PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

# REVENUE MANAGEMENT PARA LA VENTA DE PRODUCTOS A CRÉDITO

**DAVID WURMAN VENTURA**

Tesis presentada a la Dirección de Investigación y Postgrado
como parte de los requisitos para optar al grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Profesor Supervisor:
JUAN CARLOS FERRER O.

Santiago de Chile, Marzo 2011

© MMXI, DAVID WURMAN VENTURA

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

# REVENUE MANAGEMENT PARA LA VENTA DE PRODUCTOS A CRÉDITO

**DAVID WURMAN VENTURA**

Miembros del Comité:
JUAN CARLOS FERRER O.
JORGE RAFAEL VERA A.
MARCOS SINGER G.
JUAN ENRIQUE COEYMANS A.

Tesis presentada a la Dirección de Investigación y Postgrado
como parte de los requisitos para optar al grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Santiago de Chile, Marzo 2011

© MMXI, DAVID WURMAN VENTURA

*A mi padre*

**AGRADECIMIENTOS**

Especiales agradecimientos a Alvaro Alarcón por su colaboración en identificar problemáticas en la industria del *retail* y a Christian Uauy por su ayuda en el desarrollo matemático.

# Índice general

AGRADECIMIENTOS . . . . . IV

Índice de figuras . . . . . VI

Índice de cuadros . . . . . VII

RESUMEN . . . . . VIII

ABSTRACT . . . . . IX

Capítulo 1. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN . . . . . 1

Capítulo 2. INTRODUCCIÓN . . . . . 3

2.1. Motivación . . . . . 3

2.2. La Venta a Crédito es Diferente . . . . . 3

2.3. Revisión de la Literatura . . . . . 4

Capítulo 3. EL MODELO DE CRÉDITO . . . . . 9

3.1. Supuestos y Aspectos Generales . . . . . 9

3.2. Forma Matemática . . . . . 11

3.3. Proposiciones y Condiciones de Primer Orden . . . . . 13

3.4. Ejemplos Numéricos . . . . . 16

Capítulo 4. SIMULACIÓN Y RESULTADOS . . . . . 18

4.1. Modelo con Crédito Vs. Modelo Base . . . . . 18

4.2. Análisis sobre las Variables de Crédito . . . . . 22

4.3. Efectos Cruzados entre Políticas de Crédito y Pricing . . . . . 25

Capítulo 5. CONCLUSIONES Y FUTURAS INVESTIGACIONES . . . . . 27

## Índice de figuras

3.1.Trayectoria óptima para inventario inicial igual a 10 . . . . . 17

3.2.Trayectoria óptima para inventario inicial igual a 60 . . . . . 17

4.1.Precio Inicial, Límite de Crédito y Utilidad Esperada . . . . . 23

4.2.Utilidades en función de la tasa de interés . . . . . 26

## Índice de cuadros

4.1.Modelo Crédito vs Modelo Base controlando por inventario . . . . . 21

4.2.Modelo Crédito vs Modelo Base controlando por saturación . . . . . 22

4.3.Modelo con Crédito en función de $r_c$ y $r_l$ . . . . . 24

## RESUMEN

Este artículo estudia los cambios en las políticas óptimas de precio y límite de crédito al vender productos de temporada a consumidores que utilizan el crédito como medio de pago y el retailer financia la operación. Desarrollamos un modelo continuo de programación dinámica que optimiza, de manera conjunta, las políticas de precios y límites de crédito. La demanda es modelada como un proceso de dos etapas, para cada potencial cliente analizamos su crédito disponible y la capacidad de pago mensual para determinar si la venta es exitosa o no. Incorporamos el riesgo utilizando análisis de supervivencia. Caracterizamos las políticas óptimas y la relación entre ellas en función del tiempo e inventario remanente. Las simulaciones muestran que la pérdida observada cuando se utiliza una política de límite de crédito fija es pequeña gracias a la política dinámica de precio que compensa los cambios no realizados en el límite de crédito. Mostramos que cuando el límite de crédito fijo utilizado no es óptimo las pérdidas son considerables y utilizar nuestro modelo de crédito para determinar el cupo óptimo ayuda a minimizar las pérdidas. Nuestro análisis muestra que para clientes con mayor restricción de liquidez, el límite de crédito óptimo tiende a ser más alto y el precio inicial más bajo. Nuestro análisis sobre el impacto de las variables de crédito en las estrategias de precio mostró que el plazo de la deuda y la tasa de interés tienen un efecto importante y que el precio inicial óptimo es una función decreciente en estas variables. Finalmente estudiamos la situación en que las estrategias de crédito no son incluidas en las políticas de precio, un escenario común en los retailers actualmente, mostrando que las pérdidas generadas por esta práctica son relevantes y debiese ser evaluada.



**Palabras Claves:** pricing, límite de crédito, riesgo, revenue management, retail

## ABSTRACT

This work presents the changes of optimal pricing and credit policies used by retailers when selling and financing seasonal products to consumers who use credit as payment method. In this paper we develop a continuous dynamic programming model that optimizes, jointly, the pricing and credit limit policies. The demand is modeled as a two-step process: for each potential consumer we analyze the available credit and the monthly payment capacity to determine if the transaction is achieved or not. Credit risk is incorporated to the model using survival analysis. We characterize the optimal policies, and the relation between them, as a function of the remaining time and inventory. The simulations show that the loss experienced when using fixed credit policies is small thanks to the dynamic pricing policy that compensates for credit changes needed. We demonstrate that when the fixed credit limit is not optimal, the loss is significant, and the use of our credit model to determine the optimal credit limit helps minimizing the loss. We show that for more liquidity constrained consumers, optimal credit limit tends to be higher and the initial price lower. Our analysis over the impact of the credit variables on the pricing strategies reveals that the length of the loan and the interest rate have an important effect and the initial optimal price is a decreasing function of these variables. Finally, we study the situation when credit strategies are not included in pricing policies, a common scenario in today's retailers, showing that the loss generated by this practice is relevant and should be evaluated.



**Keywords:** pricing, credit limit, credit risk, revenue management, retail.

# Capítulo 1. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Esta tesis estudia el problema que enfrenta un vendedor al definir políticas de precios y crédito para la venta de productos de temporada, considerando que estos se venderán a crédito y él financiará la operación. El *retailer* se enfrenta a un problema complejo ya que no cuenta con las herramientas para analizar, en forma conjunta, el distinto impacto que tienen sus decisiones de crédito y la venta al contado. Frente a esto, maneja ambas operaciones por separado generando diversos conflictos de interés entre ambas áreas mientras la responsabilidad de los resultados se diluye.

La investigación consiste en crear un modelo que permita definir políticas de precio óptimas, así como el limite de crédito óptimo a asignar, para la venta de productos de temporada en un horizonte de tiempo definido, considerando que estas ventas se realizarán a crédito y serán financiadas por el vendedor.

El modelo debe considerar las diferencias que implica la venta a crédito, entre ellas las más importantes son:

- Cuando un individuo compra a crédito es sensible a la cuota mensual a pagar, la cual, depende del precio, número de cuotas y tasa de interés.
- Al vender un producto a crédito existe un riesgo de no pago, o pago parcial, dado por la probabilidad de que el individuo no cumpla los pagos pactados en el crédito, esto afecta directamente la función de utilidad a maximizar.
- Un cliente a crédito realiza una compra sólo si tiene cupo disponible en su línea, luego, el nivel de saturación de las líneas y el límite de crédito asignado alterarán la demanda.

No se considerará el proceso de captación y filtro de clientes a crédito, es decir, el modelo asumirá que todos los clientes que arriben a la tienda habrán sido previamente evaluados y tendrán acceso a crédito.

La investigación deberá determinar las condiciones de primer orden y las características de la solución óptima del nuevo modelo, compararlas con el modelo que no considera la venta a crédito y determinar el impacto que significa ofrecer este medio de pago.

Por último, se espera realizar experimentos que permitan observar el comportamiento del modelo en diferentes escenarios, así como la relevancia de las variables de crédito y las posibles pérdidas derivadas de no considerar, en forma conjunta, las estrategias de crédito y de precio.

# Capítulo 2. INTRODUCCIÓN

## 2.1. Motivación

Durante las últimas tres décadas la industria del *retail* ha tenido un crecimiento sostenido donde la globalización y la internet han contribuido en mantener esta tendencia. Uno de los cambios más relevantes fue la introducción de los créditos de consumo y la masificación de las tarjetas de crédito, permitiendo que los clientes accedieran a más bienes aumentando su consumo. Desde la aparición de la tarjeta de crédito en la década del 50, el crédito como medio de pago ha tomado gran importancia. Hacia el año 2007 el 18 % de la deuda total de los consumidores en USA correspondía a créditos de consumo. L. C. Thomas (2009) afirma: .*Ahora al comenzo del siglo 21 el crédito de consumo es la fuerza impulsora detrás de las economías de los paises líderes en desarrollo industria.*"

En una industria tan competitiva y dinámica como el *retail*, las firmas buscan técnicas que les permitan tomar mejores decisiones y mantenerse vigentes en el mercado. Desde la década de los 90 diferentes modelos de *revenue management*, específicos a la industria del *retail*, han contribuido en esta materia (Elmaghraby y Keskinocak, 2003). Especialmente en el *retail*, las políticas de precio son muy relevantes y han demostrado ser una herramienta eficaz para controlar la demanda y hacer frente a las estrategias de la competencia.

Pese a la importancia que ha tomado el crédito de consumo en el *retail*, la literatura de *revenue management* y *pricing* no ha considerado este medio de pago desde una perspectiva de investigación operacional. El objetivo principal de esta investigación es crear un modelo que permita considerar, conjuntamente, decisiones operacionales y el diseño de la política de crédito, para dar los primeros pasos en la inclusión de las variables de crédito en modelos de *revenue management*.

## 2.2. La Venta a Crédito es Diferente

En esta tesis estudiamos políticas de precio y crédito óptimas para la venta de productos de temporada, donde las ventas son realizadas utilizando el crédito como medio de

pago. Modelamos la situación en la que una tienda de *retail* debe vender un inventario dado en un tiempo definido. La compañía cuenta con una cartera de clientes a crédito a los cuales ofrece financiar sus compras. Al ser la compañía la emisora del crédito, tiene completo control sobre las condiciones que aplicará al pactar el financiamiento con el cliente y deberá asumir el riesgo de dicha operación.

El crédito en el *retail* como mecanismo de pago tiene tres impactos importantes:

1. El consumidor no debe desembolsar el valor total del producto al momento de adquirirlo, en cambio, puede realizar el pago en forma de cuotas a través del tiempo lo que podría cambiar su sensibilidad frente al precio.
2. El vendedor podría no adquirir el total del valor del producto debido al riesgo existente de que el consumidor no realice el pago de las cuotas pactadas.
3. Para poder realizar la compra a crédito, el cliente debe tener cupo disponible en su línea de crédito, lo que altera la demanda.

Las diferencias que introduce el crédito en la forma en que se realiza la venta son, en sí, un problema para los modelos de *pricing* existentes. Cambios en las políticas de crédito como, por ejemplo, disminuir el *score* mínimo para acceder al financiamiento, tendrán un efecto importante en el nivel de la demanda observada. Los modelos actuales de *pricing* no reaccionan a estos cambios.

## 2.3. Revisión de la Literatura

En sus inicios, el estudio sobre crédito centró su atención en las decisiones relevantes que se deben tomar en un negocio de estas características. La principal decisión consiste en determinar si una persona es financiable o no. Esto dio paso a una amplia área de investigación denominada *credit scoring* (para una completa revisión de los avances en esta materia ver L. Thomas (2000)). El dilema sobre la confiabilidad de un potencial cliente dio paso a preguntas como: ¿qué ofrecer a cada cliente? o ¿a quién enviar publicidad? La rentabilidad

de cada cliente es hoy un factor relevante para la gestión del negocio, de esta forma, los estudios sobre *credit scoring* dieron paso a *profit scoring* (L. C. Thomas, 2009).

Últimamente se han desarrollado nuevos modelos que juntan conocimientos de diferentes áreas. Por ejemplo, Narain (1992) utiliza el Análisis de Supervivencia, técnica originalmente creada para evaluar tratamientos médicos, al modelar el tiempo transcurrido hasta el default de un cliente. Otros estudios se han realizado para analizar la frecuencia de compra y el tiempo hasta default (Andreeva, Ansell, y Crook, 2007; Banasik, Crook, y Thomas, 1999).

Todo modelo de *revenue management* está basado en la estimación de la demanda (Bitran y Caldentey, 2003); en la literatura de modelos de *pricing* aplicados al *retail* encontramos, fundamentalmente, dos enfoques diferentes. El primero, y tal vez el más directo, es el utilizado por Gallego y Ryzin (1994) donde la demanda es una función directa del precio y es modelada mediante un proceso de llegada *Poisson* cuya tasa depende de éste. Otro enfoque es el desarrollado por Bitran y Mondschein (1997), donde realizan un análisis más complejo sobre la generación de una venta. La demanda es modelada mediante un proceso de dos fases. La primera es un proceso *Poisson* que refleja la llegada de potenciales clientes cuya tasa no depende del precio si no de otros factores propios de la conducta de los consumidores. Luego, en la segunda fase, la decisión de compra es tomada en base al precio del producto y la disposición a pagar del potencial cliente. Debido a que el crédito puede tener un efecto relevante sobre la demanda, el enfoque de dos fases es apropiado para este estudio ya que permite introducir la forma de financiamiento en la decisión de compra.

Para modelar el comportamiento de los consumidores a crédito necesitamos entender qué es lo que motiva el uso de este medio de pago. Los estudios existentes en la literatura de crédito analizan el problema desde un enfoque macroeconómico y pueden ser agrupados en dos hipótesis importantes.

La primera, desarrollada por Ando y Modigliani (1963) se basa en la teoría del Ingreso Permanente (PIH) (Friedman, 1957). En ella los autores desarrollan un modelo para

establecer el consumo de un individuo durante su vida maximizando una función de utilidad. Los recursos disponibles en cada periodo están dados por los ingresos del periodo, los ahorros de periodos anteriores y los ingresos futuros en la forma de crédito. El modelo muestra que para maximizar su utilidad, los individuos buscan nivelar su consumo a través del tiempo, ahorrando en los periodos de mayor ingreso y endeudándose en aquéllos de bajo ingreso, mostrando así la importancia del crédito y justificando su uso como un acto racional.

La segunda hipótesis establece que el uso del crédito es, más que a un acto racional, una respuesta a la restricción de liquidez de los individuos. Soman y Cheema (2002) postulan que las personas no cuentan con la capacidad cognitiva para utilizar de manera inteligente el crédito. Los autores estudian el impacto que tiene el límite de crédito, o cupo, en el nivel de endeudamiento. El límite de crédito es la cantidad máxima de dinero que los clientes pueden utilizar para comprar a crédito y es fijado por el emisor del mismo. A través de una serie de estudios, Soman y Cheema (2002) muestran que un aumento en el límite de crédito genera un aumento en el consumo de crédito debido al uso de éste como un predictor de ingresos futuros. El estudio comprueba que el impacto está condicionado a la credibilidad que se le asigna al límite como predictor y que esta credibilidad disminuye a medida que el cliente gana experiencia en el uso de este medio de pago. Andrade y Thomas (2007) también encuentran una relación entre el límite y la deuda adquirida y agregan que un aumento en éste genera un aumento en la felicidad de las personas ya que les otorga más libertad de acción, incluso cuando tienen crédito disponible.

En cuanto al impacto de la tasa de interés en el uso del crédito encontramos evidencia contradictoria. Gross y Souleles (2002) analizan la relación entre la tasa de interés y el uso del crédito. Los autores concluyen que un aumento en la tasa de interés genera una disminución en la deuda adquirida. Por otro lado, Crook (1989) encuentra evidencia contraria. Los autores construyen un modelo para estimar la demanda agregada de crédito y realizan pruebas sobre una base de datos real. El estudio concluye que la tasa de interés no tiene un impacto en la deuda agregada y que ésta responde a otras variables como el ingreso y las expectativas económicas.

La hipótesis de restricción de liquidez se ajusta más al escenario que se estudia en este artículo. Un análisis realizado sobre una base de datos de ventas a crédito a la que se tuvo acceso durante la investigación fue consistente con este comportamiento. Se utilizó dicho análisis para apoyar la modelación del comportamiento de los clientes a crédito complementando la revisión de la literatura.

A lo largo del tiempo el estudio de *pricing* asociado al *retail* ha incluido diversas mejoras, las que apuntan a solucionar una serie de problemáticas que presenta la venta de productos de temporada. Zhao y Zheng (2000) introducen la posibilidad de que los precios de reserva cambien en el tiempo, una situación que es común en la práctica, donde la moda lleva a que la valoración de los productos disminuya hacia el final de la temporada. Los autores concluyen que los cambios en el precio de reserva aumentan el beneficio de implementar políticas de precio dinámicas. Smith y Achabal (1998) estudian políticas óptimas de precio en el periodo de liquidación al final de la temporada. Ellos incluyen el impacto que tiene el bajo inventario en la demanda, determinando que la política óptima de precios depende del nivel de inventario inicial.

Elmaghraby y Keskinocak (2003) presentan una clasificación global de los modelos de *pricing* existentes dependiendo de las políticas de inventario, características de la demanda y la estrategia seguida por los consumidores. Los autores definen 3 categorías:

1. Con Reposición / Sin Reposición (R/NR). Dependiendo si es, o no, posible recargar el inventario durante el horizonte de venta.
2. Demanda Dependiente / Demanda Independiente (D/I). En el caso de productos durables, la demanda de un periodo puede depender de la demanda observada en el periodo anterior.
3. Consumidores Miopes / Consumidores Estratégicos (M/S). Los modelos que suponen consumidores miopes consideran que estos realizan la compra inmediatamente cuando el precio esta por debajo de su precio de reserva, los consumidores estratégicos, por otro lado, podrían no comprar esperando que los precios bajen

aun más, basando su decisión en políticas de precios observadas en periodos anteriores.

En el marco de esta investigación, se considera un modelo NR-I-M, es decir, consumidores miopes, inventario sin reposición y una demanda independiente.

El resto de este documento se organiza de la siguiente forma. En la §3 introducimos el modelo continuo desarrollado, caracterizamos la solución óptima y derivamos las condiciones de primer orden. La §4 presenta las simulaciones realizadas y los resultados de los experimentos. Finalmente, en la §5 presentamos las conclusiones de la investigación y las extensiones a la misma.

# Capítulo 3. EL MODELO DE CRÉDITO

## 3.1. Supuestos y Aspectos Generales

En esta tesis estudiamos las ventas de un producto no durable y de temporada, en un horizonte de tiempo finito, donde el cliente realiza la compra utilizando el crédito como medio de pago y el *retailer* es el encargado de financiar la operación. Este tipo de compañías es común en latinoamérica donde los clientes usualmente tienen fuertes restricciones de liquidez. Nuestro objetivo es estudiar la interacción existente entre variables de *pricing* y de crédito y las características de una política óptima que considere ambas simultáneamente.

Para esto utilizamos un modelo de tiempo continuo que permite optimizar de forma conjunta las políticas del límite de crédito asignado a los clientes y el precio del producto. Asumimos que el arribo de potenciales clientes a la tienda es descrito mediante un proceso *Poisson*.

En base a los estudios analizados sobre conducta del consumidor que compra a crédito (Soman y Cheema, 2002), los potenciales consumidores se caracterizan por tener fuertes restricciones de liquidez. Así, al momento de comprar tomarán su decisión basándose en la cuota mensual a pagar por el producto más que en su precio. Debido a que existe una relación directa entre la mensualidad pactada al comprarlo a crédito y el precio de un producto, este supuesto es similar al usado por Bitran y Mondschein (1997) en el sentido de que la decisión de compra será, finalmente, dependiente del precio. Esta suposición también permite relacionar la compra con otras variables como el número de cuotas y la tasa de interés que también definen la mensualidad. La capacidad de pago mensual de cada cliente no es conocida con exactitud por el vendedor, por lo tanto es modelada mediante una distribución de probabilidad. Un aumento en el precio resultará en un incremento en el ingreso percibido por el vendedor pero, al mismo tiempo, una fracción de clientes desistirán de comprar el producto debido al aumento en la mensualidad.

Utilizando una base de datos de ventas a crédito, a la que se tuvo acceso durante la investigación, se analizó el comportamiento de los clientes en el uso de su línea de crédito.

Se observó que al momento de realizar las compras los clientes mantenían un bajo nivel de ocupación en sus líneas. Lo anterior es consistente con lo observado por Soman y Cheema (2002) y Andrade y Thomas (2007), mostrando el rol que juega el límite de crédito en el comportamiento del consumidor. En nuestro modelo incluimos este segundo factor en la decisión de compra. Así, un consumidor deberá tener una disponibilidad mayor que el precio de un producto en su línea de crédito para poder comprarlo. Al igual que con la capacidad de pago mensual, el vendedor no conoce el porcentaje de disponibilidad que tiene un cliente al momento de comprar. Por lo tanto, también será modelado mediante una distribución de probabilidad. De esta forma tanto el precio del producto como el límite de crédito asignado tendrán un impacto en que el estado de cuenta del cliente le permita realizar la compra. Una disminución en el precio del producto requerirá un menor porcentaje disponible en línea de crédito, lo que aumentará la probabilidad de compra, mientras que un aumento en el precio tendrá el efecto contrario. Por otro lado, un aumento en el límite de crédito asignado aumentará el cupo disponible y con él la probabilidad de compra, mientras que una disminución del límite asignado tendrá el efecto contrario.

Otro aspecto relevante de la venta a crédito es que, al momento de vender, el vendedor recibirá una serie de pagos a través del tiempo en vez de un solo pago por el valor total del producto, como sucede en la venta al contado. Luego, el ingreso puede ser visto como el valor presente de los pagos futuros pactados, determinado por el numero de cuotas, el valor de la cuota, la tasa de interés cobrada y el costo de capital de quien financia el préstamo.

En cada préstamo existe un riesgo de que el cliente deje de pagar la mensualidad, resultando en un menor valor percibido por el vendedor. Utilizando el enfoque de análisis de supervivencia, calculamos el tiempo de vida medio de un crédito y construimos una función de probabilidad para calcular el valor esperado del valor presente de los flujos pactados, considerando así el riesgo asociado a la venta.

Intuitivamente sabemos que un aumento arbitrario en el límite de crédito asignado tiene un costo para quien financia el préstamo. Esto se debe a que el ingreso del cliente, presente o futuro, se mantiene constante y con ello, su capacidad de pago. Si un cliente utiliza

el nuevo crédito disponible y aumenta su mensualidad a pagar manteniendo su ingreso, la probabilidad de que no sea capaz de cumplir con los pagos aumenta, especialmente si presenta una importante restricción de liquidez. Por esta razón, el tiempo medio de vida de un crédito decrecerá al aumentar el límite de crédito, generando un costo para el vendedor por concepto de no pago.

El costo de capital y la tasa de interés cobrada serán tomadas como parámetros del sistema y no se optimizará en base a ellas. Esto se debe a que el primero no depende del *retailer* si no que de los bancos que financian la empresa, y el segundo ha mostrado tener poco impacto en la decisión de compra del cliente (Gross y Souleles, 2002). El número de cuotas pactadas también será considerado como una variable del sistema, debido a que en general es una decisión del cliente. En la §4 analizaremos el comportamiento del modelo sobre esta variable.

### 3.2. Forma Matemática

En esta investigación utilizamos programación dinámica para modelar la venta de los productos a través del tiempo, donde en cada periodo el vendedor debe decidir el precio y límite de crédito óptimos que maximicen el ingreso esperado durante el horizonte de planificación. La cantidad de productos se considerará fija y conocida al inicio de la temporada y por ende, el costo de ellos no será considerado. Este supuesto es muy común en la industria de *retail* y en la literatura, especialmente en productos de temporada (Bitran y Caldentey, 2003).

A continuación presentamos la notación utilizada en esta investigación:

$\lambda_t =$ tasa de llegada de clientes en el tiempo $t$.

$p =$ precio del producto.

$\rho =$ límite de crédito asignado a los clientes.

$Q =$ inventario total al inicio del horizonte de planificación.

$r_l =$ tasa de interés cobrada por el crédito.

$r_c =$ costo de capital para el emisor del crédito.

$n =$ número de cuotas pactadas.

$C(p|r_l, n) =$ mensualidad a pagar por el comprador.

$F_p(x) =$ función de distribución acumulada para la capacidad de pago mensual.

$F_c(x) =$ función de distribución acumulada para el porcentaje de ocupación de la línea de crédito.

Definimos $EPV(p, \rho)$ como el valor esperado del valor presente de los pagos mensuales pactados al momento de la compra, es decir, el ingreso esperado percibido por el vendedor. Para un análisis matemático de esta función ver anexo A.1.

En el modelo consideramos que tanto el precio como el límite de crédito pueden ser ajustados continuamente en el tiempo. Por lo tanto, el tiempo es dividido en intervalos suficientemente pequeños para que a lo más la llegada de un cliente sea observada.

Definimos la función $V_t(q)$ como el máximo beneficio esperado si el *retailer* cuenta con $q$ unidades al comienzo del intervalo $t$. El índice de tiempo $t$ transcurre en forma inversa de tal forma que $t = 0$ marca el fin del horizonte de planificación. El modelo matemático tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} V_t(q) = \max_{p\geq 0, \rho \geq 0} \{ & m_t F_c(1 - p/\rho)\big(1 - F_p(C(p))\big)\big(EPV(p, \rho) + V_{t-1}(q-1)\big) \\ & + \Big(1 - m_t F_c(1 - p/\rho)\big(1 - F_p(C(p))\big)\Big) V_{t-1}(q)\}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\text{donde } m_t = \int_{\tau=t}^{t+\Delta t} \lambda_\tau \mathrm{d}\tau,$$

con las siguientes condiciones de borde:

$$V_t(0) = 0 \ \ \forall t \ \text{, y}$$

$$V_0(q) = 0 \ \ \forall q \ .$$

### 3.3. Proposiciones y Condiciones de Primer Orden

La estructura del modelo es la utilizada en Bitran y Mondschein (1997), por lo tanto, las características de la política de precios óptima derivadas en ese caso también se cumplen aquí: (1) Para un periodo de tiempo y un límite de crédito dados, el precio óptimo es una función no creciente en el inventario, y (2) para un inventario y límite de crédito dados, el precio óptimo es no creciente en el tiempo. Las demostraciones son análogas a las encontradas en Bitran y Mondschein (1993). Es importante señalar que estas proposiciones se cumplen para un límite de crédito dado, a diferencia del modelo de Bitran y Mondschein (1997) que no incluye esta variable. A continuación derivamos las proposiciones que caracterizan la política óptima del límite de crédito:

PROPOSICIÓN 3.1. *Para un precio y periodo de tiempo dados, el límite de crédito óptimo es una función creciente en el inventario.*

$$\rho_{t,p,q} \leq \rho_{t,p,q+1} \quad \forall t, p, q.$$

DEMOSTRACIÓN 3.1. *Ver Anexo A.2.1.*

PROPOSICIÓN 3.2. *Para un precio y un nivel de inventario dados, el límite de crédito óptimo es una función creciente en el tiempo.*

$$\rho_{t,p,q} \leq \rho_{t-1,p,q} \quad \forall t, p, q.$$

DEMOSTRACIÓN 3.2. *Ver Anexo A.2.2.*

Combinando estas proposiciones con las derivadas en Bitran y Mondschein (1997) concluimos las siguientes proposiciones:

PROPOSICIÓN 3.3. *Para un nivel de inventario dado, la proporción entre el precio del producto y el límite de crédito asignado es una función no creciente en el tiempo.*

$$\frac{p_{t,q}}{\rho_{t,q}} \geq \frac{p_{t-1,q}}{\rho_{t-1,q}} \quad \forall t, q.$$

DEMOSTRACIÓN 3.3. *Ver Anexo A.2.3.*

PROPOSICIÓN 3.4. *Para un periodo de tiempo dado, la proporción entre el precio del producto y el límite de crédito asignado es una función no creciente en el inventario.*

$$\frac{p_{t,q}}{\rho_{t,q}} \geq \frac{p_{t,q+1}}{\rho_{t,q+1}} \quad \forall t, q.$$

DEMOSTRACIÓN 3.4. *Ver Anexo A.2.4.*

Estas últimas dos proposiciones nos entregan información interesante. Para un instante de tiempo dado, mientras mayor sea el inventario disponible, menor deberá ser la proporción óptima entre el precio y el límite de crédito. Esto se debe a que en nuestro modelo existen dos mecanismos para influir en la demanda, el límite de crédito y el precio, los cuales tienen efectos contrarios. Por lo tanto, disminuir la razón entre ambos generará un aumento en la demanda. De la misma forma, para un nivel de inventario dado, mientras menor sea el tiempo disponible para la venta, menor deberá ser la proporción entre el precio y el límite de crédito. Observamos que en nuestro modelo las políticas óptimas de precio y límite de crédito podrán ser crecientes o decrecientes, esto ya que el modelo optimiza en ambas variables de manera conjunta.

A continuación derivamos las condiciones de primer orden para el modelo presentado anteriormente. Para que el precio y el límite de crédito sean óptimos, el vendedor no debe tener incentivos para modificarlos. Si disminuimos $\rho$ en $\mathrm{d}\rho$ observamos una pérdida en la utilidad esperada al disminuir la probabilidad de compra, ya que una fracción de clientes no tendrá suficiente crédito disponible para comprar. La pérdida esperada esta dada por la fracción de clientes que no comprará multiplicada por el ingreso obtenido de la venta:

$$\frac{f_c(1-p/\rho)\big[1-F_p(C(p))\big]p}{\rho^2}(EPV(p,\rho)-(V_{t-1}(q)-V_{t-1}(q-1)))\mathrm{d}\rho. \tag{3.2}$$

Por otro lado, observamos una ganancia derivada de la disminución del riesgo en el pago del crédito, siempre y cuando el cliente compre el producto:

$$\frac{\partial EPV(p,\rho)}{\partial \rho}F_c(1-p/\rho)\big(1-F_p(C(p))\big)\mathrm{d}\rho. \tag{3.3}$$

Para el precio realizamos un análisis similar, al aumentar el precio observamos una pérdida dada por la disminución en la probabilidad de compra, tanto por el aumento en la cuota mensual como por una mayor disponibilidad de crédito requerida. La pérdida esta dada por la siguiente ecuación:

$$\Big[-\frac{f_c(1-p/\rho)\big[1-F_p(C(p))\big]}{\rho} - F_c(1-p/\rho)F_p(C(p))\frac{\partial C(p)}{\partial p}\Big] \\ \big(EPV(p,\rho) - (V_{t-1}(q) - V_{t-1}(q-1))\big). \quad (3.4)$$

Por otro lado, al aumentar $p$ en $\mathrm{d}p$ observamos una ganancia por la venta del producto a un mayor precio dada por:

$$F_c(1-p/\rho)\big(1-F_p(C(p))\big)\frac{\partial EPV(p,\rho)}{\partial p}\mathrm{d}p. \quad (3.5)$$

Estas ecuaciones también pueden obtenerse derivando parcialmente la función $V_t(q)$ con respecto a $p$ y $\rho$ (ver anexo A.2.1). Igualando (3.2) y (3.3), además de (3.5) y (3.4) podemos obtener la siguiente expresión:

$$\frac{\frac{\partial EPV(p,\rho)}{\partial p}}{\frac{\partial EPV(p,\rho)}{\partial \rho}} + \frac{\rho}{p} = \frac{\frac{F_c(1-p/\rho)}{f_c(1-p/\rho)\frac{p}{\rho^2}}}{-\frac{\big(1-F_p(C(p))\big)}{F_c(C(p))\frac{\partial C(p)}{\partial p}}}. \quad (3.6)$$

El término al lado derecho de (3.6) corresponde a la división entre las hazard functions $H_c(\rho)$ y $H_p(p)$ de las distribuciones de probabilidad $F_c(x)$ y $F_p(x)$ respectivamente. De esta forma presentamos la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 3.5. *Asumiendo que, tanto la capacidad de pago mensual como el porcentaje de crédito disponible al momento de la compra pueden ser descritas como funciones de distribución acumulada diferenciables sobre los reales positivos, las políticas de precio y límite de crédito óptimas deben cumplir la siguiente relación de primer orden:*

$$\frac{\frac{\partial EPV(p,\rho)}{\partial p}}{\frac{\partial EPV(p,\rho)}{\partial \rho}} + \frac{\rho}{p} = \frac{H_c(\rho)}{H_p(p)}. \quad (3.7)$$

DEMOSTRACIÓN 3.5. *Ver Anexo A.2.5.*

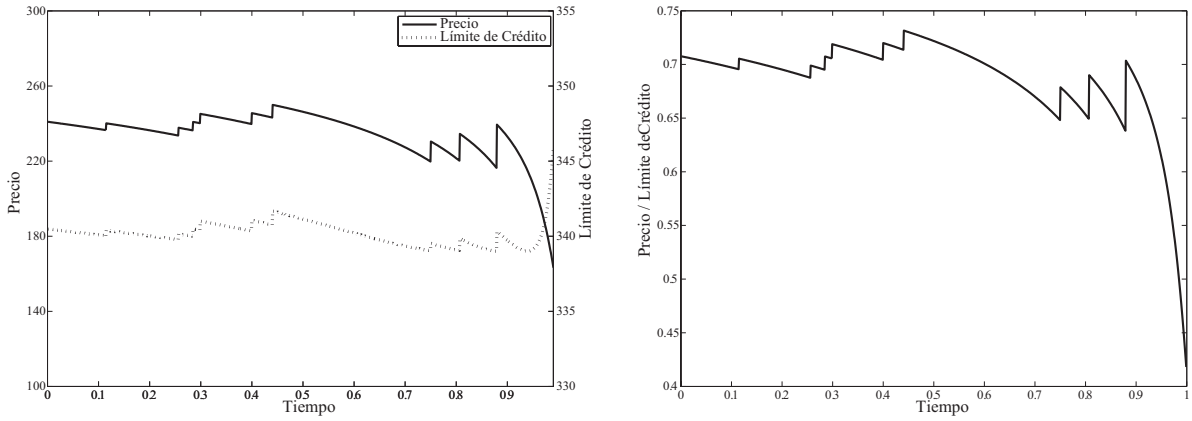
Observamos que la relación es independiente del intervalo de tiempo y del nivel de inventario.

### 3.4. Ejemplos Numéricos

A continuación presentamos un ejemplo numérico de las políticas de precio y límite de crédito óptimas. Utilizamos una función de distribución Weibull para modelar la capacidad de pago mensual de los clientes y un proceso *Poisson* para modelar la llegada de los clientes. Para el porcentaje de ocupación de la línea de crédito al momento de comprar, la función de distribución exponencial mostró un buen ajuste sobre los datos analizados. En este ejemplo utilizamos $\lambda_p = 66{,}79$ y $\alpha = 4$ para los parámetros de escala y forma de la distribución Weibull, respectivamente. En el caso de la función exponencial utilizamos $\lambda_c = 0{,}3$ como el porcentaje de ocupación esperado de la línea de crédito de los clientes y una tasa de llegada $\lambda = 70$ para el proceso *Poisson*. El resto de los parámetros configuran la función $EPV(p, \rho)$, y son:

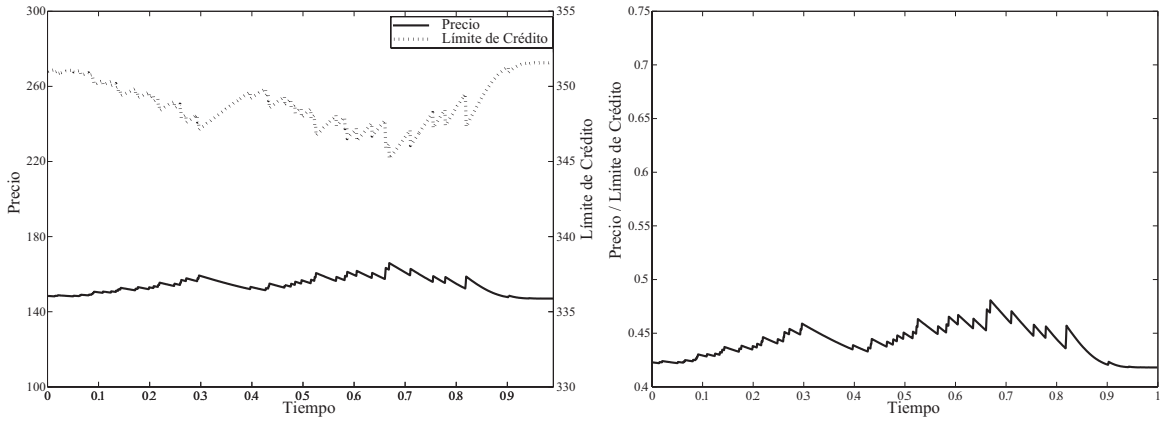
- $r_c = 0{,}04$, costo de capital.
- $r_l = 0{,}12$, tasa de interés.
- $n = 4{,}6$, valor esperado del número de cuotas pactadas.
- $a = 717{,}41$ and $b = -0{,}0091$, parámetros de la tasa de supervivencia de crédito $\lambda_s(\rho)$.

Analizamos el comportamiento del modelo para dos casos diferentes variando el inventario inicial. La Figura 3.1 muestra la política óptima para un inventario de 10 unidades y la Figura 3.2 para un inventario de 60 unidades. El gráfico de la izquierda muestra las trayectorias del precio y el límite de crédito óptimos, mientras que el gráfico de la derecha muestra la razón entre ambas políticas. Los saltos observados indican el instante en el que se genera una venta y las correcciones que sugiere el modelo para las variables de decisión. En el caso de 10 unidades de inventario inicial, la política óptima es decreciente en el tiempo sobre un inventario fijo tanto para el precio como para el límite de crédito. Para 60 unidades de inventario, la política de crédito es creciente (Figura 3.2). En ambos casos




*Elaboración propia*

FIGURA 3.1. Trayectoria óptima para inventario inicial igual a 10




*Elaboración propia*

FIGURA 3.2. Trayectoria óptima para inventario inicial igual a 60

la proporción entre el precio y el límite de crédito es decreciente en el tiempo. Para el caso de mayor inventario, observamos que tanto el límite de crédito como el precio varían en un rango menor en comparación al caso de inventario reducido, lo que es coherente con que las políticas óptimas tienden a ser invariantes en el tiempo para inventarios grandes, i.e., mayores a la demanda esperada (Bitran y Caldentey, 2003). Estos resultados son consecuentes con las proposiciones realizadas.

# Capítulo 4. SIMULACIÓN Y RESULTADOS

A continuación realizaremos una serie de simulaciones para observar el comportamiento del modelo planteado en la sección 3. Debido a que el modelo planteado no tiene solución simbólica, utilizamos métodos numéricos para encontrar las políticas óptimas de precio y límite de crédito.

Modelaremos la capacidad de pago mensual de los clientes mediante una distribución Weibull, siguiendo el análisis realizado por Bitran y Mondschein (1997) para el precio de reserva. El porcentaje disponible en la línea de crédito será modelado mediante una distribución exponencial. La razón de esto es que en el estudio realizado sobre la base de datos de venta a crédito, la función de distribución exponencial presentó un buen nivel de ajuste sobre los datos observados. Para modelar el riesgo asumiremos que el tiempo medio de vida de un crédito decrecerá exponencialmente al aumentar el límite de crédito asignado.

## 4.1. Modelo con Crédito Vs. Modelo Base

En primer lugar, queremos comparar el desempeño de nuestro modelo con el modelo base sin crédito presentado por Bitran y Mondschein (1997). Diseñamos un experimento que nos permita realizar una comparación justa, dejando en evidencia el origen del beneficio extra logrado por un modelo u otro. Con el objeto de explicar el experimento a realizar consideremos la siguiente situación hipotética.

Un *retailer* vende un producto entregando crédito a sus clientes para financiar dichas ventas y desea maximizar su utilidad utilizando algoritmos de *revenue management*. El vendedor aplica los modelos que queremos comparar y analiza los resultados. La investigación realizada en este artículo nos dice que el vendedor se enfrenta a una demanda de tres pasos: (1) la llegada a la tienda modelada mediante un proceso *Poisson* que, en este caso, es idéntico en ambos modelos; (2) la revisión de la disponibilidad de crédito del cliente; y (3) la disposición a pagar la mensualidad cobrada. Estos dos últimos pasos son modelados de diferente forma por ambos modelos.

Para aplicar el modelo de Bitran y Mondschein (1997) el *retailer* fija un límite de crédito y analiza la demanda experimentando con diferentes precios. Pese a que la demanda observada por el *retailer* es el resultado de un proceso de tres pasos, ajustará, siguiendo el modelo de Bitran y Mondschein (1997), solo un proceso Poisson y una distribución Weibull para representar la demanda observada. Asumimos que el vendedor cuenta con la información necesaria para realiza el mejor ajuste posible en ambos modelos, de tal forma que el resultado de nuestro análisis no se contamine por errores en este ámbito. El vendedor implementa el modelo y obtiene la política de precios óptima, en este caso el límite de crédito se mantiene fijo. Posteriormente, el vendedor utiliza el modelo con crédito para comparar resultados. En este caso, el *retailer* ajusta tres funciones de distribución para modelar la demanda, el arribo Poisson, la disponibilidad de crédito $Fc(1 - p/\rho)$ y la disposición a pagar $Fp(C(p))$. En este caso, el modelo determinará tanto la política óptima de precios como la del límite de crédito.

Realizamos esta comparación para distintos niveles de inventario inicial y analizamos los resultados modificando el límite de crédito fijo elegido por el vendedor cuando utiliza el modelo base. Aplicamos los mismos valores usados en el ejemplo numérico mostrado en la sección 3, los cuales representan un escenario normal de crédito consistente con lo que se desea evaluar en base a los datos de crédito analizados.

Los resultados de esta simulación se pueden observar en la Tabla 4.1. La columna de la izquierda muestra el inventario inicial utilizado en cada caso, luego se muestran los resultados obtenidos por el modelo con crédito, indicando el precio inicial, el límite de crédito inicial y la utilidad total esperada, variando el inventario inicial. El resto de las columnas muestran diferentes resultados obtenidos mediante el modelo base utilizando diferentes valores para el límite de crédito fijo asignado por el *retailer* al aplicar dicho modelo. Para cada columna señalamos los valores de $\lambda_p$ y $\alpha$ utilizados en la función Weibull que presentó el mejor ajuste posible a la demanda observada. Indicamos el precio inicial sugerido por el modelo sin crédito y la utilidad esperada en comparación con la lograda por el modelo con crédito en forma de %. La columna $\boldsymbol{\rho}^*$ considera el caso en que el vendedor

implementó el mismo valor para el límite de crédito que el óptimo obtenido por nuestro modelo.

Los resultados de la Tabla 4.1 muestran que pese a utilizar políticas de precio óptimas, la pérdida derivada de la asignación errónea de un límite de crédito es significativa y aumenta con el error. La columna $\rho^*$ merece un análisis más detallado. Como podemos observar en este caso, la utilidad lograda por el modelo sin crédito no se aleja demasiado de la lograda por nuestro modelo, lo que nos revela un aspecto muy interesante. Cuando el *retailer* utiliza un límite de crédito fijo igual al óptimo logrado por el modelo con crédito, la única diferencia radica en que en el transcurso del horizonte de planificación, el límite de crédito debe mantenerse constante. En este caso el modelo utiliza el precio para estimular la demanda y compensar los cambios no realizados en la política de crédito. Este análisis nos muestra que si utilizamos el límite de crédito correcto, la pérdida por mantener invariante el límite en el tiempo es baja.

Para concluir este experimento, realizamos el mismo ejercicio anterior pero esta vez modificamos el nivel de saturación medio de las líneas de crédito de los clientes al momento de la compra. Los resultados se observan en la tabla 4.2. La primera columna muestra el nivel de saturación medio utilizado en cada caso, luego se muestran los resultados obtenidos por el modelo con crédito. Las tres columnas de la derecha muestran, al igual que en la tabla 4.1, los resultados obtenidos por el modelo base para diferentes valores del límite de crédito fijado. En este caso, también analizamos la situación especifica en la que el retailer utiliza el modelo base y usa como límite de crédito fijo, el óptimo obtenido por el modelo con crédito. Para cada caso señalamos el precio y limite de crédito inicial sugerido y la utilidad esperada. En el caso del modelo base, la utilidad se muestra como el porcentaje de la utilidad lograda por el modelo con crédito y puede ser interpretada como la pérdida derivada de no utilizar un modelo que considere el crédito.

Los resultados muestran que el límite de crédito inicial óptimo sugerido por el modelo con crédito es creciente con el nivel de ocupación. Esto se debe a que cuando el nivel de

CUADRO 4.1. Modelo Crédito vs Modelo Base controlando por inventario

| | **Modelo Crédito** | | **Modelo Base** | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $\boldsymbol{\rho}$ | **200** | **300** | $\boldsymbol{\rho}^*$ | **400** | **500** | **600** |
| | | | Scale $\lambda_p$ | 155.6 | 194.9 | * | 206.8 | 211.5 | 213.8 |
| $\boldsymbol{q}$ | | | Shape $\alpha$ | 3.6 | 3.3 | * | 3.4 | 3.5 | 3.5 |
| | $p$ | 295.4 | $p$ | 200.0 | 289.5 | 301.7 | 308.0 | 308.9 | 309.6 |
| 1 | $\rho$ | 352.6 | $V^b/V^c$ | 65.6 % | 95.9 % | 99.6 % | 98.0 % | 85.0 % | 60.1 % |
| | $V^c$ | 318.6 | | | | | | | |
| | $p$ | 261.4 | $p$ | 200.0 | 257.5 | 266.6 | 271.2 | 276.0 | 278.0 |
| 5 | $\rho$ | 343.7 | $V^b/V^c$ | 74.5 % | 98.0 % | 99.8 % | 97.8 % | 84.9 % | 60.0 % |
| | $V^c$ | 1458.9 | | | | | | | |
| | $p$ | 241.0 | $p$ | 185.1 | 235.1 | 242.8 | 248.2 | 253.0 | 255.1 |
| 10 | $\rho$ | 340.5 | $V^b/V^c$ | 79.5 % | 98.7 % | 99.9 % | 97.8 % | 84.9 % | 60.1 % |
| | $V^c$ | 2712.9 | | | | | | | |
| | $p$ | 213.3 | $p$ | 163.6 | 206.4 | 213.6 | 219.5 | 224.3 | 226.6 |
| 20 | $\rho$ | 339.0 | $V^b/V^c$ | 82.1 % | 98.7 % | 99.5 % | 97.2 % | 84.4 % | 59.8 % |
| | $V^c$ | 4821.1 | | | | | | | |
| | $p$ | 171.5 | $p$ | 132.0 | 163.8 | 169.5 | 174.6 | 179.0 | 181.5 |
| 40 | $\rho$ | 343.8 | $V^b/V^c$ | 83.0 % | 98.7 % | 99.9 % | 98.1 % | 85.7 % | 60.9 % |
| | $V^c$ | 7576.7 | | | | | | | |
| | $p$ | 148.4 | $p$ | 112.0 | 138.9 | 144.3 | 148.0 | 151.6 | 158.4 |
| 60 | $\rho$ | 351.0 | $V^b/V^c$ | 81.9 % | 98.1 % | 99.8 % | 98.4 % | 86.5 % | 61.4 % |
| | $V^c$ | 8340.8 | | | | | | | |
| | $p$ | 147.0 | $p$ | 109.7 | 136.0 | 141.2 | 144.8 | 148.4 | 155.1 |
| 80 | $\rho$ | 351.6 | $V^b/V^c$ | 81.7 % | 98.0 % | 99.8 % | 98.3 % | 86.4 % | 61.3 % |
| | $V^c$ | 8359.8 | | | | | | | |
| | $p$ | 147.0 | $p$ | 109.1 | 136.0 | 141.2 | 144.6 | 148.1 | 154.8 |
| 100 | $\rho$ | 351.6 | $V^b/V^c$ | 81.7 % | 98.0 % | 99.8 % | 98.3 % | 86.4 % | 61.3 % |
| | $V^c$ | 8359.8 | | | | | | | |

*Elaboración propia*

ocupación es alto, los consumidores tienen menos cupo disponible para comprar, por lo que el modelo aumenta el límite de crédito y baja el precio para estimular la demanda.

CUADRO 4.2. Modelo Crédito vs Modelo Base controlando por saturación

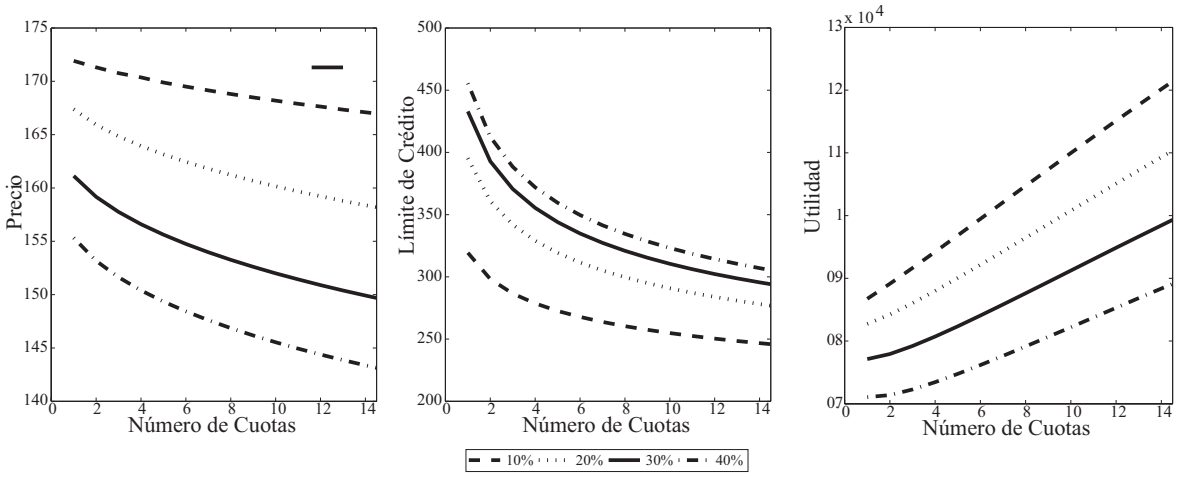
| | **Modelo Crédito** | | **Modelo Base** | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{\lambda_c}$ | | | $\boldsymbol{\rho}$ | **300** | $\boldsymbol{\rho^*}$ | **400** |
| 0.1 | $p$ | 170.1 | $p$ | 170.9 | 169.3 | 172.8 |
| | $\rho$ | 274.8 | $V^b/V^c$ | 99.7 % | 100.0 % | 93.8 % |
| | $V^c$ | 9579.1 | | | | |
| 0.2 | $p$ | 163.5 | $p$ | 160.2 | 162.6 | 167 |
| | $\rho$ | 322.9 | $V^b/V^c$ | 99.7 % | 100.0 % | 97.0 % |
| | $V^c$ | 8922.2 | | | | |
| 0.3 | $p$ | 156 | $p$ | 147.7 | 153.1 | 157.1 |
| | $\rho$ | 348.2 | $V^b/V^c$ | 98.4 % | 99.9 % | 98.4 % |
| | $V^c$ | 8168.2 | | | | |
| 0.4 | $p$ | 149.8 | $p$ | 134.3 | 142.9 | 146.9 |
| | $\rho$ | 364.1 | $V^b/V^c$ | 96.6 % | 99.5 % | 98.8 % |
| | $V^c$ | 7422.1 | | | | |

*Elaboración propia*

## 4.2. Análisis sobre las Variables de Crédito

El siguiente experimento pretende analizar el comportamiento del modelo frente a diferentes escenarios de crédito. En primer lugar analizamos el modelo realizando cambios en el nivel de ocupación de las líneas de crédito y en el número de cuotas pactadas. Nuevamente, utilizamos el mismo escenario visto en el ejemplo numérico de la sección 3 modificando las variables ya mencionadas.

Para este experimento asumiremos que el precio de reserva de los clientes se mantiene constante, por lo tanto la capacidad de pago mensual cambia al calcular una cuota menor pero de mayor plazo. Para cada valor de $n$ calculamos la capacidad de pago mensual promedio $\lambda_p$ como la cuota mensual $C(\overline{p}, n)$ considerando un precio de reserva constante $\overline{p}$. De esta forma, si aumentamos el plazo del crédito, la capacidad de pago mensual de los clientes disminuye.




*Elaboración propia*

FIGURA 4.1. Precio Inicial, Límite de Crédito y Utilidad Esperada

La Figura 4.1 muestra los gráficos de las soluciones óptimas y la utilidad esperada según el límite de cuotas pactadas, para diferentes niveles de saturación en el estado de cuenta de los clientes. Observamos que una menor capacidad de pago mensual generada por el aumento en el número de cuotas sugiere un precio inicial más bajo. El nivel de ocupación altera el nivel de liquidez de los clientes, así, un aumento en éste obliga a reducir los precios iniciales para estimular la demanda. A medida que el plazo pactado aumenta, la pérdida por riesgo crece, obligando a reducir el cupo asignado para aminorar el efecto. Un aumento en el nivel de ocupación, por otro lado, obliga a asignar un límite de crédito más alto para generar mayor liquidez en los clientes y estimular la demanda. Finalmente, el gráfico de la utilidad esperada muestra que a mayor número de cuotas el interés logrado es mayor, lo que genera un crecimiento en la utilidad. Este efecto se reduce al aumentar el nivel de ocupación de los clientes ya que es necesario aumentar el límite de crédito asignado generando un mayor riesgo, lo que tiene un fuerte impacto cuando el plazo pactado es largo.

Ahora realizamos un análisis similar al primero pero esta vez modificando el costo de capital $r_c$ y la tasa de interés $r_l$. En este caso mantenemos las variables utilizadas en la primera parte y fijamos el plazo promedio en $n = 4{,}6$ y el nivel de saturación en $\lambda_c = 0{,}3$.

A diferencia del caso anterior, donde un cambio en el plazo pactado modificaba la variable $\lambda_p$ para mantener una capacidad de pago fija independiente al plazo, esta vez al modificar la tasa de interés $r_l$, la capacidad de pago mensual $\lambda_p$ se mantendrá fija. La razón radica en que aumentar el interés cobrado a los clientes es equivalente a subir el precio del producto lo que no modifica la estructura de la deuda pactada. De esta forma al momento de comprar la cuota calculada es más alta y menos clientes pueden pagarla.

CUADRO 4.3. Modelo con Crédito en función de $r_c$ y $r_l$

| $r_l$ | $r_c$ | **0.02** | **0.04** | **0.06** | **0.08** |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.06 | $p$ | 178.7 | 178.8 | 178.9 | 179.0 |
| | $\rho$ | 367.8 | 368.7 | 369.6 | 370.5 |
| | $V^c$ | 8276.4 | 7844.4 | 7440.0 | 7061.2 |
| 0.08 | $p$ | 170.8 | 170.9 | 171.0 | 171.1 |
| | $\rho$ | 360.8 | 361.7 | 362.6 | 363.5 |
| | $V^c$ | 8400.0 | 7960.9 | 7549.8 | 7164.8 |
| 0.10 | $p$ | 163.2 | 163.3 | 163.4 | 163.4 |
| | $\rho$ | 354.0 | 354.9 | 355.8 | 356.7 |
| | $V^c$ | 8514.3 | 8068.6 | 7651.4 | 7260.6 |
| 0.12 | $p$ | 155.9 | 156.0 | 156.1 | 156.2 |
| | $\rho$ | 347.3 | 348.2 | 349.1 | 350.0 |
| | $V^c$ | 8620.0 | 8168.2 | 7745.3 | 7349.2 |
| 0.14 | $p$ | 149.0 | 149.1 | 149.1 | 149.2 |
| | $\rho$ | 340.8 | 341.7 | 342.6 | 343.5 |
| | $V^c$ | 8717.8 | 8260.3 | 7832.1 | 7431.1 |
| 0.16 | $p$ | 142.4 | 142.4 | 142.5 | 142.5 |
| | $\rho$ | 334.5 | 335.3 | 336.2 | 337.1 |
| | $V^c$ | 8808.3 | 8345.5 | 7912.4 | 7506.8 |
| 0.18 | $p$ | 136.1 | 136.1 | 136.2 | 136.2 |
| | $\rho$ | 328.3 | 329.1 | 330.0 | 330.9 |
| | $V^c$ | 8892.0 | 8424.4 | 7986.7 | 7576.9 |

*Elaboración propia*

Los resultados de este experimento se pueden observar en la Tabla 4.3, las columnas indican diferentes valores tomados para $r_c$. En cada caso indicamos el precio inicial, el

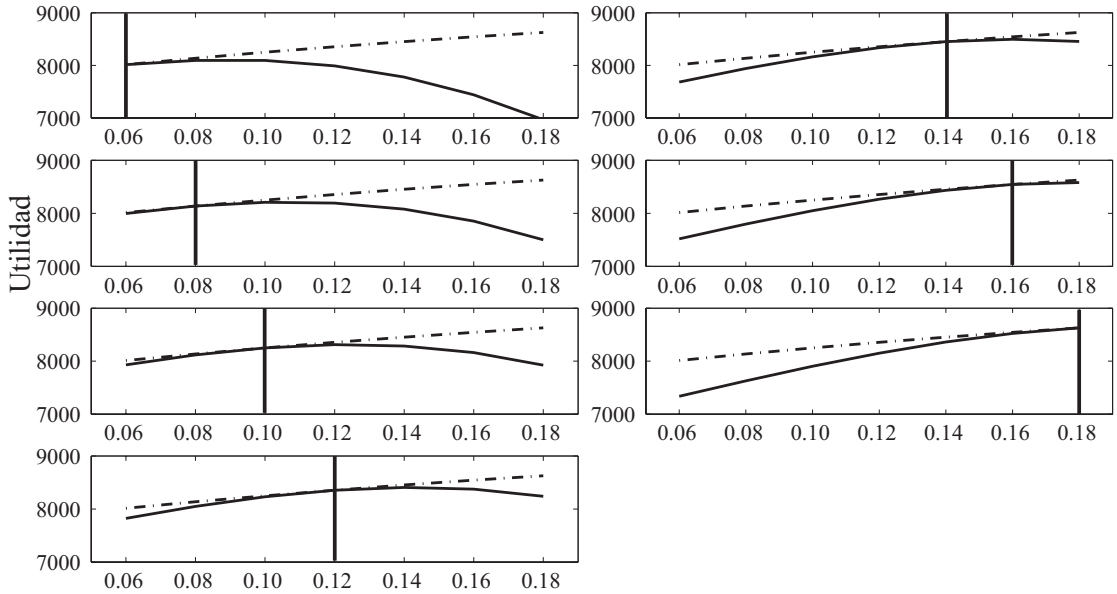
límite de crédito inicial y la utilidad esperada. Lo primero que observamos es que el precio es indiferente al costo de capital, lo cual es un resultado esperable ya que el costo de capital no modifica el valor de la cuota calculada, a diferencia de la tasa de interés que si tiene un fuerte impacto en ella. Esto es, de alguna forma, contradictorio con lo encontrado en la literatura de crédito, donde diversos autores sugieren que, desde una perspectiva macroeconómica, la tasa de interés no tiene un impacto relevante en el uso del crédito (Crook, 1989). Nosotros postulamos que, desde una perspectiva microeconómica, la tasa de interés sí puede tener un impacto en la demanda.

### 4.3. Efectos Cruzados entre Políticas de Crédito y Pricing

En los escenarios que se pretende estudiar en esta investigación, es común que el área de crédito y el área comercial estén separadas debido a la naturaleza financiera del negocio del crédito. Esto obliga a que cambios en las condiciones del crédito generen que las políticas de *pricing* antes calculadas sean ahora sub-óptimas, lo que motiva el siguiente experimento.

Consideremos el siguiente escenario. Un *retailer* vende productos de temporada entregando crédito a sus clientes. El vendedor utiliza el modelo con crédito para determinar las políticas óptimas y maximizar su utilidad. Como el *retailer* toma las decisiones de su política de crédito en forma independiente de las políticas de precios, decide modificar la tasa de interés cobrada sin modificar su política de precios. En el estado inicial se consideran las mismas variables y funciones de probabilidad utilizadas en el ejemplo numérico de la sección 3.

Los gráficos de la Figura 4.2 muestran la utilidad lograda para diferentes valores de la tasa de interés inicial fijada. En cada gráfico, la línea vertical indica el límite de crédito inicial utilizado. La línea punteada indica la utilidad lograda al actualizar la política de precios, mientras que la línea continua indica la utilidad lograda al no actualizarla. Esto muestra que, incluso para aumentos en la tasa de interés, se genera una pérdida al no actualizar las políticas óptimas. También observamos que alzas en la tasa de interés generan




*Elaboración propia*

FIGURA 4.2. Utilidades en función de la tasa de interés

mayores pérdidas que una reducción de la misma debido al fuerte efecto que tiene la tasa en la demanda.

## Capítulo 5. CONCLUSIONES Y FUTURAS INVESTIGACIONES

Hemos estudiado la relación que tienen las políticas óptimas de precio y crédito desde una perspectiva operacional. El modelo desarrollado permite evaluar conjuntamente ambas políticas asumiendo un proceso estocástico de tres fases donde una compra se realiza cuando el cliente tiene suficiente crédito para realizarla y la capacidad de pagar las cuotas a través del tiempo. Hemos derivado las condiciones de primer orden lo que nos permitió comprobar que las características de la solución óptima planteadas en Bitran y Mondschein (1997) también se cumplen en este caso, tanto para el precio como para el límite de crédito y la razón entre ambos es una función no creciente en el inventario y en el tiempo remanente hasta el fin de la temporada.

Las simulaciones realizadas mostraron que las variables de crédito tienen un fuerte impacto en las políticas de precio. El modelo permitió analizar el efecto que tiene el límite de crédito en la demanda, el cual fue coherente con lo postulado en la literatura de consumidores a crédito existente. Mostramos que la aplicación de políticas dinámicas para el límite de crédito no generan mayores beneficios, ya que las políticas dinámicas de precio son capaces de compensar esta restricción. Sin embargo, asignar un cupo correcto mostró ser un factor relevante en la utilidad lograda. En este aspecto, nuestro modelo puede ser una herramienta útil para determinar el límite de crédito fijo a asignar al inicio de la temporada, y luego aplicar políticas de precio óptimas utilizando los modelos de *pricing* existentes.

El modelo desarrollado nos permitió mostrar que cuando el área de crédito y el área comercial trabajan en forma separada pueden tomar decisiones que afectan ambas estrategias, y de no funcionar en forma coordinada, se pueden experimentar pérdidas importantes. Nuestro último experimento cuantifica dichas pérdidas, las cuales pueden llegar hasta un $20\,\%$ dependiendo de la magnitud de los cambios en las condiciones del crédito. Este escenario es común en los *retailers* de hoy y el resultado obtenido en esta investigación sugiere evaluar esta práctica y considerar la inclusión de las variables de crédito en la estimación de la demanda.

La introducción del crédito en modelos de *revenue management* abre muchas posibilidades de investigación como extensiones a este trabajo. Actualmente existen diversos modelos de *pricing* que consideran otros aspectos como aprendizaje en la demanda, el impacto del efecto inventario o modelos multiproducto, los cuales presentan extensiones directas a este trabajo.

Finalmente proponemos dos aspectos de crédito que no fueron considerados en esta investigación y que podrían aportar a la gestión operacional del *retail*. (1) El uso de modelos de demanda dependiente. Como mencionamos al comienzo de este artículo, el modelo utilizado considera una demanda independiente, lo que representa bien casos en que los productos vendidos son de temporada y no durables, sin embargo, la inclusión del crédito genera dependencia en la demanda, ya que los clientes terminan primero de pagar los productos comprados para comprar otros. Durante la investigación se encontró una fuerte correlación entre el plazo utilizado en las compras a crédito y la frecuencia de compra de los clientes. Estos resultados sugieren desarrollar un modelo de crédito con demanda dependiente. (2) Límites de crédito diferenciados. Con el objeto de simplificar nuestro modelo, asumimos un límite de crédito igual para todos los clientes, pero sabemos que en la práctica esto no sucede lo que genera variabilidad en la demanda. Las políticas de precio óptimas cuando la cartera de clientes tiene diferentes límites de crédito podrían cambiar para hacer frente a esta variabilidad.

## Referencias


Ando, A., y Modigliani, F. (1963). The life cycle hypothesis of saving: Aggregate implications and tests. *The American Economic Review*, *53*(1), 55–84.

Andrade, F. de, y Thomas, L. (2007). Structural models in consumer credit. *European Journal of Operational Research*, *183*(3), 1569–1581.

Andreeva, G., Ansell, J., y Crook, J. (2007). Modelling profitability using survival combination scores. *European Journal of Operational Research*, *183*(3), 1537–1549.

Banasik, J., Crook, J., y Thomas, L. (1999). Not if but when will borrowers default. *Journal of the Operational Research Society*, *50*(12), 1185–1190.

Bitran, G., y Caldentey, R. (2003). An overview of pricing models for revenue management. *Manufacturing and Service Operations Management*, *5*(3), 203–229.

Bitran, G., y Mondschein, S. (1993). Pricing perishable products: an application to the retail industry. *MIT Working Paper 3592-93*.

Bitran, G., y Mondschein, S. (1997). Periodic pricing of seasonal products in retailing. *Management Science*, *43*(1), 64–79.

Crook, J. (1989). The demand for retailer-financed instalment credit: An econometric analysis. *Managerial and Decision Economics*, *10*(4), 311–319.

Elmaghraby, W., y Keskinocak, P. (2003). Dynamic pricing in the presence of inventory considerations: Research overview, current practices, and future directions. *Management Science*, *49*(10), 1287–1309.

Friedman, M. (1957). *The permanent income hypothesis*. National Bureau of Economic Research, Inc.

Gallego, G., y Ryzin, G. van. (1994). Optimal Dynamic Pricing of Inventories with Stochastic Demand over Finite Horizons. *Management Science*, *40*(8), 999–1020.

Gross, D., y Souleles, N. (2002). Do Liquidity Constraints and Interest Rates Matter for Consumer Behavior? Evidence from Credit Card Data. *Quarterly Journal of Economics*, *117*(1), 149–185.

Narain, B. (1992). Survival analysis and the credit granting decision. En *Credit scoring and credit control: Based on the proceedings of a conference on credit scoring and credit control, organized by the institute of mathematics and its applications and held at the university of edinburg in august 1989* (p. 109).

Smith, S., y Achabal, D. (1998). Clearence pricing and inventory policies for retail chains. *Management Science*, *44*(3), 285–300.

Soman, D., y Cheema, A. (2002). The effect of credit on spending decisions: the role of the credit limit and credibility. *Marketing Science*, *21*(1), 32–53.

Thomas, L. (2000). A survey of credit and behavioural scoring: forecasting financial risk of lending to consumers. *International Journal of Forecasting*, *16*(2), 149–172.

Thomas, L. C. (2009). *Consumer credit models: Pricing, profit and portfolios* (1.ª ed.). Great Clarendon Street, Oxford ox2 6dp: Oxford University Press Inc.

Zhao, W., y Zheng, Y.-S. (2000). Optimal Dynamic Pricing for Perishable Assets with Nonhomogeneous Demand. *Management Science*, *46*(3), 375–388.

## ANEXO A.

### A.1. Ingreso derivado del Crédito

Financiar la compra de un producto consiste en pactar un conjunto de pagos a través del tiempo cargando una tasa de interés dada. La utilidad percibida por el emisor del crédito corresponde al valor presente de los pagos descontados utilizando la tasa correspondiente al costo del capital del emisor. Sea $r_c$ la tasa de descuento continua que representa el costo de capital del emisor y sea $C_i, i = 1 \ldots n$ el conjunto de pagos pactados en $n$ periodos. El valor presente de los pagos esta representado por la siguiente ecuación.

$$PV(\overrightarrow{C}, r_c, n) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{-r_c i}. \tag{A.1}$$

En el mercado existen muchas formas de créditos diferentes que definen la forma del vector de pagos $\overrightarrow{C}$, se calcularon los pagos siguiendo el esquema de cuotas fijas, es decir, el valor de todas las cuotas pactadas es el mismo. Esto permite reescribir la ecuación A.1 de la siguiente forma:

$$PV(\overrightarrow{C}, r_c, n) = C \sum_{i=1}^{n} e^{-r_c i}. \tag{A.2}$$

La ecuación puede simplificarse utilizando la propiedad de sumatoria,

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i = \frac{\rho(1-\rho^n)}{(1-\rho)}. \tag{A.3}$$

Reescribiendo (A.2) obtenemos,

$$PV(\overrightarrow{C}, r_c, n) = \frac{C(1-e^{-r_c n})}{(e^{r_c}-1)}. \tag{A.4}$$

#### A.1.1. Cálculo de la Cuota

El *retailer* financia el pago del producto de precio $p$ con una duración $T$, cobrando una tasa de interés continua $r_l$ a un número de $n$ cuotas. El valor presente de los pagos descontados a $r_l$ debe ser igual al precio del producto, de esta forma es posible calcular el

valor de la cuota mediante la siguiente ecuación:

$$p = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{-r_l i}. \tag{A.5}$$

Suponiendo $C_i = C_j, \ \forall i \neq j$, reescribimos la ecuación A.5,

$$p = C \sum_{i=1}^{n} e^{-r_l i}. \tag{A.6}$$

Utilizando la propiedad de sumatoria mencionada en la sección anterior podemos representar (A.6) como:

$$p = \frac{C(1 - e^{-r_l n})}{(e^{r_l} - 1)}. \tag{A.7}$$

Finalmente, despejamos el valor de cuota,

$$C = \frac{p(e^{r_l} - 1)}{(1 - e^{-r_l n})}. \tag{A.8}$$

Por último, reemplazando (A.8) en (A.4) obtenemos la expresión para el ingreso derivado del crédito:

$$PV(p, n, r_l, r_c) = p \frac{(e^{r_l} - 1)}{(e^{r_c} - 1)} \frac{(1 - e^{-r_c n})}{(1 - e^{-r_l n})}. \tag{A.9}$$

### A.1.2. Considerando el Riesgo

En un crédito pactado a $n$ cuotas un cliente podría declararse en quiebra en algún momento desde el inicio del crédito hasta el último periodo de pago. Consideremos $F_s(t, \rho)$ como la probabilidad de que el cliente se mantenga sin quebrar hasta el tiempo $t$. Sea $VP_n(t)$ el valor presente de un crédito pactado a $n$ cuotas considerando la quiebra del cliente en el periodo $t$, de esta forma, el valor esperado de un crédito a $n$ cuotas está dado por la siguiente ecuación:

$$PV_n = \int_0^n VP_n(t) f_s(t, \rho) \mathrm{d}t + PV_n(n)\big(1 - F_s(n)\big), \tag{A.10}$$

donde,

$$PV_n(t) = C_n \frac{(1 - e^{-r_c t})}{(e^{r_c} - 1)}.$$

Nótese que $C_n$ es un valor fijo que no depende de $t$, esto se debe a que *a priori* el emisor del crédito no sabe si el cliente pagará, o no, la totalidad del crédito y calcula la cuota fija a cobrar asumiendo que el cliente cumplirá con los pagos.

La función $f_s(t, \rho)$ es la probabilidad de que el cliente se declare en quiebra en el tiempo $t$, la cual es modelada mediante una función exponencial, de esta forma:

$$F_s(t, \rho) = 1 - e^{-\lambda(\rho)t}.$$

Si reemplazamos (A.8) y (A.11) en (A.10) obtenemos la siguiente expresión:

$$EPV(p, \rho) = \frac{p(e^{r_l} - 1)}{(1 - e^{-r_l n})(e^{r_c} - 1)} \Big[ \int_0^n (1 - e^{-r_c t}) e^{-\lambda(\rho)t} \mathrm{d}t + (1 - e^{-r_c n}) e^{-\lambda(\rho)n} \Big]. \tag{A.11}$$

Finalmente, resolviendo la integral damos con la expresión final del valor esperado del ingreso derivado de la venta de un producto a crédito:

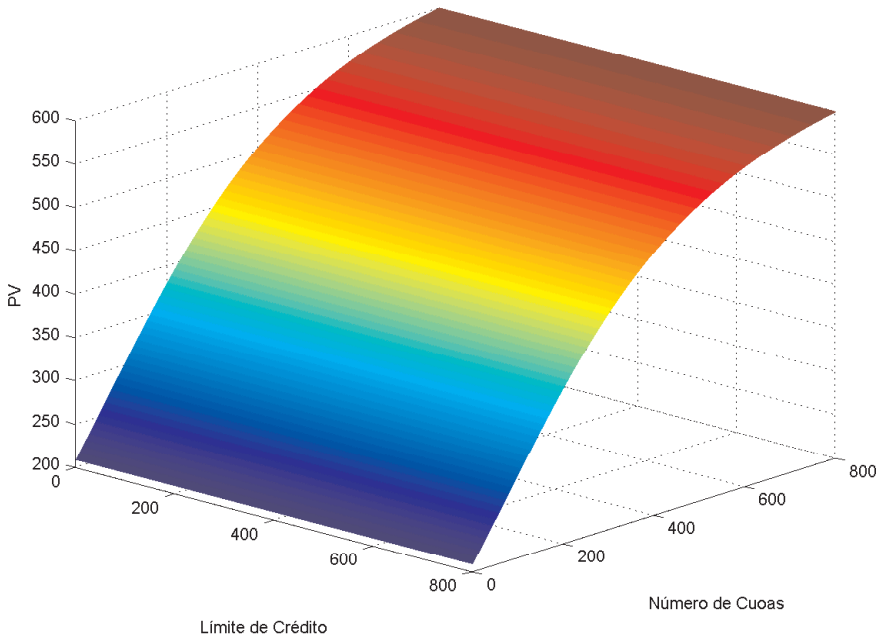
$$EPV(p, \rho) = \frac{p(e^{r_l} - 1) e^{-\lambda(\rho)n} r_c (e^{\lambda(\rho)n} - e^{-r_c n})}{(1 - e^{-r_l n})(e^{r_c} - 1)(\lambda(\rho) + r_c)}. \tag{A.12}$$

Cabe señalar que es posible calcular esta expresión en cualquier instante del tiempo y es una función directa del precio $p$, por lo que en el modelo de programación dinámica puede ser trabajada de forma similar al precio del producto.

A continuación mostramos una serie de gráficos que permiten observar el comportamiento de la función de ingreso esperado $EPV(p, \rho)$ y la función del valor presente de los flujos pactado $PV(p, n)$. Utilizamos una tasa de interés de $r_l = 0{,}12$ y un costo de capital $r_c = 0{,}04$. La función $\lambda(rho)$ es la misma utilizada en el ejemplo numérico de la sección 3.

El gráfico A.1 muestra el valor presente de los flujos para diferentes plazos pactados y distintos límites de crédito asignados. Vemos que la función crece en el número de cuotas asintóticamente, esto se debe a que a medida que el plazo aumenta, el valor presente de los últimos flujos es menor, por lo tanto, el mayor interés obtenido por un plazo mayor decrece

en el número de cuotas. La función no depende del límite de crédito asignado ya que no incluye el riesgo de pago, por esto no muestra variaciones al modificar esta variable.

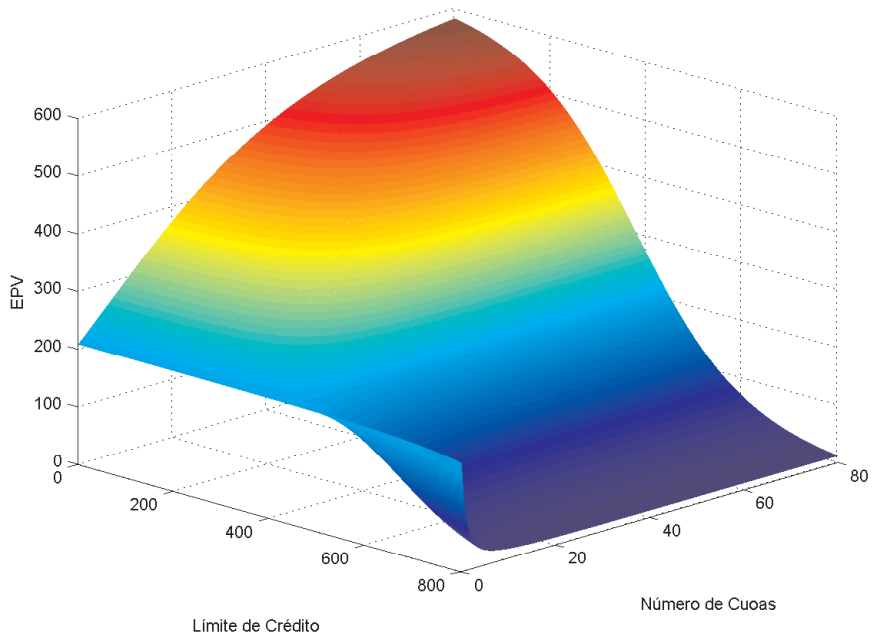



*Elaboración propia*

FIGURA A.1. Valor Presente de los Flujos Futuros

El gráfico A.2 muestra, para los mismos ejes que el gráfico A.1, el valor de la función $EPV(p, \rho)$. En este caso observamos que a medida que el límite de crédito aumenta, la utilidad lograda cae debido al mayor riesgo de pago. Esta pérdida crece con el plazo de pago ya que el valor de la cuota cae y sólo logramos obtener los primeros pagos.

Con el objetivo de comparar las funciones $EPV(p, \rho)$ y $PV(p, n)$, el gráfico A.3 muestra ambas funciones para distintos plazos de crédito. De la misma forma el gráfico A.4 muestra las funciones para distintos valores de límite de crédito. Como podemos observar, al aumentar el plazo del crédito crecen ambas funciones, sin embargo y debido al riesgo, la utilidad esperada (función $EPV(p, \rho)$) lo hace con menor intensidad, evidenciando la pérdida por riesgo de captación. En el gráfico A.4 vemos como al aumentar el límite de crédito la función $VP(p, n)$ se mantiene constante mientras que la función $EPV(p, \rho)$ cae. Recordemos que un aumento en el cupo de crédito no genera un aumento en la capacidad




*Elaboración propia*

FIGURA A.2. Valor Esperado del Valor Presente de los Flujos Futuros

de pago de las personas, por lo tanto, el riesgo de no pago aumenta generando que el valor esperado del pago sea menor.

## A.2. Demostración de Proposiciones

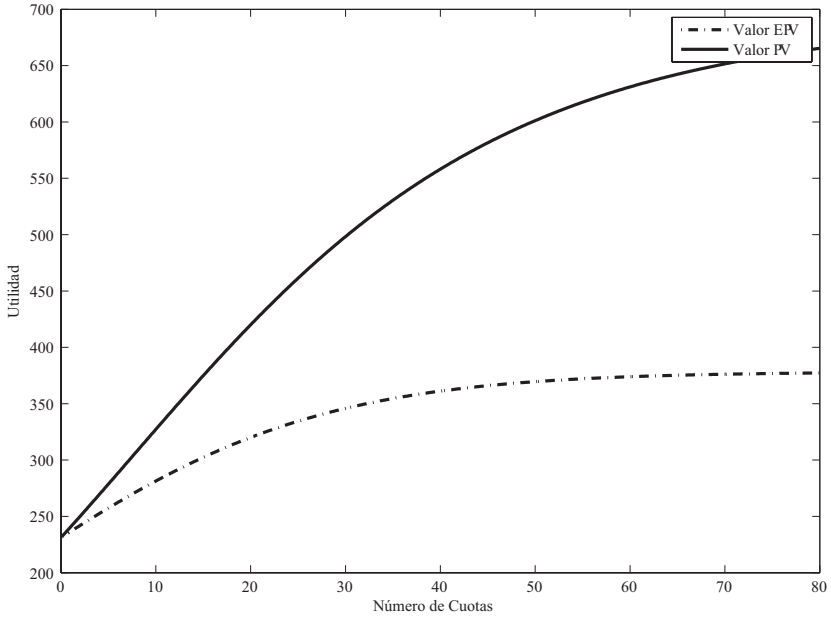
### A.2.1. Demostración de la Proposición 3.1

Definimos la función $h_t(\rho, p, q)$ igual a:

$$h_t(\rho, p, q) = \max_{p\geq 0, \rho \geq 0} \{ m_t F_c(1 - p/\rho)\big(1 - F_p(C(p))\big)\big(EPV(p, \rho) + V_{t-1}(q-1)\big) + \Big(1 - m_t F_c(1 - p/\rho)\big(1 - F_p(C(p))\big)\Big) V_{t-1}(q) \},$$

el problema de maximización es equivalente a,

$$V_t(q) = \max_{p\geq 0, \rho \geq 0} h_t(\rho, p, q).$$




*Elaboración propia*

FIGURA A.3. PV vs EPV en el plazo pactado, $\rho = 350$

Sea $\rho_{t,p,q}$ el límite de crédito óptimo al comienzo del periodo $t$ cuando el inventario inicial es $q$, notamos que $p$ también es óptimo. Luego, la siguiente desigualdad se cumple para todo $\rho$,

$$h_t(\rho_{t,p,q}, p, q) \geq h_t(\rho, p, q) \quad \forall \rho.$$

Como la solución $(p, \rho_{t,p,q})$ es factible en el problema de maximización con un inventario inicial de $q + 1$ unidades, una condición suficiente para que $\rho_{t,p,q+1}$ sea mayor o igual a $\rho_{t,p,q}$ es:

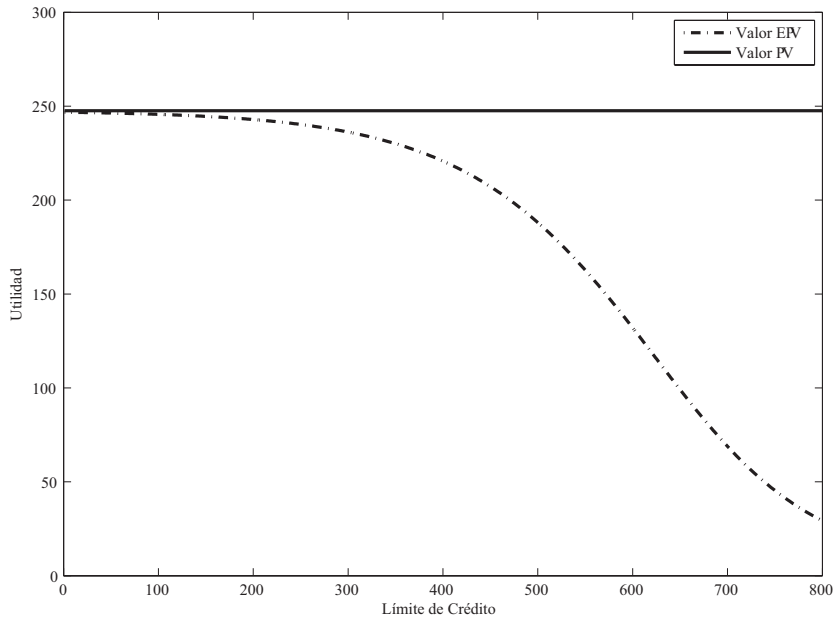
$$h_t(\rho_{t,p,q}, p, q + 1) \geq h_t(\rho, p, q + 1) \quad \forall \rho \leq \rho_{t,p,q}.$$

Así, una condición suficiente más fuerte esta dada por,

$$h_t(\rho_{t,p,q}, p, q + 1) - h_t(\rho, p, q + 1) \geq h_t(\rho_{t,p,q}, p, q) - h_t(\rho, p, q) \quad \forall \rho \leq \rho_{t,p,q}.$$

Reemplazando la función $h_t(\rho, p, q)$ por su valor correspondiente, obtenemos que la condición suficiente es equivalente a,

$$V_{t-1}(q) - V_{t-1}(q - 1) \geq V_{t-1}(q + 1) - V_{t-1}(q),$$




*Elaboración propia*

FIGURA A.4. VP vs EVP en el cupo asignado, $n = 4{,}6$

lo que es verdadero por el Lema 2 demostrado en los anexos de Bitran y Mondschein (1993). Luego, manteniendo el precio constante, el límite de crédito óptimo es una función creciente en el inventario.

### A.2.2. Demostración de la Proposición 3.2

Utilizando la misma notación de la demostración anterior, tenemos:

$$h_t(\rho_{t,p,q}, p, q) \geq h_t(\rho, p, q) \quad \forall \rho.$$

Como la solución $(p, \rho_{t,p,q})$ es factible en el problema de maximización comenzando en el periodo $t-1$, una condición suficiente para que $\rho_{t-1,p,q}$ sea mayor o igual a $\rho_{t,p,q}$ es:

$$h_{t-1}(\rho_{t,p,q}, p, q) \geq h_{t-1}(\rho, p, q+1) \quad \forall \rho \leq \rho_{t,p,q}.$$

Así, una condición suficiente más fuerte esta dada por,

$$h_{t-1}(\rho_{t,p,q}, p, q) - h_{t-1}(\rho, p, q) \geq h_t(\rho_{t,p,q}, p, q) - h_t(\rho, p, q) \quad \forall \rho \leq \rho_{t,p,q}.$$

Reemplazando la función $h_t(\rho, p, q)$ por su valor correspondiente, obtenemos que la condición suficiente es equivalente a,

$$V_{t-1}(q-1) - V_{t-2}(q-1) \leq V_{t-1}(q) - V_{t-2}(q),$$

lo que es verdadero por el Lema 2 demostrado en los anexos de Bitran y Mondschein (1993). Luego, manteniendo el límite de crédito constante, el precio óptimo es una función no creciente en el inventario.

### A.2.3. Demostración de la Proposición 3.3

Podemos reescribir la proposición 3.3 de la siguiente manera:

$$p_{t,q}\rho_{t-1,q} \geq p_{t-1,q}\rho_{t,q} \quad \forall t, q. \tag{A.13}$$

De la proposición 2 de Bitran y Mondschein (1993) sabemos que

$$p_{t,\rho,q} \geq p_{t-1,\rho,q} \quad \forall t, \rho, q,$$

además, de la proposición 3.2 sabemos que:

$$\rho_{t-1,p,q} \geq \rho_{t,p,q} \quad \forall t, p, q.$$

Por lo tanto, ambos términos en el lado izquierdo de la ecuación A.13 son mayores a los del lado derecho, por lo tanto, la proposición 3.3 se cumple para todo $t, q$.

### A.2.4. Demostración de la Proposición 3.4

Podemos reescribir la proposición 3.4 de la siguiente manera:

$$p_{t,q}\rho_{t,q+1} \geq p_{t,q+1}\rho_{t,q} \quad \forall t, q. \tag{A.14}$$

De la proposición 1 de Bitran y Mondschein (1993) sabemos que

$$p_{t,\rho,q} \geq p_{t,\rho,q+1} \quad \forall t, \rho, q,$$

además, de la proposición 3.1 sabemos que:

$$\rho_{t,p,q+1} \geq \rho_{t,p,q} \quad \forall t, p, q.$$

Por lo tanto, ambos términos del lado izquierdo de la ecuación A.14 son mayores a los del lado derecho, por lo tanto, la proposición 3.4 se cumple para todo $t, q$.

### A.2.5. Demostración de la Proposición 3.5

Tenemos que el modelo es de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} V_t(q) = \operatorname*{máx}_{p\geq 0, \rho \geq 0} \{ & m_t F_c(1-p/\rho)\big(1-F_p(C(p))\big)\big(EPV(p,\rho)+V_{t-1}(q-1)\big) \\ & + \Big(1 - m_t F_c(1-p/\rho)\big(1-F_p(C(p))\big)\Big) V_{t-1}(q)\}. \end{aligned} \tag{A.15}$$

Luego derivamos parcialmente en $\rho$ e igualamos a 0 obteniendo,

$$\big(EPV(p,\rho) + V_{t-1}(q-1) - V_{t-1}(q)\big) = -\frac{F_c(1-p/\rho)}{f_c(1-p/\rho)} \frac{\partial EPV(p,\rho)}{\partial \rho} \frac{\rho^2}{p}. \tag{A.16}$$

Realizamos lo mismo derivando parcialmente en $p$:

$$\begin{aligned} & -\frac{f_c(1-p/\rho)\big(1-F_p(C(p))\big)}{\rho}\big(EPV(p,\rho)+V_{t-1}(q-1)-V_{t-1}(q)\big) \\ & \quad - F_c(1-p/\rho) f_p(C(p)) \frac{\partial C(p)}{\partial p}\big(EPV(p,\rho)+V_{t-1}(q-1)-V_{t-1}(q)\big) \\ & \quad + F_c(1-p/\rho)\big(1-F_p(C(p))\big)\frac{\partial EPV(p,\rho)}{\partial p} = 0. \end{aligned} \tag{A.17}$$

Ahora reemplazamos (A.16) en (A.17),

$$\begin{aligned} & \big(1-F_p(C(p))\big)\frac{\partial EPV(p,\rho)}{\partial p} + \big(1-F_p(C(p))\big)\frac{\rho}{p}\frac{\partial EPV(p,\rho)}{\partial \rho} \\ & \quad + \frac{F_c(1-p/\rho) f_p(C(p)) \frac{\partial C(p)}{\partial p}}{f_c(1-p/\rho)} \frac{\rho^2}{p} \frac{\partial EPV(p,\rho)}{\partial \rho} = 0. \end{aligned} \tag{A.18}$$

Utilizamos el siguiente cambio de variables:

$$H_c(\rho) = \frac{F_c(1-p/\rho)}{f_c(1-p/\rho)\frac{p}{\rho^2}} \quad y \quad H_p(p) = \frac{\big(1-F_p(C(p))\big)}{f_p(C(p))\frac{\partial C(p)}{\partial p}}.$$

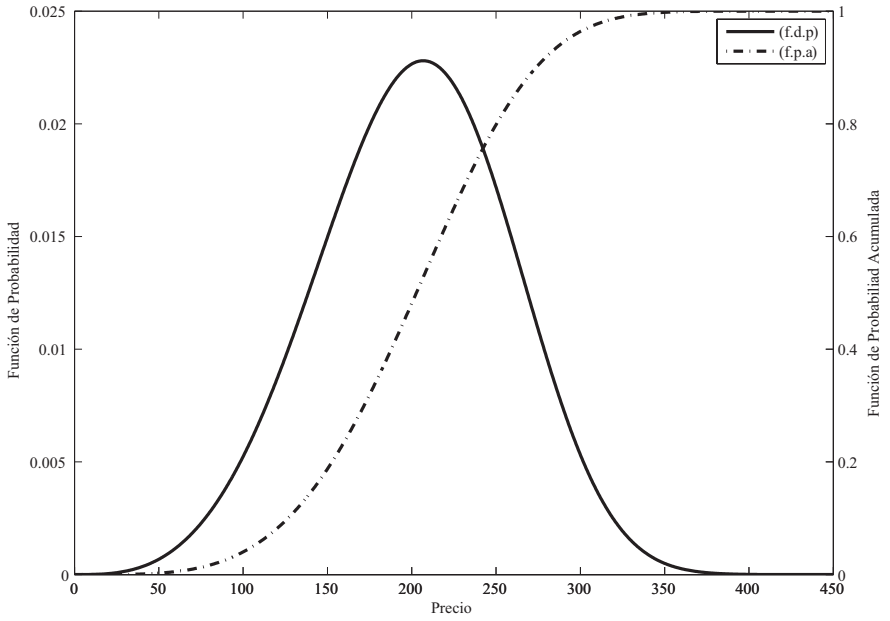
Notamos que las funciones $H_c(\rho)$ y $H_p(p)$ corresponden a las Hazard Functions de las funciones de probabilidad $F_c(x)$ y $F_p(x)$ respectivamente. Realizamos un simple manejo matemático y podemos reescribir (A.18) como:

$$\frac{\partial EPV(p,\rho)}{\partial p}\frac{1}{H_c(\rho)} - \frac{\partial EPV(p,\rho)}{\partial \rho}\Big[\frac{1}{H_p(p)} - \frac{1}{H_c(\rho)}\frac{\rho}{p}\Big] = 0. \tag{A.19}$$

Es posible reescribir (refec5) para obtener la siguiente condición de primer orden:

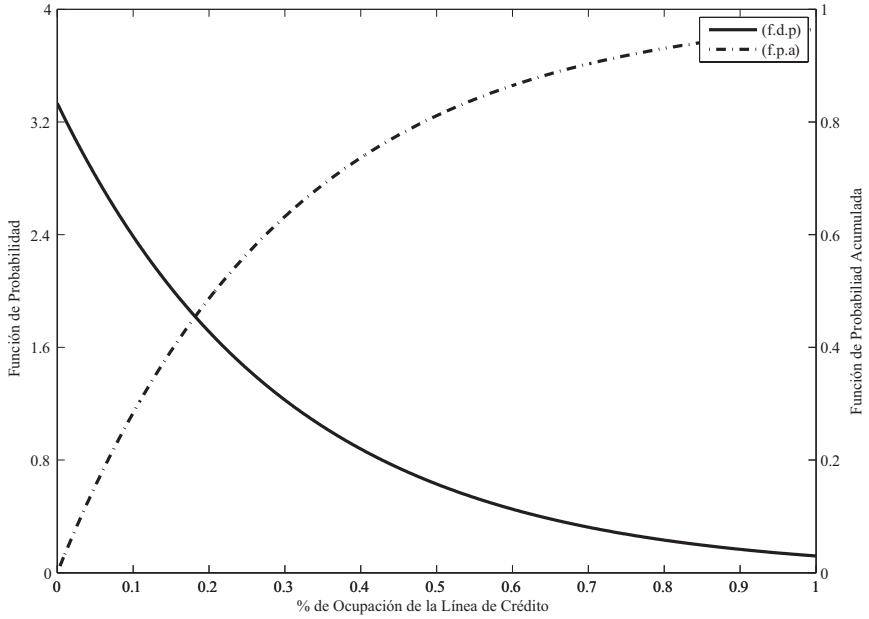
$$\frac{\frac{\partial EPV(p,\rho)}{\partial p}}{\frac{\partial EPV(p,\rho)}{\partial \rho}} + \frac{\rho}{p} = \frac{H_c(\rho)}{H_p(p)}. \tag{A.20}$$

## A.3. Funciones utilizadas en el Ejemplo Numérico de la Sección 2




*Elaboración propia*

FIGURA A.5. Capacidad de Pago Mensual




*Elaboración propia*

FIGURA A.6. % de Ocupación en la Línea de Crédito

La Figura A.5 y la Figura A.6 muestran las funciones de probabilidad utilizadas en el ejemplo. La función $\lambda(\rho)$ utilizada es de la forma

$$\lambda(rho) = ae^{b\rho}.$$

Se utilizaron los valores $a = 717{,}41$ y $b = -0,0091$.