



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

ESTRUCTURA DE TASAS DE INTERÉS REALES Y ESTIMACIÓN DE LAS EXPECTATIVAS DE INFLACIÓN UTILIZANDO EL FILTRO DE KALMAN

DIEGO VÁSQUEZ N.

Tesis para optar al grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Profesor Supervisor:
GONZALO CORTÁZAR S.

Santiago de Chile, Septiembre, 2012

© 2012, Diego Vásquez N.



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

ESTRUCTURA DE TASAS DE INTERÉS REALES Y ESTIMACIÓN DE LAS EXPECTATIVAS DE INFLACIÓN UTILIZANDO EL FILTRO DE KALMAN

DIEGO VÁSQUEZ N.

Tesis presentada a la Comisión integrada por los profesores:

GONZALO CORTÁZAR

JORGE VERA

HÉCTOR ORTEGA

ANDRÉS GUESALAGA

AUGUSTO CASTILLO

Para completar las exigencias del grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Santiago de Chile, Septiembre, 2012

A mis amigos y familia.

AGRADECIMIENTOS

Me gustaría agradecer en primer lugar al profesor Gonzalo Cortázar por su constante apoyo, paciencia y consejos que hicieron posible el desarrollo de esta tesis.

También quisiera agradecer a todos mis compañeros y amigos del FinLab UC, los cuales siempre estuvieron dispuestos a ayudarme y aportar en el desarrollo de esta investigación. Especial mención merece Héctor Ortega, cuya ayuda fue sin duda fundamental.

Finalmente me gustaría agradecer a mi familia y amigos por el apoyo incondicional que me dieron durante este período de tiempo, les estaré siempre en deuda.

INDICE GENERAL

Pág.

1	INTRODUCCIÓN	1
2	MARCO TEÓRICO	8
2.1	Modelos dinámicos de no arbitraje	8
2.1.1	Tasas de interés en un marco continuo de tiempo	9
2.1.2	Dinámica de la tasa de interés	12
2.1.3	Modelos de no arbitraje con saltos	15
2.2	Modelo Cortázar-Valdés	17
2.2.1	Estructura del modelo Cortázar-Valdés	18
2.2.2	Valorización de bonos	18
2.3	Descomposición de la inflación implícita y expectativas de inflación.....	22
2.4	Literatura: obtención de expectativas de inflación	23
2.4.1	Modelos macroeconómicos	23
2.4.2	Modelos de no-arbitraje de forma reducida	24
2.5	Estimación	26
2.5.1	Filtro de Kalman	26
2.5.2	El espacio de estados.....	27
2.5.3	Estimación de parámetros	30
3	EL MERCADO	32
3.1	Mercado Primario de renta fija.....	32
3.2	Mercado secundario de renta fija.....	33
3.3	El Banco Central.....	33
3.4	Descripción de los papeles utilizados	34

4	MODELO	38
4.1	Introducción	38
4.2	Modelo para la estructura de tasa real y expectativa de inflación	41
5	RESULTADOS.....	47
5.1	Datos y muestras utilizadas.....	47
5.2	Estimación de parámetros	48
5.3	Ajuste a los precios observados dentro de la muestra	50
5.4	Ajuste a los precios observados fuera de muestra	54
5.5	Estructura de tasas: comparación Modelo v/s Vasicek 2F	58
5.6	Ajuste a la estructura de volatilidad de los datos.....	62
5.7	Expectativas de inflación e inflaciones implícitas	64
5.7.1	Expectativas de inflación dentro de la muestra	66
6	CONCLUSIONES.....	70
	BIBLIOGRAFÍA.....	72
	A N E X O S	75
	ANEXO A.	76
A.1	Función generadora de momentos de la distribución normal multivariada.....	76
	ANEXO B.....	78
B.1	Solución modelo Cortázar-Valdés	78

ANEXO C.	81
C.1	Modelo general para la tasa real y expectativas de inflación 81
C.2	Solución modelo general..... 85
C.3	Solución modelo estimado período conocido 88
C.4	Solución modelo estimado período desconocido..... 89
ANEXO D.	92
D.1	Matriz de información de Fisher: Período conocido..... 92
D.2	Matriz de información de Fisher: Período desconocido 92

INDICE DE TABLAS

Tabla 4.1: Parámetros del modelo, período conocido.....	45
Tabla 4.2: Parámetros del modelo, período desconocido	46
Tabla 5.1: Parámetros estimados y su significancia, dentro de muestra.....	48
Tabla 5.2: Medidas de ajuste precios observados dentro de muestra	53
Tabla 5.3: Medidas de ajuste precios observados dentro y fuera de muestra	57
Tabla 5.4 Medidas de ajuste de precios observados dentro de muestra: curva versus precios del día siguiente	62
Tabla 5.5: Medidas de ajuste con respecto a la próxima inflación observada	69
Tabla D.1: Matriz de información de Fisher: Período conocido.....	92
Tabla D.2: Matriz de información de Fisher: Período desconocido	92

INDICE DE FIGURAS

Figura 1-1: Estructura de tasas actual asumiendo que el mercado tiene certeza sobre la inflación que estará vigente a partir del día 21.	1
Figura 3-1: Promedio diario de transacciones de depósitos a plazo, Julio 2012.....	36
Figura 3-2: Participación de mercado - Depósitos en Pesos, Julio 2012.	37
Figura 3-3: Participación de mercado - Depósitos en UF, Julio 2012.	37
Figura 4-1: Esquema explicativo del Modelo	39
Figura 5-1: Día 29-04-2011, dentro de la muestra.....	50
Figura 5-2: Día 12-07-2011, dentro de la muestra.....	51
Figura 5-3: Día 02-08-2011, dentro de la muestra.....	51
Figura 5-4: Día 14-10-2011, dentro de la muestra.....	52
Figura 5-5: Día 23-11-2011, dentro de la muestra.....	52
Figura 5-6: Día 05-01-2012, fuera de muestra.....	54
Figura 5-7: Día 09-01-2012, fuera de muestra.....	55
Figura 5-8: Día 17-01-2012, fuera de muestra.....	55
Figura 5-9: Día 16-05-2012, fuera de muestra.....	56
Figura 5-10: Día 17-07-2012, fuera de muestra.....	56
Figura 5-11: Día 13-01-2011, comparación Modelo v/s Vasicek 2F.....	58
Figura 5-12: Día 20-05-2011, comparación Modelo v/s Vasicek 2F.....	59
Figura 5-13: Día 02-08-2011, comparación Modelo v/s Vasicek 2F.....	59
Figura 5-14: Día 13-10-2011, comparación Modelo v/s Vasicek 2F.....	60
Figura 5-15: Día 14-10-2011, comparación Modelo v/s Vasicek 2F.....	61
Figura 5-16: Volatilidad empírica modelo y observaciones	63
Figura 5-17: Expectativa de inflación e inflación implícita en la curva, período dentro de muestra.	65
Figura 5-18: Expectativa de inflación del modelo v/s Inflaciones implícitas	67
Figura 5-19: Expectativa de Inflación del modelo v/s ABIF	68

RESUMEN

Existe evidencia empírica en la literatura financiera que sostiene que la ocurrencia de eventos inesperados y la llegada de información al mercado, tiene una fuerte influencia en la estructura de tasas observada. Toda esta información que recibe diariamente el mercado, introduce cambios discretos a la estructura de tasas de interés teniendo como resultado estructuras que no son consistentes con los modelos de no-arbitraje tradicionales, esto dado que en ellos se considera que la tasa cambia de manera continua en el tiempo.

Este trabajo presenta un modelo de no arbitraje para la estructura de tasas reales en el cual, el precio de un bono depende explícitamente de la expectativa de inflación que se tiene para el próximo período. El modelo es implementado usando precios de depósitos bancarios de corto plazo emitidos por bancos que operan en la bolsa chilena. La estimación se realiza por medio del filtro de Kalman, utilizando paneles de datos incompletos.

Los resultados muestran que el modelo es capaz de ajustar de buena manera los precios observados y que es posible estimar la expectativa de inflación existente para el próximo período.

Palabras clave: (Filtro de Kalman, Modelos de no Arbitraje, Expectativas de inflación)

ABSTRACT

There is empirical evidence in the financial literature holding that the occurrence of unexpected events and the arrival of information to the market, has a strong influence on the observed term structure. All this information received by the market daily, introduces discrete changes to the term structure resulting in structures that are not consistent with the traditional models of no-arbitrage, this since they considered that the short rate changes continuously in time.

This paper presents a no-arbitrage model for the term structure of real rates, at which the price of a bond depends explicitly on inflation expectations held for the next period.

The model is implemented using prices of short-term bank deposits issued by banks operating in the Chilean stock exchange. The estimation is performed by means of the Kalman filter, using incomplete data panels.

The results show that the model is able to fit well the observed prices and it is possible to estimate the existing inflation expectation for the next period.

Key words: (Kalman Filter, no-arbitrage Models, Inflation Expectation)

1 INTRODUCCIÓN

Eventos inesperados son algo común tanto en la naturaleza como en los mercados financieros. La ocurrencia de estos eventos inesperados altera y determina el comportamiento de la estructura de tasas, lo que provoca la observación de movimientos discretos en el nivel de tasas (saltos). La literatura financiera encuentra evidencia de que estos saltos se encuentran normalmente vinculados a la llegada de información en relación al desempeño futuro de la economía. Es decir, al parecer a través de estos saltos es cómo la información macroeconómica entra y altera la estructura de tasas existente en el mercado. Entre otros Jiang y Yan (2009), Johannes (2004) y Das (2002) analizan la evidencia empírica del rol que cumplen estos saltos en la estructura de tasas de interés, encontrando que existe evidencia tanto estadística como económica de su significancia.

Como ya se mencionó, la llegada de información en relación al desarrollo futuro de la economía puede generar cambios discretos en la estructura de tasas. Supongamos por ejemplo que el mercado conoce con exactitud la inflación que habrá para el siguiente período, ante esto la estructura de tasas reales se asemejará a la presentada en la Figura 1-1.

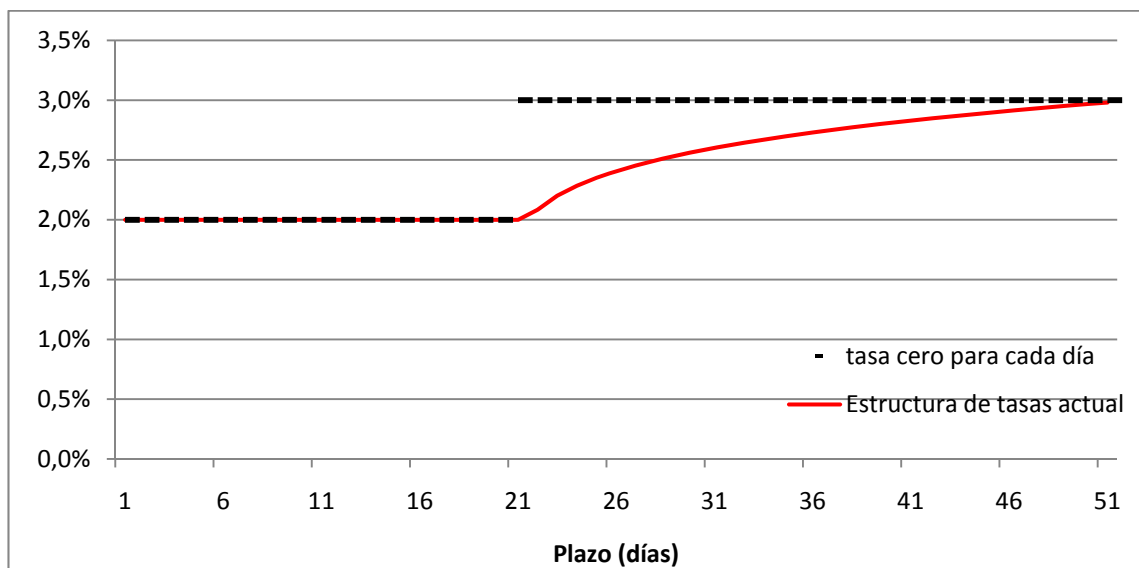


Figura 1-1: Estructura de tasas actual asumiendo que el mercado tiene certeza sobre la inflación que estará vigente a partir del día 21.

Como se puede observar, la tasa cero para cada día (línea punteada) presenta una estructura discreta. Este comportamiento discreto genera una estructura de tasas de interés que no es consistente con los modelos de no arbitraje tradicionales, dado que en ellos se considera que la tasa cambia de manera continua en el tiempo.

En la literatura financiera existen investigaciones que ya han afrontado la tarea de contemplar la existencia de cambios discretos en la estructura de tasas de interés. Dado el alto poder que posee la entidad monetaria sobre la estructura de tasas de interés, la literatura se ha enfocado en los cambios discretos inducidos por el accionar de esta entidad. Son tres las corrientes principales en las que la literatura se ha centrado. La primera corresponde al uso de saltos estocásticos al interior de la formulación de un modelo de no arbitraje. Las investigaciones realizadas por Johannes (2004) y Das (2002) pertenecen a esta corriente. La segunda corriente corresponde a la consideración de cambios en los parámetros que dominan los procesos supuestos para los factores de riesgo del modelo (Pandher, 2007). Finalmente, la tercera corriente corresponde a la inclusión de algún tipo de salto discreto dentro del modelo. Heidari y Wu (2009) y Piazzesi (2005) pertenecen a esta corriente. Por ejemplo Piazzesi (2005) modela los cambios en la tasa de política monetaria como un proceso de saltos Poisson, en el cual la probabilidad de ocurrencia de un salto se ve incrementada alrededor de la fecha en que se realiza la reunión de política monetaria.

Tal y como ya fue mencionado previamente, la inflación y la expectativa que el mercado tiene sobre ella introduce un comportamiento discreto a la estructura de tasas. La determinación y el estudio de las expectativas de inflación es un área que ha sido estudiado en la literatura financiera no solamente por el efecto que tiene en la estructura de tasas. En la economía actual, tanto en Chile como en el mundo, las expectativas que posee el mercado en relación a la inflación futura determinan y afectan la forma en que el mismo reacciona ante cambios en la política monetaria implementada por la autoridad monetaria. Usualmente el mercado responde bien ante recortes en la tasa de política monetaria, incentivándose el consumo en desmedro del ahorro. Pero en el caso de que el mercado tenga expectativas de que la inflación será alta en los próximos períodos y la

autoridad monetaria recorte la tasa de política monetaria, el mercado puede reaccionar incorrectamente al recibir señales contradictorias en relación al desarrollo de la economía. Producto de esto, el conocimiento de las expectativas de inflación que posee el mercado por parte de la autoridad monetaria es fundamental para desarrollar una política monetaria creíble y efectiva. De acuerdo a Deacon y Derry (1994) el contraste entre los objetivos de inflación que posee la autoridad monetaria y las expectativas de inflación del mercado, permite establecer el nivel de credibilidad que la autoridad monetaria produce en el público¹. Una vez establecido el nivel de credibilidad logrado por la autoridad, es posible estimar la envergadura de los cambios necesarios para alcanzar las metas que ésta se propone. Por ejemplo, si las expectativas de inflación son consistentes con lo anunciado por la autoridad monetaria, entonces las alteraciones realizadas sobre la tasa de política monetaria debieran ser pequeñas para lograr las metas impuestas. Esto es particularmente importante en países cuyas autoridades monetarias poseen una meta de inflación explícita como es el caso de Chile.

Para los inversionistas individuales, el riesgo asociado a la inflación es uno de los factores de riesgo más importantes y relevantes. Esto ya que reduce el poder de compra de sus retornos nominales.

Las expectativas de inflación de corto plazo permite a los inversionistas individuales guiar sus propias expectativas, las cuales son clave en la toma de decisiones. En el corto plazo las inversiones en renta variable pueden entregar retornos negativos, relativos a la inflación. El escoger o mantener activos altamente correlacionados con la inflación puede ayudar a superar este riesgo. Una de las clases de activos más efectivos para protegerse ante el riesgo de inflación inmediata, es la renta fija de corto plazo. Ejemplos de esto, son los fondos Money Market, depósitos y deuda corporativa de baja probabilidad de default. Estos activos poseen retornos esperados más bajos que las acciones, por lo que existe un trade-off entre protección ante la inflación

¹ Ver Svensson (1993) para mayor profundidad en este tema

inmediata y el potencial de crecimiento de largo plazo que posee el portafolio del inversionista.

De esta forma, la incerteza y las expectativas que posee el mercado en relación al rumbo que tomará la inflación en el corto plazo, afecta el balance que los inversionistas mantienen entre renta variable y renta fija, así como la relación entre renta fija nominal y renta fija indexada a la inflación al interior de su portafolio de inversiones. Por consiguiente, las expectativas de inflación del mercado constituyen una herramienta clave para la construcción de estrategias que tengan como finalidad el manejo del riesgo por parte de los inversionistas. Además el conocimiento de las expectativas de inflación que posee el mercado permite al inversionista individual, por medio de la condición de no-arbitraje, realizar una correcta valorización de instrumentos nominales de renta fija. Esto ante la eventual existencia e identificación de situaciones en que ciertos instrumentos posean una expectativa de inflación no acorde a la que posee la mayor parte del mercado, situaciones que permitirían a un inversionista bien informado obtener altas rentabilidades.

Los mercados financieros reúnen la gran cantidad de expectativas no observables, esto a través de la información codificada en los precios observables de instrumentos existentes. Los precios de estos instrumentos, al ser transados por agentes enfocados en el desarrollo futuro, ofrecen importante información en relación a las expectativas que estos tienen sobre el rumbo de la economía

En la literatura financiera la diferencia entre la tasa de pagos nominales y la tasa de pagos protegidos ante la inflación de igual duración (inflación implícita)², es usualmente percibida como la inflación esperada (Bernanke 2004³). Sin embargo, esta aproximación ignora el premio exigido por los agentes ante variaciones inesperadas de

² En la literatura a este spread se le denomina "*break-even inflation rate*".

³ "Los instrumentos indexados a la inflación parecieran ser la fuente más directa de información sobre las expectativas de inflación"

la inflación⁴ y el premio exigido por las diferencias de liquidez; existentes entre papeles nominales y aquellos indexados a la inflación⁵. Por lo que para poder obtener las expectativas de inflación que posee el mercado, es necesario separar estos tres términos. Esta tarea y la de inferir las expectativas de inflación del mercado ha sido enfrentada por un gran número de autores en la literatura. Ang y Piazzesi (2003) en conjunto con utilizar la información de precios de instrumentos nominales, hacen uso de la inflación en un modelo de no arbitraje macroeconómico. Evans (1998) es de los primeros en utilizar la información contenida en los bonos indexados a la inflación para estudiar la estructura de tasas reales, inflación esperada, y el premio por riesgo asociado a la inflación. Pennachi (1991) y Chun (2005) hacen uso de encuestas en relación a las expectativas de inflación en los próximos períodos para identificar la dinámica de la inflación esperada. Grishchenko, Olesya y Jing-zhi Huang (2008) utilizan los precios de los *Treasury inflation-protected securities* (TIPS) de E.E.U.U en el período de 2000-2007, para estudiar el comportamiento del premio por riesgo asociado a la variabilidad de la inflación, encontrando que éste es altamente variable en el tiempo, siendo negativo en la primera mitad de la muestra y positivo en la segunda mitad. Además denotan que se vuelve menos volátil durante el período de 2004-2007. Lo que es consistente con la evidencia empírica existente en relación a que las expectativas de inflación son más estables durante este período en E.E.U.U.

Al reconocer el comportamiento discreto que introduce la expectativa de inflación y la inflación efectiva en la estructura de tasas reales, la tesis aquí presentada tiene como objetivo desarrollar un modelo dinámico para esta estructura de tasas real de corto plazo, que contemple la naturaleza discreta de la inflación. Como ya fue mencionado, en la actualidad esto no es considerado en los modelos dinámicos clásicos de no-arbitraje, presentándose la oportunidad de utilizar el modelo aquí presentado como *input* en el corto plazo para estos modelos. Esto dado que al estar enfocado en el corto

⁴ Comúnmente encontrado en la literatura como el *inflation risk premium*.

⁵ Comúnmente encontrado en la literatura como el *liquidity risk premium*.

plazo y al considerar el movimiento discreto de la inflación, el modelo es capaz de ajustar de mejor manera la alta variabilidad y el comportamiento discreto de la tasa real en el extremo corto de la curva, permitiéndose un mejor ajuste al comportamiento que presenta la inflación, y por ende una mejor valorización de los bonos reales en el corto plazo. En conjunto con estimar la estructura de tasas, se tiene como objetivo estimar la expectativa de inflación que poseen los agentes diariamente para el corto plazo. Esto dado que la obtención de una estructura de tasas que sea consistente en el tiempo con la evolución de una variable tan importante como las expectativas de inflación, debiera explicar de mejor manera el comportamiento que presentan las tasas reales en la realidad.

En el modelo presentado, se asume que el precio de un bono real reacciona ante cambios en la expectativa de la inflación. El mercado tiene incerteza de cuál será la inflación para el próximo período, por lo que existe una expectativa para la inflación del próximo período y una varianza asociada a la realización de ésta. Además, nueva información referente al estado de la economía se recibe diariamente, lo que provoca que la expectativa de inflación se modifique todos los días. Estos cambios en la expectativa siguen un proceso de difusión sin *drift*, lo que es consistente con expectativas racionales⁶ (Cortázar y Valdés, 2012).

El modelo de valorización presentado en esta tesis, corresponde a un modelo de no arbitraje dinámico de tres factores. Estos factores son la inflación esperada a un período, premio por riesgo asociado a la preferencia de los papeles nominales por sobre los papeles reales y el premio exigido por los agentes producto de la variabilidad de la inflación.

El texto está organizado de la siguiente forma; la sección 2 establece el marco teórico sobre el cual se fundamenta esta tesis, así como el filtro de Kalman el cual es utilizado para realizar la estimación de las variables de estado del modelo. También se

⁶ Las predicciones sobre el valor futuro de la inflación, realizadas por los agentes no son sistemáticamente erróneas y los errores son aleatorios.

presenta el método de máxima verosimilitud, el cual es utilizado para estimar los parámetros que dominan el modelo estimado. En la sección 3 se describe el mercado financiero chileno de renta fija, además de una descripción de los instrumentos utilizados para la estimación del modelo. En la sección 4 se presenta y se describe el modelo que es estimado para el corto plazo. Finalmente en la sección 5 se presentan y analizan los resultados, y en la sección 6 se pueden encontrar las conclusiones y posibles áreas para futuros desarrollos.

2 MARCO TEÓRICO

2.1 Modelos dinámicos de no arbitraje

La necesidad de contar con una estructura de tasas que permita la correcta valorización de los distintos instrumentos de renta fija presentes en el mercado, ha provocado un creciente desarrollo de modelos para su estimación, presentándose dos corrientes principales en su desarrollo.

En primer lugar encontramos los modelos estáticos, estos se enfocan a la tarea de ajustar una curva de tasas cero a un conjunto de precios de bonos observados en el corte transversal. Los modelos estáticos más importantes son los desarrollados por Nelson y Siegel (1987) y Svensson (1994). En estos se propone una forma funcional exponencial para la tasa *forward* instantánea, de manera que esta sea suave y a partir de ella se llega a la estructura de la tasa *spot*. Estos modelos se destacan por presentar un buen ajuste a las observaciones en el día a día, pero carecen de estabilidad a lo largo del tiempo de la estructura de tasas. En el caso de mercados poco desarrollados, donde existe una baja cantidad de transacciones en el día a día y donde la ausencia de transacciones de bonos de corto o largo plazo obliga a extrapolar en base a la información existente en ese día en particular, genera que la parte extrapolada de la curva sea poco confiable y que carezca de consistencia con el comportamiento histórico de las tasas (Cortázar, Schwartz y Naranjo, 2007).

Producto de la problemática mencionada en el párrafo anterior, nace la necesidad de utilizar modelos que permitan estimar de forma conjunta la estructura de tasas⁷ y la dinámica que ésta posee en el tiempo. Esta dinámica de la estructura de tasas de interés, se refiere a la forma en que la relación entre madurez y tasa asociada evoluciona a través del tiempo. Viéndolo de otra forma, esto sería similar a observar la evolución a través

⁷ Lo que es equivalente a tomar una fotografía en un momento del tiempo de la relación entre madurez y tasa cero asociada a un tipo de instrumento, por ejemplo un bono del gobierno.

del tiempo del precio de una acción o de una tasa de cambio. Es aquí donde encontramos la segunda corriente de modelos para la estructura de tasas, los modelos dinámicos.

Los modelos dinámicos hacen uso de toda la información histórica y actual disponible para estimar de forma conjunta la estructura de tasas y su dinámica temporal. Estos proponen describir totalmente la estructura de tasas en términos de un número finito de factores que se asume que cada uno es gobernado por un proceso estocástico, cuyos parámetros son mantenidos constantes a través del tiempo.

Dentro de estos modelos se destacan los desarrollados por Vasicek (1977), Cox-Ingerson y Ross (1985b), y por Hull y White (1990). A continuación se presenta un marco general para los modelos dinámicos de tasas de interés, los cuales se basan en el enfoque tradicional de no arbitraje desarrollado por Vasicek (1977).

2.1.1 Tasas de interés en un marco continuo de tiempo

A continuación se establecen los conceptos y relaciones fundamentales de los modelos dinámicos en un marco continuo de tiempo⁸.

El punto de partida para los modelos de tasas de interés es un bono cero cupón libre de riesgo⁹. Este bono, es aquel que paga una unidad de moneda en la fecha de su vencimiento. Este instrumento es fundamental ya que dado el precio de un bono para cualquier madurez, es posible obtener fácilmente la tasa spot específica para esa fecha la cual denotaremos como $z(t, T)$ ¹⁰. Sea $P(t, T)$ el valor de un bono de este tipo en t con vencimiento en T . Luego es claro que $T \geq t$ y $P(T, T) = 1$, por lo que el valor del bono queda determinado por:

⁸ Para una mayor profundización en el tema, refiérase a Björk (1998).

⁹ Se denomina libre de riesgo, ya que no existe riesgo de *default* por parte del emisor.

¹⁰ Tasa compuesta continua que produce el precio del bono.

$$P(t, T) = e^{z(t, T) * (T-t)} \quad (1)$$

Por lo que la tasa spot queda determinada por:

$$z(t, T) = \frac{-\ln P(t, T)}{T-t} \quad (2)$$

Una vez establecida la relación entre tasa spot y un bono cero cupón, es necesario establecer el concepto de tasa instantánea. Ésta corresponde a la tasa de interés hipotética a la cual sería posible pedir prestado durante un período de tiempo infinitesimal, constituyendo solamente una herramienta matemática.

Sea $r(t)$ la tasa instantánea:

$$r(t) = \lim_{T \rightarrow t} z(t, T) = \lim_{T \rightarrow t} \frac{-\ln P(t, T)}{T-t} \quad (3)$$

Luego, haciendo uso del concepto de tasa instantánea, podemos considerar cualquier bono de descuento con vencimiento en T , como equivalente a una inversión renovable en cada momento a través de sucesivos bonos que tienen un vencimiento infinitesimalmente pequeño. De este modo, el precio de este bono de descuento queda expresado en función de la tasa instantánea de la siguiente forma:

$$P(t, T) = e^{-\int_t^T r(s) ds} \quad (4)$$

Al exigir la ausencia de arbitraje, podemos ver que cualquier bono puede ser sintetizado o replicado a partir del valor de otros bonos presentes en el mercado durante la existencia de este bono. El hecho de que sea posible replicar el valor de este bono,

permite a un inversionista cualquiera protegerse totalmente frente al riesgo de éste. Este hecho es el concepto fundamental tras la valorización neutral al riesgo. Ésta consiste en calcular el valor esperado de los flujos que entrega un derivado, bajo una medida de probabilidad que considera que los agentes no exigen una compensación por el riesgo al que se exponen¹¹. Lo anterior en conjunto con el exigir la ausencia de oportunidades de arbitraje, implica que el retorno de toda inversión debe ser igual a la tasa libre de riesgo, por lo que bajo la medida neutral al riesgo el valor del bono debe ser:

$$P(t, T) = E_t^Q \left[e^{-\int_t^T r(s) ds} \right] \quad (5)$$

donde E_t^Q denota la esperanza bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo condicional a toda la información hasta el tiempo t . Es necesario notar que a pesar de que no se están considerando las preferencias de los agentes ni los premios por riesgo exigidos por estos, el valor del bono obtenido bajo la medida neutral al riesgo es el correcto (Cox, Ingersoll y Ross, 1985a).

¹¹ El uso de este enfoque es normalmente adjudicado a Cox y Ross 1976, quienes lo utilizaron para valorizar opciones. Esta idea fue después formalizada por Harrison y Kreps (1979) a través de la llamada medida de la martingala .

2.1.2 Dinámica de la tasa de interés

Como ya fue mencionado, los modelos dinámicos explican el comportamiento de la estructura de tasas en términos de un número finito de variables de estado o factores. Dependiendo del modelo, se puede proponer que estos corresponden a variables no observables, como la media de la tasa de interés instantánea por ejemplo o variables observables como factores macroeconómicos. Para el desarrollo de estos modelos es necesario postular que estos factores son gobernados por un proceso estocástico como ya fue mencionado. Este proceso estocástico posee una componente de tendencia determinística y una componente de volatilidad que agrega ruido al modelo. Comúnmente la dinámica de la tasa de interés instantánea presenta la siguiente estructura:

$$dr_{(t)} = \mu dt + \sigma dW_{(t)} \quad (6)$$

donde μ es el valor esperado de los cambios instantáneos en la tasa de interés y σ es la desviación estándar. En términos simples, la ecuación (6) establece que un cambio diferencial en la tasa instantánea está compuesto por una parte determinística (μdt)¹² y un término que le otorga la variabilidad, el cual es aleatorio y está constituido por el incremento diferencial de un movimiento Browniano ($dW_{(t)}$).

A continuación se realiza una revisión de algunos de los modelos dinámicos más representativos. Estos los podemos agrupar en dos grandes tipos: modelos de un factor y modelos de múltiples factores.

En los modelos de un factor, como su nombre lo indica, se realiza el supuesto que solamente una variable determina completamente el comportamiento de la tasa spot. Es por esto que normalmente la variable de estado escogida es la tasa *spot* por sí misma.

¹² Denominado *drift* comúnmente en la literatura.

Los modelos dinámicos de un factor más conocidos son los desarrollados por Vasicek (1977) y Cox, Ingersoll y Ross (1985b). En ellos la tasa spot se modela de la siguiente forma:

$$dr(t) = k(\mu - r)dt + \sigma dW(t) \quad \text{Vasicek (1977)} \quad (7)$$

$$dr(t) = k(\mu - r)dt + \sigma\sqrt{r}dW(t) \quad \text{CIR (1985b)} \quad (8)$$

En ambos modelos, la tasa de interés *spot* se modela de tal forma que posea reversión hacia μ ¹³, con una velocidad de reversión determinada por el parámetro k . Existe una solución analítica para el valor de un bono bajo ambos modelos. Vasicek (1977) fue el segundo modelo de no arbitraje publicado en la literatura financiera¹⁴. Alguna de las particularidades de este modelo, es su manejo analítico y el hecho de que tasas spot negativas son posibles¹⁵, esta es una característica que es corregida por CIR (1985b) si k y μ son estrictamente positivas, lo que conlleva el costo de un menor manejo analítico en comparación a Vasicek (1977).

El otro gran grupo de modelos dinámicos, como ya fue mencionado corresponde a los modelos multifactoriales. Estos nacen del hecho de que los modelos de un factor solamente incorporan una fuente de incerteza, por lo que presentan un número limitado de "formas" que son capaces de ajustar. En la práctica existe un rango variado de cambios en la estructura de tasas que estos modelos unifactoriales son incapaces de ajustar correctamente (Longstaff y Schwartz, 1992). Por ejemplo, cambios en la pendiente de la curva o movimientos de "pivote de la misma". Ante esto, uno de los modelos de dos factores más tempranos en la literatura fue el desarrollado por Brennan y Schwartz (1982), donde el primero de estos factores corresponde a la tasa *spot* (r) y el

¹³ Si k tiene un valor estrictamente positivo.

¹⁴ Después de Merton (1970).

¹⁵ En la modelación de tasas de interés nominales, esta característica es evidentemente poco deseable.

segundo a la tasa de retorno hasta la madurez en una anualidad perpetua con cupones continuos (l). El proceso que los autores proponen para cada una de las variables de estado es el siguiente:

$$dr(t) = k[(\mu + l) - r]dt + \sigma_1 r dW_1(t) \quad (9)$$

$$dl(t) = \alpha dt + \sigma_2 r dW_2(t) \quad (10)$$

donde los brownianos se encuentran correlacionados de tal forma que $E(dW_1 dW_2) = \rho dt$. La mayor flexibilidad lograda por este modelo tiene el costo de que no es posible encontrar una solución analítica para el valor de un bono, por lo que es necesario la utilización de métodos numéricos.

Existe un gran número de modelos multifactoriales que han sido desarrollados en la literatura financiera, comenzando por extensiones multifactoriales de los modelos desarrollados por Vasicek (1977) y CIR (1985b), donde la inclusión de nuevos factores afecta el *drift* del proceso para la tasa *spot*. Estos modelos son comparables al desarrollado por Brennan y Schwartz (1982), pero poseen la ventaja de que existe una solución analítica para ellos.

Heath, Jarrow y Morton (1992) (de ahora en adelante HJM) proponen una metodología alternativa a la comúnmente empleada en estos modelos. En HJM se modela directamente la dinámica de la tasa *forward* instantánea, además se supone que existe una relación explícita entre los parámetros del *drift* y de la volatilidad para la dinámica de esta tasa. La curva *forward* completa es obtenida en conjunto con el proceso impuesto a ésta y una curva cero inicial que es tomada como conocida para el modelo. Uno de los principales inconvenientes de este modelo es el hecho de requerir como input una curva cero, la que no necesariamente es observable directamente a partir del mercado. Este modelo ha servido de inspiración a variados autores, quienes utilizan el enfoque de HJM.

2.1.3 Modelos de no arbitraje con saltos.

Los modelos de no arbitraje tradicionales como los que se mencionaron en la sección anterior, suponen que la tasa cambia de forma continua. Es decir, los procesos estocásticos que siguen los factores que dominan la tasa poseen trayectorias continuas. En el último tiempo, la literatura financiera se ha enfocado en la evidencia empírica de la existencia de saltos que ingresan discontinuidades en la trayectoria que sigue la tasa corta. Estudios como los realizados por Johannes (2004), Das (2002) y Jiang y Yan (2009) analizan la evidencia empírica del rol que cumplen estos saltos en la estructura de tasas de interés, determinando que existe evidencia tanto estadística como económica de su significancia en la determinación de la estructura de tasas.

Dado el alto poder que posee la entidad monetaria sobre la estructura de tasas de interés, la literatura se ha enfocado en los cambios discretos inducidos por el accionar de esta entidad. Piazzesi (2001 y 2003) desarrolla modelos para la estructura de tasas de interés que presentan procesos de saltos que se encuentran asociados a anuncios provenientes de la entidad monetaria. En estos modelos, la ocurrencia de un salto se encuentra restringida a los días en que se informa al mercado el desarrollo de ciertas variables macroeconómicas. En ellos el autor muestra que incorporar saltos asociados a la llegada de información hacia el mercado, mejora la capacidad de ajuste del modelo en relación a los precios observados. En una línea similar a los dos estudios mencionados anteriormente, Piazzesi (2005) modela los cambios en la tasa de política monetaria como un proceso de saltos tipo Poisson, además de incluir explícitamente la tasa de política monetaria que se tiene como objetivo. Este modelo tiene la particularidad que es la probabilidad de ocurrencia de un salto, la que se ve incrementada alrededor de la fecha en que se realiza una reunión de política monetaria.

Heidari y Wu (2009) se enfocan en las dificultades en la obtención de soluciones analíticas y de estimación de parámetros que presentan los modelos continuos para la estructura de tasas de interés que consideran saltos. Principalmente analizan el

desempeño que presentan determinados modelos al incluir saltos con distribuciones menos populares, como la exponencial y la Bernoulli.

Johannes (2004) analiza la evidencia empírica en relación al efecto que tiene la llegada de información sobre la estructura de tasas. Sus resultados indican que es posible denotar una discontinuidad (salto) en la estructura de tasas sólo cuando los anuncios asociados a variables macroeconómicas contienen elementos importantes no esperados por el mercado. Es decir, lo importante no es el anuncio por sí sólo, sino que el elemento sorpresa es el causante del mayor efecto sobre la tasa. De forma similar Jiang y Yan (2009) encuentran que a pesar de que una gran cantidad de saltos se encuentran relacionados al calendario de anuncio, una porción significativa de los saltos se encuentra dominada por noticias económicas no anticipadas por el mercado.

En una línea un poco diferente a los estudios anteriores, Pandher (2007) permite la existencia de saltos en los parámetros que dominan los procesos estocásticos de los factores del modelo. Específicamente, permite la existencia de *shocks* en el parámetro asociado a la “aceleración” y a la “velocidad” con que evolucionan las tasas *forward* al interior de su modelo. Determina que la existencia de estos *shocks*, permite al modelo ajustar de mejor manera un mayor número de estructuras (formas) que modelos equivalentes con la misma cantidad de factores.

2.2 Modelo Cortázar-Valdés

El modelo presentado en esta tesis hace uso del modelo propuesto e implementado por Cortázar y Valdés (2012) (de ahora en adelante CV). Como veremos más adelante, mientras CV considera cambios discretos de la tasa de política monetaria fijada por la entidad monetaria, en esta tesis se modela el valor de un bono de modo que incluya cambios discretos en la tasa de inflación.

Tal como ya fue mencionado, en la actualidad la tendencia en el desarrollo de modelos para la estructura de tasas de interés se centra en los modelos de no-arbitraje. Estos, al suponer que la tasa de interés se encuentra gobernada por un número finito de factores estocásticos, tratan de capturar la forma en que el mercado en su conjunto recibe y procesa nueva información. Esta nueva información determina y altera las expectativas del mercado y por ende ayuda a explicar la estructura de tasas observada. Sin embargo la existencia de una entidad externa con un enorme poder, capaz de modificar de forma discreta la tasa corta es algo que estos modelos tradicionales de no-arbitraje no consideran. La existencia de este cambio discreto en la tasa corta, genera estructuras de tasas que no son consistentes con los modelos en tiempo continuo tradicionales. Ante esto, los autores presentan un modelo en el cual se asume que el precio de un bono reacciona ante cambios en la expectativa que posee el mercado en relación a ajustes en la política monetaria. Estas expectativas cambian continuamente producto de la llegada de nueva información entre las fechas en que se realizan las reuniones de la autoridad monetaria, y en el momento en que se conoce la nueva política monetaria ésta experimenta un salto.

El modelo es estimado por medio del filtro de Kalman, utilizando paneles incompletos de precios asociados a títulos de deuda de corto plazo nominal emitidos por 4 bancos privados en Chile.

2.2.1 Estructura del modelo Cortázar-Valdés

En el modelo, una entidad externa al mercado puede alterar o mantener la tasa corta en momento conocidos de tiempo, por lo que en cada momento de tiempo el mercado posee expectativas de cuál será la tasa efectiva a uno, dos y tres períodos en el futuro. Estas tasas cambian a medida que el tiempo avanza ya que hay nueva información que entra al mercado, como por ejemplo señales de la entidad monetaria o anuncio de variables macroeconómicas entre otros.

Consistentemente con la hipótesis de expectativas, el valor del bono depende de las tasas de interés (realizadas) en todos los momentos hasta su vencimiento, pero dado que estas son desconocidas, en realidad dependen de su mejor estimación (las esperadas).

Al comienzo existe un número de tasas esperadas igual al número de períodos entre hoy y el momento del pago del bono analizado. A medida que el tiempo avanza, la tasa esperada a, por ejemplo, un período cambia en el día a día y en el momento que se alcanza la fecha del primer cambio considerado, ésta se realiza (se convierte en la efectiva) y el número de tasas esperadas se reduce en una unidad. Ante el hecho de haber ocurrido un cambio de tasa, la tasa esperada que previo al cambio correspondía a la de dos períodos, por ejemplo, pasa a ser la tasa esperada a un período.

2.2.2 Valorización de bonos

De modo de permitir la calibración en el corto plazo de este modelo al reducir el número de parámetros a estimar, Cortázar y Valdés (2012) proponen una "forma funcional" razonable para el cambio en la tasa esperada por el mercado. Específicamente se propone una relación entre las tasas esperadas a uno, dos y tres períodos, de modo que sea improbable que la entidad monetaria realice un aumento de la tasa de política monetaria para que en el siguiente período la reduzca. Es decir:

$$f_i - f_{i-1} = \beta_i (f_{i-1} - f_{i-2}) \quad (11)$$

Se espera que el parámetro β_i asociado al período i sea mayor que cero y probablemente menor que 1. Dada la ecuación (11), es posible encontrar el valor de la n -ésima tasa esperada en función de la tasa esperada a un período (f_1) y la tasa corta efectiva en el momento inicial (r_0). Luego:

$$f_n = f_1 + \prod_{i=1}^n (1 + \beta_i) (f_1 - r_0) = f_1 + \gamma_n (f_1 - r_0) \quad (12)$$

O de forma matricial:

$$f = f_1 \cdot \bar{1} + \vec{\gamma} (f_1 - r_0) \quad (13)$$

Luego, el proceso supuesto por los autores para la tasa esperada a un período es:

$$df_1 = \begin{cases} \sigma_f d\varpi & t < t_0 \\ 0 & t > t_0 \end{cases} \quad (14)$$

$$f_1(t) = \begin{cases} f_1(t-dt) + \varepsilon & t = t_0 \\ r & \end{cases} \quad (15)$$

Con t_0 el momento en el tiempo en el que ocurre el cambio (anuncio de la nueva tasa corta), ε corresponde a una variable aleatoria que distribuye normal y se encarga de modelar el "salto" de la tasa esperada. De este modo, la tasa esperada a un período cambia hasta el momento anterior al cambio. En el momento del cambio la tasa esperada "salta" para convertirse en la realizada (r).

Además el modelo considera un riesgo de crédito variable en el tiempo, por lo que el *spread* de corto plazo es modelado de acuerdo al siguiente proceso:

$$ds = \sigma_s d\varpi_s \quad (16)$$

De este modo el *spread* no es constante en el tiempo, sino que cambia como si fuera un movimiento browniano. El bono puede ser valorado al encontrar la esperanza de éste en la medida ajustada por riesgo.

Luego sea N el número de saltos que contempla el bono, la solución para un bono con plazo al vencimiento T y $N \leq 3$ períodos, está dada por la siguiente fórmula:

$$B_T = e^{-\left(r_0 t_0 + sT + \left(f_1 \cdot \bar{1} + (f_1 - r_0) \bar{\gamma}\right) \Delta t\right) + L' \Delta t + \frac{1}{2} \Delta t' C \Delta t + \frac{1}{2} W + R} \quad (17)$$

Con:

$$L = \begin{bmatrix} \lambda_1^C \sqrt{C_{11}} \\ \vdots \\ \lambda_N^C \sqrt{C_{NN}} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{N,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1,N} & \cdots & C_{NN} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$W = \sum_{i=0}^N \Delta t_i \sum_{j,k < i}^N \left(\Delta t_{i-j} \Delta t_{i-k} \sigma_f^2 (1 + \gamma_j)(1 + \gamma_k) \right) + \frac{\sigma_s^2 T^3}{3} + \dots \quad (20)$$

$$\sum_{i=0}^N \Delta t_i \sum_{j < i}^N \left(\Delta t_j (t_{i+1}^2 - t_i^2) \sigma_{fs} (1 + \gamma_j) \right)$$

$$R = \sum_{i=0}^N \Delta t_i \left(\sum_{j=1}^i \Delta t_j \lambda_j \sigma_f (1 + \gamma_j) \right) + \frac{T^2 \lambda_s \sigma_s}{2} \quad (21)$$

2.3 Descomposición de la inflación implícita y expectativas de inflación

En la actualidad el principal indicador de las expectativas de inflación que posee el mercado es la llamada comúnmente en la literatura como la *break-even inflation rate*¹⁶. Esta medida se construye como la diferencia entre rentabilidades de igual madurez de títulos de deuda nominal y de deuda indexada a la inflación, por lo que realmente esta medida corresponde a la inflación implícita promedio contenida en los papeles durante el plazo correspondiente. Al aproximar esta medida como la expectativa de inflación que tiene el mercado, se desprecian los posibles sesgos que pueden estar contenidos en este spread de tasas. Entre estos sesgos podemos encontrar: errores en la indexación, riesgo de inflación, impuestos y premio por liquidez, entre otros.

Söderlind (2011), al analizar la evolución de la inflación implícita presente en bonos del tesoro estadounidense entre 1997 y mediados del 2008, determina que las desviaciones de esta medida se producen principalmente producto del premio por riesgo asociado a la inflación y al premio por liquidez.

Hordahl (2007) se enfoca en la tarea de estudiar el premio por riesgo de la inflación en los Estados Unidos y en la zona Euro. Determina que en promedio es positivo, pero relativamente pequeño y altamente variable en el tiempo, proviniendo las variaciones cíclicas de este premio desde las fluctuaciones en el PIB y las variaciones de alta frecuencia, de cambios en el nivel de la inflación.

¹⁶ De ahora en adelante inflación implícita.

2.4 Literatura: obtención de expectativas de inflación

La literatura asociada a la estimación de las expectativas de inflación y a la determinación de la estructura temporal de ésta, puede separarse en dos grandes grupos (Pericoli, 2012). El primero corresponde a modelos macroeconómicos que utilizan tanto variables macroeconómicas como financieras en su estructura. El segundo corresponde a modelos de no-arbitraje de forma reducida sobre la estructura de papeles nominales y reales.

2.4.1 Modelos macroeconómicos

Chernov y Mueller (2008) desarrollan un modelo macroeconómico de no arbitraje que incorpora la información proveniente de encuestas de proyección de la inflación por parte de expertos, precios de bonos observados (tanto nominales como indexados a la inflación), cambios en el producto interno bruto y en el índice de precios al consumidor. Dada la vasta información utilizada, el modelo toma en consideración los diferentes conjuntos de información que se pueden entrelazar (por ejemplo diferentes plazos entre las distintas encuestas que son utilizadas). Los autores determinan que el uso tanto de la información proveniente de los bonos como de las encuestas de proyección de la inflación son importantes para producir expectativas realistas sobre la inflación futura. Sin embargo este modelo presenta un gran desafío de implementación producto de las dificultades que implica tanto reunir, como procesar adecuadamente la significativa cantidad de información que este requiere.

2.4.2 Modelos de no-arbitraje de forma reducida

El segundo grupo de trabajos enfocados a la estimación de las expectativas de inflación, corresponde a los modelos de no-arbitraje afines¹⁷ para la estructura de tasas nominal y real. Dentro de esta línea de trabajo podemos encontrar un gran número de investigaciones destacando: Evans (1998), Risa (2001), Joyce et al. (2010), Ang et al. (2008) y Christensen et al. (2010), entre otros.

Evans (1998) utiliza información de los precios de bonos nominales y bonos indexados a la inflación en el Reino Unido en un modelo de no-arbitraje afín para estudiar el comportamiento de las tasas reales, su relación con las tasas nominales y con la inflación, y la importancia del premio por riesgo asociado a la inflación. Una peculiaridad de los datos utilizados es que los bonos indexados a la inflación no protegen en su totalidad al dueño del bono frente a ésta. Esto producto de la existencia de un "retraso" en la indexación de estos bonos. El autor encuentra evidencia para rechazar la hipótesis de un premio por inflación constante (o nulo). En segundo lugar encuentra que no existe evidencia que el premio por riesgo debido al "retraso" en la indexación sea lo suficientemente significativo como para afectar el precio de los bonos.

Risa (2001) también hace uso de precios de bonos nominales y de bonos indexados a la inflación en el Reino Unido para estimar y estudiar las expectativas de inflación y el premio debido a la inflación. Además obtiene tasas cero nominales y reales semanales en base a estos datos. El autor implementa un modelo dinámico afín de cuatro factores y lo estima por medio del filtro de Kalman, determinando que el premio por inflación en un bono con madurez de 10 años, oscila alrededor del 2% anual.

Ang et al. (2008) desarrolla un modelo dinámico de no-arbitraje para la tasa de interés que incluye cambios de régimen, precios de riesgo de mercado dependientes del tiempo e inflación al usar datos del índice de precios al consumidor. La inclusión de regímenes cambiantes tanto para factores reales como nominales es lo que separa a esta

¹⁷ Modelos dinámicos en que la tasa corta es una combinación lineal de las variables de estado.

investigación de la literatura relacionada. De acuerdo a los resultados, el uso de regímenes cambiantes cumple un rol importante para lograr un buen ajuste al gran período de datos al que se hace uso. La muestra utilizada consiste en bonos con plazos de 3, 12, 48 y 60 meses entre el año 1952 y el 2004. Los autores determinan que la curva real en Estados Unidos es relativamente plana y estable alrededor del 1,3%.

En Haubrich et al. (2011) se estiman las expectativas de inflación y el premio por inflación a partir de: tasas *swaps* de inflación, datos de encuestas sobre inflación y bonos nominales de gobierno. Los autores determinan que en plazos largos el premio por inflación es relativamente estable, a diferencia de otras investigaciones en que se encuentra que la estructura de tasas de interés real es "plana". Lo anterior genera que la curva de tasas reales estimada presente una pendiente importante en el rango entre los 5 y 30 años.

2.5 Estimación

En esta sección trataremos la técnica utilizada para estimar las variables de estado que rigen el modelo, para luego estimar el set de parámetros asociado a este.

2.5.1 Filtro de Kalman

El filtro de Kalman es un algoritmo que permite al investigador estimar de forma conjunta tanto los parámetros como las variables de estado asociados a un modelo de tasas de interés, al utilizar toda la información histórica disponible hasta la fecha que se quiere estimar, permitiendo un cierto grado de error. Esta técnica, desarrollada por Kalman (1960), inicialmente estaba enfocada para controlar procesos de automatización en ingeniería, pero ha sido correctamente aplicada a problemas de ingeniería financiera.

Para estimar los parámetros del modelo, el filtro de Kalman calcula la distribución de los cambios que se producen en la curva generada entre una fecha y la fecha siguiente. A partir de esta distribución es posible construir la función de verosimilitud, la cual al ser maximizada genera estimaciones que son consistentes con los parámetros que rigen la dinámica propuesta para las variables de estado. La metodología propuesta por Kalman se define para procesos gaussianos, por lo tanto esta técnica requiere el supuesto que los errores de observación del modelo poseen una distribución normal, aunque este supuesto puede ser relajado.

De acuerdo a la literatura financiera, la implementación del filtro de Kalman requería de paneles completos de datos, lo que implicaba la pérdida de información con la finalidad de cumplir con esta limitante. Sin embargo Sørensen (2002) y Naranjo (2007) muestran que esto puede ser relajado, permitiéndose el uso de paneles incompletos.

2.5.2 El espacio de estados

El filtro comienza con un sistema de ecuaciones, llamadas ecuaciones de medida. Este sistema representa la relación entre las variables observadas (tasas de interés cero) y las variables de estado.

$$z_t = H_t x_t + d_t + v_t \quad v_t \sim N(0, R_t) \quad (22)$$

Donde las variables observadas en el período t se agrupan en el vector z_t de longitud $(m_t \times 1)$. x_t corresponde al vector que agrupa las variables de estado del modelo, el cual es de longitud $(n \times 1)$ donde n es el número de variables de estado del modelo.

H_t corresponde a una matriz de $(m_t \times n)$, d_t es un vector de constantes que contiene el desplazamiento necesario para llevar de las variables no observables a las observadas y v_t es una variable aleatoria no correlacionada de media cero y matriz de varianza-covarianza R_t . Esta variable representa los errores de medición que se suponen al plantear el filtro.

Luego, la dinámica que siguen las variables de estado x_t se representa en el filtro mediante la ecuación de transición. Esta es una representación en tiempo discreto de la dinámica en tiempo continuo de las variables de estado.

$$x_t = A_t x_{t-1} + c_t + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, Q_t) \quad (23)$$

La ecuación (23) describe la relación lineal que existe de un estado a otro y la distribución normal multivariada de las perturbaciones ε_t . Estas perturbaciones permiten modelar la incertidumbre en la estimación de las variables de estado en el período siguiente. A_t es una matriz de $(n \times n)$, c_t es un vector $(n \times 1)$, mientras que ε_t y

Q_t son similares al vector v_t y a la matriz R_t de la ecuación (22). Las ecuaciones de medida y de transición constituyen el espacio de estados que definen el modelo a estimar por medio del filtro de Kalman. Luego, el filtro iterativamente entrega estimadores óptimos para las variables de estado, dada la información existente hasta el tiempo t . Esto se realiza a través de la minimización del error cuadrático de estimación. Sea $\tilde{x}_t$ la estimación de la variable de estado x_t dada la información disponible hasta t , el error cuadrático de estimación queda definido por la siguiente ecuación:

$$P_t = E[(x_t - \tilde{x}_t)(x_t - \tilde{x}_t)'] \quad (24)$$

Dado que $\tilde{x}_t$ y P_t contienen toda la información disponible hasta el período t , el filtro de Kalman es una técnica iterativa. Esto genera que de existir nueva información observada en el período $t + \Delta t$, se pueden estimar los nuevos valores $\tilde{x}_{t+\Delta t}$ y $P_{t+\Delta t}$.

Dada la información disponible y conocida hasta t , es decir conocidos $\hat{x}_t$ y P_t , es posible estimar sus valores en un período Δt más adelante gracias a las ecuaciones de predicción:

$$\hat{x}_{t+\Delta t|t} = A_{t+\Delta t} \hat{x}_t + c_{t+\Delta t} \quad (25)$$

$$P_{t+\Delta t|t} = A_{t+\Delta t} P_t A_{t+\Delta t}' + Q_{t+\Delta t} \quad (26)$$

La estructura de las ecuaciones anteriores resaltan el origen bayesiano del filtro en el sentido de que la estimación de los valores en $t + \Delta t$ es condicional a los valores estimados para el tiempo t . Una vez obtenidos estos estimadores, se procede a realizar una predicción de las observaciones para el próximo período ($\hat{z}_{t+\Delta t|t}$), esto gracias a la ecuación de medida:

$$\hat{z}_{t+\Delta t|t} = H_{t+\Delta t} \hat{x}_{t+\Delta t} + d_{t+\Delta t} \quad (27)$$

Luego al incorporar nueva información, es posible contrastar la predicción del filtro con las nuevas variables observadas ($z_{t+\Delta t}$), con lo que es posible determinar la nueva predicción del filtro, la cual es un promedio ponderado entre la información actual y toda la información histórica contenida en las predicciones antes detalladas.

$$\hat{x}_{t+\Delta t} = \hat{x}_{t+\Delta t|t} + K_{t+\Delta t} (z_{t+\Delta t} - \hat{z}_{t+\Delta t|t}) \quad (28)$$

$$\hat{P}_{t+\Delta t} = (I - K_{t+\Delta t} H_{t+\Delta t}) P_{t+\Delta t|t} \quad (29)$$

Las dos ecuaciones anteriores se denominan como ecuaciones de actualización. En ellas I corresponde a la matriz identidad de dimensión $(n \times n)$, mientras que K es la denominada ganancia de Kalman, la cual está definida por las siguientes ecuaciones:

$$K_{t+\Delta t} = P_{t+\Delta t|t} H_{t+\Delta t}' \Omega_{t+\Delta t}^{-1} \quad (30)$$

$$\Omega_{t+\Delta t} = H_{t+\Delta t} P_{t+\Delta t|t} H_{t+\Delta t}' + R_{t+\Delta t} \quad (31)$$

$\Omega_{t+\Delta t}$ es la varianza de la predicción de las innovaciones y junto a la esperanza de la predicción permiten caracterizar la distribución de las innovaciones y por lo tanto son la base para realizar la estimación de los parámetros del modelo mediante el método de máxima verosimilitud.

2.5.3 Estimación de parámetros

El método de máxima verosimilitud busca encontrar el set de parámetros que maximiza la probabilidad de que los datos provengan de una distribución supuesta inicialmente. Bajo ciertas condiciones de regularidad, este método entrega estimaciones consistentes y asintóticamente normales. La distribución que inicialmente se supone, proviene de las distribuciones de los errores descritos en las ecuaciones . Las variables x_t y v_t distribuyen normal, lo que implica que z_t y por lo tanto $\hat{z}_{t+\Delta t}$ también poseen una distribución normal. De esta forma, dado que ya se definió la media y la varianza de las innovaciones en las ecuaciones (25) y (26) respectivamente, es posible describir su función de distribución de probabilidad de acuerdo a:

$$f_{z_{t+\Delta t}|t}(z_{t+\Delta t}) = \frac{1}{2\pi |\Omega_{t+\Delta t}|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (z_{t+\Delta t} - \hat{z}_{t+\Delta t|t})' \Omega_t^{-1} (z_{t+\Delta t} - \hat{z}_{t+\Delta t|t}) \right] \quad (32)$$

Dada la ecuación (32) que describe la densidad de probabilidad de las innovaciones $z_{t+\Delta t|t}$ y la independencia de las variables $x_{t+\Delta t|t}$ y $v_{t+\Delta t|t}$, es posible obtener la densidad de probabilidad conjunta de las innovaciones como la multiplicación de las funciones expresadas en (32), representada en su forma logarítmica en la siguiente ecuación.

$$\log L(\psi) = \sum_t \left(\log \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2} \log |\Omega_t| - \frac{1}{2} (z_t - \hat{z}_{t|t+\Delta t})' \Omega_t^{-1} (z_t - \hat{z}_{t|t+\Delta t}) \right) \quad (33)$$

La ecuación (33) mostrada anteriormente resalta la dependencia que posee la función de verosimilitud con el vector que reúne los parámetros que rigen la dinámica del modelo, denominado aquí con el símbolo ψ . De esta forma, al maximizar la ecuación (33) es posible obtener estimaciones de los parámetros que sean consistentes

con las observaciones diarias. Dado que el primer término al interior de la sumatoria en la ecuación (33) es una constante, este no altera el resultado de la maximización, por lo que la función que se busca realmente maximizar es la siguiente:

$$\log \bar{L}(\psi) = -\frac{1}{2} \sum_t \log |\Omega_t| - \frac{1}{2} \sum_t (z_t - \hat{z}_{t|t+\Delta t})' \Omega_t^{-1} (z_t - \hat{z}_{t|t+\Delta t}) \quad (34)$$

3 EL MERCADO

En Chile el mercado de renta fija se encuentra dividido en dos; el primario, compuesto por las licitaciones de venta y compra de bonos realizadas por el Banco Central de Chile y el mercado secundario, el cual corresponde a toda transacción de bonos emitidos por bancos, empresas privadas y el Banco Central.

3.1 Mercado Primario de renta fija

El mercado primario de renta fija corresponde a operaciones financieras realizadas en exclusividad por el Banco Central de Chile, a través de colocaciones directas realizadas electrónicamente en su Sistema de Operaciones de Mercado Abierto (SOMA). Sólo pueden participar de estas colocaciones las empresas bancarias, Administradoras de fondos de pensiones, sociedades administradoras de fondos de cesantía, compañías de seguros, administradoras de fondos mutuos, corredores de bolsa y agentes de valores como lo estipula el compendio de normas financieras del Banco Central de Chile¹⁸.

Las colocaciones realizadas a través del SOMA son adjudicadas por medio de la subasta holandesa: se ordenan las licitaciones de mejor a peor oferta y se establece una tasa de corte en función de la oferta menos atractiva que complete el monto a licitar, siendo esta última tasa la utilizada para calcular el precio final a pagar o ser pagado por el Banco Central de Chile. Este procedimiento se puede realizar de forma interactiva o tradicional. En el caso de hacerse una licitación de forma interactiva, la oferta realizada por algún participante puede ser modificada por éste, de acuerdo a los resultados parciales durante el desarrollo de la licitación. Para la licitación tradicional, la oferta realizada por el participante es válida y fija durante toda la licitación.

¹⁸ Capítulo IV.B.6.2 Compendio de Normas Financieras del Banco Central de Chile

Las licitaciones de compra por ventanilla, son la otra cara del mercado primario. En éstas solamente pueden participar instituciones bancarias y sociedades financieras. El Banco Central tiene la obligación de revender el bono comprado a un valor específico en una fecha establecida.

3.2 Mercado secundario de renta fija

El mercado secundario de renta fija comprende toda transacción de bonos emitidos ya sea por el Banco Central, Instituciones Bancarias, Empresas, etc. Estas transacciones pueden llevarse a cabo en la Bolsa de Comercio de Santiago, Bolsa Electrónica o en el mercado OTC¹⁹.

El mercado secundario de renta fija, dada las distintas necesidades de financiamiento que presenta la economía, se subdivide en instrumentos de intermediación financiera (IIF), que se encuentra constituido por instrumentos de renta fija de corto plazo nominales y reales, y en instrumentos de renta fija (IRF) que comprenden los bonos de largo plazo.

3.3 El Banco Central

El Banco Central de Chile es un organismo autónomo, de carácter técnico, con personalidad jurídica y patrimonio propio. Éste no forma parte de la administración del Estado y se rige exclusivamente por sus propias leyes y determinadas disposiciones específicas de la ley general de bancos y cuentas. Tiene como principal objetivo velar por la estabilidad de la moneda. Para esto, sólo puede efectuar operaciones con las entidades financieras, ya sea pública o privadas, teniendo prohibido bajo condiciones

¹⁹ *Over the Counter*. Son aquellas transacciones que se realizan directamente entre agentes, sin existir una entidad como intermediaria. Las partes involucradas en las transacciones pueden ser entidades financieras (como las que participan en el mercado primario), personas naturales y jurídicas.

normales del país adquirir documentos emitidos por organismos o empresas del Estado. Tampoco puede financiar directa o indirectamente el gasto público del país.

En el año 2007 hasta la actualidad, el Banco Central de Chile cuenta con un objetivo explícito de meta de inflación. Esta meta consiste en que la variación anual del Índice de Precios al Consumidor (IPC) se ubique alrededor del 3%, con una banda de +/- 1 punto porcentual. El horizonte efectivo para esta meta es de mediano plazo y en torno a los dos años de forma permanente.

El Banco Central lleva a cabo su política monetaria por medio de la tasa de política monetaria (de ahora en adelante tpm). Esta tasa corresponde al nivel objetivo que el Banco Central tiene para la tasa de interés nominal interbancaria. Para alterar la tasa de interés nominal interbancaria entorno al valor de la tpm, el Banco Central realiza: operaciones de mercado abierto, compra y venta de pagarés de corto plazo, depósitos de liquidez entre otros.

El correcto desempeño del Banco Central y la ejecución de su política monetaria depende sustancialmente del manejo de las expectativas que posee el mercado de su accionar y de la credibilidad con que se opera. Producto de esto, la transparencia juega un rol clave en la conducción de la política monetaria, siendo claves las reuniones que lleva a cabo el Consejo con la Comisión de Hacienda del Senado, de modo de mantener a la sociedad informada. Además mensualmente se llevan a cabo las reuniones de política monetaria, cuyas fechas son informadas con seis meses de anticipación y cuyos resultados son públicos.

3.4 Descripción de los papeles utilizados

Dentro de los instrumentos de intermediación financiera, podemos encontrar los depósitos a plazo con un vencimiento menor a 1 año, emisión realizada por las instituciones bancarias.

El depósito a plazo es un título de deuda que se emite para certificar la recepción del dinero aportado por una persona, sea ésta natural o jurídica, por parte de una

institución bancaria. Este certificado se emite bajo la obligación contraída por la institución bancaria de restitución del dinero dentro de un plazo establecido, incluyendo reajustes e intereses convenidos, según corresponda.

La unidad de valor de estos instrumentos puede ser:

- Peso moneda corriente nacional.
- Pesos moneda corriente nacional, reajustables según algunos de los sistemas de reajustabilidad autorizados por el Banco Central de Chile (UF, índice de valor promedio, valor del tipo de cambio del dólar de los EE.UU.).
- Moneda extranjera.

Dependiendo de la forma en que se pacte la amortización del dinero depositado, los depósitos a plazo se pueden clasificar en:

- Depósitos a plazo fijo: la entidad depositaria se obliga a pagar en una fecha específica.
- Depósitos a plazo renovable: operan con condiciones similares a los depósitos a plazo fijo, pero presenta la posibilidad de prorrogar automáticamente el depósito por un nuevo período en caso de que el depositante no haga retiro del dinero
- Depósitos a plazo indefinido: al momento del depósito no se estipula una fecha de amortización específica, en cambio la entidad depositaria debe restituir el dinero en un plazo prefijado a contar de la vista o aviso de su cliente.

Cada entidad depositaria fija libremente el monto mínimo susceptible de documentarse en un depósito a plazo. La tasa de interés que se aplica sobre el monto depositado es determinada libremente por la entidad depositaria y la liquidez es al vencimiento del documento. Los depósitos realizados por personas naturales poseen garantía del Estado hasta el 90% del conjunto de depósitos y captaciones que el acreedor tenga en una institución; y hasta un tope de 120 unidades de fomento respecto de las obligaciones que el mismo posea en todo el sistema financiero.

Como ya fue mencionado, el mercado de depósitos chileno se compone de transacciones en pesos y en unidades de fomento (corregidas por inflación). A continuación se presenta el promedio diario del volumen de transacciones (en miles de millones de pesos²⁰) en el mes de Julio del año 2012.

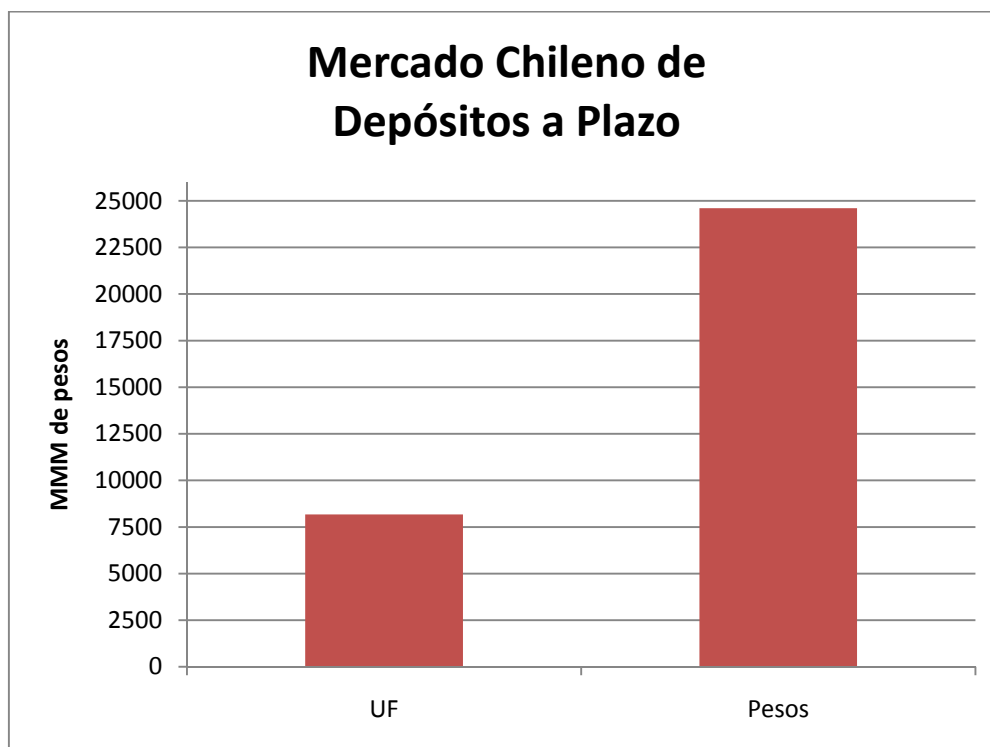


Figura 3-1: Promedio diario de transacciones de depósitos a plazo, Julio 2012.

El mercado está constituido por un total de 23 bancos que transan depósitos a plazo. A continuación en las Figura 3-2 y Figura 3-3 se presentan las participaciones de estos bancos en el mercado de depósitos en pesos y en UF respectivamente.

²⁰ Se utilizó como referencia la unidad de fomento del día 02-07-2012.

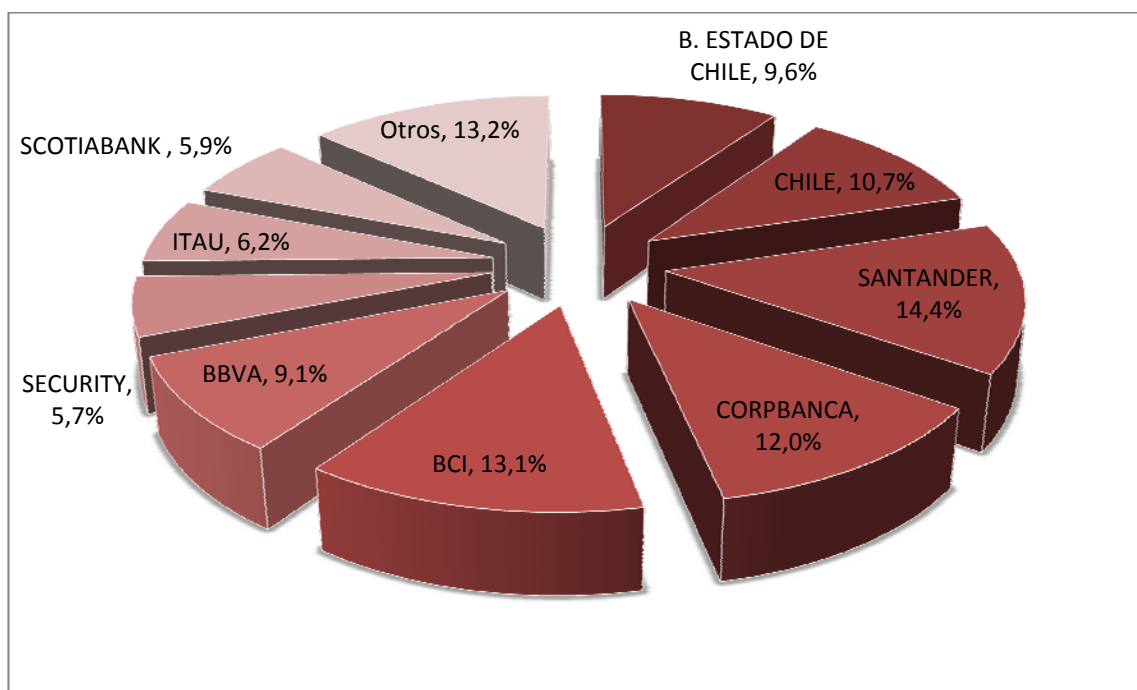


Figura 3-2: Participación de mercado - Depósitos en Pesos, Julio 2012.

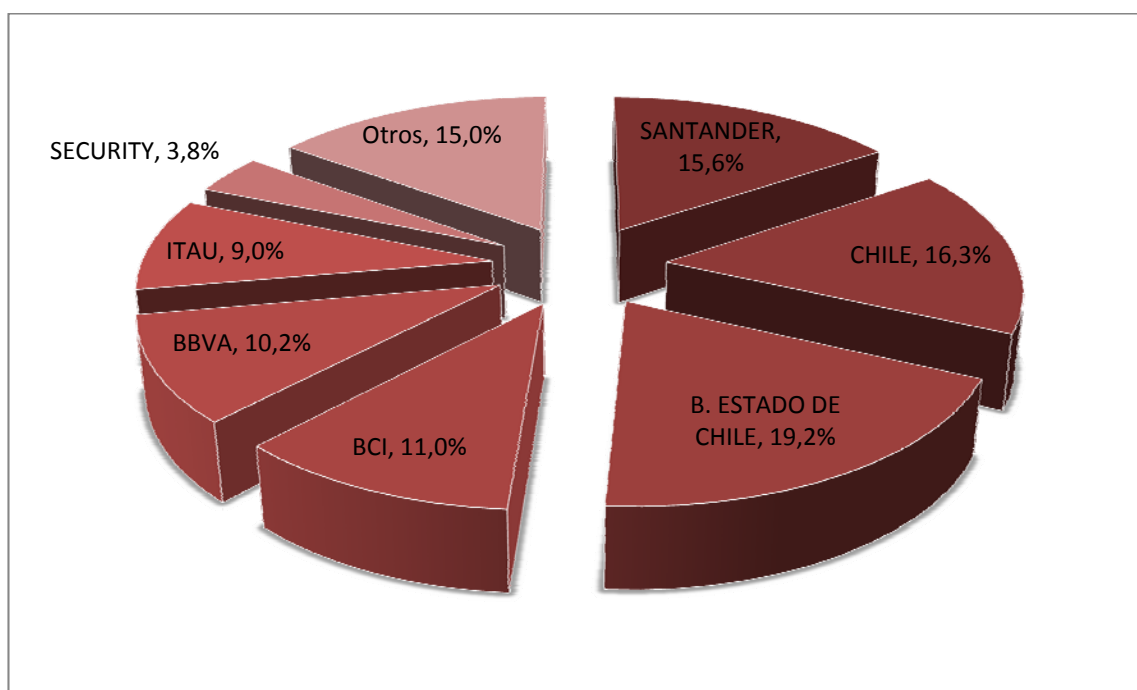


Figura 3-3: Participación de mercado - Depósitos en UF, Julio 2012.

4 MODELO

En las secciones que se encuentran a continuación, se describe el modelo para la estructura de tasas de interés de bonos denominados en unidades de fomento y obtención de la expectativa de inflación presentado en esta Tesis. En primer lugar se describe la estructura general del modelo. Luego, se presenta el modelo para la estructura de tasas de interés reales y obtención de la expectativa de inflación que es estimado para el mercado chileno.

4.1 Introducción

En el modelo presentado en esta tesis, la variación del índice de precios al consumidor del mes previo es informada en un día específico todos los meses. Esta información es utilizada por el modelo, de tal forma que la tasa real asociada a un depósito con vencimiento en una fecha determinada dependa explícitamente: del valor de la variación del IPC, del período de tiempo en que la variación del IPC es conocida (el valor de la unidad de fomento se conoce con seguridad) y de la cantidad de variaciones de IPC desconocidas involucradas en el cálculo de la unidad de fomento vigente al momento del vencimiento del bono real.

Esquemáticamente:

- Sea IPC_1 y IPC_2 las fechas en que se informa el IPC del mes cero y del mes 1 respectivamente.
- Sea $10/M1$ el día 10 del mes uno en que se calcula un nuevo reajuste para la unidad de fomento a partir de la variación del IPC del mes previo y válido hasta el día 9 del mes siguiente.

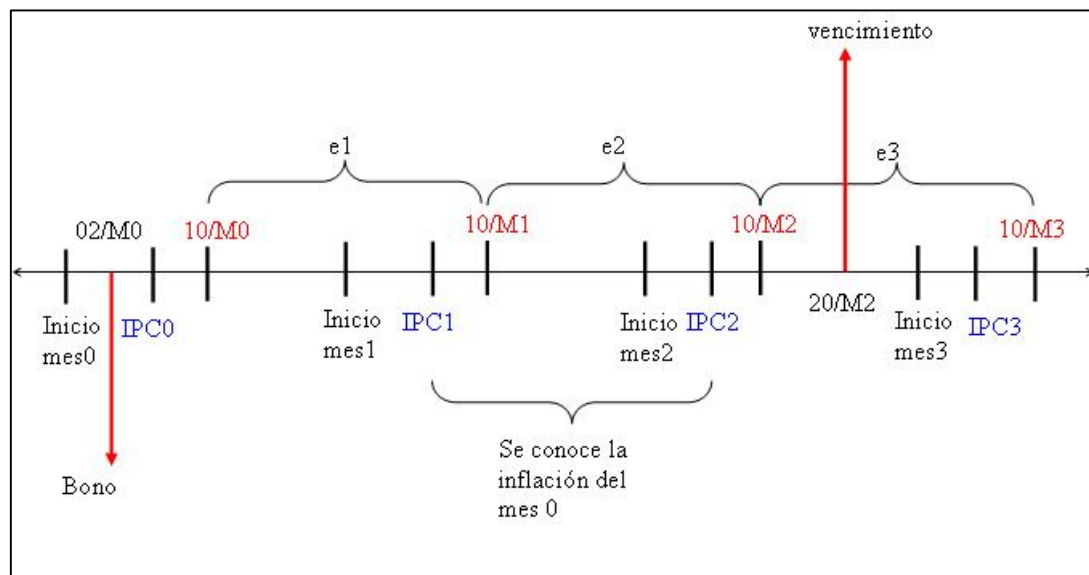


Figura 4-1: Esquema explicativo del Modelo

La inflación esperada para cada uno de los períodos e_1 , e_2 y e_3 cambian a medida que pasa el tiempo ya que hay nueva información que entra al mercado (alzas en el precio del petróleo, señales del Banco Central, aumentos en el precio de los cereales, etc.). Esta información altera o sustenta las expectativas de inflación que ya posee el mercado, al entregar indicios sobre el rumbo que tomará la economía y por ende las variaciones que experimentará el nivel de precios al interior de la misma.

El valor del bono depende de la tasa de interés real efectiva en cada instante hasta su vencimiento y por ende de la inflación realizada correspondiente. Pero dado que esta inflación es desconocida, verdaderamente dependerá de la mejor estimación existente (las esperadas).

En el modelo, a medida que avanza el tiempo y se llega al momento en que se informa la primera variación del IPC por ejemplo, la inflación esperada a un período se realiza (e_1) y se convierte en la efectiva, reduciéndose el número de inflaciones esperadas en una unidad. Además, producto de esta realización, la inflación esperada a dos períodos pasa a ser la inflación esperada a un período y la de tres períodos pasa a ser la de dos, y así secuencialmente.

El modo en que se realiza el anuncio de la variación del IPC y como éste es utilizado para realizar el reajuste de la unidad de fomento, forma parte importante del modelo y es necesario explicarlo más en detalle. Como lo presenta la Figura 4-1, por ejemplo la tasa de un bono el 02/M0 y con vencimiento el día 20 del mes subsiguiente, posee información referente a las expectativas de inflación a 1, 2 y 3 períodos. Dado esto, dependiendo de la fecha en que es establecido el bono y la fecha en que éste vence, podemos reconocer dos situaciones diferentes.

- Si $IPC0 \leq F_{ini} < IPC1$ y $10/M1 \leq F_{venc}$: el instrumento contempla una o más expectativas de inflación. (Vencimiento en que la inflación es desconocida)
- Si $IPC0 \leq F_{ini} < IPC1$ y $F_{venc} < 10/M1$: el instrumento contempla exclusivamente una inflación conocida (el valor de la unidad de fomento es conocida durante toda la duración del instrumento).

con F_{ini} la fecha en que se valoriza el bono y F_{venc} la fecha en que vence el bono en cuestión.

4.2 Modelo para la estructura de tasa real y expectativa de inflación

El modelo de valorización de bonos reales y de obtención de la expectativa de inflación para el próximo período que es presentado a continuación, corresponde a un modelo de no-arbitraje dinámico²¹. Éste considera el comportamiento discreto de la inflación y el cambio de ésta producto de la publicación del índice de precios sobre el cual se reajusta la unidad de fomento.

Al hacer uso de la información proporcionada por la curva de depósitos nominal, obtenida a partir de la metodología desarrollada por Cortázar y Valdés 2012 y la de las transacciones de depósitos reales, el modelo descompone la inflación implícita contenida en la relación entre estos dos elementos. Esta descomposición se lleva a cabo de la siguiente forma:

Sea

- $r_{nominal}$: la tasa nominal obtenida a partir de CV.
- r_{real} : la tasa real obtenida de las transacciones de depósitos denominados en UF.
- LIQ: el premio por liquidez exigido por los agentes.
- INF: el premio por inflación exigido por los agentes.

Luego, la inflación implícita se define comúnmente como $r_{nominal} - r_{real}$. Este diferencial de tasas es el que se descompone en tres componentes, es decir:

$$\overline{\pi^e} = r_{nominal} - r_{real} - LIQ - INF \quad (35)$$

Por lo que $\overline{\pi^e}$ corresponde a la expectativa de inflación durante el plazo de los papeles, la cual es obtenida al ajustar el spread entre las tasas nominales y reales por la

²¹ En el Anexo C.1 se presenta el modelo generalizado para la estructura de tasas de interés y expectativas de inflación. En el modelo presentado allí, el valor de un bono real a N períodos en los que la inflación es desconocida, es propuesto.

existencia de premios de liquidez y de inflación. Con esto se busca obtener un mejor estimador de las expectativas de inflación a partir de la información contenida en las tasas de papeles nominales e indexados a la inflación. El uso de esta información como base para el desarrollo del modelo, se debe a las ventajas que presenta frente a encuestas y otros métodos; en primer lugar está disponible en el día a día, está enfocada en las creencias de los mercados financieros y se basa en las decisiones tomadas por personas e instituciones cuyo dinero depende de una buena estimación (Söderlind, 2011).

El premio por liquidez, tiene su origen en el diferencial de liquidez que puede existir entre el papel nominal y el indexado. Ante esta diferencia en liquidez, los inversionistas tenderían a exigir un retorno superior a aquel instrumento cuyo mercado sea menos desarrollado, dificultándose su rápida venta y compra.

El premio por inflación tiene su origen del hecho de que inversionistas que poseen activos nominales, se encuentran expuestos a cambios no anticipados de la inflación. En otras palabras, el retorno real que proviene de un activo nominal, que es el que finalmente le interesa a los inversionistas, depende de la forma de cómo la inflación evoluciona durante el período en cuestión. Comúnmente se tiende a pensar que esta compensación debiera ser positiva y aumentar con el horizonte de tiempo que comprende la inversión. El determinar a priori el signo e incluso la magnitud de este premio no es fácil, como lo analiza Hordahl (2007).

De esta forma un bono con vencimiento en T , con T mayor a la fecha del anuncio del IPC más próximo (t_0), depende de la inflación esperada a un período. Sea e_1 la expectativa de inflación al siguiente período. Ésta se modela de tal forma que la expectativa de inflación carezca de *drift*, de modo de que se utilice toda la información disponible, siendo imposible anticiparla con seguridad. El proceso que sigue esta expectativa bajo la medida real de probabilidad es el presentado en la ecuación siguiente.

$$de = \begin{cases} \sigma_e d\varpi & T < t_0 \\ 0 & T \geq t_0 \end{cases} \quad (36)$$

donde σ_e es la desviación estándar de los cambios en la expectativa de inflación.

Luego, la expectativa de inflación en el momento inmediatamente después de que se conoce el IPC del mes previo es:

$$e(t) = e(t - dt) + \varepsilon \quad \text{para } t = t_0 \quad (37)$$

donde ε corresponde al salto una vez que la inflación para el período en cuestión es conocida y se genera una nueva expectativa de inflación para el período siguiente. Este salto se supone que distribuye normal con media 0 y varianza σ_u^2 , bajo la medida neutral al riesgo.

Como ya fue mencionado anteriormente, al momento de explicar la diferencia existente entre la tasa nominal proveniente de bonos en pesos y la tasa real proveniente de bonos en unidades de fomento, es necesario tener ciertas consideraciones. La primera corresponde a la diferencia de liquidez existente entre estos dos instrumentos, lo que provoca la existencia de un premio por liquidez exigido por el mercado. La segunda corresponde a la existencia de un premio asociado a la variación de la inflación. Antes estas dos consideraciones, el modelo incluye la existencia de un premio por liquidez y un premio por inflación variables en el tiempo. Por lo que se realiza el supuesto de que éstos siguen los siguientes procesos bajo la medida real de probabilidad.

Para el premio asociado al diferencial de liquidez entre instrumentos nominales y reales:

$$dliq = \sigma_{liq} d\varpi_{liq} \quad (38)$$

Para el premio asociado a la variabilidad de la inflación:

$$d \inf = \sigma_{\inf} d\varpi_{\inf} \quad (39)$$

Por lo que cada uno de los premios para el día de mañana por ejemplo, sería el premio de hoy más un error browniano (carecen de *drift*).

La existencia de estos dos premios por riesgo en el spread entre tasas nominales y reales en conjunto con la expectativa de inflación, presenta la dificultad técnica de poder separar las contribuciones de cada uno de estos factores al momento de explicar el spread existente. Producto de esto, el método de estimación propuesto para el modelo tiene su origen en el desarrollado por Cortázar, Schwartz y Tapia (2012), donde los autores, con la finalidad de estimar spreads de bonos privados al interior de un mercado poco líquido mediante un modelo dinámico, realizan una estimación en dos etapas. En una primera se estiman las variables de estado de la curva libre de riesgo y en una segunda se estima la tasa de los papeles con riesgo utilizando como conocidas las variables de estado estimadas en la etapa uno.

De este modo, la estimación de las variables de estado para el modelo presentado en esta tesis se lleva a cabo en dos etapas. Esto haciendo uso de la ya mencionada presencia de papeles que contemplan la expectativa de una inflación desconocida y de papeles que hasta el vencimiento conocen con certeza la inflación (el valor de la unidad de fomento es conocida para todo el período) al interior de la muestra. Luego la curva para la estructura de tasas de interés puede ser separada en dos tramos:

- El primer tramo corresponde a la curva generada por observaciones en que la inflación se conoce en su totalidad ("Período conocido").
- El segundo tramo corresponde a la curva generada por observaciones en que los bonos poseen una expectativa de inflación ("Período desconocido").

Luego, la primera etapa de estimación corresponde a estimar la estructura de tasas para el "Período conocido" de inflación, donde el valor de un bono puede ser obtenido al calcular la esperanza de éste bajo la medida neutral al riesgo.

Sea T el vencimiento del bono, el valor de un bono con vencimiento dentro del período conocido de inflación es²²:

$$B_T = \exp(-r_0 T + \pi_0 T + PR_{LIQ(0)} T + \frac{1}{2} \sigma_{liq}^2 \frac{T^3}{3} - \lambda_{liq} \sigma_{liq} \frac{T^2}{2}) \quad (40)$$

donde:

Tabla 4.1: Parámetros del modelo, período conocido

r_0	Tasa nominal proveniente de la curva de depósitos utilizando la metodología de Cortázar y Valdés (2012) (Ver sección 2.2).
σ_{liq}	Desviación estándar del cambio en el premio por liquidez.
λ_{liq}	Precio de mercado del cambio en el premio por liquidez.
PR_{liq}	Premio por liquidez estimado por el modelo en esta primera etapa

De este modo, en la primera etapa de estimación, se obtiene el premio asociado al diferencial de liquidez entre papeles reales y nominales. Esta variable luego es utilizada como conocida para la segunda etapa de estimación. El uso de este premio por riesgo, estimado a partir del período conocido conlleva el supuesto realizado de que los papeles pertenecientes al período conocido y período desconocido en el tiempo "t" comparten el mismo premio asociado a la liquidez ($PR_{liq}(t)$).

Una vez estimado el premio por liquidez para cada día de la muestra en una primera etapa, se procede a la segunda etapa que consiste en estimar la estructura de tasas de interés del período desconocido. Como ya fue mencionado en el párrafo previo, esta etapa toma como conocido el premio por liquidez para cada día, el cual fue obtenido

²² El desarrollo para la obtención del valor del bono se puede encontrar en el Anexo C.3.

en la etapa previa. Luego el valor de un bono puede ser obtenido al calcular la esperanza de éste bajo la medida neutral al riesgo (el desarrollo se puede encontrar en el Anexo C.4):

$$B_T = \exp(-r_0 T + \pi_0 t_0 + e(T - t_0) + PR_{LIQ(0)} T + \dots) \left(PR_{INF(0)}(T - t_0) + \frac{1}{2} \sigma_u^2 (T - t_0)^2 + \frac{1}{2} K + L \right) \quad (41)$$

donde:

$$K = t_0 \sigma_e^2 (T - t_0)^2 + \frac{\sigma_{inf}^2}{3} (T^3 - t_0^3) + (T - t_0)(T^2 - t_0^2) \sigma_{inf,e} \quad (42)$$

$$L = -t_0 (T - t_0) \lambda_e \sigma_e \quad (43)$$

con:

Tabla 4.2: Parámetros del modelo, período desconocido

r_0	Tasa nominal proveniente de la curva de depósitos utilizando la metodología de Cortázar y Valdés (2012) (Ver sección 2.2).
σ_{inf}	Desviación estándar del cambio en el premio por inflación.
$\sigma_{inf,e}$	Covarianza entre el cambio en el premio por inflación y el cambio en las expectativas de inflación
σ_u	Desviación estándar del cambio discreto del IPC (inflación)
PR_{liq}	Variable de estado estimada en la primera etapa previa.
PR_{inf}	Premio por inflación estimado por el modelo en esta segunda etapa
E	Expectativa de inflación estimada por el modelo en esta segunda etapa

5 RESULTADOS

5.1 Datos y muestras utilizadas

Para la estimación del modelo, se utilizaron datos diarios de transacciones de depósitos emitidos por bancos que operan en la bolsa chilena. Específicamente para la construcción de la curva nominal CV requerida como input por el modelo, se utilizaron depósitos nominales con clasificación N1 y N1+, con plazos menores a tres meses. La calibración se realizó en forma agregada, obteniéndose una curva general para toda la muestra²³. Para la estimación y calibración del modelo se utilizaron depósitos denominados en unidades de fomento con clasificación N1 y N1+, cuyo plazo al vencimiento contemple ya sea una inflación desconocida o que el valor de la unidad de fomento sea conocido durante toda la duración del instrumento.

La muestra de calibración corresponde a los datos mencionados anteriormente que hayan sido transados entre el 03-01-2011 y el 30-12-2011. En cambio, el período fuera de muestra corresponde a transacciones realizadas entre el 02-01-2012 y el 20-07-2012. La elección de las muestras a utilizar tiene la finalidad de utilizar la información más reciente posible.

²³ Esto difiere de la metodología inicialmente planteada por Cortázar y Valdés (2012), que consiste en generar una curva nominal por emisor al estimar en forma conjunta la expectativa de tasa de política monetaria para el siguiente período y un spread específico para cada emisor. La razón de esto es meramente práctica, de modo de facilitar la estimación del modelo aquí presentado. Siendo posible utilizar una curva nominal específica a cada emisor para la estimación del modelo de estructuras de tasas reales y expectativas de inflación.

5.2 Estimación de parámetros

A continuación se presentan los parámetros estimados para ambas etapas del modelo²⁴, en conjunto con su desviación estándar y el test-t para medir su significancia.

Tabla 5.1: Parámetros estimados y su significancia, dentro de muestra

		Estimación	Desv. Stdr	Test-t
Parámetros para la Curva en el período conocido	σ_{liq}	0.019046	2.339E-03	8.14
	λ_{liq}	1.543735	4.200E-01	3.68
	σ_{varcon}	0.002282	1.747E-03	4.34
Parámetros para la Curva en el período desconocido	σ_u	0.000483	2.121E-04	2.27
	σ_e	0.040154	8.093E-03	4.96
	σ_{inf}	0.024807	5.577E-03	4.03
	λ_e	-0.23425	3.170E-02	7.39
	$\rho_{e,inf}$	0.274675	2.876E-02	9.55
	$\sigma_{var desc}$	0.003052	7.253E-05	42.1

Donde:

σ_{liq} : es la desviación estándar del cambio en el premio por liquidez.

λ_{liq} : es el precio de mercado del riesgo a cambios en el premio por liquidez.

σ_{varcon} : es la variabilidad de los papeles pertenecientes al período conocido.

²⁴ Recordemos que la curva generada por el modelo consiste en dos curvas realmente: la primera pertenece a la curva generada para el "período conocido" (el valor de la inflación es conocido de antemano para el momento del vencimiento del depósito) y la segunda pertenece a la curva generada para el "período desconocido" (el valor de la inflación es desconocido para el momento del vencimiento del depósito).

σ_u : es la desviación estándar del cambio de inflación producto del anuncio del nuevo IPC.

σ_e : es la desviación estándar del cambio en las expectativas de inflación.

σ_{inf} : es la desviación estándar del cambio en el premio por inflación.

λ_e : es el precio de mercado del cambio en las expectativas de inflación.

$\rho_{e,inf}$: es la correlación entre el cambio en las expectativas de inflación y el cambio en el premio por inflación.

$\sigma_{var desc}$: es la variabilidad de los papeles pertenecientes al período desconocido.

Como se puede apreciar al analizar los estadísticos-t presentes en la Tabla 5.1, todos los parámetros estimados son significativos.

5.3 Ajuste a los precios observados dentro de la muestra

Se muestra a continuación las estructuras de tasas de interés calibradas para distintos días en la muestra.

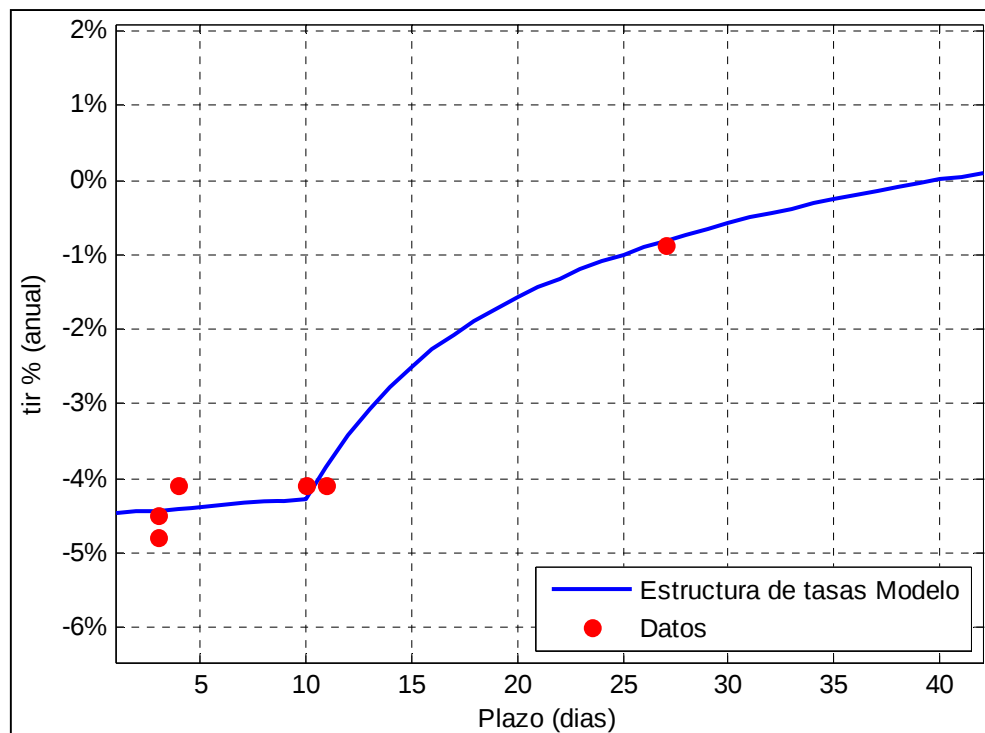


Figura 5-1: Día 29-04-2011, dentro de la muestra

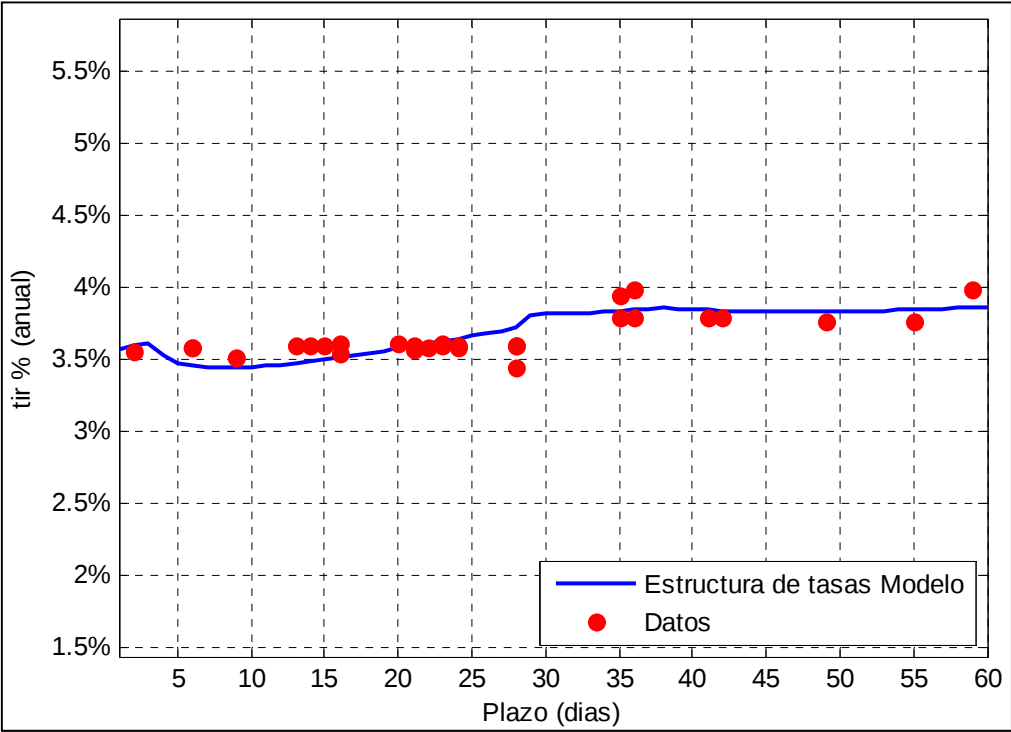


Figura 5-2: Día 12-07-2011, dentro de la muestra

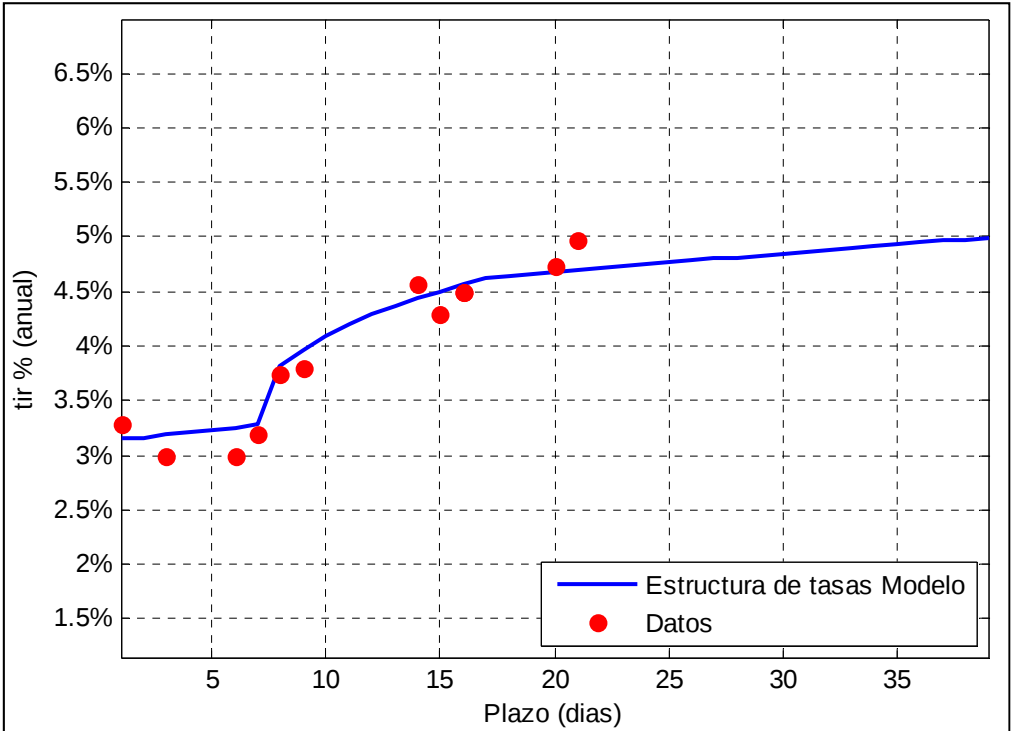


Figura 5-3: Día 02-08-2011, dentro de la muestra

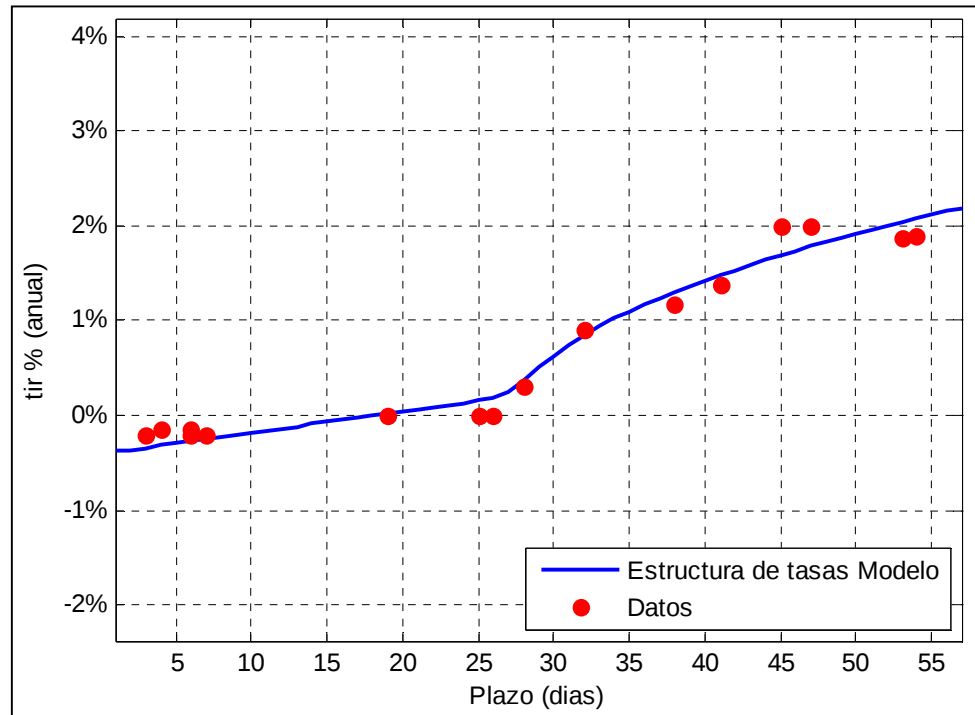


Figura 5-4: Día 14-10-2011, dentro de la muestra

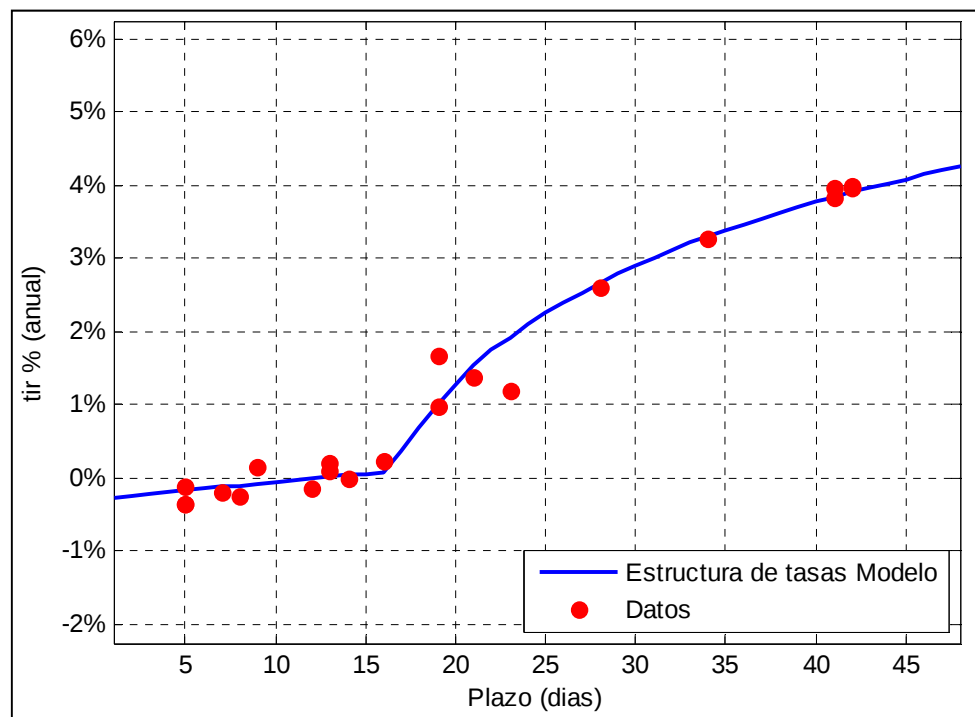


Figura 5-5: Día 23-11-2011, dentro de la muestra

Los resultados de ajuste obtenidos, son comparados con un modelo Vasicek (1977) de dos factores. La utilización de un modelo Vasicek de dos factores como *benchmark*, se debe a que este tipo de modelo es utilizado comúnmente en el área financiera y posee igual cantidad de factores que el modelo aquí presentado para el período desconocido. Además presenta la particularidad de permitir tasas negativas, siendo una característica importante al modelar tasas reales.

Esta curva Vasicek de dos factores es generada al utilizar la metodología presentada en esta tesis para el período conocido, para luego utilizar las observaciones pertenecientes al período desconocido²⁵ como input para la calibración de un modelo Vasicek de dos factores estándar

A continuación se muestra: sesgo, error absoluto medio (EAM) y error cuadrático medio (ECM) para las estimaciones dentro de muestra, tanto para el modelo presentado como para la curva Vasicek de dos factores.

Tabla 5.2: Medidas de ajuste precios observados dentro de muestra

	Modelo	Vasicek 2F
Sesgo	0.0012%	0.0058%
ECM	0.2462%	0.2564%
EAM	0.1628%	0.1646%

Como es posible notar, la curva generada por el modelo presentado en esta tesis, se desempeña levemente mejor que la curva Vasicek de dos factores.

Es necesario recordar que el modelo aquí presentado exige que uno de los factores corresponda a la expectativa de inflación, lo que en una primera instancia sería interpretando como una limitante, sin embargo al parecer esto es compensado al permitir un salto discreto de este factor al ocurrir un cambio de inflación.

²⁵ Estos datos corresponden a la misma muestra utilizada para la calibración del modelo presentado.

5.4 Ajuste a los precios observados fuera de muestra

Con la finalidad de analizar la estabilidad de los parámetros y el desempeño del modelo fuera de muestra, se presenta a continuación la estructura de tasas y el ajuste a los precios observados obtenido por el modelo para el período entre 02-01-2012 y el 20-07-2012 (período fuera de muestra).

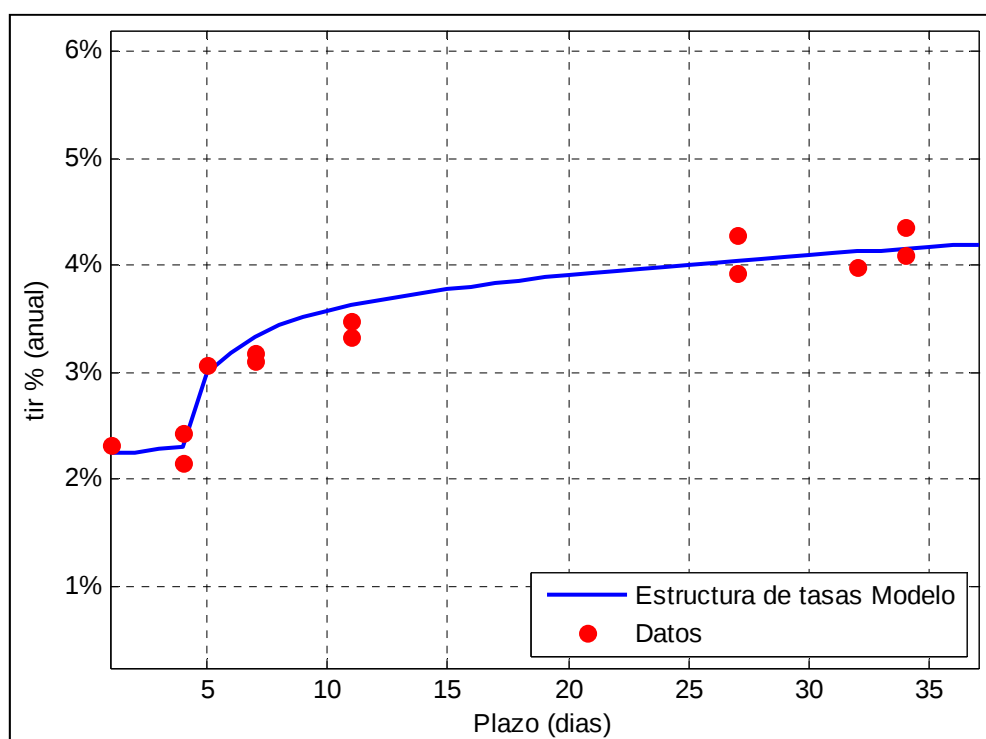


Figura 5-6: Día 05-01-2012, fuera de muestra

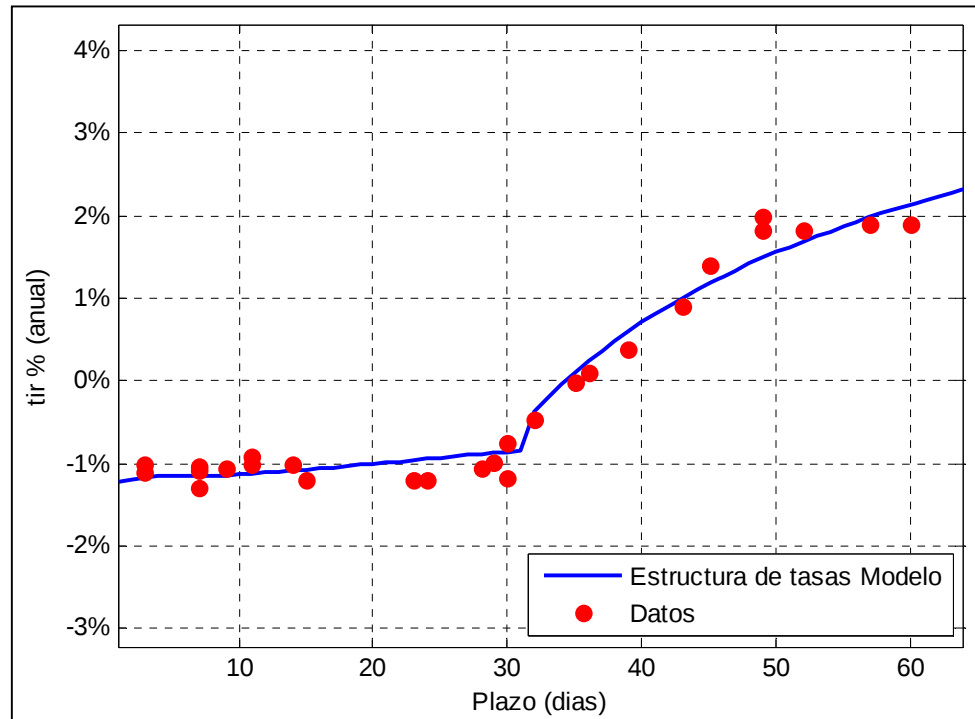


Figura 5-7: Día 09-01-2012, fuera de muestra

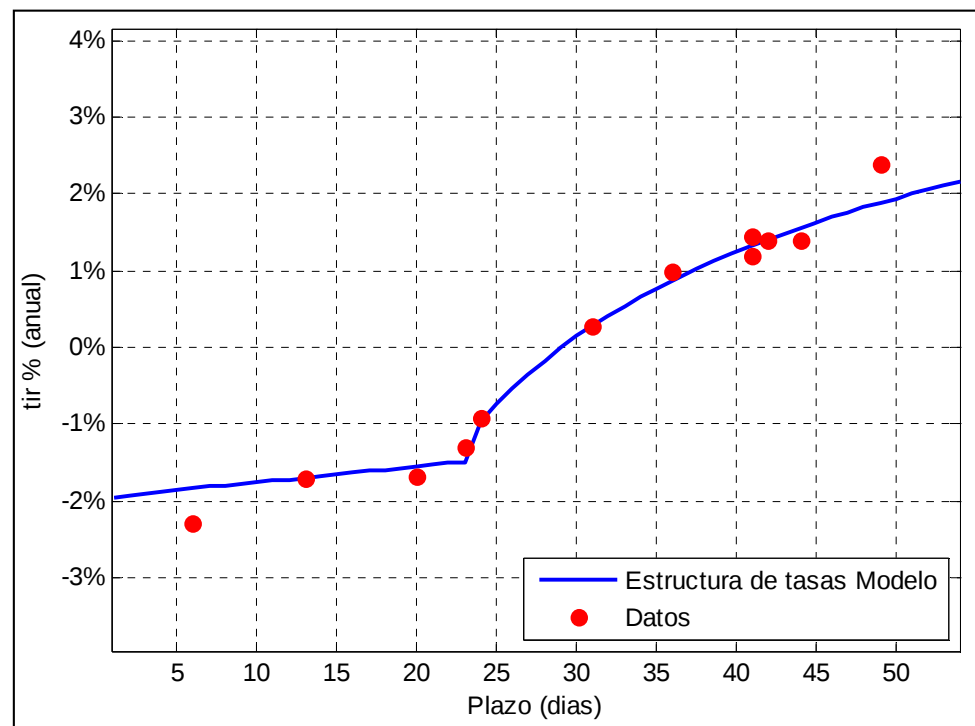


Figura 5-8: Día 17-01-2012, fuera de muestra

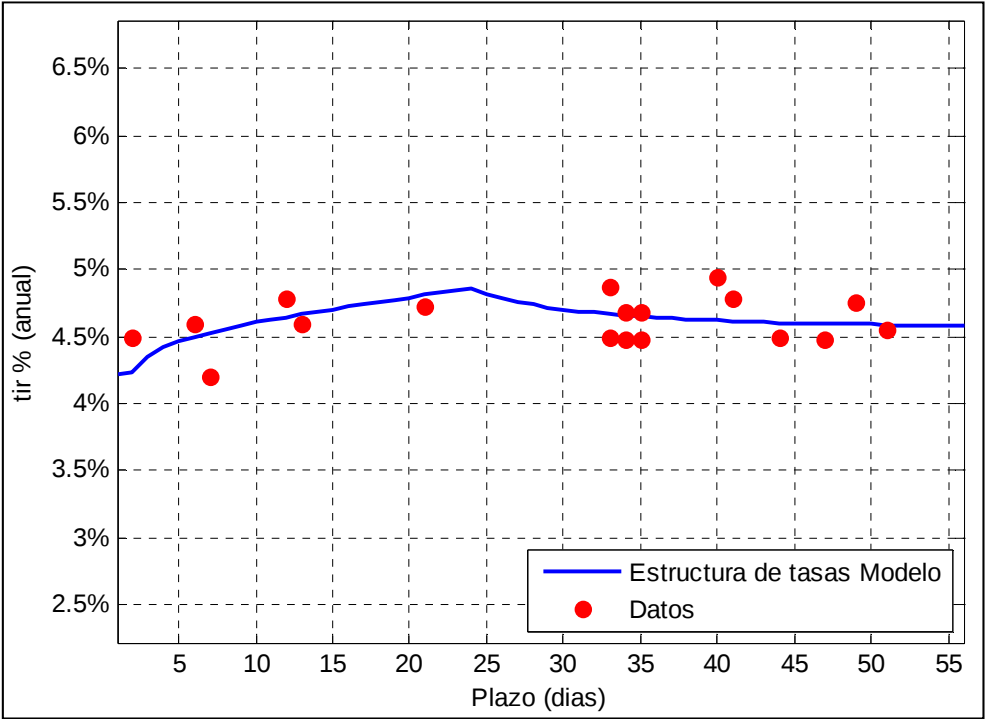


Figura 5-9: Día 16-05-2012, fuera de muestra

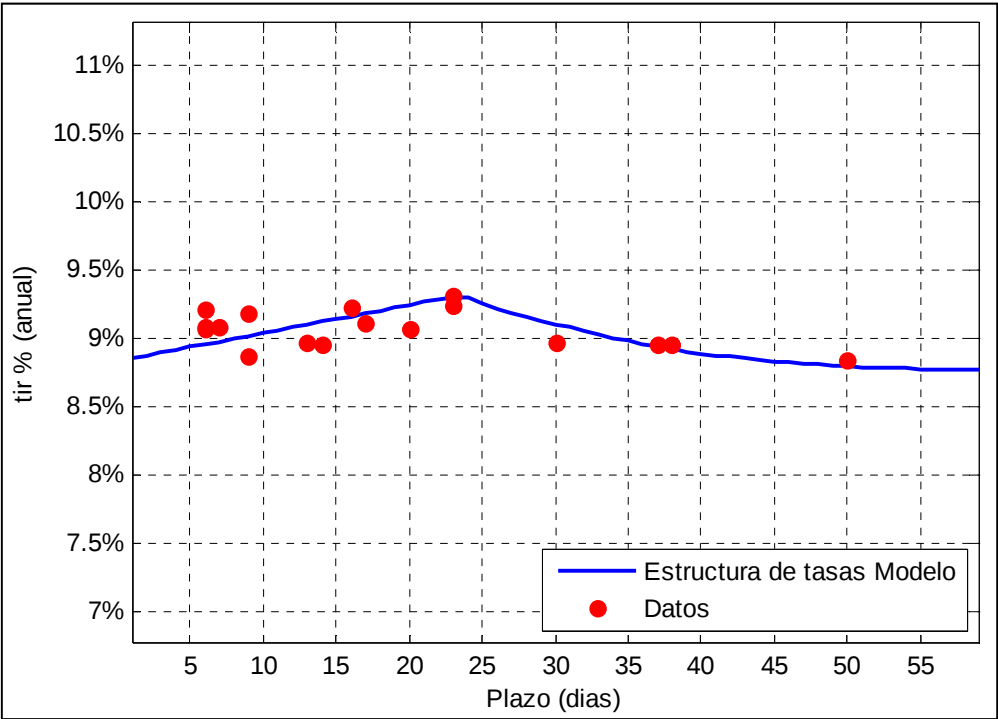


Figura 5-10: Día 17-07-2012, fuera de muestra

Se muestra a continuación el error cuadrático medio y error absoluto medio tanto dentro de la muestra como fuera de la muestra para el modelo presentado en esta tesis y para el *benchmark* utilizado (Vasicek 2F).

Tabla 5.3: Medidas de ajuste precios observados dentro y fuera de muestra

	Modelo		Vasicek 2F	
	Dentro de muestra	Fuera de muestra	Dentro de muestra	Fuera de muestra
ECM	0.2462%	0.2618%	0.2564%	0.2766%
EAM	0.1628%	0.1815%	0.1646%	0.1887%

Se puede observar que el ajuste logrado por el modelo fuera de muestra, es consistente con los valores obtenidos dentro de muestra. Al comparar los resultados obtenidos por el modelo a través de ambas muestras, con los obtenidos por la curva Vasicek de dos factores utilizada como *benchmark*, podemos denotar que el modelo aquí presentado se desempeña de mejor manera que su contraparte en cada una de ellas. Producto de esto, existe evidencia que nos indica que el modelo presentado en esta tesis, representa una alternativa válida frente a un modelo Vasicek de dos factores, como metodología para la obtención de la estructura de tasas de interés reales en el corto plazo. Además, presenta la ventaja adicional que entrega información referente a las expectativas que el mercado tiene acerca de la inflación futura.

5.5 Estructura de tasas: comparación Modelo v/s Vasicek 2F

Con la finalidad de analizar las propiedades y particularidades de la estructura de tasas obtenidas a partir del modelo presentado en esta tesis, se procede a comparar estas estructuras con las obtenidas al implementar un modelo Vasicek de dos factores como ya fue mencionado previamente.

A continuación se presentan algunas estructuras de tasas diarias obtenidas al utilizar ambas metodologías.

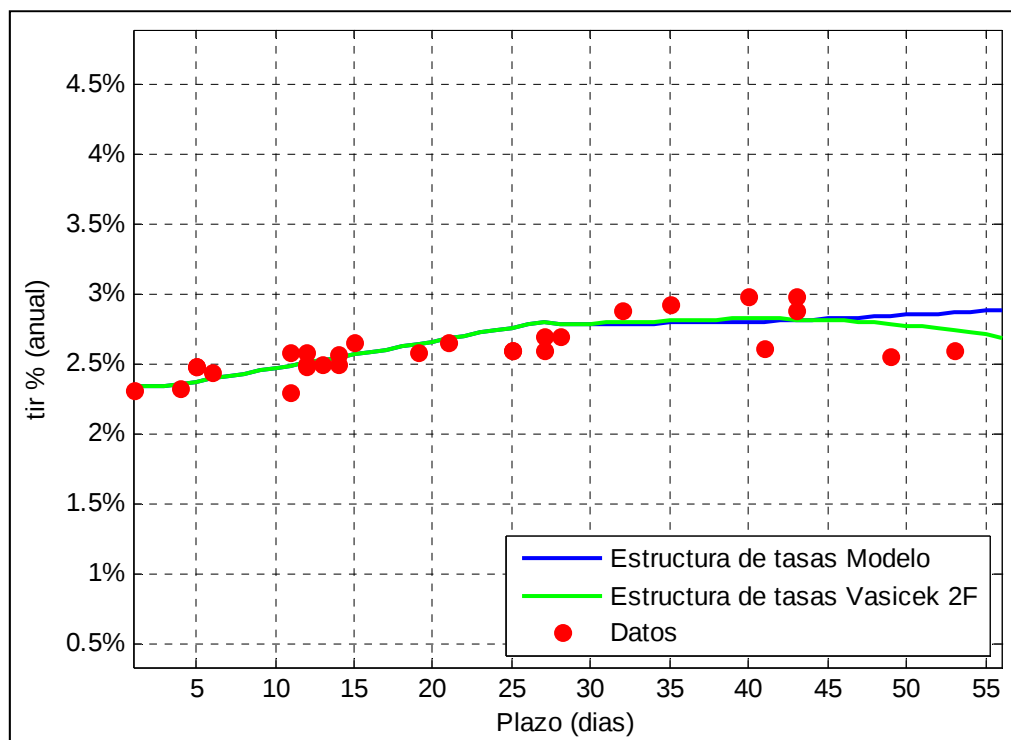


Figura 5-11: Día 13-01-2011, comparación Modelo v/s Vasicek 2F

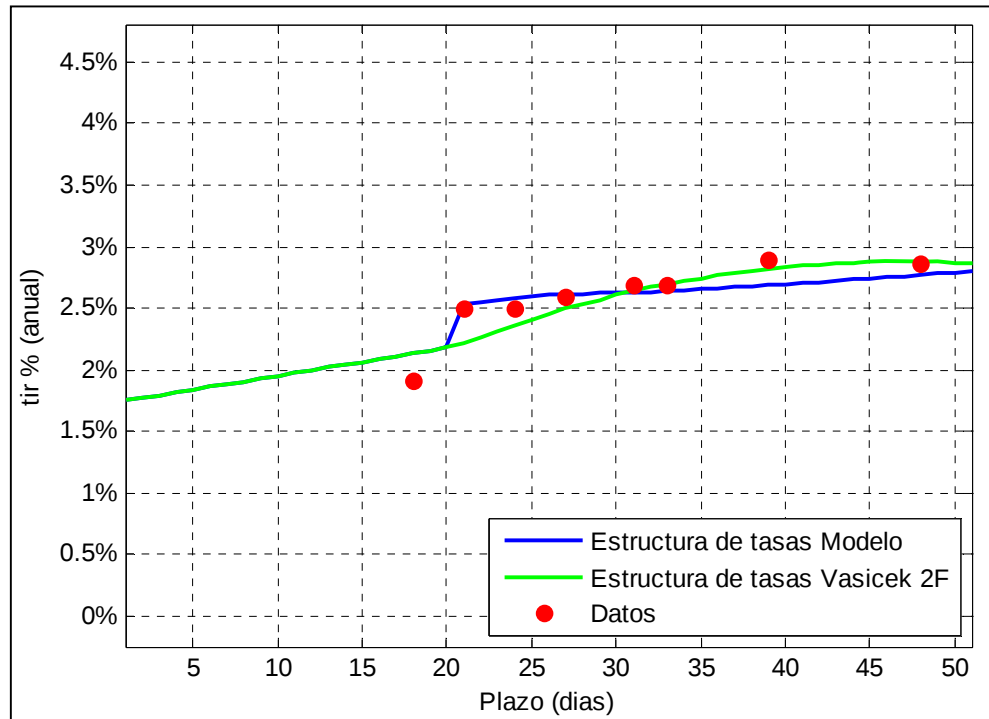


Figura 5-12: Día 20-05-2011, comparación Modelo v/s Vasicek 2F

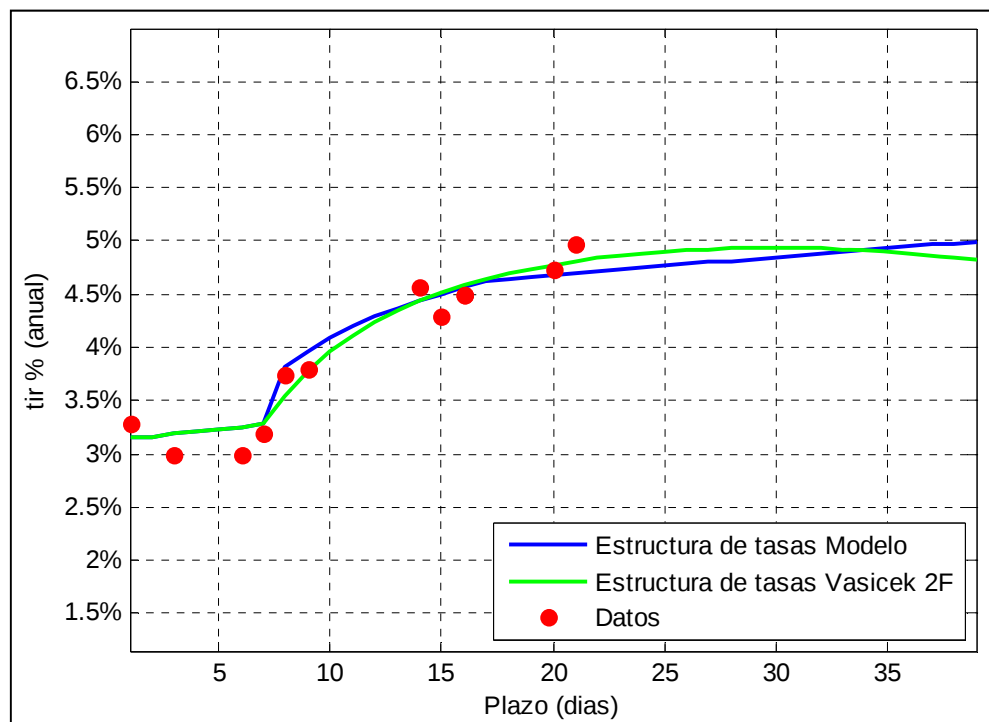


Figura 5-13: Día 02-08-2011, comparación Modelo v/s Vasicek 2F

Al observar las estructuras de tasas generadas por ambas metodologías, se pueden evidenciar ciertas diferencias, principalmente en el extremo final de la curva. Estas diferencias se acrecientan en aquellos días en los que existe un número reducido de observaciones. Esto último se puede observar de mejor manera en las siguientes dos figuras, donde se reportan la estructura de tasa para dos días consecutivos.

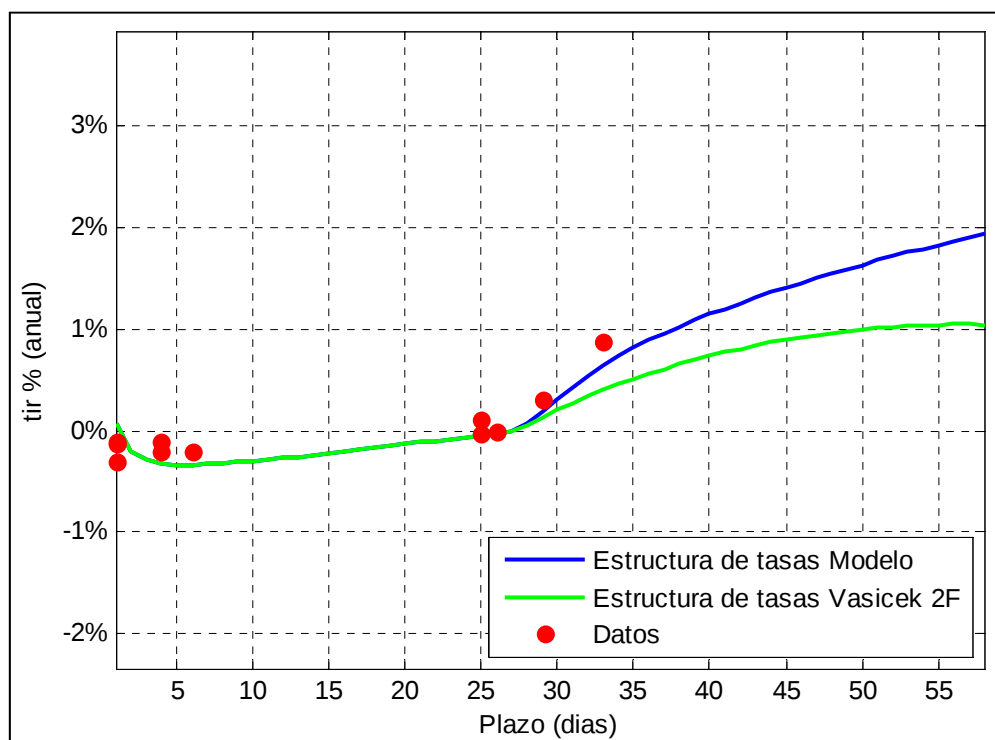


Figura 5-14: Día 13-10-2011, comparación Modelo v/s Vasicek 2F

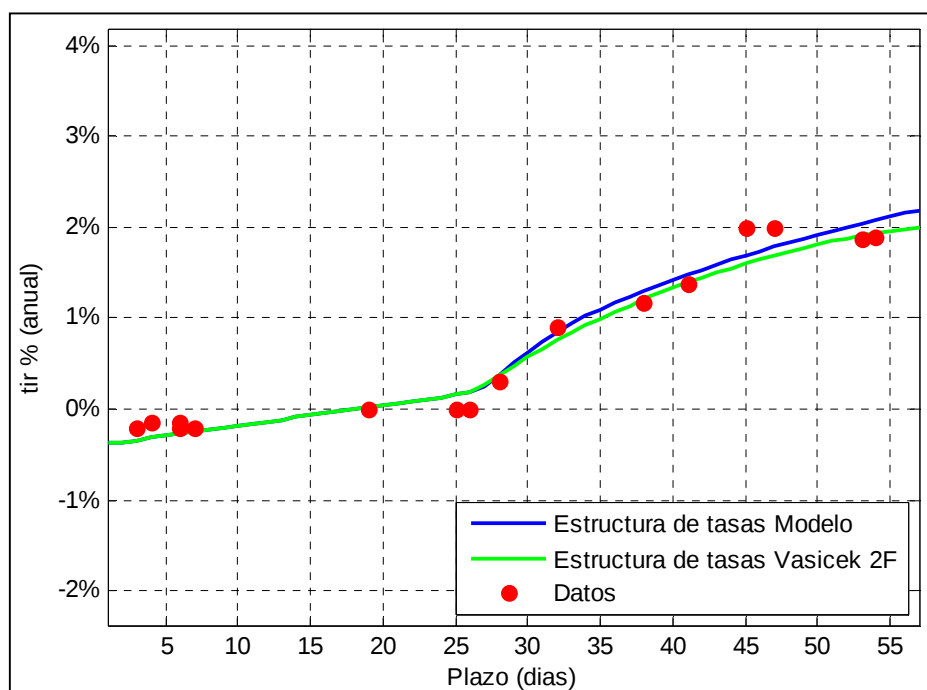


Figura 5-15: Día 14-10-2011, comparación Modelo v/s Vasicek 2F

A partir de las estructuras de tasas generadas en estos dos días consecutivos, se puede denotar cierta evidencia que apoya la idea que, en ausencia de observaciones, la estructura de tasas generada por el modelo es más consistente con la evolución temporal de las tasas reales asociadas a depósitos a plazo bancarios. En la Figura 5-14, el plazo máximo observado en las transacciones es de 33 días, provocando que la tasa generada por el modelo para un plazo de 58 días sea alrededor de un 2% y para la curva Vasicek 2F sea de alrededor de un 1%, representando una diferencia importante. Para el día siguiente en la Figura 5-15 podemos ver un mayor número de observaciones, alcanzándose un plazo máximo observado en las transacciones de 54 días. Esto genera que ambas curvas sean muy similares en toda su extensión, obteniéndose que ambas presenten una tasa de alrededor de un 2% en el plazo máximo de 57 días. La existencia de un mayor número de observaciones para el día 14, nos permite inferir que la curva generada por el modelo presentado en esta tesis para el día previo era consistente y se ajustaría de mejor manera a las tasas a distintos plazos que se pudieron haber transado hipotéticamente en ese día.

De modo de solventar la idea antes presentada, se procedió a calcular: sesgo, error cuadrático medio y error absoluto medio que presenta la curva en relación a las observaciones existentes en el día siguiente. Esto de forma de obtener un indicador más cuantitativo de los conceptos antes presentados. Los resultados son presentados en el siguiente cuadro.

Tabla 5.4 Medidas de ajuste de precios observados dentro de muestra: curva versus precios del día siguiente

	Modelo	Vasicek 2F
Sesgo	0.0481%	0.0514%
ECM	0.4389%	0.4617%
EAM	0.3039%	0.3150%

En la Tabla 5.4, es posible ver que si nos enfocamos al ECM, el modelo presentado en esta tesis se desempeña en alrededor de un 5% mejor que la curva Vasicek de dos factores. Ante esto es posible afirmar que existe cierta evidencia que apoya la idea, de que el uso de la metodología presentada en esta tesis tiene la particularidad de generar estructuras de tasas consistentes con la evolución temporal de las observaciones. Es necesario mencionar, que el beneficio del uso de esta metodología en relación al uso de un modelo Vasicek de dos factores se debiera ver incrementado ante un bajo número de observaciones para determinados plazos.

5.6 Ajuste a la estructura de volatilidad de los datos

La estructura de volatilidad corresponde a la curva que relaciona la volatilidad de las distintas observaciones para plazos específicos. En un modelo dinámico, un buen ajuste de esta estructura es fundamental para lograr una correcta representación de las observaciones. Además, el ajuste logrado es una medida de la consistencia temporal que posee la curva con las observaciones, lográndose una mayor credibilidad de la curva ante ausencia de observaciones.

Para calcular la volatilidad de los datos se utilizó la metodología propuesta por Cortázar et al. (2007), dada la existencia de paneles incompletos. Esta metodología consiste en agregar las transacciones en intervalos de plazo, calculando el promedio diario de cada intervalo y luego se obtiene la desviación estándar de las diferencias de observaciones diarias para cada uno de estos intervalos. Además se calcula el plazo promedio de las observaciones dentro del intervalo, generando la estructura como si fuera la volatilidad de un bono de descuento con madurez igual a esta duración promedio. Dada la naturaleza cercana a determinística del período conocido, se calculó la volatilidad de los datos pertenecientes a la parte desconocida de la curva, descontando el plazo de las observaciones por la cantidad de días en que la inflación es conocida. De este modo, se agrupan los datos de acuerdo a la cantidad de días para los que la inflación es desconocida.

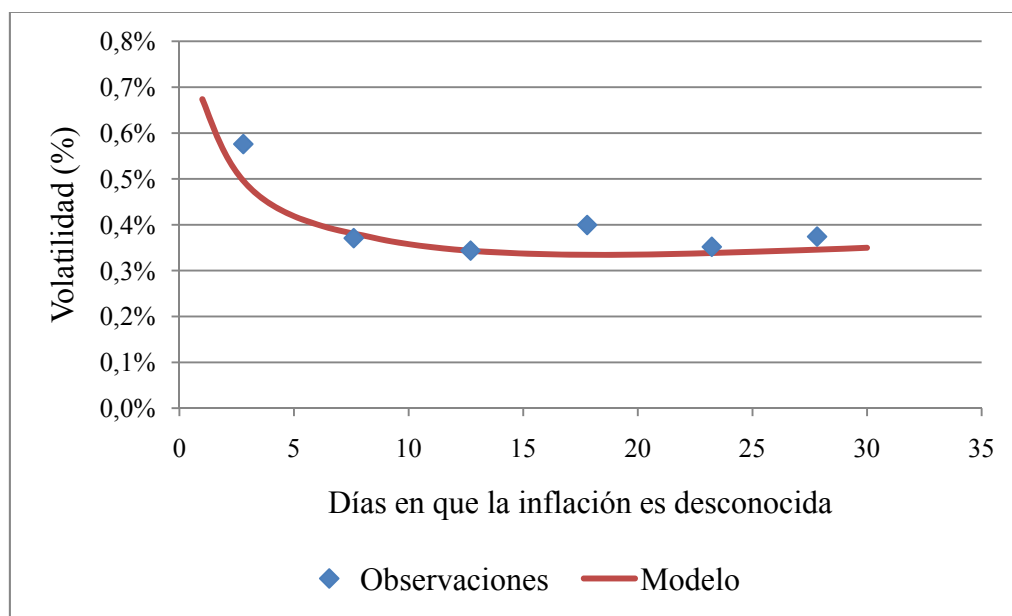


Figura 5-16: Volatilidad empírica modelo y observaciones

La Figura 5-16, presenta los resultados obtenidos para el análisis de la volatilidad para las observaciones y para la curva. Se puede notar que el modelo presenta un buen ajuste a la volatilidad de las observaciones, por lo que es posible validar las estimaciones

del modelo en ausencia de observaciones, siendo consistente con la evolución temporal de las tasas.

5.7 Expectativas de inflación e inflaciones implícitas

En el ámbito financiero comúnmente se utiliza el diferencial de tasas entre instrumentos nominales e instrumentos indexados a la inflación, como una aproximación de las expectativas de inflación que posee el mercado. Sin embargo, esta aproximación no aborda formalmente el problema de la existencia de premios por riesgo que introduzcan sesgos a este diferencial de tasas. Tal y como ya fue mencionado, una de las particularidades del modelo aquí presentado, es la obtención de estimaciones de estos premios de forma simultánea con la calibración de éste.

Recordando que el modelo ajusta el diferencial entre tasas nominales y reales de la siguiente forma:

$$\overline{\pi^e} = r_{nominal} - r_{real} - LIQ - INF \quad (44)$$

donde:

- $r_{nominal}$: la tasa nominal.
- r_{real} : la tasa real.
- LIQ: el premio por liquidez exigido por los agentes.
- INF: el premio por inflación exigido por los agentes.

Dado lo anterior, el modelo estima los premios por riesgo que explicarían las diferencias existentes entre las expectativas de inflación estimadas y la inflación implícita existente en la curva real generada por el modelo. En el siguiente gráfico se presentan las expectativas de inflación y la inflación implícita en la curva.

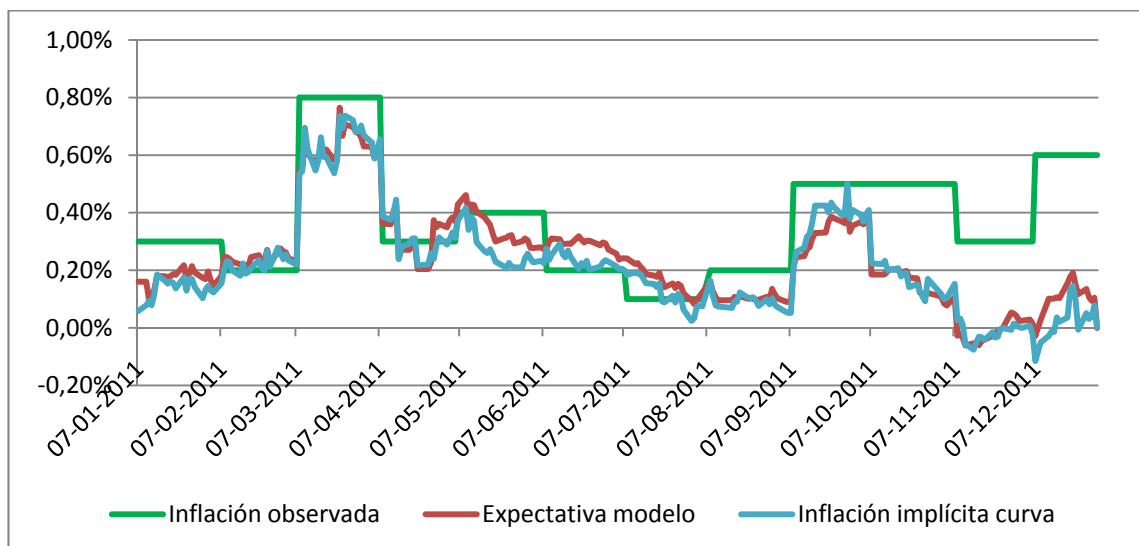


Figura 5-17: Expectativa de inflación e inflación implícita en la curva, período dentro de muestra.

Se puede observar que para el período analizado (año 2011), las desviaciones existentes entre la expectativa de inflación y la inflación implícita del modelo no son muy importantes. La razón de esto, es que para este período de tiempo no se han podido determinar premios por riesgo demasiado significativos, sin embargo es posible que en otros períodos históricos del mercado, estos premios sean más significativos por lo que su medición es importante.

Con la finalidad de poder comparar el desempeño del modelo frente a otras alternativas existentes en el mercado que buscan estimar la expectativa de inflación, se analiza también el desempeño de:

- Inflaciones implícitas, forward de inflación: consiste en una compra o venta a plazo de un monto en Unidades de Fomento, a un precio determinado²⁶. Al vencimiento del contrato, se realiza una compensación entre el valor acordado y el valor real de la unidad de fomento dicho día. Dado el funcionamiento de este instrumento, es posible inferir la inflación implícita en los precios determinados

²⁶ Valor de la UF.

en cada uno de los contratos. Es necesario reconocer la posible la presencia de premios por riesgo en los precios a los cuales se realizan las transacciones, lo que introduce sesgos a la inflación implícita obtenida a partir de ellos.

- Expectativas de inflación, encuesta ABIF: la asociación de Bancos e Instituciones Financieras realiza periódicamente proyecciones del desempeño económico. Estas proyecciones se realizan a través de encuestas a un determinado número de expertos que forman parte del mercado financiero, de este modo se obtiene la expectativa de inflación que posee el mercado.
- Inflación implícita en la curva de depósitos: esta metodología utiliza la información de las transacciones de depósitos en unidades de fomento y en Pesos para extraer la inflación implícita en ellos. Específicamente esta predicción consiste en la diferencia entre la tasa forward proveniente de la curva de depósitos en pesos la tasa forward proveniente de la curva de depósitos en unidades de fomento. Cada una de estas curvas es obtenida a partir de un modelo dinámico de no-arbitraje multifactorial Vasicek generalizado de tres factores. Esta diferencia es finalmente corregida por un *spread*, que tiene por finalidad capturar posibles premios por riesgo existentes entre las transacciones de depósitos en Pesos y en UF. Este *spread* es obtenido a partir de la diferencia entre las transacciones de depósitos en UF y la curva de depósitos en Pesos ajustada por inflación, para los plazos de inflación conocida²⁷.

5.7.1 Expectativas de inflación dentro de la muestra

La Figura 5-18 abajo, presenta las expectativas de inflación estimadas por el modelo para el año 2011. En la misma figura, se comparan estas estimaciones con: la

²⁷ Fuente. <http://www.riskamerica.com>

inflación implícita en la curva de depósitos, inflación implícita proveniente de los forward de inflación y la próxima inflación efectiva²⁸.

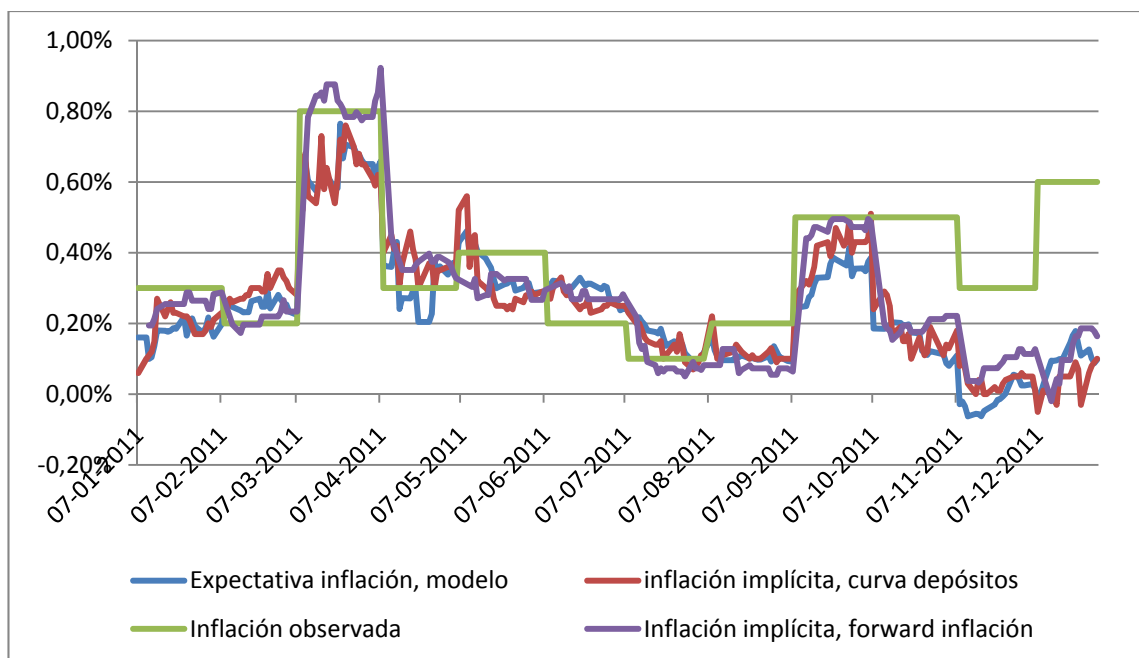


Figura 5-18: Expectativa de inflación del modelo v/s Inflaciones implícitas

Para que las expectativas de inflación fueran exactas, la curva azul (modelo) debería seguir absolutamente la curva verde (Próxima Inflación). Es necesario hacer especial referencia a lo ocurrido en el último trimestre del año 2011. Durante este período el mercado en su totalidad; ya sea a través de los forward de inflación, encuestas y expectativas de inflación contenidas en los depósitos, pronosticaban inflaciones muy inferiores a las efectivas. Incluso, producto de estos meses la inflación anual total fue de 4.4%, cifra 0.4 puntos porcentuales sobre el rango meta fijado por el Banco Central. De acuerdo al Instituto Nacional de Estadística esto se debió a un importante alza en el precio de los combustibles y electricidad.

²⁸ Los datos corresponden a la variación del IPC de un período al siguiente.

En la Figura 5-19 se muestra el desempeño del modelo para el mismo período de tiempo que la figura anterior, pero se contrasta contra el desempeño de la encuesta ABIF.

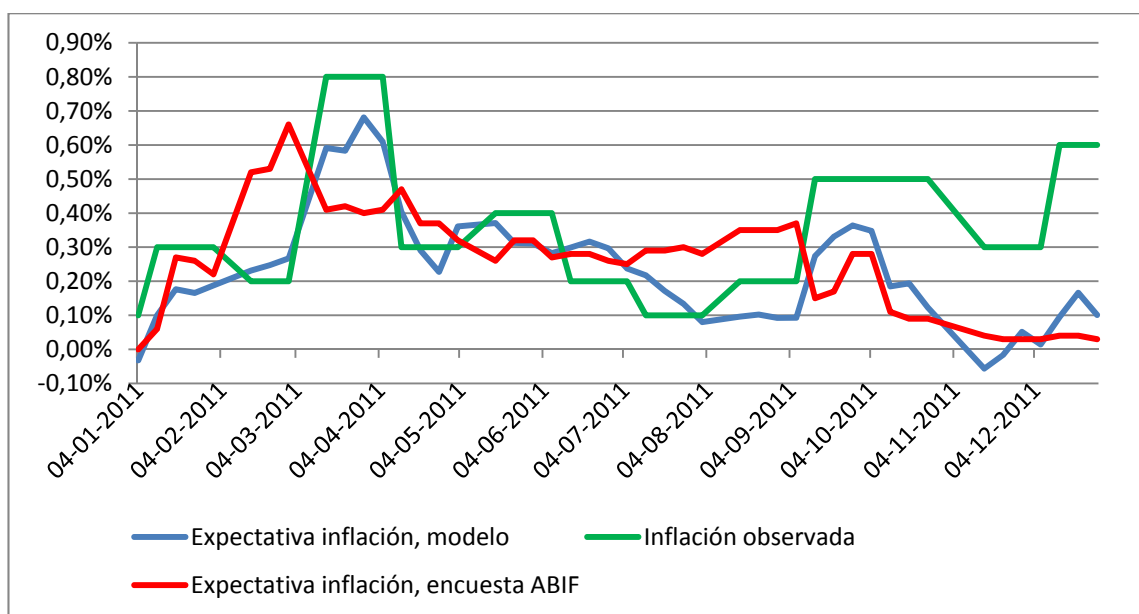


Figura 5-19: Expectativa de Inflación del modelo v/s ABIF

Como es posible notar a simple vista en la figura anterior, el desempeño predictivo de la encuesta ABIF no es el mejor, justificando la creencia de que los agentes ponen en uso toda la información que manejan cuando su dinero depende de su correcta apreciación del desarrollo futuro de la economía.

Para tener un análisis más cuantitativo del desempeño predictivo de indicadores y metodologías antes mencionados, en la Tabla 5.5 se presenta el error absoluto medio (EAM) y el error cuadrático medio (ECM) en relación a la próxima inflación

Tabla 5.5: Medidas de ajuste con respecto a la próxima inflación observada

	Modelo	Inflación Implícita en los depósitos	Forward inflación	ABIF
ECM	0.168963%	0.1815%	0.1538%	0.2584%
EAM	0.106169%	0.1420%	0.1053%	0.2188%

Como es posible notar, el modelo se desempeña sustancialmente mejor que las encuestas a expertos llevadas a cabo por la Asociación de Bancos e Instituciones financieras, pero presenta un desempeño levemente superior al de las inflaciones implícitas obtenidas de la curva de depósitos a plazo y levemente inferior a la inflación implícita en las transacciones de forward inflación. Estos resultados obtenidos, establecen al modelo aquí presentado como una herramienta válida para medir las expectativas del mercado y como una alternativa válida de control y regulación sobre los forward de inflación. Esto es algo importante, debido a que los resultados obtenidos a partir de los forward de inflación provienen de *quotes*, siendo posible presentarse desviaciones importantes en sus valores que escapan al mercado. Como ejemplo a lo anterior se puede hacer referencia a que en los años 2008 y 2009 en el que el mercado de forward se encontraba poco desarrollo, es posible encontrar desviaciones importantes y consistentemente alejadas de la inflación observada. El uso de esta metodología puede ayudar a controlar este tipo de problemas, al encontrarse desligada en cierta medida de este mercado de forward y al abarcar las expectativas de un gran número de agentes.

6 CONCLUSIONES

Los eventos inesperados son algo común tanto en la naturaleza como en los mercados financieros. La ocurrencia de estos eventos inesperados, altera y determina el comportamiento de la estructura de tasas, lo que provoca la observación de movimientos discretos en el nivel de tasas. La literatura financiera que se ha enfocado en estudiar el origen de estos saltos y su importancia, encuentra evidencia de que estos están normalmente vinculados a la llegada de información en relación al desempeño futuro de la economía. Además, estudios como los realizados por Johannes (2004) y Das (2002) encuentran que la inclusión de saltos en los modelos para la estructura de tasas de interés, incrementa su capacidad de replicar la estructura de tasas observada.

Recientemente la literatura ha modelado estos cambios discretos principalmente de tres formas: introduciendo cambios en los parámetros que dominan los procesos estocásticos, utilizando procesos de saltos estocásticos en la modelación de las variables de estado y al incluir algún tipo de salto discreto como por ejemplo saltos tipo Poisson.

El modelo que se presenta en este trabajo, corresponde a un modelo de no arbitraje dinámico. En él se asume que el precio de un bono real reacciona ante cambios en la expectativa de inflación. Se exige que uno de los factores del modelo corresponda a esta expectativa de inflación, de modo de que ésta cambia todos los días y presenta un cambio discreto cuando se hace conocida una nueva inflación.

El modelo es aplicado al mercado de los depósitos en Chile y estimado a través del filtro de Kalman, utilizando un panel incompleto de datos. Los resultados de esta estimación, muestran que el modelo se desempeña de forma similar que un modelo Vasicek equivalente, superándolo levemente en capacidad de ajuste. También existe evidencia que apoya la noción de que el modelo es capaz de generar estructuras de tasas más consistentes con las observadas en el mercado, en relación a un modelo Vasicek de dos factores. Además, el modelo permite extraer la expectativa de inflación que posee el mercado para el próximo período, la cual puede ser estimada día a día, pudiéndose observar el efecto que tiene determinada información relevante sobre ella.

Para futuros trabajos se deja planteada la posibilidad de extender el modelo para más de un período de inflación desconocida. Esto, ya sea a través de una implementación recursiva del modelo o por medio del supuesto de una forma funcional que relacione la expectativa de inflación a través de diferentes períodos.

BIBLIOGRAFÍA

Ang, A. y M. Piazzesi, (2003). A No-Arbitrage Vector Autoregression of Term Structure Dynamics with Macroeconomic and Latent Variables. *Journal of Monetary Economics*, 50, 745-787.

Ang, A., G. Bekaert and M. Wei, (2008). The Term Structure of Real Rates and Inflation Expectations. *Journal of Finance*, 63, 797-849.

Bernanke, B., (2004). What Policymakers Can Learn from Asset Prices. Speech Before the Investment Analyst Society of Chicago.

Bjork, T., (1998). Arbitrage theory in continuous time. Oxford University Press, Great Clarendon Street, Oxford, primera edición.

Chernov, M. y Phillippe, M., 2008. The term structure of inflation expectations. Manuscript, London Business School.

Christensen, J., Lopez, J., Rudebusch, G., (2010). Inflation expectations and risk premiums in an arbitrage-free model of nominal and real bond yields. *Journal of Money, Credit and Banking*, 42, pp.143-178.

Chun, Albert Lee, (2005). Expectations, bond yields and monetary policy. Working paper, Stanford University.

Cortázar, G., Schwartz, E., S., Naranjo, L., (2007). Term structure estimation in markets with infrequent trading. *International Journal of Finance and Economics*.

Cortázar, G., Valdés, G., (2012). Fusionando la teoría de expectativas con la de no arbitraje en la estructura de tasas de interés. Working Paper.

Cortázar, G., Schwartz, E., Tapia, C., (2012). Modelación de spreads en mercados emergentes: estimación multi-familia usando filtro de kalman. *Emerging Markets Finance and Trade*, (Forthcoming).

Cox, J., J. Ingersoll, and Ross, S., (1985a). An intertemporal general equilibrium model of asset prices. *Econometrica* 53(2): 363-384.

Cox, J., J. Ingersoll, and Ross, S., (1985b). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica* 53(2): 385-407.

Das, S., 2002. The surprise element: jumps in interest rates. *Journal of Econometrics*, 106, 27-65.

Deacon, M. y A. Derry, (1994). Deriving estimates of inflation expectations from the prices of UK government bonds. Bank of England Working Paper.

Evans, Martin D. D., (1998). Real rates, expected inflation, and inflation risk premia. *Journal of Finance* 53, 187–218.

Gregory R. Duffee, (1998). The relation between treasury yields and corporate bond yield spreads. *Journal of Finance*.

Grishchenko, Olesya V., Jing-zhi Huang, (2008). Inflation risk premium: evidence from the TIPS market. Pennsylvania State University.

Haubrich J, G. Pennacchi y P. Ritchken, (2011). Inflation expectations, real rates, and risk premia: evidence from inflation swaps. *Review of Financial Studies*, forthcoming.

Heath, D., Jarrow, R. y Morton, A. (1992). Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation. *Econometrica*, Vol. 60, N° 4, 77-105.

Heidari, M., Wu, L., (2009). Market anticipation of fed policy changes and the term structure of interest rates. *Review of Finance*.

Hordahl, P., Tristani, O., (2007). Inflation risk premia in the term structure of interest rates. Working Paper, Working Paper 734, European Central Bank.

Hull, J. y White, A. (1990). Pricing interest rate derivative securities. *Review of Financial Studies*, Vol. 3, N° 4, 573-592.

Jian, G., Yan, S., (2009). Linear-Quadratic term structure models – Toward the understanding of jumps in interest rate. *Journal of Banking and Finance*, 33(3), 473-485.

Johannes, M., (2004). The statistical and economic role of jumps in continuous-time interest rate models. *Journal of Finance*.

Joyce, M., Lildholdt P. y Sorensen S., (2010). Extracting inflation expectations and inflation risk premia from the term structure: a joint model of the UK nominal and real yield curves. *Journal of Banking and Finance*, 34, pp.281-94.

- Longstaff & Schwartz, (1992). Interest rate volatility and the term structure: a two-factor general equilibrium model. *Journal of Finance*.
- Nelson, C.R. y Siegel, A.F. (1987) Parsimonious modeling of yield curves. *Journal of Business*, Vol. 60, N° 4, 473-489.
- Pandher, G., (2007). Arbitrage-free valuation of interest rate securities under forward curves with stochastic speed and acceleration. *Journal of Economic Theory*.
- Pericoli, M., (2012). Expected inflation and inflation risk premium in the euro area and in the United States. Bank of Italy Temi di Discussione (Working Paper) No. 842.
- Piazzesi, M., (2005). Bond yields and the Federal Reserve. *Journal of Political Economy*.
- Pennacchi, George G., (1991). Identifying the dynamics of real interest rates and inflation: Evidence using survey data. *Review of Financial Studies* 4, 53–86.
- Risa, S., (2001). Nominal and inflation indexed yields: separating expected inflation and inflation risk premia. Columbia University, mimeo.
- Söderlind Paul, (2011). Inflation risk premia and survey evidence on macroeconomic uncertainty. *International Journal of Central Banking*, vol. 7(2), 113-133.
- Svensson, L.E.O. (1994). Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994, *Working Paper*, National Bureau of Economic Research.
- Vasicek, O.A. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, N° 2, 177-188.

ANEXOS

ANEXO A.

A.1 Función generadora de momentos de la distribución normal multivariada

$$I = \int e^{-\sum_i x_i \alpha_i} f(\bar{x}) dx$$

$$I = \int e^{-\bar{x}' \alpha} f(\bar{x}) dx$$

Como x distribuye normal,

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|\Omega|}} e^{-\frac{1}{2}(\bar{x}-\mu)'\Omega^{-1}(\bar{x}-\mu)}$$

Con

Ω Matriz varianza covarianza de la distribución

μ Vector de esperanzas de la distribución

Si nos fijamos en los exponentes de la integral:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(x-\mu)'\Omega^{-1}(x-\mu) - x'\alpha &= -\frac{1}{2}(x'\Omega^{-1}x - 2x'\Omega^{-1}\mu + \mu'\Omega^{-1}\mu + 2x'\alpha) \\ &= -\frac{1}{2}(x'\Omega^{-1}x - 2x'\Omega^{-1}(\mu - \Omega\alpha) + \mu'\Omega^{-1}\mu) \\ &= -\frac{1}{2}(x'\Omega^{-1}x - 2x'\Omega^{-1}(\mu - \Omega\alpha) + (\mu - \Omega\alpha)'\Omega^{-1}(\mu - \Omega\alpha)) - \dots \\ &\quad -\frac{1}{2}(\mu'\Omega^{-1}\mu - (\mu - \Omega\alpha)'\Omega^{-1}(\mu - \Omega\alpha)) \\ &= -\frac{1}{2}(x - (\mu - \Omega\alpha))'\Omega^{-1}(x - (\mu - \Omega\alpha)) - \frac{1}{2}(\mu'\Omega^{-1}\mu - (\mu - \Omega\alpha)'\Omega^{-1}(\mu - \Omega\alpha)) \end{aligned}$$

Como sólo la parte izquierda de la ecuación depende de la tasa, es la única que se integra. Además, corresponde a una distribución normal con una media modificada por la matriz covarianza, y por ende su integral es igual a 1. De esta forma:

$$I = e^{-\left(\mu' - \frac{1}{2}\alpha'\Omega\right)\alpha}$$

ANEXO B.

B.1 Solución modelo Cortázar-Valdés

La tasa esperada a un período sigue el siguiente proceso

$$df_1 = \sigma_f d\varpi_f$$

Y el spread variable en el tiempo:

$$ds = \sigma_s d\varpi_s$$

Luego el valor de un bono con vencimiento en T es obtenido bajo la medida neutral al riesgo:

$$B_T = E^Q(e^{-\int f_{wd}(t)dt}) = E^Q(e^{-r_0 t_0 - \tilde{r}_1(t_1 - t_0) - \dots - \tilde{r}_N(T - t_{N-1})}) = E^Q(e^{-r_0 t_0 - \tilde{r}' \Delta t})$$

Donde $\tilde{r}'$ corresponde al vector de tasas realizadas. Es de notar que, una vez que un salto se realiza, la tasa esperada de, por ejemplo, 3 períodos, pasa a ser la esperada a 2 períodos, por lo que sigue una dinámica distinta. De este modo, generalizando, la tasa esperada a "N" períodos queda determinada por:

$$f_N = \begin{cases} f_N^- + \sigma_1(1 + \gamma_N) d\varpi & T < t_0 \\ \vdots & \\ f_N^- + \sigma_1(1 + \gamma_1) d\varpi & t_{N-1} < T < t_N \\ f_N^- + \varepsilon & T = t_N \\ 0 & T > t_N \end{cases}$$

Donde σ_1 es la desviación estándar del cambio de expectativas sobre la tasa a un período.

De este modo, la expresión para la tasa realizada "i":

$$\tilde{r}_i = f_N^- + \int_0^{t_i} df + \varepsilon = f_N^- + \left\{ \sigma(1 + \gamma_N)\eta_1 + \sigma(1 + \gamma_{N-1})\eta_2 + \dots + \sigma(1 + \gamma_1)\eta_N \right\} + \varepsilon_i$$

$$\tilde{r}'\Delta t = f'\Delta t + \sum_i \eta_i \sigma(1 + \tilde{\gamma}_i)'\Delta t + \varepsilon'\Delta t$$

Con $N \leq 3$ y donde:

$$\eta_i \sim N(-\lambda\Delta t_i, \sigma^2\Delta t_i)$$

$$\varepsilon_i \sim N(-\lambda_C\sqrt{C_{ii}}, C_{ii}^2)$$

Donde $\tilde{\gamma}_i$ es el vector que contiene "i-1" ceros al principio y después siguen los términos asociados al primer gamma, al segundo y al tercero.

La solución a la esperanza se puede encontrar al utilizar los resultados en la función generadora de momentos, el resultado es:

$$B_T = e^{-\left(r_0 t_0 + sT + \left(f_1 \cdot \bar{1} + (f_1 - r_0)\tilde{\gamma}\right)\Delta t\right) + L'\Delta t + \frac{1}{2}\Delta t' C \Delta t + \frac{1}{2}W + R}$$

$$L = \begin{bmatrix} \lambda_1^C \sqrt{C_{11}} \\ \vdots \\ \lambda_N^C \sqrt{C_{NN}} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{N,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1,N} & \cdots & C_{NN} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} W &= \sum_{i=0}^N \Delta t_i \left(\sum_{j,k < i} \Delta t_{i-j} \Delta t_{i-k} \sigma_f^2 (1 + \gamma_j)(1 + \gamma_k) \right) + \frac{\sigma_s^2 T^3}{3} + \dots \\ &\quad \dots \sum_{i=0}^N \Delta t_i \left(\sum_{j < i} \Delta t_j (t_{i+1}^2 - t_i^2) \sigma_{fs} (1 + \gamma_j) \right) \\ R &= \sum_{i=0}^N \Delta t_i \left(\sum_{j=1..i} \Delta t_j \lambda_j \sigma_f (1 + \gamma_j) \right) + \frac{T^2 \lambda_s \sigma_s}{2} \end{aligned}$$

ANEXO C.

C.1 Modelo general para la tasa real y expectativas de inflación

El modelo de valorización y de obtención de expectativas de inflación presentado en esta tesis, corresponde a un modelo de no arbitraje dinámico. Éste utiliza la información proporcionada por la curva de depósitos nominal obtenida a partir de la metodología desarrollada por Cortázar y Valdés 2012; y la de las transacciones de depósitos reales.

El modelo considera el comportamiento discreto de la inflación y el cambio de ésta producto de la publicación del índice de precios sobre el cual se reajusta la unidad de fomento.

De esta forma, un depósito con un plazo a N períodos depende de la inflación esperada en cada uno de los períodos. Sea $\vec{e}$ el vector que contiene las expectativas de inflación a cada uno de los períodos. Este se modela de tal forma que las expectativas de inflación carezcan de *drift*, esto de tal forma de que se utilice toda la información disponible, siendo imposible anticiparlas. El proceso que sigue esta expectativa bajo la medida real es el presentado en la siguiente ecuación.

$$d\vec{e} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_N \end{bmatrix} d\vec{w}$$

Donde σ_i corresponde a la desviación del cambio en la expectativa de inflación a "i" períodos. De esta forma, el proceso de entrada de información para la expectativa de inflación depende de la cantidad de períodos que falten, por lo que al informarse la variación del IPC del mes previo, la expectativa a N períodos pasa a ser la expectativa a

N-1 períodos (siendo su varianza la de N-1 períodos). Esto se resume en la ecuación siguiente.

Sea t el momento en el tiempo analizado y $t_0, t_1, \dots, t_N$ los momentos en el tiempo en que ocurre el anuncio del IPC.

$$de_N = \begin{cases} \sigma_N d\varpi_N & t < t_0 \\ \sigma_{N-1} d\varpi_{N-1} & t_0 < t < t_1 \\ \vdots & \vdots \\ \sigma_1 d\varpi_1 & t_{N-1} < t < t_N \\ 0 & t > t_N \end{cases}$$

De esta forma, la expectativa de inflación se modela de tal forma de que esta cambie hasta el momento justo antes del anuncio del IPC, en el momento del anuncio ésta "salta" para convertirse en la realizada. Para luego no cambiar dado que ya no existen dudas con respecto a ella.

$$e_N(t_N) = e_N(t_N - dt) + \varepsilon_N$$

Donde los saltos (ε_N) correspondientes a la expectativa a N períodos, distribuyen normal.

Como ya fue mencionado en secciones anteriores, al momento de explicar la diferencia existente entre la tasa nominal proveniente de los depósitos en pesos y la tasa real proveniente de los depósitos en unidades de fomento, es necesario tener ciertas consideraciones. La primera corresponde a la diferencia de liquidez existente entre estos dos tipos de depósitos; lo que provoca la existencia de un premio por liquidez exigido por el mercado. La segunda corresponde a la existencia de un premio asociado a la variación de la inflación. Antes estas dos consideraciones, el modelo incluye la existencia de un premio por liquidez y un premio ante la variación de la inflación

variables en el tiempo. Por lo que se realiza el supuesto de que estos siguen los siguientes procesos bajo la medida real.

Para el premio asociado al diferencial de liquidez entre depósitos nominales y reales:

$$dliq = \sigma_{liq} d\varpi_{liq}$$

Para el premio asociado a la variabilidad de la inflación:

$$dinf = \sigma_{inf} d\varpi_{inf}$$

Por lo que cada uno de los premios para el día de mañana por ejemplo, sería el premio de hoy más un error browniano (carecen de *drift*).

Finalmente el depósito puede ser valorado al encontrar la esperanza de éste en la medida ajustada por riesgo. Es decir, el valor hoy de un depósito en unidades de fomento con vencimiento en T está dado por (el desarrollo se puede encontrar en la sección siguiente

$$B_T = \exp(-r_0 T + \pi_0 t_0 + e' \Delta t + L' \Delta t + \frac{1}{2} \Delta t' U \Delta t + \frac{1}{2} C + D)$$

Donde:

$$L = \begin{bmatrix} \lambda_1^U \sqrt{U_{11}} \\ \lambda_2^U \sqrt{U_{22}} \\ \vdots \\ \lambda_N^U \sqrt{U_{NN}} \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{21} & \cdots & U_{N,1} \\ U_{12} & U_{22} & \cdots & U_{N2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{1N} & U_{2N} & \cdots & U_{NN} \end{bmatrix}$$

$$C = \sum_{i=0}^N \Delta t_i \left(\sum_{j,k < i} \Delta t_j \Delta t_k \sigma_{jk} \right) + \sum_{i=0}^N \Delta t_i \left(\sum_{j < i} \Delta t_j (t_{i+1}^2 - t_i^2) \sigma_{j \inf} \right) + \frac{\sigma_{\inf}^2 (T^3 - t_0^3)}{3} + \frac{\sigma_{\text{liq}}^2 T^3}{3}$$

$$D = \sum_{i=0}^N \Delta t_i \left(\sum_{j=1..i} \Delta t_j {}^{-}\lambda_j \sigma_j \right) - \frac{T^2 \lambda_{\text{liq}} \sigma_{\text{liq}}}{2}$$

C.2 Solución modelo general

El valor de un bono real, lo podemos encontrar por medio del valor esperado de este bajo la medida ajustada por riesgo. Donde E^Q , corresponde a la esperanza bajo esta medida de probabilidad.

$$B_T = E^Q(e^{-\int f_{wd}(t)dt})$$

$$B_T = E^Q(e^{-r_0 T + \pi_0 t_0 + \tilde{\pi}_1(t_1 - t_0) + \tilde{\pi}_2(t_2 - t_1) + \dots + \tilde{\pi}_N(T - t_{N-1}) + \int_0^T liq(a) da + \int_{t_0}^T inf(a) da})$$

$$B_T = E^Q(e^{-r_0 T + \pi_0 t_0 + \tilde{\pi}' \Delta t + \int_0^T liq(a) da + \int_{t_0}^T inf(a) da})$$

Donde $\tilde{\pi}'$ corresponde al vector de inflaciones realizadas. Recordando el proceso para la expectativa de inflación y sea e^- el valor del día previo para cada caso. La expectativa a "N" períodos:

$$e_N = \begin{cases} e^- + \sigma_N d\varpi_N & t < t_0 \\ \vdots & \\ e^- + \sigma_1 d\varpi_1 & t_{N-1} < t < t_N \\ e^- + \varepsilon & t = t_N \\ 0 & t > t_N \end{cases}$$

Con:

$$\tilde{\pi}_i = e_i + \int_0^{t_i} de + \varepsilon = e_i + \sum_j \eta_j^i + \varepsilon_i$$

Bajo la medida ajustada por riesgo, tenemos que:

$$\eta_j^i \sim N(-\lambda_{i-j} \Delta t_j, \sigma_{i-j}^2 \Delta t_j)$$

$$\varepsilon_i \sim N(-\lambda_U \sqrt{U_{ii}}, U_{ii}^2)$$

Es necesario considerar la existencia de correlación entre cambios en las expectativas de inflación y cambios en el premio por riesgo asociado a la variabilidad de la inflación. Ante lo cual:

$$\tilde{\pi}' \Delta t + \int_{t_0}^T \inf(t) dt = e' \Delta t + \sum_i \eta_i' \Delta t + \int_{t_0}^T \inf(u) du + \varepsilon' \Delta t$$

$$e' \Delta t + \sum_i \eta_i' \Delta t + \int_{t_0}^T \inf(u) du + \varepsilon' \Delta t = e' \Delta t + \sum_i (\eta_i' \Delta t + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \inf(u) du) + \varepsilon' \Delta t$$

Luego, debemos analizar la distribución de $\eta_i' \Delta t + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \inf(u) du$, reacomodando

términos, obtenemos:

$$\eta_i' \Delta t + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \inf(u) du = \eta_i' \Delta t + \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\inf_0 + \int_0^u d \inf_{(a)}) du$$

$$\eta_i' \Delta t + \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\inf_0 + \int_0^u d \inf_{(a)}) du = \eta_i' \Delta t + \inf_0 (t_i - t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} u d \inf_{(u)}$$

Por lo que realmente nos interesa la distribución de $\eta_i' \Delta t + \int_{t_{i-1}}^{t_i} u d \inf_{(u)}$:

$$\eta_i' \Delta t + \int_{t_{i-1}}^{t_i} u d \inf(u) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[u d \inf(u) + \sum_j d\eta_i^j \Delta t_j \right]$$

$$\eta_i' \Delta t + \int_{t_{i-1}}^{t_i} u d \inf(u) \sim \dots$$

$$N \left(-\sum_j \lambda_j \Delta t_j \sigma_j^i, \dots \right. \\ \left. \sum_{j,k} \Delta t_j \Delta t_k \sigma_{j,k}^i + 2 \sum_j \Delta t_j \sigma_{j,\inf}^i \frac{(t_i^2 - t_{i-1}^2)}{2} + \sigma_{\inf}^2 \frac{(t_i^3 - t_{i-1}^3)}{3} \right)$$

Luego, utilizando la función generadora de momentos aplicada a variables que distribuyen normal, obtenemos:

$$B_T = \exp(-r_0 T + \pi_0 t_0 + e' \Delta t + L' \Delta t + \frac{1}{2} \Delta t' U \Delta t + \frac{1}{2} C + D)$$

con:

$$C = \sum_{i=0}^N \Delta t_i \left(\sum_{j,k < i} \Delta t_j \Delta t_k \sigma_{jk} \right) + \sum_{i=0}^N \Delta t_i \left(\sum_{j < i} \Delta t_j (t_{i+1}^2 - t_i^2) \sigma_{j,\inf} \right) + \frac{\sigma_{\inf}^2 (T^3 - t_0^3)}{3} + \frac{\sigma_{liq}^2 T^3}{3}$$

$$D = \sum_{i=0}^N \Delta t_i \left(\sum_{j=1..i} \Delta t_j - \lambda_j \sigma_j \right) - \frac{T^2 \lambda_{liq} \sigma_{liq}}{2}$$

C.3 Solución modelo estimado período conocido

El valor de un bono real dentro del período conocido, lo podemos encontrar por medio del valor esperado de este bajo la medida ajustada por riesgo. Donde E^Q , corresponde a la esperanza bajo esta medida de probabilidad.

$$B_T = E^Q(e^{-\int f_{wd}(t)dt})$$

$$B_T = E^Q(e^{-r_0 T} e^{\pi_0 t_0 + \int pr_{liq}(t)dt}) \text{ para } T < t_0$$

Donde:

r_0 : Es la tasa nominal correspondiente al plazo T, proveniente de la curva nominal calibrada previamente²⁹.

π_0 : Es la inflación efectiva en el período conocido hasta t_0 .

pr_{liq} : Es la compensación por riesgo exigida por el mercado asociado al diferencial de liquidez entre los depósitos en pesos y en unidades de fomento.

Se realiza el supuesto que la compensación por riesgo asociado al diferencial de liquidez siguen el siguiente proceso:

$$dpr_{liq} = \sigma_{liq} d\varpi_{liq}$$

Finalmente la solución del valor esperado se obtiene mediante la función generadora de momentos:

²⁹ En base a la metodología Cortázar y Valdés (2012).

$$B_T = e^{-r_0 T + \pi_0 T + PR_{LIQ(0)} T + \frac{1}{2} \sigma_{liq}^2 \frac{T^3}{3} - \lambda_{liq} \sigma_{liq} \frac{T^2}{2}}$$

C.4 Solución modelo estimado período desconocido

El valor de un bono real, lo podemos encontrar por medio del valor esperado de este bajo la medida ajustada por riesgo. Donde E^Q , corresponde a la esperanza bajo esta medida de probabilidad.

$$B_T = E^Q(e^{-\int_0^T f_{wd}(t) dt})$$

$$B_T = E^Q(e^{-r_0 T + \pi_0 t_0 + \tilde{\pi}_1 (t_1 - t_0) + PR_{liq(t)} T + \int_0^T \inf_{(a)} da})$$

Donde:

r_0 : Es la tasa nominal proveniente de la curva nominal calibrada previamente³⁰.

π_0 : Es la inflación efectiva en el período conocido hasta t_0 .

$\tilde{\pi}_1$: Es la inflación efectiva, realizada en t_0 .

pr_{inf} : Es la compensación por riesgo exigida por el mercado, asociado a la variabilidad de la inflación, el cual se supone variable en el tiempo.

pr_{liq} : Es la compensación por riesgo exigida por el mercado asociado al diferencial de liquidez entre los depósitos en pesos y en unidades de fomento, conocida y estimada en una primera etapa.

Se hace el supuesto que la compensación por riesgo asociado a la variabilidad de la inflación sigue el siguiente proceso:

³⁰ Utilizando la metodología Cortázar y Valdés (2012).

$$dpr_{\text{inf}} = \sigma_{\text{inf}} d\varpi_{\text{inf}}$$

La inflación realizada ($\tilde{\pi}_1$) es igual a la compuesta de las innovaciones por lo que:

$$\tilde{\pi}_{\text{realizada}} = e_{\text{hoy}} + \int_{\text{hoy}}^{t_0} de_{(t)} + \varepsilon = e_{\text{hoy}} + \eta + \varepsilon$$

Considerar que η y ε distribuyen bajo la medida neutral al riesgo de acuerdo a:

$\eta \sim N(-t_0 \lambda_e \sigma, t_0 \sigma_e^2)$	Error asociado al cambio de expectativa debido a nueva información.
$\varepsilon \sim N(0, \sigma_U^2)$	El salto asociado a la realización de la UF.

Para $T \geq t_0$

$$B_T = E^Q \left(e^{-r_0 T + \pi_0 t_0 + (e + \eta + \varepsilon)(T - t_0) + PR_{\text{inf}(t)} T + \int_{t_0}^T pr_{\text{inf}(t)} dt} \right)$$

Es necesario considerar que la compensación por riesgo asociada a la variabilidad de la inflación, puede estar correlacionado con la llegada de información:

Por lo que nos interesa la distribución de $\eta(T - t_0) + \int_{t_0}^T pr_{\text{inf}(t)} dt$.

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^T pr_{(t)} dt &= \int_{t_0}^T \left(pr_0 + \int_0^u dpr \right) du = pr_0(T-t_0) + \int_{t_0}^T \int_0^u dpr du \\
&= pr_0(T-t_0) + \int_{t_0}^T u dpr(u) \\
\Rightarrow \eta(T-t_0) + \int_{t_0}^T u dpr(u) &\sim N(-t_0(T-t_0)\sigma_e\lambda_e, \\
&\quad t_0\sigma_e^2(T-t_0)^2 + \frac{\sigma_{\text{inf}}^2}{3}(T^3-t_0^3) + 2(T-t_0)\frac{(T^2-t_0^2)}{2}\sigma_{\text{inf},e})
\end{aligned}$$

Finalmente, la solución del valor esperado se obtiene a través de la función generadora de momentos:

$$B_T = e^{-r_0 T + \pi_0 t_0 + e(T-t_0) + PR_{liq(t)}T + PR_{inf(t)}(T-t_0) + \frac{1}{2}\sigma_u^2(T-t_0)^2 + \frac{1}{2}K + L}$$

Con:

$$K = t_0\sigma_e^2(T-t_0)^2 + \frac{\sigma_{\text{inf}}^2}{3}(T^3-t_0^3) + (T-t_0)(T^2-t_0^2)\sigma_{\text{inf},e}$$

$$L = -t_0(T-t_0)\sigma_e\lambda_e$$

ANEXO D.

D.1 Matriz de información de Fisher: Período conocido

A continuación se presenta la matriz de información de Fisher estimada para calcular la significancia de los parámetros para el modelo en el período conocido.

Tabla D.1: Matriz de información de Fisher: Período conocido

	σ_{liq}	λ_{liq}	σ_{varcon}
σ_{liq}	5.47E-06	-0.00041	-4.22E-08
λ_{liq}	-0.00041	0.17644	3.05E-06
σ_{varcon}	-4.22E-08	3.05E-06	2.76E-09

D.2 Matriz de información de Fisher: Período desconocido

A continuación se presenta la matriz de información de Fisher estimada para calcular la significancia de los parámetros para el modelo en el período conocido.

Tabla D.2: Matriz de información de Fisher: Período desconocido

	σ_u	σ_e	σ_{inf}	λ_e	$\rho_{e,inf}$	$\sigma_{var desc}$
σ_u	4.50E-08	-1.17E-07	8.58E-08	1.18E-05	-3.42E-06	-1.80E-10
σ_e	-1.17E-07	6.55E-05	-2.02E-05	1.20E-03	-1.50E-04	-8.02E-09
σ_{inf}	8.58E-08	-2.02E-05	3.11E-05	-4.10E-04	-9.40E-04	-1.17E-07
λ_e	1.18E-05	1.20E-03	-4.10E-04	1.01E-03	-9.09E-03	-2.82E-07
$\rho_{e,inf}$	-3.42E-06	-1.50E-04	-9.40E-04	-9.09E-03	8.27E-04	2.77E-06
$\sigma_{var desc}$	-1.80E-10	-8.02E-09	-1.17E-07	-2.82E-07	2.77E-06	5.26E-09

