la naturaleza de un desempeño apoyándose sobre perspectivas de criterio más que de referencia a norma" (p.10). En una rúbrica se reconocen subcompentencias, las que, según Hawes (2004) son componentes que, interactuando en la complejidad, dan cuenta de la competencia. Estas subcompetencias tienen mayor valorabilidad que la propia competencia, ya que se refieren a aspectos más específicos y por lo general, observables. A su vez, para cada subcompetencia se definen niveles de desempeño que permiten valorar el grado de ejecución de cada proceso.

De esta manera, la evaluación de la competencia matemática de resolver problemas implica recoger información acerca de la medida en que los y las estudiantes llevan a cabo los procesos matemáticos involucrados en el desarrollo de esta competencia. Por tal motivo es relevante llegar a un consenso respecto de cuáles son los procesos asociados a la competencia de resolver problemas. Adicionalmente, también interesa conocer la complejidad con que se puede evaluar la resolución de problemas. A continuación, discutiremos respecto de estos dos puntos.

2.3.1. Procesos matemáticos involucrados en la resolución de un problema

Respecto de los procesos involucrados en la resolución de un problema matemático, varios autores han definido ciertas fases generales en su resolución, como por ejemplo Polya (1945) quien describe sus conocidos cuatro pasos: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida. Por otra parte, en la evaluación PISA, la OECD (2019a) define tres procesos matemáticos:

- Formular situaciones matemáticamente,
- Emplear conceptos y procedimientos matemáticos e
- Interpretar y evaluar el resultado.

Para cada uno de estos procesos matemáticos, se describe un listado de subprocesos posibles de realizar en la resolución de un problema matemático. En la Tabla 2 se muestran estos subprocesos asociados a los procesos definidos anteriormente:

Tabla 2. *Procesos matemáticos involucrados en la competencia matemática de resolver problemas en contextos. Elaboración propia usando datos de OECD (2019a).*

Procesos matemáticos	Algunos subprocesos asociados
Formular situaciones matemáticamente. Indica qué tan efectivamente los estudiantes son capaces de reconocer e identificar oportunidades para usar las matemáticas en situaciones problemáticas y luego proporcionar la estructura matemática necesaria para formular ese problema contextualizado en forma matemática.	Identificar los aspectos matemáticos de un problema situado en un contexto de la vida real e identificar las variables significativas. Representar un problema de una manera diferente, incluso organizándolo de acuerdo con conceptos matemáticos y haciendo suposiciones apropiadas. Seleccionar un modelo apropiado de una lista. Traducir un problema a un lenguaje matemático o una representación. Representar una situación matemáticamente, utilizando variables,

	símbolos, diagramas y modelos estándar apropiados.
Emplear conceptos y procedimientos matemáticos. Indica qué tan bien los estudiantes pueden desempeñarse cálculos y manipulaciones y aplicar los conceptos y hechos que saben para llegar en una solución matemática a un problema formulado matemáticamente.	realizar un cálculo simple. Extraer una conclusión simple. Utilizar herramientas matemáticas, incluida la tecnología, para ayudar a encontrar soluciones exactas o aproximadas. Aplicar hechos, reglas, algoritmos y estructuras matemáticos al encontrar soluciones. Manipular números, datos e información gráficos y estadísticos, expresiones y ecuaciones algebraicas y representaciones geométricas. Usar y alternar entre diferentes representaciones en el proceso de encontrar soluciones. Reflexionar sobre argumentos matemáticos y explicar y justificar resultados matemáticos.
Interpretar y evaluar el resultado. Indica la eficacia con la que los estudiantes	Interpretar información presentada en forma gráfica y / o diagramas.

pueden reflexionar sobre las soluciones matemáticas. o conclusiones, interpretarlas en el contexto de un problema del mundo real y determinar si los resultados o las conclusiones son razonables.	Evaluar un resultado matemático en términos del contexto. Interpretar un resultado matemático en el contexto del mundo real. Evaluar la razonabilidad de una solución matemática en el contexto de un problema del mundo real. Criticar e identificar los límites del modelo utilizado para resolver un problema.

Los procesos definidos en la Prueba PISA y sus subprocesos asociados, descritos en la Tabla 2, son consistentes con las propuestas de otros autores, como Banus (2012), quien, en forma más resumida, presenta una rúbrica para evaluar la competencia matemática de resolver problemas, considerando los siguientes procesos:

- Analiza la información referente a la situación problemas.
- Representa la situación problema.
- Desarrolla estrategias explícitas de resolución
- Comunica la solución correcta.
- Supervisa el proceso de resolución y el resultado

Estos procesos serán, a priori, los que se utilizarán en este estudio. No obstante, el análisis de los resultados puede aportar a la discusión de si es factible modificar alguno de estos procesos, o bien incluir o eliminar algún otro proceso que no está contemplado en el listado inicial.

2.3.2. Complejidad de las tareas asociadas a la resolución de problemas

En evaluación se emplean taxonomías de aprendizaje como una forma de describir diferentes tipos de comportamientos de aprendizaje y características que deseamos que los y las alumnas desarrollen. Esto es útil pues, dependiendo la taxonomía usada, permite diversificar los objetivos de aprendizaje que se proponen para evaluar el logro de los aprendizajes de sus estudiantes en relación con su complejidad cognitiva, el tipo de conocimiento que se pone en juego, el tipo de pensamiento involucrado en la realización de la tarea, etcétera.

Uno de los referentes taxonómicos más conocidos y utilizados en el ámbito escolar corresponde a la propuesta por Benjamín Bloom en 1956 y que luego fue revisada por Anderson y Krathwohl (2001). En esta taxonomía revisada se proponen dos dimensiones: En la primera, se definen cuatro categorías de conocimiento: factual, conceptual, procedimental y metacognitivo. La segunda dimensión corresponde a los procesos cognitivos. En total son seis, ordenados según su complejidad de menor o mayor serían: recordar, comprender, aplicar, analizar, evaluar y crear. La interrelación de estas dos dimensiones da origen a la “tabla taxonómica” (Tabla 3), la que permite categorizar objetivos de aprendizaje en un tipo de conocimiento y un proceso cognitivo determinado.

Tabla 3. Tabla taxonómica. Traducida de Anderson y Krathwohl (2001)

Dimensión del conocimiento	Dimensión de los procesos cognitivos					
	Recordar	Comprender	Aplicar	Analizar	Evaluar	Crear
Conocimiento factual						
Conocimiento conceptual						
Conocimiento procedimental						
Conocimiento metacognitivo						

Si bien la taxonomía original de Bloom y la revisada por Anderson y Krathwohl, (2001) puede aplicarse en la elaboración y categorización de objetivos de aprendizaje relacionados con cualquier disciplina, hay estudios en que se han utilizado estas taxonomías para clasificar el nivel cognitivo de algunas tareas realizadas habitualmente en matemática (Luengo, 1998, Favieri, 2014). En el estudio descrito por Luengo (1998) se observa que la resolución de problemas matemáticos no se encuentra categorizada en forma explícita en ninguno de los procesos cognitivos definidos en esta taxonomía, sino que diferentes subtareas involucradas en la resolución de un problema, o bien diferentes tipos de problemas se categorizan en diferentes procesos cognitivos. Por ejemplo, la traducción de los elementos explícitos de un problema de un lenguaje a otro y la interpretación de un problema matemático con datos explícitos se categorizan en el proceso de comprender; la resolución de problemas rutinarios, en el proceso cognitivo de aplicar, y la búsqueda de relaciones entre los elementos de un problema y la resolución de problemas no rutinarios, en el proceso de analizar.

Los resultados del estudio anterior concuerdan con lo indicado por Anderson y Krathwohl, (2001), quienes mencionan que los objetivos asociados a resolver problemas “tienden a atravesar filas, columnas y celdas de la tabla taxonómica” (p.269). Esto se debe a que la resolución de un problema probablemente involucre procesos cognitivos en diferentes categorías. A su vez, los tipos de conocimiento y los procesos cognitivos que se esperaría utilicen los estudiantes “dependen en gran medida del tipo particular de problema que se está resolviendo y/o el tema dentro del cual se planteó el problema” (p.270).

En consecuencia, debido a esta dificultad intrínseca que conlleva categorizar actividades de resolución de problemas según esta taxonomía, a continuación se propone otro modelo taxonómico, el cual resulta especialmente útil en matemática, y corresponde al definido por Smith y Stein (1998) en el que establecen “niveles de demanda cognitiva” asociados a una tarea matemática. Para Stein, Smith, Henningsen y Silver (2009, citado en Benedicto, Jaime y Gutiérrez, 2015), la demanda cognitiva de una tarea corresponde “al tipo y nivel de pensamiento requerido de los estudiantes para poder participar en la tarea y resolverla con éxito” (p.154).

En esta taxonomía se consideran cuatro niveles: memorización, procedimientos sin conexión, procedimientos con conexión y hacer matemática. Para determinar la demanda cognitiva asociada a una tarea matemática, se consideran las características principales de cada una de las categorías definidas por los autores. A su vez, a partir de un análisis de estas características, podemos distinguir tres criterios generales que nos permitirán determinar la demanda cognitiva asociada a una tarea. Estos criterios son:

- <u>Nivel de comprensión del conocimiento matemático a partir de la estrategia requerida para desarrollar la tarea</u>: En el nivel más bajo hay reproducción y memorización de conceptos sin el uso de procedimientos. Luego evoluciona a la utilización de algoritmos, y en el nivel más alto se hace uso de un pensamiento complejo no algorítmico.

- <u>El grado de conexión de la tarea con los conceptos subyacentes y/o procedimientos usados para resolverla</u>. En el nivel más bajo no hay conexiones a conceptos o significados subyacentes de las reglas, formulas o definiciones que se han aprendido.

A medida que aparecen estas conexiones en el desarrollo de la tarea, este nivel va evolucionando, hasta que en el nivel más alto se requiere que los estudiantes exploren y comprendan la naturaleza de los conceptos, procesos y relaciones matemáticas y las conexiones entre ellas.

- Nivel de esfuerzo cognitivo a partir de la cantidad de información dada para realizar la tarea. En el nivel más bajo no se observa esfuerzo cognitivo debido a que la tarea es reproductiva y todo es explicitado en forma directa y sin ambigüedades. Luego, el nivel aumenta a medida que se requiere pensar más para realizar correctamente la tarea. En el nivel más alto, se requiere considerable esfuerzo cognitivo y puede implicar algún nivel de ansiedad para los estudiantes dada la naturaleza impredecible que se requiere en el proceso de solución.

En el anexo 2 de este documento, se muestran las características de las tareas matemáticas correspondientes a cada nivel de demanda cognitiva y el criterio asociado a cada una de ellas.

Respecto de la aplicabilidad de este modelo, Benedicto et al (2015) sostienen que ha sido utilizado con éxito en numerosas investigaciones para valorar el esfuerzo intelectual que deben realizar los estudiantes para resolver una actividad matemática, aunque también señalan que "su uso presenta dificultades para analizar actividades complejas, pues éstas tienen características ligadas a varios niveles, lo cual sugiere la posibilidad de que existan niveles intermedios o situaciones de transición entre niveles" (p.154). En el caso de una tarea matemática que involucra la resolución de problema matemático, se esperaría que, dado el carácter no algorítmico de esta tarea, el nivel de demanda cognitiva asociado sea el de procedimientos con conexión o el de hacer matemáticas. Por lo tanto, en primera instancia resulta relevante determinar cuál o cuáles niveles de demanda cognitiva aparecen con mayor frecuencia en las evaluaciones propuestas por docentes de educación media. Sin embargo, como ya se ha mencionado, la resolución de un problema es una tarea multidimensional que involucra diferentes procesos, por lo que no solo es importante determinar la demanda cognitiva de una tarea de resolución de problemas en sí misma, sino que también interesa definir criterios que ayuden a establecer la complejidad de los procesos involucrados en la resolución del problema. Justamente ese es uno de los productos esperados de este trabajo.

3. OBJETIVOS

3.1. Objetivo general

Analizar el modo en que los profesores de matemática de enseñanza media evalúan la competencia matemática de resolver problemas, considerando diferentes niveles de complejidad.

3.2. Objetivos específicos

- Caracterizar las tareas matemáticas propuestas para evaluar la competencia matemática de resolver problemas.

- Determinar criterios que permitan establecer la complejidad en los procesos matemáticos involucrados en la resolución de problemas contextualizados.

- Caracterizar la complejidad de los procesos matemáticos asociados a la resolución de problemas contextualizados.

4. MARCO METODOLÓGICO

La metodología de este proyecto es de tipo cualitativo y su alcance será descriptivo, puesto que los objetivos del estudio apuntan a caracterizar la complejidad con que se evalúan las tareas matemáticas asociadas a la competencia matemática de resolver problemas en los instrumentos de evaluación de la muestra. Este propósito es concordante con lo señalado por Hernández, Fernández y Baptista (2010), quienes señalan que los estudios con alcance descriptivo buscan especificar las propiedades, las características y los perfiles de personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis, pero sin establecer grados de asociación entre las variables o relaciones de causalidad.

4.1. CONTEXTO DE LA MUESTRA

En este proyecto de magíster se analizarán 98 instrumentos de evaluación de la unidad de ecuaciones cuadráticas elaboradas por docentes de establecimientos municipales, particulares subvencionados y particulares pagados de las regiones Metropolitana, Valparaíso y del Biobío.

La recogida de estos instrumentos de evaluación se realizó durante el año 2018 en el marco del proyecto TALIS Video Study, impulsado por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). Este estudio se llevó a cabo en 8 países y economías: Chile, Colombia, México, Madrid, Inglaterra, Alemania, Japón y Shangai. En Chile se ejecutó bajo la conducción del Ministerio de Educación y en su ejecución también participaron otras entidades tanto ministeriales como del ámbito académico. El objetivo principal de este estudio era comprender los aspectos de la práctica docente que están relacionados con los resultados de aprendizaje de los estudiantes. De igual manera, el estudio también buscaba documentar cómo los profesores enseñan a sus estudiantes en diferentes contextos y países, y conocer cómo las prácticas docentes repercuten en aspectos cognitivos y no cognitivos. Para cumplir con estos objetivos, se escogió una muestra de 98 establecimientos educacionales de las regiones señaladas en el párrafo anterior y de diferente tipo de dependencia.

En todos los países participantes el tema matemático que se escogió para este estudio fue el de ecuaciones cuadráticas, debido a que es una temática que se aborda transversalmente en todos los países y economías participantes y presenta baja variabilidad cultural en la forma en que se enseña. Por tal motivo, en cada uno de los 98 establecimientos participantes, se seleccionó un curso que trabajaría la unidad de ecuaciones cuadráticas y durante la implementación de este tema en el aula se filmaron dos clases, se recogieron los artefactos pedagógicos tanto de las clases grabadas como de las clases posteriores a ellas y también se recogió el instrumento de evaluación final de la unidad. En consecuencia, en total se recolectaron 98 pruebas de la unidad de ecuaciones cuadráticas, las que son objeto del análisis realizado en este proyecto de magíster.

Dado que el estudio TALIS Video estaba focalizado en la enseñanza de la ecuación cuadrática y la información fue recogida durante el año académico 2018, los cursos participantes del estudio fueron segundos y terceros medios, ya que, de acuerdo con los marcos curriculares vigentes en ese año para educación media, en ambos niveles se proponía el estudio de la ecuación y/o la función cuadrática: en segundo medio mediante los Objetivos de aprendizaje OA 3 y OA4 (MINEDUC, 2015), y en tercero medio por medio de los Contenidos Mínimos Obligatorios CMO 5, CMO 6, CMO 7 y CMO 8 (MINEDUC, 2009). En consecuencia, los instrumentos de evaluación analizados en esta investigación corresponden a estos niveles educativos. Sin embargo, considerando el requerimiento de confidencialidad de la muestra, no es posible determinar cuáles instrumentos corresponden a las evaluaciones propuestas para 2° medio y cuáles para 3° medio.

Es importante mencionar que, según lo informado por el National Proyect Manager del estudio TALIS Video en Chile, la muestra **no** es representativa de la población nacional, debido a la naturaleza no probabilística en la selección de los participantes. Tampoco hay representatividad de los participantes a nivel de región de procedencia, dependencia administrativa ni ruralidad. En consecuencia, los resultados obtenidos en este proyecto y las conclusiones que se extraerán no son generalizables a nivel país, sino que se remiten a la muestra de 98 profesores y profesoras cuyas evaluaciones fueron analizadas.

4.2. ESTRATEGIA DE ANÁLISIS

A continuación, se presenta, paso a paso, la estrategia de análisis de los datos de la muestra junto con los instrumentos que permitirán llevarla a cabo.

1. **Selección de reactivos con tareas matemáticas asociadas al tema de ecuación cuadrática que evalúan la competencia matemática de resolución de problemas.**

   Dado que el propósito de este estudio es caracterizar la complejidad de las tareas matemáticas en relación con la competencia matemática de resolver problemas, en cada uno de los instrumentos de la muestra se deben escoger aquellos reactivos que evalúan esta competencia. Para esto, es necesario distinguir cuáles son aquellos ítems que se pueden clasificar como "problemas". Esta distinción se realizará considerando los referentes teóricos señalados en el apartado anterior, en particular, lo definido acerca de la diferenciación entre problema y ejercicio, la cual según Blanco y Pino (2015) parece ser uno de los aspectos sobre lo que se podría señalar cierta coincidencia entre los autores. En síntesis, no se clasificarán como problemas aquellos reactivos que correspondan a alguno de los siguientes tipos:

a) Ejercicios de reconocimiento, en lo que se pide resolver, reconocer o recordar un concepto específico o una definición.

b) Ejercicios que pueden ser resueltos con un proceso algorítmico.

De acuerdo con este criterio, las actividades de las Figuras 4, 5 y 6 no se consideraron como problemas, ya que todos estos casos involucran la reproducción de un algoritmo para obtener la respuesta: en el primer caso, las coordenadas del vértice de una función cuadrática; en el segundo, los coeficientes a, b y c de una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, y en el tercero, algún procedimiento conocido para resolver las ecuaciones cuadráticas propuestas (radicación, factorización, completación de cuadrados o usando la "fórmula general"). Dado el carácter algorítmico de estos tres ítems, se pueden categorizar en el nivel de demanda cognitiva de *procedimientos sin conexión*.

Figura 4. *Ejemplo 1 de ítem no considerado como problema.*

4. En las siguientes funciones determinar las coordenadas del vértice de cada una de ellas:**(2ptos. c/u)**

Figura 5. *Ejemplo 2 de ítem no considerado como problema.*

1) Indica el valor de los coeficientes a, b y c de las siguientes ecuaciones de segundo grado

Figura 6. *Ejemplo 3 de ítem no considerado como problema*

7) Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado, por el método que usted desee:

$a)\ x^2 - 36 = 0$ $\qquad$ $b)\ 3x^2 + 24x = 0$

El ítem presentado en la Figura 7 tampoco se considera problema ya que corresponde a una pregunta de memorización, pues los y las estudiantes deben recordar el nombre del tipo de ecuación cuadrática, de acuerdo con el valor de los coeficientes *b* y *c*. Por tal motivo, este ítem se asociaría a un nivel de demanda cognitiva de *memorización*.

Figura 7*. Ejemplo 4 de ítem no considerado como problema*

3) Indique en cada caso si corresponde a una ecuación cuadrática completa o incompleta.

Ecuación cuadrática	Completa	Incompleta
$5x + 6 - x^2 = 0$		

En las Figuras 8, 9 y 10 se presentan ejemplos de ítems que sí fueron calificados como problemas, pues como señalan Blanco y Pino (2015), se diferencian de ejercicios ya que no se puede reconocer el resultado a través, por ejemplo, de una fórmula. En otras palabras, estos ítems conllevan procedimientos que van más allá de lo netamente algorítmico, sino que es necesario idear una estrategia de resolución.

En el ítem de la Figura 8, los y las estudiantes deben determinar el valor de *p* en una ecuación de segundo grado, dada una de sus soluciones. Este problema puede resolverse de diferentes formas. Una alternativa es reemplazar *x* con el valor de la solución dada (–5), de modo que la expresión inicial se convierte en una ecuación de primer grado con incógnita *p*. Otra alternativa de resolución es determinar la segunda solución real, ya sea aplicando las fórmulas de Vieta[1] (en particular aquella que utiliza la suma de las soluciones de la ecuación), o bien determinando el eje de simetría de la parábola correspondiente a la función cuadrática asociada y aplicando la propiedad de que las raíces son simétricas respecto de este eje. Una vez que se determina la segunda solución de la ecuación, esta se puede escribir de la forma $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ y luego desarrollar este producto, o bien pueden aplicarse otra vez las fórmulas de Vieta, pero esta vez usando la expresión que utiliza el producto de las soluciones.

[1] Las fórmulas de Vieta se refieren a la relación entre los coeficientes de un polinomio y sus raíces. En el caso particular de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, si sus soluciones son x_1 y x_2, entonces se cumple que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ y $x_1 \bullet x_2 = \frac{c}{a}$.

Figura 8. Ejemplo 1 de ítem considerado como problema.

3) En la ecuación $x^2 + 2x - p = 0$ una de sus soluciones es -5, luego el valor de p es:

A) 1
B) 8
C) -12
D) 15
E) -15

Los ejemplos de las Figuras 9 y 10 se tratan de problemas verbales. Uno de ellos en un contexto matemático, pues se deben hallar dos números que cumplen ciertas condiciones, mientras que el otro se da en un contexto relacionado con la física (ecuación de itinerario[2] de un proyectil que se mueve en forma vertical). En el primer ejemplo los y las estudiantes pueden modelar la situación mediante una ecuación de segundo grado, la cual al resolverse permitirá hallar los números requeridos. En el otro ejemplo la ecuación cuadrática que modela la situación ya está definida en el enunciado, por lo que los y las estudiantes deberán utilizarla para determinar la altura máxima que alcanza el objeto lanzado verticalmente hacia arriba.

Figura 9. Ejemplo 2 de ítem considerado como problema.

07) La suma de dos números enteros es 3 y su producto es – 10. Entonces, la diferencia positiva de dichos números es

A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 7

[2] Se entiende como **ecuación de itinerario** a aquella expresión algebraica que permite determinar la posición de un cuerpo en función del tiempo.

Figura 10. Ejemplo 3 de ítem considerado como problema.

> **24. La altura h(t) de un objeto lanzado hacia arriba desde el suelo a los "t" segundos, está dada por la función: $h(t) = 12t - 3t^2$ (metros) ¿Cuál es la máxima altura que puede alcanzar el objeto?**
>
> a) 12 m b) 13 m c) 14 m d) 15 m e) 16 m

Respecto del tema matemático que se considerará en la selección de los reactivos, dado que todos los instrumentos de evaluación corresponden a la unidad de ecuación cuadrática, solo se seleccionarán tareas que evalúen esta temática. En el caso de que algún instrumento de evaluación incluya problemas que no se relacionen con ecuación o función cuadrática, estos no serán considerados en el análisis. Por ejemplo, en la Figura 11 se muestra un ejemplo de una actividad que sí puede ser considerada como problema, pero que no corresponde al tema de ecuación cuadrática, por lo que no se incluyó como parte del análisis.

Figura 11. Ejemplo de ítem de un tema que no es ecuación cuadrática.

> 2) La gráfica de la función $y = -|x| + 4$ y el eje x forman un triángulo. Determine el área de dicho triángulo.

2. **Caracterización general de las tareas matemáticas asociadas a la competencia de resolver problemas.**

Una vez que se seleccionen aquellos reactivos que promueven la competencia matemática de resolver problemas, se procederá al análisis de estos ítems. Para la caracterización se considerarán los siguientes criterios:

a) **Tipos de instrumentos** empleados por los y las docentes de la muestra para evaluar el aprendizaje de sus estudiantes y el tipo de reactivo que se emplea con mayor frecuencia. Sanmarti (2007) propone que los instrumentos de recogida de información sean múltiples y variados, de modo que este criterio permitirá visibilizar que tan diversos son los instrumentos en el marco de la evaluación final de una unidad. Salinas (2002) define algunos de los procedimientos y posibles fuentes de información en evaluación, como exámenes de respuesta libre o breve, pruebas objetivas con variedad en el tipo de pregunta (verdadero-falso, alternativa múltiple. Relación de pares, etc.), entre otras.

b) **Tipos de contextos** en los cuales se presentaron los problemas analizados. Recordando la clasificación de problemas definida por Díaz y Poblete (2001) y también citada en Blanco y Pino (2015), los problemas analizados se catalogarán como contextos intramatemáticos o extramatemáticos. En el caso de que el contexto sea intramatemático, se determinará si el contexto se relaciona con el mismo tema de estudio (en este caso ecuaciones o función cuadrática), o bien si el contexto se relaciona con otro tópico matemático. En este último caso interesa determinar cuáles son los temas matemáticos más recurrentes que se vinculan con la ecuación cuadrática.

En el caso de que el contexto del problema sea extramatemático, se pueden distinguir tres posibilidades:

- que el contexto sea real, es decir, que efectivamente ocurra en la realidad y comprometa al estudiante a interactuar en forma activa con ella.
- que el contexto sea realista, es decir que podría ocurrir en la realidad, pero por lo general corresponde a situación ficticia que no involucra el actuar del estudiante.
- que el contexto sea fantasista, o sea que no podría ocurrir jamás en la realidad, ya que contiene, por ejemplo, elementos de ciencia ficción.

Adicionalmente, en el caso de los problemas cuyo contexto sea real o realista también interesa conocer cuáles son los contextos más frecuentes que los y las docentes utilizan para evaluar la aplicación de la ecuación cuadrática. A su vez, en el caso de los problemas reales y realistas, también se analizará si los contextos dados son correctos y/o pertinentes, o bien si estos contienen errores o imprecisiones en el enunciado que originan que la situación no sea completamente realista.

En la Figura 3 presentada en el capítulo anterior, se presentó un esquema con los posibles tipos de contextos en que se clasificarán los problemas analizados:

c) **Niveles de demanda cognitiva.** El análisis de las demandas cognitivas de las tareas matemáticas propuestas se realizará utilizando la taxonomía definida por Smith y Stein (1998), quienes proponen cuatro niveles: memorización, procedimientos sin conexión, procedimientos con conexión y hacer matemática. Para caracterizar los niveles de demanda cognitiva de las tareas matemáticas según esta taxonomía, se consideran las características principales de cada una de ellas. A su vez, en el capítulo anterior se explicitaron tres criterios que permitirán determinar la demanda cognitiva asociada a una tarea matemática:
    - Nivel de comprensión del conocimiento matemático a partir de la estrategia requerida para desarrollar la tarea: reproducción y memorización de conceptos sin el uso de procedimientos, utilización de algoritmos, y uso de un pensamiento complejo no algorítmico.
    - El grado de conexión de la tarea con los conceptos subyacentes y/o procedimientos usados para resolverla.
    - Nivel de esfuerzo cognitivo a partir de la cantidad de información dada para realizar la tarea.

3. **Selección de reactivos correspondientes a problemas contextualizados.**

   En esta etapa se seleccionarán aquellos problemas que serán analizados desde el punto de vista de la complejidad de los procesos matemáticos involucrados en su resolución. En este proyecto se optó por elegir una submuestra correspondiente a aquellos problemas contextualizados, es decir, aquellos cuyo análisis en la etapa anterior se detectó que presentaban contextos extramatemáticos reales, realistas o fantasistas.

4. **Caracterización de la complejidad de los procesos matemáticos involucrados en la resolución de problemas contextualizados.**

   Una vez que se seleccionen aquellos reactivos que correspondan a problemas con contextos extramatemáticos, se procederá a analizar los procesos involucrados en su resolución con el fin de caracterizar la complejidad en la realización de estos procesos.

   En base a la fundamentación teórica definida en el apartado anterior, en especial la evaluación de los procesos matemáticos definidos en el marco referencial para la prueba PISA (OECD, 2019a), que son consistentes con las propuestas de otros autores, como Banus (2012), quien, en forma más resumida, presenta una rúbrica para evaluar la competencia matemática de resolver problemas, a partir de sus procesos involucrados, se determinó que los procesos matemáticos cuya complejidad se analizará en esta etapa son los siguientes:

   - Analiza la información referente a la situación problema.
   - Representa pictóricamente la situación problema.
   - Desarrolla estrategias específicas de resolución:
     - Disponibilidad del modelo matemático.
     - Aplicación del modelo matemático.
   - Interpreta la solución.

Luego de realizar el análisis se espera que, para cada uno de estos procesos, surjan criterios que permitan caracterizar su complejidad, a la vez que se identifiquen patrones de “tipos de problemas” cuya complejidad de resolución a partir de sus procesos involucrados es similar.

En resumen, las acciones que se llevarán a cabo en la estrategia de análisis son las siguientes:

1) Selección de ítems que son considerados problemas
2) Caracterización de los reactivos escogidos de acuerdo con los siguientes criterios:
    a. Tipos de instrumento y de reactivos.
    b. Tipos de contextos propuestos.
    c. Niveles de demanda cognitiva.
3) Selección de ítems que corresponden a problemas contextualizados.
4) Caracterización de niveles de complejidad de los procesos involucrados en la resolución de cada uno de estos problemas contextualizados.
5) Determinación de tipos de ítems en función de regularidades en la complejidad de los procesos involucrados.

5. RESULTADOS

En este apartado se presentarán los principales resultados obtenidos a partir del análisis de los instrumentos de evaluación de la unidad de ecuación cuadrática. En primer lugar, se presentará una caracterización general de los reactivos que evalúan la competencia matemática de resolver problemas. Posteriormente, se caracteriza la complejidad de los procesos matemáticos involucrados en la resolución de problemas contextualizados.

5.1. Caracterización de tareas que evalúan resolución de problemas

Como se mencionó en el capítulo anterior, en los instrumentos de evaluación se analizaron todos aquellos ítems en que se promueve la competencia matemática de resolver problemas, según la distinción entre problema y ejercicio propuesta por diversos autores, en particular el aporte de Blanco y Pino (2015). En este se relacionan las actividades de resolución de problemas con el pensamiento productivo, a diferencia de los ejercicios, que se relacionan más bien al pensamiento reproductivo.

A partir del criterio anterior se observó que en 78 de los 98 instrumentos de evaluación analizados (aproximadamente el 80%) hay al menos un ítem en el que se promueve la competencia matemática de resolver problemas. De todos estos instrumentos se contabilizaron 469 situaciones de evaluación que promueven la competencia matemática de resolver problemas. Todos estos ítems fueron analizados considerando el tipo de ítem, el tipo de contexto en que se presentan las situaciones problemáticas y los niveles de demanda cognitiva asociados a cada problema.

A continuación, se muestran los resultados generales de este análisis para cada uno de estos criterios.

5.1.1. Tipos de ítems

Todos los instrumentos de evaluación de la unidad que se analizaron correspondieron a instrumentos tipo prueba, conformados por diferentes tipos de ítems, mayoritariamente de opción múltiple y de respuesta abierta. No se evidencian otros tipos de instrumentos que propongan una evaluación más holística de los procesos involucrados en la resolución de problemas matemáticos.

Respecto del tipo de reactivo propuesto se observa que 337 de ellos (aprox. el 72%) son de selección única y 132 son de desarrollo. En algunos casos se observa que, frente a una misma tarea matemática con condiciones similares de realización, los reactivos de respuesta seleccionada pueden resultar menos complejos de resolver que aquellos en que la respuesta debe construirse.

Por ejemplo, en las Figuras 12 y 13 se presentan dos ítems muy parecidos, con la diferencia en que en el primero de ellos se presentan alternativas de solución y el otro es de respuesta abierta. La técnica esperable para resolver ambos problemas es reemplazar y(t) por la altura a la que se encuentra el proyectil (420 m y 400 m respectivamente) y luego resolver la ecuación cuadrática resultante ($420 = 100t - 5t^2$ y $400 = 90t - 5t^2$, respectivamente), Sin embargo, en el primer problema otra posible técnica consiste en reemplazar la variable t por cada uno de los valores dados en las alternativas y verificando para cuál o cuáles de estos valores de t la expresión toma el valor 420.

Figura 12. Ejemplo de ítem de selección única.

22. La trayectoria de un proyectil está dada por la función $y(t) = 100t - 5t^2$, donde t se mide en segundos y la altura y(t) se mide en metros. Entonces, ¿en cuál(es) de los siguientes valores de t estará el proyectil a 420 metros de altura sobre el nivel del suelo?

I. 6 segundos
II. 10 segundos
III. 14 segundos

A) Sólo en I
B) Sólo en II
C) Sólo en III
D) Sólo en I y II
E) Sólo en I y III

Figura 13. Ejemplo de ítem de desarrollo.

1. La trayectoria de un proyectil está dada por la ecuación $y(t) = 90t - 5t^2$, donde t se mide en segundos y la altura $y(t)$ se mide en metros. Entonces, ¿A los cuantos segundos el proyectil estará en 400 m de altura sobre el nivel del suelo?

A partir de lo anterior, se observa que, en reactivo de respuesta seleccionada, la presencia de las opciones (y, por ende la respuesta al problema) promueve la generación de otras heurísticas que posibilitan su resolución de una forma más rápida que en el caso del problema con la respuesta construida.

5.1.2. Tipos de contextos

Luego de analizar los tipos de contextos de los ítems que promueven la competencia matemática de resolver problemas, se observó que en el 61% del total se emplean contextos intramatemáticos asociados al mismo tópico y en el 24% se utilizan contextos intramatemáticos en que las ecuaciones cuadráticas permiten resolver problemas asociados a otros temas matemáticos. De estos otros contenidos los que aparecen con más frecuencia son: problemas asociados con propiedades de los números, problemas geométricos asociados con áreas de rectángulos en los que se desea determinar alguna de sus dimensiones y problemas geométricos que involucran la aplicación del teorema de Pitágoras.

Por otra parte, aproximadamente en el 15% de los ítems analizados se propusieron contextos extramatemáticos, porcentaje significativamente menor en comparación con el porcentaje de ítems en contextos intramatemáticos. Estos problemas están constituidos fundamentalmente por contextos realistas. Solo hay un ítem en el que se propone un ítem totalmente fantasioso y no hay ítems en que se proponga un contexto real que comprometa la participación de los estudiantes en forma activa. Los contextos que aparecen más frecuentemente son problemas de física asociados a la aplicación de la ecuación de itinerario (como caída libre o lanzamiento vertical hacia arriba), problemas que involucran el cálculo de las dimensiones de objetos con forma rectangular y problemas de economía que involucran el uso de funciones cuadráticas para modelar variables como el costo o la ganancia.

También se observa que en el 43% de los ítems que involucran contextos realistas hay errores en el enunciado que tienen como consecuencia que la situación propuesta se vuelva irreal al contener información que hacen imposible su ocurrencia. En este grupo se destacan aquellos problemas de física que incluyen caída libre o lanzamiento vertical en que no consideran un valor real de la aceleración de gravedad y problemas en contextos económicos en que los datos presentados son irreales debido a que los precios que se utilizan no son pertinentes, o bien las situaciones presentadas no tienen sentido en la práctica. Un ejemplo es modelar la ganancia de una empresa en función de la cantidad de artículos vendidos con una función cuadrática cuya gráfica tiene concavidad negativa. De ser este modelo posible, entonces la máxima ganancia se obtendría con una cantidad intermedia de artículos vendidos y si se venden más, la ganancia comienza a disminuir hasta llegar a un punto en que comienzan a haber pérdidas. Esta situación claramente es ilusoria y da cuenta de que un modelo cuadrático no es apropiado en este contexto.

En las Figuras 14 y 15 se muestran ejemplos de ítems en contextos realistas, pero que contienen errores en su formulación: en el primer caso, se asocia la gráfica de una función cuadrática (parábola) con una cuerda que está suspendida con sus dos extremos fijos. Esta relación es incorrecta, ya que la curva asociada a esta situación recibe el nombre de catenaria y corresponde a la gráfica asociada a la función coseno hiperbólico. En el segundo ejemplo se define la ecuación de itinerario de un proyectil que es lanzado verticalmente hacia arriba. Este es un caso de movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, cuya ecuación de itinerario corresponde a: $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, donde $x(t)$ es la posición del cuerpo en el tiempo t, x_0 es su posición inicial, v_0 es la magnitud de su velocidad inicial y a corresponde a la magnitud de la aceleración que experimenta el cuerpo. En el caso de un cuerpo que es lanzado verticalmente hacia arriba, sobre él actúa la aceleración de gravedad, que en la superficie de la Tierra tiene un valor aproximado de 9,8 m/s^2. Esto quiere decir que, en toda ecuación de itinerario de un cuerpo que es lanzado verticalmente hacia arriba o que cae libremente, el coeficiente que acompaña a t^2 debe ser aproximadamente igual a –4,9 (el signo menos tiene que ver con sentido de la aceleración respecto del sistema de referencia). Sin embargo, en la expresión dada en enunciado del problema se puede ver que este coeficiente es igual a –3, lo que quiere decir que la aceleración de gravedad que actúa sobre el cuerpo tiene una magnitud de 6 m/s^2, lo que es irreal en la superficie terrestre. Debe destacarse que solo el 21% de los problemas relativos a lanzamiento de proyectiles tenían una formulación correcta desde el punto de vista de la física. En general la principal fuente de error es justamente la definición incorrecta del coeficiente que acompaña a t^2. Respecto de los problemas asociados a economía el 50% de estos tenían contextos irreales.

Figura 14. *Ejemplo 1 de problema con contexto erróneo.*

15) Considerando el tipo de función cuadrática que modela a la forma de la cuerda de la figura:

b) Invente un problema que contextualice la imagen anterior, indicando una función cuadrática que modele la forma de la cuerda.

Figura 15. *Ejemplo 2 de problema con contexto erróneo.*

24. La altura h(t) de un objeto lanzado hacia arriba desde el suelo a los "t" segundos, está dada por la función: $h(t) = 12t - 3t^2$ (metros) ¿Cuál es la máxima altura que puede alcanzar el objeto?

a) 12 m b) 13 m c) 14 m d) 15 m e) 16 m

5.1.3. Niveles de demanda cognitiva

El análisis de las demandas cognitivas de las tareas matemáticas propuestas arroja que 268 ítems, es decir el 99,8% del total de problemas analizados, responden al nivel de demanda cognitiva de procedimientos con conexión. No se observa el nivel de demanda de memorización ni de procedimientos sin conexión, lo cual es esperable, ya que de lo contrario el ítem no promovería la competencia de resolver problemas (en el primer caso al ser un ejercicio de reconocimiento y en el segundo caso al ser un ejercicio que se desarrolla en forma algorítmica.

Solo un ítem responde a la demanda cognitiva de hacer matemáticas. Frente a este escenario, cobra más sentido aún establecer niveles de complejidad a partir de los procesos involucrados en la resolución de estos problemas, puesto que evidentemente hay problemas que son más complejos que otros y esta diferenciación no se hace patente utilizando los niveles de demanda cognitiva.

5.2. Complejidad de los procesos matemáticos en la resolución de problemas contextualizados

Para caracterizar los niveles de complejidad de los procesos matemáticos asociados a la competencia matemática de resolver problemas, se analizaron aquellos problemas verbales enmarcados en contextos extramatemáticos (reales, realistas y fantasistas). Como se señaló anteriormente, aproximadamente el 15% del total de los problemas analizados caen en esta categoría, lo que equivale a un total de 69 problemas.

A continuación, se presentan los resultados de la caracterización de la complejidad para cada uno de los siguientes procesos matemáticos:

- Analiza la información referente a la situación problema.
- Representa pictóricamente la situación problema.
- Desarrolla estrategias específicas de resolución:
  - Disponibilidad del modelo matemático.
  - Aplicación del modelo matemático.
- Interpreta la solución.

5.2.1. Analiza la información referente a la situación problema.

En relación con el análisis de la información proporcionada en el problema, la complejidad de este proceso se establece considerando dos variables: la relevancia de la información dada y la disponibilidad de toda la información necesaria para resolver el problema. La primera se refiere a discriminar si toda la información dada en el problema es relevante para su resolución, o bien hay información que resulta innecesaria. La segunda variable guarda relación con que con los datos presentados en el estímulo y enunciado del problema son suficientes para resolverlo, o bien hay información adicional que debe inferirse.

Considerando estas variables, se pueden distinguir los siguientes casos:

- Toda la información del problema es necesaria para su resolución y, además, está dada en forma explícita. En la Figura 16 se muestra un ejemplo de ítem de este tipo: se entrega la función que modela la posición de un proyectil en función del tiempo y se pide determinar el instante de tiempo en que el proyectil alcanza una altura dada. Con esta información es suficiente para resolver el problema y además toda esta información es relevante para lograrlo. No se observa información adicional que no aporta para su resolución. En 44 ítems (64% de los analizados) se observa este caso.

***Figura 16**. Analiza la información del problema. Nivel 1.*

22. **La trayectoria de un proyectil está dada por la función $y(t) = 100t - 5t^2$, donde t se mide en segundos y la altura y(t) se mide en metros. Entonces, ¿en cuál(es) de los siguientes valores de t estará el proyectil a 420 metros de altura sobre el nivel del suelo?**

- Toda la información del problema es necesaria para su resolución, y hay datos que no están disponibles explícitamente y que deben inferirse. En la Figura 17 se muestra un ejemplo de ítem de este tipo. En este problema también se presenta la función que modela la posición de un proyectil en función del tiempo, y debe determinarse la máxima altura que puede alcanzar el objeto. En este caso es necesario inferir cuál es la interpretación de la "máxima altura" desde un punto de vista gráfico o algebraico para resolver el problema. A su vez, en este ítem tampoco se entrega información irrelevante. En 25 ítems (36% de los analizados) se observa este caso.

Figura 17. Analiza la información del problema. Nivel 2.

24. La altura h(t) de un objeto lanzado hacia arriba desde el suelo a los "t" segundos, está dada por la función: $h(t) = 12t - 3t^2$ (metros) ¿Cuál es la máxima altura que puede alcanzar el objeto?

a) 12 m b) 13 m c) 14 m d) 15 m e) 16 m

- Una tercera categoría, que no se observó en los reactivos analizados, corresponde a aquellos problemas que incluyen información que no es relevante para su resolución, por lo que es necesario discriminar los datos que son relevantes de aquellos que no lo son. Si bien esta categoría no se observa en los problemas analizados, la literatura (Banus, 2012; OECD, 2019a) señala que para evaluar la competencia matemática de resolver problemas deben considerarse situaciones en que el estudiante deba discriminar cuáles datos serán útiles y cuáles no frente a las situaciones propuestas, lo que da origen a la formulación de problemas no estructurados (González Mari, 2009).

5.2.2. Representa pictóricamente la situación problema

En relación con la representación pictórica del problema, se puede determinar un nivel inicial, en que no se espera que se lleve a cabo este proceso debido a que la expresión matemática que permite resolver el problema ya está explicitada en el enunciado, por lo que pierde sentido realizar la representación. En la Figura 18 se muestra un ejemplo de este caso. En este el procedimiento esperable es solo reemplazar x por 100 para determinar el ingreso, por lo que es muy improbable e innecesario que se construya una representación pictórica. En 36 ítems (52% de los analizados) se observa este caso.

Figura 18. *Ejemplo de problema que no requiere representación*

3. **Un contador determina que el ingreso mensual I, en pesos chilenos, que obtiene un relojero con experiencia, por la reparación de un número x de relojes, está dado por la función ingreso**
   $$I(x) = 20.000x - 50x^2$$

a) **Si repara 100 relojes mensuales. ¿Cuál será su ingreso?**

En el caso de que la representación sea un proceso probable de realizar durante el desarrollo del problema, la complejidad se define a partir de dos variables: la disponibilidad de la representación y la familiaridad de la representación. La primera se refiere a si en el estímulo del problema se explicita una representación que complementa o traduce el enunciado verbal y en el que se visualizan los datos del problema. La familiaridad de la representación se refiere a si la representación es fácilmente realizable, por lo general debido a que el estudiante ya ha tenido anteriormente oportunidades de aprendizaje con dicha representación mediante problemas similares.

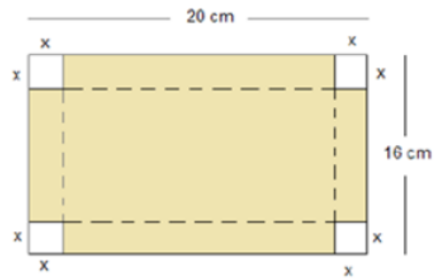
Considerando estas variables, se pueden distinguir los siguientes casos:

- La representación está disponible en el estímulo del problema, como por ejemplo el ítem de la Figura 19. En este caso, hay una representación explícita de la red de una caja rectangular y sus dimensiones, por lo que, en rigor, el estudiante no lleva a cabo este proceso. Notar que, si no estuviera la representación explícita, este problema igual podría resolverse ya que la información está dada en el enunciado. Sin embargo, la imagen ayuda a visualizar mejor la relación entre los datos del problema lo que contribuye a facilitar la búsqueda de la ecuación que lo resuelve. En 3 ítems (4% de los analizados) se observa este caso.

Figura 19. Representa la situación problema. Nivel 1.

a) Para hacer una caja rectangular se cortan cuadrados iguales de las esquinas de una plancha de metal que mide 20 cm de largo por 16 cm de ancho y luego se dobla el metal y se suelda para dar forma a la caja. Si el área de la base de la caja es de 140 cm^2, ¿cuánto mide el lado del cuadrado que se cortó de las esquinas?

R:



- La representación no está disponible en el estímulo del problema, pero es familiar, En este caso, dada la familiaridad del problema, la representación puede construirse con relativa facilidad a partir de la información dada. Por ejemplo, en la Figura 20 se tiene un problema relativo a áreas de rectángulos, el cual es un problema habitual en el estudio de ecuaciones de segundo grado. En este problema es común que los y las estudiantes representen pictóricamente el rectángulo y sus dimensiones previo a construir el modelo matemático. En 18 ítems (26% de los analizados) se observa este caso.

Figura 20. Representa la situación problema. Nivel 3.

7. Juan para una tarea debe cortar, en forma rectangular, un cartón cuya área debe ser de 2.500 cm^2 y donde el largo (x) debe exceder al ancho en 75 cm. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones permite a Juan determinar el largo y el ancho del cartón, en cm?

A) $x^2 - 75x = 2.500$
B) $x^2 + 75x = 2.500$
C) $x^2 - 75 = 2.500$
D) $x^2 + 75 = 2.500$
E) $4x - 150 = 2.500$

- La representación no está disponible en el estímulo del problema y, además, no es familiar por lo que resulta compleja o imposible de construir. En estos casos por lo general los y las estudiantes traducen directamente de lenguaje verbal a la expresión matemática, dado que la representación pictórica de la situación no es intuitiva de realizar. En la Figura 21 se muestra un ejemplo de este tipo. En 12 ítems (17% de los analizados) se observa este caso.

Figura 21. *Representa la situación problema. Nivel 3.*

5. El próximo año la edad de María José será equivalente al cuadrado de la edad que tenía hace 11 años, entonces ¿cuál de las siguientes ecuaciones permite determinar la edad actual **x** de María José?

A) $x^2 + 23x + 120 = 0$
B) $x^2 + x + 12 = 0$
C) $x^2 + x - 12 = 0$
D) $x^2 + x - 10 = 0$
E) $x^2 - 23x + 120 = 0$

5.2.3. Desarrolla estrategias específicas de resolución:

En esta etapa se detectaron dos procesos. El primero tiene que ver con la disponibilidad del modelo matemático que permite resolver el problema. En el caso de que el modelo esté disponible en el estímulo del problema los estudiantes pueden utilizarlo o seleccionarlo. Por contraparte, si el modelo matemático no está disponible, los estudiantes requieren construirlo utilizando la información dada en el enunciado del problema. El segundo proceso se refiere a la aplicación del modelo matemático construido para obtener un resultado.

a) Disponibilidad del modelo matemático.

En relación con construcción del modelo matemático, la complejidad se establece a partir de la disponibilidad del modelo matemático para su uso, o si es necesario construirlo.

A partir de lo anterior, se distinguen los siguientes casos:

- Los estudiantes utilizan un modelo matemático ya explicitado en el estímulo del problema. Este caso ocurre usualmente en aquellos problemas aplicados a situaciones que se modelan con una función cuadrática y la función ya está dada, tal como se muestra en la Figura 22. En 23 ítems (33% de los analizados) se observa este caso.

Figura 22. *Disponibilidad del modelo matemático. Nivel 1.*

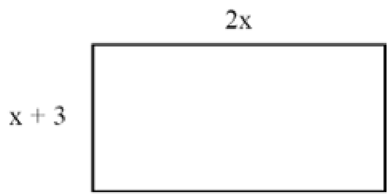
3. Un contador determina que el ingreso mensual *I*, en pesos chilenos, que obtiene un relojero con experiencia, por la reparación de un número *x* de relojes, está dado por la función ingreso $I(x) = 20.000x - 50x^2$

a) Si repara 100 relojes mensuales. ¿Cuál será su ingreso?

- Los estudiantes seleccionan una expresión que modela matemáticamente la situación planteada en el problema. Un ejemplo de este caso es aquel que se muestra en la Figura 23. En este caso debe seleccionarse aquella expresión que se asocia con el área de un rectángulo, modelo matemático que es familiar para los estudiantes. En 5 ítems (7% de los analizados) se observa este caso.

Figura 23. *Disponibilidad del modelo matemático. Nivel 2.*

15.) *¿Cuál es el valor para que el área del rectángulo tenga el valor de 12 cm^2 :*



a.		$(3x-4y)^2$
b.		$(9x-4y)(x+4y)$
c.		$(3x-4y)(3x+4y)$
d.		$(3x-4)(3x+4y)$
e.		$(9x-16y)(9x+16y)$

- Los estudiantes construyen el modelo matemático asociado a la situación planteada en el problema, ya que este no se encuentra disponible. En la Figura 24 se presenta un ejemplo de este caso. En él es necesario traducir la información planteada en el problema a lenguaje matemático para su posterior resolución. En 27 ítems (39% de los analizados) se observa este caso.

Figura 24. *Disponibilidad del modelo matemático. Nivel 3.*

2. Josefina debe construir una maceta de base rectangular para su invernadero, de modo que el largo de la base tenga 30 cm más que su ancho, y su altura sea de 20cm. Además, la maceta debe poder contener exactamente 360 dm^3 de tierra. ¿Cuáles deben ser las medidas de la maceta?

b) Aplicación del modelo matemático.

En relación con la aplicación del modelo matemático, la complejidad se establece a partir de la medida en que el modelo matemático debe utilizarse para obtener el resultado que responde a la pregunta del problema. Se pueden distinguir los siguientes casos:

- Solo debe identificarse el modelo matemático. No se requiere operar sobre él. En la Figura 25 se presenta un ejemplo. En este caso la pregunta es determinar la expresión matemática que modela la situación problemática, por lo que una vez determinada esta expresión el problema se da por resuelto. Según el modelo de Alfabetización Matemática propuesto por la OECD (2019a) para la resolución de problemas en contextos, en este tipo de problemas solo se realiza el proceso de formular (para seleccionar o construir el modelo matemático). Los procesos de emplear e interpretar y evaluar no están presentes. En 8 ítems (12% de los analizados) se observa este caso.

***Figura 25**. Aplicación del modelo matemático. Nivel 1.*

5. El próximo año la edad de María José será equivalente al cuadrado de la edad que tenía hace 11 años, entonces ¿cuál de las siguientes ecuaciones permite determinar la edad actual **x** de María José?

A) $x^2 + 23x + 120 = 0$
B) $x^2 + x + 12 = 0$
C) $x^2 + x - 12 = 0$
D) $x^2 + x - 10 = 0$
E) $x^2 - 23x + 120 = 0$

- El problema se resuelve a partir de una aplicación directa del modelo matemático definido. Por ejemplo, en la Figura 26 se presenta un problema en el que se define el ingreso mensual I en función de la cantidad x de relojes reparados. Dado que se pregunta por el ingreso percibido luego de reparar 100 relojes mensuales, el problema se resuelve simplemente calculando I(100), por lo que en la función se reemplaza x por 100 y luego se determina el valor de: $20\,000 \cdot 100 - 50 \cdot 100^2$.

En general, en el caso de la función cuadrática, esta complejidad se alcanza cuando se debe obtener el valor de la imagen, para cierto valor de la variable independiente. En 8 ítems (12% de los analizados) se observa este caso.

Figura 26. *Aplicación del modelo matemático. Nivel 2.*

3. Un contador determina que el ingreso mensual *I*, en pesos chilenos, que obtiene un relojero con experiencia, por la reparación de un número *x* de relojes, está dado por la función ingreso
$I(x) = 20.000x - 50x^2$

a) Si repara 100 relojes mensuales. ¿Cuál será su ingreso?

- Se requiere utilizar el modelo matemático para resolver situaciones que involucran otros conocimientos. En otras palabras, el modelo matemático no se opera directamente, sino que se requieren más pasos para responder a la pregunta del problema. En el ejemplo que se presenta en la Figura 27, ahora es necesario operar sobre el modelo matemático dado para determinar las coordenadas del vértice de la función. En otras palabras, esta expresión se utiliza para obtener información nueva que ayudará a resolver el problema, o bien el modelo obtenido debe manipularse algebraicamente para llegar a la solución. En 53 ítems (77% de los analizados) se observa este caso.

Figura 27. *Aplicación del modelo matemático. Nivel 3.*

3. Un contador determina que el ingreso mensual *I*, en pesos chilenos, que obtiene un relojero con experiencia, por la reparación de un número *x* de relojes, está dado por la función ingreso
$I(x) = 20.000x - 50x^2$

b) Determine cuántos relojes se deben reparar para obtener el ingreso máximo mensual.

5.2.4. Interpreta la solución

En relación con la interpretación de la solución, la complejidad se establece a partir del nivel de profundidad de la interpretación del resultado obtenido. Hay un primer nivel, en que la naturaleza de la pregunta del problema no requiere una interpretación del resultado obtenido, por ejemplo, aquellos ítems en los que se pregunta por la ecuación que resuelve el problema, sin llegar a resolverla. En 8 ítems (12% de los analizados) se observa este caso.

En aquellos problemas que sí requieren el proceso de interpretación del resultado, podemos distinguir otros dos casos:

- El resultado se interpreta según el contexto del enunciado. Esto significa que producto de llevar a cabo el o los procedimientos matemáticos se obtiene un resultado, el cual debe relacionarse con el contexto para poder dar una respuesta satisfactoria al problema. Por ejemplo, en el reactivo de la Figura 28 se entrega la función que modela la altura h(t) de un balón en un tiempo t y se pregunta por la altura máxima y el tiempo en alcanzar la altura máxima. El procedimiento más común para resolver este problema consiste en determinar el vértice de la parábola. En este caso la interpretación física de las coordenadas del vértice de la parábola corresponderá a la solución del problema, en otras palabras, a partir de la respuesta obtenida $V = (t_m, h(t_m))$, debe interpretarse que t_m corresponde al tiempo en que se alcanza la altura máxima $h(t_m)$. Es importante destacar que el vértice $V = (t_m, h(t_m))$ por sí solo no es la solución al problema, ya que no es lo que se está pidiendo. En 38 ítems (55% de los analizados) se observa este caso.

Figura 28. *Interpreta la solución. Nivel 2.*

- Un grupo de especialistas analizan los tiros libres realizados por un jugador de basquetbol. Después de una largo periodo de estudio obtienen la función $h(t) = 3t - t^2 + \frac{5}{4}$, que modela la trayectoria del balón en un tiempo t. ¿Cuál es la altura máxima y el tiempo en que alcanza ésta altura?

    a) 1,5 m y 1 seg.
    b) 1m y 1,5 seg.
    c) 1,5 m y 3,5 seg.
    d) 1,17 m y 1,67 seg.
    e) 3,5 m y 1,5 seg.

- El resultado se interpreta según el contexto del enunciado, y considerando la validez y limitaciones del modelo. En el caso de los problemas relativos a ecuaciones de segundo caso es usual que en la solución del problema no se consideren las dos soluciones de la ecuación debido a limitaciones dadas por el contexto. Por ejemplo, en los problemas relativos a longitudes o a tiempos no se admiten soluciones que sean negativas, ya que no tiene sentido hablar de longitudes o instantes de tiempo negativos. Justamente, en la Figura 29 se muestra un problema relativo a hallar el ancho de un sitio rectangular dada su área y sabiendo que su largo excede al ancho en 10 m. En este caso, el procedimiento esperable para resolver el problema es hallar las soluciones de la ecuación cuadrática $(x + 10) \cdot x = 75$, la que al desarrollarse se obtiene $x^2 + 10x - 75 = 0$. Las soluciones de esta ecuación son $x_1 = -15$ y $x_2 = 5$. Sin embargo, la solución x_1 no es pertinente, puesto que equivaldría a decir que el ancho del terreno es -15 m y eso no tiene sentido. Por tal motivo, pese a que la ecuación tiene dos soluciones, al interpretar este resultado se considera la validez y las limitaciones que tiene este modelo. En 23 ítems (55% de los analizados) se observa este caso.

Figura 29. *Interpreta la solución. Nivel 3.*

10. Un sitio rectangular tiene área igual a 75 metros cuadrados. su ancho mide 10 metros menos que su largo, ¿cuánto mide el ancho?

5.3. Caracterización de la complejidad de los procesos involucrados en la resolución de problemas contextualizados

En la tabla 4 se muestra una síntesis de los niveles de complejidad para cada uno de los procesos matemáticos involucrados en la resolución de problemas contextualizados, descritos en el apartado anterior.

Tabla 4. Síntesis complejidad de los procesos matemáticos en la resolución de problemas contextualizados. Elaboración propia.

Procesos matemáticos	**Complejidad de los procesos matemáticos**		
	Menor complejidad		**Mayor complejidad**
	1	**2**	**3**
5.2.1. Analiza la información referente a la situación problema.	Toda la información del problema es necesaria para su resolución. y está dada en forma explícita.	Toda la información del problema es necesaria para su resolución. y Hay datos que no están disponibles.	Debe discriminarse la información relevante de la irrelevante para resolver el problema. y Hay datos que no están disponibles.
5.2.2. Representa pictóricamente la situación problema.	No se espera que se realice una representación, o bien, La representación está disponible en el estímulo del problema para su uso.	La representación no está disponible en el enunciado, pero es posible crear una representación familiar.	La representación no es familiar y, además, no está disponible en el estímulo del problema.

5.2.3 Desarrolla estrategias específicas de resolución: a) disponibilidad del modelo matemático.	Los estudiantes utilizan un modelo matemático ya explicitado en el estímulo del problema.	Los estudiantes seleccionan una expresión que modela matemáticamente la situación planteada en el problema.	Los estudiantes construyen el modelo matemático asociado a la situación planteada en el problema, ya que este no se encuentra disponible.
5.2.3. Desarrolla estrategias específicas de resolución: b) aplicación del modelo matemático.	Solo debe identificarse el modelo matemático. No se requiere operar sobre él.	El problema se resuelve a partir de una aplicación directa del modelo matemático definido.	Se requiere utilizar el modelo matemático para resolver situaciones que involucran otros conocimientos.
5.2.4. Interpreta la solución.	La naturaleza de la pregunta del problema no requiere una interpretación del resultado obtenido.	El resultado se interpreta según el contexto del enunciado.	El resultado se interpreta según el contexto del enunciado, y considerando la validez y limitaciones del modelo.

A partir de la categorización anterior, se puede establecer la complejidad de un problema, considerando la complejidad de los procesos matemáticos que se llevan a cabo para resolver dicho problema. Se espera que los problemas considerados menos complejos tiendan a considerar procesos con características correspondientes al nivel 1, mientras que los procesos involucrados en los problemas más complejos debiesen tener características clasificables en el nivel 3. No obstante, en la realidad podemos ver que la resolución de un problema incluye procesos en diversidad de niveles: algunos en 1, otros en 2 y otros en 3. Por ejemplo, en la Figura 30 se muestra un problema contextualizado en que es posible establecer la complejidad de sus procesos matemáticos involucrados.

Figura 30. *Ejemplo de problema contextualizado.*

3. Un contador determina que el ingreso mensual I, en pesos chilenos, que obtiene un relojero con experiencia, por la reparación de un número x de relojes, está dado por la función ingreso $I(x) = 20.000x - 50x^2$

b) Determine cuántos relojes se deben reparar para obtener el ingreso máximo mensual.

Al realizar este ejercicio con el problema anterior, se obtiene lo siguiente:

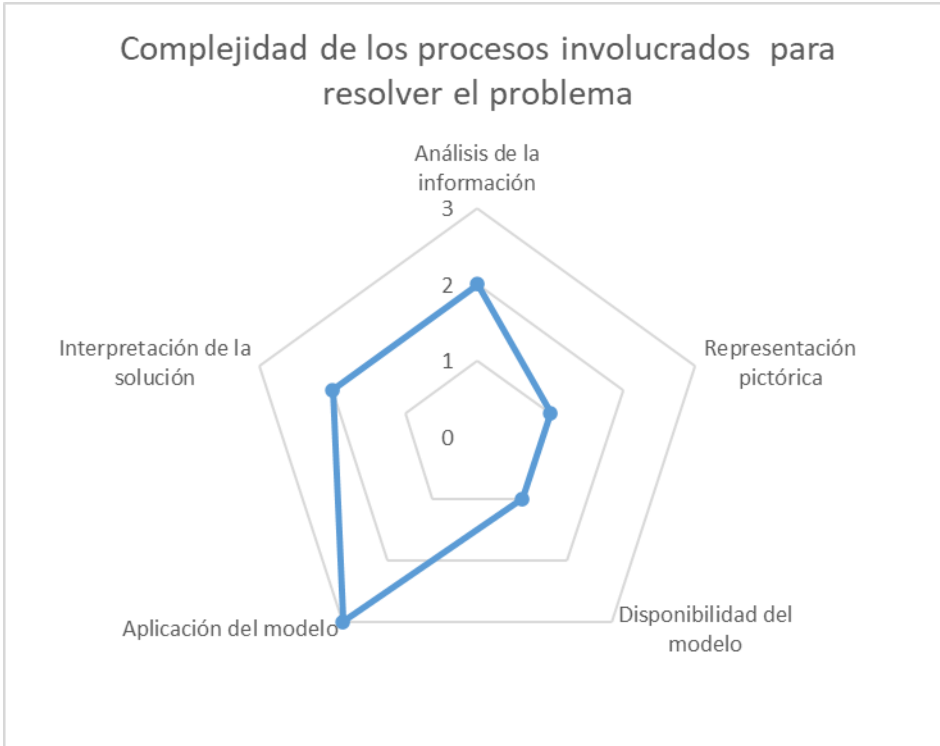
- Respecto del análisis de la información, se observa que toda la información necesaria es relevante para resolver el problema y hay información que no está disponible en forma explícita, ya que se pregunta por el ingreso "máximo" mensual, por lo que el estudiante debiera interpretar esta información desde el punto de vista matemático. En este caso sería determinar la ordenada del punto correspondiente al vértice de la función cuadrática. Por consiguiente, la complejidad de este proceso se puede categorizar en el nivel 2.
- Respecto de la representación se observa que la función cuadrática que modela la situación ya está explicitada en el enunciado, por lo que no se espera que los estudiantes realicen una representación pictórica, sino que apliquen directamente esta expresión algebraica para calcular las coordenadas del vértice, mediante alguna estrategia simbólica. Si bien una posible estrategia es justamente graficar la función y determinar por este medio las coordenadas del vértice, no es el procedimiento

esperable, puesto que la naturaleza de los valores involucrados en la función hace que este procedimiento sea totalmente ineficiente: habría que construir un gráfico hasta x = 200, para recién identificar al vértice de la gráfica. En consecuencia, la complejidad de este proceso se puede categorizar en el nivel 1.

- Respecto de la disponibilidad del modelo matemático, se observa que la función que modela la situación está dada en el enunciado del problema, lo que categoriza este proceso en el nivel 1.
- Respecto de la aplicación del modelo matemático, se observa que la función cuadrática no se utiliza directamente como tal, sino que debe emplearse para determinar las coordenadas del vértice de la gráfica. Por lo tanto, quedaría en el nivel 3.
- Finalmente, en relación con la interpretación de la solución, se observa que la determinación de la ordenada del vértice de la función debe interpretarse en función del contexto, es decir, como ingreso máximo. A su vez, este caso no involucra considerar la validez y limitaciones del modelo, por lo que este proceso quedaría categorizado en el nivel 2.

La complejidad de los procesos involucrado en la resolución del problema anterior se puede resumir en un gráfico radial que ilustra el nivel asociado a cada proceso, tal como se muestra en la Figura 31.

Figura 31. *Niveles de complejidad de los procesos involucrados en la resolución del problema de ejemplo.*



La determinación de la complejidad de los procesos involucrados puede realizarse de la forma anterior con cualquiera de los problemas contextualizados analizados en este proyecto. Al hacer este ejercicio se encontraron ciertas regularidades en grupos de ítems asociadas a tipos de problemas que tienen características similares. Podemos tipificar estos grupos de ítems de la siguiente manera:

- Ítems orientados solo al modelamiento. En estos reactivos no se pide llegar a la solución del problema, sino que finalizan con la determinación de la expresión matemática que modela la situación. En este tipo de tareas no se completa el proceso de resolución de problemas, sino que el foco está en el desarrollo de la habilidad de modelar. Respecto de su complejidad, en la Figura 32 se puede ver que los procesos "aplicación del modelo matemático" e "interpretación la solución" siempre son iguales a 1, debido a que no se lleva a cabo ninguna acción con la expresión algebraica resultante. A su vez, el proceso “disponibilidad del modelo” no puede estar en nivel 1, debido a que justamente lo que se busca es determinar el modelo matemático, por lo que no puede darse en forma explícita. Los procesos restantes pueden estar en cualquier nivel, dependiendo de las particularidades de cada problema.

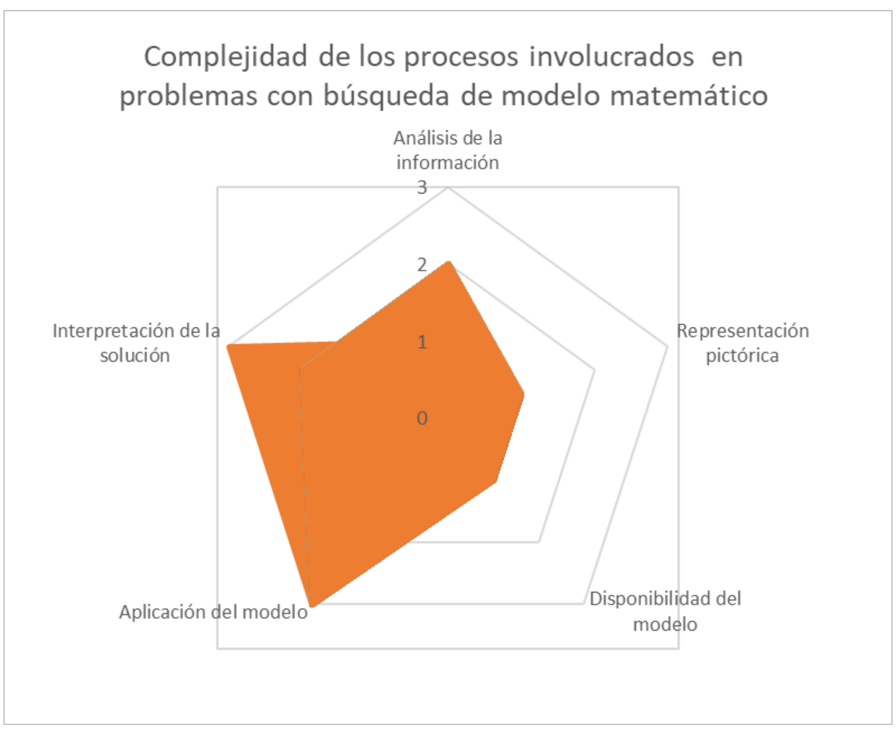
Vale decir que el 10% de los problemas contextualizados analizados corresponden a problemas de este tipo y sus gráficas quedan limitadas por la región de la Figura 32.

Figura 32. *Patrones de niveles de complejidad de los procesos involucrados en problemas de modelamiento.*

- Ítems con el modelo matemático explicitado en el enunciado. A diferencia del caso anterior, en estos problemas la expresión matemática que permite resolver el problema está dada antes de resolver el problema, por lo que el proceso “disponibilidad del modelo” siempre está en el nivel 1. Respecto del proceso “representación pictórica” por lo general se clasifica en el nivel 1 debido a que, al estar el modelo matemático ya determinado, no se hace necesario realizar una representación, a excepción de aquellos casos cuando el problema lo pida explícitamente (por ejemplo, esbozar la gráfica de la función asociada a una situación contextualizada cuya expresión algebraica es dada). Además, dependiendo de la pregunta del problema, los procesos “aplicación del modelo matemático” e “interpretación de la solución” pueden estar en los niveles 2 o 3. En la Figura 33 se observan los niveles de complejidad detectados en los procesos involucrados en estos problemas.

Este tipo de ítems es, por lejos, el más frecuente en los problemas contextualizados que fueron analizados. El 52 % de los problemas contextualizados cumplen con estas características y sus gráficas quedan limitadas por la región de la Figura 33.

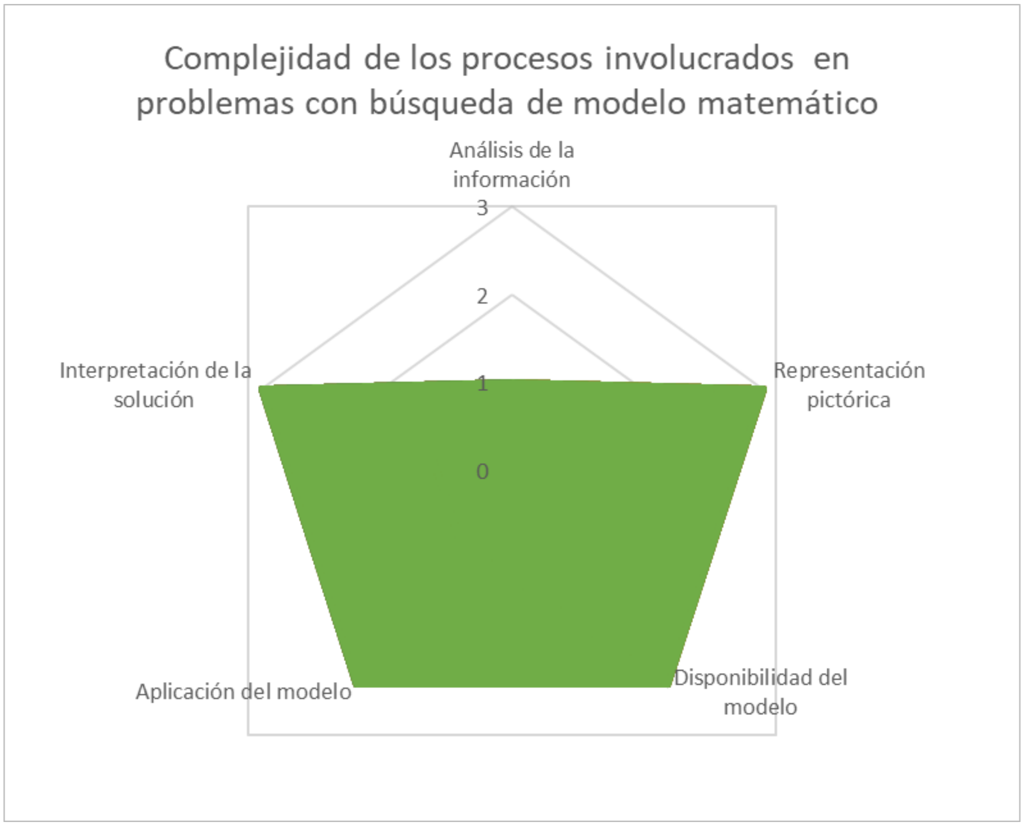
Figura 33. *Patrones de niveles de complejidad de los procesos involucrados en problemas con modelos explícitos.*



- Problemas que requieren la búsqueda del modelo matemático. En este caso el enunciado no explicita el modelo matemático asociado a la situación problema y también se espera una solución al problema, En esta clase de problemas, el proceso "disponibilidad del modelo" siempre está en el nivel 3, ya que requiere ser construido por los y las estudiantes. Los procesos "aplicación del modelo" e "interpretación de la solución" nunca están en nivel 1, ya que los estudiantes deberán utilizar el modelo construido para poder responder la pregunta del problema. En esta muestra en particular se observa que, en esta clase de ítems, el proceso "aplicación del modelo" siempre se categorizó en el nivel 3, ya que el modelo, al corresponder a ecuaciones cuadráticas, posteriormente debía ser manipulado algebraicamente para poder llegar a la solución del problema. Finalmente, los procesos "análisis de la información" y "representación pictórica" pueden estar en cualquier nivel, pues dependen de las características de la información propuesta en el enunciado. A pesar de esto es curioso notar que el proceso "análisis de la información" alcanzó el nivel 1 en todos los problemas de este tipo, lo que se traduce en que toda la información dada en el enunciado es relevante para resolver el problema y se da en forma explícita. Una posible explicación para esto es que como este tipo de problemas son los más complejos para los y las estudiantes, muchos docentes los intentan "simplificar" de manera que los y las alumnas no deban, además, distinguir los datos relevantes de los irrelevantes o extraer información implícita.

  De los problemas contextualizados que se analizaron en esta etapa, el 25% obedece a problemas de este tipo y sus gráficas quedan limitadas por la región de la Figura 34.

__Figura 34.__ Patrones de niveles de complejidad de los procesos involucrados en problemas con búsqueda del modelo.



En la Figura 35 se muestra en un mismo gráfico el comportamiento general de los 69 problemas contextualizados analizados. Es importante notar que en el proceso análisis de la información, ningún reactivo alcanzó el nivel 3, correspondiente a que el enunciado contiene información relevante e irrelevante para resolver el problema. En ese sentido, los y las estudiantes no se enfrentan a la tarea de discernir la pertinencia de la información dada.

Figura 35. *Patrones de niveles de complejidad de los procesos involucrados en todos los problemas contextualizados..*

6. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este apartado se presentan las principales conclusiones obtenidas a partir de los resultados obtenidos en esta investigación, así como las proyecciones que estos resultados pueden tener hacia investigaciones posteriores.

Con los resultados obtenidos y explicitados en el apartado anterior se obtuvo una caracterización de las tareas matemáticas propuestas por docentes de educación media para evaluar la competencia matemática de resolución de problemas

En relación con los tipos de evaluaciones propuestas por los y las docentes se evidenció que persiste la forma tradicional de evaluar esta competencia matemática, es decir, mediante un enfoque que considera la resolución de problemas como un medio de verificación de que los conocimientos han sido apropiados y no a partir de un enfoque por competencias, que es lo que propone nuestro Marco Curricular vigente. Para evidenciar la afirmación anterior basta con ver el tipo de instrumentos empleados por los y las profesoras para evaluar, pues, recordando a Goñi (2008), la evaluación en competencias implica aportar evidencias de lo que los estudiantes son capaces de hacer, transfiriendo el conocimiento a contextos que son relevantes desde el punto de vista social. Sin embargo, los instrumentos empleados por los y las profesoras para evaluar los aprendizajes de la unidad de ecuación cuadrática son tipo prueba, en las cuales un porcentaje muy alto de los reactivos categorizados como problemas correspondían a preguntas de selección única (72%) y el resto, a preguntas de respuesta abierta en las que tan solo se pregunta por la respuesta, sin indagar explícitamente en los procesos intermedios llevados a cabo para obtener tal solución. No hay rúbricas o registros de realización de tareas que permitan valorar el nivel de desarrollo de los procesos matemáticos asociados. Castro, Correa & Lira (2004) señalan como desventajas de los reactivos de respuesta seleccionada que estos evalúan objetivos de bajo nivel cognitivo y que impiden la creatividad. Estas desventajas resultan cruciales en la evaluación de la resolución de problemas, puesto que, por una parte, la resolución de problemas debiera promover el desarrollo de habilidades cognitivas de orden superior (Smith y Stein, 1998), y por otra, uno de los propósitos del enfoque curricular en torno a la resolución de problemas es justamente la búsqueda creativa de estrategias de solución (MINEDUC, 2015).

Respecto de los tipos de contextos propuestos en los problemas, quedó en evidencia que solo el 15% del total de problemas analizados corresponden a problemas con contextos extramatemáticos, mientras que el 85% restante correspondían a problemas en contextos intramatemáticos (ya sea de ecuación cuadrática como de otros tópicos). Estos resultados no se condicen con los lineamientos curriculares, en que se menciona que: "Al poner énfasis en la resolución de problemas, se busca, por un lado, que las alumnas y alumnos descubran la utilidad de las matemáticas en la vida real y, por otro, abrir espacios para conectar esta disciplina con otras asignaturas" (MINEDUC, 2015, p.95). De hecho, el corazón del enfoque por competencia es justamente la aplicación de la matemática en problemas de la vida diaria, en situaciones sociales, laborales e interdisciplinarias. En otras palabras, el corazón de la resolución de problemas como competencia matemática requiere situaciones contextualizadas relevantes para poder aplicar el conocimiento adquirido. Por ejemplo, en el marco referencial de la prueba PISA, que evalúa la competencia matemática (OECD, 2019a), los problemas se categorizan en uno de los siguientes contextos: científico, laboral, personal o social. En consecuencia, la evidencia recogida respecto de los tipos de contextos refuerza lo indicado anteriormente respecto del tradicionalismo con que las evaluaciones fueron concebidas y el rol secundario que la resolución de problemas juega en este paradigma. Estos resultados obtenidos en el proyecto sugieren la necesidad de diversificar los contextos que se utilicen y no quedarse solo con aquellos contextos estructurados que son los que usualmente se proponen en los textos escolares. En particular, urge la formulación de problemas en contextos reales, de modo que los y las estudiantes puedan resolver problemas relevantes en forma activa, utilizando una diversidad de herramientas.

Adicionalmente se detectó que, en el caso de los problemas con contextos extramatemáticos, más del 40% de ellos presentaba errores conceptuales en el enunciado, que traían como consecuencia que la información planteada en su enunciado hacían imposible la ocurrencia en la realidad de la situación propuesta. Considerando este dato, se puede resumir que, en general se observa que los problemas analizados carecen de contextos extramatemáticos que sean relevantes y, además, de aquel bajo porcentaje de problemas que sí son contextualizados, un número importante presenta errores en su formulación.

En relación con los niveles de demanda cognitiva, es esperable que tareas en el nivel de demanda de *hacer matemáticas* sean más complejas y desafiantes que aquellas en el nivel de *procedimientos con conexión*. Sin embargo, en el caso de las tareas que involucran la competencia matemática de resolver problemas dos tareas pueden quedar categorizadas en el mismo nivel de demanda cognitiva pero tener diferentes niveles de complejidad en su resolución. Esto implica que uno de los factores que permite establecer niveles de complejidad entre problemas diferentes es su nivel de demanda cognitiva asociado, pero también resulta necesario considerar otros factores que contribuyan a establecer que un problema sea más difícil de resolver que otro. De hecho, en los problemas analizados, la gran mayoría quedó categorizada como procedimientos con conexión, pese a que, evidentemente, había problemas más complejos que otros. La búsqueda de estos otros factores nos llevó a mirar los procesos matemáticos involucrados en la resolución de un problema y a definir criterios que nos ayudaron a establecer niveles de complejidad en base a estos procesos.

Si bien la literatura indica cuáles son los procesos que se llevan a cabo en la resolución de un problema (Polya, 1945, OECD, 2019a, Banús, 2012), uno de los aportes de este trabajo es la definición de criterios que pueden determinar niveles de complejidad en el desarrollo de estos procesos en torno a la resolución de un problema contextualizado. De esta manera se subsana la dificultad explicitada en el párrafo anterior acerca cómo graduar la complejidad de la resolución de problemas, problemática ya descrita por Anderson y Krathwohl (2001) debido a la naturaleza multidimensional de esta competencia matemática.

La definición de estos criterios tiene, al menos, dos implicancias: la primera es que permitirá evaluar la resolución de problemas desde un punto de vista más holístico, no enfocado únicamente en el resultado, sino que en las componentes que la conforman, pues, tal como señala Hawes (2004) la evaluación de los procesos involucrados (o subcompetencias) es más pertinente pues permite observar aspectos más específicos de la competencia matemática. Adicionalmente, la matriz con los criterios que establecen la complejidad de los procesos sirve de base para elaborar rúbricas que permitan evaluar esta competencia matemática en forma objetiva, en concordancia con lo señalado por Blanco (2008) respecto de que este tipo de instrumentos se ajustan a las exigencias de una evaluación de competencias multidimensional. La segunda implicancia es desde el punto de vista del diseño de situaciones de aprendizaje y situaciones de evaluación que sean ricas en oportunidades para que los y las estudiantes desarrollen estos procesos en forma variada, puesto que los y las docentes pueden utilizar esa matriz para elaborar problemas relevantes con énfasis en diferentes procesos y considerando diversas condiciones de realización.

Al analizar la complejidad de los procesos involucrados en la resolución de los problemas contextualizados que formaron parte de la muestra, se obtuvieron resultados interesantes que podrían relacionarse, en parte, con los bajos resultados en pruebas internacionales respecto de la competencia matemática de resolver problemas (aunque este no es un estudio con propósito explicativo ni su metodología fue diseñada para este fin). En primer lugar, se observa que en todos los problemas analizados el proceso “analiza la información referente a la situación problema” fue desarrollado solo hasta su nivel 2, es decir, extrayendo información explícita o implícita. Sin embargo, en ningún momento los estudiantes se enfrentan a la tarea de discriminar si la información es relevante o no. A su vez, como ya se mencionó, la información que se extrae proviene de problemas con contextos muy estructurados, lo que hace más sencillo y directo obtenerla. Las condiciones anteriores son similares a las que la OECD (2019b) propone para los niveles 1 y 2 de desarrollo de competencia matemática (ver anexo 1 de este informe), las que justamente se refieren a responder preguntas en contextos conocidos y preguntas definidas (en el nivel 1) y extraer información pertinente de una sola fuente y hacer uso de un único modo de representación (en el nivel 2). Coincidentemente la mayoría de los estudiantes chilenos quedan categorizados en estos dos niveles de desarrollo de competencia matemática. Los niveles más avanzados, requieren un mayor nivel de inferencia e interpretación, lo cual no se presenta en los problemas analizados, lo que se traduce en que los estudiantes tienen menos oportunidades para desarrollar estos niveles de desarrollo que son más complejos y requieren la formulación de problemas más elaborados.

A su vez, el nivel de desarrollo de los otros procesos matemáticos en los problemas contextualizados que fueron objeto de análisis permitió la identificación de tipos de problemas, cuyos procesos involucrados se encuentran en niveles de complejidad similares. Estos eran:

- Problemas orientados solo a hallar el modelo matemático asociado a la situación, sin que debe aplicarse posteriormente en la búsqueda de una solución.
- Problemas con el modelo explícito en el enunciado, el cual debe utilizarse para responder la pregunta del problema.
- Problemas que involucran buscar el modelo matemático y luego aplicarlo para responder la pregunta del problema.

Respecto de los tipos de problemas anteriores, es importante señalar que los dos primeros tipos de problemas no permiten completar el ciclo conformado por los procesos definidos por la OECD (2019a) para la resolución de problemas en contextos: a partir de un problema en un contexto se formula un problema o modelo matemático (proceso *formular situaciones matemáticamente*), luego este modelo se manipula para llegar a un resultado matemático (proceso *emplear conceptos y procedimientos matemáticos*), el cual finalmente se interpreta con el fin de obtener un resultado en el contexto inicial (proceso *Interpretar y evaluar el resultado*). En el caso de los problemas orientados a hallar el modelo matemático, solo se pone en juego el proceso *formular situaciones matemáticamente*, y en el caso de los problemas con el modelo explícito en el enunciado, solo se llevan a cabo los procesos *emplear conceptos y procedimientos matemáticos* e *Interpretar y evaluar el resultado*. Tan solo en el tercer tipo de problema se observa que el ciclo de resolución de problemas en contextos se completa. Lamentablemente del total de problemas en contextos que fueron analizados, solo el 25% es de este tipo, lo que demuestra que en la mayoría de los problemas contextualizados que los y las docentes propusieron no se ponen en juego todos los procesos involucrados para resolverlos.

Por el contrario, más de la mitad de los problemas propuestos tienen el modelo explícito, por lo que el foco está más en la manipulación algebraica y la posterior interpretación del resultado que en el desarrollo de la habilidad de modelar, la cual también es una habilidad central definida en las Bases Curriculares (MINEDUC, 2012, MINEDUC, 2015).

En la literatura es posible encontrar evidencia que es consistente con los niveles de complejidad definidos para los procesos involucrados en la resolución de un problema y también con la tipología de problemas hallada. Por ejemplo, en el contexto de la resolución de problemas que involucran sistemas de ecuaciones, Sanjosé, Valenzuela, Fortes & Solaz-portolés (2007) hablan de modelos matemáticos "explícitos" cuando el enunciado incluye dichas ecuaciones, e "implícito" cuando estas ecuaciones no están en el enunciado y es el o la estudiante quien debe inferirlas. Además, concluyen que los estudiantes tienen más complicaciones resolver aquellos problemas con modelo matemático implícito. Esto es consistente a los niveles que se desprenden del proceso "Desarrolla estrategias específicas de resolución: disponibilidad del modelo matemático" pues los niveles de complejidad asociados a este proceso justamente hacen alusión a si el modelo está explícito (en el nivel 2), o bien si hay que construirlo a partir de la información del problema (en el nivel 3), lo cual concuerda empíricamente con lo obtenido por Sanjosé et al (2007).

Las conclusiones anteriores, permiten corroborar que en este estudio se dio cuenta de los objetivos propuestos, como se puede establecer a continuación:

Respecto del objetivo específico*: Caracterizar las tareas matemáticas propuestas para evaluar la competencia matemática de resolver problemas,* se comprobó que en este estudio efectivamente se consiguió esta caracterización a partir de los criterios: tipos de reactivos, tipos de contextos y niveles de demanda cognitiva. Esta caracterización arrojó evaluaciones tradicionales y con tipos de instrumentos evaluativos que promueven un enfoque tradicional, centrado en el resultado, y no en los procesos involucrados en la resolución de los problemas, que es más propio de un enfoque por competencias. A su vez los contextos son realistas, pero estructurados, es decir, no invitan a los estudiantes a participar activamente, sino que son situaciones alejadas de la realidad de los alumnos, similares a los que se proponen en textos escolares y, en muchos casos, con errores conceptuales. Respecto del nivel de complejidad de las tareas matemáticas, de acuerdo con el modelo de Smith y Stein (2001) se categorizaron los problemas en el nivel de *procedimientos con conexión*, lo que origina la necesidad de considerar los procesos matemáticos involucrados para graduar la complejidad de esta competencia matemática.

Respecto del objetivo específico *Determinar criterios que permitan establecer la complejidad en los procesos matemáticos involucrados en la resolución de problemas contextualizados,* también fue logrado: en primer lugar, mediante una revisión bibliográfica se determinaron cuáles son los procesos matemáticos involucrados en la resolución de un problema matemático:

- Analiza la información referente a la situación problema.
- Representa pictóricamente la situación problema.
- Desarrolla estrategias específicas de resolución:

    - Disponibilidad del modelo matemático.
    - Aplicación del modelo matemático.
- Interpreta la solución.

Posteriormente, mediante el análisis de problemas contextualizados, por cada uno de los procesos anteriores se levantaron criterios que permitieron establecer niveles de complejidad en el desarrollo de esos procesos a la hora de resolver el problema. Finalmente, empleando los criterios levantados se definieron tres niveles de complejidad para cada uno de los procesos anteriores, lo que se instrumentalizó mediante la matriz presentada en la Tabla 4.

El tercer objetiyo específico *Caracterizar la complejidad de los procesos matemáticos asociados a la resolución de problemas contextualizados*, igualmente fue logrado, ya que se utilizó la matriz asociada al objetivo anterior para establecer la complejidad de los procesos asociados a los problemas contextualizados propuestos por los y las docentes de la muestra. A partir de este análisis se determinaron características generales respecto del modo en que los procesos matemáticos se evaluaron, lo que trajo como consecuencia la definición de tipos de problemas que comparten un nivel similar de desarrollo de sus procesos.

En consecuencia, dado el cumplimiento de los tres objetivos específicos de este estudio, se puede afirmar que el objetivo general *Analizar el modo en que los profesores de matemática de enseñanza media evalúan la competencia matemática de resolver problemas, considerando diferentes niveles de complejidad* también fue logrado, en primer lugar mediante una caracterización general de las tareas matemáticas asociadas a la resolución de problemas considerando los tipos de reactivos propuestos, tipos de contextos y niveles de demanda cognitiva (Objetivo específico 1), y posteriormente a partir de un análisis más profundo en torno a los procesos matemáticos involucrados en la resolución de problemas contextualizados. A raíz de este análisis se levantaron criterios que permitieron establecer niveles de complejidad en el desarrollo de cada uno de estos procesos (Objetivo específico 2) los que se emplearon posteriormente para caracterizar la complejidad de los problemas propuestos y la posterior definición de patrones de problemas tipo a partir de la visualización de regularidades sistemáticas en el grado de niveles de complejidad de los procesos en los problemas diseñados por los y las profesoras (Objetivo específico 3).

6.1. Proyecciones y limitaciones del estudio

Finalmente, a partir del desarrollo de esta investigación, surgieron nuevas interrogantes que pueden ser estudiadas en proyectos posteriores. Por ejemplo, la caracterización se realizó a partir de un análisis de instrumentos de evaluación que los y las profesoras construyeron, por lo que para determinar los procesos involucrados y su complejidad se pensó en el procedimiento esperable para resolver el problema. Sin embargo, podría ser útil realizar la caracterización considerando producciones reales de los estudiantes y determinar patrones. A su vez con las producciones de los estudiantes también es posible establecer niveles de complejidad en forma empírica y así se pueden contrastar con la complejidad determinada en forma teórica, de modo que la rúbrica sea mejorable.

También resultaría útil transferir la aplicación de esta rúbrica a la resolución de problemas que involucran otros tópicos diferentes a la ecuación cuadrática y valorar en qué medida los procesos involucrados resultan igualmente pertinentes, así como también los criterios que establecen la complejidad de cada uno de estos criterios.

A su vez, el foco en la resolución de problemas matemáticos y la incorporación de los procesos involucrados en el desarrollo de esta competencia permitirá promover, de mejor manera en el aula, un trabajo interdisciplinario en que la resolución de estos problemas surge como respuesta a una necesidad o pregunta de interés que originalmente es propia de otra área del conocimiento. Esto es concordante con Lo que señala Lorenzo (citado en

Gasco, 2013) en que la resolución de problemas no debe ser exclusivo de la matemática, sino que es de gran utilidad para cualquier disciplina científica. A su vez, la interdisciplinariedad fomenta el trabajo colaborativo como “una opción de potenciar la construcción de aprendizajes y a la vez formar valores” (Denegri, 2005), es decir, desarrollando actitudes positivas hacia la matemática. Adicionalmente, Peñalva (2010) sostiene que la resolución de una problema y la reflexión sobre los procesos vividos propicia el desarrollo de competencias metacognitivas.

A su vez, la matriz que define los niveles de complejidad de los procesos matemáticos involucrados en la resolución de un problema es una herramienta que puede aportar a la labor docente, pues permitirá diversificar los problemas que se propongan, estableciendo, en forma intencionada, problemas con diferentes grados de complejidad desde el punto de vista del énfasis que se dé a sus procesos involucrados. Por tal motivo, es posible proyectar este estudio hacia una investigación más aplicada, en la que se puedan construir situaciones de aprendizaje e instrumentos de evaluación orientados a trabajar la resolución de problemas en forma diversa y aplicada a situaciones relevantes en ámbitos personales, laborales, sociales y científicos. Lo anterior también implicaría elaborar rúbricas que permitan evaluar adecuadamente el desarrollo de los procesos matemáticos involucrados en la resolución de un problema, lo que sería un gran aporte a la educación en matemática orientada a un enfoque por competencias.

También es necesario recordar que los instrumentos de evaluación que se utilizaron corresponden a los recogidos en el proyecto TALIS Video, el cual también incluye la recolección de videos de clases e instrumentos de evaluación aplicados a estudiantes. Por tal motivo, el alcance de este proyecto de magíster puede profundizarse mucho al establecer relaciones entre las evaluaciones aplicadas y las clases de la unidad de ecuación cuadrática, por ejemplo, para establecer la validez de contenido y validez instruccional del instrumento propuesto a partir de lo evidenciado en las clases correspondientes. En otras palabras, contrastar el currículum evaluado versus el currículum implementado, de manera de verificar si la forma de trabajar en el aula la resolución de problemas se corresponde con la forma de evaluar, además de tomar nota sobre el rol de los estudiantes y el o la docente en la resolución de esos problemas y la relevancia que en el aula se dio a los procesos matemáticos involucrados en la resolución de problemas. En otras palabras, las implicancias de este estudio no solo se remiten a la evaluación de los aprendizajes, sino que también puede extenderse al proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática propiamente tal. En ese sentido es muy relevante estudiar el modo en que la resolución de problemas se desarrolla en el aula, considerando el nivel de complejidad con el que se trabajan los procesos matemáticos involucrados. Esto puede hacerse con los mismos videos recogidos en el proyecto TALIS Video Study.

Respecto de las limitaciones de este estudio, la más relevante es que adolece de validez externa, debido a la no representatividad de la muestra escogida. Esto significa que los resultados y las conclusiones descritas en las páginas anteriores no son generalizables a la población. Tampoco fue posible analizar los resultados por dependencia administrativa o por nivel socioeconómico. Por tal motivo, otra posible proyección de este estudio consiste justamente en adaptar el diseño metodológico de este estudio de manera que la muestra sea representativa de la población de docentes del país de modo de que los resultados que se reporten sean extensibles a toda la población. En este caso también sería relevante caracterizar cómo los profesores y profesoras evalúan la competencia matemática de resolver problemas, considerando las eventuales diferencias según la dependencia administrativa o en el nivel socioeconómico de las escuelas que participen del estudio.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Agencia de Calidad de la Educación. (2019). *PISA 2018, entrega de resultados, competencia Lectora, Matemática y Científica en estudiantes de 15 años en Chile*. Recuperado de: http://archivos.agenciaeducacion.cl/PISA_2018-Entrega_de_Resultados_Chile.pdf.

Alfaro, C., y Barrantes, H. (2008). ¿Qué es un problema matemático? Percepciones en la enseñanza media costarricense. *Cuadernos de investigación y formación de profesores*, 4, 83-98.

Anderson, L. W., & Krathwohl, D. R. (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing: A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives*. New York: Longman.

ARPA (7 de abril de 2021). *Nuestra iniciativa ARPA: Activando la Resolución de Problemas en las Aulas*. Recuperado de: https://arpa.uchile.cl/nuestra-iniciativa/

Banus (2012). *Rúbrica per a l'avaluació de la resolución reflexiva i argumentada de problemas aritmètics simples*. Recuperado de: https://tresorderecursos.com/wp-content/uploads/2020/12/Rubrica-Bans.pdf.

Benedicto, C., Jaime, A. & Gutiérrez, A. (2015). Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométricos. En C. Fernández, M. Molina & N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp.153-162). Alicante: SEIEM.

Blanco, L. (1993). Una clasificación de problemas matemáticos. *Revista Epsilon, 25*, 49-60.

Blanco. A., (2008). Las rúbricas: un instrumento útil para la evaluación de competencias. En L. Prieto, A. Blanco & P. Morales, *La enseñanza universitaria centrada en el aprendizaje: estrategias útiles para el profesorado* (pp.171-188). Barcelona: Octaedro-ICE.

Blanco, L. & Pino, J. (2015). ¿Qué entendemos por problema de matemáticas? En L. Blanco, J. Cárdenas & A. Caballero, *La resolución de problemas matemáticos en la formación inicial de profesores de primaria* (pp.81-92). Extremadura, España: Universidad de Extremadura.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Argentina: Libro de Zorsal.

Cáceres, M. Sepúlveda, F. & Rodríguez, C. (2020). Standardization of the EGMA Instrument for the evaluation of mathematics in the initial levels of Basic Education. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, 46(1), 301-318.

Castro, F., Correa, M. & Lira, H. (2004). *Curriculum y evaluación Texto Guía*. Chillán: Universidad del Bío-Bío.

Chacel, R. (2006). *George Pólya- Estrategias para la solución de Problemas*. Recuperado de:
http://ficus.pntic.mec.es/fheb0005/Hojas_varias/Material_de_apoyo/Estrategias%20de%20Polya.pdf

Conejo, L., & Ortega, T. (2013). Clasificación de los problemas propuestos en aulas de Educación Secundaria Obligatoria. *Educación matemática*, *25*(3), 129-158.

Denegri, M. (2005). Proyectos de aula interdisciplinarios y reprofesionalizacion de profesores: un modelo de capacitacion. Estudios pedagógicos (Valdivia), 31(1), 33-50.

Díaz, M. & Poblete, A. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. Números*: Revista de didáctica de las matemáticas*, *45*, 33-42.

Favieri, A. (2014). *La taxonomía de Bloom y las habilidades matemáticas en transformación conforme*. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/267633171_La_taxonomia_de_Bloom_y_las_habilidades_matematicas_en_Transformacion_Conforme.

Gasco, J. (2013). La resolución de problemas en el currículo de matemáticas de Educación Secundaria. *Ikastorratza, e-Revista de didáctica*, *10.*

González J. (2009). Fundamento y práctica de la competencia matemática resolución de problemas de matemática. *Curso CEP ceuta. Didáctica de la matemática*. España: Universidad de Málaga UMA.

Goñi, J. (2008). *El desarrollo de la competencia matemática*. España: Grao.

Hawes, G. (2004). *Evaluación: estándares y rúbricas*. Talca: Universidad de Talca.

Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. (5a ed.). DF, México: McGraw-Hill.

Isoda, M., & Olfos, R. (2009). *El enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases*. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Luengo, M. (1998). Taxonomía de capacidades aplicada a las Matemáticas. *Aula abierta*, *71*, 201-210.

MINEDUC. (2009). *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media. Actualización 2009*. Santiago, Chile: Ministerio de Educación.

MINEDUC. (2012). *Bases curriculares educación básica*. Santiago, Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.

MINEDUC. (2015). *Bases curriculares 7° básico a 2° medio*. Santiago, Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.

Pedreros, A. (2016). *Desarrollo de habilidades: aprender a pensar matemáticamente*. Santiago, Chile: Ministerio de Educación.

Ministerio de Educación de Singapur. (2012). *Primary Mathematics Teaching and Learning Syllabus*. Singapore: Ministry of Education.

NCTM. (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

OECD. (2003). *Marcos teóricos de PISA 2003 Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas*. París, Francia: OECD Publishing.

OECD. (2005). *The definition and selection of key competencies. Executive summary*. París, Francia: OECD Publishing.

OECD. (2019a). *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework, PISA*, OECD Publishing, Paris, https://doi.org/10.1787/b25efab8-en.

OECD. (2019b). *PISA 2018 Results (Volume I): What Students Know and Can Do*, PISA, OECD Publishing, Paris, https://doi.org/10.1787/5f07c754-en.

O'Shea, J. & Leavy, A. (2013). *Teaching mathematical problem-solving from an emergent constructivist perspective*: The experiences of Irish primary teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*. *16*(4), 293-318.

Peñalva, L. (2010). Las matemáticas en el desarrollo de la metacognición. *Política y cultura*, (33), 135-151.

Pino, J. (2015). Tipos de problemas de matemáticas. En L. Blanco, J. Cárdenas & A. Caballero, *La resolución de problemas matemáticos en la formación inicial de profesores de primaria* (pp.187-207). Extremadura, España: Universidad de Extremadura.

Piñeiro, J. L., Castro-Rodríguez, E. & Castro, E. (2016). Resultados PISA y resolución de problemas matemáticos en los currículos de educación primaria. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 5*(2), 50-64.

Polya, G. (1945). *How to solve it; a new aspect of mathematical method*. Princeton: University Press.

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA*, *1*(2), 47-66.

Salinas, D. (2002). *Mañana a examen. La evaluación: entre la teoría y la realidad*. Barcelona: Editorial Graó.

Sandoval, P., Friz, M., Maldonado, A. & Rodríguez, F. (2011). Evaluación de habilidades en matemática y comprensión lectora en estudiantes que ingresan a pedagogía en educación básica: un estudio comparativo en dos universidades del consejo de rectores. *Educar em Revista.* 2. 10.1590/S0104-40602010000500005.

Sanjosé, V., Valenzuela, T., Fortes & M., Solaz-portolés, J. (2007). Dificultades algebraicas en la resolución de problemas por transferencia. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, 6(1), 538-561.

Sanmartí, N. (2007). *10 ideas clave. Evaluar para aprender*. Barcelona: Grao.

Santos Guerra, M. (2003). Dime cómo evalúas y te diré qué tipo de profesional y de persona eres. *Revista enfoques educacionales, 5*(1), 69-80.

Santos, M. (2007). *La Resolución de Problemas. Fundamentos cognitivos*. México: Trillas.

Smith, M. S. & Stein, M. K. (1998). Selecting and Creating Mathematical Task: from research to practice. *Mathematics teaching in the middle school*, *3*(5), 344-350.

Villardón, M. (2006). Evaluación del aprendizaje para promover el desarrollo de competencias. *Educatio Siglo XXI*, *24*, 57-76.

ANEXOS

Niveles de logro prueba PISA 2018

Nivel	Descripción del nivel del rendimiento
6	En el nivel 6 los alumnos saben formar conceptos, generalizar y utilizar información basada en sus investigaciones y modelizar situaciones de problemas complejos, y pueden utilizar su conocimiento en contextos relativamente atípicos. Pueden relacionar simultáneamente diferentes fuentes de información y representaciones e intercambiarlas entre ellas de manera flexible. Los estudiantes de este nivel poseen un pensamiento y razonamiento matemático avanzado. Estos alumnos pueden aplicar esta comprensión, así como su dominio de las operaciones y relaciones matemáticas simbólicas y formales para desarrollar nuevos enfoques y estrategias para abordar situaciones nuevas. Los alumnos en este nivel pueden reflexionar sobre sus acciones y formular y comunicar con precisión sus acciones y reflexiones relativas a sus descubrimientos, interpretaciones, argumentos y adecuación a situaciones originales.
5	En el nivel 5, los alumnos pueden desarrollar modelos y trabajar con ellos en situaciones complejas, identificando las restricciones y especificando los supuestos. Pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias adecuadas de solución de problemas para abordar problemas complejos relativos a estos modelos. Los alumnos en este nivel pueden trabajar estratégicamente utilizando habilidades de pensamiento y razonamiento amplias y bien desarrolladas, así como representaciones adecuadamente relacionadas, caracterizaciones simbólicas y formales, e intuiciones relativas a estas situaciones. Los estudiantes de este nivel han comenzado a desarrollar la capacidad de reflexionar sobre su trabajo y de comunicar conclusiones e interpretaciones en forma escrita.
4	En el nivel 4, los alumnos pueden trabajar con eficacia con modelos explícitos en situaciones complejas y concretas que pueden conllevar restricciones o exigir la formulación de supuestos. Pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluidas las simbólicas, asociándolas directamente a situaciones del mundo real. Los alumnos de este nivel pueden utilizar su gama de habilidades y razonar con cierta perspicacia en contextos sencillos. Pueden elaborar y comunicar

	explicaciones y argumentos basados en sus interpretaciones, argumentos y acciones.
3	En el nivel 3, los alumnos saben ejecutar procedimientos descritos con claridad, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciales**. Sus interpretaciones son lo suficientemente sólidas como para ser la base para construir un modelo simple o para seleccionar y aplicar estrategias simples de resolución de problemas**. Los alumnos de este nivel saben interpretar y utilizar representaciones basadas en diferentes fuentes de información y razonar directamente a partir de ellas. Estos alumnos muestran cierta capacidad para manejar porcentajes, fracciones y números decimales, y para trabajar con relaciones proporcionales. Sus soluciones muestran que son capaces de exponer una interpretación y un tipo de razonamiento básicos.
2	En el nivel 2, los alumnos saben interpretar y reconocer situaciones en contextos que solo requieren una inferencia directa. Saben extraer información pertinente de una sola fuente y hacer uso de un único modo de representación. **Los alumnos de este nivel pueden utilizar algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones elementales para resolver problemas relacionados con números enteros**. Son capaces de efectuar razonamientos directos e interpretaciones literales de los resultados.
1	En el nivel 1, los alumnos saben responder a preguntas relacionadas con contextos que les son conocidos, en los que está presente toda la información pertinente y las preguntas están claramente definidas. **Son capaces de identificar la información y llevar a cabo procedimientos rutinarios siguiendo unas instrucciones directas en situaciones explícitas.** Asimismo, pueden realizar acciones que son casi siempre obvias y que se deducen inmediatamente de los estímulos presentados.

Anexo 2: Características de las tareas matemáticas asociadas a cada nivel de demanda cognitiva

	Criterios para determinar el nivel de demanda cognitiva de una tarea matemática		
Niveles de demanda cognitiva	**Nivel de comprensión del conocimiento matemático a partir de la estrategia requerida para desarrollar la tarea**	**El grado de conexión de la tarea con los conceptos subyacentes y/o procedimientos usados para resolverla.**	**Nivel de esfuerzo cognitivo a partir de la cantidad de información dada para realizar la tarea.**
Memorización	Implica tanto reproducir aprendizajes previos sobre hechos, reglas, formulas o definiciones como memorizar hechos, reglas, formulas o definiciones. No pueden ser resueltas usando procedimientos ya sea porque no hay procedimiento o porque el tiempo destinado para resolver la tarea es demasiado corto como para usar un procedimiento.	No hay conexión a los conceptos o significados subyacentes de los hechos, reglas, formulas o definiciones que se han aprendido o reproducido.	No son ambiguas. Tales tareas implican la reproducción exacta de material visto previamente, y lo que se reproduce es establecido clara y directamente.
Procedimientos sin conexión	Son algoritmos. El uso del procedimiento esta específicamente intencionado o bien es evidente según la enseñanza anterior, las experiencias o el planteamiento de la tarea.	No tiene conexión con los conceptos o significados subyacentes de los procedimientos que están siendo usados.	Requiere una baja demanda cognitiva para el logro satisfactorio de la tarea. Existe poca ambigüedad sobre qué se necesita hacer y cómo hacerlo.

	No requiere explicaciones o éstas solo se enfocan en describir el procedimiento que se usó. Están enfocadas en producir respuestas correctas en vez de desarrollar comprensiones matemáticas.		
Procedimientos con conexión	La atención de los estudiantes se centra en el uso de procedimientos con el propósito de desarrollar niveles profundos de comprensión de los conceptos e ideas matemáticas.	Sugieren explícita o implícitamente caminos a seguir que son procedimientos amplios y generales que tienen conexiones cercanas con los conceptos e ideas subyacentes, en oposición a los algoritmos cerrados que son opacos respecto a los conceptos subyacentes. Usualmente están representados de múltiples maneras, tales como diagramas visuales, objetos concretos, símbolos, y situaciones problema. Hacer conexiones entre múltiples representaciones ayuda a desarrollar el significado.	Requiere algún grado de esfuerzo cognitivo. Aunque se puede seguir un procedimiento general, no pueden seguirse sin pensar. Los estudiantes necesitan involucrarse con ideas conceptuales subyacen a los procedimientos para completar la tarea satisfactoriamente y así desarrollar la comprensión.
Hacer matemáticas	Requiere un pensamiento complejo y no algorítmico –un acercamiento predecible, bien	Requiere que los estudiantes exploren y comprendan la naturaleza de los conceptos,	Requieren considerable esfuerzo cognitivo y puede implicar algún nivel de ansiedad para los

	conocido no es sugerido explícitamente por las tareas, las instrucciones o un ejemplo. Requiere que los estudiantes analicen la tarea y examinen activamente las restricciones de la misma que pudieran limitar las soluciones o las estrategias de solución.	procesos y relaciones matemáticas. Requiere que los estudiantes accedan a conocimientos y experiencias relevantes y que hagan uso de ellas al trabajar en la tarea.	estudiantes dada la naturaleza impredecible que se requiere en el proceso de solución. Demandan automonitoreo o autorregulación de los propios procesos cognitivos.