



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE  
ESCUELA DE INGENIERIA

**FREE-FORM DISCONTINUITY LAYOUT  
OPTIMIZATION FOR GEOTECHNICAL  
AND GENERAL PLASTICITY  
APPLICATIONS**

**DIEGO CRISTOBAL SALINAS GONZALEZ**

Tesis para optar al grado de  
Magister en Ciencias de la Ingeniería

Profesor Supervisor:  
**TOMAS ZEGARD**

Santiago de Chile, Noviembre 2021

© MMXXI, Diego Cristóbal Salinas González



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE  
ESCUELA DE INGENIERIA

# **FREE-FORM DISCONTINUITY LAYOUT OPTIMIZATION FOR GEOTECHNICAL AND GENERAL PLASTICITY APPLICATIONS**

**DIEGO CRISTOBAL SALINAS GONZALEZ**

Tesis presentada a la Comisión integrada por los profesores:

**TOMAS ZEGARD LATRACH**

**ESTEBAN PATRICIO SÁEZ ROBERT**

**ADEILDO SOARES RAMOS JÚNIOR**

**MARCOS ERNESTO SEPÚLVEDA FERNÁNDEZ**

Para completar las exigencias del grado de  
Magister en Ciencias de la Ingeniería

Santiago de Chile, Noviembre 2021

© MMXXI, Diego Cristóbal Salinas González

*A mi familia por su amor  
y apoyo constante*

## **AGRADECIMIENTOS**

A la Pontificia Universidad Católica de Chile por haberme brindado la oportunidad de desarrollarme como ingeniero.

A mi profesor supervisor Tomás Zegard, quien dedicó mucho de su tiempo en entregarme su conocimiento no solo en esta investigación, sino que en toda mi formación como profesional. Así mismo, a todos los profesores del Departamento de Ingeniería Estructural y Geotécnica (DIEG), quienes también fueron fundamentales en mi aprendizaje y tuvieron que aguantar mis innumerables preguntas fuera del horario de clase.

A mis padres, hermanos y mi pareja Ángela por apoyarme constantemente durante toda mi carrera universitaria.

Finalmente, agradezco a mis amigos Gustavo y Javier por ayudarme, acompañarme y soportarme durante todos estos años.

## INDICE GENERAL

	Pág.
DEDICATORIA .....	ii
AGRADECIMIENTOS .....	iii
INDICE DE TABLAS .....	vi
INDICE DE FIGURAS .....	vii
RESUMEN .....	xi
ABSTRACT .....	xii
1. Introducción .....	1
2. El método de optimización por discontinuidades .....	6
2.1 El método de optimización por discontinuidades 2D .....	6
2.1.1 Cinemática .....	6
2.1.2 Regla de flujo plástico .....	9
2.1.3 Condición de falla .....	9
2.1.3 Modelo clásico de optimización por discontinuidades .....	11
2.2 El método de optimización por discontinuidades 3D .....	12
2.2.1 Cinemática .....	13
2.2.2 Regla de flujo plástico .....	15
2.2.3 Condición de falla .....	16
2.2.3 Modelo clásico del método de optimización por discontinuidades .....	18
2.3 Cálculo del factor de seguridad con optimización por discontinuidades .....	19
2.3.1 Modelo modificado de optimización por discontinuidades 2D .....	20
2.3.2 Modelo modificado de optimización por discontinuidades 3D .....	21
2.3.3 Búsqueda del factor de seguridad crítico .....	22

3.	Generación de discontinuidades .....	25
3.1	Generación de discontinuidades 2D .....	25
3.2	Generación de discontinuidades 3D .....	30
4.	Cálculo de presión de poros y peso propio .....	39
4.1	Cálculo de presión de poros .....	40
4.2	Cálculo de peso propio .....	42
5.	Resultados .....	46
5.1	Análisis y verificación 2D .....	46
5.1.1	Caso de estudio 1: Capacidad de soporte .....	46
5.1.1	Caso de estudio 2: Talud de múltiples capas .....	48
5.1.1	Caso de estudio 3: Presa de suelo .....	50
5.2	Estabilidad, convergencia y escalabilidad 2D .....	53
5.3	Análisis y verificación 3D .....	56
5.1.1	Caso de estudio 1: Capacidad de soporte .....	56
5.1.1	Caso de estudio 2: Talud de múltiples capas .....	59
5.1.1	Caso de estudio 3 : Presa de suelo .....	61
5.4	Estabilidad, convergencia y escalabilidad 3D .....	64
6.	Conclusiones .....	68
	<b>BIBLIOGRAFIA .....</b>	<b>71</b>

## INDICE DE TABLAS

	Pág.
Tabla 5.1: Factores de seguridad obtenidos para el problema de capacidad de soporte de Prandtl .....	47
Tabla 5.2: Propiedades del suelo del problema de estabilidad de talud de múltiples capas de Giam y Donald .....	48
Tabla 5.3: Factores de seguridad obtenidos para el problema de estabilidad de talud de múltiples capas de Giam y Donald .....	50
Tabla 5.4: Propiedades del suelo del problema de presa de suelo de Duncan y Wright ....	51
Tabla 5.5: Factores de seguridad obtenidos para el problema de presa de suelo de Duncan y Wright .....	52
Tabla 5.6: Factores de seguridad obtenidos para el problema de capacidad de soporte de Prandtl en tres dimensiones .....	59
Tabla 5.7: Factores de seguridad obtenidos para el problema de estabilidad de talud de múltiples capas de Giam y Donald en tres dimensiones .....	61
Tabla 5.8: Factores de seguridad obtenidos para el problema de presa de suelo de Duncan y Wright en tres dimensiones .....	63

## INDICE DE FIGURAS

Pág.

Figura 1.1: Ejemplo de aplicación del método DLO, incluyendo múltiples capas de suelo y flujo de agua .....	2
Figura 1.2: Discontinuidades que cruzan dos capas de suelo .....	3
Figura 2.1: Cosenos directores $\alpha_i$ y $\beta_i$ para un segmento cualquiera AB .....	7
Figura 2.2: Compatibilidad cinemática de las discontinuidades para un nodo cualquiera P .....	8
Figura 2.3: Cosenos directores $n_i$ , $s_i$ y $t_i$ para un triángulo cualquiera ABC .....	14
Figura 2.4: Compatibilidad cinemática tridimensional de las discontinuidades para un nodo cualquiera P .....	14
Figura 2.5: Valor de la función objetivo en función del factor de seguridad para un problema dado .....	23
Figura 3.1: Esquema de enriquecimiento de macroelement (ME) para un elemento cuadrilátero .....	26
Figura 3.2: Discontinuidades que contienen el nodo 3 en un elemento enriquecido con nivel ME 2 .....	26
Figura 3.3: Ejemplo de conectividad de borde .....	28
Figura 3.4: Ilustración del algoritmo de generación de discontinuidades que combina ideas de: macroelement, generación basada en operaciones de grafos y estampado de patrones .....	29

Figura 3.5: Esquema de enriquecimiento de macroelement (ME) para un elemento hexaedro .....	31
Figura 3.6: Nodos adicionales insertados con el fin de generar discontinuidades sin solapamiento .....	32
Figura 3.7: Esquema de generación de segmentos para un elemento hexaedro .....	33
Figura 3.8: Discontinuidades generadas en las caras, desde los segmentos de las caras y desde los segmentos de las aristas para un nivel de ME 2 .....	34
Figura 3.9: Ejemplo de falla esperada para una caja de arena apoyada en tres de sus caras y cargada en su cara superior .....	35
Figura 3.10: Falla alternativa para distintos niveles de ME con los algoritmos de generación 2D y 3D .....	36
Figura 3.11: Fallas obtenidas para el ejemplo de la Figura 3.9 al usar elementos hexaedros, cuñas y tetraedros con nivel 1 de ME .....	38
Figura 4.1: Ejemplo utilizado para el cálculo de presión de poros y peso propio .....	39
Figura 4.2: Malla utilizada para el cálculo de presión de poros y peso propio .....	40
Figura 4.3: Presión de poros en $kN/m^2$ para el problema mostrado en la Figura 4.1 .....	42
Figura 4.4: Ejemplos de trenes de carga utilizados para el cálculo del peso nodal .....	43
Figura 4.5: Peso propio en $kN/m^2$ para ejemplo mostrado en la Figura 4.1 .....	44
Figura 5.1: Problema de capacidad de soporte de Prandtl .....	46
Figura 5.2: Malla base utilizada para el análisis del problema de capacidad de soporte ...	47
Figura 5.3: Superficie de falla obtenida con el método propuesto con nivel 6 de ME para el problema de capacidad de soporte .....	47

Figura 5.4: Problema de estabilidad de talud de múltiples capas de Giam y Donald .....	48
Figura 5.5: Malla base utilizada para el problema de estabilidad del talud de múltiples capas .....	49
Figura 5.6: Superficie de falla obtenida con el método propuesto con nivel 6 de ME para el problema de estabilidad de talud de múltiples capas .....	49
Figura 5.7: Problema de presa de suelo de Duncan y Wright .....	50
Figura 5.8: Malla base utilizada para el problema de presa de suelo .....	51
Figura 5.9: Superficie de falla obtenida con el método propuesto con nivel 6 de ME para el problema de presa de suelo .....	51
Figura 5.10: Falla superficial producida por el refinado de malla .....	52
Figura 5.11: Tiempo de cómputo para distintas mallas base y niveles de ME para el problema de Prandtl calculando la superficie de falla para un FS fijo .....	54
Figura 5.12: Tiempo de cómputo para distintas mallas base y niveles de ME para el problema de Prandtl determinando FS crítico y su superficie asociada .....	54
Figura 5.13: Convergencia del factor de seguridad calculado para distintas mallas base y niveles de ME .....	55
Figura 5.14: Estimación del factor de seguridad versus el tiempo de cómputo para los casos donde: a) la malla base es refinada progresivamente; b) el nivel ME aumenta .....	56
Figura 5.15: Malla base de 243 elementos utilizada para el análisis del problema de capacidad de soporte en tres dimensiones .....	57
Figura 5.16: Superficie de falla obtenida con el método propuesto con nivel 0 de ME para la malla mostrada en la Figura 5.15 .....	58

Figura 5.17: Malla base de 2268 elementos utilizada para el problema de estabilidad de talud de múltiples capas en tres dimensiones .....	60
Figura 5.18: Superficie de falla obtenida con el método propuesto con nivel 0 de ME para la malla mostrada en la Figura 5.17 .....	60
Figura 5.19: Malla base de 192 elementos utilizada para el análisis del problema de presa de suelo en tres dimensiones .....	62
Figura 5.20: Superficie de falla obtenida con el método propuesto con nivel 0 de ME para la malla mostrada en la Figura 5.19 .....	63
Figura 5.21: Falla superficial tridimensional producida por el refinado de malla .....	64
Figura 5.22: Tiempo de cómputo para distintas mallas base y niveles de ME para el problema de Prandtl en tres dimensiones calculando la superficie de falla para un FS fijo .....	65
Figura 5.23: Tiempo de cómputo para distintas mallas base y niveles de ME para el problema de Prandtl en tres dimensiones determinando el FS crítico y su superficie asociada .....	66
Figura 5.24: Convergencia del factor de seguridad calculado para distintas mallas base y niveles de ME en tres dimensiones .....	66

## RESUMEN

El método de optimización por discontinuidades o *discontinuity layout optimization* (DLO) es un método que aproxima numéricamente la superficie de falla en suelos, hormigón y materiales similares. El método aproxima la superficie de falla crítica utilizando discontinuidades representadas por segmentos o planos en dos y tres dimensiones, respectivamente. Estas discontinuidades se seleccionan a través de un problema de optimización de una red altamente redundante de discontinuidades previamente generadas. La falta de popularidad del método se debe en parte a la dificultad para generar un espacio de solución lo suficientemente rico; es decir, una red de discontinuidades redundante. Este problema aumenta cuando el dominio de análisis se compone de varias capas de material, un escenario común en la ingeniería geotécnica. Este trabajo propone dos métodos de generación de discontinuidades; el primero para dominios de dos dimensiones y el segundo para dominios de tres dimensiones. El primero permite la generación de discontinuidades en dominios no estructurados e irregulares, incluyendo diferentes capas de material en dicho dominio. Para el caso tridimensional, el método también permite incluir diferentes capas de material en el dominio; sin embargo, a pesar de funcionar en dominios no estructurados e irregulares, no produce resultados satisfactorios en dominios de estas características. Además, este trabajo propone extensiones a la formulación estándar de DLO que permiten: (1) considerar el análisis de agua subterránea y (2) calcular el factor de seguridad crítico de un problema.

**Palabras Claves:** Método de optimización por discontinuidades, Superficie de falla crítica, Estabilidad de taludes, Método de las estructuras base.

## ABSTRACT

The discontinuity layout optimization (DLO) is a method that numerically approximates the critical failure surface in soils, concrete, and materials alike. The method approximates the critical failure surface using discontinuities represented by segments or planes in two or three dimensions, respectively. These discontinuities are selected through an optimization problem from a highly redundant network of pre-generated discontinuities. The method's lack of popularity is partly due to the difficulty in generating a sufficiently rich solution space, i.e., redundant discontinuity network. This problem is augmented when various material layers compose the analysis domain, a common setting in geotechnical engineering. This work proposes two discontinuity generation methods: the first for two dimensional domains and the second for three dimensional domains. The first allows the discontinuity generation in unstructured and irregular domains, including different material layers in said domain. For the tridimensional case, the method allows different material layers in the domain too; but although it works in unstructured and irregular domains, gives unsatisfactory results for domains with these characteristics. In addition, this work proposes extensions to the standard DLO formulation allowing to: (1) consider the groundwater effect (seepage analysis), and (2) calculate the critical safety factor of a problem.

**Palabras Claves:** Discontinuity layout optimization, Critical failure surface, Slope stability, Ground Structure Method.

## 1. INTRODUCCIÓN

La determinación de la superficie de falla de un suelo dado es un problema geotécnico que cobra gran importancia en el proceso de establecer los requerimientos ingenieriles que tendrá dicho suelo para su posterior uso. Dentro de las aplicaciones directas de la resolución de este problema se puede mencionar (1) la determinación de la capacidad de soporte de un muro de contención, (2) el diseño de un muro de contención y (3) la estabilidad de taludes.

Actualmente existen distintos métodos que permiten determinar la superficie de falla en un suelo. Dentro de estos se encuentra el método de optimización por discontinuidades o *discontinuity layout optimization* (DLO), en su versión bidimensional (Smith and Gilbert 2007) y tridimensional (Hawksbee et al. 2013). Un análisis por DLO consiste en la discretización de un dominio por una cantidad muy grande pero finita de discontinuidades que corresponden al espacio de soluciones posibles y desde donde se extraerá la superficie crítica de falla, la que se determina a través de un problema de optimización lineal para el caso bidimensional y uno de optimización cónica para el tridimensional. Este método tiene la ventaja de ser sencillo, ya que solo requiere propiedades básicas del suelo como el peso propio, la cohesión y ángulo de fricción para determinar su superficie de falla. Además, permite trabajar con geometrías complejas e incluso determinar una superficie de falla arbitraria sin contar con la información inicial de la topología de esta superficie.

A pesar de lo anteriormente expuesto, el método DLO tiene algunas limitaciones; su formulación actual no permite incluir la presencia de una napa freática ni tampoco calcular el factor de seguridad que tiene la superficie de falla. Además, se genera otra limitante debido a los algoritmos de generación de discontinuidades actuales, ya que en el caso de los problemas de dos dimensiones no es posible incluir la presencia de varias capas de suelo, mientras que en los de tres dimensiones solo se permite el análisis de problemas pequeños, lo que hace que este método no tenga mucha capacidad de aplicación real. Es por esto por lo que en la presente investigación se propone la mejora tanto de la formulación actual del método DLO como del algoritmo de generación de discontinuidades, con el fin de obtener un sistema de mayor utilidad en problemas ingenieriles reales.

A continuación, se presenta la Fig.1.1. como ejemplo de la aplicación del método DLO después de las contribuciones realizadas en este trabajo, lo que permite incluir múltiples capas de suelo y flujo de agua. La superficie de falla es representada como el subconjunto de discontinuidades en el dominio de diseño.

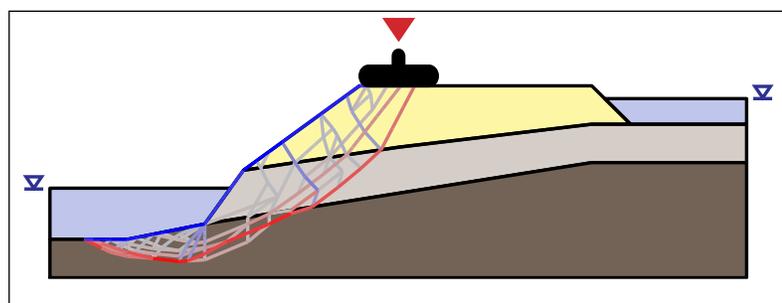


Figura 1.1: Ejemplo de la aplicación método DLO, incluyendo múltiples capas de suelo y flujo de agua.

Para poder detallar el proceso por el que se logró el resultado observado en la Fig. 1.1., es necesario mencionar que el método DLO tiene similitudes con el método de optimización de reticulados o *ground structure method*, donde una malla altamente redundante de barras constituye el espacio solución de la cual se extrae y dimensiona la estructura óptima (Dorn et al. 1964). Actualmente existen algoritmos eficientes para la generación de barras como *pattern stamping* (Sokol 2011), *subdomain generation* (Smith 1998) y *graph-based generation with collision detection* (Zegard and Paulino 2014), que pueden utilizarse para la generación de discontinuidades. El inconveniente de utilizar métodos como estos es que no es posible determinar las propiedades cuando existe más de un material, ya que una discontinuidad podría encontrarse en más de una capa de suelo. Este inconveniente se muestra en la Figura 1.2.

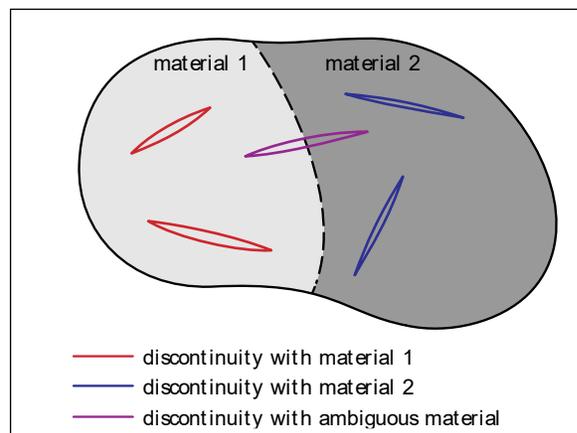


Figura 1.2: Discontinuidades que cruzan dos capas de suelo

Es por lo anterior por lo que se propone un nuevo método para la generación de discontinuidades, aplicable a los objetivos del presente trabajo. Este, como otros métodos

de generación, requiere la discretización del dominio en elementos, que se conocerán como malla base. Esta malla base no es diferente de una malla de elementos finitos (FEM) y es necesaria para definir el problema; es decir, geometría, cargas, materiales y apoyos. La malla base no se utiliza directamente en el análisis, pero es utilizada como punto de partida para construir la red de discontinuidades. Este método toma ideas del *macroelement* (ME) (Zhang et al. 2016), donde los segmentos se generan dentro de los elementos de la malla base. Sin embargo, en el nuevo método, esta generación utiliza operaciones de grafos para construir una familia de patrones de discontinuidades para todos los polígonos presentes en la malla base. Este patrón es estampado a lo largo de toda la malla base de manera similar a lo planteado por Sokól en 2011. La técnica de generación propuesta entrega como resultado un método rápido y sencillo que se adapta a los requisitos del método DLO para el análisis geotécnico.

Por otra parte, la generación de discontinuidades en un dominio tridimensional es un problema complejo, ya que estas están representadas por planos. Por lo mismo, actualmente existen pocos algoritmos de generación de discontinuidades en tres dimensiones; un ejemplo es el método *Multi-slicing* (Zhang 2016). Si bien es posible generar discontinuidades con estos algoritmos, la generación no es lo suficientemente eficiente como para abordar problemas complejos. Esta es una de las principales limitantes para la utilización del método en problemas ingenieriles reales, y es por esta razón por lo que en este trabajo se buscó también desarrollar de un método de generación de discontinuidades especializado en el problema geotécnico tridimensional que permita la

generación interna de discontinuidades como planos y así obtener un algoritmo que permita tanto el trabajo con distintas capas de suelo como el análisis de problemas ingenieriles complejos. El método de generación de discontinuidades en tres de dimensiones también toma como punto de partida una malla base, pero, al contrario del método aplicado a dos dimensiones, no se basa en operaciones de grafos, ya que el problema de solapamiento de discontinuidades es un problema muy complejo de identificar. Es por esto por lo que se utiliza un patrón preestablecido de generación que evita el solapamiento de discontinuidades, logrando así un método generación de discontinuidades que, a pesar de ser menos eficiente y presentar algunos inconvenientes, permite el análisis de problemas de suelos con capas, con un algoritmo de generación rápido y sencillo.

Por último, cabe destacar que, como se mencionó anteriormente, la malla base resulta conveniente para definir el problema y es el punto de partida para la generación de discontinuidades. En problemas donde existe flujo de agua, esta malla base tiene un uso adicional como malla de elementos finitos (FEM) para análisis de flujo. Este análisis FEM permite determinar la presión de poros en cada discontinuidad, valor necesario para el análisis DLO en suelos con la presencia de agua.

## 2. EL MÉTODO DE OPTIMIZACIÓN POR DISCONTINUIDADES

Como se mencionó anteriormente, la optimización por discontinuidades es un método que consiste en la discretización de un dominio en finitas discontinuidades para extraer la superficie crítica de falla de un suelo, representada como un subconjunto de dichas discontinuidades. Presenta una versión bidimensional y una tridimensional, donde las discontinuidades se encuentran representadas por segmentos de recta y por pequeños planos, respectivamente. La superficie crítica de falla se determina a través de un problema de optimización lineal para el caso bidimensional y uno de optimización cónica para el tridimensional.

### 2.1 El método de optimización por discontinuidades 2D

A continuación, se presenta la formulación básica de DLO en dos dimensiones extendida para la consideración de la presión del agua.

#### 2.1.1 Cinemática

Cada discontinuidad tiene asociado un vector de desplazamientos  $\mathbf{d}_i$  que se compone de un desplazamiento de corte y uno normal, esto es  $\mathbf{d}_i = [\mathbf{s}_i, \mathbf{n}_i]^T$ . Los

desplazamientos en la discontinuidad producen desplazamientos nodales los cuales están dados por:

$$\begin{bmatrix} u_{Ai}^x \\ u_{Ai}^y \\ u_{Bi}^x \\ u_{Bi}^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_i & -\beta_i \\ \beta_i & \alpha_i \\ -\alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & -\alpha_i \end{bmatrix} [s_i] = \mathbf{B}_i \mathbf{d}_i \quad (2.1)$$

donde  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  son, respectivamente, los cosenos directores del eje  $x$  e  $y$  de la discontinuidad  $i$ , la cual conecta los nodos A y B, estos se muestran en la Figura 2.1.

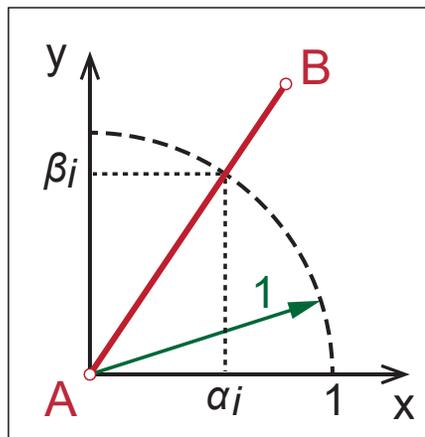


Figura 2.1: Cosenos directores  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  para un segmento cualquiera  $AB$ .

Los desplazamientos nodales producidos por las discontinuidades que llegan a un mismo nodo deben satisfacer una condición de equilibrio cinemático.

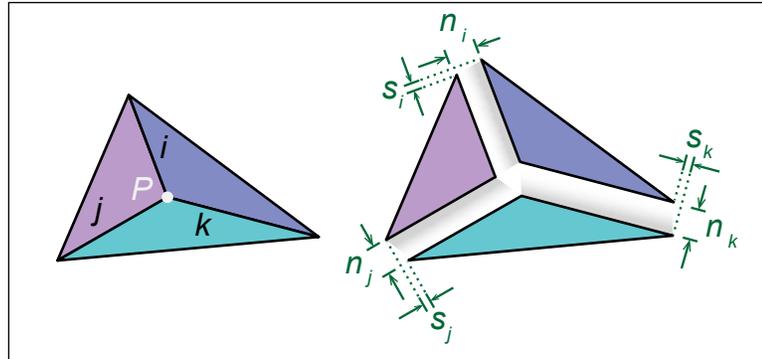


Figura 2.2: Compatibilidad cinemática de las discontinuidades para un nodo cualquiera  $P$ .

Por ejemplo, para las discontinuidades de la Figura 2.2, la relación de compatibilidad geométrica está dada por:

$$\begin{bmatrix} u_{Pi}^x \\ u_{Pi}^y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{Pj}^x \\ u_{Pj}^y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{Pk}^x \\ u_{Pk}^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esta relación se debe cumplir para cada nodo del dominio. Luego, la condición global de equilibrio cinemático queda dada por:

$$\mathbf{Bd} = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

donde  $\mathbf{d}$  contiene los desplazamientos de todas las discontinuidades, esto es  $\mathbf{d} = [\mathbf{s}_1, \mathbf{n}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{s}_m, \mathbf{n}_m]^T$  y  $\mathbf{B}$  es la matriz de compatibilidad geométrica de  $2n \times 2m$  que se obtiene del ensamblaje de las matrices  $\mathbf{B}_i$ .

### 2.1.2 Regla de flujo plástico

Para la regla de flujo plástico se utiliza el criterio de falla de Mohr-Coulomb, el cual dice que la condición de falla ocurre cuando:

$$n_i - \tan(\phi_i) |s_i| = 0$$

, donde  $\phi_i$  corresponde al ángulo de fricción de la discontinuidad  $i$ . Si bien esta relación es no-lineal, debido al valor absoluto, esta puede transformarse en lineal al introducir dos variables de holgura  $p_1$  y  $p_2$ , las cuales se conocen como multiplicadores plásticos. Al utilizar este par de variables, la relación de flujo plástico queda dada por:

$$\mathbf{N}_i \mathbf{p}_i - \mathbf{d}_i = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \tan(\phi_i) & \tan(\phi_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i^1 \\ p_i^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_i \\ n_i \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.3)$$

Es importante notar que la regla de flujo no aplica para discontinuidades que se encuentren en la frontera libre (superficie del terreno). Es por esto por lo que la condición global de flujo plástico está dada por:

$$\mathbf{N} \mathbf{p} - \tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

donde  $\mathbf{p}$  corresponde al vector de multiplicadores plásticos asociados a las discontinuidades que no se encuentran en la superficie libre y  $\tilde{\mathbf{d}}$  corresponde a los desplazamientos en las discontinuidades que no se encuentran en la superficie libre.

### 2.1.3 Condición de falla

La falla se produce cuando el trabajo hecho por las fuerzas externas supera el límite de energía plástica de deformación del suelo, esto es:

$$W_{ext} \geq W_{int}$$

La energía de disipación asociada a la cohesión del material y está dada por:

$$W_{int} = \sum_{i=1}^m c_i l_i |s_i| \quad (2.5)$$

donde  $l_i$  y  $c_i$  son, respectivamente, el largo y la cohesión de la discontinuidad  $i$ , mientras que  $s_i$  es la deformación tangente a esta discontinuidad. Los elementos en la frontera libre no disipan energía debido a la cohesión, por lo que independiente del tipo de suelo se tiene que  $c_i = 0$ . Tomando en cuenta esta consideración es posible expresar la energía de disipación como:

$$W_{int} = \mathbf{g}^T \mathbf{p} \quad (2.6)$$

donde  $\mathbf{g} = [c_1 l_1, c_1 l_1, c_2 l_2, c_2 l_2, \dots, c_m l_m]^T$  contiene solo las propiedades asociadas a las discontinuidades que no se encuentran en la frontera libre.

El trabajo externo puede descomponerse en:

$$W_{ext} = W_D + W_L + W_{u_w}$$

, donde  $W_D$  corresponde al trabajo realizado por las cargas permanentes del peso propio (carga muerta),  $W_L$  al trabajo realizado por fuerzas externas (carga viva) y  $W_{u_w}$  al trabajo realizado por la presión de poros debido al agua.

El trabajo realizado por el peso propio sobre una discontinuidad puede expresarse de como:

$$W_{Di} = \mathbf{f}_{Di}^T \mathbf{d}_i = [-W_i \beta_i \quad -W_i \alpha_i] \begin{bmatrix} s_i \\ n_i \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

donde  $W_i$  corresponde al peso total del suelo sobre la discontinuidad. Luego, al ensamblar el,  $\mathbf{f}_{Di}$  el trabajo global realizado por el peso propio puede expresarse como:

$$W_D = \mathbf{f}_D^T \mathbf{d} \quad (2.8)$$

El trabajo realizado por las fuerzas externas esta dado por:

$$W_L = \mathbf{f}_L^T \mathbf{d} \quad (2.9)$$

donde  $\mathbf{f}_L$  son las fuerzas externas sobre cada discontinuidad en las direcciones de corte y normal.

El trabajo realizado por la presión de poros en una discontinuidad es:

$$W_{u_{wi}} = \mathbf{u}_{wi}^T \mathbf{d}_i = [0 \quad u_{wi} l_i] \begin{bmatrix} s_i \\ n_i \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

donde  $\mathbf{u}_{wi}$  representa la presión de poros en la discontinuidad  $i$ . La forma de este vector se debe a que la fuerza de presión actúa únicamente en la dirección normal a la discontinuidad. Mediante el ensamblaje de  $\mathbf{u}_{wi}$  se obtiene el trabajo global realizado por la presión, el cual puede expresarse mediante:

$$W_{u_w} = \mathbf{u}_w^T \mathbf{d} \quad (2.11)$$

#### 2.1.4 Modelo clásico de optimización por discontinuidades

La falla se produce cuando  $W_{ext} \leq W_{int}$ . En particular, el modelo clásico de optimización por discontinuidades busca minimizar el trabajo realizado por la carga viva en el equilibrio. Es decir, busca minimizar:

$$W_L = W_{int} - W_D - W_{u_w}$$

Este modelo necesita la restricción adicional:

$$\mathbf{f}_L^{*T} \mathbf{d} = 1 \quad (2.12)$$

$\mathbf{f}_L^{*T}$  corresponde al patrón de cargas vivas, y por ende las cargas vivas reales están dadas por  $\mathbf{f}_L = \lambda \mathbf{f}_L^*$ , con  $\lambda$  el factor a minimizar. Esta restricción cumple dos objetivos, el primero corresponde a garantizar que existan desplazamientos en las discontinuidades sometidas a cargas externas; y el segundo objetivo a acotar el problema, lo que permite que este tenga solución óptima.

Tomando en cuenta estas consideraciones, el modelo de optimización clásico para DLO (Smith and Gilbert 2007) está dado por:

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{p}, \mathbf{d}} \quad & \lambda \mathbf{f}_L^{*T} \mathbf{d} = \mathbf{g}^T \mathbf{p} - \mathbf{f}_D^T \mathbf{d} - \mathbf{u}_w^T \mathbf{d} \\
 & \mathbf{B} \mathbf{d} = \mathbf{0} \\
 & \mathbf{N} \mathbf{p} - \tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{0} \\
 & \mathbf{f}_L^{*T} \mathbf{d} = 1 \\
 & \mathbf{p} \geq \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

que corresponde a un problema de programación lineal y puede ser resuelto eficientemente por algoritmos como el de punto interior (Karmakar 1884), o bien Simplex Dual (Lemke 1954).

## 2.2 El método de optimización por discontinuidades 3D

A continuación, se presenta la formulación básica de DLO en tres dimensiones extendida para la consideración de la presión del agua.

### 2.2.1 Cinemática

Cada discontinuidad tiene asociado un vector de desplazamientos  $\mathbf{d}_i$  que se compone de un desplazamiento normal y dos de corte, esto es  $\mathbf{d}_i = [\mathbf{n}_i, \mathbf{s}_i, \mathbf{t}_i]^T$ . Los desplazamientos en la discontinuidad producen desplazamientos en las aristas los cuales están dados por:

$$\begin{bmatrix} u_{ABi}^x \\ u_{ABi}^y \\ u_{ABi}^z \\ u_{BCi}^x \\ u_{BCi}^y \\ u_{BCi}^z \\ u_{CAi}^x \\ u_{CAi}^y \\ u_{CAi}^z \end{bmatrix} = \mathbf{B}_i \mathbf{d}_i \quad (2.14)$$

donde  $\mathbf{B}_i$  se obtiene de ensamblar  $\mathbf{B}_{ij} = k_{ij} \mathbf{T}_i$  con  $\mathbf{T}_i = [\mathbf{n}_i \ \mathbf{s}_i \ \mathbf{t}_i]$  la matriz con los cosenos directores y  $k_{ij}$  toma los valores 1 o  $-1$  dependiendo si la arista se recorre en el sentido positivo o negativo, respectivamente. El sentido positivo de cada arista se determina al definir la dirección de cada arista en el dominio. Los cosenos directores de una discontinuidad triangular se muestran en la Figura 2.3.

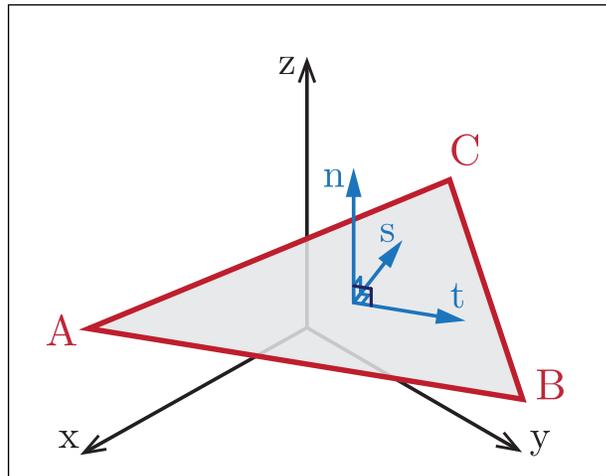


Figura 2.3: Cosenos directores  $n_i$ ,  $s_i$  y  $t_i$  para un triángulo cualquiera  $ABC$

Los desplazamientos producidos por las discontinuidades que llegan a una misma arista deben satisfacer una condición de equilibrio cinemático.

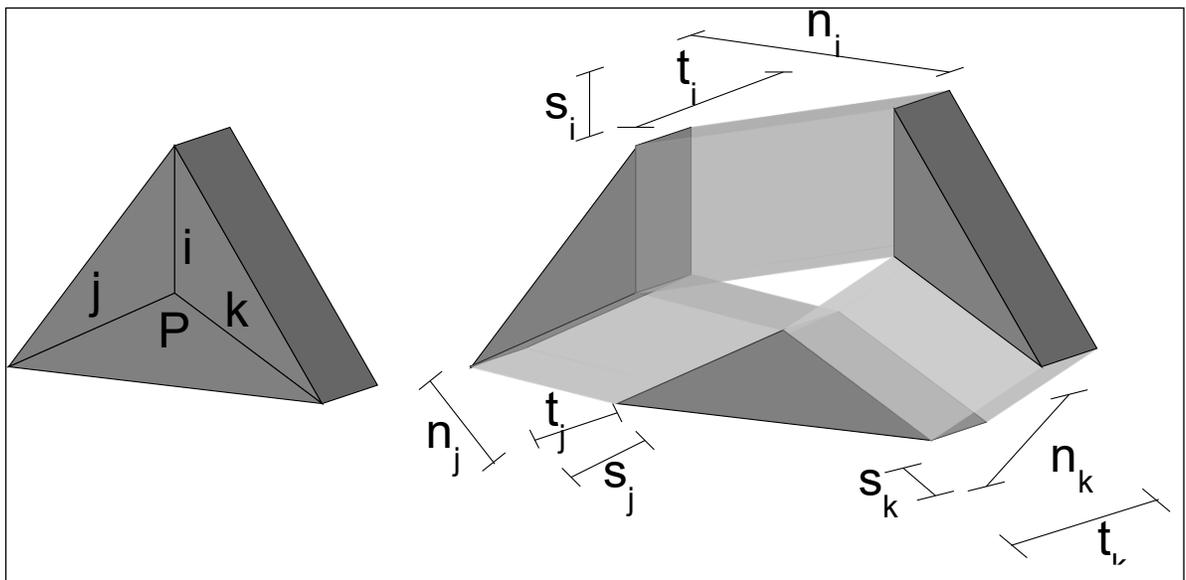


Figura 2.4: Compatibilidad cinemática tridimensional de las discontinuidades para un nodo cualquiera P

Por ejemplo, para las discontinuidades de la Figura 2.4, la relación de compatibilidad geométrica está dada por:

$$\begin{bmatrix} u_{p_i}^x \\ u_{p_i}^y \\ u_{p_i}^z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{p_j}^x \\ u_{p_j}^y \\ u_{p_j}^z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{p_k}^x \\ u_{p_k}^y \\ u_{p_k}^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esta relación se debe cumplir para cada arista del dominio. Luego, la condición global de equilibrio cinemático queda dada por:

$$\mathbf{B}\mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (2.15)$$

donde  $\mathbf{d}$  contiene los desplazamientos de todas las discontinuidades, esto es  $\mathbf{d} = [n_1, s_1, t_1, n_2, s_2, t_2, \dots, n_m, s_m, t_m]^T$  y  $\mathbf{B}$  es la matriz de compatibilidad geométrica de  $3n \times 3m$  que se obtiene del ensamblaje de las matrices  $\mathbf{B}_i$ .

### 2.2.2 Regla de flujo plástico

Para la regla de flujo plástico se utiliza el criterio de falla de Mohr-Coulomb. Esta regla en tres dimensiones se compone de las relaciones:

$$n_i - \tan(\phi_i) p_i = 0$$

$$p_i \geq \sqrt{s_i^2 + t_i^2}$$

donde  $\phi_i$  corresponde al ángulo de fricción y  $p_i$  al multiplicador plástico de la discontinuidad  $i$ . La primera relación corresponde a una restricción lineal, mientras que la segunda corresponde a una restricción cónica. Es importante notar que la regla de flujo

no aplica para discontinuidades que se encuentren en la frontera libre. Es por esto por lo que la condición global de la primera relación flujo plástico está dada por:

$$\mathbf{N}\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{d}}_n = \mathbf{0} \quad (2.16)$$

donde  $\mathbf{N}$  corresponde a una matriz diagonal con las tangentes del ángulo de fricción de cada discontinuidad que no se encuentra en la superficie libre,  $\mathbf{p}$  corresponde al vector de multiplicadores plásticos asociados a las discontinuidades que no se encuentran en la superficie libre y  $\tilde{\mathbf{d}}_n$  corresponde a los desplazamientos normales en las discontinuidades que no se encuentran en la superficie libre. No posible definir una restricción global para la segunda relación de flujo plástico, por lo que simplemente se define la restricción para cada discontinuidad que no se encuentra en la superficie libre.

### 2.2.3 Condición de falla

La falla se produce cuando el trabajo hecho por las fuerzas externas supera el límite de energía plástica de deformación del suelo, esto es:

$$W_{ext} \geq W_{int}$$

La energía de disipación está dada por:

$$W_{int} = \sum_{i=1}^m c_i a_i p_i \quad (2.17)$$

donde  $a_i$  y  $c_i$  son, respectivamente, el área y la cohesión de la discontinuidad  $i$ , mientras que  $p_i$  es el multiplicador plástico de esta discontinuidad. Los elementos en la frontera libre no disipan energía debido a la cohesión, por lo que independiente del tipo de suelo

se tiene que  $c_i = 0$ . Tomando en cuenta esta consideración es posible expresar la energía de disipación como:

$$W_{int} = \mathbf{g}^T \mathbf{p} \quad (2.18)$$

donde  $\mathbf{g} = [c_1 a_1, c_2 a_2, \dots, c_m a_m]^T$  contiene solo las propiedades asociadas a las discontinuidades que no se encuentran en la frontera libre.

El trabajo externo puede descomponerse en:

$$W_{ext} = W_D + W_L + W_{uw}$$

donde  $W_D$  corresponde al trabajo realizado por las cargas permanentes del peso propio (carga muerta),  $W_L$  al trabajo realizado por fuerzas externas (carga viva) y  $W_{uw}$  al trabajo realizado por la presión de poros debido al agua.

El trabajo realizado por el peso propio sobre una discontinuidad puede expresarse como:

$$W_{Di} = \mathbf{f}_{Di}^T \mathbf{d}_i = [0 \quad 0 \quad -W_i] \mathbf{T}_i \begin{bmatrix} n_i \\ s_i \\ t_i \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

donde  $W_i$  corresponde al peso total del suelo sobre la discontinuidad. Luego, al ensamblar el  $\mathbf{f}_{Di}$ , el trabajo global realizado por el peso propio puede expresarse como:

$$W_D = \mathbf{f}_D^T \mathbf{d} \quad (2.20)$$

El trabajo realizado por las fuerzas externas esta dado por:

$$W_L = \mathbf{f}_L^T \mathbf{d} \quad (2.21)$$

donde  $\mathbf{f}_L$  son las fuerzas externas sobre cada discontinuidad en las direcciones normal y de cada corte.

El trabajo realizado por la presión de poros en una discontinuidad es:

$$W_{u_{wi}} = \mathbf{u}_{wi}^T \mathbf{d}_i = [u_{wi} a_i \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} n_i \\ s_i \\ t_i \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

donde  $u_{wi}$  representa la presión de poros en la discontinuidad  $i$ . La forma de este vector se debe a que la fuerza de presión actúa únicamente en la dirección normal a la discontinuidad. Mediante el ensamblaje  $\mathbf{u}_{wi}$  se obtiene el trabajo global realizado por la presión, el cual puede expresarse mediante:

$$W_{u_w} = \mathbf{u}_w^T \mathbf{d} \quad (2.23)$$

#### 2.2.4 Modelo clásico de optimización por discontinuidades

La falla se produce cuando  $W_{ext} \leq W_{int}$ . En particular, el modelo clásico de optimización por discontinuidades busca minimizar el trabajo realizado por la carga viva en el equilibrio. Es decir, busca minimizar:

$$W_L = W_{int} - W_D - W_{u_w}$$

Este modelo necesita la restricción adicional:

$$\mathbf{f}_L^{*T} \mathbf{d} = 1 \quad (2.24)$$

$\mathbf{f}_L^{*T}$  corresponde al patrón de cargas vivas, y por ende las cargas vivas reales están dadas por  $\mathbf{f}_L = \lambda \mathbf{f}_L^*$ , con  $\lambda$  el factor a minimizar. Esta restricción cumple dos objetivos, el primero corresponde a garantizar que existan desplazamientos en las discontinuidades

sometidas a cargas externas; y el segundo objetivo a acotar el problema, lo que permite que este tenga solución óptima.

Tomando en cuenta estas consideraciones, el modelo de optimización clásico para DLO está dado por:

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{p}, \mathbf{d}} \quad & \lambda \mathbf{f}_L^{*T} \mathbf{d} = \mathbf{g}^T \mathbf{p} - \mathbf{f}_D^T \mathbf{d} - \mathbf{u}_w^T \mathbf{d} \\
 & \mathbf{B} \mathbf{d} = \mathbf{0} \\
 & \mathbf{N} \mathbf{p} - \widetilde{\mathbf{d}}_n = \mathbf{0} \\
 & \mathbf{f}_L^{*T} \mathbf{d} = 1 \\
 & p_i \geq \sqrt{s_i^2 + t_i^2} \quad \forall i \in [1, \dots, m] - D_f
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

con  $D_f$  el conjunto de las discontinuidades que se encuentran en la superficie libre. Este modelo corresponde a un problema de programación cónica y puede ser resuelto eficientemente por algoritmos como punto interior (Karmakar 1884).

### 2.3 Cálculo del factor de seguridad con optimización por discontinuidades

El modelo de optimización clásico entrega la carga externa (viva) mínima que debe aplicarse en un dominio determinado para producir la falla. En cambio, en la ingeniería aplicada se busca determinar el factor de seguridad (SF) de una superficie para un estado de carga dado.

### 2.3.1 Modelo modificado de optimización por discontinuidades 2D

Para la inclusión del factor de seguridad es necesario modificar tanto el término de energía de disipación como la relación de flujo plástico. En el caso bidimensional, estas modificaciones resultan en:

$$W_{int} = \mathbf{g}(SF)^T \mathbf{p} \quad (2.26)$$

$$\mathbf{N}(SF)\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{0} \quad (2.27)$$

donde  $\mathbf{g}(SF) = (1/SF)[c_1 l_1, c_1 l_1, c_2 l_2, c_2 l_2, \dots, c_m l_m]^T$  y  $\mathbf{N}(SF)$  se obtiene del ensamblaje de:

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \tan(\phi_i)/SF & \tan(\phi_i)/SF \end{bmatrix}$$

La falla crítica se produce en la superficie que maximice la diferencia  $W_{ext} - W_{int}$  o equivalentemente a minimizar  $W_{int} - W_{ext}$ . Un problema de optimización con esta función objetivo resulta en un problema no acotado, ya que si el vector  $\mathbf{d}$  es solución del problema, el vector  $\alpha \mathbf{d}$  también lo es, con  $0 \leq \alpha \leq \infty$ . La diferencia entre  $W_{int} - W_{ext}$  aumenta al aumentar  $\alpha$ , lo que muestra que el problema es no acotado. Sin embargo, si bien este problema requiere una compatibilidad cinemática, es independiente de la magnitud de los desplazamientos, por lo que el problema puede ser acotado estableciendo alguna restricción de norma sobre los desplazamientos, como por ejemplo la restricción:

$$||\mathbf{d}|| \leq 1$$

Con el fin de no añadir restricciones no lineales adicionales, resulta conveniente utilizar la norma infinito, esto es  $\|\mathbf{d}\|_{\infty} \leq 1$ . En el caso bidimensional esto es equivalente a:

$$-1 \leq n_i \leq 1 \quad -1 \leq s_i \leq 1$$

Tomando estas consideraciones el modelo de optimización que incluye el factor de seguridad en dos dimensiones queda dado por:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{p}, \mathbf{d}} \quad & \mathbf{g}^T(SF)\mathbf{p} - \mathbf{f}_D^T\mathbf{d} - \mathbf{f}_L^T\mathbf{d} - \mathbf{u}_w^T\mathbf{d} \\ & \mathbf{B}\mathbf{d} = \mathbf{0} \\ & \mathbf{N}(SF)\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{0} \\ & \|\mathbf{d}\|_{\infty} \leq 1 \\ & \mathbf{p} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.28}$$

lo que afortunadamente es un programa lineal.

### 2.3.2 Modelo modificado de optimización por discontinuidades 3D

Análogamente al caso bidimensional para la inclusión del factor de seguridad, es necesario modificar tanto el término de energía de disipación como la relación de flujo plástico. En el caso tridimensional estas modificaciones resultan en:

$$W_{int} = \mathbf{g}(SF)^T\mathbf{p} \tag{2.29}$$

$$\mathbf{N}(SF)\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{d}}_n = \mathbf{0} \tag{2.30}$$

donde  $\mathbf{g}(SF) = (1/SF)[c_1\mathbf{a}_1, c_2\mathbf{a}_2, \dots, c_m\mathbf{a}_m]^T$  y  $\mathbf{N}(SF)$  contiene en su diagonal los valores:

$$N_{ii}(FS) = \tan(\phi_i) / SF$$

Como se mencionó anteriormente, la falla crítica se produce al minimizar  $W_{int} - W_{ext}$ .

Un problema de optimización con esta función objetivo resulta en un problema no acotado y puede acotarse con la restricción:

$$||\mathbf{d}|| \leq 1$$

Al igual que en el caso bidimensional, al utilizar la norma infinito se tiene que  $||\mathbf{d}||_{\infty} \leq 1$ , lo que en el caso tridimensional es equivalente a:

$$-1 \leq n_i \leq 1 \quad -1 \leq s_i \leq 1 \quad -1 \leq t_i \leq 1$$

Tomando estas consideraciones el modelo de optimización que incluye el factor de seguridad en tres dimensiones queda dado por:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{p}, \mathbf{d}} \quad & \mathbf{g}^T(SF)\mathbf{p} - \mathbf{f}_D^T\mathbf{d} - \mathbf{f}_L^T\mathbf{d} - \mathbf{u}_w^T\mathbf{d} \\ & \mathbf{B}\mathbf{d} = \mathbf{0} \\ & \mathbf{N}(SF)\mathbf{p} - \widetilde{\mathbf{d}}_n = \mathbf{0} \\ & ||\mathbf{d}||_{\infty} \leq 1 \\ & p_i \geq \sqrt{s_i^2 + t_i^2} \quad \forall i \in [1, \dots, m] - D_f \end{aligned} \tag{2.31}$$

lo que afortunadamente es un programa cónico.

### 2.3.3 Búsqueda del factor de seguridad crítico

Es importante tener en consideración que las formulaciones obtenidas en las ecuaciones 2.28 y 2.31 permiten determinar la superficie de falla para un factor de seguridad dado. Este factor puede disminuir hasta que llega al punto donde no se produce ninguna falla. Esta última condición se obtiene cuando la función objetivo en la óptima entrega como resultado cero, es decir,  $W_{ext} = W_{int}$ .

El factor de seguridad crítico se encuentra donde la solución del problema de optimización entrega cero en su función objetivo. En la Figura 2.5 se muestra el valor de la función objetivo en función del factor de seguridad para un ejemplo específico. En este caso, la primera falla ocurre para  $SF = 1$ .

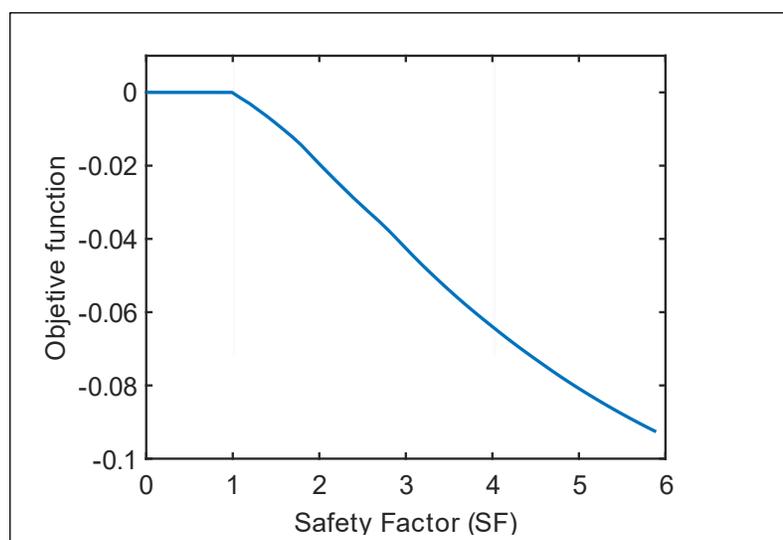


Figura 2.5: Valor de la función objetivo en función del factor de seguridad para un problema dado. Notar que en este caso particular la función objetivo se hace negativa para  $SF = 1$ .

Para valores del factor de seguridad  $SF$  menores al crítico la función se mantiene en cero, lo que dificulta la búsqueda del factor de seguridad crítico. Para solucionar este problema basta con buscar aquel punto donde la función objetivo toma el valor  $-\epsilon$ , con  $\epsilon$  un valor relativamente pequeño. Esto permite que la solución sea única; sin embargo, debido a la discontinuidad en las derivadas de la función (ver Figura 2.5), no es posible utilizar métodos de búsqueda basados en gradientes.

Una opción es utilizar el método de bisección. Este tiene la ventaja de que permite calcular el número de iteraciones necesarias para alcanzar un error dado para un intervalo de búsqueda  $[SF_{min}, SF_{max}]$  mediante:

$$n = \log_2((SF_{max} - SF_{min})/e)$$

donde  $n$  es el número de iteraciones necesarias y  $e$  es la tolerancia de búsqueda del factor de seguridad.

Si bien el método es costoso debido a que cada iteración requiere la evaluación de la función objetivo en el óptimo, el tiempo de cálculo puede reducirse considerablemente al trabajar inicialmente con una malla gruesa para obtener una aproximación del factor de seguridad a bajo costo, y luego realizar una búsqueda más precisa con una malla fina. El refinado de la malla puede incluso concentrarse donde se localiza la falla con el fin de reducir el número de iteraciones de alto costo (Park et al. 2012).

### 3. GENERACIÓN DE DISCONTINUIDADES

#### 3.1 Generación de discontinuidades 2D

El método DLO optimiza un problema donde el espacio de solución tiene un gran número de potenciales discontinuidades y la solución se compone de un pequeño subconjunto de ellas que, a su vez, aproximan la superficie de falla crítica. Comenzando de  $n$  nodos, un total de  $m$  discontinuidades se definen a partir de la unión de cada par de nodos. Se puede determinar un máximo de  $n(n - 1)/2$  discontinuidades distintas, pero muchas de ellas no son válidas o es poco probable que formen parte de la superficie de falla crítica. Si se consideran todas las discontinuidades en el espacio solución, se obtendrán mejores aproximaciones a la superficie de falla. Sin embargo, es poco probable que algunos de ellas formen parte de la superficie de falla crítica y pueden eliminarse sin afectar gravemente la precisión del método, un concepto clave en la metodología y el algoritmo propuestos que combina (y amplía) tres trabajos anteriores: enfoque de macroelement (Zhang et al. 2016), generación de segmentos basados en operaciones de grafos (Zegard y Paulino 2014) y estampado de patrones (Sokól 2010). Las características heredadas por el método de generación propuesto resultan en un algoritmo que genera un conjunto reducido de discontinuidades y permite el análisis de dominios con varios materiales.

El algoritmo requiere una “malla base” que se utiliza para definir un problema dado: geometría, materialidad (propiedades) y control indirecto sobre el espacio de solución (a

través del tamaño de los elementos). Esta malla base puede estar compuesta por una mezcla de elementos poligonales (convexos), que tienen nodos insertados a lo largo de sus bordes siguiendo el enfoque del macroelement (ME), una técnica de enriquecimiento que se ilustra en la Figura 3.1.

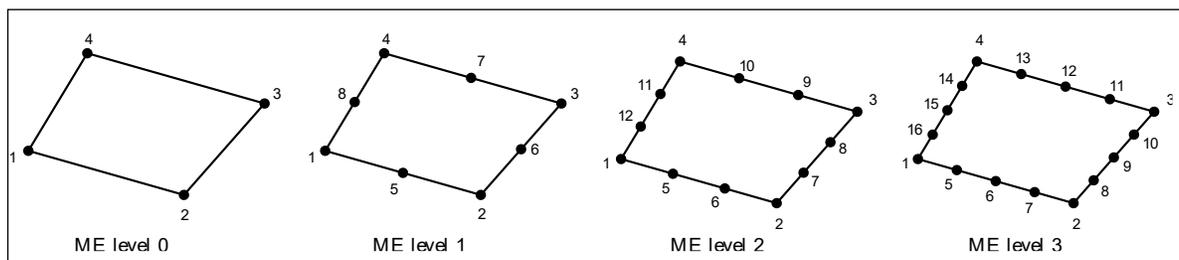


Figura 3.1: Esquema de enriquecimiento de macroelement (ME) para un elemento cuadrilátero. El nivel ME 0 no introduce nodos en el borde del elemento original. Los niveles ME 1, 2 y 3 se muestran introduciendo 1, 2 y 3 nodos en el borde, respectivamente.

Luego se barre la malla enumerando todos los diferentes tipos de elementos presentes, como, por ejemplo, triángulos, cuadrángulos, pentágonos y posiblemente más, que se denominan primitivos de la malla. Se generan patrones de segmentos (discontinuidades) para cada elemento primitivo, con especial cuidado de no crear elementos superpuestos en los bordes, como se muestra en la Figura 3.2.

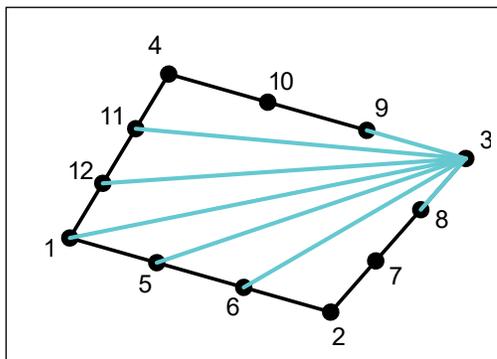


Figura 3.2: Discontinuidades que contienen el nodo 3 en un elemento enriquecido con nivel ME 2. Es posible notar que este esquema evita generar discontinuidades superpuestas a otras a lo largo del borde.

La generación de segmentos en los elementos primitivos se realiza mediante dos operaciones de grafos. Dado un elemento primitivo (o incluso una malla completa), se puede definir una matriz de conectividad cuadrada  $\mathbf{L}$ , donde  $L_{ij} = 1$  si hay un segmento entre los nodos  $i$  y  $j$ , y  $L_{ij} = 0$  en caso contrario. Antes de comenzar el proceso de generación, se deben identificar los bordes y sus nodos asociados. En el ejemplo de la Figura 3.2, los bordes son:

$$edge_1 = [1, 5, 6, 2]$$

$$edge_2 = [2, 7, 8, 3]$$

$$edge_3 = [3, 9, 10, 4]$$

$$edge_4 = [4, 11, 12, 1]$$

El orden de los nodos en cada borde es esencial, pero la dirección no lo es. Una matriz cuadrada lógica  $\mathbf{T}$  se define con unos en la superdiagonal y subdiagonal y con ceros en todas las otras posiciones. Por ejemplo, la versión de 5 filas es:

$$\mathbf{T}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La conectividad de borde que resulta de aplicar la matriz  $\mathbf{T}$  a los bordes cuando los nodos están en orden se puede entender mejor con la Figura 3.3. El patrón correcto tiene segmentos (discontinuidades) entre todos los nodos directamente adyacentes, pero ninguno de estos se solapa o pasa sobre otros nodos. Esta técnica basada en operaciones

de grafos evita tener discontinuidades superpuestas para cualquier polígono de  $n$  lados con bordes rectos.

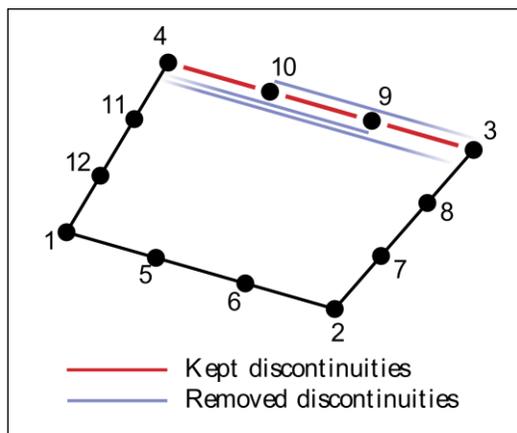


Figura 3.3: Ejemplo de conectividad de borde. Notar que todos los nodos adyacentes tienen una discontinuidad entre ellos, pero nunca se permite ningún segmento superpuesto a estos.

Matrices como  $T$  se pueden generar como una matriz *toeplitz*, construida usando el vector  $[0, 1, 0, 0, \dots, 0]$  como la primera columna, y es la matriz de conectividad usada para remover los segmentos solapados en los bordes de los elementos primitivos. El algoritmo de generación de segmentos para cada elemento primitivo es:

1. Conectar todos los nodos dentro del elemento:  $L = \mathbf{1}$
2. Remover los segmentos solapados en cada uno de los bordes:  $L_{edge_i, edge_i} = T$

Esto resulta en una matriz simétrica con segmentos repetidos ( $L_{ij} = L_{ji}$ ), pero sin solapamiento. Finalmente, solo se conserva la matriz triangular superior de  $L$  para evitar los elementos repetidos. Las matrices de conectividad (triangular superior) para todos los elementos primitivos que se encuentran en la malla se almacenan y luego se utilizan en un proceso de estampado del patrón.

El proceso de estampado de patrones requiere: a) una malla base refinada utilizando un enfoque de macroelementos, y b) los patrones de segmentos de los elementos primitivos generados previamente. Para cada elemento en la malla, el patrón correspondiente se “estampa”; es decir, se agrega a la lista global de segmentos. Al hacerlo, las propiedades del material base se agregan a la lista global de segmentos. Esto, intencionalmente, da como resultado segmentos repetidos a lo largo de los segmentos base: los elementos se estampan dos veces, una por cada elemento que comparte el borde. Estos segmentos se fusionarán en un solo segmento con las propiedades promedio de ambos.

El proceso completo de generación de segmentos descrito anteriormente se resume en la Figura 3.4.

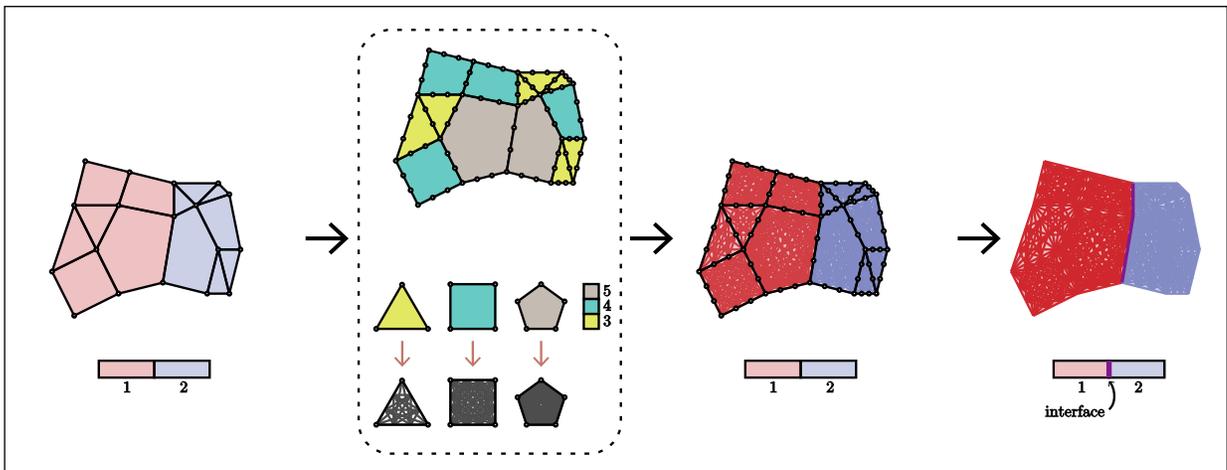


Figura 3.4: Ilustración del algoritmo de generación de discontinuidades que combina ideas de macroelement, generación basada en operaciones de grafos y estampado de patrones

### 3.2 Generación de discontinuidades 3D

A diferencia del caso bidimensional, en el problema en tres dimensiones las discontinuidades son representadas por planos en lugar de segmentos. Para efectos del algoritmo propuesto todos los planos serán triangulares; es decir, se forman a partir de la unión de tres nodos. Se busca un formato de generación basado en macroelement, el cual para el caso tridimensional no ha sido planteado hasta ahora. Al igual que el problema en 2D, se requiere una malla base formada por elementos poliédricos (tetraedros, hexaedros, pirámides, etc) los cuales pueden tener una forma arbitraria y propiedades determinadas. Luego, se generan discontinuidades (planos triangulares) al interior del elemento, las cuales heredan las propiedades del elemento padre. El concepto de elementos primitivos no es utilizado en este algoritmo.

Debido a que las discontinuidades están compuestas por planos, el solapamiento de las mismas no se da solo en las aristas ni solo en las caras, por lo que evitar el solapamiento no se puede realizar con operaciones simples como en el caso 2D. Es por esto por lo que el método de generación propuesto para tres dimensiones no es el mismo que el utilizado para el caso bidimensional. Al igual que en el caso bidimensional, inicialmente se añaden nodos en las aristas de los elementos con el fin de enriquecer el esquema de generación, lo que se encuentra representado en el ejemplo de la Figura 3.5.

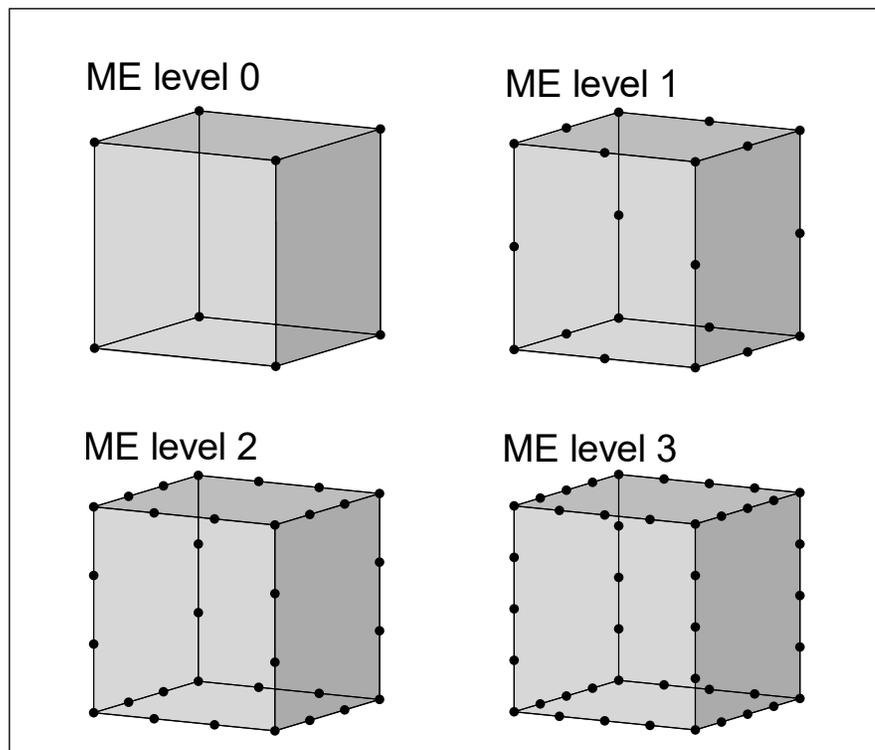


Figura 3.5: Esquema de enriquecimiento de macroelement (ME) para un elemento hexaedro. El nivel ME 0 no introduce nodos en el borde del elemento original. Los niveles ME 1, 2 y 3 se muestran introduciendo 1, 2 y 3 nodos en el borde, respectivamente.

Para generar un plano en el espacio basta con tres puntos, por lo que podrían unirse arbitrariamente todas las combinaciones de tres nodos no colineales presentes en el elemento. Pero, como se mencionó anteriormente, esto produce un problema de solapamiento que no ocurre solo en las aristas y por tanto resulta costoso de identificar. Es por esto por lo que el algoritmo de generación propuesto genera las discontinuidades evitando el solapamiento desde un comienzo.

Tomando en cuenta lo anterior, se añade un nodo en cada cara del elemento más un nodo central, independiente del nivel de conectividad. En la Figura 3.6 se muestra un ejemplo de los nodos adicionales insertados.

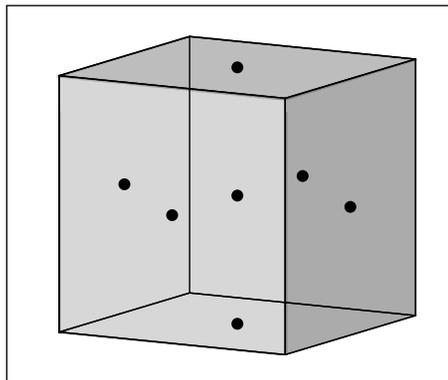


Figura 3.6: Nodos adicionales insertados con el fin de generar discontinuidades sin solapamiento

Una vez añadidos los nuevos nodos, se generan segmentos en cada cara desde los nodos de las aristas al nodo central de la cara. En la Figura 3.7 se muestra un ejemplo de los segmentos insertados en las caras para distintos niveles de conectividad ME.

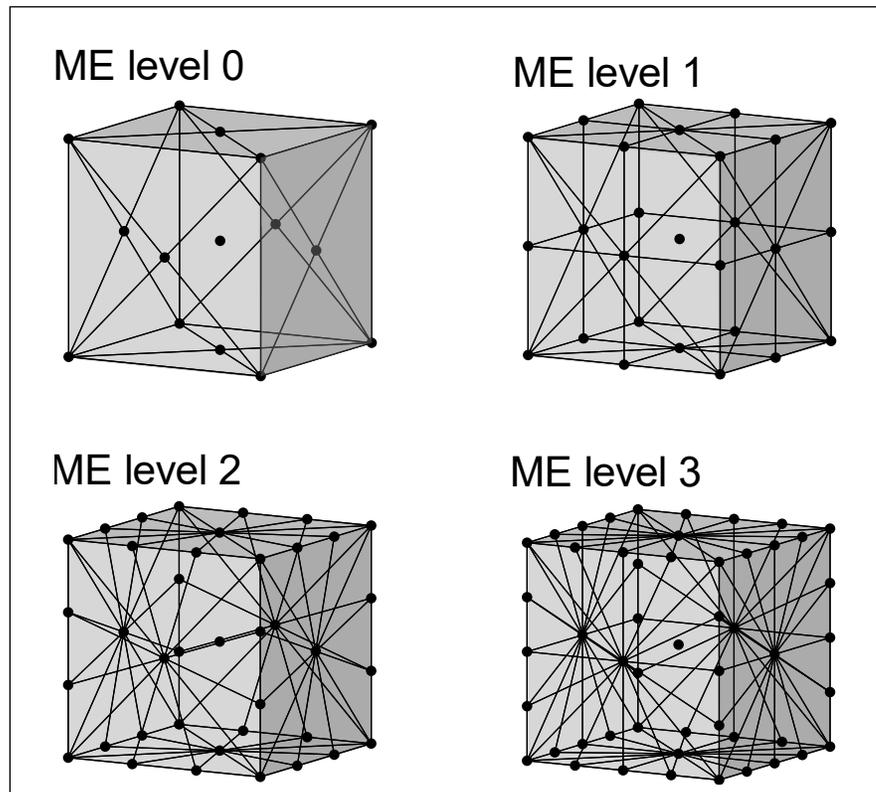


Figura 3.7: Esquema de generación de segmentos para un elemento hexaedro.

Utilizando los segmentos generados y los segmentos presentes en las aristas es posible generar las discontinuidades evitando el solapamiento. Estas discontinuidades pueden dividirse en tres tipos: las discontinuidades generadas en las caras, las discontinuidades generadas desde los segmentos de la cara al nodo central del elemento y las discontinuidades generadas desde los segmentos de las aristas al nodo central del elemento. Al combinar todas estas discontinuidades se obtienen las discontinuidades generadas dentro del elemento. En la Figura 3.8 se muestra un ejemplo de las discontinuidades generadas para un nivel de conectividad ME 2.

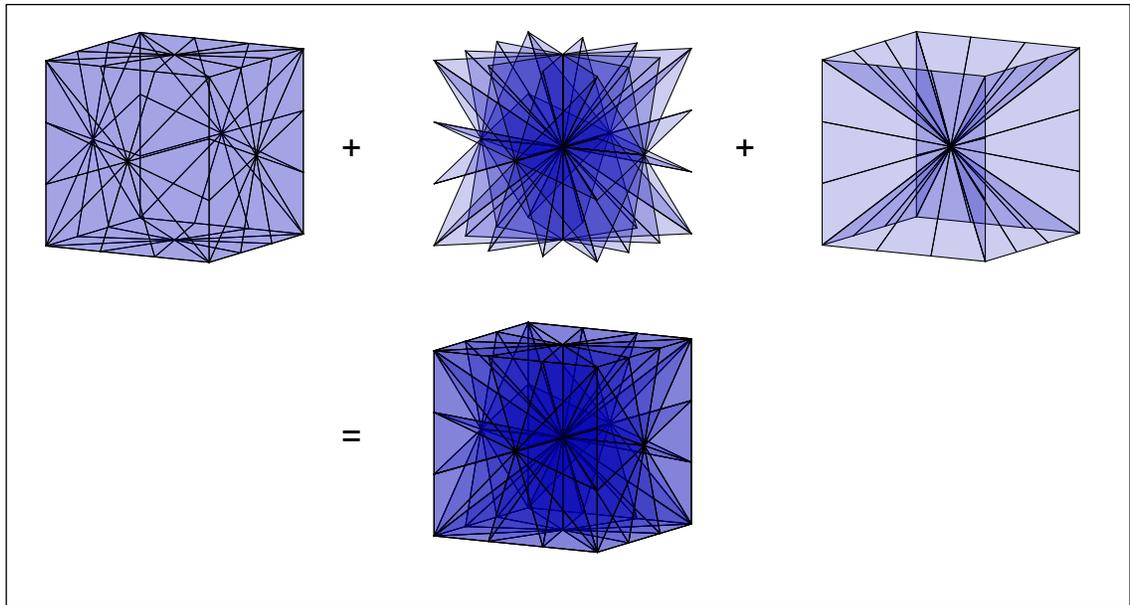


Figura 3.8: Discontinuidades generadas en las caras, desde los segmentos de las caras y desde los segmentos de las aristas para un nivel ME 2

Las discontinuidades heredan las propiedades del elemento en el cual fueron generadas. Al igual que en el caso de dos dimensiones, las discontinuidades en la frontera (en este caso las caras del elemento) pueden ser compartidas por dos elementos. En estos casos simplemente se fusionan las discontinuidades y se utilizan las propiedades promedio de ambos elementos.

Es importante destacar que, a pesar de que el algoritmo propuesto presente similitudes con el algoritmo bidimensional, estos son muy diferentes. Con el fin de evitar el solapamiento, todas las discontinuidades pasan ya sea por el centro del elemento o por el centro de las caras, lo que trae consigo dos problemas: 1) el esquema de enriquecimiento aumenta la cantidad de discontinuidades, pero no así el espacio de solución, 2) en mallas asimétricas

existe un sesgo direccional que evita obtener los resultados esperados. En la Figura 3.9 se muestra un ejemplo sencillo con su falla esperada que será de ayuda para ilustrar las falencias del esquema de enriquecimiento del algoritmo.

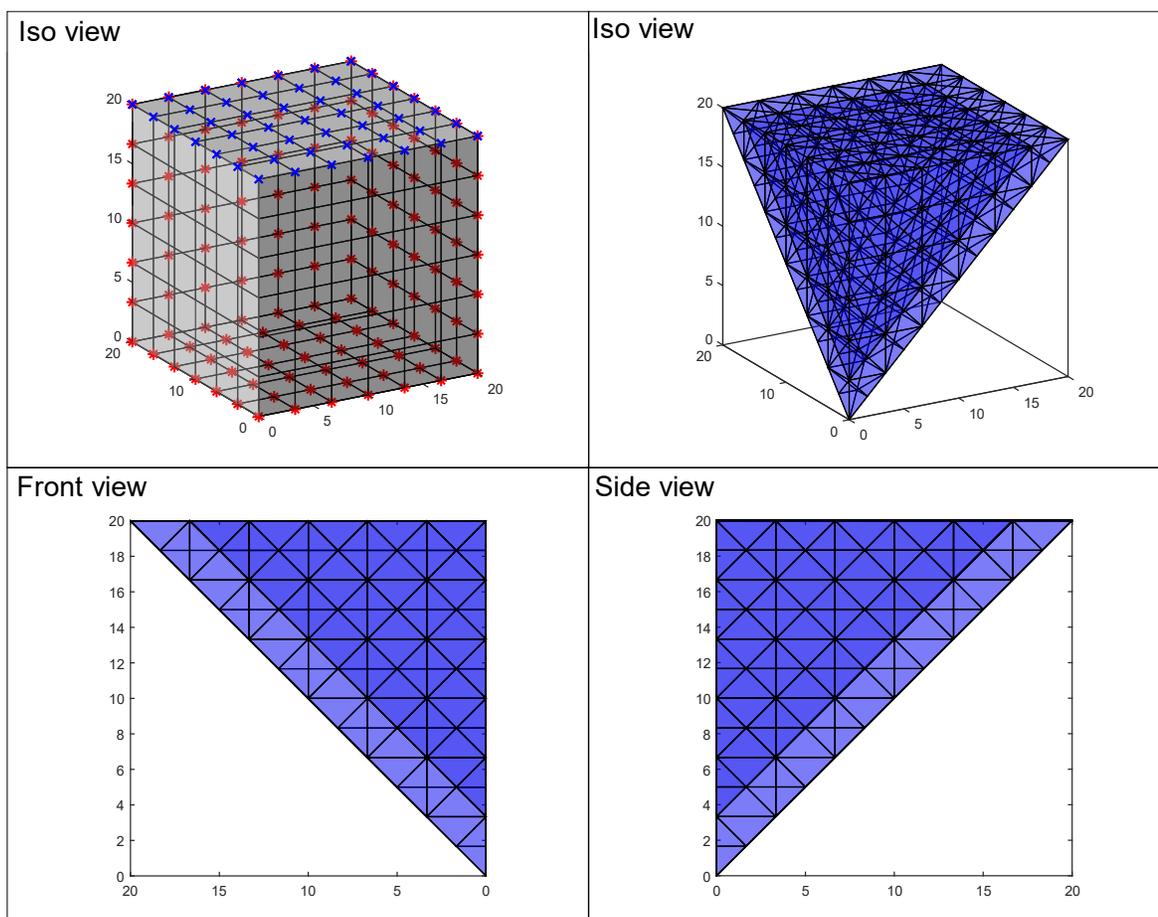


Figura 3.9: Ejemplo de falla esperada para una caja de arena apoyada en tres de sus caras y cargada en su cara superior

La primera falencia del algoritmo es que al aumentar el nivel de ME solo se generan discontinuidades redundantes. En la Figura 3.10 se muestra una alternativa a la falla que

podría ser generada con el algoritmo propuesto para el caso bidimensional y como se podría aproximar esta falla alternativa con el algoritmo de generación tridimensional.

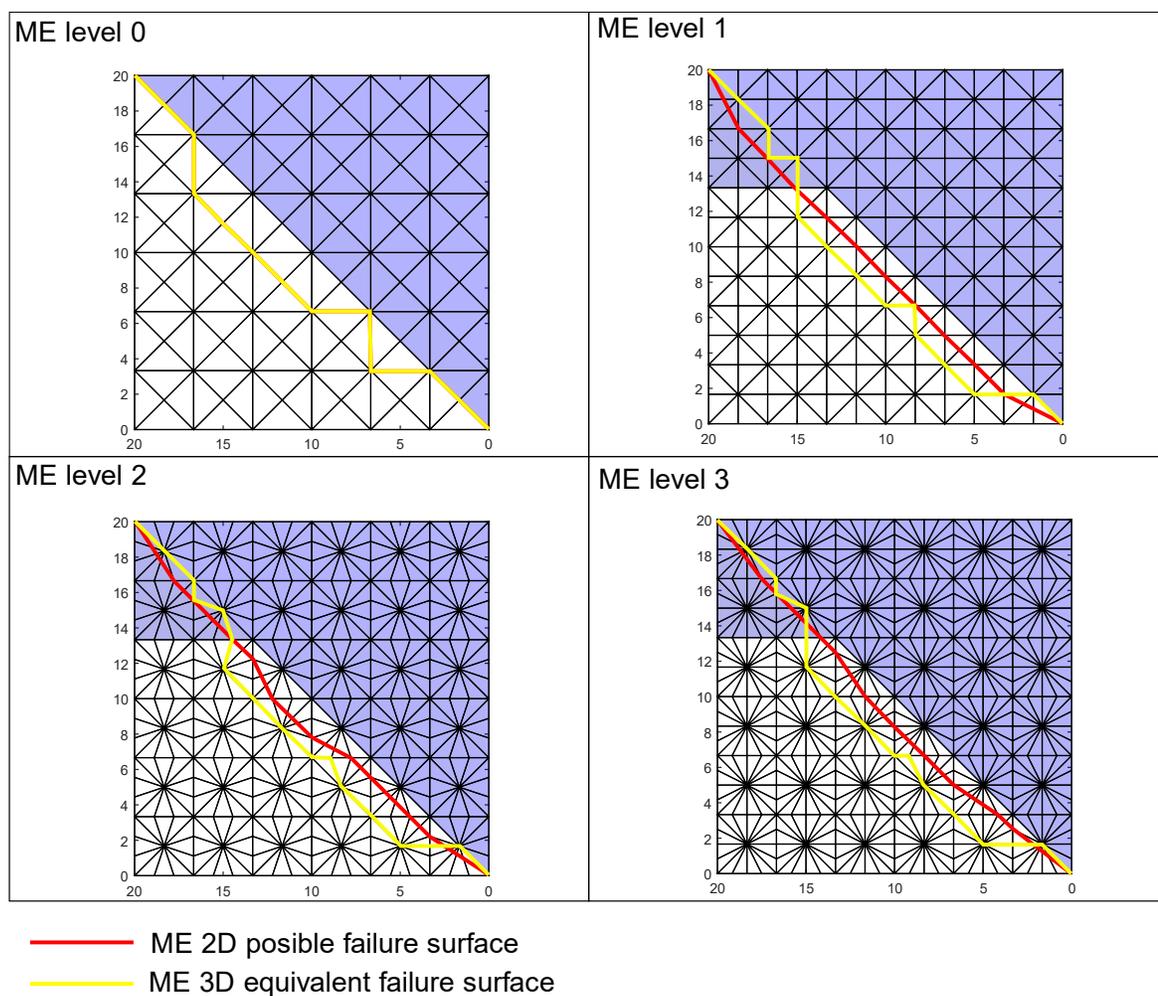


Figura 3.10: Falla alternativa para distintos niveles de ME con los algoritmos de generación 2D y 3D

La Figura 3.10 muestra como, con el algoritmo tridimensional, no es posible generar superficies de falla suaves que pueden ser generadas con el algoritmo de dos dimensiones. Esto se debe a que el algoritmo 3D requiere que las discontinuidades pasen por el centro

del elemento o de las caras, lo que limita la cantidad de posibles fallas. Si bien estas superficies equivalentes tienden a aproximar la curva de falla alternativa al aumentar el nivel de ME, los cambios abruptos producen un aumento de resistencia considerable, de manera que el aumento de nivel de ME genera un aumento de discontinuidades sin generar un aumento convergencia. Es importante destacar que en elementos con caras triangulares el nivel 1 de ME produce cambios importantes con respecto al nivel 0, mientras que elementos con caras cuadriláteras el nivel 1 de ME no produce cambios considerables con respecto al nivel 0. Es por esto por lo que los resultados posteriores solo se mostraran los niveles 0 y 1 de ME.

La segunda falencia del algoritmo de generación propuesto se encuentra en el sesgo direccional en elementos con caras triangulares. En la Figura 3.11 se muestra las fallas obtenidas al utilizar distintos elementos en la malla base.

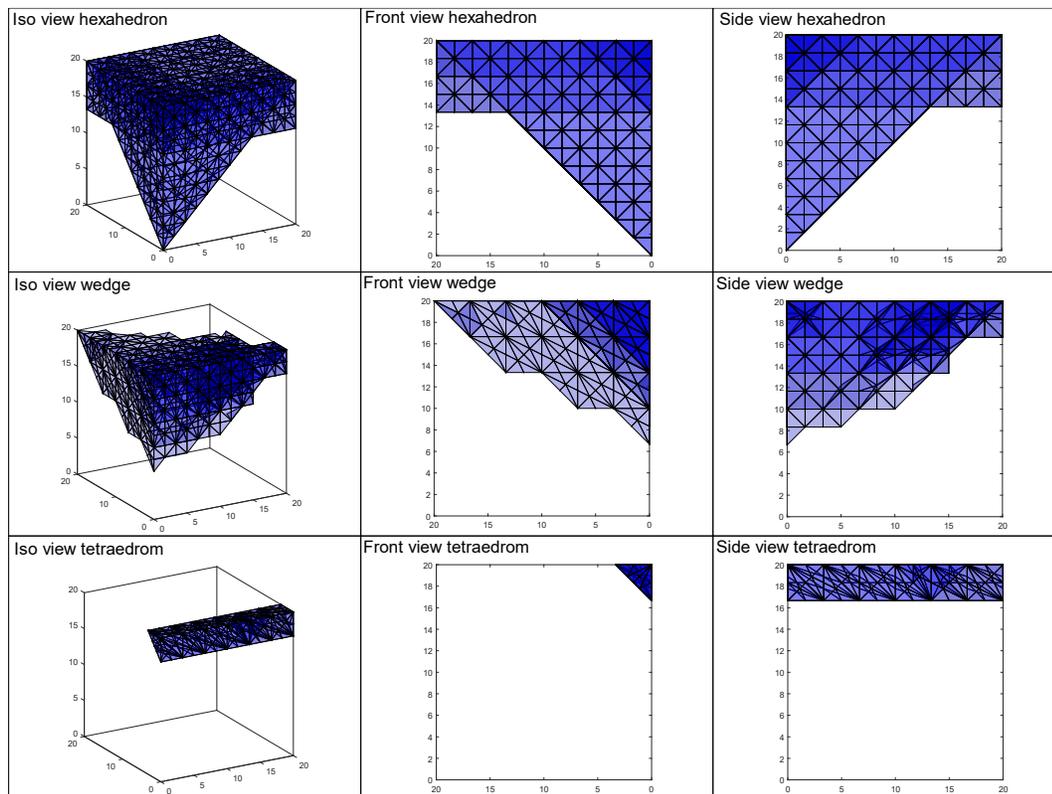


Figura 3.11: Fallas obtenidas para el ejemplo de la Figura 3.9 al usar elementos hexaedros, cuñas y tetraedros con nivel 1 de ME

La figura 3.11 muestra como los elementos con caras triangulares no pueden representar la falla real, esto debido nuevamente a que cualquier superficie de falla debe pasar por el centro del elemento. Los elementos con caras triangulares no pueden mallar de forma simétrica el dominio y en consecuencia la falla resultante no es simétrica. Una malla de hexaedros asimétrica también trae problemas respecto a la simetría de la falla. Es por esto por lo que el método se limita al uso de hexaedros con el fin de limitar los problemas de sesgo direccional. Eventualmente elementos tipo cuña pueden ser utilizados en dominios bidimensionales extruidos sin ocasionar problemas.

#### 4. CÁLCULO DE PRESIÓN DE POROS Y PESO PROPIO

Tanto la presión de poros como el peso propio son parámetros que afectan la superficie de falla. Ambos parámetros deben ser calculados para cada discontinuidad. Con este fin, tanto la presión como el peso son calculados nodalmente en la malla basada en macroelements. Para cada discontinuidad, el valor asociado a la presión de poros y el peso propio se calcula como el promedio de los nodos. Esta es una simplificación, ya que ambos pueden variar de forma no lineal entre dos nodos. No obstante, los algoritmos descritos producen discontinuidades (segmentos o triángulos) de dimensiones relativamente pequeñas; esto hace, así mismo, relativamente pequeño el error producto de este supuesto. Además, esta fuente de error se puede reducir con un refinamiento de la malla base.

El cálculo de presión de poros y peso propio son ilustrados utilizando como ejemplo el problema de la Figura 4.1 y su malla base asociada en la Figura 4.2.

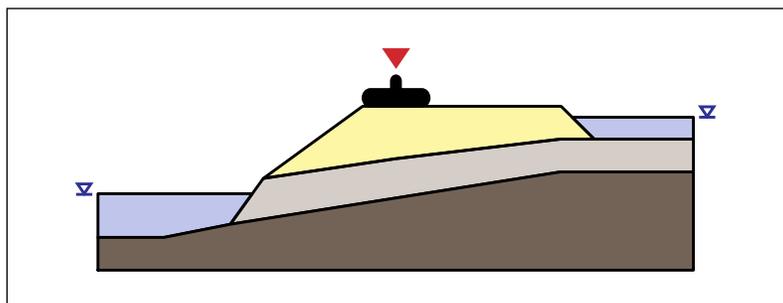


Figura 4.1: Ejemplo utilizado para el cálculo de presión de poros y peso propio

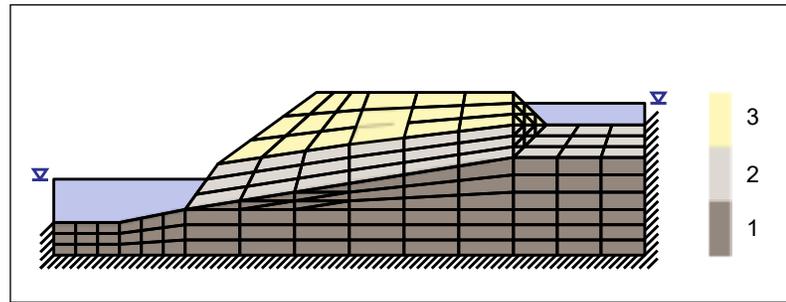


Figura 4.2: Malla utilizada para el cálculo de presión de poros y peso propio

Si bien el ejemplo mostrado es bidimensional, la teoría mostrada es válida tanto para dos como para tres dimensiones.

Es importante destacar que las propiedades del suelo sumergido difieren con las propiedades de suelo seco. Sin embargo, a modo de aproximación para esta investigación, se asume que el suelo no cambia sus propiedades al estar sumergido.

#### 4.1 Cálculo de presión de poros

El algoritmo de generación de discontinuidades requiere una malla base que describa el dominio de análisis y proporcione las propiedades del material. Por lo tanto, es conveniente reutilizar dicha malla para realizar el análisis de flujo de agua en suelo y obtener la presión de poros en cada nodo de la discretización. El análisis de flujo de agua en estado estacionario utiliza el método de elementos finitos para resolver el problema del flujo de agua, el cual tiene como ecuación diferencial gobernante a:

$$\text{div}(\boldsymbol{\kappa}\nabla h) = 0 \quad (4.1)$$

donde  $h$  es la carga hidráulica y  $\boldsymbol{\kappa}$  corresponde al tensor de permeabilidad. La formulación de elementos finitos está dada por:

$$\mathbf{M}\mathbf{h} = \mathbf{q} \quad (4.2)$$

siendo  $\mathbf{h}$  correspondiente al vector de cargas hidráulicas nodales, y donde  $\mathbf{M}$  se obtiene del ensamblaje de todas las matrices  $\mathbf{m}^e$  en el dominio. Para cada elemento la matriz (local) se obtiene mediante

$$\mathbf{m}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \boldsymbol{\kappa} \mathbf{N} dV$$

Con  $\mathbf{N}$  el vector de funciones de forma del elemento. Análogamente, el vector global  $\mathbf{q}$  es obtenido por ensamblaje de todos los vectores  $\mathbf{q}^e$  en el dominio. Sin pérdida de generalidad, para efectos de esta investigación se asume condiciones de borde impermeables lo que lleva a la siguiente expresión para  $\mathbf{q}^e$ :

$$\mathbf{q}^e = -\mathbf{m}^e \mathbf{h}_0$$

donde  $\mathbf{h}_0$  las cargas hidráulicas conocidas (condiciones de borde). Condiciones de borde más generales para el análisis de flujo estacionario se pueden encontrar en las referencias (Kazda 1990).

Una vez determinada la carga hidráulica, la presión de poros  $u_w$  puede obtenerse en un postproceso como:

$$u_w = \gamma_w(h - z)$$

con  $z$  la cota del punto donde se analiza la presión de poros. La condición  $u_w = 0$  define la napa freática. Sobre la napa existen presiones de poro negativas, que se conservadoramente se ignoran del análisis igualándolas a cero.

La Figura 4.3 muestra la presión de poros que resulta al resolver la ecuación diferencial de carga hidráulica para el ejemplo mostrado en la Figura 4.1, con el nivel freático resultante mostrado junto con la malla base.

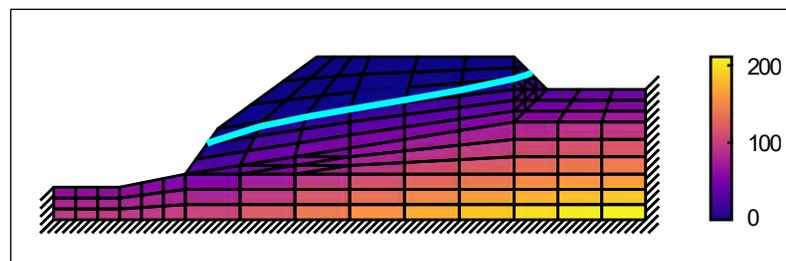


Figura 4.3: Presión de poros en  $kN/m^2$  para el problema mostrado en la Figura 4.1

## 4.2 Cálculo de peso propio

El peso propio, también llamado carga de gravedad, se puede traducir en una carga vertical en cada nodo de la malla. La carga vertical nodal se podría obtener utilizando el método de elementos finitos con gran precisión, pero en este trabajo se decidió utilizar un enfoque más simple a pesar de ser menos preciso.

El procedimiento propuesto consiste en trazar un rayo vertical desde el nodo hacia arriba y determinar los elementos de la malla base que intersecta. Dado que cada elemento de la malla base está compuesto de un solo material, donde el rayo se cruza con el elemento, se puede obtener las siguientes dos magnitudes:

- 1) Largo de la intersección  $l$
- 2) Único peso propio específico  $\gamma$

Estos parámetros constituyen un único “vagón” en el “tren de carga”. Una vez se encuentran todos los elementos que cruza el rayo, los vagones de carga se clasifican en el tren de carga, ilustrado por los rayos A y B en la Figura 4.4. Si más de un vagón comparte la misma posición se utiliza el promedio de los vagones, como se muestra en el rayo C. Esta decisión es discutible, y también se podría utilizar el valor máximo o mínimo.

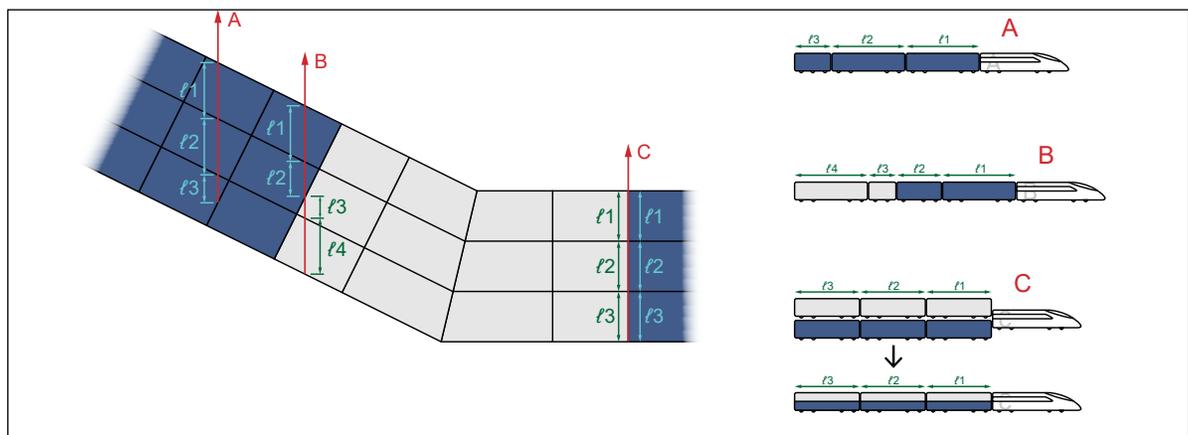


Figura 4.4: Ejemplos de trenes de carga utilizados para el cálculo del peso nodal

Cabe destacar que, en el caso de un dominio sumergido en el agua, es necesario adicionar el peso de agua sobre la superficie del terreno. Esto es relativamente sencillo, ya que basta

con adicionar un nuevo segmento al tren de cargas cuando la napa freática se encuentre sobre el segmento superior del tren.

Si el nivel freático está por encima de la superficie del suelo, se agrega un vagón adicional al frente del tren de carga. Este carro adicional tiene: 1) el peso específico del agua y 2) una longitud igual a la distancia desde la superficie del suelo hasta el nivel freático.

La carga vertical sobre cualquier nodo se obtiene de su tren de carga como:

$$\sigma_v = \sum_{i=1}^{N_{cars}} l_i \gamma_i$$

La Figura 4.5 muestra el resultado del cálculo de peso propio para el ejemplo de la Figura 4.1.

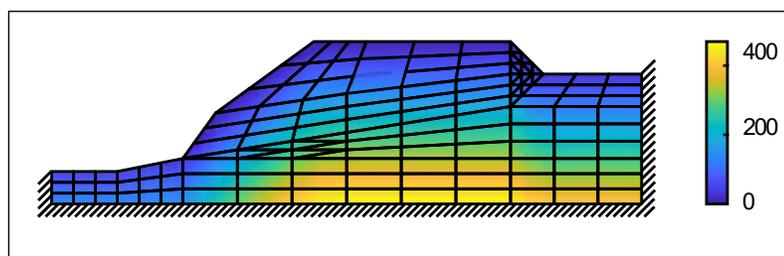


Figura 4.5: Peso propio en  $kN/m^2$  para el ejemplo mostrado en la Figura 4.1

El interés real es la carga vertical sobre la discontinuidad, calculada como el promedio del peso en los nodos multiplicada por la longitud o área de la proyección horizontal de la discontinuidad. Como se señaló anteriormente, este enfoque no es exacto, ya que el peso propio podría tener variaciones sobre la discontinuidad y no estar bien representado por

el promedio de sus nodos. Este error se vuelve pequeño en discontinuidades pequeñas, que se obtienen, afortunadamente, con los algoritmos de generación mostrados en la sección 3.

## 5. RESULTADOS

El algoritmo propuesto se prueba analizando ejemplos documentados en la literatura. Los resultados se obtienen para distintos niveles y tipos de refinamiento. Además, el factor de seguridad también se determina y se compara con valores informados previamente o con el valor teórico, cuando está disponible.

### 5.1 Análisis y verificación 2D

#### 5.1.1 Caso de estudio 1: Capacidad de soporte

Este ejemplo aborda el problema de Prandtl que se muestra en Figura 5.1. El dominio tiene una carga distribuida de  $102,83 \text{ kN/m}^2$ , una cohesión del suelo de  $20 \text{ kPa}$ , un ángulo de fricción nulo (es decir  $\phi = 0$ ) y ningún peso propio del material.

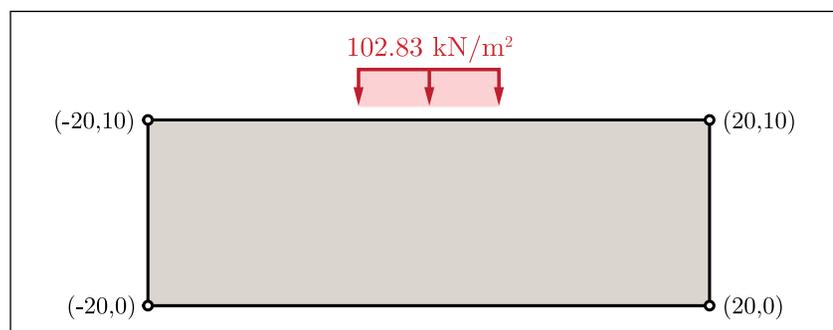


Figura 5.1: Problema de capacidad de soporte de Prandtl

El dominio se discretiza utilizando 12 elementos en su malla base, como se muestra en la Figura 5.2. En la Figura 5.3 se puede observar la superficie de falla obtenida donde, debido a la simetría, cualquier combinación de las superficies obtenidas es posible. La Tabla 5.1 compara los resultados del algoritmo propuesto con un refinamiento variable de

macroelement (ME), tanto con el valor teórico como para una aproximación de software comercial (en este caso, Rocscience Slide2).

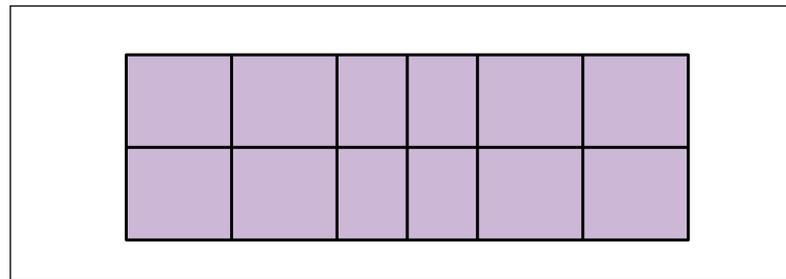


Figura 5.2: Malla base utilizada para el análisis del problema de capacidad de soporte

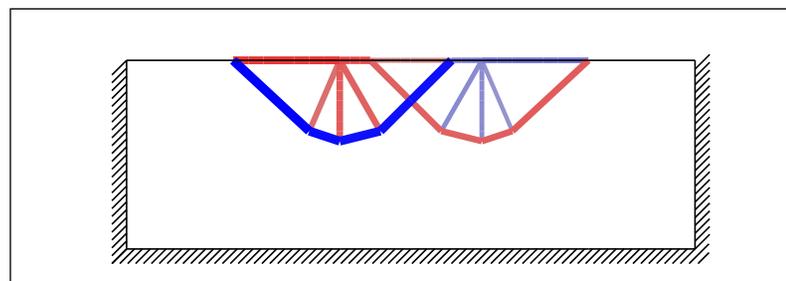


Figura 5.3: Superficie de falla obtenida con el método propuesto con nivel 6 de ME para el problema de capacidad de soporte

Tabla 5.1: Factores de seguridad obtenidos para el problema de capacidad de soporte de Prandtl

Método	FS
Teórico (Prandtl)	1
Spencer (Slide2)	0.94
DLO ME level 2	1.0373
DLO ME level 3	1.0281
DLO ME level 4	1.0183
DLO ME level 5	1.0179
DLO ME level 6	1.0180

### 5.1.2 Caso de estudio 2: Estabilidad de talud de múltiples materiales

Este ejemplo aborda el problema de estabilidad de taludes con varias capas de suelo propuesto por Giam y Donald, que se muestra en la Figura 5.4. Este problema tiene tres tipos de suelos, cuyas propiedades se muestran en la Tabla 5.2.

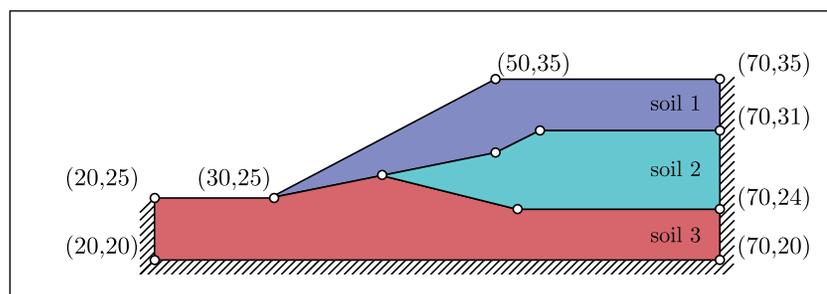


Figura 5.4: Problema de estabilidad de talud de múltiples capas de Giam y Donald

Tabla 5.2: Propiedades del suelo del problema de estabilidad de talud de múltiples capas de Giam y Donald

Suelo	$c'$ [kPa]	$\phi'$ [deg]	$\gamma$ [kN/m <sup>3</sup> ]
Soil 1	0	38	19.5
Soil 2	5.3	23	19.5
Soil 3	7.2	20	19.5

La discretización del dominio utiliza una malla base de 56 elementos, que se puede observar en la Figura 5.5. La superficie de falla obtenida se muestra en la Figura 5.6. La Tabla 5.3 compara los resultados del algoritmo propuesto con un refinamiento variable de

macroelement (ME) tanto con el valor reportado en la literatura como para una aproximación de software comercial (en este caso, Rocscience Slide2).

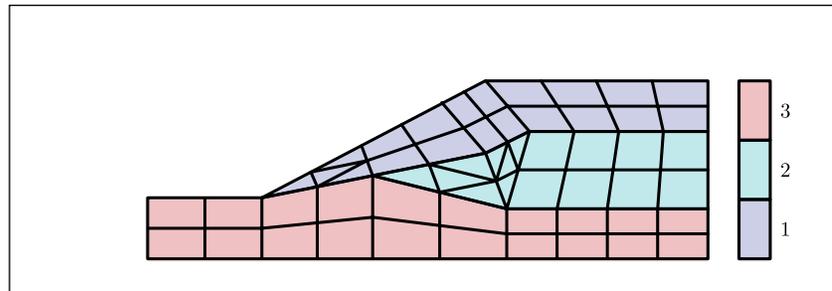


Figura 5.5: Malla base utilizada para el problema de estabilidad del talud de múltiples capas

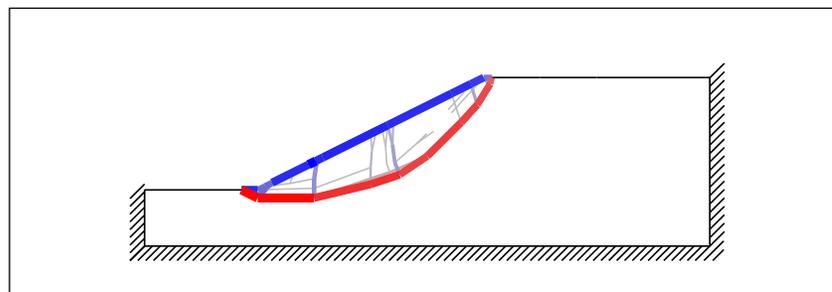


Figura 5.6: Superficie de falla obtenida con el método propuesto con nivel 6 de ME para el problema de estabilidad de talud de múltiples capas

Tabla 5.3 Factores de seguridad obtenidos para el problema de estabilidad de talud de múltiples capas de Giam y Donald

Método	FS
(Giam & Donald)	1.39
Bishop (Slide)	1.405
Spencer (Slide)	1.375
DLO ME level 2	1.4267
DLO ME level 3	1.4183
DLO ME level 4	1.4016
DLO ME level 5	1.3920
DLO ME level 6	1.3908

### 5.1.3 Caso de estudio 3: Presa de suelo

Este ejemplo estudia el problema de presa de suelo con flujo de agua propuesto por Duncan y Wright. El problema se muestra en la Figura 5.7. Las propiedades del suelo en este problema se muestran en la Tabla 5.4.

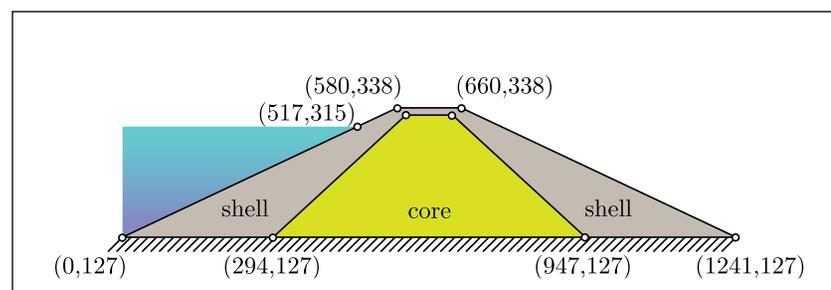


Figura 5.7: Problema de presa de suelo de Duncan y Wright

Tabla 5.4: Propiedades de suelo utilizadas en el problema de presa de suelo de Duncan y Wright

Suelo	$c'$ [psf]	$\phi'$ [deg]	$\gamma$ [psf]	$k$ [ft/s]
Core	0	20	120	$1.67 \cdot 10^{-7}$
Shell	0	38	140	$1.67 \cdot 10^{-5}$

El dominio es discretizado utilizando una malla base de 16 elementos como se muestra en la Figura 5.8. La falla resultante se muestra en la Figura 5.9. La Tabla 5.5 compara los resultados del algoritmo propuesto con un refinamiento variable de macroelement (ME) tanto con el valor reportado en la literatura como para una aproximación de software comercial (en este caso Rocscience Slide2).

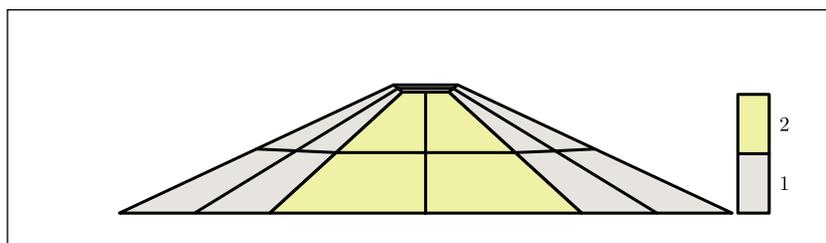


Figura 5.8: Malla base utilizada para el problema de presa de suelo

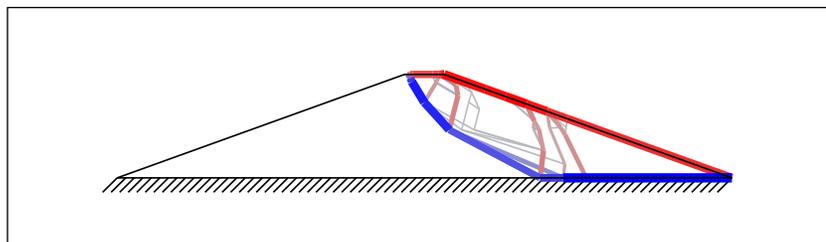


Figura 5.9: Superficie de falla obtenida con el método propuesto con nivel 6 de ME para el problema de presa de suelo

Tabla 5.5 Factores de seguridad obtenidos para el problema de presa de suelo de Duncan y Wright

Método	FS
(Duncan & Wright)	1.67
Bishop (Slide)	1.478
Spencer (Slide)	1.570
DLO ME level 2	1.5762
DLO ME level 3	1.5263
DLO ME level 4	1.5200
DLO ME level 5	1.5098
DLO ME level 6	1.5092

Es importante destacar que, en ejemplos con la presencia de napa freática, el refinado de malla trae resultados no deseados al producirse fallas superficiales de bajo factor de seguridad como la mostrada en la Figura 5.10. Este inconveniente evita el poder encontrar el factor de seguridad crítico mediante el método de bisección. Esta falla no deseada no se produce al realizar refinado en el nivel ME.

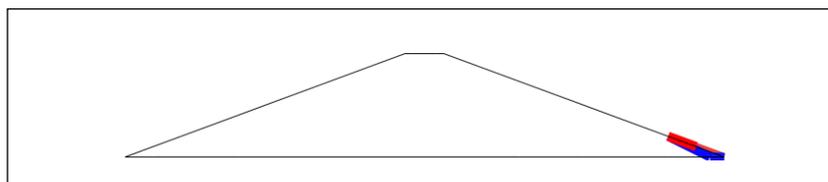


Figura 5.10: Falla superficial producida por el refinado de malla

## 5.2 Estabilidad, convergencia y escalabilidad 2D

La implementación del método se llevó a cabo en Matlab, mientras que el estudio de convergencia y escalabilidad se llevó a cabo en un computador personal móvil con un procesador Intel<sup>®</sup> Core<sup>™</sup> i7-1065G7 con 24GB de memoria RAM. La escalabilidad del método propuesto se estudia en sus dos versiones:

1. El cálculo de la superficie de falla para un factor de seguridad fijo.
2. El algoritmo de bisección que busca el factor de seguridad crítico.

Los tiempos de ejecución del modelo de Prandtl de capacidad de soporte, considerando un factor de seguridad de 2 y para distintas mallas base y niveles de ME, se muestran en la Figura 5.11. Para el mismo modelo, los tiempos de convergencia para el método de búsqueda del factor de seguridad crítico se muestran en la Figura 5.12.

El método propuesto, el cual determina el factor de seguridad crítico para el problema de Prandtl, efectivamente converge al valor teórico al aumentar el refinado. La Figura 5.13 muestra la convergencia con distintas curvas para cada nivel de ME. A excepción del nivel 0 de ME, que no tiene refinado de macroelement, el método converge desde arriba a la solución teórica. Esto es esperado mientras el refinado, ya sea de malla base o de nivel ME, enriquezca el espacio de solución. El enriquecimiento del espacio solución hace al problema más propenso a fallar, ya que entrega una mejor aproximación a la superficie de falla que requiere una menor cantidad de energía para fallar.

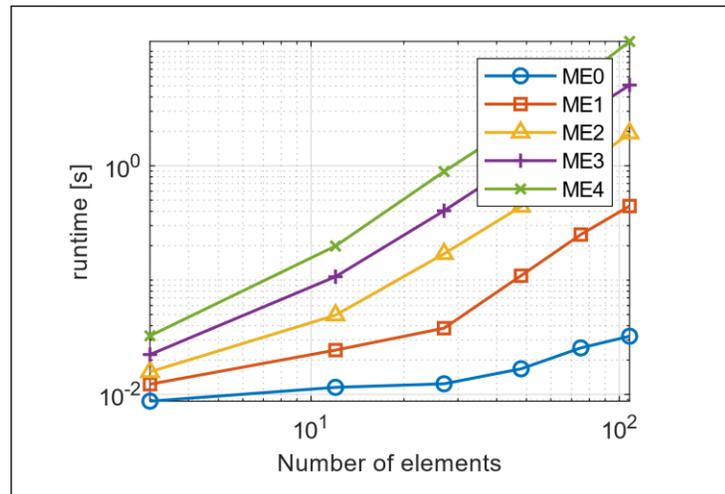


Figura 5.11: Tiempo de cómputo para distintas mallas base y niveles de ME para el problema de Prandtl calculando la superficie de falla para un FS fijo

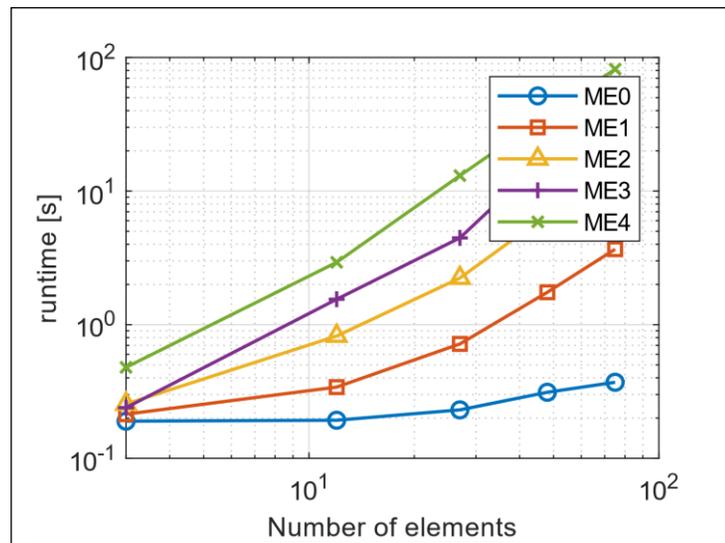


Figura 5.12: Tiempo de cómputo para distintas mallas base y niveles de ME para el problema de Prandtl determinando el FS crítico y su superficie asociada

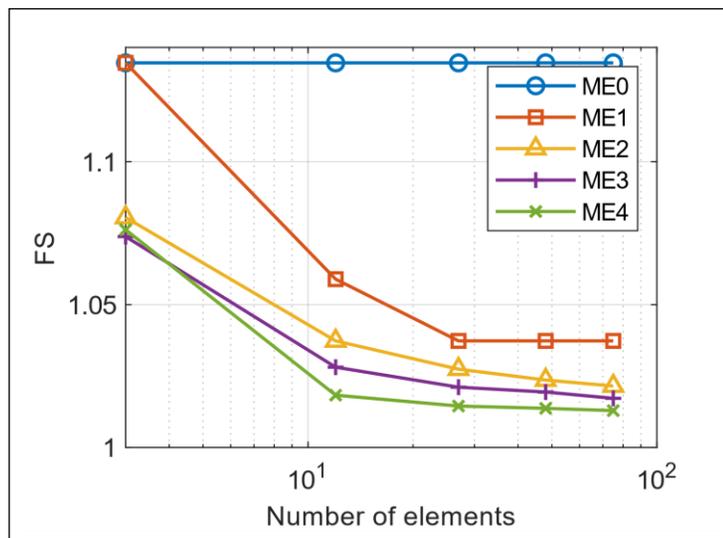


Figura 5.13: Convergencia del factor de seguridad calculado para distintas mallas base y niveles de ME

Analizando los resultados de la Figura 5.13, no queda claro cuales son los efectos de cada tipo de refinado; es decir, refinado de malla base y el aumento en el nivel de ME. Para aislar el efecto que tiene cada refinado en la calidad de la solución, se propone la siguiente comparación: comenzando desde las mismas condiciones, se produce una secuencia que solo refina la malla base y se compara con otra que solo aumenta el nivel de ME. Los resultados de ambas secuencias de refinado se muestran en la Figura 5.14.

El tiempo de ejecución del método propuesto depende principalmente del número de discontinuidades presentes en el problema de optimización. Por lo tanto, si dos modelos del mismo problema tienen tiempo de ejecución similares, se puede esperar un número similar de discontinuidades en ambos. No obstante, los dos tipos de refinamiento disponibles en el método propuesto (malla base y nivel ME) enriquecen el espacio

solución de manera diferente. La Figura 5.14 sugiere que aumentar el nivel de ME conduce a un mejor enriquecimiento del espacio solución en comparación con el refinamiento de la malla base. No hay garantía de que este comportamiento sea siempre cierto; sin embargo, esta tendencia se ha observado en todos los ejemplos de este trabajo.

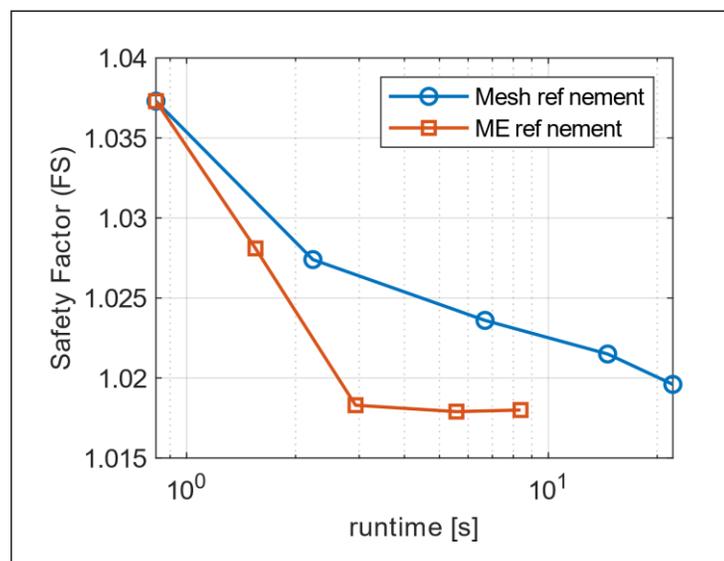


Figura 5.14: Estimación del factor de seguridad versus el tiempo de cómputo para los casos donde: a) la malla base es refinada progresivamente; b) el nivel ME aumenta.

### 5.3 Análisis y verificación 3D

#### 5.3.1 Caso de estudio 1: Capacidad de soporte

Este ejemplo aborda el problema de Prandtl que se muestra en Figura 5.1, en su versión tridimensional. Las propiedades del dominio son las mismas y corresponden a una carga

distribuida de  $102,83 \text{ kN/m}^2$ , una cohesión del suelo de  $20 \text{ kPa}$ , un ángulo de fricción nulo (es decir  $\phi = 0$ ) y ningún peso propio del material.

A diferencia del caso bidimensional, como se mostró en la sección 3, el aumento en el refinado en el nivel de ME no trae mejoras en los resultados, a menos de que existan elementos con caras triangulares donde el nivel 1 de ME trae mejoras con respecto al nivel 0. Es por esto por lo que los resultados obtenidos serán mostrados para distintas mallas base, para los niveles 0 y 1 de ME. Una de las mallas utilizadas (malla base de 243 elementos) se muestra en la Figura 5.15. La superficie de falla obtenida para la malla mostrada en la Figura 5.15 se muestra en la Figura 5.16. La Tabla 5.6 compara los resultados del algoritmo propuesto con un refinamiento variable de malla base con el valor teórico.

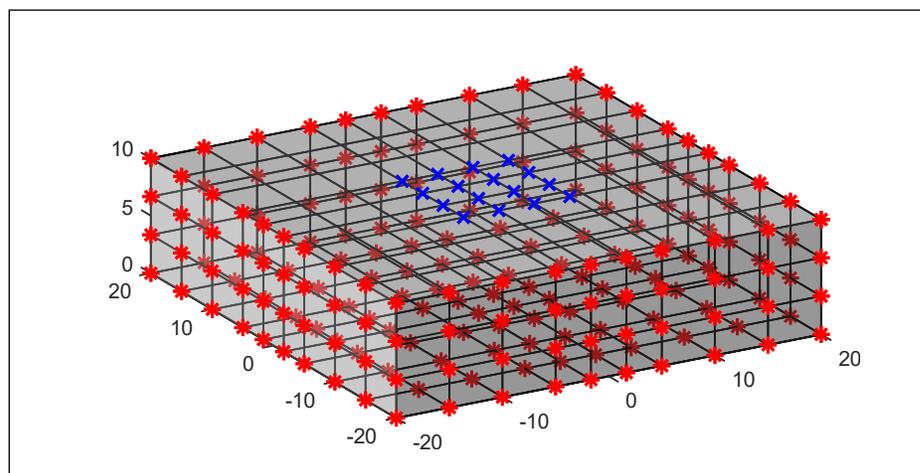


Figura 5.15: Malla base de 243 elementos utilizada para el análisis del problema de capacidad de soporte en tres dimensiones

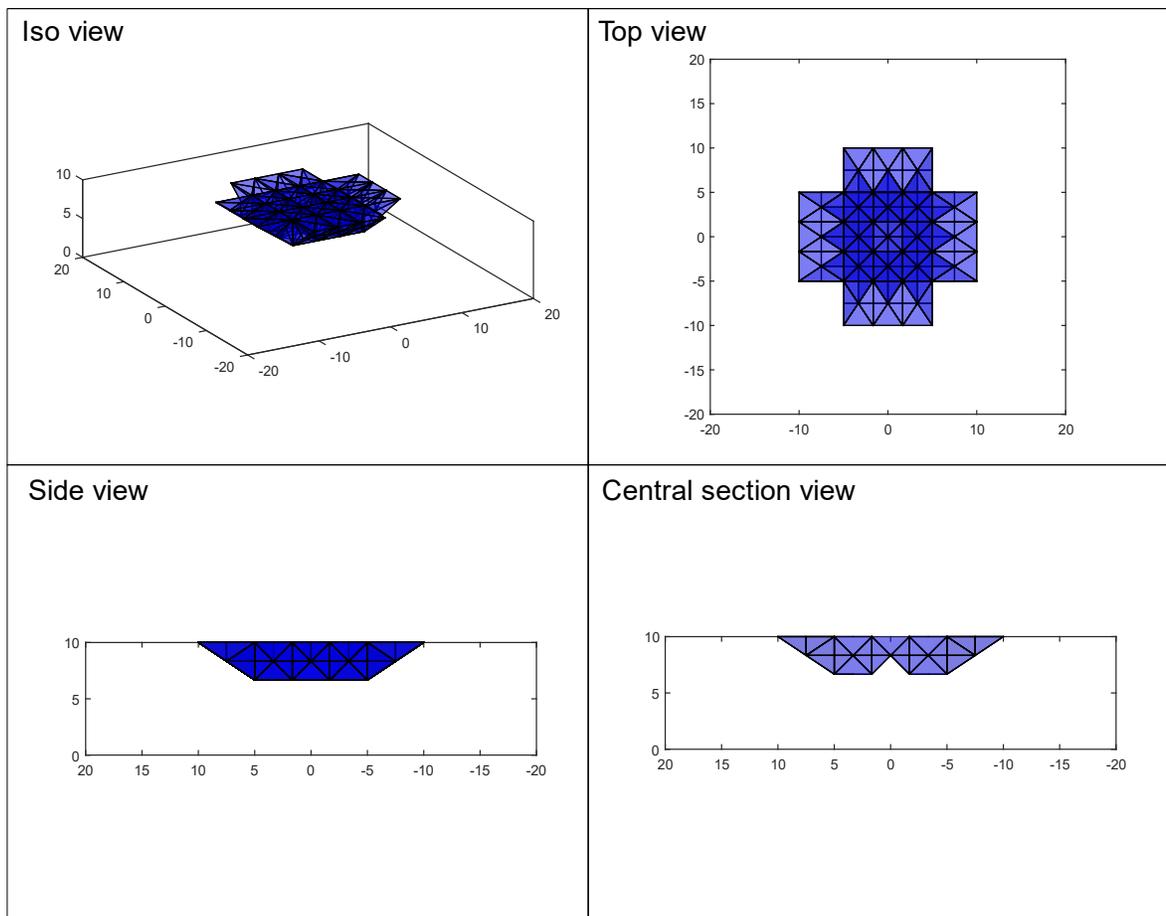


Figura 5.16: Superficie de falla obtenida con el método propuesto con nivel 0 de ME para la malla mostrada en la Figura 5.15

Tabla 5.6: Factores de seguridad obtenidos para el problema de capacidad de soporte de Prandtl en tres dimensiones

Método	FS
Teórico (Prandtl)	1.2
DLO 9 elements ME level 0	1.6413
DLO 9 elements ME level 1	1.6051
DLO 72 elements ME level 0	1.3609
DLO 72 elements ME level 1	1.3609
DLO 243 elements ME level 0	1.2951
DLO 243 elements ME level 1	1.2951
DLO 576 elements ME level 0	1.2536
DLO 576 elements ME level 1	1.2536
DLO 1125 elements ME level 0	1.2277
DLO 1125 elements ME level 1	1.2277

### 5.3.2 Caso de estudio 2: Estabilidad de talud de múltiples materiales

Este ejemplo aborda el problema de estabilidad de taludes con varias capas de suelo propuesto por Giam y Donald, y se muestra en la Figura 5.4 en su versión tridimensional extruido 250 m. Este problema mantiene las propiedades mostradas en la Tabla 5.2.

Al igual que en el caso de estudio anterior, los resultados se muestran para distintos refinamientos de malla base para los niveles 0 y 1 de ME. La Figura 5.17 muestra una de las mallas utilizadas (malla base de 2268 elementos). La superficie de falla obtenida se

muestra en la Figura 5.18. La Tabla 5.7 compara los resultados del algoritmo propuesto con un refinamiento variable de macroelement (ME) tanto con el valor reportado en la literatura como para una aproximación de software comercial (en este caso Rocscience Slide2).

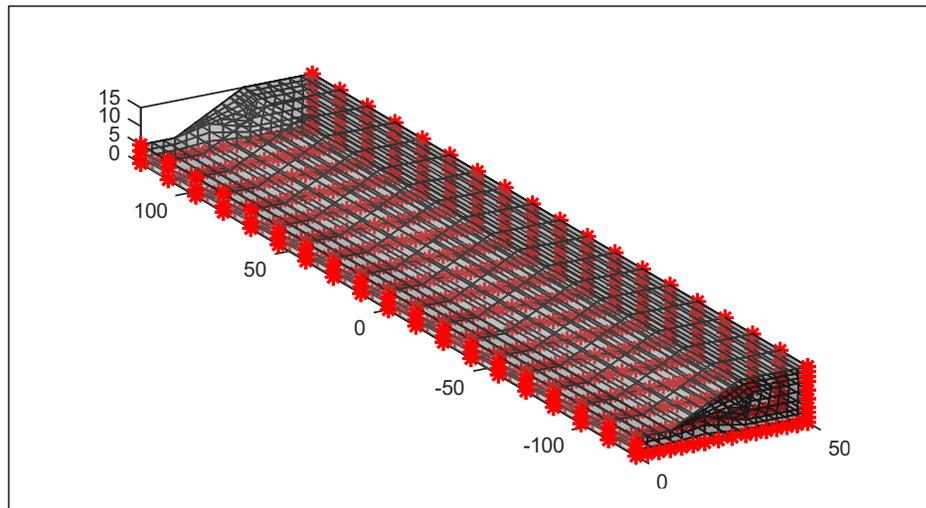


Figura 5.17: Malla base de 2268 elementos utilizada para el análisis del problema de talud de múltiples capas en tres dimensiones

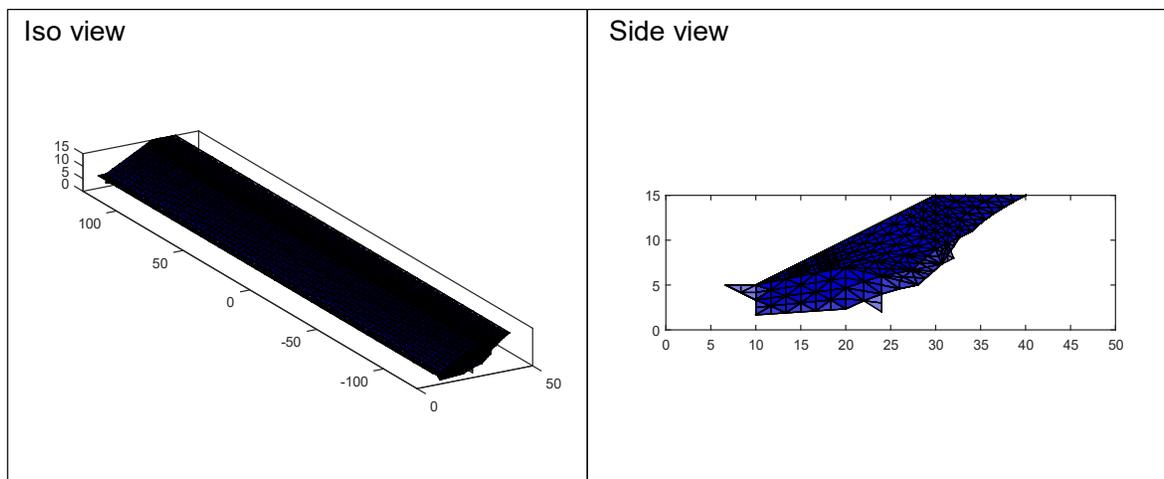


Figura 5.18: Superficie de falla obtenida con el método propuesto con nivel 0 de ME para la malla mostrada en la Figura 5.17

Tabla 5.7 Factores de seguridad obtenidos para el problema de estabilidad de talud de múltiples capas de Giam y Donald en tres dimensiones

Método	FS
(Giam & Donald)	1.39
Bishop (Slide2)	1.405
Spencer (Slide2)	1.375
DLO 84 elements ME level 0	1.8147
DLO 84 elements ME level 1	1.7398
DLO 672 elements ME level 0	1.7528
DLO 672 elements ME level 1	1.6747
DLO 2268 elements ME level 0	1.6917
DLO 2268 elements ME level 1	1.5947
DLO 5376 elements ME level 0	1.6554
DLO 5376 elements ME level 1	1.5628
DLO 10500 elements ME level 0	1.6351
DLO 10500 elements ME level 1	1.5473

### 5.3.3 Caso de estudio 3: Presa de suelo

Este ejemplo estudia el problema de presa de suelo con flujo de agua propuesto por Duncan y Wrigth en su versión tridimensional extruyendo el dominio bidimensional 8000 ft. El problema se muestra en la Figura 5.7. Las propiedades del suelo se pueden observar, al igual que para el ejemplo en dos dimensiones, en la Tabla 5.4.

El dominio es discretizado con distintas mallas base para los niveles 0 y 1 de ME. Una de las mallas utilizadas (malla base de 192 elementos) se muestra en la Figura 5.19. La falla resultante para la malla mostrada en la Figura 5.19 se muestra en la Figura 5.20. La Tabla 5.8 compara los resultados del algoritmo propuesto con un refinamiento variable de malla base tanto con el valor reportado en la literatura como para una aproximación de software comercial (en este caso Rocscience Slide2).

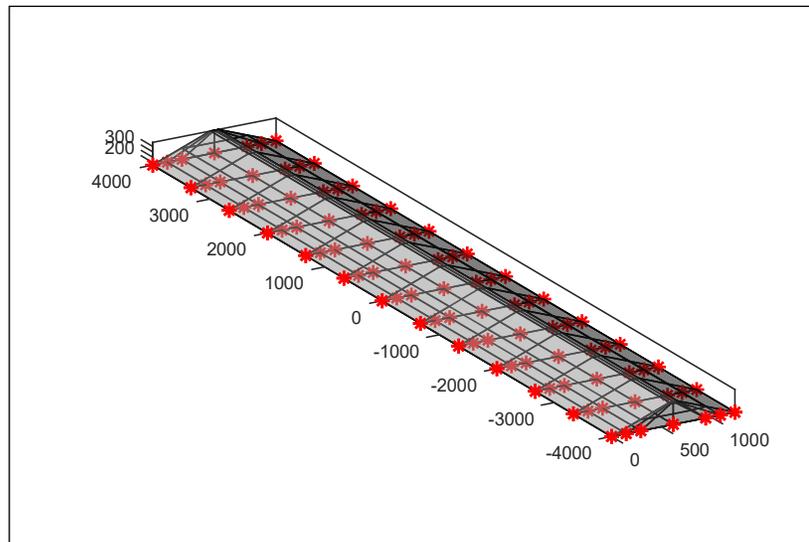


Figura 5.19: Malla base de 192 elementos utilizada para el análisis del problema de presa de suelo en tres dimensiones

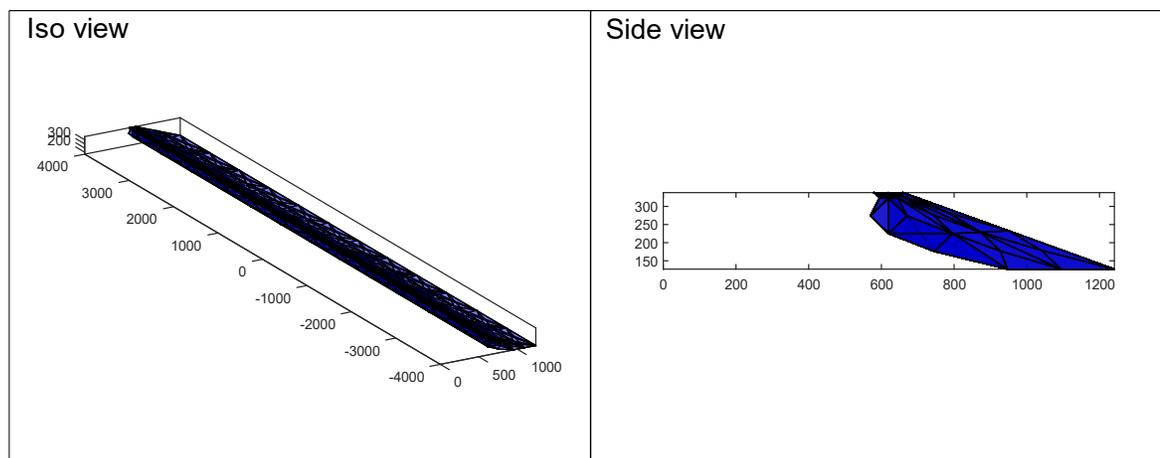


Figura 5.20: Superficie de falla obtenida con el método propuesto con nivel 0 de ME para la malla mostrada en la Figura 5.19

Tabla 5.8 Factores de seguridad obtenidos para el problema de presa de suelo de Duncan y Wright en tres dimensiones

Método	FS
(Duncan & Wright)	1.67
Bishop (Slide2)	1.478
Spencer (Slide2)	1.570
DLO 24 elements ME level 0	1.8676
DLO 24 elements ME level 1	1.8676
DLO 192 elements ME level 0	1.8423
DLO 192 elements ME level 1	1.8391

Es importante destacar que, al igual que en el caso bidimensional, en ejemplos con la presencia de napa freática el refinado de malla trae resultados no deseados al producirse fallas superficiales de bajo factor de seguridad como la mostrada en la Figura 5.21. Este inconveniente evita el poder encontrar el factor de seguridad crítico mediante el método

de bisección. Al no tener un patrón de refinado de nivel ME que mejore los resultados, este problema no puede ser evitado con el esquema de generación actual.

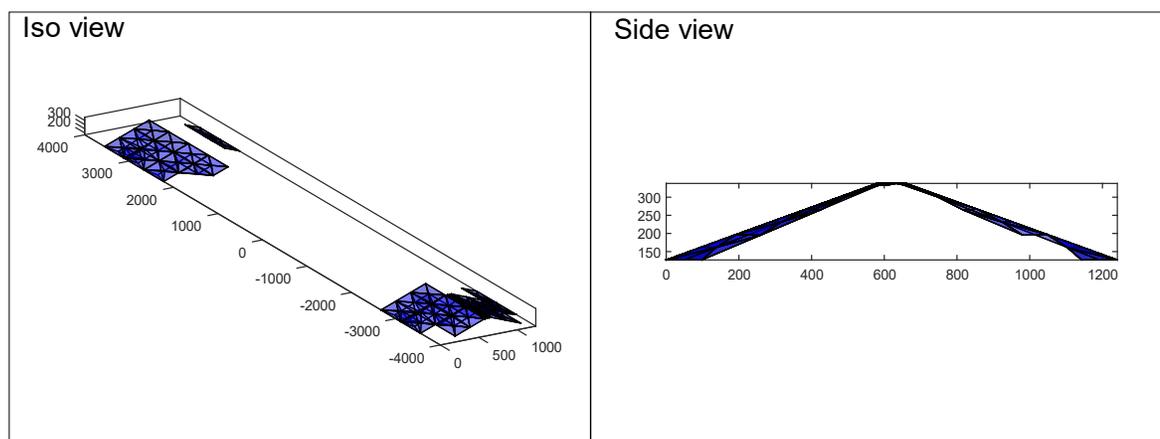


Figura 5.21: Falla superficial tridimensional producida por el refinado de malla

#### 5.4 Estabilidad, convergencia y escalabilidad 3D

La implementación del método se llevó a cabo en Matlab con el optimizador cuadrático de Gurobi, mientras que el estudio de convergencia y escalabilidad se llevó a cabo en un computador personal móvil con un procesador Intel® Core™ i7-1065G7 con 24GB de memoria RAM. La escalabilidad del método propuesto se estudia en sus dos versiones:

1. El cálculo de la superficie de falla para un factor de seguridad fijo.
2. El algoritmo de bisección que busca el factor de seguridad crítico.

Los tiempos de ejecución del modelo de Prandtl de capacidad de soporte en tres dimensiones considerando un factor de seguridad de 2, para distintas mallas base y niveles de ME 0 y 1, se muestran en la Figura 5.22. Para el mismo modelo, los tiempos de

convergencia para el método de búsqueda del factor de seguridad crítico se muestran en la Figura 5.23.

El método propuesto, el cual determina el factor de seguridad crítico para el problema de Prandl, efectivamente converge al valor teórico al aumentar el refinado. La Figura 5.24 muestra la convergencia con distintas curvas para los niveles de ME 0 y 1. El método converge desde arriba a la solución teórica. Al igual que en el caso bidimensional, el enriquecimiento del espacio solución hace al problema más propenso a fallar, ya que entrega una mejor aproximación a la superficie de falla que requiere una menor cantidad de energía para fallar.

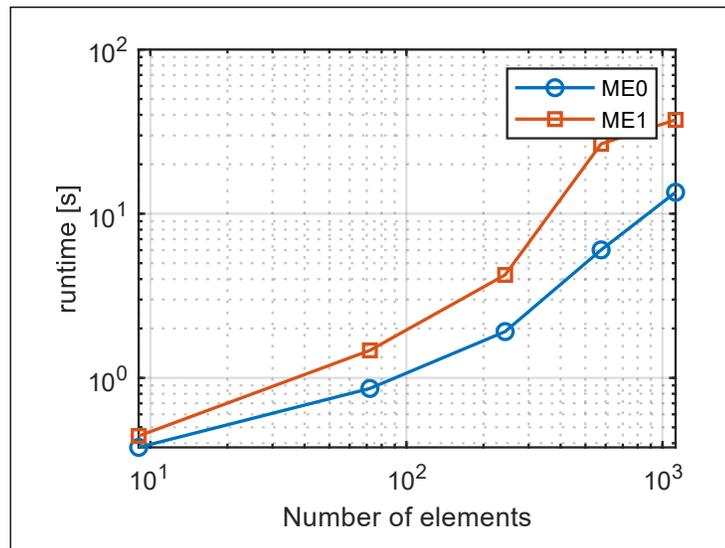


Figura 5.22: Tiempo de cómputo para distintas mallas base y niveles de ME para el problema de Prandtl en tres dimensiones calculando la superficie de falla para un FS fijo

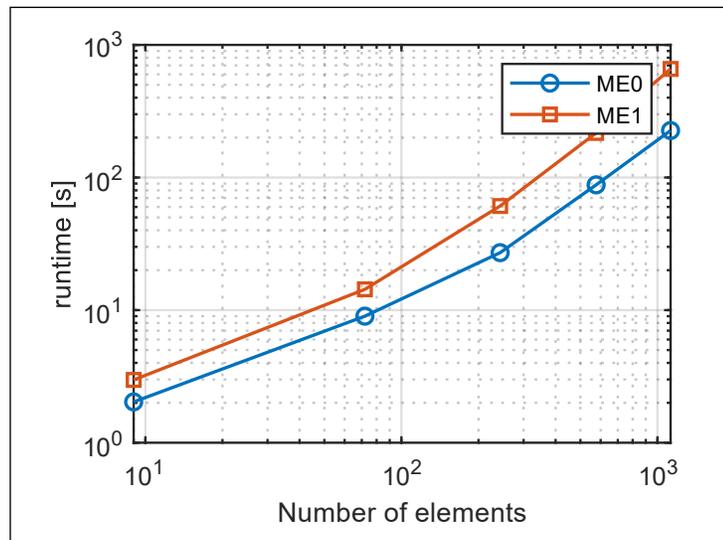


Figura 5.23: Tiempo de cómputo para distintas mallas base y niveles de ME para el problema de Prandtl en tres dimensiones determinando el FS crítico y su superficie asociada

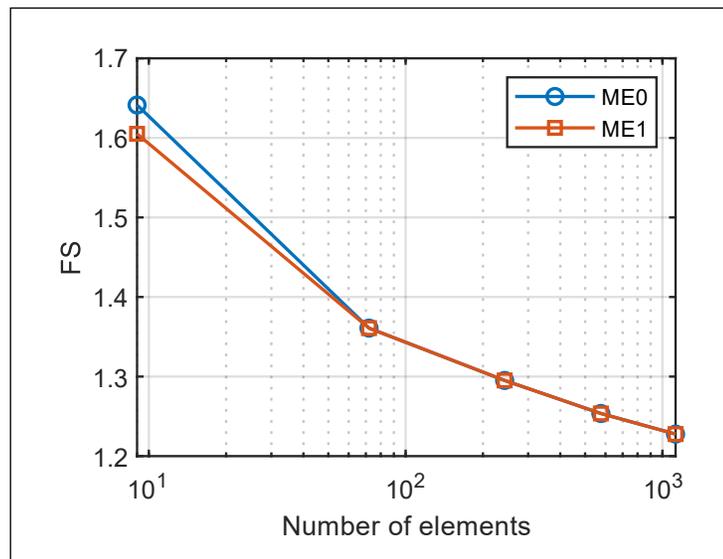


Figura 5.24: Convergencia del factor de seguridad calculado para distintas mallas base y niveles de ME en tres dimensiones

Analizando los resultados de la Figura 5.24, está claro que el refinado de ME no mejora la solución, ya que no existen elementos de caras triangulares en la malla. Es por esto por

lo que, para el algoritmo de generación propuesto, resulta conveniente solo el refinado de malla. El refinado ME aumenta la cantidad de discontinuidades pero sin enriquecer realmente el espacio solución, lo que lleva a un mayor tiempo de optimización pero sin mejora en los resultados.

## 6. CONCLUSIONES

El método de optimización por discontinuidades o *discontinuity layout optimization* (DLO) analiza numéricamente la falla de materiales granulares y cohesivos. Su principal ventaja radica en el hecho de que no se requiere ningún conocimiento o suposición a priori de la superficie de falla crítica. La idea principal radica en extraer la superficie de falla de una red de discontinuidades altamente densa y redundante que cubre todo el dominio. Este trabajo propone dos métodos de generación de discontinuidades, en dos y tres dimensiones, que enriquecen los elementos utilizados para definir localmente el dominio. Este enriquecimiento local se basa en el enfoque de macroelements propuesto previamente para la optimización de reticulados, un tipo de optimización topológica. El método de generación bidimensional crea localmente, en cada elemento primitivo enriquecido, una red de discontinuidades utilizando operaciones de grafos para luego transformar estas redes en patrones y estamparlas sobre todo el dominio. Mientras tanto, el método de generación de tres dimensiones también crea localmente una red de discontinuidades dentro de cada elemento, pero utilizando un patrón preestablecido con el fin de evitar el solapamiento entre las discontinuidades, lo que produce pérdidas de eficiencia y algunos problemas adicionales como la redundancia de niveles ME y la dependencia de los elementos de la malla. Ambos algoritmos permiten una generación rápida de discontinuidades, el trabajo con dominios de varios materiales y la reducción de la complejidad al generar discontinuidades de pequeñas dimensiones.

Adicionalmente, la formulación original de DLO se amplió para incluir los efectos de la presión de poros. Los elementos utilizados para discretizar el dominio tienen un doble propósito, ya que pueden utilizarse para resolver el problema de flujo de agua y determinar el peso propio sobre todo el dominio. Esta formulación (ampliada) se modifica nuevamente a un nuevo método que calcula el factor de seguridad de un problema, a menudo necesario en la práctica de ingeniería geotécnica. La inclusión del efecto de flujo del agua y la metodología para cálculo del factor de seguridad establece el camino para hacer de DLO un análisis alternativo a las metodologías ya establecidas.

Finalmente, es importante destacar que, a pesar de que en este trabajo se logró mejorar algunas de las falencias del método en cuanto a la formulación y los algoritmos de generación de discontinuidades, el método DLO continúa teniendo inconvenientes; principalmente, una mayor demanda computacional en comparación con otros métodos más establecidos. Sin embargo, el método de generación de discontinuidades bidimensional propuesto genera pequeñas discontinuidades que mostraron escalar mejor al utilizar un refinado en el nivel de ME que al refinado de malla, logrando converger a la solución más rápido. Si bien esto no resuelve por completo el problema de la demanda computacional, reduce la brecha hacia su uso en la práctica de la ingeniería. Mientras tanto, el método de generación de discontinuidades tridimensional propuesto genera pequeñas discontinuidades, pero solo es posible refinar la malla para aumentar la convergencia, ya que el aumento de nivel ME propuesto solo genera un aumento redundante de las discontinuidades. Por tanto, en el caso de tres dimensiones, aun es

necesaria la búsqueda de mejores algoritmos de generación de discontinuidades y así permitir el futuro uso del método en la práctica ingenieril.

## BIBLIOGRAFIA

Clarke, S.D., Smith, C.C., Gilbert, M.: Analysis of the stability of sheet pile walls using Discontinuity Layout Optimization. Numerical Methods in Geotechnical Engineering - Proceedings of the 7<sup>th</sup> European Conference on Numerical Methods in Geotechnical Engineering pp. 163–168 (2010). DOI 10.1201/b10551-32

Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E.: Concepts and applications of finite element analysis, 4th edn. Wiley (2001)

Dorn, W.S., Gomory, R.E., Greenberg, H.J.: Automatic design of optimal structures. Journal de Mecanique 3(1), 25–52 (1964)

Duncan, J.M., Wright, S.G., Brandon, T.L.: Soil Strength and Slope Stability, 2nd edn. Wiley, Hoboken, NJ, USA (2014)

Giam, P.S.K., Donald, I.: Example problems for testing soil slope stability programs. Tech. rep., Department of Civil Engineering, Monash University (1989)

Gilbert, M., Smith, C.: On the analogy between structural layout optimization and plastic limit analysis formulations \*. In: 8<sup>th</sup> World Congress on Computational Mechanics (WCCM8). Venice, Italy (2008)

Gilbert, M., Smith, C., Darwich, W., Tyas, A.: LimitState:GEO (accessed August 24, 2021). URL <https://www.limitstate.com/geo>

Gilbert, M., Smith, C.C., Haslam, I.W., Pritchard, T.J.: Application of Discontinuity Layout Optimization to geotechnical limit analysis problems. Numerical Methods in Geotechnical Engineering - Proceedings of the 7<sup>th</sup> European Conference on Numerical Methods in Geotechnical Engineering pp. 169–174 (2010)

Gilbert, M., Smith, C.C., Pritchard, T.J.: Masonry arch analysis using discontinuity layout optimisation. Proceedings of the Institution of Civil Engineers: Engineering and Computational Mechanics 163(3), 155–166 (2010). DOI 10.1680/eacm.2010.163.3.155

Gilbert, M., Tyas, A.: Layout optimization of large-scale pin-jointed frames. Engineering Computations 20(8), 1044–1064 (2003). DOI 10.1108/02644400310503017

Hawksbee, S., Smith, C., Gilbert, M.: Application of discontinuity layout optimization to three-dimensional plasticity problems. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 469(2155) (2013). DOI 10.1098/rspa.2013. 0009

Hemp, W.S.: Optimum Structures, 1<sup>st</sup> edn. Oxford University Press, Oxford, UK (1973)

Istok, J.: Groundwater Modeling by the Finite Element Method, vol. 13, 1st edn. American Geophysical Union, Washington DC, USA (1989)

Karmarkar, N.: A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica* 4, 373–395 (1984)

Kazda, I.: Finite Element Techniques in Groundwater Flow Studies, 1st edn. Elsevier, Amsterdam, Netherlands (1990)

Lemke: the dual method of solving the linear programming problem. *Naval research Logistics Quarterly* 1, 36–47 (1954)

Michell, A.G.M.: The limits of economy of material in frame- structures. *Philosophical Magazine Series 6* 8(47), 589–597 (1904). DOI 10.1080/14786440409463229

Park, K., Paulino, G.H., Celes, W., Espinha, R.: Adaptive mesh refinement and coarsening for cohesive zone modeling of dynamic fracture. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 92, 1–35 (2012). DOI 10.1002/nme.3163

Prager, W.: On a problem of optimal design. In: W. Olszak (ed.) *IUTAM Symposium on non-homogeneity in elasticity and plasticity*, pp. 125–132. Pergamon Press, Warsaw, Poland (1958)

Rocscience Inc: Slide2: 2D slope stability program (accessed August 24, 2021). URL <https://www.rocscience.com/software/slide2>

Smith, C.C.: Complete limiting stress solutions for the bearing capacity of strip footings on a Mohr-Coulomb soil. *Geotechnique* 55(8), 607–612 (2005). DOI 10.1680/geot.2005.55.8.607

Smith, C.C., Cubrinovski, M.: Pseudo-static limit analysis by discontinuity layout optimization: Application to seismic analysis of retaining walls. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 31(10), 1311–1323 (2011)

Smith, C.C., Gilbert, M.: Application of discontinuity layout optimization to plane plasticity problems. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 463, 2461–2484 (2007). DOI 10.1098/rspa.2006.1788

Smith, C.C., Gilbert, M., González-Castejón, J., Ouakka, S.: Application of Computational Design Optimization in Geotechnical Engineering. In: *Geo-Congress 2020 GSP 320*, 1964, pp. 510–517 (2020). DOI 10.1061/9780784482803.055

- Smith, O.D.S.: Generation of ground structures for 2d and 3d design domains. *Engineering Computations* 15, 462–500 (1998). DOI 10.1108/02644409810219820
- Sokól, T.: A 99 line code for discretized michell truss optimization written in mathematica. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 43, 181–190 (2011). DOI 10.1007/s00158-010-0557-z
- Wright, M.: The interior-point revolution in optimization: history, recent developments, and lasting consequences. *Bulletin of the American mathematical society* 42(1), 39–56 (2005). DOI 10.1090/S0273-0979-04-01040-7
- Zegard, T., Paulino, G.H.: Grand — ground structure based topology optimization for arbitrary 2d domains using matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 50, 861–882 (2014). DOI 10.1007/s00158-014-1085-z
- Zegard, T., Paulino, G.H.: Grand3 — ground structure based topology optimization for arbitrary 3d domains using matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 52, 1161–1184 (2015). DOI 10.1007/s00158-015-1284-2
- Zhang, X., Maheshwari, S., Ramos, A.S., Paulino, G.H.: Macroelement and macropatch approaches to structural topology optimization using the ground structure method. *Journal of Structural Engineering* 142, 04016090 (2016). DOI 10.1061/(asce)st.1943-541x.0001524
- Zhang, Y.: Multi-slicing strategy for the three-dimensional discontinuity layout optimization (3D DLO). *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 41(4), 488–507 (2017). DOI 10.1002/nag.2566
- Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., Fox, D.D.: *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*, 7th edn. Butterworth-Heinemann, Kidlington, Oxford (2014)