PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

SEÑALES DE ENTRENAMIENTO ÓPTIMAS PARA ESTIMACIÓN DE CANAL MIMO ENERGÉTICAMENTE EFICIENTE

CAMILA MUÑOZ ESCOBAR

Tesis presentada a la Dirección de Investigación y Postgrado
como parte de los requisitos para optar al grado de
Magister en Ciencias de la Ingeniería

Profesor Supervisor:
CHRISTIAN OBERLI GRAF

Santiago de Chile, Junio 2012

© MMXII, CAMILA MUÑOZ ESCOBAR

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

SEÑALES DE ENTRENAMIENTO ÓPTIMAS PARA ESTIMACIÓN DE CANAL MIMO ENERGÉTICAMENTE EFICIENTE

CAMILA MUÑOZ ESCOBAR

Miembros del Comité:
CHRISTIAN OBERLI GRAF
VLADIMIR MARIANOV KLUGE
JAIME ANGUITA GARCÍA
MARCOS SEPÚLVEDA FERNANDEZ

Tesis presentada a la Dirección de Investigación y Postgrado
como parte de los requisitos para optar al grado de
Magister en Ciencias de la Ingeniería

Santiago de Chile, Junio 2012

© MMXII, CAMILA MUÑOZ ESCOBAR

a Francisco, mi familia y amigos.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi profesor supervisor por guiarme durante el desarrollo de esta tesis, en especial en las discusiones acerca del artículo realizado, su enfoque me ayudó a mirar mi investigación desde una nueva perspectiva.

A los Latinos, Fernando, Joaquín, Kaipi, Lurys, Toño y Santiago, agradezco el excelente ambiente de trabajo. Las conversaciones, cafés y almuerzos compartidos fueron un aporte fundamental al desarrollo de esta investigación.

También me gustaría agradecer a Pancho, mi familia y mis amigos Renato y Jesú, quienes me entregaron su apoyo y cariño incondicional a lo largo de toda mi carrera universitaria.

Índice General

AGRADECIMIENTOS IV

Lista de Figuras VII

Lista de Tablas IX

RESUMEN X

ABSTRACT XI

Capítulo 1. INTRODUCCIÓN 1

1.1. Motivación 1

1.2. Problema de tesis 2

1.3. Objetivos 3

1.4. Contribuciones principales 3

1.5. Organización de la tesis 4

Capítulo 2. MARCO TEÓRICO 5

2.1. Estimación de canal MIMO 5

2.2. Modelos de consumo para redes con restricciones energéticas 8

Capítulo 3. MODELO DEL SISTEMA MIMO 13

3.1. Modelo del sistema de comunicaciones 13

3.2. Arquitectura de los tranceptores 14

3.3. Modelo de consumo energético 15

Capítulo 4. ALGORITMOS DE ESTIMACIÓN DE CANAL 21

4.1. Algoritmo ML matricial 22

4.2. Algoritmo ML vectorial 24

4.3. Algoritmo MMSE matricial 26

4.4. Algoritmo MMSE vectorial 28

Capítulo 5. SEÑALES DE ENTRENAMIENTO ÓPTIMAS 30
5.1. Problema de optimización 30
5.2. Solución analítica para algoritmos de estimación matriciales 34
5.3. Solución analítica para algoritmos de estimación vectoriales 35
5.4. Resultados numéricos 38

Capítulo 6. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO 44
6.1. Resultados y discusión 44
6.2. Trabajo futuro 45

Referencias 47

ANEXOS 50

ANEXO A. EQUIVALENCIA EN NÚMERO DE OPERACIONES REALES Y COMPLEJAS 51

ANEXO B. INVERSIÓN DE MATRICES MEDIANTE DESCOMPOSICIÓN QR 52

ANEXO C. OPERACIONES REQUERIDAS POR LOS ALGORITMOS DE ESTIMACIÓN 54
C.1. ML matricial 54
C.2. MMSE matricial 54

Lista de Figuras

2.1. Estructura típica de un paquete. El preámbulo contiene señales de entrenamiento que permiten realizar las tareas de detección, sincronización y estimación de canal. 5

2.2. Diagrama de bloques del sistema MIMO propuesto por Cui et al. (2004). . . . 10

2.3. Diagrama de bloques del sistema MIMO propuesto por Rosas y Oberli (2012a). 11

3.1. Diagrama de bloques del tranceptor MIMO de referencia utilizado en esta tesis. 14

4.1. Distribución de símbolos piloto por antena para estimación vectorial. Cada antena transmite una secuencia de símbolos piloto mientras las demás antenas permanecen en silencio. 21

4.2. Durante el preámbulo, las antenas transmiten secuencias simultáneas, pero diferentes, de símbolos piloto. 22

5.1. Número de pilotos óptimo vs distancia entre tranceptores para el algoritmo ML matricial, con $\epsilon_{\text{max}} = -20$ dB. El número de pilotos óptimo se mantiene igual al número de antenas hasta la distancia crítica, cerca de 20.5 m y luego aumenta como d^{α}. 39

5.2. Potencia transmitida óptima vs distancia entre tranceptores para el algoritmo ML matricial, con $\epsilon_{\text{max}} = -20$ dB. Para $d \leq d_c$ la potencia aumenta proporcionalmente a d^{α}. Superada la distancia crítica la potencia oscila debido al comportamiento escalonado del número de pilotos. 39

5.3. Energía mínima consumida por los algoritmos con $\epsilon_{\text{max}} = -20$ dB en función de la distancia. 40

5.4. SNR resultante para estimación de energía mínima utilizando el algoritmo ML vectorial con $\epsilon_{\text{max}} = -20$ dB en función de la distancia. La línea punteada indica 7 dB y $d = 123$ m, distancia máxima alcanzada con esta SNR. 41

5.5. SNR resultante para estimación de energía mínima utilizando el algoritmo ML vectorial con $\epsilon_{\text{max}} = -20\,\text{dB}$, para distintos ambientes de propagación. 42

5.6. Energía mínima consumida por los algoritmos a $d = 30\,m$ en función del error de estimación ϵ_{max}. 43

Lista de Tablas

2.1. Resumen de resultados obtenidos por Biguesh y Gershman (2006). 6

4.1. Número de instrucciones requeridas por el estimador ML matricial. 23

4.2. Número de instrucciones requeridas por el estimador ML vectorial. 25

4.3. Número de instrucciones requeridas por el estimador MMSE matricial. 27

4.4. Número de instrucciones requeridas por el estimador ML vectorial. 28

5.1. Constantes k_1, k_2, k_3 y k_4 del problema de optimización según el algoritmo de estimación utilizado. 33

5.2. Número de pilotos (N_p) y potencia de transmisión (P_{tx}) óptimas para cada algoritmo de estimación de canal. 37

5.3. Parámetros de un tranceptor genérico de bajo consumo. 38

5.4. Parámetros de una unidad de procesamiento aritmético genérica. 38

C.1. Cálculos requeridos por el estimador MMSE matricial. 55

C.2. Operaciones requeridas por el estimador MMSE matricial. 55

RESUMEN

Explotar las ventajas de las tecnologías de múltiples antenas está fuertemente condicionado al conocimiento del canal inalámbrico que afecta cada transmisión. En la literatura se han propuesto diversos algoritmos de estimación de canal, los que típicamente han sido estudiados desde una perspectiva que no considera restricciones energéticas en su implementación.

Esta tesis propone una metodología que permite evaluar el consumo energético de algoritmos de estimación de canal y encontrar las señales de entrenamiento que minimizan este consumo.

Se estudiaron en detalle los algoritmos de estimación de máxima verosimilitud (ML) y de mínimo error cuadrado medio (MMSE). Para cada uno se analizó los esquemas de estimación vectorial y matricial. Los resultados muestran que el factor dominante para alcanzar soluciones de adquisición de canal energéticamente eficientes es la complejidad de implementación de los algoritmos.

Los algoritmos de estimación ML y MMSE vectorial presentaron un consumo energético similar. Sin embargo, ML tiene un menor costo energético fijo y a diferencia de MMSE no requiere conocimiento de estadísticas de canal. Por ello, es el algoritmo que se recomienda para escenarios en los que la energía es limitada.

Trabajos futuros incluyen incorporar al problema de optimización los algoritmos de detección y sincronización que se ejecutan en un dispositivo real al inicializar un enlace MIMO, y extender esta metodología a la optimización energética conjunta de estimación de canal y transmisión de datos.

Palabras Claves: MIMO, estimación de canal, consumo energético, eficiencia energética

ABSTRACT

Exploiting the benefits of multiple antenna technology is strongly conditioned on the knowledge of the wireless channel that affects the transmissions. Various channel estimation algorithms have been proposed in the literature for multiple input multiple output (MIMO) channels and they are typically studied from a perspective that does not consider constraints of energy consumption in their implementations.

This thesis proposes a methodology for evaluating the energy consumption of channel estimation algorithms and uses it for finding the training signals that minimize this consumption for various algorithms. Concretely, we studied the maximum likelihood (ML) and minimum mean square error (MMSE) estimation algorithms in detail. For each algorithm, we analyzed schemes of vector and matrix estimation. The results show that complexity of implementation dominates the energy consumption over other sources of energy use.

The vector ML and vector MMSE estimation algorithms have a similar energy consumption. However, ML has a lower base energy consumption, and unlike MMSE, does not require knowledge of channel statistics. Therefore, we recommend the vector ML algorithm in scenarios with limited energy budget.

Future work includes incorporating detection and synchronization algorithms typically required by real devices to initialize a MIMO link, and extend this approach to the joint energy optimization of channel estimation and data communication.

Keywords: MIMO, channel estimation, energy consumption, energy efficiency

Capítulo 1. INTRODUCCIÓN

1.1. Motivación

La tecnología de múltiples antenas se ha incorporado paulatinamente a diversos sistemas de comunicaciones inalámbricas, tales como WiFi y redes de celulares (Duman y Ghrayeb (2008)). El principal objetivo es incrementar la tasa de datos disponible para los usuarios, manteniendo el desempeño de la red sin necesidad de aumentar el ancho de banda ni la potencia de transmisión de los dispositivos. Este potencial puede utilizarse alternativamente observando que para una misma tasa de datos, una red *Multiple Input-Multiple Output* (MIMO) requiere menor energía transmitida que una red *Single Input-Single Output* (SISO) manteniendo el mismo desempeño.

De esta manera, las técnicas MIMO pueden ser utilizadas en redes donde la energía disponible es un recurso limitado. Como proponen Cui, Goldsmith, y Bahai (2004), aplicaciones tales como redes de sensores, conformadas por dispositivos de comunicaciones autónomos alimentados por baterías, podrían verse beneficiadas por el uso de estas técnicas pues requieren de una alta eficiencia energética que permita una vida útil extensa de la red.

El aprovechamiento de las tecnologías MIMO requiere conocer el canal inalámbrico. En la práctica, este conocimiento se logra mediante la ejecución de algoritmos de estimación de canal en el receptor.

Tradicionalmente, los algoritmos de estimación de canal se han estudiado con el objetivo de maximizar la tasa de datos del sistema, y así maximizar la eficiencia espectral. Sin embargo, este enfoque se contrapone con escenarios donde la energía disponible es limitada y la eficiencia energética más relevante que la capacidad de transmisión de datos. Para escenarios en los que el objetivo es minimizar el consumo energético requerido por los algoritmos, es necesario una nueva forma de estudiar el problema de estimación de canal.

1.2. Problema de tesis

Recientemente han aparecido estudios que permiten optimizar el uso de la energía disponible en un dispositivo de comunicaciones inalámbricas, mediante esquemas de modulación adaptativa que dependen del ambiente de propagación. En Cui et al. (2004) y Rosas y Oberli (2012b) se presentan estudios orientados a minimizar el consumo total de una comunicación inalámbrica, tanto en enlaces SISO como en MIMO. Estos trabajos proponen modelos de consumo energético que consideran tanto la energía invertida en transmitir la información como la energía que los circuitos de transmisión y recepción requieren para procesarla. Así, incorporan variables como el número de retransmisiones necesarias para que los datos sean correctamente recibidos, y el gasto energético del procesamiento de señales, que se debe tanto a la circuitería analógica como a las operaciones digitales de banda base. Variando la potencia de transmisión y la tasa de datos, logran disminuir la energía total consumida entre un 50 % y un 80 % (Cui et al. (2004), Cui, Goldsmith, y Bahai (2005)) o extender el tiempo de vida útil de la red hasta en un 500 % Rosas y Oberli (2012a).

Sin embargo, estos estudios no incorporan los algoritmos de estimación de canal dentro del problema de optimización y asumen que su consumo es un *overhead* constante, independiente del algoritmo de estimación utilizado, de la precisión de la estimación y del tiempo que se destina a transmitir las señales de entrenamiento.

En sistemas de múltiples antenas, los algoritmos de estimación de canal representan una parte relevante del consumo energético de banda base. Esto se debe por una parte a que un porcentaje importante del tiempo de transmisión se destina a las señales de entrenamiento que permiten la estimación y, por otro lado, a que los algoritmos realizan operaciones algebraicas complejas tales como descomposición e inversión de matrices.

En este contexto, esta tesis resuelve el problema de determinar las señales de entrenamiento que permiten una estimación de canal energéticamente eficiente, para un algoritmo y una calidad de estimación dados. Para ello se desarrolla un modelo de consumo energético general para la estimación de canal en un enlace MIMO. Este modelo incorpora

la energía invertida en la transmisión de la señales de entrenamiento y en su recepción y procesamiento, que incluye el consumo de la circuitería analógica y de la ejecución un algoritmo de estimación de canal MIMO. Además, permite comparar distintos esquemas de estimación de canal, pues no es posible determinar *a priori* si un esquema de estimación de canal es energéticamente más eficiente que otro.

1.3. Objetivos

El objetivo de esta tesis es desarrollar una metodología que permita determinar las características de las señales de entrenamiento óptimas que permiten una estimación de canal energéticamente eficiente en un sistema MIMO, con un error de estimación acotado.

Para alcanzar este objetivo, la investigación se estructura entorno a tres objetivos específicos:

- Desarrollar un modelo de consumo energético del proceso completo de estimación de canal.
- Determinar el consumo energético que requiere la ejecución de dos algoritmos de estimación de canal ampliamente utilizado, máxima verosimilitud (ML) y mínimo error cuadrado medio (MMSE).
- Elaborar una regla que permita definir las señales de entrenamiento óptimas para distintos ambientes de propagación.

1.4. Contribuciones principales

Las principales contribuciones de la presente investigación son:

- El estudio de los estimadores de canal ML y MMSE desde el punto de vista de su consumo energético.
- Un método que permite comparar distintos algoritmos de estimación de canal, a través de la evaluación conjunta de su desempeño y la energía que requiere su ejecución.

- El desarrollo de una metodología que permite encontrar las señales de entrenamiento que minimizan el consumo energético para cada algoritmo de estimación de canal estudiado.

1.5. Organización de la tesis

Este documento se organiza de la siguiente manera: en el Capítulo 2 se presentan los algoritmos de estimación a estudiar y el estado del arte de los modelos de consumo energético para sistemas MIMO. En el Capítulo 3 se describe el modelo de señal y la arquitectura electrónica del sistema MIMO utilizado y se propone un modelo de consumo energético general para los algoritmos de estimación de canal. En el Capítulo 4 se detalla el consumo energético de los algoritmos estudiados y los indicadores de desempeño con que serán evaluados. El Capítulo 5 describe la formulación y resolución del problema de optimización que permite encontrar las señales de entrenamiento óptimas, y se presentan resultados numéricos basados en parámetros de consumo de dispositivos genéricos. Finalmente, en el Capítulo 6 se presentan conclusiones y se proponen temas de trabajo futuro.

Capítulo 2. MARCO TEÓRICO

2.1. Estimación de canal MIMO

Diversos estudios han surgido en torno a la problemática de conocer el canal inalámbrico, debido a la importancia que tiene para el aprovechamiento de las capacidades de un sistema MIMO. En ellos se han propuesto variados métodos que permiten estimar la matriz de canal, ya sea de manera ciega, como propone Tugnait y Huang (2000); utilizando señales de entrenamiento multiplexadas temporalmente con los datos (Biguesh y Gershman (2006)), o sobreponiendo estas señales a los datos que se desea transmitir (Coldrey y Bohlin (2007)).

En redes inalámbricas el medio físico de transmisión es compartido por múltiples dispositivos de comunicaciones. Para aumentar la eficiencia en el uso de este medio, la información es transmitida en bloques denominados paquetes.

Un paquete es una unidad que contiene datos que se desea transmitir e información de control que permite a la red hacer llegar los datos al receptor adecuado. La información de control incluye, entre otros, las direcciones de origen y destino y el tipo de codificación de los datos. Adicionalmente, los paquetes contienen secuencias de símbolos predefinidas que permiten al receptor realizar las tareas de detección de paquetes, sincronización y estimación de canal, ubicadas generalmente en el encabezado del paquete. En la Figura 2.1 se muestra la estructura típica de un paquete, que en el caso de sistemas MIMO es transmitido de manera coordinada por las antenas.

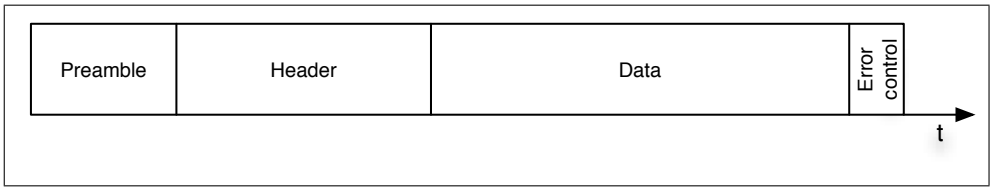

FIGURA 2.1. Estructura típica de un paquete. El preámbulo contiene señales de entrenamiento que permiten realizar las tareas de detección, sincronización y estimación de canal.

Los métodos de estimación de canal basados en entrenamiento son ampliamente utilizados en redes conmutadas por paquetes debido a su simplicidad y buen desempeño. Para estimar el canal inalámbrico estos métodos utilizan en conjunto la señal recibida y el conocimiento de la señal de entrenamiento transmitida .

Bajo diversos modelos de canal, se ha estudiado cómo determinar las señales de entrenamiento óptimas para distintos algoritmos de estimación. Biguesh y Gershman (2006) utiliza un modelo de canal con desvanecimiento plano, y estudia dos algoritmos de estimación: mínimos cuadrados (LS, *Least Squares*) y mínimo error cuadrado medio (MMSE, *Minimum Mean Square Error*). Para ambos, los autores buscan las señales de entrenamiento que minimizan el error cuadrático medio del algoritmo (MSE, *Mean Square Error*), restringiendo la potencia total transmitida. El algoritmo MMSE permite alcanzar un MSE menor al de LS, pero su ejecución requiere conocimiento de la potencia del ruido térmico y de la matriz de correlación del canal. Buscando algoritmos que requieran menor conocimiento de la estadísticas de segundo orden del sistema, Biguesh y Gershman (2006) proponen dos estimadores basados en los anteriores: LS escalado (SLS) y MMSE relajado (RMMSE).

En la Tabla 2.1 se muestra un resumen de los resultados encontrados por Biguesh y Gershman (2006), donde se observa que para tres de los estimadores el entrenamiento óptimo se logra con señales ortogonales entre las antenas y que existe un compromiso entre el conocimiento del sistema requerido y el error mínimo que es posible alcanzar.

TABLA 2.1. Resumen de resultados obtenidos por Biguesh y Gershman (2006).

	Señales de entrenamiento óptimas	MSE Mínimo	Conocimiento de estadísticas de segundo orden
LS	Ortogonales	+	Ninguno
SLS	Ortogonales	++	Varianza del ruido. Traza de la matriz de correlación
MMSE	Función de las estadísticas	+++	Varianza del ruido. Matriz de correlación
RMMSE	Ortogonales	++	Varianza del ruido. Traza de la matriz de correlación

En el estudio de Hassibi y Hochwald (2003), bajo un escenario de desvanecimiento plano en frecuencia, se busca maximizar la capacidad de canal durante un intervalo de coherencia. Para ello, se utiliza un estimador MMSE y se optimiza el límite inferior de la capacidad del sistema propuesto, variando las señales de entrenamiento, la potencia de transmisión y el intervalo de tiempo que se dedica a estimación de canal.

Los estudios anteriores ilustran los dos principales enfoques con que se enfrenta el problema de diseño de señales de entrenamiento óptimas: minimizar el error de estimación o maximizar la capacidad. Para cada uno de estos enfoques, diversos estudios han analizado las características que definen a dichas señales para distintos algoritmos de estimación en diversos ambientes de propagación.

Siguiendo el primer enfoque, Park y Wong (2003) buscan minimizar el MSE del mejor estimador lineal no sesgado (BLUE, *Best Linear Unbiased Estimator*) en ambientes en que el ruido tiene correlación espacial y temporal. Luego, profundizan este estudio en Park y Wong (2004), donde incorporan la presencia de múltiples fuentes de interferencia en el sistema. En ambos casos, los autores no proponen una expresión cerrada para la matriz de entrenamiento, sino las características que ésta debe cumplir.

En el segundo enfoque, Biguesh, Gazor, y Shariat (2009) buscan la matriz de entrenamiento que maximiza la información mutua del canal, considerando modelos de correlación espacial tanto para el ruido como para el canal. Este es un caso generalizado del problema de maximización de capacidad que permite determinar las señales de entrenamiento óptimas de manera independiente al estimador de canal utilizado.

Los estudios mencionados anteriormente comparten el uso de un modelo de desvanecimiento plano que permite representar escenarios cuasi-estáticos o de variaciones lentas. Debido a que no siempre es posible utilizar este supuesto, surgen investigaciones en que se estudia cómo afecta la elección de distintas señales de entrenamiento al desempeño del algoritmo de estimación de canal en ambientes de desvanecimiento selectivo en frecuencia. Karami (2007) estudia el desempeño del algoritmo LS en ambientes donde el canal varía de acuerdo a un proceso markoviano de primer orden. El autor determina el MSE

del algoritmo en función de la movilidad del ambiente, el número de antenas transmisoras y receptoras, la razón señal a ruido y el número de símbolos de entrenamiento, mostrando ejemplos de optimización en algunas de estas variables.

De manera similar, en S. Wang y Abdi (2006) se utiliza un modelo de canal de tiempo discreto con *taps*, en el que se busca minimizar el MSE de los algoritmos de estimación MMSE y BLUE, dada una restricción en la potencia total de transmisión. En Cox, Huang, y Lozano (2002) se estudia el desempeño del algoritmo de estimación de máxima verosimilitud (ML, *Maximum likelihood*) en ambientes de desvanecimiento continuo. Dadas una movilidad del ambiente, número de antenas y nivel de ruido, se realiza una búsqueda exhaustiva del número de símbolos de entrenamiento que maximizan la capacidad de transmisión de datos en un intervalo de tiempo.

Ninguno de estos estudios considera restricciones energéticas en el diseño y uso de las señales de entrenamiento para los algoritmos de estimación de canal analizados. Solo algunos de ellos incorporan como restricción la potencia total transmitida, pero no consideran el costo energético total de la ejecución del algoritmo de estimación en el receptor ni de la circuitería requerida para transmitir y recibir las señales de entrenamiento.

2.2. Modelos de consumo para redes con restricciones energéticas

El desarrollo de electrónica de bajo costo y alta capacidad de cómputo y comunicación ha impulsado la expansión de redes compuestas por pequeños dispositivos autónomos, alimentados por baterías, que integran un tranceptor de radiofrecuencia, conversores de datos, un procesador y un conjunto de periféricos con diversas interfaces. Un conjunto de estos dispositivos, denominados nodos, capaces de realizar mediciones y de comunicarse entre sí es lo que se conoce como Red Inalámbrica de Sensores (RIS, en adelante).

Las RIS tienen variadas aplicaciones, tales como el monitoreo climatológico de áreas extensas dedicadas a agricultura, detección de incendios forestales, monitoreo de recursos hídricos, monitoreo sísmico de estructuras, entre otras. En muchas de estas aplicaciones, las redes están compuestas por decenas o cientos de nodos ubicados en lugares remotos,

por lo que el reemplazo de baterías es muy costoso y a veces imposible. Por esta razón, la eficiencia energética es un factor fundamental en RIS, pues determina la vida útil de la red.

Orientados a estas redes, han aparecido diversos estudios que buscan modelar el consumo energético de los nodos de manera precisa, con el objetivo de optimizar parámetros en el funcionamiento de los dispositivos y de la red. Muchos de estos trabajos están orientados a redes con tecnología de una antena, como se estudia en Q. Wang, Hempstead, y Yang (2006), donde se busca determinar el número de saltos que minimizan la potencia total requerida en una red con enlaces SISO para transmitir un paquete, dada una distancia entre transmisor y receptor. El modelo propuesto incorpora la potencia requerida por el procesamiento de banda base, los circuitos de radio-frecuencia (RF) y el amplificador de potencia, y permite separar los elementos cuya potencia es constante de aquellos cuyo consumo depende del radio de cobertura deseado. El estudio concluye que dado el costo energético de la electrónica de transmisión y recepción, las comunicaciones de un salto con mayor potencia transmitida resultan más eficientes que un red multi-salto en la que cada dispositivo disminuye su potencia de transmisión. Si bien este estudio se refiere exclusivamente a redes con enlaces SISO, muestra que el enfoque energético tradicional, cuyo énfasis se encuentra exclusivamente en minimizar la potencia transmitida, es insuficiente para estudios detallados de eficiencia energética.

En Liu y Li (2005) se propone un modelo de consumo energético para sistemas MIMO. Este incorpora la dimensión temporal al problema, cambiando el enfoque de minimización de potencia a minimización de energía. Los términos correspondientes al amplificador de potencia y a la circuitería incorporan el número total de bits y la tasa de transmisión de datos. Este estudio concluye que, para cada radio de cobertura deseado, el mínimo consumo energético se logra utilizando simultáneamente las ganancias de diversidad y de multiplexación que entrega el sistema MIMO. A cortas distancias domina la ganancia de multiplexación y a medida que el radio de cobertura crece, es más eficiente incorporar ganancia de diversidad.

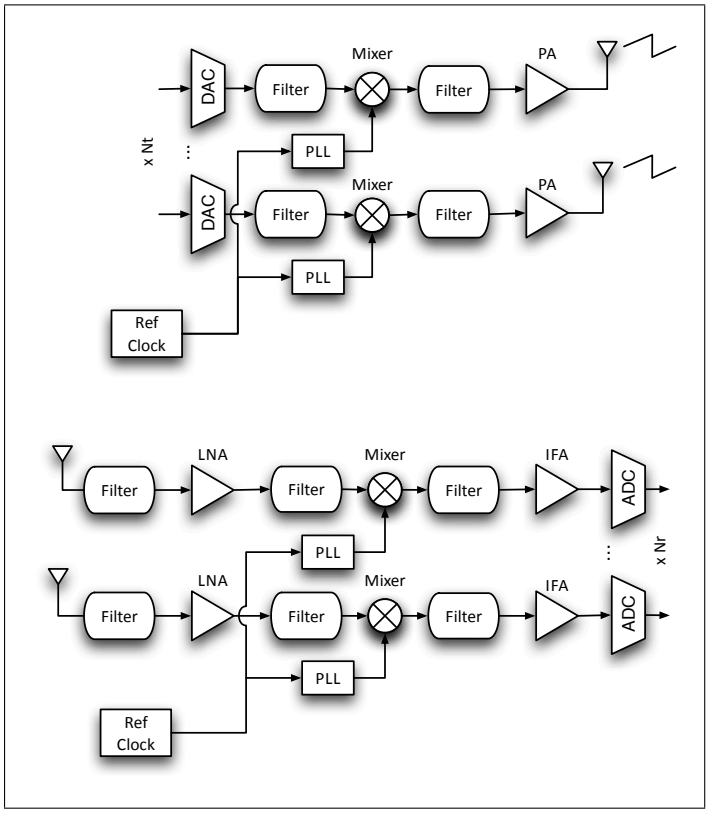

FIGURA 2.2. Diagrama de bloques del sistema MIMO propuesto por Cui et al. (2004).

En esta misma línea, Cui et al. (2004) propone un modelo que detalla el consumo de un tranceptor MIMO, incorporando cada bloque de la arquitectura que se muestra en la Figura 2.2. Este estudio busca minimizar el consumo de energía total requerido para enviar un bit de datos, dado por

$$\mathcal{E}_{\mathrm{b}} = \frac{P_{\mathrm{PA}} + P_C}{R_b}, \tag{2.1}$$

donde P_{PA} representa la potencia consumida por los amplificadores de potencia, P_C es la potencia consumida por el resto de la circuitería y R_b es la tasa de datos requerida por el sistema. Este estudio considera un sistema MIMO 2×2 con codificación Alamouti y concluye que tras superar una distancia determinada, el sistema MIMO es más eficiente que un sistema SISO equivalente. Esto se debe a que la ganancia de diversidad permite utilizar

constelaciones de mayor tamaño, aumentando la tasa de datos y por lo tanto reduciendo el tiempo de transmisión.

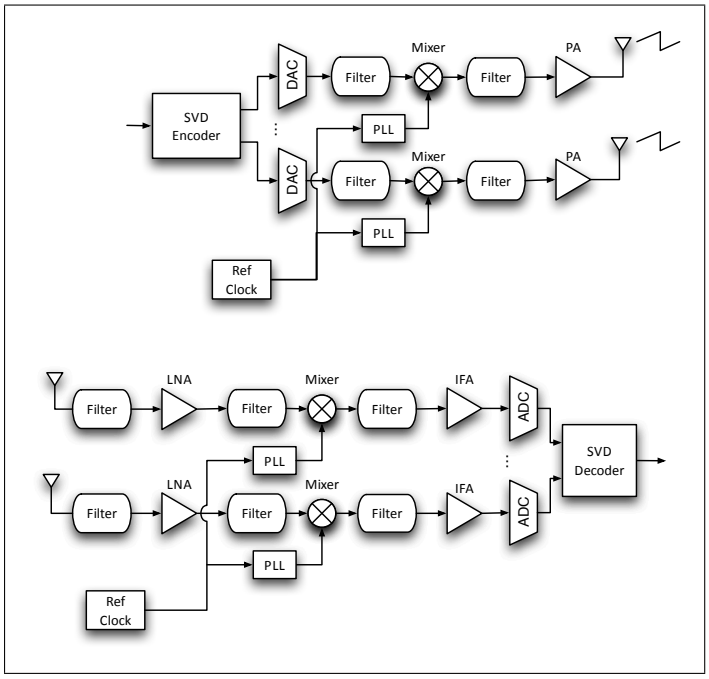

FIGURA 2.3. Diagrama de bloques del sistema MIMO propuesto por Rosas y Oberli (2012a).

Cabe destacar que Cui et al. (2004) no considera el consumo energético del procesamiento de banda base. Este supuesto puede resultar inadecuado considerando la complejidad de implementación de las operaciones MIMO. Por ello, para un sistema MIMO $N \times N$ con codificación SVD (*Singular Value Decomposition*), Rosas y Oberli (2012a) proponen la incorporación del procesamiento de banda base, dominado por la realización de la SVD. Para un sistema MIMO de esta naturaleza (ver Figura 2.3), la energía total consumida en la transmisión de un bit correctamente corresponde a la suma de la energía utilizada por el transmisor, $\mathcal{E}_T$, y el receptor, $\mathcal{E}_R$, como se muestra en Rosas y Oberli (2012a).

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_T &= \mathcal{E}_{\text{ST,tx}} + \mathcal{E}_{\text{bb,tx}} + \left(\mathcal{E}_{\text{el,tx}} + \mathcal{E}_{\text{PA}} + \mathcal{E}_{\text{fb,tx}}\right)\tau \\ \mathcal{E}_R &= \mathcal{E}_{\text{ST,rx}} + \mathcal{E}_{\text{bb,rx}} + \left(\mathcal{E}_{\text{el,rx}} + \mathcal{E}_{\text{fb,rx}}\right)\tau, \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde $\mathcal{E}_{\text{ST,tx}}$ y $\mathcal{E}_{\text{ST,rx}}$ corresponden a la energía de *start-up* que las ramas transmisora y receptora invierten en cambiar desde un estado de hibernación, en el que se encuentran por defecto, a un modo activo. Este valor es dominado por la estabilización de sintetizadores de frecuencia (Cui et al. (2005)). $\mathcal{E}_{\text{bb,tx}}$ y $\mathcal{E}_{\text{bb,rx}}$ corresponden al procesamiento de señales en banda base. En general, este consumo se debe al costo de las operaciones matemáticas realizadas en una unidad aritmética. Por su parte, $\mathcal{E}_{\text{el,tx}}$ y $\mathcal{E}_{\text{el,rx}}$ corresponden al consumo de los componentes analógicos, dominado por el procesamiento de la señal en pasabanda, filtros, mezcladores y sintetizadores de frecuencia. El consumo debido a la radiación electromagnética está representado por $\mathcal{E}_{\text{PA}}$. Finalmente, $\mathcal{E}_{\text{fb,tx}}$ y $\mathcal{E}_{\text{fb,rx}}$ corresponden a la energía necesaria para transmitir y recibir paquetes de *feedback* que permiten determinar si el bit fue recibido correctamente y decidir si es necesaria una retransmisión. Este aspecto está representado por τ, número de transmisiones que ocurren hasta que la recepción es correcta.

Aunque los estudios de Cui et al. (2004) y Rosas y Oberli (2012a) formulan un modelo de consumo energético detallado, no incorporan la energía requerida para la ejecución de algoritmos de estimación de canal, el que ambos consideran conocido.

Capítulo 3. MODELO DEL SISTEMA MIMO

En este capítulo se describe el modelo de señales utilizado y la arquitectura de los tranceptores MIMO considerados. Se desarrolla un modelo de consumo energético que describe la energía requerida por el proceso de estimación de canal.

3.1. Modelo del sistema de comunicaciones

En adelante, se considera un sistema MIMO con N_t antenas transmisoras y N_r antenas receptoras. Cada paquete transmitido contiene N_p símbolos de preámbulo y L símbolos de datos y el tiempo de símbolo es T_s.

El transmisor y receptor están separados por una distancia d. El canal MIMO entre ellos se asume de desvanecimiento plano y estático durante la transmisión de cada paquete. Este canal tiene dos componentes: pérdida por distancia y desvanecimiento local. Si en el tiempo de símbolo i se transmite un vector de señales $\vec{p_i}$ de tamaño $N_t \times 1$, entonces el vector $N_r \times 1$ recibido será:

$$\vec{y_i} = \frac{H}{\sqrt{Ad^\alpha}}\vec{p_i} + \vec{v_i}, \tag{3.1}$$

donde Ad^α representa la pérdida por distancia, siendo A un parámetro que depende de las ganancias de las antenas transmisora y receptora y de la longitud de onda de transmisión, y α el exponente de pérdida por distancia, dependiente del ambiente de propagación, como se muestra en Rappaport (2002).

La matriz H de dimensión $N_r \times N_t$ representa al canal inalámbrico y $\vec{v_i}$ es un vector de tamaño $N_r \times 1$ de ruido complejo Gaussiano de media 0 y varianza σ_n^2. Esta varianza depende del ancho de banda de la transmisión W, de la figura de ruido del receptor N_f y del margen de enlace M_l, que representa otros ruidos aditivos e interferencia (Cui et al. (2004)). De esta manera, $\sigma_n^2 = N_0 W N_f M_l$.

El receptor compensa la pérdida por distancia a través de una serie de amplificadores de bajo ruido en la entrada del módulo de RF. Esta compensación permite que a la entrada del estimador de canal se observe una señal $\vec{s_i} = \sqrt{Ad^\alpha}\vec{y_i}$. Al considerar los N_p símbolos

del preámbulo a transmitir como una matriz $P = \left[\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3 ... \vec{p}_{N_p}\right]$ y similarmente $S = \left[\vec{s}_1\ \vec{s}_2\ \vec{s}_3 ... \vec{s}_{N_p}\right]$, el modelo de la ecuación (3.1) se puede reescribir equivalentemente como

$$S = HP + \sqrt{Ad^{\alpha}}V, \tag{3.2}$$

donde $V = \left[\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3 ... \vec{v}_{N_p}\right]$ corresponde a la matriz $N_r \times N_p$ de ruido.

3.2. Arquitectura de los tranceptores

Para estudiar el consumo energético de los algoritmos de estimación de canal, es necesario considerar todos los bloques de procesamiento de señal de un par receptor/transmisor MIMO. En la Figura 3.1 se muestra la arquitectura de referencia utilizada, basada en la arquitectura propuesta en Cui et al. (2004) e incorporando el procesamiento de banda base.

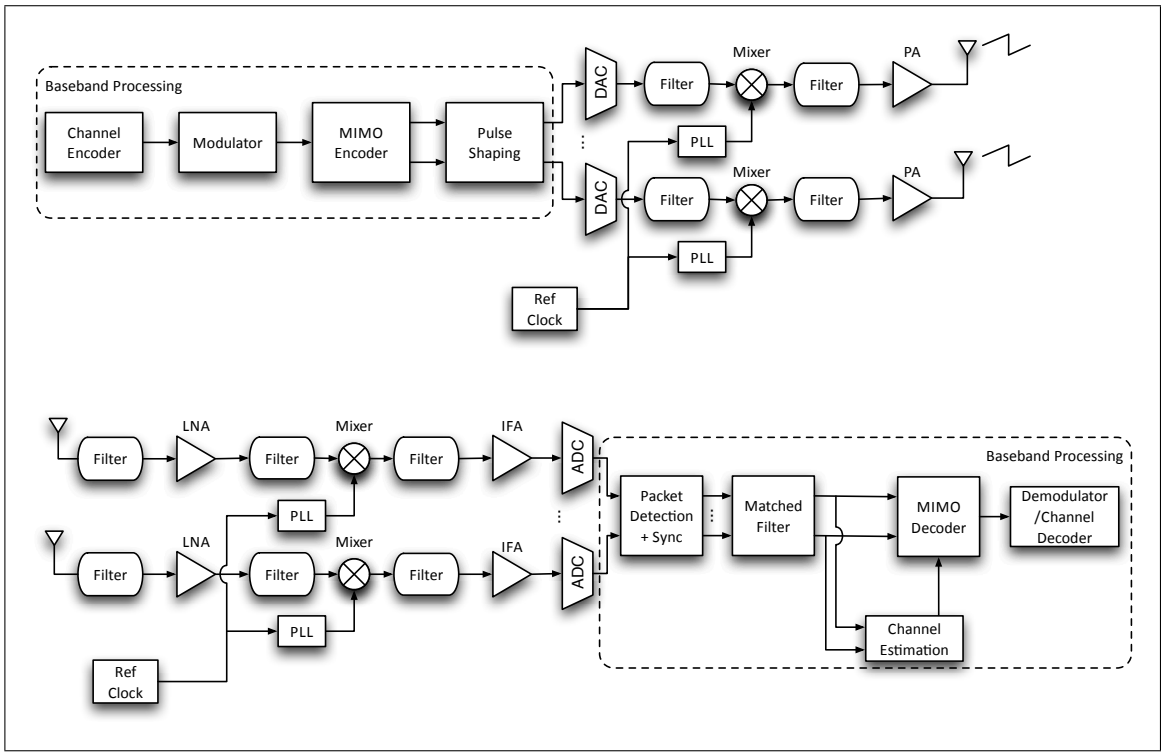

FIGURA 3.1. Diagrama de bloques del tranceptor MIMO de referencia utilizado en esta tesis.

3.3. Modelo de consumo energético

Cuando los modelos de consumo energético existentes son analizados a la luz de la búsqueda de señales de preámbulo que permitan una estimación de canal MIMO energéticamente óptima, es posible formular un problema de optimización en el que se busque simultáneamente el esquema MIMO a utilizar para la transmisión de datos y el algoritmo de estimación de canal, de modo que en conjunto consuman mínima energía. De acuerdo al esquema MIMO a utilizar (códigos de espacio-tiempo, *beamforming* en el receptor y/o en el transmisor, SVD u otro) puede ser deseable estimar la matriz de canal, su inversa o sólo una parte de ella. En esta tesis se asume que en todos los casos es necesario disponer de una estimación de canal.

La calidad de estimación de canal influye directamente en la tasa de error y, por lo tanto, en el número de retransmisiones requeridas para que un paquete sea recibido exitosamente. Sin embargo, si se fija un desempeño esperado para el estimador, tal que el error de estimación no afecte significativamente la decodificación, es posible independizar la adquisición del procesamiento de datos, permitiendo que el proceso de estimación sea estudiado y optimizado individualmente.

Para minimizar el consumo energético requerido por el proceso de estimación de canal, es de interés formular un modelo que describa la energía requerida para la transmisión, recepción y procesamiento de un preámbulo conocido en el receptor. Por ello, a diferencia del modelo descrito en Rosas y Oberli (2012a), en esta investigación no es de interés el número de retransmisiones necesarias para lograr transmitir un paquete sin errores (se asume $\tau = 1$) ni el consumo producido por los paquetes de *feedback*, pues la estimación de canal ocurre en cada transmisión. Incorporando estos supuestos al modelo de la ecuación (2.2), la energía total consumida por la ejecución de un algoritmo de estimación de canal está dada por:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{ST,tx}} + \mathcal{E}_{\text{ST,rx}} + \mathcal{E}_{\text{bb,tx}} + \mathcal{E}_{\text{bb,rx}} + \mathcal{E}_{\text{el,tx}} + \mathcal{E}_{\text{el,rx}} + \mathcal{E}_{\text{PA}}. \tag{3.3}$$

$\mathcal{E}_{\text{ST,tx}}$ y $\mathcal{E}_{\text{ST,rx}}$ corresponden a la energía requerida para que cada tranceptor pase de un estado de reposo al estado activo. Por simplicidad de notación, en adelante se denomina a esta energía $\mathcal{E}_{\text{ST}} = \mathcal{E}_{\text{ST,tx}} + \mathcal{E}_{\text{ST,rx}}$.

$\mathcal{E}_{\text{bb,tx}}$ corresponde al consumo de banda base del transmisor. De acuerdo a la arquitectura de la Figura 3.1 incluye las operaciones de codificación de canal, modulación, codificación MIMO y *pulse shaping*. Sin embargo, debido a que el preámbulo de entrenamiento es una señal que no requiere ser modulada ni codificada, es posible despreciar esta energía. Así, de manera consistente con Cui et al. (2004), en este estudio se considera $\mathcal{E}_{\text{bb,tx}} = 0$,

En la rama receptora, $\mathcal{E}_{\text{bb,rx}}$ incluye las operaciones detección de paquetes, sincronización de tiempo y frecuencia y estimación de canal, además de procesamientos realizados por filtros adaptados, muestreadores e interpoladores numéricos, decodificación MIMO y decodificación de canal. El supuesto de un sistema síncrono nos permite asumir que el consumo del bloque *Packet Detection + Sync* de la Figura 3.1 es despreciable. Debido a que este estudio se enfoca en el consumo energético del proceso de estimación de canal y no en el procesamiento de datos, los bloques *MIMO Decoder* y *Demodulator* pueden ser ignorados. Considerando estos supuestos, el consumo energético de banda base del receptor está dominado por el consumo energético del estimador de canal, es decir $\mathcal{E}_{\text{bb,rx}} = \mathcal{E}_{\text{estim}}$.

Incorporando los supuestos anteriores a la ecuación (3.3), la energía total consumida está dada por:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{ST}} + \mathcal{E}_{\text{el,tx}} + \mathcal{E}_{\text{PA}} + \mathcal{E}_{\text{el,rx}} + \mathcal{E}_{\text{estim}}. \tag{3.4}$$

A continuación se describen los términos de la ecuación (3.4). El superíndice $\check{}$ indica que la variable corresponde a una rama, ya sea transmisora o receptora.

1. *Energía de* Start-up, $\mathcal{E}_{\text{ST}}$

   De acuerdo a Cui et al. (2005), la energía requerida para poner a las rama del tranceptor en modo activo está dominada por $\check{\mathcal{E}}_{\text{ST}} = P_{\text{syn}} T_{\text{tr}}$, donde P_{syn} corresponde a la potencia que consume el sintetizador de frecuencia y T_{tr} el tiempo que éste demora en estabilizarse. De acuerdo a la arquitectura de la Figura 3.1, el sintetizador de frecuencia es el mismo para todas las ramas, por lo que su consumo es independiente de N_r y N_t. Como ambos tranceptores sólo cambian a modo activo una vez durante la transmisión de un paquete, tenemos que:

$$\mathcal{E}_{\text{ST}} = 2 P_{\text{syn}} T_{\text{tr}}. \tag{3.5}$$

2. *Energía consumida por los componentes analógicos de transmisión*, $\mathcal{E}_{\text{el,tx}}$

   Estos componentes consumen energía por cada símbolo de preámbulo enviado. Esta energía está dada por:

$$\mathcal{E}_{\text{el,tx}} = T_s \left(\check{P}_{\text{el,tx}} \sum_{t=1}^{N_t} \sum_{p=1}^{N_p} s_{(t,p)} + P_{\text{syn}} N_p \right) \tag{3.6}$$

   donde $\check{P}_{\text{el,tx}} = \check{P}_{\text{DAC}} + \check{P}_{\text{filter}} + \check{P}_{\text{mixer}}$ corresponde a la potencia consumida por cada rama transmisora. La nomenclatura es autoexplicativa a partir de la arquitectura presentada en la Figura 3.1. $s_{(t,p)}$ es una variable binaria que indica si la antena t transmite una señal en el tiempo de símbolo p ($t = 1...N_t, p = 1...N_p$). Este modelo permite que cada antena transmisora pueda enviar una secuencia de símbolos diferente e incluye la posibilidad de que existan silencios dentro de cada una de estas secuencias.

3. *Energía consumida por los componentes analógicos de recepción*, $\mathcal{E}_{\text{el,rx}}$

   Corresponde al consumo de los componentes que se mantienen energizados durante el tiempo de recepción. Dado que interesa estudiar el consumo del procesamiento del preámbulo, este tiempo corresponde a $N_p T_s$. Así,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\text{el,rx}} &= N_p T_s P_{\text{el,rx}} \\ &= N_p T_s (\check{P}_{\text{el,rx}} N_r + P_{\text{syn}}),\end{aligned} \tag{3.7}$$

donde $\check{P}_{\text{el,rx}} = \check{P}_{\text{ADC}} + \check{P}_{\text{filter}} + \check{P}_{\text{mixer}} + \check{P}_{\text{LNA}} + \check{P}_{\text{IFA}}$ corresponde a la potencia consumida en cada rama receptora.

4. *Energía debido a la radiación electromagnética*, $\mathcal{E}_{\text{PA}}$

   De acuerdo a Cui et al. (2005), si cada símbolo de preámbulo se alimenta a la antena con una potencia $\check{P}_{\text{tx}}$, entonces el amplificador de potencia (PA) consume

$$\check{P}_{\text{PA}} = \frac{\xi}{\eta} \check{P}_{\text{tx}}, \tag{3.8}$$

   donde ξ es el *peak-to-average ratio* (PAR) de la señal transmitida y η es el *drain efficiency* del PA. El modelo de la ecuación (3.8) asume que η es constante, lo que en realidad no es apropiado (Q. Wang et al. (2006)). Sin embargo, para cada potencia transmitida es posible diseñar un amplificador que esté operando en este punto con la eficiencia adecuada. Considerando todas las ramas transmisoras, la energía consumida por los amplificadores de potencia corresponde a:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\text{PA}} &= \sum_{t=1}^{N_t} \sum_{p=1}^{N_p} \check{P}_{\text{PA}(t,p)} T_s s_{(t,p)} \\ &= T_s \frac{\xi}{\eta} \sum_{t=1}^{N_t} \sum_{p=1}^{N_p} \check{P}_{\text{tx}(t,p)} s_{(t,p)}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

   Este modelo incorpora la posibilidad de silencios en las secuencias de entrenamiento y que cada antena pueda transmitir símbolos a distinta potencia.

5. *Energía debido al estimador de canal*, $\mathcal{E}_{\text{estim}}$

   La estimación de canal se realiza cada vez que un paquete es recibido. En general, la ejecución de un algoritmo de estimación de canal requiere un conjunto de

K operaciones aritméticas diferentes, cada una de las cuales tiene un consumo energético $\mathcal{E}_k$ y se realiza n_k veces. Así

$$\mathcal{E}_{\text{estim}} = \sum_{k=1}^{K} n_k \mathcal{E}_k \tag{3.10}$$

Si las operaciones se ejecutan en una Unidad de Procesamiento Aritmético (APU), Sinha y Chandrakasan (2001) proponen la siguiente expresión aproximada para el consumo energético de la operación k

$$\mathcal{E}_k = V_{\text{dd}} I_o \Delta t_k, \tag{3.11}$$

donde V_{dd} es el voltaje de operación de la APU, I_o es la corriente media consumida por ella (función de V_{dd} y de la frecuencia de *clock*), y Δt_k es el tiempo que toma ejecutar la operación k en la APU. Este tiempo se relaciona directamente con el número de ciclos requeridos por la operación, c_k, y la frecuencia de operación de la APU, f_{APU}

$$\Delta t_k = \frac{c_k}{f_{\text{APU}}} \tag{3.12}$$

Reemplazando estos términos en la ecuación (3.11), resulta

$$\mathcal{E}_{\text{estim}} = \frac{V_{\text{dd}} I_o}{f_{\text{APU}}} \sum_{k=1}^{K} n_k c_k \tag{3.13}$$

En adelante c_{sum}, c_{prod}, c_{div} y c_{root} corresponden al número de ciclos requeridos por las operaciones de suma, producto, división y raíz cuadrada, respectivamente. Este conjunto de cuatro operaciones básicas permite representar todas las operaciones requeridas por los algoritmos de estimación de canal estudiados en la presente tesis.

Reemplazando las expresiones de las ecuaciones (3.5), (3.7), (3.6), (3.9) y (3.13) en la ecuación (3.4), se obtiene que la energía total requerida por la ejecución de un algoritmo de estimación de canal está dada por:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\text{total}} = 2P_{\text{syn}}T_{\text{tr}} + T_s\left(\check{P}_{\text{el,tx}}\sum_{t=1}^{N_t}\sum_{p=1}^{N_p} s_{(t,p)} + P_{\text{syn}}N_p\right) + T_s N_p(\check{P}_{\text{el,rx}}N_r + P_{\text{syn}}) \\ + T_s\frac{\xi}{\eta}\sum_{t=1}^{N_t}\sum_{p=1}^{N_p}\check{P}_{\text{tx}(t,p)}s_{(t,p)} + \frac{V_{\text{dd}}I_o}{f_{\text{APU}}}\sum_{k=1}^{K} n_k c_k.\end{aligned} \tag{3.14}$$

El receptor estima el canal inalámbrico utilizando las señales de entrenamiento recibidas bajo ruido y el conocimiento del preámbulo que fue transmitido. De acuerdo al modelo planteado en (3.2), el estimador de canal entrega una matriz $\hat{H}$, dadas una matriz P conocida y una matriz S observada. En este capítulo se caracterizan dos estimadores de canal de amplio uso a través de su desempeño y de la energía que consume su ejecución.

Estas características dependen tanto del método de estimación utilizado como de la forma de la matriz de preámbulo P. Para estimar la matriz H, es posible estimar secuencialmente cada una sus columnas utilizando un preámbulo en el que sólo una antena a la vez transmite una secuencia de símbolos piloto. En este caso, la matriz P tiene una forma como la que se muestra en la Figura 4.1. Para que cada columna de H sea estimada utilizando la misma cantidad de símbolos piloto, se requiere que para cada antena t se cumpla que $\sum_{p=1}^{N_p} s_{(t,p)} = \dfrac{N_p}{N_t}$. En adelante, se denomina *estimador vectorial* a aquellos algoritmos que estiman la matriz H por columnas.

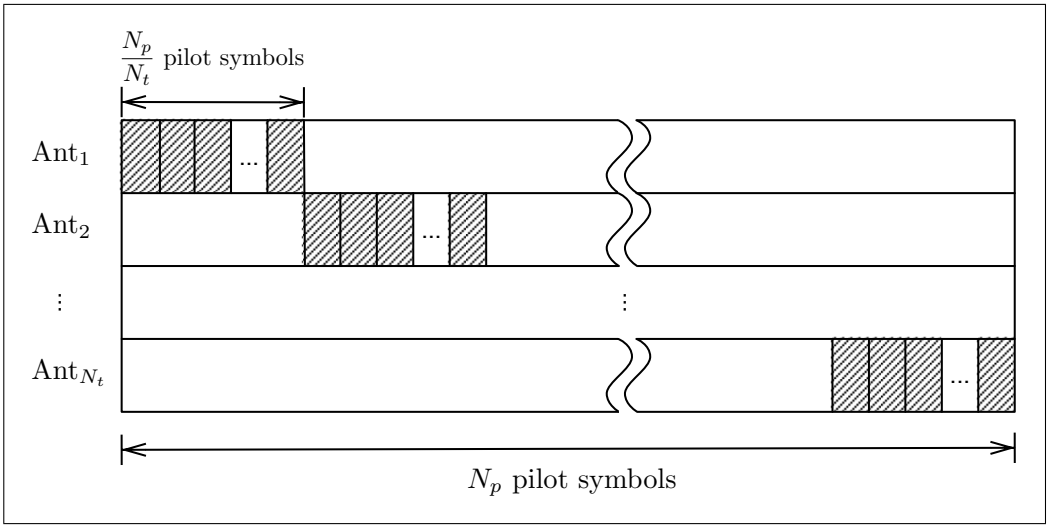

FIGURA 4.1. Distribución de símbolos piloto por antena para estimación vectorial. Cada antena transmite una secuencia de símbolos piloto mientras las demás antenas permanecen en silencio.

También es posible considerar esquemas en los que cada antena transmite una secuencia propia durante todo el preámbulo. La matriz P tiene una forma como la que se muestra

en la Figura 4.2, en la que cada antena transmite una secuencia diferente de símbolos piloto. Debido a que cada antena envía símbolos en los N_p instantes de preámbulo, se cumple que $\forall\ t, \sum_{p=1}^{N_p} s_{(t,p)} = N_p$. En adelante, se denomina *estimador matricial* a aquellos que utilizan un esquema de este tipo.

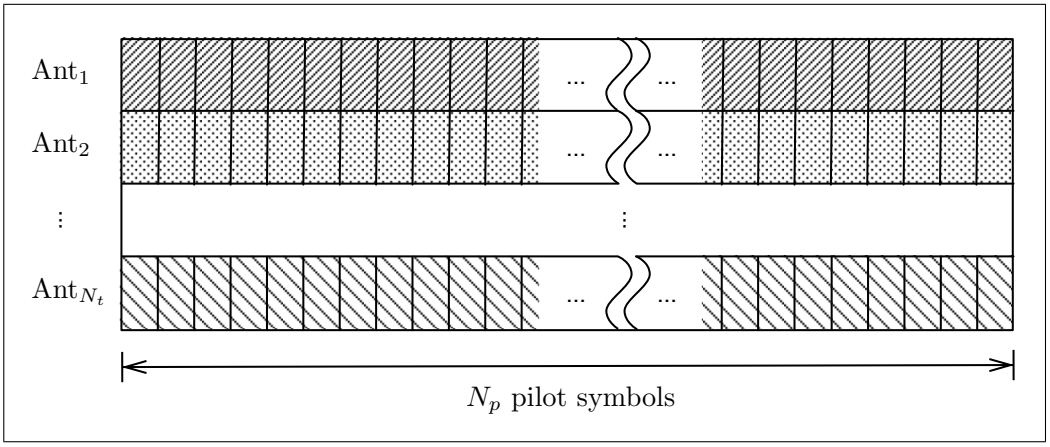

FIGURA 4.2. Durante el preámbulo, las antenas transmiten secuencias simultáneas, pero diferentes, de símbolos piloto.

En este estudio se consideran los estimadores ML y MMSE bajo cada uno los esquemas de entrenamiento, vectorial y matricial. Los cuatro estimadores se describen a continuación, detallando su error cuadrático medio y especializando el modelo de consumo energético de la ecuación (3.14) para cada uno.

En adelante, x^H indica la operación hermitiana sobra la matriz x, $\mathrm{tr}\{\cdot\}$ indica la traza de la matriz, $\mathbb{E}\{\cdot\}$ indica el valor esperado e I_M denota una matriz identidad de tamaño $M \times M$.

4.1. Algoritmo ML matricial

Dadas las matrices P y S, el estimador de máxima verosimilitud para la matriz H está dado por (Biguesh y Gershman (2006))

$$\hat{H}_{\text{matrix,ML}} = SP^H \left(PP^H\right)^{-1}. \tag{4.1}$$

Dado que P es una matriz conocida, es posible precalcular su pseudo inversa $P^{\dagger} = P^H \left(PP^H\right)^{-1}$ a *priori*. Así, el costo energético del algoritmo corresponde a realizar el producto matricial entre la matriz recibida S, de dimensiones $N_r \times N_p$, y la matriz $P^{\dagger}$, de dimensiones $N_p \times N_r$. En la Tabla 4.1 se muestra el número total de operaciones reales requeridas por el algoritmo (ver Anexo C).

TABLA 4.1. Número de instrucciones requeridas por el estimador ML matricial.

Operación	Número de instrucciones
Suma	$n_{\text{sum}} = 2N_rN_t(2N_p - 1)$
Producto	$n_{\text{prod}} = 4N_rN_tN_p$

Conocido el número de operaciones que este algoritmo requiere y asumiendo que todas las antenas transmiten con la misma potencia, de manera que $\forall\ (t,p), P_{\text{tx}(t,p)} = \dfrac{P_{\text{tx}}}{N_t}$, el modelo energético general de la ecuación (3.14) puede especializarse a la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\text{matrix ML}} &= 2P_{\text{syn}}T_{\text{tr}} + (N_t\check{P}_{\text{el,tx}} + N_r\check{P}_{\text{el,rx}} + 2P_{\text{syn}})T_sN_p \\ &\quad + \frac{\xi}{\eta}T_sN_pP_{\text{tx}} + \frac{2V_{\text{dd}}I_o}{f_{\text{APU}}}\left((2N_p - 1)c_{\text{sum}} + 2N_pc_{\text{prod}}\right)N_tN_r.\end{aligned} \tag{4.2}$$

Utilizando el modelo de señal de la ecuación (3.2), el error cuadrático esperado para este algoritmo corresponde a

$$\begin{aligned}\text{MSE}_{\text{matrix,ML}} &= \mathbb{E}\left\{\|H - \hat{H}_{\text{matrix,ML}}\|^2\right\} \\ &= Ad^{\alpha}\sigma_n^2N_r\text{tr}\left\{(PP^H)^{-1}\right\}\end{aligned} \tag{4.3}$$

De acuerdo a Kay (1993), para una matriz X de tamaño $m \times m$, se tiene

$$\text{tr}\left\{X^{-1}\right\} \geq \sum_{i=1}^{m}(x_{i,i})^{-1}, \tag{4.4}$$

donde $x_{i,i}$ es el elemento $i-$ésimo de la diagonal de X y la igualdad se alcanza si X es diagonal. Aplicando esta desigualdad a la expresión obtenida para el MSE, se observa

que este alcanza un mínimo cuando las secuencias de entrenamiento de las antenas son ortogonales entre sí, es decir $PP^H \propto I_{N_t}$. Con ello,

$$\text{MSE}_{\text{matrix,ML}} = \frac{Ad^{\alpha}\sigma_n^2 N_r N_t^2}{N_p P_{\text{tx}}}. \tag{4.5}$$

4.2. Algoritmo ML vectorial

Este algoritmo estima cada columna de la matriz H secuencialmente con el criterio de máxima verosimilitud. Para estimar la columna j de la matriz H sólo se requiere de las columnas de la matriz S que corresponden al preámbulo transmitido por la $j-$ésima antena. Estas columnas pueden representarse por $\tilde{S}_j$, submatriz compuesta por las columnas $\left[\left((j-1)\frac{N_p}{N_t}+1\right) : \left(j\frac{N_p}{N_t}\right)\right]$ de S. Con ello el modelo de la ecuación (3.2) se reduce a la ecuación (4.6).

$$\begin{aligned} S_{\left[(j-1)\frac{N_p}{N_t}+1:j\frac{N_p}{N_t}\right]} &= \begin{bmatrix} h_{1,j} \\ h_{2,j} \\ \vdots \\ h_{N_r,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{j,(j-1)\frac{N_p}{N_t}+1} & p_{j,(j-1)\frac{N_p}{N_t}+2} & \cdots & p_{j,j\frac{N_p}{N_t}} \end{bmatrix} \\ &\quad + \sqrt{Ad^{\alpha}} \begin{bmatrix} v_{1,(j-1)\frac{N_p}{N_t}+1} & \cdots & v_{1,j\frac{N_p}{N_t}} \\ v_{2,(j-1)\frac{N_p}{N_t}+1} & \cdots & v_{2,j\frac{N_p}{N_t}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{N_r,(j-1)\frac{N_p}{N_t}+1} & \cdots & v_{N_r,j\frac{N_p}{N_t}} \end{bmatrix} \\ S_{\left[(j-1)\frac{N_p}{N_t}+1:j\frac{N_p}{N_t}\right]} &= h^j \vec{p}_j + \sqrt{Ad^{\alpha}} V_{\left[(j-1)\frac{N_p}{N_t}+1:j\frac{N_p}{N_t}\right]} \\ \tilde{S}_j &= h^j \vec{p}_j + \sqrt{Ad^{\alpha}} \tilde{V}_j \end{aligned} \tag{4.6}$$

En esta ecuación, h^j corresponde a la columna $j-$ésima de la matriz H, $\vec{p}_j$ a la fila $j-$ésima de tamaño reducido de la matriz P y $\tilde{V}_j$ a una matriz de ruido de tamaño reducido.

Dados $\tilde{S}_j$ y $\vec{p}_j$, es posible estimar la columna j de H con máxima verosimilitud:

$$\hat{h}^j_{\text{ML}} = \tilde{S}_j \frac{\vec{p}_j^H}{\|\vec{p}_j\|^2}. \tag{4.7}$$

Para realizar esta estimación, para cada columna de H se requiere la multiplicación de $\tilde{S}_j$, de tamaño $N_r \times \frac{N_p}{N_t}$, por un vector de tamaño $\frac{N_p}{N_t} \times 1$. Se realizan $\frac{N_r N_p}{N_t}$ productos complejos y $N_r \left(\frac{N_p}{N_t} - 1\right)$ sumas complejas. En la Tabla 4.2 se muestra el número total de operaciones reales requeridas por el algoritmo ML vectorial, de acuerdo a la equivalencia entre operaciones complejas y reales propuesta en el Anexo A.

TABLA 4.2. Número de instrucciones requeridas por el estimador ML vectorial.

Operación	Número de instrucciones
Suma	$n_{\text{sum}} = 2N_r(2N_p - N_t)$
Producto	$n_{\text{prod}} = 4N_r N_p$

Conocido el número de operaciones que este algoritmo requiere y asumiendo que se cumple que para todo (t, p) en que un símbolo es transmitido $P_{\text{tx}(t,p)} = P_{\text{tx}}$, el modelo energético general puede especializarse en este caso, resultando:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\text{vector ML}} &= 2P_{\text{syn}}T_{\text{tr}} + \left(\check{P}_{\text{el,tx}} + N_r\check{P}_{\text{el,rx}} + 2P_{\text{syn}}\right) T_s N_p \\ &\quad + \frac{\xi}{\eta} T_s N_p P_{\text{tx}} + \frac{2V_{\text{dd}}I_o}{f_{\text{APU}}} \left((2N_p - N_t)c_{\text{sum}} + 2N_p c_{\text{prod}}\right) N_r.\end{aligned} \tag{4.8}$$

El error cuadrático esperado para este algoritmo corresponde a:

$$\begin{aligned}\text{MSE}_{\text{vector,ML}} &= \sum_{j=1}^{N_t} \mathbb{E}\left\{\|h^j - \hat{h}^j_{\text{ML}}\|^2\right\} \\ &= Ad^{\alpha}\sigma_n^2 N_r \sum_{j=1}^{N_t} \frac{1}{\|\vec{p}_j\|^2}.\end{aligned} \tag{4.9}$$

De acuerdo a la Figura 4.1, cada columna se estima utilizando $\frac{N_p}{N_t}$ símbolos. Si todas las antenas transmiten con la misma potencia la expresión (4.9) se simplifica a (4.5). Esto muestra que el algoritmo ML vectorial tiene el mismo MSE que el algoritmo ML matricial, pero difieren en su complejidad de implementación.

4.3. Algoritmo MMSE matricial

Este estimador busca la matriz $\hat{H}_{\text{MMSE}}$ que minimiza el error cuadrado medio de la estimación. El estimador lineal de menor error cuadrado medio tiene la forma

$$\hat{H}_{\text{matrix,MMSE}} = SX_o, \tag{4.10}$$

donde $X_o = \arg\min_X E\{\|H - SX\|^2\}$. Minimizando la función se obtiene

$$X_o = P^H \left(N_r A d^\alpha \sigma_n^2 R_H^{-1} + PP^H\right)^{-1}, \tag{4.11}$$

donde $R_H = \mathbb{E}\{H^H H\}$ corresponde a las estadísticas de segundo orden del canal. Esta matriz puede ser obtenida de estimaciones de canal de transmisiones anteriores y representa una dificultad adicional para el uso de este estimador. Este método requiere además conocer la varianza del ruido, σ_n^2.

Con ello,

$$\hat{H}_{\text{matrix,MMSE}} = SP^H \left(N_r A d^\alpha \sigma_n^2 R_H^{-1} + PP^H\right)^{-1}, \tag{4.12}$$

Este resultado es consistente con el obtenido por Biguesh y Gershman (2006), e incorpora el efecto de pérdida por distancia de la ecuación (3.2).

Asumiendo que los valores de R_H y σ_n^2 se actualizan en cada estimación, para calcular $\hat{H}_{\text{matrix,MMSE}}$ se requiere calcular la inversas de las matrices R^H y $\left(N_r A d^\alpha \sigma_n^2 R_H^{-1} + PP^H\right)$, ambas de tamaño $N_t \times N_t$. Además, se requiere de un conjunto de sumas y productos complejos como se detalla en el Anexo C. En la Tabla 4.3 se muestra el número total de sumas, productos, divisiones y raíces requeridas por el estimador, considerando que la inversión de matrices se realiza utilizando descomposición QR propuesta en Singh,

Prasad, y Balsara (2007) y detallada en el Anexo B.

TABLA 4.3. Número de instrucciones requeridas por el estimador MMSE matricial.

Operación	Número de instrucciones
Suma	$n_{\text{sum}} = \frac{64}{3}N_t^3 - 3N_t^2 + \frac{17}{3}N_t + 4 + 4N_rN_t(N_p + N_t - 1)$
Producto	$n_{\text{prod}} = \frac{64}{3}N_t^3 + 14N_t^2 + \frac{26}{3}N_t + 8 + 4N_rN_t(N_p + N_t)$
División	$n_{\text{div}} = 2(3N_t^2 + N_t)$
Raíz	$n_{\text{root}} = 2N_t$

Al igual que en los casos anteriores, el modelo de consumo energético de la ecuación (3.14) se especializa:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\text{matrix MMSE}} &= 2P_{\text{syn}}T_{\text{tr}} + (N_t\check{P}_{\text{el,tx}} + N_r\check{P}_{\text{el,rx}} + 2P_{\text{syn}})T_sN_p \\ &\quad + \frac{\xi}{\eta}T_sN_pP_{\text{tx}} + \frac{V_{\text{dd}}I_o}{f_{\text{APU}}}\left(n_{\text{sum}}c_{\text{sum}} + n_{\text{prod}}c_{\text{prod}} + n_{\text{div}}c_{\text{div}} + n_{\text{root}}c_{\text{root}}\right)\end{aligned} \tag{4.13}$$

donde n_{sum}, n_{prod}, n_{div} y n_{root} corresponden al número de instrucciones indicados en la Tabla 4.3.

El error de estimación está dado por:

$$\begin{aligned}\text{MSE}_{\text{matrix,MMSE}} &= \mathbb{E}\left\{\|H - \hat{H}_{\text{matrix,MMSE}}\|^2\right\} \\ &= \text{tr}\left\{\left(R_H^{-1} + \frac{PP^H}{N_rAd^{\alpha}\sigma_n^2}\right)^{-1}\right\}.\end{aligned} \tag{4.14}$$

Cuando el ambiente de propagación es rico en *scattering*, $R_H \propto I_{N_t}$. Adicionalmente, si las señales de entrenamiento son ortogonales, es posible utilizar la expresión (4.4) con igualdad. Utilizando ambos supuestos y considerando un preámbulo como el que se

muestra en la Figura 4.2, con $P_{\text{tx}(t,p)} = \dfrac{P_{\text{tx}}}{N_t}, \forall(t,p)$, resulta:

$$\text{MSE}_{\text{matrix,MMSE}} = \frac{Ad^{\alpha}\sigma_n^2 N_r N_t^2}{N_r Ad^{\alpha}\sigma_n^2 + N_p P_{\text{tx}}}. \tag{4.15}$$

Comparando este resultado con (4.5), se observa que para un mismo par de valores (N_p, P_{tx}), este estimador tiene un menor error cuadrático medio que los estimadores ML.

4.4. Algoritmo MMSE vectorial

De manera similar al caso del estimador de máxima verosimilitud, es posible estimar las columnas de la matriz H secuencialmente con mínimo error cuadrado medio. Así, la estimación está dada por $\hat{h}^j_{\text{MMSE}} = \tilde{S}_j x^j_o$, donde $x^j_o = \arg\min_x E\{\|h^j - \tilde{S}_j x^j\|^2\}$.

Utilizando el modelo equivalente de la ecuación (4.6) y minimizando la función objetivo se obtiene

$$\hat{h}^j_{\text{MMSE}} = \tilde{S}_j \vec{p}_j^{\,H} \frac{R_H^{(j)}}{N_r Ad^{\alpha}\sigma_n^2 + R_H^{(j)}\|\vec{p}_j\|^2}, \tag{4.16}$$

donde $R_H^{(j)}$ es el elemento j de la diagonal de la matriz R_H definida en la sección anterior.

Además del producto entre $\tilde{S}_j$ y $\vec{p}_j^{\,H}$, la estimación de cada columna de H requiere actualizar el coeficiente que acompaña esta expresión y multiplicarlo por sus N_r términos. En la Tabla 4.4 se muestra el total de operaciones requeridas por el algoritmo MMSE vectorial.

TABLA 4.4. Número de instrucciones requeridas por el estimador ML vectorial.

Operación	Número de instrucciones
Suma	$n_{\text{sum}} = 4N_rN_p + 9N_t$
Producto	$n_{\text{prod}} = 4N_rN_p + 4N_rN_t + 14N_t$
División	$n_{\text{div}} = 2N_t$

Asumiendo que todas las antenas transmiten con potencia P_{tx}, el modelo energético especializado para este algoritmo está dado por:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\text{vector MMSE}} &= 2P_{\text{syn}}T_{\text{tr}} + \left(\check{P}_{\text{el,tx}} + N_r\check{P}_{\text{el,rx}} + 2P_{\text{syn}}\right)T_sN_p + \frac{\xi}{\eta}T_sN_pP_{\text{tx}} \\ &+ \frac{V_{\text{dd}}I_o}{f_{\text{APU}}}\left(\left(4N_rN_p + 9N_t\right)c_{\text{sum}} + \left(4N_rN_p + 2N_t(2N_r+7)\right)c_{\text{prod}} + 2N_tc_{\text{div}}\right)\end{aligned} \tag{4.17}$$

El error cuadrático esperado para este algoritmo está dado por

$$\begin{aligned}\text{MSE}_{\text{vector,MMSE}} &= \sum_{j=1}^{N_t}\mathbb{E}\left\{\|h^j - \hat{h}^j_{\text{MMSE}}\|^2\right\} \\ &= Ad^{\alpha}\sigma_n^2N_r\sum_{j=1}^{N_t}\frac{R_H^{(j)}}{Ad^{\alpha}\sigma_n^2N_r + R_H^{(j)}\|\vec{p}_j\|^2}.\end{aligned} \tag{4.18}$$

Considerando un ambiente de propagación rico en *scattering*, se tiene que

$$\text{MSE}_{\text{vector,MMSE}} = Ad^{\alpha}\sigma_n^2N_r\frac{N_t^2}{Ad^{\alpha}\sigma_n^2N_r + N_pP_{\text{tx}}}. \tag{4.19}$$

Al igual que para el caso ML, el estimador MMSE matricial y el estimador MMSE vectorial presentan el mismo MSE (en caso de ambientes ricos en *scattering*). Sin embargo, el algoritmo de estimación vectorial de MMSE tiene significativamente menor complejidad de implementación que el caso matricial, ya que no requiere de inversión de matrices.

Capítulo 5. SEÑALES DE ENTRENAMIENTO ÓPTIMAS

Las expresiones analíticas para el consumo energético y el error cuadrado medio de cada uno de los algoritmos obtenidas en el Capítulo 4 permiten encontrar las señales de entrenamiento que minimizan el consumo energético durante el proceso de estimación de canal. Estas señales deben mantener un error esperado de estimación por debajo de una cota previamente fijada según el desempeño de estimación requerido por el sistema.

El objetivo abordado en el presente capítulo es resolver el problema de minimización de la energía que se consume conjuntamente en la transmisión, recepción y procesamiento de un preámbulo destinado a estimar el canal inalámbrico, sujeto a que dicha estimación tenga un error esperado medio acotado. Se resolverá este problema para cada uno de los algoritmos descritos. A partir de parámetros de dispositivos genéricos, se evaluará los resultados obtenidos en cada caso.

5.1. Problema de optimización

Para resolver el problema de minimización se consideran los siguientes supuestos:

- Los tranceptores tienen el mismo número de antenas. Esto es $N_r = N_t = N$
- Se requiere que se transmitan al menos N símbolos piloto, para que los algoritmos sean factibles. En el caso de los algoritmos matriciales, se requieren como mínimo N símbolos pilotos para que la matriz PP^H sea invertible. En el caso de los algoritmos vectoriales, se requiere transmitir al menos un símbolo piloto por antena, lo que implica un mínimo de N símbolos piloto en total.
- Las variables de optimización serán el número de pilotos N_p y la potencia de transmisión del preámbulo P_{tx}.
- El número de antenas N y el ancho de banda W son parámetros de diseño, así como también los parámetros T_s y σ_n^2 que dependen de ellos.
- Las variables P_{syn}, T_{tr}, $\check{P}_{\text{el,tx}}$, $\check{P}_{\text{el,rx}}$, V_{dd}, I_o ,f_{APU}, c_{sum}, c_{prod}, c_{div}, c_{root}, η son propias de cada dispositivo y se consideran parámetros del problema.

- Los valores de pérdida por distancia A y exponente de pérdida α son parámetros que dependen del ambiente de propagación y se consideran dados.
- La distancia d y la cota de error ϵ_{max} varían de acuerdo a la configuración y el desempeño esperado del sistema. Si bien se consideran parámetros para resolver el problema de optimización, la solución obtenida será función los valores de d y ϵ_{max} escogidos.
- En cada instante de tiempo se transmite con potencia total P_{tx}. Para los estimadores matriciales, cada símbolo se transmite con $\dfrac{P_{\text{tx}}}{N}$, y para los estimadores vectoriales, cada símbolo se transmite con potencia P_{tx}.
- Los símbolos piloto se transmiten a la misma potencia. Por lo tanto $\xi = 1$.
- La potencia de transmisión P_{tx} está acotada por la potencia máxima que puede entregar el amplificador de potencia, P_{max}.
- La matriz de canal H corresponde a un canal Rayleigh no correlacionado. Así, $R_H = \mathbb{E}\{H^* H\} = N I_N$.

El problema de optimización corresponde a

$$\begin{aligned} \min_{N_p, P_{\text{tx}}} \quad & \mathcal{E}_{\text{total}}(N_p, P_{\text{tx}}) \\ \text{s.a.} \quad & \text{MSE} \leq \epsilon_{\text{max}} \\ & N_p \geq N \\ & P_{\text{tx}} \leq P_{\text{max}} \end{aligned} \tag{5.1}$$

De acuerdo a las expresiones (4.2), (4.5), (4.8), (4.9), (4.13), (4.15), (4.17) y (4.19), encontradas en el capítulo anterior, este problema puede formularse en general como:

$$\begin{aligned} \min_{N_p, P_{\text{tx}}} \quad & k_1 + k_2 N_p + k_3 N_p P_{\text{tx}} & \\ \text{s.a.} \quad & -N_p P_{\text{tx}} + k_4 & \leq 0 \\ & -N_p + N & \leq 0 \\ & P_{\text{tx}} - P_{\text{max}} & \leq 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

donde las constantes k_1, k_2, k_3 y k_4 son funciones de los parámetros del sistema y dependen del algoritmo utilizado (Tabla 5.1). Es importante notar que en todos los casos se debe resolver un problema de optimización entera, pues $N_p \in \mathbb{N}$. Adicionalmente, en el caso de los estimadores vectoriales, es necesario que $\frac{N_p}{N} \in \mathbb{N}$.

A continuación, se resolverá el problema de optimización tanto para los algoritmos de estimación matriciales como vectoriales, para obtener los valores óptimos de número de pilotos, N_p^* y de potencia transmitida, P_{tx}^*.

TABLA 5.1. Constantes k_1, k_2, k_3 y k_4 del problema de optimización según el algoritmo de estimación utilizado.

	k_1	k_2	k_3	k_4
ML Matricial	$2P_{\text{syn}}T_{\text{tr}} - 2\frac{V_{\text{dd}}I_o}{f_{\text{APU}}}N^2 c_{\text{sum}}$	$T_s(N\check{P}_{\text{el,tx}} + N\check{P}_{\text{el,rx}} + 2P_{\text{syn}}) + 4\frac{V_{\text{dd}}I_o}{f_{\text{APU}}}(c_{\text{sum}} + c_{\text{prod}})N^2$	$\frac{1}{\eta}T_s$	$\frac{Ad^{\alpha}\sigma_n^2 N^3}{\epsilon_{\text{max}}}$
ML Vectorial	$2P_{\text{syn}}T_{\text{tr}} - 2\frac{V_{\text{dd}}I_o}{f_{\text{APU}}}N^2 c_{\text{sum}}$	$T_s(\check{P}_{\text{el,tx}} + N\check{P}_{\text{el,rx}} + 2P_{\text{syn}}) + 4\frac{V_{\text{dd}}I_o}{f_{\text{APU}}}(c_{\text{sum}} + c_{\text{prod}})N$	$\frac{1}{\eta}T_s$	$\frac{Ad^{\alpha}\sigma_n^2 N^3}{\epsilon_{\text{max}}}$
MMSE Matricial	$2P_{\text{syn}}T_{\text{tr}} + \left\{\left(\frac{76}{3}N^3 - 7N^2 + \frac{17}{3}N + 4\right)c_{\text{sum}} + \left(\frac{76}{3}N^3 + 14N^2 + \frac{26}{3}N + 8\right)c_{\text{prod}} + (6N^2 + 2N)\,c_{\text{div}} + 2Nc_{\text{root}}\right\}\frac{V_{\text{dd}}I_o}{f_{\text{APU}}}$	$T_s(N\check{P}_{\text{el,tx}} + N\check{P}_{\text{el,rx}} + 2P_{\text{syn}}) + 4\frac{V_{\text{dd}}I_o}{f_{\text{APU}}}(c_{\text{sum}} + c_{\text{prod}})N^2$	$\frac{1}{\eta}T_s$	$\frac{Ad^{\alpha}\sigma_n^2 N}{\epsilon_{\text{max}}}(N^2 - \epsilon_{\text{max}})$
MMSE Vectorial	$2P_{\text{syn}}T_{\text{tr}} + 2\frac{V_{\text{dd}}I_o}{f_{\text{APU}}}\left\{(4N - N^2)c_{\text{sum}} + 9Nc_{\text{prod}} + Nc_{\text{div}}\right\}$	$T_s(\check{P}_{\text{el,tx}} + N\check{P}_{\text{el,rx}} + 2P_{\text{syn}}) + 2\frac{V_{\text{dd}}I_o}{f_{\text{APU}}}\left\{(2N+1)c_{\text{sum}} + (2N+2)\,c_{\text{prod}}\right\}$	$\frac{1}{\eta}T_s$	$\frac{Ad^{\alpha}\sigma_n^2 N}{\epsilon_{\text{max}}}(N^2 - \epsilon_{\text{max}})$

5.2. Solución analítica para algoritmos de estimación matriciales

Para resolver el problema de optimización entera, se considera como base el problema de optimización de la ecuación (5.2) y se relaja la restricción de pertenencia de N_p a los números naturales. Luego se estudia la factibilidad de las soluciones obtenidas, agregando la restricción $N_p \in \mathbb{N}$ cuando corresponda.

El lagrangiano del problema (5.2) es

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = k_1 + k_2 N_p + k_3 N_p P_{\text{tx}} + \lambda_1 \left(-N_p P_{\text{tx}} + k_4\right) \\ + \lambda_2 \left(-N_p + N\right) + \lambda_3 \left(P_{\text{tx}} - P_{\text{max}}\right)\end{aligned} \tag{5.3}$$

y tiene dos soluciones factibles:

- Caso I, $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0$

  Las restricciones de error y de número de pilotos mínimo están activas, por lo que

  $$N_p^* = N \tag{5.4}$$

  $$P_{\text{tx}}^* = \frac{k_4}{N} \tag{5.5}$$

  Esto ocurre cuando $k_4 \leq N P_{\text{max}}$. En este caso N_p es un número entero y la solución obtenida es factible.

- Caso II, $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 \neq 0$

  Las restricciones de error y de potencia máxima están activas, por lo que $P_{\text{tx}} = P_{\text{max}}$ y $N_p = \frac{k_4}{P_{\text{max}}}$.

  Esto ocurre cuando $k_4 \geq N P_{\text{max}}$, y en este caso N_p no necesariamente es un número entero. Debido a que en este caso se utiliza la potencia máxima del dispositivo, no es factible disminuir el número de símbolos pilotos y seguir cumpliendo la restricción de error máximo. Por esta razón,

  $$N_p^* = \left\lceil \frac{k_4}{P_{\text{max}}} \right\rceil \tag{5.6}$$

donde $\lceil x \rceil$ es el menor entero mayor que x. Así, es posible reducir la potencia a

$$P_{\text{tx}}^{*} = \frac{k_4}{N_p^{*}}. \tag{5.7}$$

5.3. Solución analítica para algoritmos de estimación vectoriales

Para utilizar una estrategia de resolución similar al caso anterior, se define una variable auxiliar $N_u = \frac{N_p}{N} \in \mathbb{N}$. Para los estimadores vectoriales, el lagrangiano del problema es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = k_1 + k_2 N N_u + k_3 N N_u P_{\text{tx}} + \lambda_1 \left(-N N_u P_{\text{tx}} + k_4\right) \\ + \lambda_2 \left(-N_u + 1\right) + \lambda_3 \left(P_{\text{tx}} - P_{\text{max}}\right) \end{aligned} \tag{5.8}$$

y tiene dos soluciones factibles:

- Caso I, $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0$

  Las restricciones de error y de número de pilotos mínimo están activas, por lo que

  $$N_u^{*} = 1 \tag{5.9}$$

  $$P_{\text{tx}}^{*} = \frac{k_4}{N} \tag{5.10}$$

  Esto ocurre cuando $k_4 \leq N P_{\text{max}}$. En este caso $N_p^{*} = N$ es un número entero, por lo que es una solución factible.

- Caso II, $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 \neq 0$

  Las restricciones de error y de potencia máxima están activas, por lo que $P_{\text{tx}} = P_{\text{max}}$ y $N_u = \frac{k_4}{N P_{\text{max}}}$.

  Esto ocurre cuando $k_4 \geq N P_{\text{max}}$, donde N_u no necesariamente es un número natural. Al incorporar la restricción $N_u \in \mathbb{N}$, se tiene que el óptimo es $N_u^{*} = \left\lceil \frac{k_4}{N P_{\text{max}}} \right\rceil$. Así,

  $$N_p^{*} = N \left\lceil \frac{k_4}{N P_{\text{max}}} \right\rceil \tag{5.11}$$

  $$P_{\text{tx}}^{*} = \frac{k_4}{N_p^{*}} \tag{5.12}$$

En todas las soluciones se tiene $\lambda_1 \neq 0$, lo que indica que la restricción de error máximo siempre se encuentra activa, ya que es esta la que regula el equilibrio entre la potencia transmitida y el número de pilotos. Para todos los algoritmos, la expresión $k_4 = NP_{\text{max}}$ define una frontera que separa la solución óptima en dos regiones, descritas anteriormente como Caso I y Caso II. Debido a que en la formulación del problema la distancia d de separación entre tranceptores se considera como una variable libre, esta expresión define una distancia crítica d_c. Para $d \leq d_c$, la solución óptima es enviar el número mínimo de pilotos, N; para $d > d_c$, la solución es $P_{\text{tx}} \sim P_{\text{max}}$.

Para los algoritmos ML, la distancia crítica está dada por

$$d_{\text{c,ML}} = \left(\frac{P_{\text{max}} \epsilon_{\text{max}}}{A \sigma_n^2 N^2} \right)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{5.13}$$

Para los algoritmos MMSE, esta distancia está dada por

$$d_{\text{c,MMSE}} = \left(\frac{P_{\text{max}} \epsilon_{\text{max}}}{A \sigma_n^2 (N^2 - \epsilon_{\text{max}})} \right)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{5.14}$$

Utilizando las constantes de la Tabla 5.1 y las soluciones encontradas en (5.4), (5.5), (5.6), (5.7), (5.9), (5.10), (5.11) y (5.12) al problema de optimización, la Tabla 5.2 resume el valor óptimo del número de pilotos y la potencia de transmisión para cada algoritmo.

TABLA 5.2. Número de pilotos (N_p) y potencia de transmisión (P_{tx}) óptimas para cada algoritmo de estimación de canal.

	$d \leq d_c$		$d > d_c$	
	N_p^*	P_{tx}^*	N_p^*	$P_{\text{tx}}^* *$
ML Matricial	N	$\frac{Ad^\alpha \sigma_n^2 N^2}{\epsilon_{\max}}$	$\left\lceil \frac{Ad^\alpha \sigma_n^2 N^3}{P_{\max}\epsilon_{\max}} \right\rceil$	$\frac{\left(\frac{Ad^\alpha \sigma_n^2 N^3}{\epsilon_{\max}}\right)}{\left\lceil \frac{Ad^\alpha \sigma_n^2 N^3}{P_{\max}\epsilon_{\max}} \right\rceil}$
ML Vectorial	N	$\frac{Ad^\alpha \sigma_n^2 N^2}{\epsilon_{\max}}$	$N\left\lceil \frac{Ad^\alpha \sigma_n^2 N^2}{P_{\max}\epsilon_{\max}} \right\rceil$	$\frac{\left(\frac{Ad^\alpha \sigma_n^2 N^2}{\epsilon_{\max}}\right)}{\left\lceil \frac{Ad^\alpha \sigma_n^2 N^2}{P_{\max}\epsilon_{\max}} \right\rceil}$
MMSE Matricial	N	$\frac{Ad^\alpha \sigma_n^2 (N^2-\epsilon_{\max})}{\epsilon_{\max}}$	$\left\lceil \frac{Ad^\alpha \sigma_n^2 N(N^2-\epsilon_{\max})}{P_{\max}\epsilon_{\max}} \right\rceil$	$\frac{\left(\frac{Ad^\alpha \sigma_n^2 N(N^2-\epsilon_{\max})}{\epsilon_{\max}}\right)}{\left\lceil \frac{Ad^\alpha \sigma_n^2 N(N^2-\epsilon_{\max})}{P_{\max}\epsilon_{\max}} \right\rceil}$
MMSE Vectorial	N	$\frac{Ad^\alpha \sigma_n^2 (N^2-\epsilon_{\max})}{\epsilon_{\max}}$	$N\left\lceil \frac{Ad^\alpha \sigma_n^2 (N^2-\epsilon_{\max})}{P_{\max}\epsilon_{\max}} \right\rceil$	$\frac{\left(\frac{Ad^\alpha \sigma_n^2 (N^2-\epsilon_{\max})}{\epsilon_{\max}}\right)}{\left\lceil \frac{Ad^\alpha \sigma_n^2 (N^2-\epsilon_{\max})}{P_{\max}\epsilon_{\max}} \right\rceil}$

5.4. Resultados numéricos

Para comparar el consumo energético mínimo de los estimadores se evaluaron las expresiones (5.4) a (5.12) utilizando los parámetros propuestos por Cui et al. (2005) para un tranceptor genérico de bajo consumo y canal inalámbrico (Tabla 5.3). Para la APU se consideran los parámetros propuestos por Rosas y Oberli (2012b) para una unidad aritmética estándar (Tabla 5.4). Se consideran tranceptores con $N = 4$ antenas.

TABLA 5.3. Parámetros de un tranceptor genérico de bajo consumo.

Parámetro	Descripción	Valor
W	Ancho de banda	10 kHz
T_s	Tiempo de símbolo	100 μs
P_{syn}	Potencia consumida por el Sintetizador de frecuencia	50 mW
T_{tr}	Tiempo de estabilización del Sintetizador de frecuencia	5 μs
$\check{P}_{\text{el,tx}}$	Potencia consumida por una rama de transmisión	98.2 mW
$\check{P}_{\text{el,rx}}$	Potencia consumida por una rama de recepción	112.5 mW
α	Coeficiente de pérdida	3.5
A	Pérdida por distancia	30 dB
N_0	Densidad de potencia del ruido	-174 dBm/Hz
N_{f}	Figura de ruido del receptor	10 dB
M_{l}	Margen de enlace	40 dB
η	*Drain efficiency* del amplificador de potencia	0.35

TABLA 5.4. Parámetros de una unidad de procesamiento aritmético genérica.

Parámetro	Descripción	Valor
f_{APU}	Frecuencia de la APU	20 MHz
V_{dd}	Voltaje de la APU	3 V
$I_o(V_{\text{dd}}, f_{\text{APU}})$	Corriente media	6.37 mA
c_{add}	Costo de Suma	6 ciclos
c_{prod}	Costo de Producto	13 ciclos
c_{div}	Costo de División	21 ciclos
c_{root}	Costo de Raíz cuadrada	149 ciclos

Para analizar los resultados obtenidos, se estudia primero el algoritmo ML matricial. En las Figuras 5.1 y 5.2 se muestra el número de pilotos y la potencia transmitida óptimos, respectivamente, considerando un error de estimación máximo de $-20\,\text{dB}$.

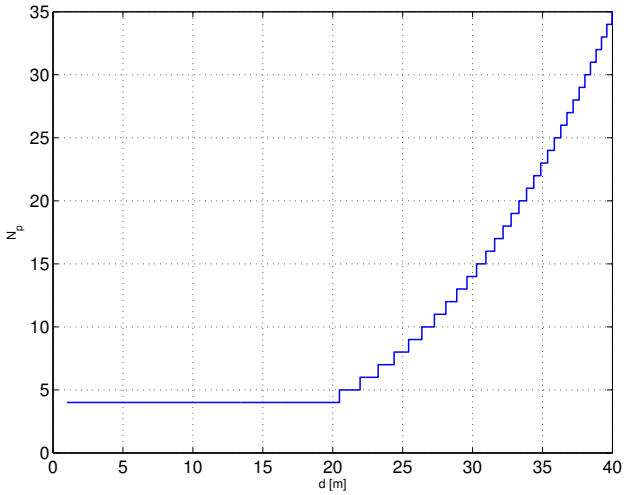

FIGURA 5.1. Número de pilotos óptimo vs distancia entre tranceptores para el algoritmo ML matricial, con $\epsilon_{\text{max}} = -20$ dB. El número de pilotos óptimo se mantiene igual al número de antenas hasta la distancia crítica, cerca de 20.5 m y luego aumenta como d^{α}.

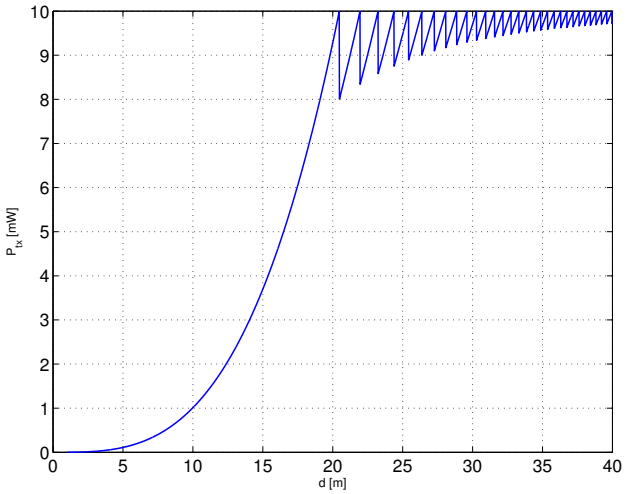

FIGURA 5.2. Potencia transmitida óptima vs distancia entre tranceptores para el algoritmo ML matricial, con $\epsilon_{\text{max}} = -20$ dB. Para $d \leq d_c$ la potencia aumenta proporcionalmente a d^{α}. Superada la distancia crítica la potencia oscila debido al comportamiento escalonado del número de pilotos.

Puede observarse que el número de pilotos se mantiene constante hasta la distancia crítica, que en este caso es de aproximadamente 20.5 m. A partir de esta distancia, N_p se incrementa en pasos enteros (Figura 5.1). Por su lado, la potencia transmitida crece de manera continua a medida que aumenta la distancia. Después de la distancia crítica, la potencia de transmisión óptima oscila debido a que N_p^* es el entero superior de la solución al problema relajado, lo que permite disminuir la potencia transmitida. Esta potencia tiende asintóticamente a la potencia máxima que puede entregar el dispositivo (Figura 5.2).

Dejando fijo el desempeño esperado para los algoritmos en un error de -20 dB, en la Figura 5.3 se muestra la energía mínima requerida por cada algoritmo para distancias de hasta 40 m. Debido a su menor complejidad de implementación, los algoritmos vectoriales consumen menos energía. En particular, el algoritmo ML vectorial es el más eficiente energéticamente para todas las separaciones entre tranceptores consideradas, a excepción de la región próxima a la distancia crítica. En esta región, minimizar el número de pilotos es el factor clave. En el caso vectorial, N_p crece de N en N, mientras que en el caso matricial N_p se incrementa por unidades. Ello permite una optimización con mayor resolución.

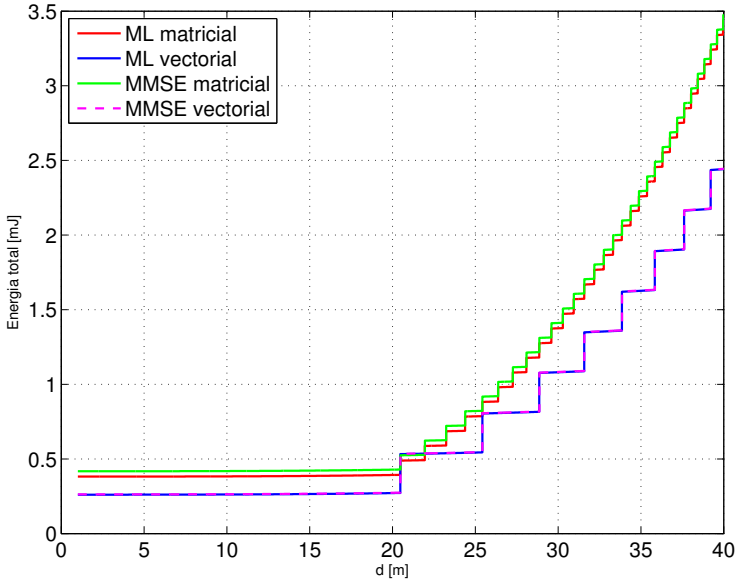

FIGURA 5.3. Energía mínima consumida por los algoritmos con $\epsilon_{\max} = -20\,\text{dB}$ en función de la distancia.

En la Figura 5.4 se muestra la razón señal a ruido (SNR, *signal-to-noise ratio*) resultante en la etapa de estimación de canal del algoritmo ML vectorial, para un MSE de -20 dB obtenido con mínima energía. Si se considera una SNR mínima de 7 dB, requerida para que el receptor detecte los paquetes correctamente, la máxima distancia de enlace a la que el sistema puede operar es aproximadamente 123 m. Para tranceptores con $N = 4$ antenas, a esta distancia se requiere 1280 símbolos piloto para alcanzar el error de estimación definido y se consume 100 veces más energía que al operar a la distancia crítica. De esta manera, para comunicar dos tranceptores separados a 120 m resulta más eficiente en términos de energía de estimación incorporar trancpetores intermedios que reduzcan la distancia de enlace. Esto sugiere que bajo ciertas condiciones puede resultar más eficiente en términos energéticos utilizar comunicación de multi-saltos. Este análisis debe incorporar la energía requerida para transmitir correctamente un mensaje, aspecto que se encuentra más allá del alcance de este trabajo.

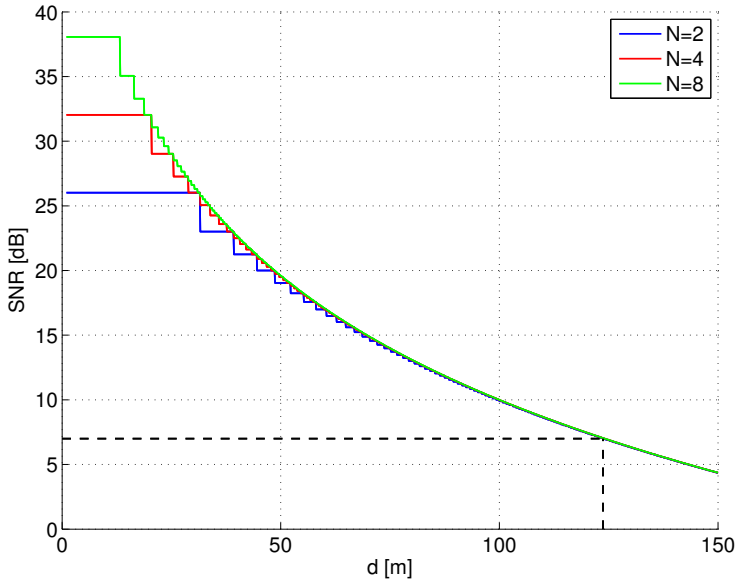

FIGURA 5.4. SNR resultante para estimación de energía mínima utilizando el algoritmo ML vectorial con $\epsilon_{\text{max}} = -20\,\text{dB}$ en función de la distancia. La línea punteada indica 7 dB y $d = 123$ m, distancia máxima alcanzada con esta SNR.

Adicionalmente, en la Figura 5.4 se muestra la SNR para tranceptores con $N = 2$ y $N = 8$ antenas. Debido a que se considera la misma potencia máxima, el cambio en

el número de antenas no cambia la distancia máxima que este puede alcanzar. A cortas distancias, a medida que crece el número de antenas es necesaria una mayor SNR para mantener el error de estimación acotado.

La distancia máxima entre dos tranceptores depende fuertemente del exponente de pérdida del canal inalámbrico α (Figura 5.5). En un sistema con $N = 4$ antenas y un MSE de -20 dB, la distancia máxima varía entre 50 m para $\alpha = 4$ (que representa por ejemplo un ambiente de construcción con obstrucciones) y 480 m para $\alpha = 2.5$, que puede representar un área urbana donde existe línea vista entre los tranceptores (Rappaport (2002)).

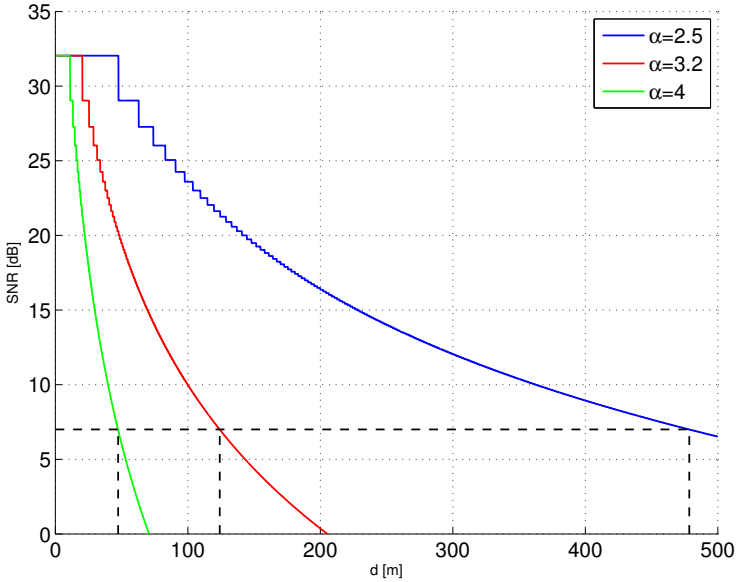

FIGURA 5.5. SNR resultante para estimación de energía mínima utilizando el algoritmo ML vectorial con $\epsilon_{\max} = -20\,\text{dB}$, para distintos ambientes de propagación.

Por otro lado, se estudia el comportamiento de los algoritmos de estimación en una distancia particular (por ejemplo $d = 30\,\text{m}$). En la Figura 5.6 se evalúa la optimalidad de los algoritmos frente a distintas tolerancias al error de estimación. Como es de esperar, a medida que aumenta la tolerancia de error, la energía mínima requerida disminuye. El algoritmo ML vectorial sigue siendo el que consume menor energía.

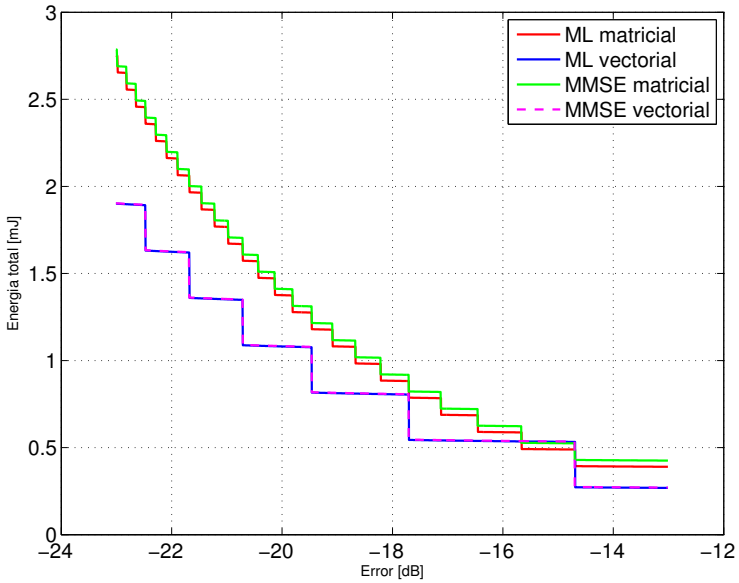

FIGURA 5.6. Energía mínima consumida por los algoritmos a $d = 30\,m$ en función del error de estimación $\epsilon_{\max}$.

A partir de estos resultados se puede concluir que, si bien para un mismo par (N_p, P_{tx}), el algoritmo MMSE matricial tienen un menor error esperado, su complejidad de implementación lo hace menos eficiente energéticamente que el algoritmo ML matricial. Lo mismo sucede en el caso vectorial.

Además, debido a la reducción en el tamaño de las operaciones requeridas, los algoritmos que estiman la matriz H columna a columna son más eficientes que su respectivo equivalente matricial.

Capítulo 6. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

6.1. Resultados y discusión

En la presente tesis se estudió la estimación de canal MIMO en términos de su eficiencia energética. Ello permitió identificar las características que deben tener señales de entrenamiento óptimas para minimizar la energía consumida en este proceso.

La revisión del estado del arte muestra que si bien existen diversos estudios acerca de optimalidad de señales de entrenamiento para diversos algoritmos de estimación de canal, estos están enfocados en maximizar la capacidad de transmisión de datos o en minimizar el error de estimación, en ambos casos sin considerar el consumo energético que implica su ejecución.

Como contraparte, los estudios orientados a eficiencia energética en sistemas MIMO están enfocados en la minimización de la energía total requerida para transmitir un bit correctamente. Estos trabajos han omitido el costo energético de estimar el canal, asumiendo que este es conocido sin error.

Se desarrolló un modelo de consumo energético general que fue especializado para los algoritmos de estimación de canal ML y MMSE, ambos en sus versiones matricial y vectorial. Cabe destacar que en general los estudios encontrados en la literatura sólo consideran la versión matricial de los algoritmos, en que toda la matriz de canal H es estimada de manera simultánea, y no consideran la posibilidad de la estimación secuencial.

Para cada uno de los cuatro algoritmos de estimación, se encontró una expresión para el número de símbolos pilotos y la potencia de transmisión que minimizan el consumo energético total requerido por la ejecución del algoritmo. Utilizando parámetros de consumo de un tranceptor genérico, se comparó el consumo mínimo obtenido para los distintos estimadores, operando cada uno en sus valores N_p y P_{tx} óptimos. Debido a su baja complejidad de implementación, el estimador ML vectorial resultó ser el de menor consumo energético total entre los algoritmos comparados. En escenarios donde se busca eficiencia

energética, se concluye que es más relevante la baja complejidad de implementación de un algoritmo que el error esperado de estimación que puede alcanzar.

Es importante destacar que aunque los estimadores ML no requieren de información adicional a la señal de entrenamiento y la señal recibida para estimar el canal inalámbrico, la configuración de sus parámetros óptimos depende de A, d, α, σ_n^2. La implementación de la solución óptima en un sistema real requiere de algún tipo de realimentación que permita al transmisor conocer estos parámetros. Si no existe realimentación, estos parámetros deberán ser medidos previamente. Esto podría llevar a soluciones subóptimas.

Los resultados muestran que es posible optimizar el proceso de estimación de canal en un sistema MIMO en términos de su consumo energético, y que los distintos algoritmos existentes presentan *trade-off* entre el mínimo error cuadrado medio que pueden alcanzar y la complejidad de implementarlos.

6.2. Trabajo futuro

Como primer tema de trabajo futuro, es importante la implementación de un simulador a nivel de señal. Este permitirá verificar que con los valores óptimos de N_p y P_{tx} propuestos se obtiene una estimación de canal con error acotado por el valor máximo establecido. A partir de este simulador, es posible estudiar la tolerancia de la solución desarrollada a cambios en los niveles de ruido y/o a canales que presentan correlación espacial.

Luego, como expansión de este trabajo, es posible incorporar el proceso de inicialización de un enlace MIMO completo, que además de estimación de canal requiere de algoritmos de detección de paquetes y sincronización. Para estos algoritmos, habría que desarrollar un modelo de consumo energético e incorporarlo al modelo actual. Adicionalmente, a las restricciones se debe incorporar indicadores de desempeño para los algoritmos. En el caso de los algoritmos de detección, estos indicadores pueden asociarse a la tasa de verdaderos positivos y falsos positivos. Para los algoritmos de sincronización, puede utilizarse el error cuadrado medio de la estimación de desfases en tiempo y frecuencia.

Así sería posible minimizar el consumo energético de la adquisición completa del enlace, incorporando nuevos términos a la función objetivo desarrollada, y nuevas restricciones de desempeño.

Por otro lado, manteniendo los supuestos de sincronización utilizados en este estudio, es posible incorporar el trabajo desarrollado en Rosas y Oberli (2012a), acerca de la optimización energética de la transmisión de datos. Para diversos esquemas MIMO, sería posible analizar qué señales de entrenamiento y qué nivel de error de estimación de canal permiten minimizar la energía total invertida en transmitir un mensaje correctamente, incluyendo retransmisiones. Una investigación de este tipo podría incorporar algoritmos de estimación de canal que permitan obtener sólo una parte de la matriz H o directamente su inversa, dependiendo de las características del esquema MIMO en estudio.

Referencias

Biguesh, M., Gazor, S., y Shariat, M. H. (2009). Optimal Training Sequence for MIMO Wireless Systems in Colored Environments. *IEEE Transactions on Signal Processing*, *57*(8), 3144–3153.

Biguesh, M., y Gershman a.B. (2006). Training-based MIMO channel estimation: a study of estimator tradeoffs and optimal training signals. *IEEE Transactions on Signal Processing*, *54*(3), 884–893.

Coldrey, M., y Bohlin, P. (2007). Training-Based MIMO Systems Part I: Performance Comparison. *IEEE Transactions on Signal Processing*, *55*(11), 5464–5476.

Cox, D., Huang, H., y Lozano, a. (2002). Estimation of continuous flat fading MIMO channels. En *Proceedings of the WCNC 2002* (Vol. 1, pp. 189–193).

Cui, S., Goldsmith, A., y Bahai, A. (2004). Energy-Efficiency of MIMO and Cooperative MIMO Techniques in Sensor Networks. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, *22*(6), 1089–1098.

Cui, S., Goldsmith, A., y Bahai, A. (2005). Energy-Constrained Modulation Optimization. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, *4*(5), 2349–2360.

Duman, T., y Ghrayeb, A. (2008). *Coding for MIMO Communication Systems*. J. Wiley & Sons.

Hassibi, B., y Hochwald, B. (2003). How much training is needed in multiple-antenna wireless links? *IEEE Transactions on Information Theory*, *49*(4), 951–963.

Karami, E. (2007). Tracking Performance of Least Squares MIMO Channel Estimation Algorithm. *IEEE Transactions on Communications*, *55*(11), 2201–2209.

Kay, S. (1993). *Fundamentals of statistical signal processing: Estimation theory*. PTR Prentice-Hall.

Liu, W., y Li, X. (2005). Energy efficiency of MIMO transmissions in wireless sensor networks with diversity and multiplexing gains. En *Proceedings of ICASSP 2005* (pp. 897–900).

Park, B., y Wong, T. F. (2003). Training sequence optimization in MIMO systems with colored noise. En *Proceedings of MILCOM 2003* (Vol. 1, pp. 135 – 140).

Park, B., y Wong, T. F. (2004). Optimal training sequence in MIMO systems with multiple interference sources. En *Proceedings of the Globecom 2004.*

Rappaport, T. (2002). *Wireless communications: principles and practice*. Prentice Hall PTR.

Rosas, F., y Oberli, C. (2012a). Energy-efficient MIMO SVD communications. En *Submitted to PIMRC2012-Track 1: PHY and Fundamentals.*

Rosas, F., y Oberli, C. (2012b). Modulation optimization for achieving energy-efficient communications over fading channels. En *Proceedings of IEEE VTC2012-Spring.*

Singh, C. C. K., Prasad, S. H. S., y Balsara, P. T. (2007). VLSI architecture for matrix inversion using modified Gram-Schmidt based QR decomposition. *International Conference on VLSI*, 836 – 841.

Sinha, A., y Chandrakasan, A. P. (2001). JouleTrack: a web based tool for software energy profiling. En *IEEE Design Automation Conference* (pp. 220 – 225).

Tugnait, J. K., y Huang, B. (2000). On a Whitening Approach to Partial Channel Estimation and Blind Equalization of FIR / IIR Multiple-Input Multiple-Output Channels. *IEEE Transactions on Signal Processing*, *48*(3), 832–845.

Wang, Q., Hempstead, M., y Yang, W. (2006). A Realistic Power Consumption Model for Wireless Sensor Network Devices. En *Proceedings of the SECON 2006* (pp. 286–295).

Wang, S., y Abdi, A. (2006). Optimal Training Sequences For Efficient MIMO Frequency-Selective Fading Channel Estimation. En *IEEE Sarnoff Symposium, 2006* (pp. 1 – 4).

ANEXOS

ANEXO A. EQUIVALENCIA EN NÚMERO DE OPERACIONES REALES Y COMPLEJAS

Sean dos números complejos $x = a + ib$, $y = c + id$.

- Suma compleja

$$\begin{aligned} x + y &= a + ib + c + id \\ &= (a + c) + i(b + d) \end{aligned}$$

  Una suma compleja requiere realizar dos sumas reales.

- Producto complejo

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (a + ib) \cdot (c + id) \\ &= (ac - bd) + i(bc + ad) \end{aligned}$$

  Un producto complejo requiere realizar dos sumas y cuatro productos reales.

- División compleja

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} &= \frac{a + bi}{c + di} \\ &= \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} \\ &= \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right) + i\left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right) \end{aligned}$$

  Una división compleja requiere realizar tres sumas, seis productos y dos divisiones reales.

ANEXO B. INVERSIÓN DE MATRICES MEDIANTE DESCOMPOSICIÓN QR

De acuerdo a Singh et al. (2007), para invertir una matriz A de tamaño $N \times N$ resulta eficiente realizar su descomposición $A = QR$, donde R es una matriz triangular superior, y Q es una matriz ortogonal. Para la ejecución de este algoritmo de inversión se requiere encontrar las matrices Q y R, invertir la matriz R y luego realizar un producto matricial, para obtener $A^{-1} = R^{-1}Q^H$.

Algoritmo 1: Cálculo de Q y R

```
1  Creación de matriz auxiliar t;
2  for i ← 1 to N do
3      for j ← 1 to N do
4          Copiar los elementos de la matriz A;
5          t_(i,j) = A_(i,j);
6      end
7  end
8  Cálculo iterativo de Q y R;
9  for i ← 1 to N do
10     R_(i,i)     = ||t_(1:N,i)|| ;          // N prod ℂ, (N − 1) sum ℂ y 1 sqrt ℝ
11     Q_(1:N,i) = t_(1:N,i) / R_(i,i) ;      // N div ℂ
12     for j ← i + 1 to N do
13         R_(i,j) = Q_(i,1:N) · t_(1:N,j) ;  // N prod ℂ, (N − 1) sum ℂ
14         t_(1:N,j) = t_(1:N,j) − R_(i,j) · Q_(1:N,i) ;  // N prod ℂ, (N − 1) sum ℂ
15     end
16 end
```

En el Algoritmo 1 se presenta el cálculo de la matrices Q y R y se detalla el número de operaciones que requiere la ejecución de cada línea. De acuerdo a los **for** en los que están contenidas, las líneas **10** y **11** se ejecutan N veces, y las líneas **13** y **14** se ejecutan $\frac{N(N-1)}{2}$ veces. Por lo tanto, la obtención de las matrices Q y R requiere el siguiente número de operaciones

$$N^2(N-1) \text{ sum } \mathbb{C} + N^3 \text{ prod } \mathbb{C} + N^2 \text{ div } \mathbb{C} + N \text{ sqrt } \mathbb{R} \tag{B.1}$$

Algoritmo 2: Cálculo de R^{-1}

```
1  Inversión de matriz R;
2  for j ← 1 to N do
3      R^{-1}_{(j,j)} = 1 / R_{(j,j)} ;                          // 1 div ℂ
4      for i ← j − 1 to N do
5          for k ← j − 1 to N do
6              R^{-1}_{(i,j)} = R^{-1}_{(i,j)} + R^{-1}_{(i,k)} · R_{(k,j)} ;   // 1 prod ℂ, 1 sum ℂ
7          end
8      end
9      for k ← j − 1 to N do
10         R^{-1}_{(k,j)} = −R^{-1}_{(k,j)} / R_{(j,j)} ;        // 1 div ℂ
11     end
12 end
```

El Algoritmo 2 muestra la inversión de la matriz R. En él, la línea **3** se ejecuta N veces; la línea **6** se ejecuta $\frac{N(N-1)(2N-1)}{6}$ veces, y la línea **10** se ejecuta $\frac{N(N-1)}{2}$ veces. Por lo tanto la inversión de la matriz R requiere

$$\frac{N(N-1)(2N-1)}{6} \text{ sum } \mathbb{C} + \frac{N(N-1)(2N-1)}{6} \text{ prod } \mathbb{C} + \frac{N(N+1)}{2} \text{ div } \mathbb{C} \quad \text{(B.2)}$$

Finalmente para obtener A^{-1} se requiere multiplicar las matrices R^{-1} y Q^H, ambas de tamaño $N \times N$. Esto requiere

$$N^2(N-1) \text{ sum } \mathbb{C} + N^3 \text{ prod } \mathbb{C} \quad \text{(B.3)}$$

Utilizando las expresiones (B.1), (B.2) y (B.3) el total de operaciones requeridas para la inversión de la matriz A es

$$\frac{N(N-1)(8N-1)}{3} \text{ sum } \mathbb{C} + \frac{N(8N^2-3N+1)}{3} \text{ prod } \mathbb{C} + \frac{N(3N+1)}{2} \text{ div } \mathbb{C} + N \text{ sqrt } \mathbb{R} \quad \text{(B.4)}$$

ANEXO C. OPERACIONES REQUERIDAS POR LOS ALGORITMOS DE ESTIMACIÓN

C.1. ML matricial

$$\hat{H}_{\text{matrix,ML}} = SP^{\dagger}$$

Este estimador requiere del producto entre la matriz S de tamaño $N_r \times N_p$ y la matriz $P^{\dagger}$ de tamaño $N_p \times N_t$. Utilizando la definición de producto matricial, por cada elemento de la matriz resultante se requiere N_p productos y $N_p - 1$ sumas complejas. En total, se requiere

$$N_r N_t (N_p - 1) \text{ sum } \mathbb{C} + N_r N_t N_p \text{ prod } \mathbb{C} \tag{C.1}$$

C.2. MMSE matricial

$$\hat{H}_{\text{matrix,MMSE}} = SP^H \left(N_r A d^{\alpha} \sigma_n^2 R_H^{-1} + PP^H \right)^{-1}$$

Este estimador requiere realizar los cálculos que se detallan en la Tabla C.1.

En la Tabla C.2 se detalla el total de operaciones que requiere la ejecución del estimador MMSE matricial, de acuerdo al número de operaciones para la inversión de una matriz descrita en el Anexo B y agrupando las operaciones descritas en la Tabla C.1.

TABLA C.1. Cálculos requeridos por el estimador MMSE matricial.

Cálculo	Operaciones requeridas
Calcular R_H^{-1}	Inversa $N_t \times N_t$
Producto $\text{aux}_1 = N_r A d^{\alpha} \sigma_n^2$	2 productos $\mathbb{C}$
Producto $\text{aux}_2 = \text{aux}_1 R_H^{-1}$	N_t^2 productos $\mathbb{C}$
Suma $\text{aux}_3 = \text{aux}_2 + PP^H$	N_t^2 sumas $\mathbb{C}$
Calcular aux_3^{-1}	Inversa de $N_t \times N_t$
Producto $\text{aux}_4 = SP^H$	$N_t N_r N_p$ productos $\mathbb{C}$ $N_t N_r (N_p - 1)$ sumas $\mathbb{C}$
Producto aux_4 aux_3^{-1}	$N_t^2 N_r$ productos $\mathbb{C}$ $N_t N_r (N_t - 1)$ sumas $\mathbb{C}$

TABLA C.2. Operaciones requeridas por el estimador MMSE matricial.

Operación	Número de instrucciones
Suma $\mathbb{C}$	$\frac{2N_t(N_t-1)(8N_t-1)}{3} + N_t^2 + N_r N_t (N_p + N_t - 2)$
Producto $\mathbb{C}$	$\frac{2N_t(8N_t^2-3N_t+1)}{3} + N_t^2 + 2 + N_r N_t (N_p + N_t)$
División $\mathbb{C}$	$(3N_t^2 + N_t)$
Raíz $\mathbb{R}$	$2N_t$