



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE  
ESCUELA DE INGENIERÍA

# **IDENTIFICACIÓN DE FLUJOS CIRCULARES DE CAPITAL EN LA ECONOMÍA CHILENA MEDIANTE UN MODELO DE FLUJO MÁXIMO**

**RENÉ TOMÁS ACUÑA HERNÁNDEZ**

Tesis para optar al grado de  
Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Profesor Supervisor:  
GUSTAVO ANGULO OLIVARES  
ALEJANDRO MAC CAWLEY VERGARA

Santiago de Chile, Agosto, 2020

© 2020, RENÉ TOMÁS ACUÑA HERNÁNDEZ



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE  
ESCUELA DE INGENIERÍA

# IDENTIFICACIÓN DE FLUJOS CIRCULARES DE CAPITAL EN LA ECONOMÍA CHILENA MEDIANTE UN MODELO DE FLUJO MÁXIMO

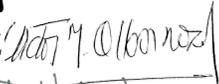
**RENÉ TOMÁS ACUÑA HERNÁNDEZ**

Tesis presentada a la Comisión integrada por los profesores:

GUSTAVO ANGULO OLIVARES 

ALEJANDRO MAC CAWLEY VERGARA 

JULIO PERTUZÉ 

VÍCTOR ALBORNOZ 

DANIEL HURTADO 

Para completar las exigencias del grado de  
Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Santiago de Chile, Agosto, 2020

© 2020, RENÉ TOMÁS ACUÑA HERNÁNDEZ

*A mi familia, a mi novia y mis  
amigos por apoyarme durante  
todos estos años*

## **AGRADECIMIENTOS**

Quisiera agradecer a mi familia, a mi novia y a mis amigos por apoyarme incondicionalmente durante todo este proyecto, por guiarme y acompañarme siempre. Agradecer también a Julia Arriagada por el esfuerzo y constante apoyo entregado durante estos últimos meses. Finalmente agradecer de forma muy especial a Alejandro Mac Cawley y Gustavo Angulo por la enorme paciencia y preocupación constante por la excelencia del presente trabajo, lo que ha sido un gran aporte para mi formación personal.

## Índice general

AGRADECIMIENTOS . . . . .	IV
ÍNDICE DE FIGURAS . . . . .	VII
ÍNDICE DE TABLAS . . . . .	VIII
ABSTRACT . . . . .	IX
RESUMEN . . . . .	X
Capítulo 1. INTRODUCCIÓN . . . . .	1
Capítulo 2. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA . . . . .	7
Capítulo 3. METODOLOGÍA . . . . .	12
3.1. Representación y procesamiento de la economía . . . . .	12
3.2. Algoritmo de flujo máximo . . . . .	17
3.3. Resultados búsqueda de ciclos . . . . .	18
Capítulo 4. RESULTADOS . . . . .	23
4.1. Características de la economía . . . . .	23
4.2. Análisis de los flujos circulares en la economía . . . . .	27
4.2.1. Análisis algoritmo de flujo máximo . . . . .	27
4.2.2. Resultado algoritmo de flujo máximo para la economía . . . . .	30
4.2.3. Análisis transacciones . . . . .	31
4.2.4. Grado de entrada y de salida de los nodos . . . . .	34
4.2.5. Componentes fuertemente conectadas . . . . .	36
4.2.6. Algoritmo flujo máximo mensual . . . . .	37
4.3. Búsqueda de ciclos . . . . .	38
4.3.1. Búsqueda de ciclos para cotas . . . . .	39
4.3.2. Elección de heurísticas . . . . .	42

4.4. Ciclos en la economía . . . . .	43
4.4.1. Análisis según montos . . . . .	49
4.4.2. Ciclos con mayor monto descontado . . . . .	52
4.4.3. Análisis de empresas . . . . .	55
4.4.4. Análisis Mensual . . . . .	59
Capítulo 5. CONCLUSIÓN . . . . .	61
Referencias . . . . .	66

## ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Gráfica del crecimiento del Producto Bruto Interno de Chile 1960-2018 (The World Bank, 2019) . . . . .	1
1.2. Creación empresas economía chilena 2014-2018 (Ministerio de Economía, Fomento y Turismo, 2018) . . . . .	2
1.3. Representación gráfica de un ciclo de 4 empresas . . . . .	4
2.1. Ejemplo comercio circular en un grafo dirigido (Mathews, Mehta, Kasi Viswswara y Kumar, 2017) . . . . .	8
3.1. Ejemplos ciclos entre empresa y sus filiales . . . . .	16
4.1. Porcentaje monto de transacción versus número de transacciones según rangos	26
4.2. Flujo máximo según monto mínimo de transacción . . . . .	28
4.3. Número de aristas del grafo según monto mínimo de transacción . . . . .	29
4.4. Tiempos de ejecución según monto mínimo de transacción . . . . .	30
4.5. Monto descontado v/s monto de transacción según tramos de monto . . . . .	32
4.6. Distribución grados de salida de los nodos del grafo . . . . .	34
4.7. Distribución grados de entrada de los nodos del grafo . . . . .	35
4.8. Número de ciclos según número de empresas asociadas . . . . .	46
4.9. Monto descontado según número de empresas asociadas . . . . .	47
4.10. Ciclos según monto asociado . . . . .	49
4.11. Ciclos según monto descontado . . . . .	51
4.12. Gráfica ciclos con mayor monto descontado asociado . . . . .	54
4.13. Distribución empresas con mayor monto descontado . . . . .	58
4.14. Porcentaje de ciclos mensual . . . . .	59

## ÍNDICE DE TABLAS

4.1. Características grafo inicial . . . . .	23
4.2. Características economía neteada . . . . .	24
4.3. Aristas de mayor monto de transacción . . . . .	25
4.4. Resultados características grafo flujo máximo . . . . .	31
4.5. Características aristas con monto entre 1M y 10M . . . . .	33
4.6. Máximo grado de entrada y de salida del grafo . . . . .	36
4.7. Resultados características componentes fuertemente conectados . . . . .	36
4.8. Resultados flujo máximo mensual . . . . .	37
4.9. Resultados heurísticas subgrafo transacciones monto mayor a 1.000 M . . . . .	39
4.10. Resultados heurísticas subgrafo transacciones monto mayor a 100 M . . . . .	41
4.11. Características ciclos identificados economía . . . . .	44
4.12. Características ciclos con 10 o menos empresas asociadas . . . . .	48
4.13. Ciclos con mayor monto descontado asociado . . . . .	52
4.14. Empresas con mayor cantidad de ciclos . . . . .	55
4.15. Empresas con mayor monto descontado . . . . .	56

## ABSTRACT

The main objective of this thesis is to determine the maximum circulating flow of the economy by identifying the cycles in it. A cycle is defined as a sequence of companies, such that there is a transaction between each pair of these and whose amounts represent a circular flow that fictitiously increases their liquidity. The relevance of this study is that cycles can be eliminated by coordinating companies to discard such transactions from the economy. The studies developed in this work were carried out through a set of transactions facilitated by the Servicio de Impuestos Internos (SII) and made by many companies in the Chilean economy during 2018. In order to fulfill the main purpose, the data was first cleaned, simplifying the economy and netting off the transactions. After that, the maximum circulating flow was determined using a flow algorithm obtaining as a result a graph where each edge represents a transaction between related companies. With the graph, the cycles were identified using an iterative circulation model and a set of ordering heuristics. The best results were obtained when ordering the edges in an increasing way according to the transaction amount. The circulating flow was 263,307,940 M Chilean pesos approximately, which represents a 12 % of the economy and involves 350 thousand different companies. This value was made up by 3.8 million cycles in which 94 % of these are made of 10 companies or less. At an economic level, there are many legal and illegal phenomena that can explain cycles, such as circular trading. However this differentiation is not part of the objectives proposed for this study. Also, there are economic proposals based on the elimination of cycles, like reduction of taxes for certain companies and identification of new circular markets.

**Keywords: Circulating flow in economy, elimination of cycles, maximum flow, chilean economy, circulation model.**

## RESUMEN

El objetivo principal del presente trabajo es determinar el máximo flujo circulante de la economía mediante la identificación de los ciclos que lo componen. Entendiendo que un ciclo es una secuencia de empresas en que existe una transacción entre cada par de estas y cuyos montos representan un flujo circular que incrementa ficticiamente su liquidez. La relevancia de este estudio radica en que los ciclos pueden ser eliminados coordinando a las empresas para descartar dichas transacciones de la economía. Los estudios desarrollados en esta tesis se realizaron mediante un conjunto de transacciones facilitadas por el Servicio de Impuestos Internos (SII) y efectuadas en la economía chilena durante el 2018 por diversas empresas. Para lo cual se procedió, en primer lugar, a limpiar los datos, simplificando la economía y neteando las transacciones. Posteriormente, se determinó el máximo flujo circulante mediante un algoritmo de flujo obteniendo como resultado un grafo donde cada arista representa el flujo entre las empresas relacionadas. Con dicho grafo se procedió a la identificación de los ciclos que lo componen con un modelo de circulación iterativo y distintas heurísticas de ordenación. Así se obtuvieron los mejores, ordenando las aristas de forma creciente según su monto de transacción. El resultado fue un flujo circulante aproximado de 263,307,940 M de pesos, lo que representa un 12 % aproximadamente de la economía y de los cuales participan 350 mil empresas distintas. Dicho valor está compuesto por 3,8 millones de ciclos de los cuales un 94 % de estos están conformados por 10 empresas o menos. A nivel económico existen distintos fenómenos legales e ilegales que pueden explicar los ciclos obtenidos, como lo es el *circular trading*, sin embargo, esta diferenciación no es parte de los objetivos propuestos. También se plantean diversas propuestas económicas basadas en la eliminación de los ciclos, destacando la disminución de impuestos para ciertas empresas y la identificación de nuevos mercados circulares.

**Palabras Claves: flujo circulante, eliminación de ciclos, flujo máximo, economía chilena, modelo de circulación.**

## Capítulo 1. INTRODUCCIÓN

Según datos del Banco Mundial, la economía chilena es la quinta mayor de América Latina en términos del Producto Interno Bruto (PIB), definido como el valor total de los bienes y servicios producidos en el territorio de un país en un periodo determinado (Ministerio de Hacienda, Gobierno de Chile), por debajo de Brasil, Argentina, Colombia y Venezuela, siendo caracterizada como una de las más estables y abiertas, lo que ha propiciado un crecimiento sólido y sostenible. En la Figura 1.1 se aprecia el crecimiento del PIB de Chile durante las últimas décadas.

Con altos índices en competitividad y desarrollo financiero, permite que se consagre como una economía dinámica (World Economic Forum, 2019), lo que ha propiciado la firma de Tratados de Libre Comercio con mercados significativos a nivel mundial. Dichas características se traducen en un gran número de agentes que componen la economía, los que se relacionan a través de millones de transacciones realizadas día a día.



FIGURA 1.1. Gráfica del crecimiento del Producto Bruto Interno de Chile 1960-2018 (The World Bank, 2019)

Durante el 2018, la actividad económica chilena creció en un 4,0 % y el año cerró con un crecimiento de un 3,6 % durante el último trimestre, según informó el Banco Central a

través del Informe de Cuentas Nacionales de Chile, Cuarto Trimestre (2018). Destacan en este informe la minería del cobre, servicios personales y el comercio como las actividades que más incidieron en el crecimiento del PIB. Estos datos son de vital importancia considerando que el estudio de esta tesis analiza la economía para un periodo de tiempo ubicado en el 2018.

El crecimiento económico mencionado se vio impulsado por el repunte de la demanda interna y más específicamente de la inversión, destacando el fuerte crecimiento del componente de maquinaria y equipo. A nivel externo, la economía se desarrolló en un contexto menos favorable debido a una mayor volatilidad financiera y otros factores que dieron lugar a una salida de flujo a países desarrollados.

Pese a lo anterior, según datos del Ministerio de Economía, durante el 2018 se registró un aumento en el número de empresas, creándose 132.140, siendo este valor el mayor obtenido desde que se tiene registro (Ministerio de Economía, Fomento y Turismo, 2018). En la Figura 1.2 se presentan los números de empresas creadas en los últimos años en Chile, evidenciando el constante crecimiento de esas.

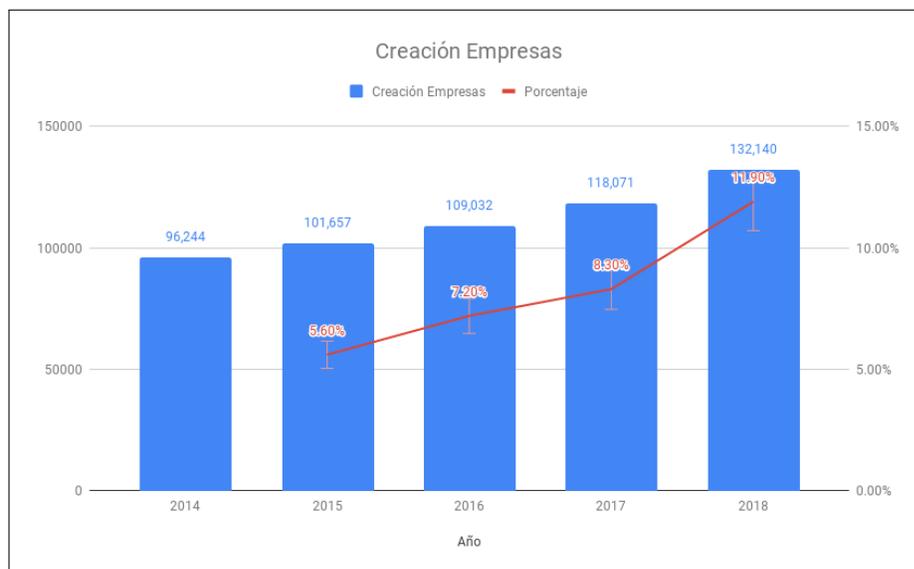


FIGURA 1.2. Creación empresas economía chilena 2014-2018 (Ministerio de Economía, Fomento y Turismo, 2018)

Las políticas públicas adoptadas con posterioridad a los datos financieros del 2018 se basan en un aumento en el crecimiento económico cuyas metas son tener un crecimiento del PIB del 4%, un incremento en la inversión del 6 – 7% y un aumento del 1% en la productividad. A ello se suman políticas sociales que permitan disminuir en un 50% la pobreza con la esperanza de que en un periodo de 10 años Chile sea un país desarrollado.

Lo anterior se traduce en el incremento en la cantidad de transacciones que se producen día a día en la economía chilena. Existen diversos procesos que pueden ocurrir a través de dichas transacciones como la identificación de ciclos en la economía, es decir, una secuencia de empresas de modo que exista una transacción entre cada empresa y la siguiente en la sucesión.

También, se caracteriza porque la última empresa es, al mismo tiempo, la primera. Con esto se produce un flujo circular con un monto asociado que corresponde al menor valor de las transacciones descritas. Se define el flujo circular de un ciclo como un cierto monto o valor económico contenido y distribuido en las transacciones entre las empresas que lo componen y que representa una entrada y salida de capital constante. La suma de los flujos circulares asociados a las empresas chilenas se define como el flujo circular total de la economía.

En la Figura 1.3 se representa gráficamente un ciclo entre 4 empresas donde cada nodo es una empresa distinta y cada arista es una transacción entre empresas.

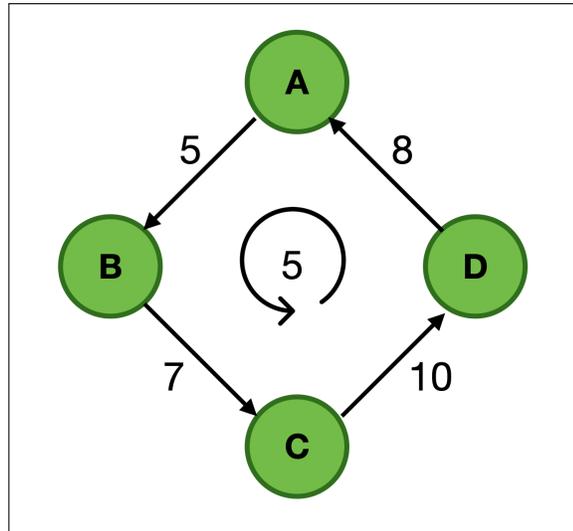


FIGURA 1.3. Representación gráfica de un ciclo de 4 empresas

Un ciclo entre empresas representa un flujo económico que incrementa los volúmenes de transacciones de una empresa demostrando un valor de liquidez mayor al que eventualmente puede tener. Además, representa una disminución en el pago de impuesto debido al valor entrante y saliente de forma constante. Dado lo anterior, existe la posibilidad que, una vez encontrado un ciclo, este pueda ser eliminado de la economía coordinando a las empresas que lo componen para descartar ciertas transacciones, con tal de disminuir el flujo circulante y, por lo tanto, disminuir aquellos montos que no generan un valor importante en las transacciones y los impuestos. El concepto de eliminación de un ciclo se definirá como un neteo de la economía de este y es de vital importancia para este estudio ya que prioriza las características que los ciclos encontrados deben tener y cómo se abordarán el análisis económicos una vez estos sean seleccionados.

El objetivo del presente trabajo es, en primer lugar, identificar los ciclos de la economía mediante un modelo de flujo máximo y un modelo de circulación. No se requiere identificar todos los posibles ciclos que se forman, sino reconocer sólo aquellos en que la suma de sus montos asociados sea el máximo que se puede obtener de la economía. En segundo lugar, se pretende que los ciclos encontrados contengan la mayor cantidad de empresas posibles que puedan ser beneficiadas de las políticas económicas asociadas a los resultados.

En base a los objetivos mencionados anteriormente se plantearán dos métricas asociadas a la elección de ciclos. La primera es el tamaño o número de empresas que los componen. Al ser el neteo de las transacciones el objetivo principal de este estudio, implica, una vez encontrado un ciclo, coordinarse con las empresas que lo componen para eliminar el flujo circulante. Mientras más empresas componen el ciclo, mayor dificultad en la toma de decisiones, por lo que se busca ciclos que no supere un número fijo de empresas en su composición. Una segunda métrica de relevancia es el monto asociado a dicho ciclo ya que se busca maximizar el monto total a descontar, por lo que los ciclos seleccionados deben tener un alto impacto en la economía.

La dificultad de la problemática radica en la infactibilidad de encontrar todos los ciclos presentes en la economía debido a que su número supera los 1.000 millones y, considerando tiempos de ejecución, almacenamiento y posterior elección de estos, termina siendo poco viable. Es importante destacar que al seleccionar un ciclo y descontarlo de la economía, se eliminan transacciones lo que se traduce inmediatamente en la eliminación de otros ciclos. Esto implica que la elección de ciclos es de vital importancia para este estudio.

Respecto del alcance del proyecto, para este estudio sólo se considera la búsqueda de ciclos sin entrar en detalle de las características de las empresas que lo componen. Como posible continuación a este estudio se puede determinar cómo los sectores en la economía se relacionan a través de los ciclos. También se puede indagar en un futuro en los tamaños de las empresas, ya sea grandes empresas, medianas o pymes, pudiendo desarrollar políticas que favorezcan a las empresas más pequeñas para controlar y reducir impuestos.

Si bien la gran mayoría de estas transacciones se realizan en el ámbito legal y ético, un pequeño porcentaje representa una actividad ilegal o fraudulenta asociada a la evasión de impuestos (Servicio de Impuestos Internos, 1999). Muchos de estos procesos ilícitos requieren la manipulación de valores en las transacciones y la coordinación de varios agentes de la economía. Sin embargo, la identificación de este tipo de fenómenos en la economía

no son objeto de este estudio, por lo que sólo se procederá a describir la forma de encontrar los ciclos que definen un flujo circular sin entrar en detalles de la legalidad de dichas transacciones.

Este trabajo se estructura en cuatro secciones. En la primera se realizará una revisión literaria para establecer algoritmos que permitan identificar ciclos en la economía junto con interpretaciones financieras relacionados con dicho fenómeno.

En la segunda sección se detalla la metodología que se utilizará a nivel de algoritmos para determinar los ciclos y el flujo circulante de la economía. Primeramente se realizará una descripción de las transacciones, su representación en forma de grafo y los algoritmos implementados en la limpieza de datos previos a la búsqueda de ciclos. Posteriormente, se detalla el problema de optimización implementado para la descomposición de flujo máximo, que permite determinar el mayor monto posible a descontar de la economía mediante ciclos. En una tercera etapa se detalla un modelo de circulación que, a través de ciertas heurísticas definidas, permite identificar los ciclos del grafo resultante del problema de flujo máximo mencionado anteriormente.

En la tercera sección se presentarán los resultados obtenidos de la aplicación de los algoritmos descritos en la metodología a las transacciones que componen la economía chilena para un periodo de tiempo específico. Junto con ello, se agrega una caracterización de los ciclos encontrados y su implicancia en la eliminación de dichas transacciones de la economía. Finalmente, en la cuarta sección, se formularán las principales conclusiones obtenidas del análisis de los resultados previamente presentados.

## Capítulo 2. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

La detección y eliminación de ciclos en un grafo dirigido es un problema complejo abordado de varias formas en la literatura, principalmente en el área de evasión tributaria. En particular, este tipo de evasiones se llevan a cabo mediante un fenómeno económico llamado *circular trading* o comercio circular.

El comercio circular se define como un esquema fraudulento donde la principal motivación es ocultar maliciosamente información de ventas y compras a los funcionarios de fiscalización. Una de las formas en que se puede realizar este tipo de fraude es mediante la superposición de transacciones por el mismo número de acciones al mismo tiempo y al mismo precio. El impuesto a pagar por estas transacciones ilegítimas es aproximadamente cero, ya que representan un valor agregado cercano a nulo. Según Mathews, Mehta, Kasi Viswswara y Babu (2017), ésta es la fórmula que confunde a las autoridades fiscales para lograr identificar entre este tipo de transacciones y posibles transacciones sospechosas.

Este tipo de procedimiento ilegal infla artificialmente los volúmenes de una empresa con tal de mantener el precio de acción en el nivel deseado, lo que refleja un nivel de interés de mercado mayor por las acciones. Esta práctica está prohibida en numerosos países, incluyendo Chile.

En la Figura 2.1, las transacciones que involucran las empresas  $A$ ,  $B$  y  $C$  representan un ciclo fraudulento. Importante es hacer notar que el ciclo presenta características particulares que lo definen como fraudulento tales como el monto similar en todas sus transacciones o el tiempo cronológico en que ocurren. La identificación de estas transacciones se ve dificultada por la superposición de distintas transacciones sospechosas, representadas por las transacciones entre  $B - D$  y  $A - D$ , las que comparten los mismos agentes que el ciclo mencionado anteriormente según el estudio realizado por Mathews, Mehta, Kasi Viswswara y Kumar (2017). Esta dificultad asociada a la superposición de distintas transacciones también es parte de nuestro problema.

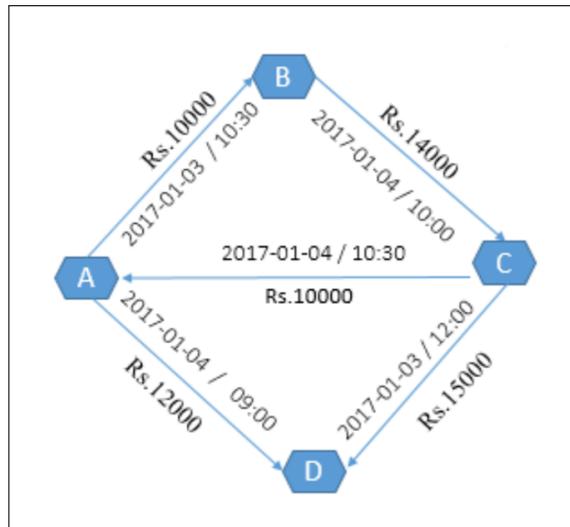


FIGURA 2.1. Ejemplo comercio circular en un grafo dirigido (Mathews, Mehta, Kasi Viswswara y Kumar, 2017)

La mayor parte de los trabajos realizados en comercio circular se concentran en mercados financieros y las soluciones propuestas se enfocan en la eliminación de ciclos, obteniendo como resultado un grafo acíclico. Las dificultades que enfrentan estas investigaciones se relacionan con el gran número de transacciones en las bases de datos utilizadas, el número de empresas y la identificación de los ciclos. En múltiples estudios los autores han investigado el fenómeno de comercio circular en diversas economías y han desarrollado distintas metodologías para la identificación y eliminación de los ciclos encontrados. A continuación se presenta una pequeña reseña de los trabajos estudiados.

Existe en particular dos artículos donde se presentan algoritmos de detección y eliminación de ciclos en un grafo dirigido ponderado proveniente de un conjunto de datos fiscales del Gobierno de Telangana, India. En particular, en el estudio presentado por Mathews, Mehta, Kasi Viswswara y Babu (2017) el algoritmo se basa en la minimización de la diferencia de pesos entre la arista con mayor peso y la de menor, con un algoritmo que toma tiempo  $O((m + n) * m^2 * \log(n))$ , siendo  $n$  el número de vértices y  $m$  el número de aristas.

El estudio realizado por Mathews, Mehta, Kasi Viswswara y Kumar (2017) define el concepto de *bottleneck value* como el tiempo de transacción menos reciente dentro de un camino y, posteriormente, la priorización de dicho valor en la eliminación de ciclos. Este último toma un tiempo de  $O(m * \log(n))$ , en el que  $m$  es el número de aristas y  $n$  el de vértices. Importante notar que ambos algoritmos no encuentran todos los ciclos del grafo, sino que, en base a cierta heurística, priorizan los ciclos a encontrar, eliminándolos del grafo para que no se repitan en las siguientes iteraciones.

Cui y Taylor (2018) demostraron que mediante la iteración de la operación *max-plus product* en la matriz de adyacencia del grafo es posible identificar rápidamente potenciales ciclos ilegítimos de un largo arbitrario de una manera eficiente. Es importante destacar que este problema logra identificar la máxima oportunidad de ciclos ilegítimos.

En el estudio realizado por Wang, Zhou y Guan (2012) se propone un método para detectar posibles grupos de transacciones ilegítimas involucradas en un instrumento de mercados futuros, calculando el coeficiente de correlación entre dos series de tiempo y combinando los componentes conectados. Los experimentos realizados con datos reales de las transacciones de Shanghai muestran que el método propuesto puede detectar efectivamente ciclos de colusión.

Pese a que los ciclos relacionados con evasión tributaria son un tema muy desarrollado en la literatura, también destacan los estudios enfocados en la identificación de ciclos en un grafo, principalmente aquellos enfocados en algoritmos basados en Depth First Search (DFS). Los autores Haeupler, Kavitha, Mathew, Sen y Tarjan (2012) abordaron el problema de detección de ciclos mediante la inserción iterativa de nuevas aristas a un grafo que inicialmente parte vacío y su posterior eliminación inmediata. Esto permite que el grafo de estudio siempre es acíclico. Se presentan dos algoritmos que, a partir de la inserción de  $m$  aristas y  $n$  vértices tienen tiempos de  $O(m^{2/3})$  y  $O(n^{5/2})$ .

Manteniendo la nomenclatura descrita anteriormente, Bender, Fineman, Gilbert y Tarjan (2016) presentan el mismo problema agregando la complejidad de que, en cada iteración, se debe mantener un orden topológico y componentes fuertemente conectadas en

el grafo a medida que se agregan las aristas. Presentan un algoritmo para grafos dispersos y otro para grafos densos que toman tiempos de  $O(\min(m^{1/2}, n^{2/3}))$  y  $O(n^2 \log(n))$ , respectivamente.

El principal problema de las investigaciones presentadas radica en que el objetivo está en la búsqueda de ciclos de forma eficiente según determinadas heurísticas, sin tomar en consideración el monto de los ciclos eliminados. Al utilizar DFS como base siempre se encuentran los ciclos con menor cantidad de empresas, sin embargo, al utilizarlos no se garantiza que se este maximizando el monto a descontar de la economía.

Cuito, Niu, Zhou y Shu (2017) presentan un algoritmo multi-threading basado en la detección de ciclos según la priorización de vértices en el grafo. Éste toma tiempo  $O(m * (d_i + d_o))$  donde  $d_i$  es el promedio de los grados de entrada de los nodos, definido como el número de aristas que tienen como vértice inicial al nodo, y  $d_o$  el promedio de los grados de salida de los mismos, definido como el número de aristas que tienen como vértice final al nodo. En el paper se determinan mejoras basadas en las ventajas de los procesadores multi-core. En una primera instancia se simplifica el grafo, minimizando la cantidad de vértices y aristas, luego se divide en componentes fuertemente conectadas y, finalmente, la detección de los ciclos de forma paralelizada

Johnson (1975) presenta un algoritmo que permite encontrar todos los ciclos elementales en un grafo dirigido en un tiempo  $O((n + m) * (c + 1))$  donde  $c$  corresponde al número de ciclos,  $n$  el de vértices y  $m$  el de aristas. La dificultad en la implementación radica en que depende de la cantidad de ciclos que el grafo puede presentar, es decir, mientras más denso es el grafo, más ciclos es posible encontrar y, por lo tanto, mayor tiempo de ejecución tendrá el algoritmo.

Existen estudios realizados por Mehlhorn, Naher y Sanders (2017) enfocados en técnicas computacionales para mejorar la eficiencia en la implementación de algoritmos basados en DFS y ejemplificarlos para componentes fuertemente conectadas. Los autores Gamal,

Gagan, Bin Li y Bo Jin (2018) proponen un algoritmo de programación lineal para un problema de *shortes path* y *maximum flow* en una red. Dicha formulación servirá como una posible solución para las modelaciones que se desarrollaran en este estudio.

Considerando el impacto económico que la eliminación de los ciclos tendría en el pago de los impuestos de las empresas, los autores Barrera, Moreno y Varas (2020) presentan un estudio enfocado en los sistemas de impuesto sobre la renta y el cálculo a través de una red. Utilizando la teoría de absorción de las cadenas de Markov, se calcula el ingreso atribuido final de cada contribuyente, considerando la gran cantidad de empresas y corporaciones que son propiedad de otras empresas, formandose una gran red que incluye ciclos.

Sin embargo, los algoritmos descritos anteriormente presentan grandes deficiencias en relación a la problemática planteada en esta tesis. En primer lugar, la mayor parte de las investigaciones están enfocadas en la rápida identificación de los ciclos, según criterios asociados al grafo, sin considerar un peso relacionado a las aristas que los componen. Esto es de vital importancia considerando que parte del objetivo de esta investigación es identificar los ciclos que maximizan el flujo circulante de la economía utilizando un problema de optimización de flujo máximo.

En segundo lugar, se destaca la incorporación de 4 heurísticas de ordenación para encontrar ciclos a partir de un grafo. Finalmente en esta tesis se considera como característica importante el número de aristas que componen los ciclos, donde se busca encontrar la mayor cantidad de ciclos que no superen cierto valor en el número de empresas asociadas.

## Capítulo 3. METODOLOGÍA

En esta sección se presentarán y analizarán los algoritmos utilizados en el procesamiento de la economía con tal de encontrar el máximo flujo circulante y los ciclos que lo componen con el objetivo de descontarlos de la economía.

En particular esta sección se descompone, en primer lugar, en una representación de la economía chilena mediante un grafo dirigido el cual debe ser procesado previo a la búsqueda de ciclos para obtener un grafo simplificado donde potencialmente estos estarán. En una segunda instancia se presenta un algoritmo de descomposición de flujo que permite maximizar el flujo circulante de la economía. Finalmente, se presentan un conjunto de heurísticas que permiten encontrar los ciclos de un grafo, específicamente del grafo obtenido por el modelo anterior, reduciendo el número de nodos por ciclo.

### 3.1. Representación y procesamiento de la economía

Para lograr el objetivo de identificar los ciclos en la economía chilena es que se decidió representarla mediante un grafo dirigido con ciertas características especiales. Un grafo dirigido ponderado  $G = (V, E)$  consiste en un conjunto de vértices no vacío y finito  $V$ , junto a un conjunto  $E$  de pares ordenados entre distintos vértices llamados aristas las cuales tienen un peso asociado. Se describe el mercado financiero chileno como un grafo dirigido cuyos nodos representan a las empresas, mientras que las aristas representan las transacciones bancarias realizadas donde el peso asociado es el monto de transacción.

Se define también un camino en  $G$  como una secuencia de vértices  $p_{vu} = (v = v_1, v_2, \dots, v_k = u)$  tal que  $(v_i, v_{i+1}) \in E$  para  $1 < i < k$ . Un ciclo es un camino donde el primer y último vértices son iguales. Un camino es elemental si un vértice no aparece más de una vez. Un ciclo es elemental si no se repiten vértices excepto el primero con el último que se repite dos veces, según lo propuesto por Johnson (1975).

La representación de grafo descrita excluye bucles (aristas de la forma  $(v, v)$ ), y múltiples aristas entre mismos vértices. Finalmente se define una componente fuertemente conectada como un subgrafo tal que, para cada par de nodos  $u$  y  $v$  existe un camino o ruta que parte desde el nodo  $u$  y termina en  $v$ . Los subgrafos obtenidos de las componentes fuertemente conectadas forman una partición del grafo y servirán como análisis para posibles paralizaciones en los algoritmos a describir.

Previo a la definición de los algoritmos utilizados en este estudio es importante detallar los procesos previos realizados en el grafo representante de la economía con el objetivo de limpiar y simplificar los datos, reduciendo su tamaño y facilitando la búsqueda de ciclos.

Uno de los primeros detalles a destacar es el grado de entrada y de salida de cada nodo en el grafo. Para un nodo  $v$ , se define el grado de salida de un nodo como el número de aristas que tienen como origen dicho nodo y como destino otro nodo distinto dentro del grafo. Por el contrario, se define el grado de entrada como el número de aristas que tienen como origen algún nodo distinto a  $v$  y que tienen como destino el nodo  $v$ .

En concreto, si se desea encontrar los ciclos en un grafo, tales se caracterizan porque cada vértice debe tener grado par, es decir, cada vértice tiene dos aristas incidentes, una de salida y una de entrada. Sin embargo, para este primer paso no se descartaron los nodos que no tienen grado par, sino aquellos que tengan grado uno, es decir, nodos que no tengan, como mínimo, una arista de entrada y una de salida.

El algoritmo utilizado para dicha eliminación según grado se basó en el algoritmo presentado por Cuito, Niu, Zhou y Shu (2017). Su implementación consta de una búsqueda inicial de aquellos nodos que tengan grados de salida o entrada igual a cero. En la posterior eliminación de dichos nodos se actualizan los grados de los nodos con los que se conecta dicho nodo con tal de que, al eliminarlo, otros queden con grados igual a cero. Esto se realiza de forma recursiva. El pseudocódigo se presenta a continuación:

---

**Algorithm 1** función *simplify*( $G$ )

---

**Require:**  $G$

$degrees\_in = \{\}$

$degrees\_out = \{\}$

$delete = []$

**for**  $edge$  in  $G.edges$  **do**

$degrees\_in[edge] =$  Grados de entrada del nodo

$degrees\_out[edge] =$  Grados de salida del nodo

**if**  $degrees\_in[edge] == 0$  OR  $degrees\_out[edge] == 0$  **then**

        Agregar  $edge$  a  $delete$

**end if**

**end for**

**while**  $delete$  **do**

$node =$  Primer elemento de  $delete$

**if**  $node$  in  $G$  **then**

$delete\_node(G, node, delete, degrees\_in, degrees\_out)$

**end if**

**end while**

---

---

**Algorithm 2** función *delete\_node*( $G, node, delete, degrees\_in, degrees\_out$ )

---

**Require:**  $G, node, delete, degrees\_in, degrees\_out$

**for**  $other\_node$  in nodos que tienen aristas con destino  $node$  **do**

    Eliminar arista ( $other\_node, node$ )

$degrees\_out[other\_node] - = 1$

**if**  $degrees\_out[other\_node] == 0$  **then**

        Agregar  $other\_node$  a  $delete$

**end if**

**end for**

**for**  $other\_node$  in nodos que tienen aristas con origen  $node$  **do**

    Eliminar arista ( $other\_node, node$ )

$degrees\_in[other\_node] - = 1$

**if**  $degrees\_in[other\_node] == 0$  **then**

        Agregar  $other\_node$  a  $delete$

**end if**

**end for**

Eliminar  $node$  de  $G$

---

Un segundo detalle principal en la simplificación de los datos es que, para un par de empresas  $A, B$  pueden existir más de una transacción con distintos montos y fechas de emisión, lo que se traduce en múltiples aristas entre dos nodos. Esta característica del grafo puede producir complicaciones en la posterior búsqueda de ciclos por lo que se decidió unificar dichas transacciones sumando los montos de éstas.

Un tercer aspecto a destacar es que se encontraron transacciones de una empresa a ella misma. Económicamente, este fenómeno se puede explicar como empresas que realizan transacciones desde y hacia sus filiales que comparten el mismo código de empresa. No obstante, este posible comportamiento de las empresas no es parte del objetivo de estudio por lo que se decidió eliminar este tipo de transacciones.

Finalmente se encontraron empresas que pertenecían a una gran cantidad de ciclos compuestos por sólo dos empresas. Este fenómeno se asoció a un posible comportamiento de gran empresa y sus respectivas filiales. En la Figura 3.1 se muestra una representación gráfica del comportamiento descrito, donde cada arista que se muestra es un ciclo de dos empresas entre una gran empresa principal y empresas de pequeña incidencia en el grafo.

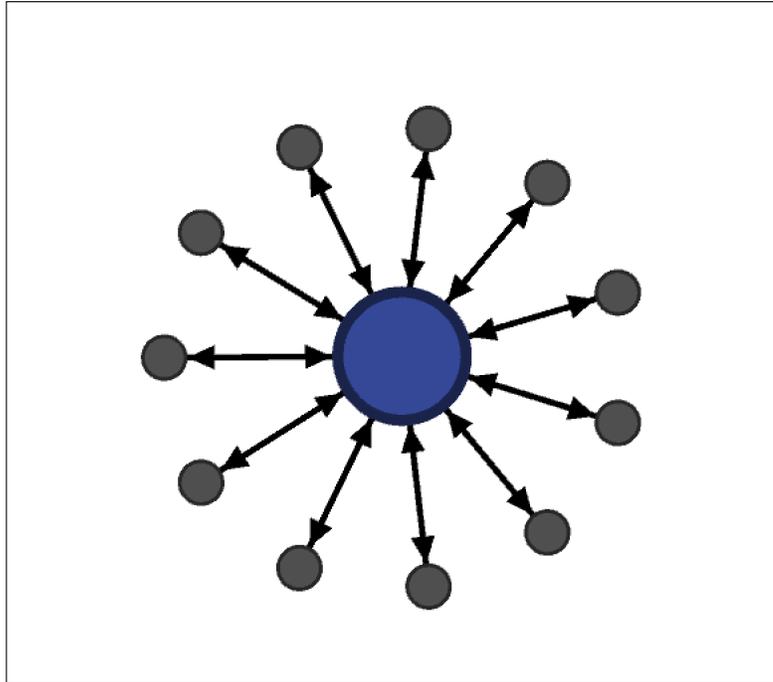


FIGURA 3.1. Ejemplos ciclos entre empresa y sus filiales

Dado esto, se realizó un neteo de la economía, es decir, para cada par de empresas  $A, B$  solo puede existir una arista que los relaciona. Para los pares de empresas que tenían dos transacciones con distintos sentidos ( $A \rightarrow B$  y  $B \rightarrow A$ ), se realizó un neteo o unión de dichas transacciones en una única. El monto de la arista resultante es  $|monto\_transacción(A \rightarrow B) - monto\_transacción(B \rightarrow A)|$ , y el sentido es el mismo de aquella arista que tiene mayor peso o mayor valor de transacción.

Cabe destacar que si el resultado del peso de la arista única es igual a cero implica que ambas aristas se eliminan del grafo. De esta nueva eliminación de aristas se puede obtener como resultado nodos que tengan grado 1, los cuales se deben eliminar del grafo imitando el proceso de limpieza presentado anteriormente.

A partir de los procesos presentados anteriormente se obtiene un grafo resultante simplificado, con una menor cantidad de nodos y transacciones que el grafo inicial y que facilita la búsqueda de ciclos. Este grafo presenta la característica de ser un grafo neteado y será utilizado para los algoritmos de análisis que se presentan a continuación.

### 3.2. Algoritmo de flujo máximo

A partir del teorema de descomposición de flujo, que establece que cualquier solución representada como flujos factibles en rutas y ciclos tiene una única representación de flujos en arcos asociados, se puede determinar un modelo que pueda determinar el flujo máximo asociado a ciclos en la economía, lo que se ve reflejado como un conjunto de arcos con un monto particular.

El principal objetivo del modelo es determinar el flujo asociado a cada arco de modo tal que se maximiza el flujo total, definido como la suma de los flujos mencionados anteriormente. Un ciclo cumple la propiedad de que el flujo o monto de la arista de entrada de un vértice es igual al de la arista de salida del mismo. Extrapolando esta característica al grafo neteado presentado en la sección anterior, se debe cumplir que cada nodo debe tener el mismo flujo de entrada que de salida.

Es necesario resaltar que lo anterior no implica que el número de aristas que salen de un nodo sea igual al de entrada, solo se debe cumplir que la suma de los montos sean iguales, esto debido a que dos ciclos pueden compartir una aristas, siempre y cuando el flujo o monto no sea mayor al monto de la transacción representada.

Para un grafo  $G = (V, E)$ , donde  $V$  es el conjunto de nodos y  $E$  el de aristas, se presenta, a continuación, el modelo desarrollado según la lógica descrita anteriormente:

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \sum_{a \in E} X_a \\ & \text{subject to} && \sum_{a \in \delta^+(n)} X_a - \sum_{a \in \delta^-(n)} X_a = 0 \quad \forall n \in V \\ & && 0 \leq X_a \leq C_a \quad \forall a \in E, \end{aligned}$$

siendo  $a$  el índice de las aristas pertenecientes al conjunto aristas,  $n$  el índice de los nodos pertenecientes al conjunto nodos y donde se definen:

- $C_a$  = Valor de la transacción de la arista  $a$ .
- $X_a$  = Flujo a descontar asociado a la arista  $a$ .

- $\delta^+(n)$  = Conjunto de aristas de entrada del nodo n.
- $\delta^-(n)$  = Conjunto de aristas de salida del nodo n.

Es importante notar que el resultado del algoritmo presentado, por construcción, es un grafo compuesto por un conjunto de ciclos aún no determinados individualmente.

También se destaca el valor económico que dicho resultado representa. Al obtener el flujo máximo, se está determinando el flujo circulante de cada arco, debido a la primera restricción del modelo, lo cuales maximizan el monto total descontado de la economía. Este valor corresponde a la solución óptima del problema descrito. La segunda restricción nos permite afirmar que los flujos obtenidos no son mayores a los valores reales de las transacciones realizadas por las empresas.

Finalmente, es importante destacar que los arcos sobrantes del algoritmo forman un grafo acíclico. Esto debido a que, en caso que exista un ciclo compuesto por arcos sobrantes, estos debieran ser parte de la solución óptima, ya que representan un aumento en el flujo máximo obtenido.

### **3.3. Resultados búsqueda de ciclos**

Del algoritmo de flujo máximo se obtuvo un grafo con la suma de montos de transacciones que representa lo máximo que se puede descontar de la economía a partir de ciclos. Sin embargo, dicho algoritmo entrega como resultado un conjunto de aristas, lo que hace necesario descomponer dicho grafo para obtener los ciclos que lo componen.

Es importante notar que, a partir de la restricción del algoritmo de la sección anterior por construcción del modelo de optimización, no pueden existir aristas que no pertenezcan por lo menos a un ciclo ya que si no, el nodo estaría desbalanceado de acuerdo al monto que sale de sus aristas versus el monto que entra de sus aristas. Esto nos permite construir un segundo algoritmo iterativo que pueda recorrer los nodos encontrando ciclos, el cual se presenta a continuación.

El objetivo del algoritmo, tal como se mencionó anteriormente, es encontrar ciclos de forma iterativa. Sin embargo, se busca también encontrar los ciclos de menor tamaño, es

decir, encontrar la mayor cantidad de ciclos que posean una menor cantidad de empresas relacionadas, en particular, ciclos que posean 10 o menos empresas.

A continuación se presentan los pasos a seguir por el algoritmo:

- (I) Ordenar aristas y/o nodos según heurística
- (II) Seleccionar la primera arista según el orden del paso (I)
- (III) Encontrar el ciclo más corto que contenga dicha arista
- (IV) Eliminar ciclo del grafo
- (V) Si el grafo tiene aristas volver al paso (II), si no, terminar

Cabe resaltar en primer lugar, que se menciona en el paso (I) el ordenar las aristas y/o nodos según cierta heurística. Esto debido a que, como es un algoritmo iterativo, es necesario preguntarse por cuál arista partir buscando los ciclos. Explicado lo anterior, se testaron 4 posibles heurísticas de ordenación las cuales fueron:

- Ordenar aristas de menor a mayor según monto de transacción (Arista crecientes)
- Ordenar aristas de mayor a menor según monto de transacción (Arista decrecientes)
- Ordenar nodos de menor a mayor según grados de incidencia de salida (Nodos crecientes)
- Ordenar nodos de mayor a menor según grados de incidencia de salida (Nodos decrecientes)

Las heurísticas basadas en la ordenación según algún criterio persiguen el objetivo de encontrar la mayor cantidad de ciclos con un número bajo de empresas que lo componen.

Aquellas que ordenan según arista de menor a mayor supone que los ciclos de menor tamaño poseen aristas de menor monto y por lo mismo, con este tipo de ordenación, se encontrarán de forma más rápida. Se agrega el supuesto de que la mayor cantidad de ciclos que se encontrarán manifiestan un bajo monto de transacción, por lo que esta heurística permitirá encontrarlos minimizando el número de empresas que los componen.

La ordenación de arista de mayor a menor sigue el mismo principio en sentido contrario, es decir, los ciclos de menor tamaño presentan aristas de mayor peso. Este supuesto permitirá contrastar el supuesto de la heurística anterior, pudiendo identificar si los ciclos siguen cierto patrón según el tamaño y el monto de transacción.

Ordenarlo según nodo tiene relación con los grados de salida y, por lo tanto, realiza la comparación entre sí, los ciclos de menor tamaño tienen nodos con una alta incidencia dentro del grafo o son empresas que no están tan conectadas con el resto de la economía.

En el caso de ordenarlos de menor a mayor grado de incidencia agrega el supuesto de que los ciclos con menor tamaño están compuestos por empresas que, en su gran mayoría, pertenecen a un ciclo. Por el contrario, al ordenar los nodos de mayor a menor según grado de incidencia se agrega el supuesto de que los ciclos con menor cantidad de empresas están compuestos por empresas que estarán presentes en varios otros ciclos con estas características.

Para el caso de ordenar por nodos se escogieron las aristas de incidencia de dicho nodo de forma aleatoria. También es importante describir la forma de encontrar el ciclo más corto a partir de una arista. Para esto se utilizó la librería *NetworkX 2.4* (2019) para *Python 3.6*, específicamente el algoritmo de *shortest\_path*, donde es necesario entregar un nodo de origen y uno de destino, para este caso, aquellos que forman parte de la arista seleccionada en el paso (ii). El algoritmo de *NetworkX* entrega como resultado un camino entre los nodos seleccionados caracterizado por ser el más corto que une dichas empresas. Este camino no es necesariamente único, es decir, pueden existir múltiples caminos entre aquellos nodos del mismo tamaño los cuales también se caracterizan por ser los caminos más cortos. Sin embargo, el objetivo de este estudio no radica en encontrar cuál de dichos caminos es el óptimo para minimizar el número de empresas que componen a todos los ciclos encontrados.

A partir del ciclo encontrado en la sección anterior, se implementa la eliminación del ciclo del grafo. Esto supone la eliminación de al menos una arista del grafo, la cual será aquella que tenga menor peso asociado. Se definirá dicho peso como el monto mínimo de

transacción del ciclo. Dicho monto multiplicado por el número de aristas que conforman el ciclo dará por resultado el monto descontado por el ciclo completo. A continuación se presenta el pseudocódigo para la eliminación del ciclo.

---

**Algorithm 3** función *EliminarCiclo*( $G, ciclo, montoMinimo$ )

---

**Require:**  $G, ciclo, montoMinimo$   
**for** *arista* in *ciclo* **do**  
    **if** *peso arista* == *montoMinimo* **then**  
        Eliminar *arista* de  $G$   
    **else**  
        *peso arista* -= *montoMinimo*  
    **end if**  
**end for**

---

Por cada iteración del algoritmo se eliminará un ciclo del grafo, es decir, se eliminarán aristas y aquellas donde el peso de la arista sea mayor al monto mínimo, su monto de transacción será modificado. Por construcción del grafo, el último ciclo encontrado tendrá la particularidad que eliminará todas sus aristas ya que todas tendrán el mismo peso asociado. Luego de esto el grafo quedará sin aristas. A continuación se presenta el pseudocódigo del algoritmo completo

---

**Algorithm 4** función *BusquedaCiclos*( $G$ )

---

**Require:**  $G$ ,  
**while** numero de aristas en  $G > 0$  **do**  
    *edges* = Aristas ordenadas según Heurística  
    **for** *edge* in *edges* **do**  
        **if**  $G$  tiene *edge* **then**  
            *camino* = *shortest\_path*(*edge*)  
            *ciclo* = *edge* + *camino*  
            *montoMinimo* = Monto mínimo del ciclo  
            *EliminarCiclo*( $G, ciclo, montoMinimo$ )  
        **end if**  
    **end for**  
**end while**

---

Una vez determinada la heurística a utilizar se pueden identificar los ciclos que componen el grafo de flujo máximo obtenido con el algoritmo de la sección anterior. El objetivo

principal es que se encuentre la mayor cantidad de ciclos compuestos por 10 o menos empresas lo cual facilitará el análisis económico y serán ciclos con mayor probabilidad de ser eliminados de la economía.

## Capítulo 4. RESULTADOS

Los estudios desarrollados en esta tesis se realizaron mediante un conjunto de transacciones efectuadas en la economía chilena durante el 2018. Dichos datos fueron facilitados por el Servicio de Impuestos Internos (SII), de forma codificada con tal de mantener altos niveles de confiabilidad y seguridad, por lo que no se detallarán características específicas de las empresas ni sus respectivos rubros. A continuación se presentan los resultados obtenidos de los distintos algoritmos presentados en la sección de metodología.

### 4.1. Características de la economía

La base de datos entregada inicialmente consta de 87.328.036 transacciones realizadas temporalmente entre marzo y mayo del 2018 como fecha de emisión y que, en términos de monto, suman un total aproximado de 2.229 billones de pesos, lo que representa, según cifras del Ministerio de Economía (The World Bank, 2019), solo un 0,97 % del PIB. Esto implica que las transacciones facilitadas por el SII representan una porción reducida de la economía chilena. Otra característica importante es que la base de datos consta de 2.204 mil empresas que participan en las transacciones, lo cual no necesariamente implica empresas distintas, sino que sólo representa RUTs distintos sin identificar empresas que poseen más de un RUT asociadas a sucursales y/o filiales. Resumiendo, en la Tabla 4.1 se presentan las características del grafo inicial.

TABLA 4.1. Características grafo inicial

Característica	Resultado
Número de nodos	2.204.578
Número de aristas	87.328.036
Suma de montos transacción	2.229.374.935 M

Tal como se mencionó en la sección de metodología fue necesario realizar una serie de procesos previos con el objetivo de simplificar los datos. A grandes rasgos estos fueron: eliminación de nodos con grado menor o igual a 1, neteo de las transacciones y eliminación

de bucles. Uno de los procesos importantes a destacar es el neteo de las transacciones con tal de evitar ciclos que solo estén compuestos por sólo dos empresas. Una vez realizado el neteo correspondiente, se pudo evidenciar una disminución del 5 %, tanto en el monto total de la economía como del número de transacciones que se consideraban en el grafo final. También se destaca que cada par de transacciones neteadas representan una disminución en el flujo total circulante ya que se está eliminando un ciclo.

En particular, la ejecución de los algoritmos con la economía dan como resultado un grafo simplificado el cual se definirá como el **grafo neteado** o **economía neteada** y que tiene las siguientes características:

TABLA 4.2. Características economía neteada

Característica	Resultado
Número de nodos	381.780
Número de aristas	9.928.135
Suma de montos transacción	1.889.752.073 M
Densidad	0,000069
Número de componentes fuertemente conectadas	9
Número de nodos componentes fuertemente conectadas más grande	377.891
Arista con mayor monto de transacción	584.462.604 M
Porcentaje monto arista en la economía	30 %

El grafo con el que se realizarán los análisis posteriores posee aproximadamente 10 millones de aristas y contiene un monto total cercano al 84 % del total de la economía. También se aprecia una disminución en el número de empresas resultantes de la economía neteada, obteniendo 2 millones empresas menos aproximadamente. Esto resulta en que el grafo posee solo el 17,32 % de las empresas.

El bajo valor obtenido en la densidad del grafo neteado nos permite caracterizarlo como un grafo disperso. Junto a esto, se determinó que existen 9 componentes fuertemente

conectadas, lo cual nos da una noción de una posible paralelización en futuros algoritmos. Sin embargo, la componente fuertemente conectada más grande está compuesta por el 98,98 % de los nodos del grafo total. Esto implica que el grafo está concentrado, en su gran mayoría, y que una posible separación de este en subgrafos implica eliminar algunas aristas lo que tendrá repercusiones en los ciclos encontrados.

Considerando que existe una arista cuyo monto de transacción representa el 30 % de la suma de montos de la economía, es importante realizar un análisis que permita determinar si existen otras aristas de esta naturaleza. Con esto se puede establecer si el monto de la economía neteada está representado, en su mayoría, por pocas aristas de gran valor. También será necesario en la búsqueda de ciclos para determinar si existen algunos de ellos que presentan montos en sus transacciones que sean considerablemente mayores que los otros. A continuación se presenta la Tabla 4.3 con las transacciones de mayor valor y su porcentaje acumulado en la economía.

TABLA 4.3. Aristas de mayor monto de transacción

Número arista	Monto transacción (M)	Porcentaje economía	Porcentaje acumulado
1	584.462.604	30 %	30 %
2	51.554.265	2,7 %	32,7 %
3	14.449.768	0,76 %	33,46 %
4	9.318.733	0,49 %	33,95 %
5	7.868.510	0,41 %	34,46 %
6	6.940.811	0,36 %	34,72 %
7	5.169.942	0,27 %	34,99 %
8	3.787.713	0,20 %	35,19 %
9	3.347.885	0,17 %	35,36 %
10	3.245.446	0,17 %	35,53 %

Existen aristas cuyos montos son considerablemente superiores al resto, sin embargo, la cantidad de aristas con esta característica son escasas. Las 10 aristas más grande

representan el 35,53 % de la economía y la décima arista solo representa un 0,17 %. Esto nos permite establecer que un tercio del grafo neteado está representada por pocas aristas, mientras que los dos tercios restantes por las más de 9 millones de transacciones restantes.

Como análisis del grafo neteado se presenta a continuación, según rangos de montos de transacción, el comportamiento de las aristas, tanto el número de transacciones que cada rango posee y cuánto de la suma de montos de la economía cada rango representa.

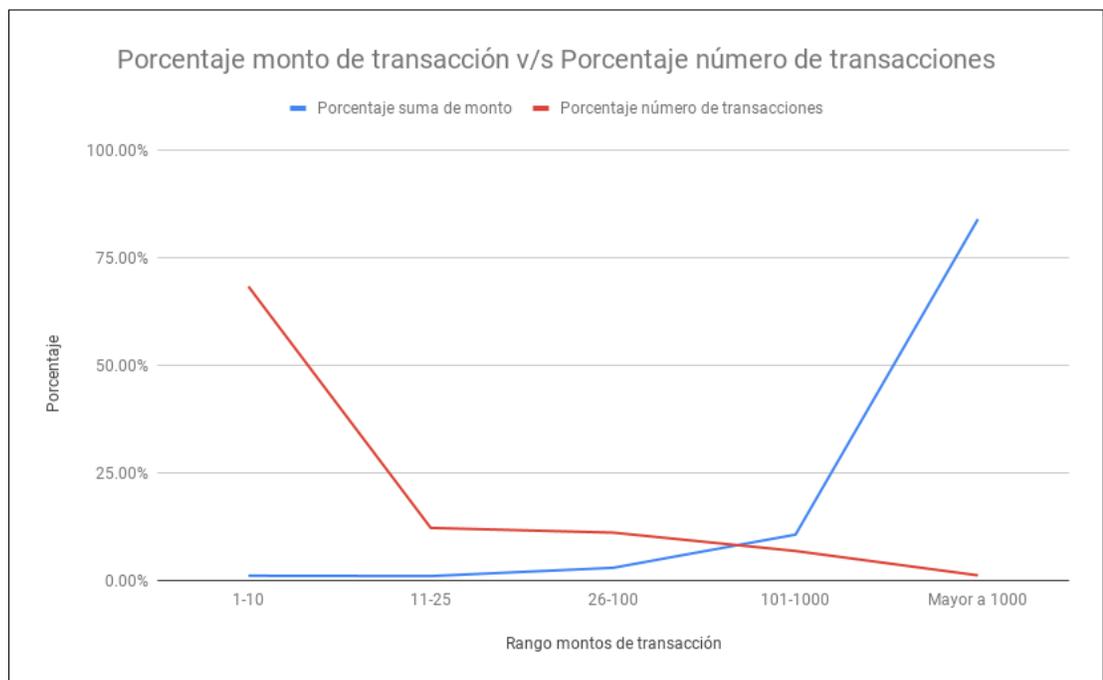


FIGURA 4.1. Porcentaje monto de transacción versus número de transacciones según rangos

De la Figura 4.1 se puede inferir que el número de aristas según monto es inversamente proporcional al monto total que representan dichas aristas en la economía, es decir, existe un gran número de aristas de bajo monto. Sin embargo, estas no representan un gran porcentaje al total de la economía. Por el contrario, existen pocas aristas de alto monto (mayor a 1.000 M) las cuales representan un alto porcentaje de la economía (cercano al 75 %). Esto nos permite determinar un posible enfoque de estudio dirigido a encontrar los ciclos más representativos y significativos para la economía.

Con el grafo neteado de la economía resultante del preprocesamiento descrito en la sección 3 se procederá, en primer lugar, a determinar el flujo máximo a través de un algoritmo de optimización que entregue como resultado un segundo grafo con el flujo que pasa por cada arista tal que se maximiza la suma de los flujos. Dichos flujos representan el valor de las transacciones que tendrán asociados los ciclos. En segundo lugar, a partir del grafo anteriormente descrito, se determinarán los ciclos que lo componen como resultado principal de esta tesis.

## **4.2. Análisis de los flujos circulares en la economía**

Los resultados que se presentan a continuación corresponden a los obtenidos del algoritmo de flujo máximo para el grafo neteado de la economía presentado en la sección anterior. Para el desarrollo del algoritmo se utilizó Gurobi en Python como optimizador y un Intel Core i7 con 6 núcleos como procesador.

### **4.2.1. Análisis algoritmo de flujo máximo**

En una primera instancia se ejecutó el modelo presentado anteriormente para distintas cotas, definidas como montos mínimo de cada transacción, con tal de evidenciar el desempeño del modelo en cuanto a flujo máximo total, tiempos de ejecución y características de nodos y aristas del grafo resultante.

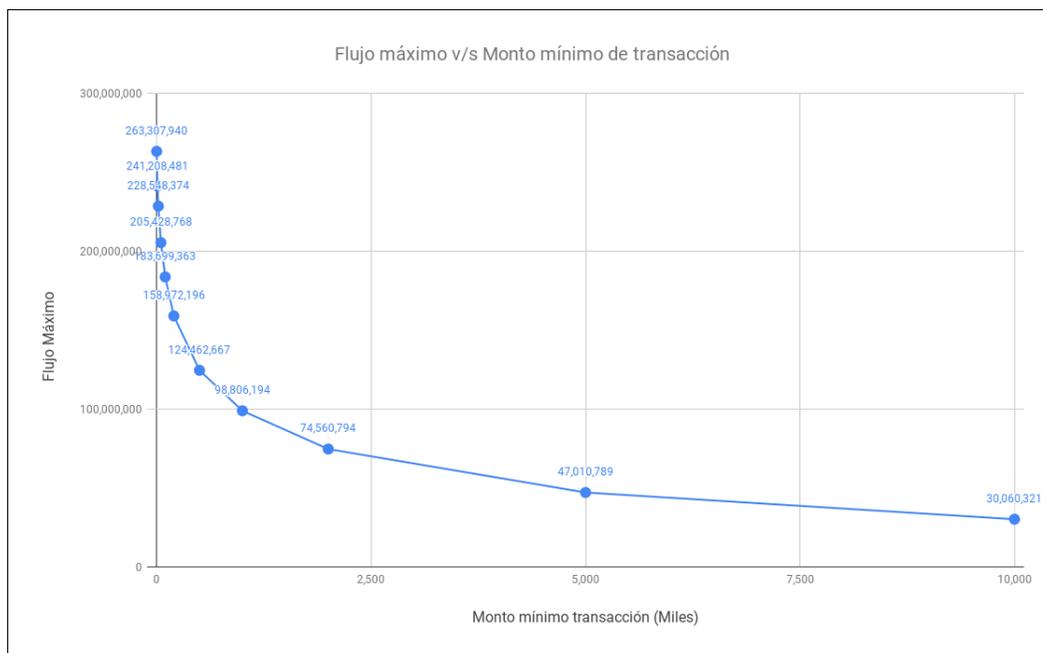


FIGURA 4.2. Flujo máximo según monto mínimo de transacción

De la Figura 4.2 se evidencia un comportamiento exponencial en cuanto al flujo máximo, que aumenta a medida que disminuye el monto mínimo de transacción. Esto se debe a que el número de transacciones crece exponencialmente a medida que disminuye el monto de transacción. Este comportamiento nos permite concluir que es necesario realizar un análisis de la economía completa y no parcializado considerando transacciones por sobre cierto monto, debido a que la diferencia de flujo máximo es considerablemente distinta según la variación de las cotas.

Al igual que la interpretación económica del modelo, los flujos máximos obtenidos pueden representar dos tipos de fenómenos financieros, un flujo circular entre empresas siendo potenciales ciclos para ser neteados de la economía. y que los ciclos pueden estar relacionados con transacciones ilegales que permiten realizar evasión de impuestos. No obstante, la categorización de los ciclos según los fenómenos financieros antes mencionados no es material de esta tesis.

Debido a que el resultado del modelo de flujo máximo presentado anteriormente es un conjunto de aristas con un flujo asociado, cuya suma representa el valor máximo a descontar de la economía, es importante analizar el número de aristas resultantes que componen el grafo, según las diferentes cotas. A continuación se presentan los resultados:

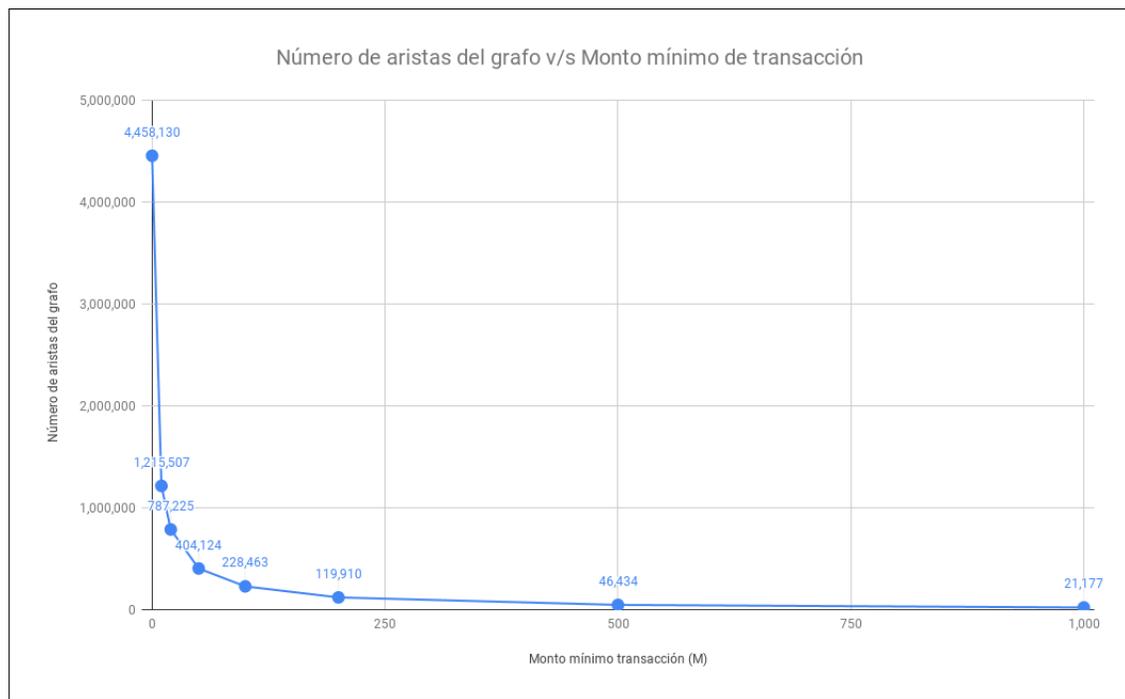


FIGURA 4.3. Número de aristas del grafo según monto mínimo de transacción

De la Figura 4.3 se puede apreciar un comportamiento exponencial más pronunciado, el cual evidencia el crecimiento en el número de aristas que se tiene según disminuye el monto mínimo de cada transacción. Una de las principales diferencias entre las Figuras 4.2 y 4.3 es que para las últimas dos cotas inferiores, el flujo máximo es bastante similar con variaciones cercanas al 10 %, mientras que el número de aristas en el grafo aumenta de 1 millón a 4 millones de aristas aproximadamente. Esto es atribuible al aumento considerable en el número de aristas en el grafo evidenciado en la Figura 4.1 lo cual supone un aumento en el número de ciclos que se pueden encontrar.

A continuación se presentan los resultados obtenidos en cuanto a tiempos de ejecución, medidos en segundos, lo cual nos permite determinar la velocidad del algoritmo para distintas cotas.

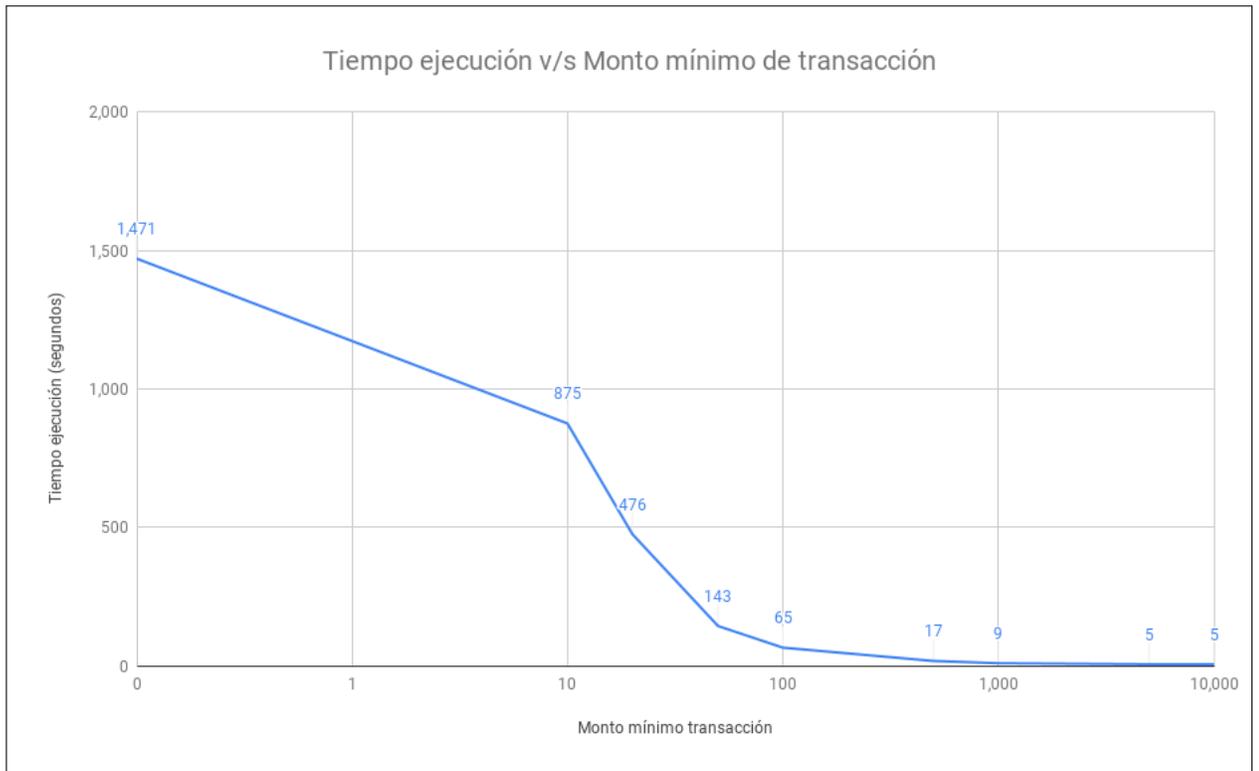


FIGURA 4.4. Tiempos de ejecución según monto mínimo de transacción

A partir de la Figura 4.4, se puede apreciar que el tiempo que se demora el algoritmo en determinar el flujo máximo para toda la economía neteada son 1.472 segundos, es decir, 24 minutos aproximadamente.

#### 4.2.2. Resultado algoritmo de flujo máximo para la economía

A partir del algoritmo de flujo máximo es posible determinar el mayor monto posible a descontar de la economía mediante ciclos, obteniendo como resultado un grafo donde cada arista representa el máximo flujo circulante posible entre las empresas que se relacionan. Los resultados presentados en la sección 4.2.1 muestran la factibilidad en la obtención del flujo máximo para la economía neteada pese al tamaño del grafo.

Esta sección presenta los resultados obtenidos del flujo máximo para la economía neteada con el objetivo de analizar el grafo resultante del modelo. En la Tabla 4.4 se presentan los resultados generales obtenidos:

TABLA 4.4. Resultados características grafo flujo máximo

Características Grafo	Resultado
Flujo máximo (Monto total descontado)	263.307.940 M
Porcentaje economía	11,81 %
Tiempo ejecución	24 minutos
Número de nodos (Número de empresas)	349.354
Número de aristas (Número de transacciones)	4.458.130
Densidad	0,000037
Número componentes fuertemente conectados	7

De la Tabla 4.4 se destaca el porcentaje de la economía que representa el flujo máximo obtenido, llegando a un 12 % aproximadamente lo que es un valor importante si se considera que todo ese monto se puede descontar de la economía. A su vez, se destacan los 4 millones de transacciones que se obtuvieron, lo que representa un 44,5 % de las transacciones de la economía neteada. De la misma forma, si se analiza el número de empresas que conforman el grafo, se obtuvieron 350 mil nodos aproximadamente, los que representan un 92 % de las empresas que conforman la economía neteada.

#### 4.2.3. Análisis transacciones

En la sección anterior se destacó que el grafo resultante estaba compuesto por más de 4 millones de transacciones, las cuales representan distintos montos de flujo entre empresas. Para su análisis se clasificaron las transacciones según monto, específicamente en 5 tramos: montos entre 1 y 10 M, montos entre 11 y 25 M, montos entre 26 y 100 M, montos entre 101 y 1000 M y montos mayores a 1.000 M.

A continuación se presenta una comparación entre el número de transacciones del grafo para cada tramo y el monto total que dichas transacciones suman.



FIGURA 4.5. Monto descontado v/s monto de transacción según tramos de monto

De la Figura 4.5 se desprende la diferencia entre el monto y el número de transacciones que cada tramo representa, encontrando curvas totalmente opuestas. Existe un gran número de transacciones con monto bajo, cercano a los 3 millones de transacciones lo que representa un 72 % del total de transacciones, sin embargo, el monto total que representan estas solo alcanza el 3,77 % del flujo máximo. Por el contrario, las transacciones de mayor monto son bastante escasas y solo representan el 5,11 % del total de transacciones. Sin embargo, el monto total es cercano a los 160.000 millones lo que es un 60 % aproximadamente del flujo máximo.

A partir de este análisis, es relevante realizar un estudio más exhaustivo para ciertos tramos antes mencionados. En primer lugar, poder identificar la distribución de las más de 3 millones de transacciones de monto inferior, de modo de poder identificar si existe algún tipo de tendencia en el monto. Es por esto que se descompuso dicho tramo en cada uno de los 10 posibles montos de transacción. En la siguiente tabla se muestra el desglose de los resultados obtenidos:

TABLA 4.5. Características aristas con monto entre 1M y 10M

Monto transacción (M)	Número transacciones	Porcentaje Transacción	Monto total (M)	Porcentaje del monto total descontado
1	1.182.449	26,52 %	1.182.449	0,45 %
2	551.267	12,37 %	1.102.534	0,42 %
3	537.100	12,05 %	1.611.300	0,61 %
4	240.125	5,39 %	960.500	0,36 %
5	170.563	3,83 %	852.815	0,32 %
6	185.516	4,16 %	1.113.096	0,42 %
7	112.507	2,52 %	787.549	0,30 %
8	96.670	2,17 %	773.360	0,29 %
9	92.630	2,08 %	833.670	0,32 %
10	71.707	1,61 %	717.070	0,27 %

A partir de la Tabla 4.5 se presentan las siguientes conclusiones. En primer lugar, aproximadamente un 25 % de las transacciones obtenidas del algoritmo se caracterizan por tener un monto de 1M lo cual representa el mínimo monto que una transacción puede tener para el análisis de la economía de esta tesis.

Si relacionamos dicho resultado con los futuros ciclos que se obtendrán del grafo resultante, podemos obtener la premisa de que existirán varios ciclos con monto mínimo de transacción de 1M. En segundo lugar se aprecia que, a medida que aumenta el monto de transacción, disminuye el número de transacciones que se encuentran en el grafo. Finalmente se aprecia que cada tramo en la tabla no representa más del 0,6 % del monto total descontado, es decir, pese a que se tiene un gran número de transacciones con características de montos inferiores, no representan un porcentaje significativo en el monto total descontado.

Continuando con el análisis de los tramos presentados en la Figura 4.5, es importante destacar las transacciones que tienen un monto mayor a 1.000 M las cuales son, aproximadamente, 30 mil transacciones que representan un 60 % del monto total descontado.

#### 4.2.4. Grado de entrada y de salida de los nodos

Por otro lado, una de las características de los grafos importantes a analizar son los grados de los nodos que lo componen. Tal como se definió en la sección 3.1, el grado de un nodo se define como el número de aristas incidentes al vértice. Para esta sección en particular se separan dichas aristas de incidencia en dos grupos, los grados de entrada y los grados de salida de un nodo.

A continuación se presenta una gráfica donde se evidencia la cantidad de nodos que presentan grados de salida menores a 100 y su distribución:

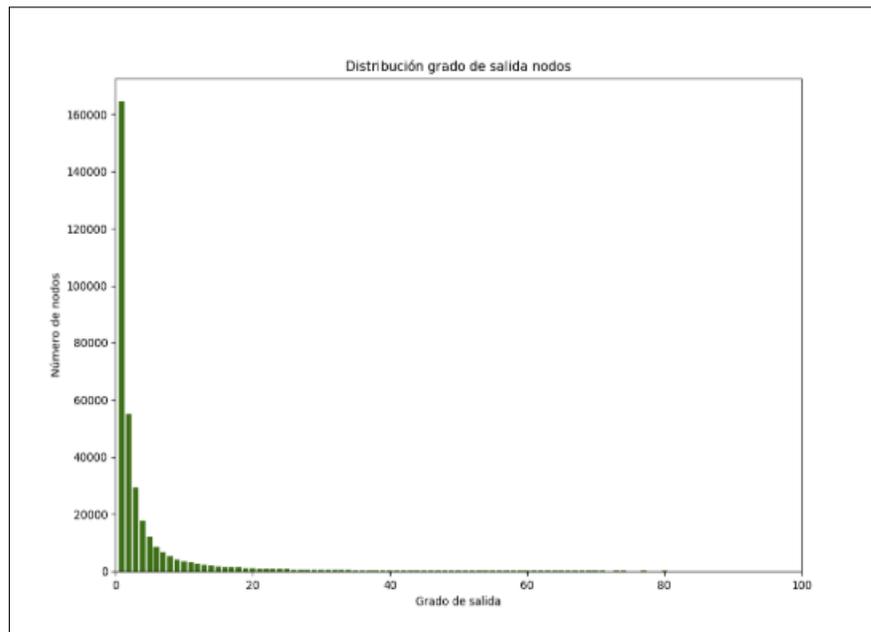


FIGURA 4.6. Distribución grados de salida de los nodos del grafo

De la figura 4.6 se aprecia que existe 160 mil nodos aproximadamente (45 % de los nodos del grafo) con grado de salida igual a 1. Es importante notar que la conclusión anterior no implica que dichos nodos sólo pueden pertenecer a un solo ciclo, dado que esto va a depender del monto de transacción asociado a la arista y del mínimo monto de transacción asociada a los ciclos que la arista puede estar relacionada. Una segunda conclusión de la figura 4.6 es que, a medida que aumenta el grado de salida, la cantidad de nodos

que presentan dicho grado disminuye considerablemente presentando un comportamiento exponencial.

A continuación se presenta una gráfica similar para el grado de entrada de los nodos:

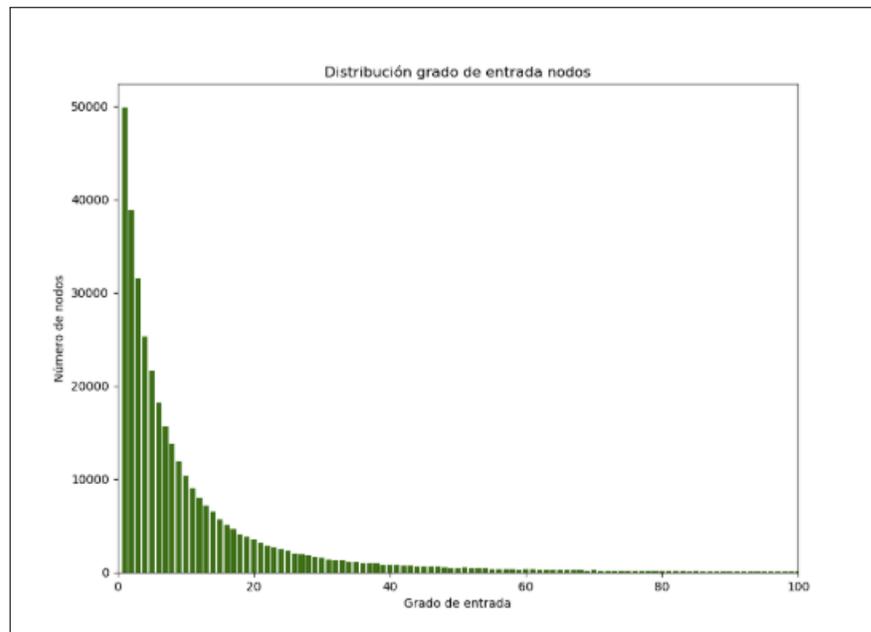


FIGURA 4.7. Distribución grados de entrada de los nodos del grafo

Al igual que en los grados de salida, el comportamiento que se observa para los grados de entrada de los nodos es bastante similar, con un comportamiento exponencial donde el número de vértices disminuye a medida que aumentan los grados de salida. Sin embargo, solo existen 50 mil nodos aproximadamente (14 % del total de nodos) que poseen como grado de entrada una sola arista.

A partir de las figuras presentadas para los grados de entrada y de salida de los nodos se puede concluir que, para gran parte de los nodos dentro del grafo, estos tendrán más aristas de entrada que de salida, lo cual genera discrepancias con la composición del grafo. Para continuar con el análisis es importante identificar los máximos grados de entrada y de salida de los nodos, que se presentan a continuación:

TABLA 4.6. Máximo grado de entrada y de salida del grafo

Tipo de grado	Máximo grado	Porcentaje total de nodos
Entrada	2.783	0,80 %
Salida	110.901	31,74 %

Los resultados evidencian que, pese a que existe una gran cantidad de nodos que poseen grados de salida igual a 1, existe un nodo que posee una conexión con más del 30 % de los nodos del grafo, lo que compensa la discrepancia que se comentó anteriormente. En otras palabras, el hecho que el 45 % de los nodos tenga una sola arista de salida se equilibra con que existe un nodo que tenga un alto grado de salida.

#### 4.2.5. Componentes fuertemente conectadas

En la sección 4.2.2, se determinó que para el grafo resultante del algoritmo de flujo máximo existen 7 componentes fuertemente conectadas, que nos permiten caracterizar el grafo según su nivel de conexión ya que de estar juntas, da indicios de una posible paralelización en la posterior búsqueda de ciclos. A partir de esto, se realizó un análisis más profundo de dicha característica para el grafo de flujo máximo obteniendo los siguientes resultados:

TABLA 4.7. Resultados características componentes fuertemente conectados

Características componentes fuertemente conectado	Resultado
Número de componentes fuertemente conectado	7
Número de nodos componente más grande	349.336 nodos
Porcentaje de nodos componente más grande	99,99 %

En el análisis, se obtiene que el porcentaje de nodos del componente fuertemente conectado más grande sea el 99 % del total de nodos, lo que implica que la red resultante del flujo máximo está totalmente conectada.

Esto nos permite concluir que, en primer lugar, realizar una paralelización en la búsqueda de ciclos se vuelve compleja debido a que, al estar todos los nodos tan conectados, una posible separación del grafo terminaría dejando fuera ciertas aristas y, por lo tanto, ciertos ciclos. En segundo lugar, se puede concluir que el grafo tiene características muy parecidas a los datos que se tienen de la economía donde la gran mayoría de las empresas están fuertemente conectadas

#### 4.2.6. Algoritmo flujo máximo mensual

En la búsqueda de posibles paralizaciones en la posterior elección de los ciclos, es que se realizó un análisis mensual del algoritmo de flujo máximo según la fecha de emisión de las transacción separando el grafo inicial en 3 subgrafos a los que denominaremos según cada mes, es decir, marzo, abril y mayo. Para cada subgrafo se ejecutó el algoritmo de estudio y se obtuvieron los siguientes resultados:

TABLA 4.8. Resultados flujo máximo mensual

Mes	Tiempo ejecución	Monto descontado (M)	Porcentaje economía	Número de nodos	Número de Aristas
Marzo	12 minutos	79.779.007	3,58 %	262.206	2.352.635
Abril	15 minutos	79.487.876	3,56 %	270.330	2.422.749
Mayo	14 minutos	83.893.931	3,76 %	274.193	2.501.568
Total	41 minutos	243.160.814	10,90 %	-	-

Si comparamos los resultados obtenidos con aquellos presentados en la sección 4.2.2 para la economía neteada, se puede apreciar que los tiempos de ejecución son mayores al momento de analizar la economía mensualmente, obteniendo un tiempo total de ejecución de 41 minutos para los tres meses, muy superior a los 24 minutos obtenidos para la economía neteada. En segundo lugar, se puede observar que el número de aristas del grafo que se obtiene para cada mes es superior a los dos millones de aristas, el cual es menor a los 4 millones obtenidos para la economía neteada. Sin embargo, la obtención de los ciclos a

partir de los grafos resultante sigue siendo compleja por el elevado número de aristas del grafo que se tienen como resultado.

Finalmente, es importante comparar el monto total descontado de los subgrafos versus el obtenido para la economía neteada. Para este último caso, se obtuvo un monto total cercano al 11,81 % de la economía. Por el contrario, el monto descontado de la suma de los tres meses es cercano al 10,90 %, equivalente a 1 % menos de la economía aproximadamente. Esta cifra en términos de transacciones representa 20 billones de pesos aproximadamente, lo cual no puede ser despreciado y, por lo mismo, se decidió realizar un análisis de la economía neteada y no un análisis parcializado por meses.

### **4.3. Búsqueda de ciclos**

El grafo resultante del algoritmo de flujo máximo para la economía neteada representa el máximo flujo circulante compuesto por ciclos, sin identificar cada uno de forma particular. El principal objetivo de obtener los ciclos es poder determinar las empresas que los componen con el fin de eliminar dicho flujo circulante de la economía neteando el ciclo.

Para la identificación de ciclos a partir del grafo resultante de la descomposición de flujo máximo presentado anteriormente se utilizarán las heurísticas propuestas en la sección 3.3. Estas se basan en la ordenación de las aristas y nodos junto a la utilización de un algoritmo de *shortest path* para encontrar el camino más corto entre dos nodos.

Para determinar cuál heurística ocupar para el grafo resultante del algoritmo de flujo máximo para la economía neteada, se procederá a ejecutar el algoritmo de búsqueda de ciclos para distintos subgrafos. Estos fueron obtenidos en la sección 4.2.1 los cuales se asocian a cotas que representan montos mínimos de las transacciones. En particular se ejecutarán las heurísticas para las cotas 1.000 M y 100 M comparando los resultados en base a ciclos encontrados que tengan 10 o menos empresas y la suma de montos que representan en el total a descontar.

### 4.3.1. Búsqueda de ciclos para cotas

Con tal de ir en aumento en la complejidad del grafo, es decir, en aumento del número de aristas, es que se partió ejecutando el algoritmo para la cota 1.000 M. Para las 4 heurísticas el tiempo de ejecución fue bastante similar, bordeando siempre los 30 segundos. En la Tabla 4.9 se presentan los resultados obtenidos:

TABLA 4.9. Resultados heurísticas subgrafo transacciones monto mayor a 1.000 M

Heurística	Aristas Creciente	Aristas Decreciente	Nodos Creciente	Nodos Decreciente
Número ciclos	13.557 ciclos	13.545 ciclos	13.561 ciclos	13.551 ciclos
Tamaño ciclo más grande	121 empresas	258 empresas	181 empresas	234 empresas
Número ciclos con 10 empresas o menos	8.492 ciclos	6.482 ciclos	7.652 ciclos	6.931 ciclos
Porcentaje ciclos con 10 empresas o menos	62 %	47 %	56 %	51 %
Porcentaje suma montos ciclos con 10 empresas o menos	56 %	57 %	59 %	58 %

A partir de la tabla se puede concluir que, en primer lugar, para las 4 heurísticas propuestas el número de ciclos encontrados es bastante similar, cercano a los 13 mil ciclos. Sin embargo, al determinar el tamaño del ciclo más grande se comienzan a evidenciar diferencias en los resultados.

Un segundo punto a destacar es el número de ciclos de tamaños menor a 10 empresas que se encontraron. Para la heurística de ‘Aristas Crecientes’ se obtuvieron los mejores resultados teniendo más del 60 % de los ciclos en el rango descrito. Esto nos permite plantear

la hipótesis de que dicha heurística es la que se debe usar para el análisis de la economía neteada completa.

Un tercer punto es el que tiene relación con la suma de los montos que los ciclos con menor número de empresas representa. Se define el monto de un ciclo como el valor de la arista con menor peso multiplicado por el número de aristas. Esto permite determinar cuánto se podría descontar de la economía en caso de netear las transacciones asociadas al ciclo. Se observa en la Tabla 4.9 que el porcentaje de la suma de los montos de los ciclos que presentan 10 o menos empresas asociadas sólo representa un 57 % promedio, siendo la heurística de 'Arista Creciente' la de peor resultado con un 56 %

En conclusión, el análisis muestra una tendencia a ciertas heurísticas, específicamente las de orden decreciente, tanto de aristas como de nodos, debido a que presenta mejores resultados para las características de los ciclos que se encuentran. Según la Tabla 4.9, la heurística de nodos creciente es la que presenta un mayor porcentaje de monto descontado en ciclos con número de empresas menor o igual a 10. Este comportamiento permite que los ciclos de menor tamaño tengan un mayor impacto en el monto descontado total.

Pese a que los resultados obtenidos para el subgrafo correspondiente a las aristas con peso asociado mayor a 1.000 M dan una noción de cual heurística usar, no es posible afirmar con certeza debido al tamaño de la muestra. Dado esto es que se realizó el mismo análisis para un subgrafo con aristas cuyos pesos sean mayor o igual a 100 M. La muestra tiene 200 mil aristas aproximadamente, 65 mil nodos y un monto total descontado de 183.699.363 M.

En la Tabla 4.10 se presentan los resultados obtenidos para las 4 heurísticas, los cuales fueron:

TABLA 4.10. Resultados heurísticas subgrafo transacciones monto mayor a 100 M

Heurística	Aristas Creciente	Aristas Decreciente	Nodos Creciente	Nodos Decreciente
Número ciclos	162.442 ciclos	162.034 ciclos	162.231 ciclos	162.036 ciclos
Tamaño ciclo más grande	280 empresas	437 empresas	377 empresas	443 empresas
Número ciclos con 10 empresas o menos	125.433 ciclos	94.063 ciclos	114.001 ciclos	97.889 ciclos
Porcentaje ciclos con 10 empresas o menos	77 %	58 %	70 %	60 %
Porcentaje suma montos ciclos con 10 empresas o menos	63 %	61 %	65 %	61 %

Al analizar los resultados presentados, se evidencia, en primer lugar, que el número de ciclos encontrados en las 4 heurísticas es bastante similar, cercano a los 162 mil ciclos. Es importante destacar que el tiempo de ejecución para las heurísticas, al igual que para el subgrafo anterior, fueron muy similares tomando todas un tiempo de 92 minutos.

En segundo lugar, y por el contrario al número de ciclos, el tamaño del ciclo más grande en las heurísticas presenta diferencias sustanciales, siendo la heurística de aristas crecientes la que presenta mejores resultados.

Luego, se analiza el número de ciclos con tamaño menor o igual a 10 empresas en los que nuevamente la heurística de arista creciente presenta los mejores resultados (77 % de los ciclos). Este valor es muy superior al porcentaje obtenido para las heurísticas de orden decreciente.

Finalmente y donde las heurísticas se comportan de forma muy similar, se analiza el monto descontado por los ciclo de tamaño corto. Particularmente, todos las heurísticas presentan valores cercanos al 61 %.

#### **4.3.2. Elección de heurísticas**

De los resultados obtenidos en la sección 4.3.1, donde se compararon 4 heurísticas de ordenación propuestas y testeadas en dos subgrafos obtenidos del grafo resultante de la sección 4.2.1, se establece que la heurística de 'Aristas Crecientes' es la que presenta mejores resultados.

Para la determinación de esta decisión se tomó en cuenta, en primer lugar, el tiempo de ejecución de las heurísticas. Para cada subgrafo el tiempo de ejecución fue similar para los 4 tipos de ordenación, sin presentar una diferencia importante que permitiera diferenciar una heurística de otra.

En segundo lugar, se comparó el número de ciclos encontrados en cada heurística donde nuevamente los resultados no permitieron realizar una diferenciación importante entre los métodos de ordenación. Esto debido a que se encontró la misma cantidad de ciclos, aproximadamente en las 4 heurísticas, siendo la de ordenación por aristas de forma creciente la que, para los dos subgrafos, presentó la mayor cantidad de ciclo. Sin embargo la cifra no fue significativamente mayor.

Teniendo en cuenta que los parámetros de comparación anteriores no permiten determinar diferencias importantes, se optó por comparar los resultados según el número de ciclos que tuviesen 10 o menos empresas asociadas. Este parámetro fue uno de los más determinantes ya que presentó resultados que favorecen de manera considerable a la ordenación de aristas de forma creciente. Dicha heurística obtuvo un 10 % más de ciclos que el resto.

Finalmente, se comparó el porcentaje del monto descontado por los ciclos de 10 empresas o menos según el monto total descontado del subgrafo. Los resultados reflejaron una diferencia entre las heurísticas de orden creciente por sobre aquellas que ordenaban de

forma decreciente. Pese a que aquella que ordena los nodos de forma creciente presenta mejores resultados que la que ordena las aristas de forma creciente, las diferencias entre los porcentajes no es significativa. Por lo mismo, este parámetro no permite diferenciar una heurística por sobre la otra.

A partir de los 4 puntos de comparación mencionados se determinó que la heurística que ordena las aristas de forma creciente es la que presenta mejores resultados y, por lo tanto, será la utilizada para el grafo de la sección 4.2.2 obtenido del modelo de optimización de flujo máximo para la economía neteada completa.

#### **4.4. Ciclos en la economía**

En la sección anterior se determinó cuál heurística presenta mejores resultados para los distintos subgrafos de la economía según cotas de transacción. Dichos resultados mostraron que la heurística de ordenación de aristas de forma creciente es la más conveniente para ser utilizada en el grafo de la economía neteada.

Los resultados que se presentan en esta sección corresponden a la búsqueda de ciclos en el grafo resultante del algoritmo de flujo máximo para la economía neteada a través de la heurística de ordenación de aristas de forma creciente. Los ciclos que se presentan a continuación son aquellos que pueden ser neteados y que, en su conjunto, representan el mayor flujo circulante de la economía.

A continuación se presentan los resultados generales del algoritmo junto a una primera caracterización de los ciclos encontrados:

TABLA 4.11. Características ciclos identificados economía

Característica	Resultado
Monto total descontado	263.307.940 M
Porcentaje economía	11,81 %
Número de empresas en ciclos	349.354
Número de transacciones en ciclos	4.458.130
<b>Número de ciclos</b>	<b>3.847.625</b>
Tiempo ejecución búsqueda ciclos	142 minutos
Ciclo de mayor tamaño	303 empresas
Número ciclos con 10 empresas o menos	3.626.876
Porcentaje ciclos con 10 empresas o menos	94 %
Porcentaje suma montos ciclos con 10 empresas o menos	70 %

El algoritmo, de forma iterativa, en un grafo de más de 4 millones de aristas encontró 3,8 millones de ciclos de distintos tamaños y características. El tiempo de ejecución fue de 2 horas y 22 minutos. Esto implica que, dado el grafo neteado, el encontrar los ciclos toma un tiempo total de 3 horas aproximadamente que se descompone en 24 minutos para encontrar el flujo máximo a descontar junto con las aristas que lo componen y el resto del tiempo en la búsqueda de los ciclos.

Destacan también el número de ciclos compuestos por 10 o menos empresas, siendo el 94 % de los ciclos de estas características. Dicho valor es importante para el objetivo de esta tesis ya que, a menor cantidad de empresas en el ciclo, mayor probabilidad de que se pueda netear y ser descontado de la economía chilena. Sin embargo, el monto que estos representan en el monto total descontado es solo el 70 %, es decir, 184.315.558 M de pesos.

Como detalle final, el ciclo más grande encontrado contiene 303 empresas y tiene la característica de ser el último encontrado. Dado que las aristas se ordenan de forma creciente, dicho ciclo podría ser el de mayor monto asociado, sin embargo, esto no ocurre. Cuando un ciclo es encontrado, el algoritmo lo elimina del grafo, lo que implica eliminar la/s artista/s de menor monto y disminuir el peso de las aristas restante. Luego de esto, no se procede a reordenar las aristas para continuar con el algoritmo, sino que se mantiene el orden inicial. El comportamiento descrito implica que las aristas del último ciclo son aquellas residuales cuyos montos fueron disminuidos en las iteraciones.

Para verificar que los algoritmos con los que se determinaron los ciclos fueron implementados de la forma correcta, se verificó que no quedaran aristas en el grafo luego de la búsqueda de ciclos. Según el algoritmo de flujo máximo la suma de montos de las aristas de entrada de un vértice es igual a las de salida. Al encontrar y eliminar de forma inmediata un ciclo del grafo, la suma de montos de entrada y de salida se deben mantener para todos los vértices. Dado esto, si quedaran aristas en el grafo, luego de encontrar los ciclos, implicaría que ocurrió un error en la búsqueda de ciclos o en la modelación del problema de optimización. Considerando que el grafo, luego de encontrar los ciclos, quedó sin aristas podemos deducir que se encontraron los mejores ciclos que representan el máximo flujo a descontar de la economía chilena.

Ya se analizó la cantidad de ciclos cuyos tamaños son de 10 o menos empresas. Sin embargo, esta métrica no nos permite determinar el comportamiento de los ciclos según su tamaño ya que sólo nos da una noción de cuántas empresas tiene la mayoría de los ciclos. El objetivo de esta sección es poder establecer cuál es el tamaño de la mayor cantidad de ciclos y determinar la distribución de estos. Para establecer las métricas dichas anteriormente se presenta a continuación la Figura 4.8 con la distribución de los ciclos según su tamaño:

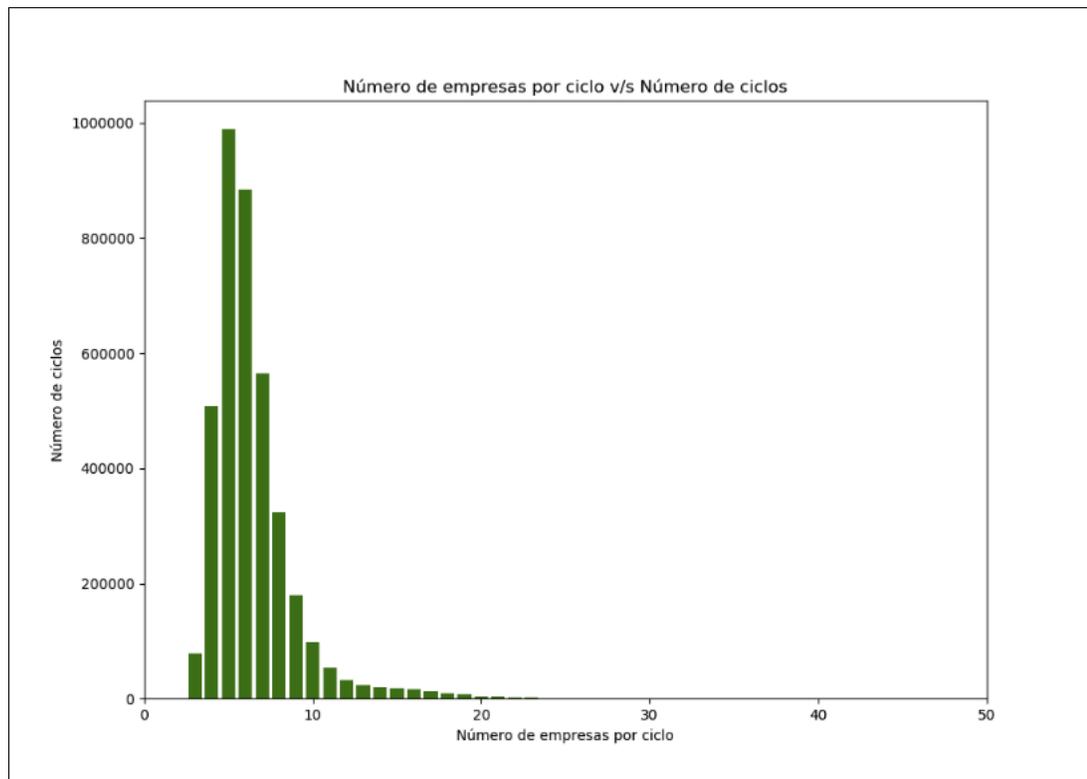


FIGURA 4.8. Número de ciclos según número de empresas asociadas

De la Figura 4.8 se puede visualizar que existe una distribución tendiente al aumento para los ciclos con menor número de empresas. Este comportamiento se da hasta alcanzar el peak ubicado en los ciclos de 5 empresas, los cuales representan el 25,98 % del total. Es importante también destacar que los ciclos de 6 empresas asociadas representan el 22,98 % del total. Con esto, la suma de ambos ciclos da, aproximadamente, el 50 % del total. Luego del peak ubicado en las 5 empresas, la distribución se torna inversamente proporcional al tamaño del ciclo, es decir, mientras más empresas asociadas al ciclo, menor cantidad de este tipo se encuentran. A partir de las 10 empresas en la gráfica, aproximadamente, los ciclos que se encuentran disminuyen considerablemente. Cercano a las 20 empresas los ciclos encontrados son escasos.

A partir de la distribución se puede determinar el porqué el 94 % de los ciclos son de 10 o menos empresas, sin embargo, no permite analizar el monto descontado por dichos ciclos

que solo representa el 70 % del monto total. En la Figura 4.9 se presenta la distribución de los montos descontados según el tamaño de los ciclos.

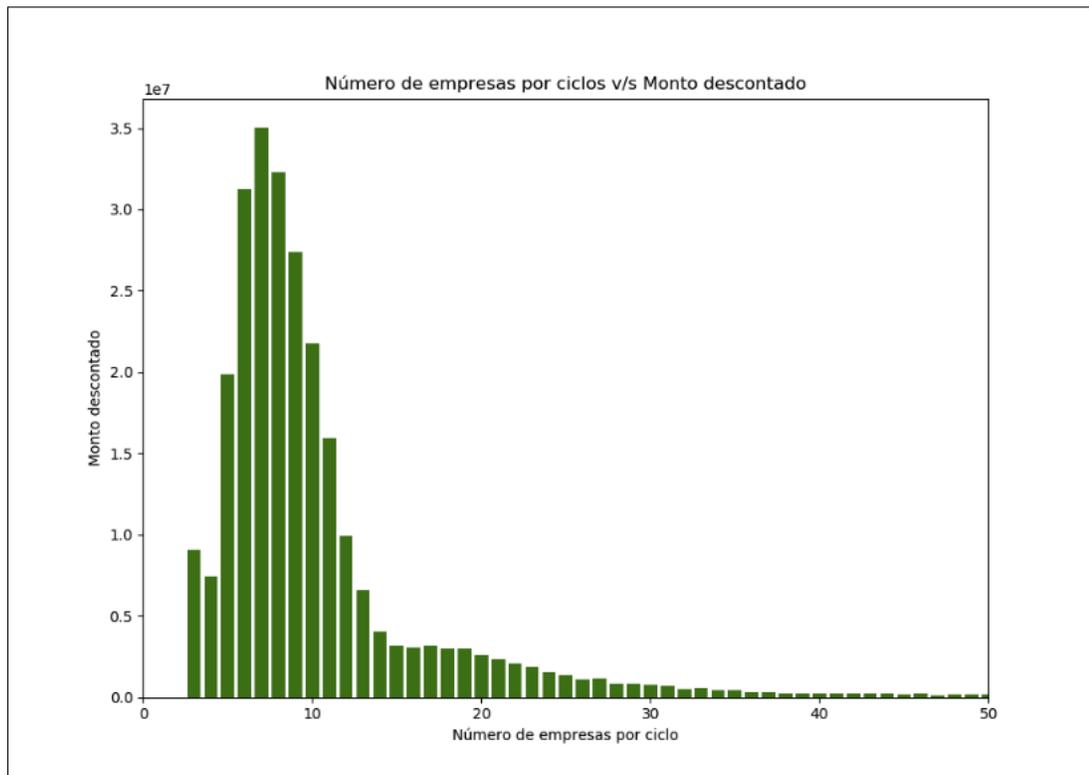


FIGURA 4.9. Monto descontado según número de empresas asociadas

El comportamiento del monto descontado muestra diferencias importantes con respecto a la distribución del número de ciclos. En primer lugar, el peak en la distribución se encuentra en los ciclos de 7 empresas asociadas, a diferencia del anterior que estaba en los ciclos de 5 empresas.

En cuanto al comportamiento del monto descontado, la distribución es similar al resto de las gráficas mostradas para estas variables. Se muestra un aumento en el monto hasta cierto peak y luego disminuye exponencialmente. La diferencia principal es que para ciclos de mayor tamaño a 10 empresas, el monto descontado sigue siendo relevante y no despreciable.

Considerando que el objetivo de estudio de esta tesis son los ciclos compuesto por 10 empresas o menos, se presenta a continuación una tabla que detalla la cantidad de ciclo y el monto descontado en detalle de cada ciclo perteneciente al tramo mencionado.

TABLA 4.12. Características ciclos con 10 o menos empresas asociadas

Empresas por ciclo	Número de ciclos	Porcentaje número de ciclos	Monto descontado (M)	Porcentaje monto descontado
3	78.892	2,05 %	9.068.622	3,34 %
4	507.248	13,18 %	7.451.904	2,83 %
5	988.758	25,69 %	19.828.655	7,53 %
6	884.358	22,98 %	31.225.074	11,85 %
7	565.703	14,70 %	35.064.155	13,31 %
8	323.247	8,40 %	32.272.504	12,25 %
9	179.898	4,67 %	27.408.717	10,40 %
10	98.772	2,56 %	21.731.910	8,25 %
Total	3.626.876	94 %	184.051.541	70 %

Se identifica en la tabla la comparación entre el número de ciclos y su monto descontado según el tamaño de estos. Los ciclos compuestos por 5 empresas son el doble, aproximadamente, de aquellos que presentan 7 empresas, sin embargo, estos últimos tienen un monto descontado cercano al doble que los primeros ciclos.

Realizando la misma comparación anterior, se puede visualizar que existen medio millón de ciclos que están compuestos por 4 empresas a diferencia de solo 100 mil ciclos compuestos por 10 empresas, es decir, un quinto de los encontrados en el primer tramo.

La diferencia principal está en el monto que descuentan. En el primer caso, se reduce un 2,83 %, muy por debajo de los 8,35 % del segundo caso. Esto implica que el monto asociado a los ciclos más grandes es mayor mientras que para los ciclos con menos empresas, el monto asociado tiende a ser menor. La relación existente hace sentido según la heurística

utilizada. Al ordenar las aristas de forma creciente y siempre buscar el camino más corto entre los nodos que la componen hará que los ciclos más pequeños tengan asociado un menor monto.

#### 4.4.1. Análisis según montos

El análisis por monto de los ciclos tiene dos parámetros importantes a destacar. En primer lugar se encuentra el monto mínimo de transacción o monto asociado al ciclo. Este representa el monto a reducir de cada arista en particular, valor que siempre es el mismo para un ciclo. En segundo lugar, se puede analizar según el monto total descontado, definido como el monto asociado al ciclo multiplicado por la cantidad de arista asociadas a este. Para ambos parámetros se dividieron los ciclos según distintos tramos relacionado con el monto. En la Figura 4.10 se presenta el número de ciclos y monto descontado según el monto mínimo de transacción:

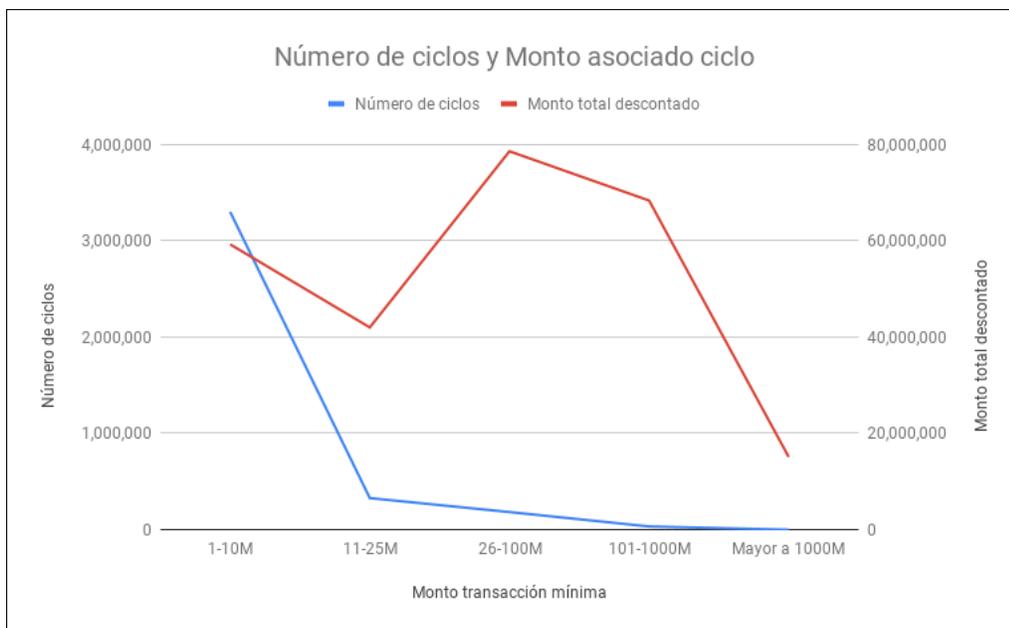


FIGURA 4.10. Ciclos según monto asociado

La recta que representa el número de ciclos según cada tramo muestra un comportamiento similar al obtenido en los análisis previos de monto en que, para los tramos de menor monto, el número de ciclos encontrados es mayor al resto. Para este caso en particular, el

tramo mencionado contiene más de 3 millones de ciclos. Este valor decae estrepitosamente para los siguientes tramos. Los ciclos que poseen asociado un monto mayor a 1.000M son solo 514, es decir, un 0,01 % de los ciclos.

Para el monto descontado, la distribución es totalmente distinta sin presentar una clara tendencia. Para el tramo inferior, el monto descontado es uno de los más altos, lo que tiene sentido según el gran número de ciclos que lo contienen. Luego, este monto decae para el tramo de 11 - 25 M debido a la abrupta disminución de los ciclos. Sin embargo, para el tramo que lo sucede, el valor a descontar aumenta considerablemente, siendo el más alto de todos los tramos con una suma total cercana a los 80 millones de M. Luego de este comportamiento el monto decae considerablemente, siendo para el último tramo el que presenta el menor valor debido a la poca cantidad de ciclos.

A continuación se presenta el mismo análisis para el monto total descontado por ciclo según los mismos tramos. Notar que los ciclos pueden trasladarse de tramo ya que, por ejemplo, un ciclo cuyo monto asociado sea de 3M y contenga 5 aristas, para el monto asociado estaría en el primer tramo. Por el contrario, para el monto total descontado, entraría al segundo tramo ya que tiene un valor de 15 M :

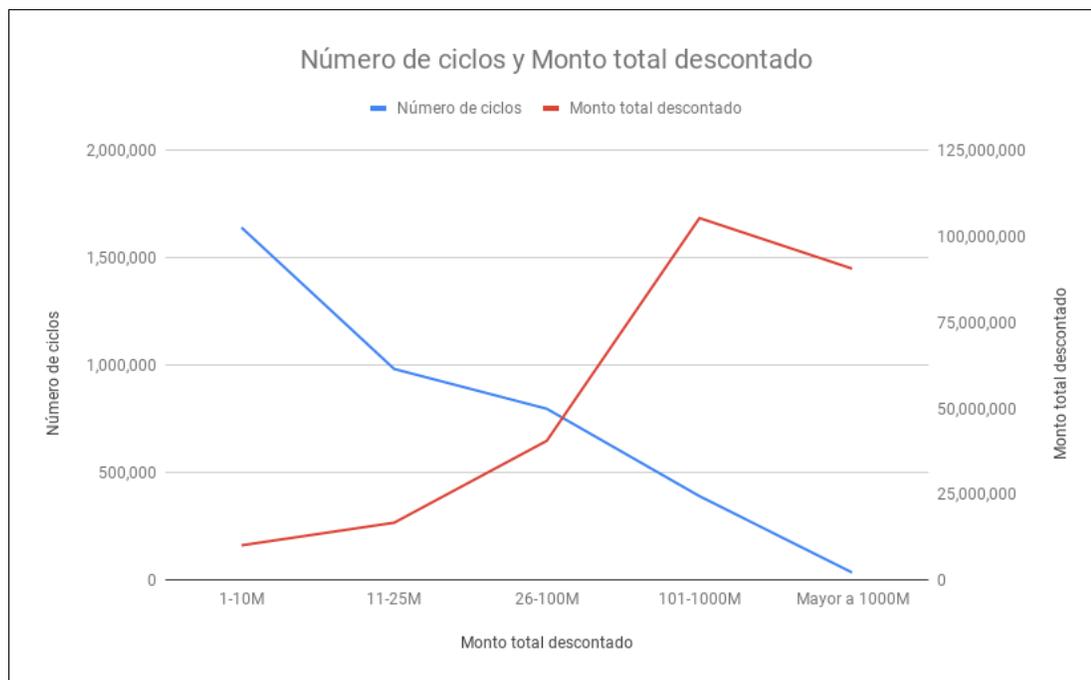


FIGURA 4.11. Ciclos según monto descontado

Los resultados obtenidos son totalmente distintos a la gráfica anterior lo cual es importante analizar. En cuanto al número de ciclos, es inversamente proporcional al monto total descontado. Sin embargo, y a diferencia de la curva exponencial anterior, esta disminución es tendiente a una recta. También se destaca que el tramo que más presenta ciclos es el de 1-10 M con más de 1.5 millones, menos de la mitad de los ciclos encontrados si se considera el monto asociado. Esto implica que una gran cantidad de ciclos pasaron de este tramo a los siguientes. Pese a este comportamiento, sigue siendo el segmento con más ciclo. Para el tramo con monto total descontado mayor a 1.000 M el número de ciclo aumenta significativamente, pasando de 514 ciclos a más 34 mil.

Para el monto total descontado ocurre el efecto contrario al anterior ya que es directamente proporcional al monto asociado al ciclo. A medida que aumenta dicho monto, el valor total a reducir de la economía aumenta considerablemente. Sin embargo, para el último tramo ocurre un fenómeno muy particular. El monto a descontar disminuye en comparación al tramo anterior. Esto sucede, tal como se dijo anteriormente, por la escasa cantidad

de ciclos que tienen montos asociados mayores a 1.000 M. El tramo de 100 a 1.000 M contiene más de 390 mil ciclos. Esta diferencia produce que el monto descontado, pese a ser uno de los más altos, no supera al tramo antecesor.

Notar también que el monto descontado por los ciclos de menor monto total decae considerablemente en comparación a la gráfica anterior, pasando de 60 millones de M a 10 millones de M aproximadamente. Esta disminución abrupta se ve reflejada en el aumento de el resto de los tramos.

#### 4.4.2. Ciclos con mayor monto descontado

Al igual que en los análisis anteriores, es importante identificar cuáles son los ciclos con mayor monto descontado y cuánto representan del total que se puede reducir de la economía. En la Tabla 4.13 se presentan los 10 ciclos con mayor monto total descontado:

TABLA 4.13. Ciclos con mayor monto descontado asociado

Número de empresas en el ciclo	Monto total descontado (M)	Porcentaje total descontado	Porcentaje acumulado
3	5.156.409	1,95 %	1,95 %
3	390.834	0,14 %	2,10 %
4	314.832	0,11 %	2,22 %
5	228.410	0,08 %	2,31 %
3	176.310	0,06 %	2,38 %
3	124.677	0,04 %	2,42 %
3	121.911	0,04 %	2,47 %
6	118.290	0,04 %	2,52 %
3	105.927	0,04 %	2,55 %
4	108.876	0,03 %	2,59 %

Existe sólo un ciclo cuyo monto descontado supera el 1 % del total a reducir en la economía. El resto de los ciclos están debajo del 0,15 % lo cual nos permite concluir que no existen ciclos con montos desmesurados que sean prioritarios al momento de reducir, es decir, es necesario considerar una gran cantidad de ciclos para descontar un alto valor en la economía.

El ciclo más grande está compuesto por 6 empresas descontando solo un 0,04 % de la economía. También se destaca que más del 50 % están compuestos por sólo 3 empresas. Estos resultados muestran un comportamiento distinto a la conclusión mencionada en la sección 4.2.1. No obstante, se considera que los ciclos con mayor monto descontado son casos particulares y, por lo tanto, no siguen la lógica del resto de los ciclos que tienen el mismo número de empresas. Al volver a analizar la Tabla 4.11 se aprecia que los ciclos compuestos por 3 empresas presentan un monto a descontar mayor que los que están compuestos por 4. Esto es debido a los resultados obtenidos en esta sección, donde los ciclos que más descuentan presentan una poca cantidad de empresas asociadas, sobre todo, el primero que encabeza la lista el cual presenta un porcentaje alto en relación al monto a reducir.

Se hace necesario determinar si los ciclos presentados serán excluyentes, es decir, las empresas que los componen no están relacionadas u ocurrirá el caso contrario. Esto nos permitirá determinar si existen empresas que influyan de forma importante en el monto total descontado en la economía.

A continuación, se grafican los 10 ciclos con el objetivo de identificar a las empresas es que se les asignó a cada una un código numérico único. Esto será necesario para posibles visualizaciones.

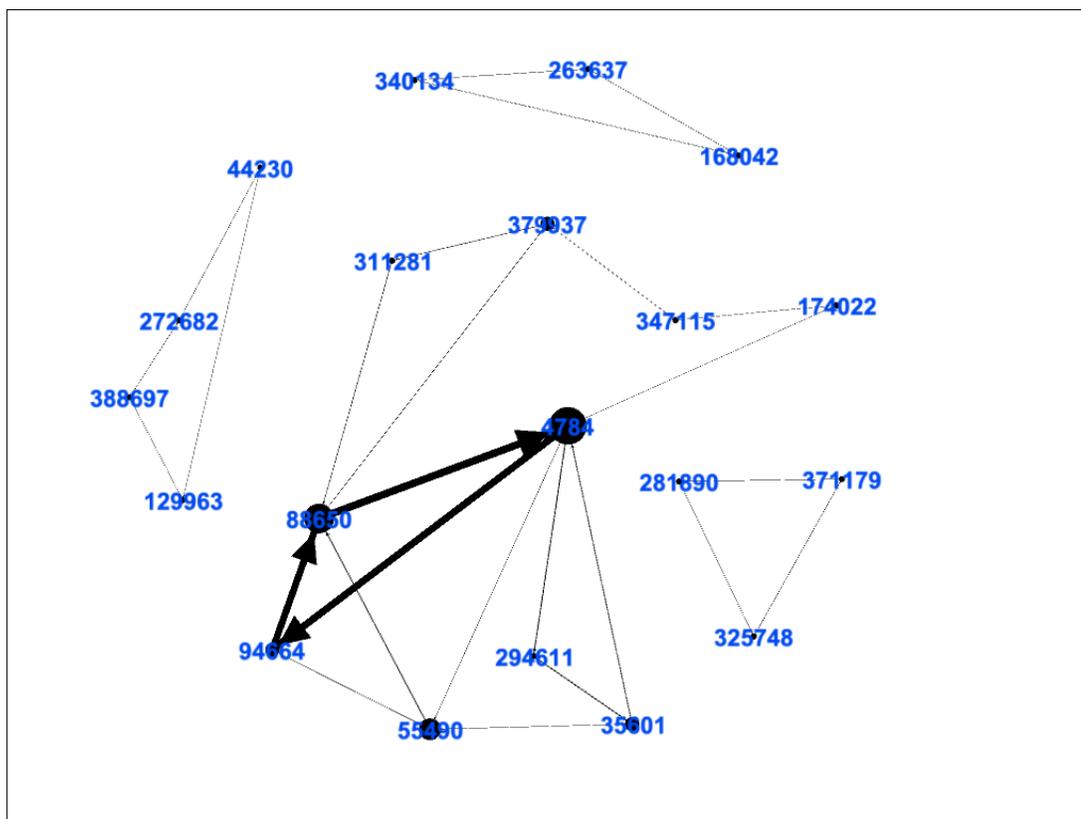


FIGURA 4.12. Gráfica ciclos con mayor monto descontado asociado

A partir de la Figura 4.12, se puede determinar que existen 3 ciclos que no comparten nodos con los demás, es decir, se comportan como componentes fuertemente conectados. Por el contrario, el resto comparte, al menos un nodo en su composición con otro ciclo. En dicha unión de ciclos se destaca que existen dos nodos que componen el ciclo con mayor monto total descontado, pero que también son los que más aristas de entrada y de salida tienen. Es destacable también que el ciclo compuesto por 7 empresas forma parte de la unión antes mencionada.

Este comportamiento es de vital importancia ya que da nociones de posibles empresas que concentran gran parte de los ciclos o que los ciclos en los que están presentes tienen altos montos asociados. También permite determinar que las empresas que forman parte de los ciclos con mayor monto tienden a conectarse entre ellas, repitiendo el comportamiento de generar ciclos con alto valor en sus transacciones.

#### 4.4.3. Análisis de empresas

Para continuar con el análisis según empresas y la verificación de si existen algunas que concentren gran parte de los ciclos es que se presenta, a continuación, un listado con las 10 empresas que están presentes en la mayor cantidad de ciclos:

TABLA 4.14. Empresas con mayor cantidad de ciclos

Código empresa	Número de ciclos	Porcentaje total de ciclos	Porcentaje total monto descontado
171039	308.919	8,02 %	5.83 %
110511	184.519	4,79 %	7.61 %
188882	166.572	4,32 %	7.56 %
172548	165.958	4,13 %	6.92 %
244314	163.355	4,24 %	8.90 %
368101	148.835	3,86 %	9.96 %
32066	131.441	3,41 %	4.92 %
205733	129.584	3,36 %	2.19 %
183544	109.812	2,75 %	4.04 %
175894	93.527	2,43 %	1.54 %

Los resultados obtenidos en la Tabla 4.14 muestran que no existe ninguna empresa que participe en más del 10% del total de los ciclos. Sin embargo, la mayor parte de las empresas que componen la lista anterior están en más de 100 mil ciclos lo cual es un valor bastante significativo. Estos valores se relacionan con el número de componentes fuertemente conectadas encontradas en la sección 2 para el grafo obtenido del algoritmo de flujo máximo. Al existir una componente que abarca gran parte de los nodos, implica que deben existir empresas que conectan a través de sus transacciones a una gran fracción de la red y, en este caso, serán parte de variados ciclos.

La implicancia de que existan empresas que estén presente en una gran cantidad de ciclos es que permite concluir que estas son muy influyentes en la existencia de una economía

con un alto monto de flujo circulante. También implica que, para reducir todos los ciclos que contengan dicha empresa, será necesario contactar y coordinar a una gran cantidad de agentes debido al alto impacto que la reducción de estas transacciones significa.

Existe una empresa que está presente en el 8% de los ciclos, lo cual es bastante significativo en cuanto a su participación en la economía cíclica. Uno de los posibles actores que podría representar esta empresa es el Estado, debido a la relación que debe tener con todos los actores de la economía.

Al igual que el análisis del número de ciclos, es importante determinar cuáles son las empresas que, al sumar los monto totales descontados por todos los ciclos en los que está presente, tienen los mayores valores. A continuación se presentan las empresas con dichas características. El total descontado es la suma de los montos descontados por todas las transacciones de todos los ciclos a los que pertenece:

TABLA 4.15. Empresas con mayor monto descontado

Código empresa	Monto total descontado (M)	Porcentaje monto total descontado	Porcentaje total ciclos
368101	25.537.416	9,69 %	3.86 %
244314	23.440.647	8,90 %	4.24 %
4784	23.095.837	8,77 %	0.63 %
88650	22.053.878	8,37 %	0.50 %
110511	20.047.027	7,61 %	4.79 %
188882	19.909.312	7,56 %	4.32 %
345976	19.244.791	7,30 %	2.04 %
172548	18.231.229	6,92 %	4.31 %
362308	17.521.082	6,65 %	1.62 %
171039	15.375.438	5,83 %	8.02 %

Los resultados muestran que no existen empresas que el monto total descontado por todos sus ciclos supere el 10% de lo que se puede descontar en la economía. Sin embargo,

los valores obtenidos son considerables tomando en cuenta que la suma de montos superan los 15.000.000 M. Al comparar los resultados por empresa con los ciclos que mayor monto descontado se identifican aquellas que están en ambas métricas. Dos de las tres empresas que forman parte del ciclo que más descuentan forman parte del listado presentado anteriormente. Esto permite concluir que para ser parte de las empresas que más descuentan no es solo necesario formar parte de los ciclos con mayor monto, sino que también es importante pertenecer a una gran cantidad de estos.

La circunstancia de que una empresa aparezca en este listado, puede estar dada a su asociación con una gran cantidad de ciclos o que los montos asociados a estos sean de gran valor. Independiente del caso, las empresas destacadas son las principales responsables del alto monto del flujo circulante que se puede descontar de la economía chilena.

Si comparamos las dos tablas presentadas anteriormente se puede apreciar que existen empresas que se repiten tanto en el número de ciclos en los que está presente como en el monto a descontar por dichos ciclos.

Se destacan las empresas con código 368101 y 244314 debido a que ambas presentan los más alto porcentaje de monto total a descontar, superiores al 8,9 %. Además, se cuentan entre las 10 empresas con más ciclos, con más del 3,8 % de estos. Lo anterior implica que ambas empresas son las principales responsables del flujo circulante, que deben realizar múltiples transacciones con distintos actores de la economía y que deben manejar una alta cantidad de monto en sus operaciones. Se puede interpretar que estas empresas podrían ser una de las 10 empresas más grandes de Chile según el listado presentado por la revista Forbes (2019).

También es relevante la empresa con código 171039, debido a que es la que está presente en la mayor cantidad de ciclos. Sin embargo, no forma parte del listado de empresas que mayor monto descontado. Por lo mismo, esta empresa está relacionada con gran parte de las instituciones pero sus montos de transacción no son elevados.

El listado presentado anteriormente solo nos permite identificar las empresas más influyentes. No obstante, no nos proporciona la distribución del monto total descontado para

el resto de las empresas que componen los ciclos. Para esto se presenta a continuación la distribución de las 1.000 empresas que más descuentan de la economía. Es relevante destacar que los montos descontados no son excluyentes, es decir, un ciclo que está compuesto por 3 empresas, por ejemplo, su monto descontado será parte de la suma para cada empresa que lo compone:

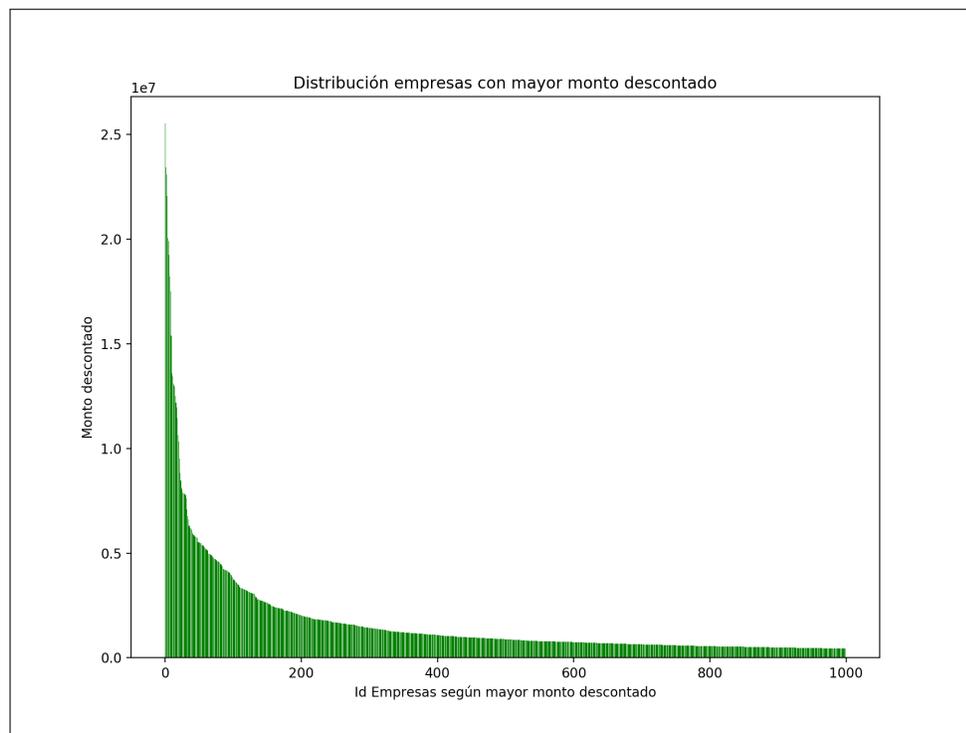


FIGURA 4.13. Distribución empresas con mayor monto descontado

La distribución presentada describe una curva que disminuye de forma exponencial a medida que se analizan las empresas con menor monto descontado. Existen menos de 100 empresas que su monto descontado es superior a 5.000.000 M. La curva tiene una tendencia a disminuir constantemente, por lo que, el resto de las 348 mil empresas que no se muestran en la gráfica tendrán un monto descontado menor y que tiende al menor monto posible de las aristas.

#### 4.4.4. Análisis Mensual

Los ciclos encontrados en esta sección pueden estar compuestos por transacciones realizadas en meses distintos, sin embargo, algunos fueron realizados en un mes en particular. El análisis que se presenta a continuación muestra la cantidad de ciclos tales que todas sus transacciones fueron realizadas en un mes. La fecha utilizada para esta sección es la fecha de emisión de la transacción. También se verifica cuántos ciclos fueron realizados en los 3 meses, es decir, todas las transacciones se repitieron en marzo, abril y mayo. Importante notar que la existencia de los ciclos en un mes está determinado por la realización efectiva de la transacción y no porque el monto asociado al ciclo sea el mismo que el de la transacción.

El gráfico a continuación muestra los resultados obtenidos:

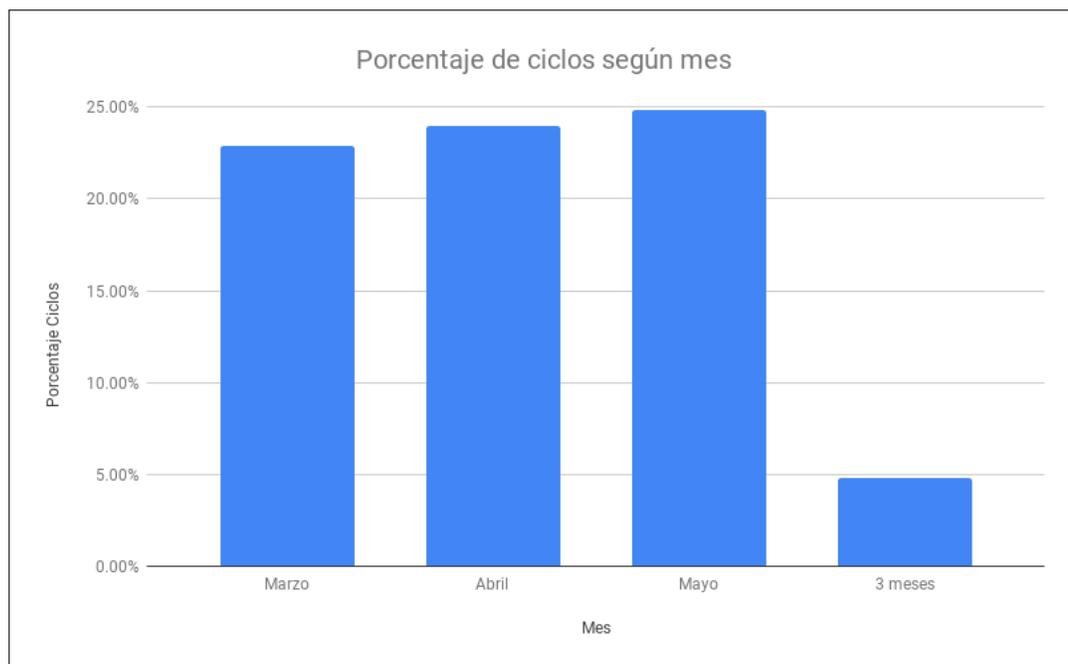


FIGURA 4.14. Porcentaje de ciclos mensual

Los resultados muestran que en cada mes se realizaron más de un 20 % de los ciclos (725 mil ciclos aproximadamente), siendo el mes de mayo el que obtuvo el más alto porcentaje con un 25 %, es decir, con 957.164 ciclos. Esto permite determinar una tendencia a

encontrar ciclos de forma periódica en la economía. Cabe destacar que el conjunto de ciclos encontrados en un mes en particular no necesariamente es disjunto con el de otro mes, es decir, un ciclo encontrado en el mes de marzo puede ser encontrado en abril o mayo. Dado este análisis, se detectó que 180 mil ciclos aproximadamente, equivalente al 4,76 % del total, fueron realizados en los 3 meses de forma independiente. El resto de los ciclos que no entran en estas categorías están compuestos por transacciones realizadas en meses distintos.

## Capítulo 5. CONCLUSIÓN

La economía chilena está considerada dentro de las 5 más grandes de Sudamérica debido a su constante crecimiento, estabilidad y por estar caracterizada como una de las economías con más sostenibilidad. Esto ha implicado un aumento en el número de empresas y, por lo tanto, un crecimiento en la cantidad de transacciones que día a día se realizan. La constante interacción entre las empresas puede producir la aparición de flujos circulantes o ciclos donde las empresas se traspasan cierto monto constantemente.

Siguiendo esta línea, el objetivo general de este estudio es la identificación de los ciclos que forman parte de la economía y que la suma de sus montos sea el máximo posible. Es decir, se busca el mayor flujo circulante minimizando el número de empresas que componen los ciclos con la finalidad que puedan ser descontados de la economía coordinando a las empresas que los componen para que puedan ser neteados y eliminar la mayor cantidad de flujo circulante de la economía.

Para lograr este objetivo se contó con una serie de transacciones realizadas por empresas chilenas entre marzo y mayo del 2018. Dicha base de datos fue proporcionada por el Servicio de Impuestos Internos. Cabe resaltar que las transacciones analizadas solo son un subconjunto de todas las realizadas en la economía. Esto fue determinado por la suma de los montos comparado con el PIB de la economía para el 2018.

El procedimiento utilizado, en una primera instancia requirió una limpieza de la base de datos con tal de dejar solo las transacciones y empresas que pudiesen estar dentro de un ciclo. En general se eliminaron todas las empresas que no tuviesen al menos una transacción de entrada y otra de salida. Para cada par de empresa A, B se realizó un proceso de neteo de las transacciones, sumando aquellas que tuviesen el mismo sentido y restando aquellas que fueran de forma contraria. En conclusión, el grafo resultante a analizar como representación de la economía está formado por 10 millones de aristas aproximadamente y 380 mil empresas.

El primer modelo de optimización utilizado fue el de flujo máximo y se ejecutó para determinar el máximo monto posible a descontar de la economía por los ciclos. El modelo

determina las aristas que componen dicho flujo, sin embargo, no identifica los ciclos ni el número de las empresas que lo componen. Se obtuvo un monto de 263 millones de M posibles de descontar de la economía lo que representa un 11,81 % de esta. El tiempo de ejecución fue de 24 minutos y se obtuvieron más de 4 millones de aristas.

El segundo algoritmo implementado fue para determinar los ciclos que componen el grafo resultante del modelo de optimización mencionado. Para este objetivo se utilizaron diversas heurísticas, obteniendo los mejores resultados si se ordenaban las aristas del grafo de forma creciente según su monto. A partir de esta lógica se obtuvieron 3.8 millones de ciclos aproximadamente, de los cuales el 94 % estaba formado por 10 empresas o menos y la suma de sus montos representa el 70 % del total posible a descontar.

A partir de estos resultados se permite validar la factibilidad de identificar ciclos en la economía que puedan ser descontados de esta y que permitirían reducir el flujo circulante. Esto impactaría directamente en el flujo de caja de las empresas y en los impuestos que están deben pagar.

La eliminación del flujo circulante presente en un ciclo conlleva diversas consecuencias tanto para las empresas que lo componen, como para la economía general del país. En primer lugar, el presente análisis asume el supuesto de que los montos de las transacciones son nominales. Asimismo, se plantea que para que la eliminación de un ciclo en particular sea sustentable en el tiempo, debe incluir el supuesto de que las transacciones deben ser realizadas entre las empresas sin posibilidad de que sean reemplazadas, es decir, se establece un acuerdo entre ambas empresas de comercialización que pueda perpetuarse en el tiempo.

Para que sea efectivo este acuerdo, se debe cumplir que el Servicio de Impuestos Internos supervise la operación. Dicha característica es de vital importancia ya que permite realizar una transacción de bienes y servicios sin un monto de transferencia asociado bajo el alero de la ley y también permite controlar posible inflación y fijación de precio.

Uno de los supuestos que no es posible determinar es la identificación de que las transacciones componen un ciclo en relación al mismo bien o servicio. Esto debido a que no

se tienen las características de las empresas ni del tipo de transacción que realizan. Lo anterior implica que, en caso que un ciclo no depende de un solo bien o servicio, los factores que afectan las variaciones de tal dependen de varias empresas y de sus decisiones. Generalmente la posibilidad de romper un ciclo depende de las decisiones que toman los consumidores finales de dichos bienes.

Es importante destacar que, para que un conjunto de empresas se pongan de acuerdo para la eliminación de un ciclo, se debe modificar uno de los principales paradigmas de la economía de libre mercado. Las empresas, al fijar un precio asociado al flujo circulante, dejan de maximizar su tasa de ganancia, lo que implica un beneficio al acordar un precio justo por los bienes o servicios comercializados.

En particular, la presencia de un flujo circulante a través de un ciclo agrega un valor nominal a los bienes o servicios que se comercializan. Esto produce una acumulación de riquezas en alguna de las empresas que componen el ciclo. Una eliminación de este valor implicaría una disminución de las riquezas de una de las empresas obteniendo un monto real del valor de la misma.

En cuanto a los beneficios que este tipo de medidas podría tener en las empresas va a depender del tipo de transacción, el tamaño de las empresas, el bien y servicio a comercializar y de la implementación que el ente fiscalizador tendrá para estas medidas. Una posible disminución de impuestos podría beneficiar de forma sustancial a empresas de menor tamaño considerando la disminución en las transacciones que realiza. Otro posible beneficio es la incorporación del Estado en los ciclos, donde las empresas puedan generar una deuda con este nuevo ente, generando nuevos ciclos y permitiendo que empresas más pequeñas puedan tener beneficios en el pago que permita un mayor crecimiento de las mismas.

Uno de los conceptos a nivel macroeconómico que se relaciona con el estudio de esta tesis es la economía circular, definida como un modelo económico y productivo basado en la sostenibilidad y el ahorro de recursos frente al aprovechamiento de los residuos como materia prima (Haas, Krausmann, Wiedenhofer y Heinz, 2015). Este concepto plantea una redefinición del crecimiento económico basado en la ecología industrial. Pese a que sus

aplicaciones están enfocadas en conceptos biológicos, a partir de los ciclos encontrados en este estudio se pueden identificar nuevos modelos de negocios circulares que beneficien a la economía y al medio ambiente. Las ventajas económicas principales de este tipo de nuevos negocios están dadas en la disminución del uso de recursos y la generación de un crecimiento sostenible. Se suma como uno de los análisis de este estudio la disminución de la dependencia de suministros de empresas externas que generan una incertidumbre. El acuerdo entre empresas genera una ventaja competitiva bajo el contexto de competitividad en la economía actual.

Una de las principales limitantes de nuestro análisis es la falta de información de las empresas y sus características, principalmente del rubro en que se desarrollan y sus tamaños según ganancias. A partir de este último punto se puede desarrollar un modelo o heurística que maximice el número de pymes que estén asociadas a ciclos buscando generar políticas públicas que beneficien a este tipo de empresas. Sumado a lo anterior, se puede realizar un análisis geográfico de los ciclos encontrados, determinando si estos se concentran en una región en particular, facilitando la eliminación de ciclos o, por el contrario, las empresas que los componen están distribuidas en múltiples regiones del país. Finalmente, como continuación de esta tesis, el análisis por rubro es de vital importancia para caracterizar el bien o servicio que se comercializa en el ciclo, pudiendo encontrar nuevos mercados de economías circulares y determinar cómo afectan a la economía a nivel macroeconómico.

Una segunda limitante importante relacionada con la información obtenida de la economía chilena es el tiempo de las transacciones, teniendo solo de 3 meses. Los modelos que se plantean en esta tesis pueden ser extrapolados para transacciones realizadas en un periodo de tiempo mayor, pudiendo identificar ciclos que se repitan constantemente. Dentro los de los posibles estudios futuros se puede implementar algoritmos que minimicen el número de empresas que forman parte de los ciclos para obtener mejores resultados en cuanto al monto que aquellos que tengan menos de 10 empresas sean un porcentaje importante en el monto total a descontar.

Finalmente, y como pasos a seguir, se deben realizar una serie de análisis asociados a los algoritmos planteados y a los ciclos encontrados. En primer lugar, es importante la realización de un análisis de escalabilidad de los ciclos encontrados y de cómo aumentar el número de ciclos y empresas a la solución encontrada, considerando todas las transacciones realizadas por las empresas chilenas en un periodo de tiempo más extenso, aumentando el número de meses de estudio. En este último punto es relevante identificar ciclos que presenten una periodicidad, es decir, que estén presentes en todos los meses de estudio y que sean constantes en la economía. Es importante sumar a los análisis formas de mantenimiento de estas medidas para poder disminuir lo más posible el flujo circulante en el tiempo.

Tal como se mencionó en las limitantes, al no tener información de las empresas que componen los ciclos, gran parte del análisis de los ciclos se plantea como análisis futuro. En particular, poder contar con la información del rubro de la empresa y del tamaño permitiría adecuar los algoritmos para optimizar el resultado y las medidas económicas adoptadas. Esto permitiría canalizar la eliminación de ciclos privilegiando a ciertas empresas con tal que los impactos de las medidas sean mayores. También se pueden privilegiar a ciertos rubros aumentando el desempeño e impacto de este en la economía nacional.

Sumado a lo anterior se debe tomar la decisión de cuáles ciclos serán eliminados de la economía, realizando una evaluación según el número de empresas que componen dicho ciclo y el monto del flujo circulante. Se debe agregar una evaluación del impacto que este tipo de medidas tendrá en cada empresa en particular. Además, se debe coordinar a las empresas que forman parte de los ciclos para que las transacciones que lo componen puedan ser neteadas de la economía. Esto traerá resultados importantes a nivel económico pudiendo encontrar nuevos mercados que presenten economías circulares y beneficiar en el crecimiento y sostenibilidad de las empresas.

## Referencias

- Banco Central de Chile. (2018). *Cuentas nacionales de Chile evolución de la actividad económica en el año 2018*. Descargado 11-03-2020, de [https://www.bcentral.cl/documents/33528/762418/Cuentas\\_nacionales\\_cuarto\\_trimestre\\_2018.pdf/e69256bc-a07e-bb44-a7fe-961c44233add?t=1573271565947](https://www.bcentral.cl/documents/33528/762418/Cuentas_nacionales_cuarto_trimestre_2018.pdf/e69256bc-a07e-bb44-a7fe-961c44233add?t=1573271565947)
- Barrera, M. E., J., y Varas K., S. (2020). A decomposition algorithm for computing income taxes with pass-through entities and its application to the Chilean case. *Ann Oper Res*, 286, 545–557. (<https://doi.org/10.1007/s10479-017-2707-9> (visited: 2020-07-17))
- Bender, M., Fineman, J., Gilbert, S., y Tarjan, R. (2016). A new approach to incremental cycle detection and related problems. *ACM Trans, Algorithms*.
- Cui, Z., y Taylor, S. (2018, 10). Circular arbitrage detection using graphs.
- Cuito, H., Niu, J., Zhou, C., y Shu, M. (2017). A multi-threading algorithm to detect and remove cycles in vertex- and arc-weighted digraph. *Algorithms*.
- Forbes. (2019). *The world's largest public companies*. Descargado 13-03-2020, de <https://www.forbes.com/global2000/list/#header:position>
- Gamal Sallam, B. L., Gagan R. Gupta, y Jin, B. (2018, 04). Shortest path and maximum flow problems under service function chaining constraints. *Computer Science*. (<https://arxiv.org/pdf/1801.05795.pdf> (visited: 2020-03-13))
- Haas, W., Krausmann, F., Wiedenhofer, D., y Heinz, M. (2015). How circular is the global economy?: An assessment of material flows, waste production, and recycling in

the european union and the world in 2005. *Journal of Industrial Ecology*, 19(5), 765-777. Descargado de <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/jiec.12244>

Haeupler, B., Kavitha, T., Mathew, R., Sen, S., y Tarjan, R. (2012). Incremental cycle detection, topological ordering, and strong component maintenance. (<https://arxiv.org/abs/1105.2397> (visited: 2019-06-07))

Johnson, D. (1975). Finding all the elementary circuits of directed graph. *SIAM J. Comput.*

Mathews, J., Mehta, P., Kasi Viswswara, S., y Babu, S. (2017). An algorithmic approach to handle circular trading in commercial taxing system. (<https://arxiv.org/abs/1710.10836> (visited: 2019-06-07))

Mathews, J., Mehta, P., Kasi Viswswara, S., y Kumar, S. (2017). A graph theoretical approach for identifying fraudulent transactions in circular trading. *Data Analytics*.

Mehlhorn, K., Naher, S., y Sanders, P. (2017). Dfs based graph algorithms. Descargado de <https://arxiv.org/abs/1703.10023> (<https://arxiv.org/abs/1703.10023> (visited: 2019-06-07))

Ministerio Economía, Fomento y Turismo. (2018). *Cuentas públicas participativas 2018*. Descargado 11-03-2020, de <https://www.economia.gob.cl/wp-content/uploads/2019/05/CP-Minecon-2018.-5.2019.pdf>

NetworkX. (2019). *Shortest path*. Descargado 13-03-2020, de [https://networkx.github.io/documentation/stable/reference/algorithms/generated/networkx.algorithms.shortest\\_paths.generic.shortest\\_path.html#networkx.algorithms.shortest\\_paths.generic.shortest\\_path](https://networkx.github.io/documentation/stable/reference/algorithms/generated/networkx.algorithms.shortest_paths.generic.shortest_path.html#networkx.algorithms.shortest_paths.generic.shortest_path)

Servicio de Impuestos Internos. (1999, 06). *Estimación de la evasión tributaria en Chile*. Descargado 25-04-2020, de [http://www.sii.cl/aprenda\\_sobre\\_impuestos/estudios/Antecede.htm](http://www.sii.cl/aprenda_sobre_impuestos/estudios/Antecede.htm)

The World Bank. (2019). *Pib (us\$ a precios actuales)*. Descargado 11-03-2020, de <https://datos.bancomundial.org/indicador/NY.GDP.MKTP.CD>

Wang, J., Zhou, S., y Guan, J. (2012). Detecting potential collusive cliques in futures markets based on trading behaviors from real data. *Journal of Neurocomputing*, pp. 44-53.

World Economic Forum. (2019). *The global competitiveness report 2019*. Descargado 11-03-2020, de [http://www3.weforum.org/docs/WEF\\_TheGlobalCompetitivenessReport2019.pdf](http://www3.weforum.org/docs/WEF_TheGlobalCompetitivenessReport2019.pdf)