



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
PHYSICS INSTITUTE

Non-linear statistical dynamics of the elastic plate out of equilibrium

By

Ignacio Pavez Vásquez

Thesis submitted to the Faculty of Physics of Pontificia Universidad Católica de Chile, as one of the requirements to qualify for the academic Master's degree in Physics.

Supervisor : Dr. Gustavo Düring

Committee : Dr. Rafael Benguria

Dr. Sergio Rica

July, 2021

Santiago, Chile.

Agradecimientos

Tengo tanto y a tantas personas que agradecer que es difícil ordenar las ideas. Primero quiero agradecer a quienes han sido el pilar fundamental durante toda mi vida: mis padres, Alonso y Rossana. Necesitaría más de una vida para agradecerles por apoyarme en todas las decisiones que he tomado y, sin importar el contexto, por estar siempre a mi lado. Mi más sincera gratitud, con todo mi corazón.

A mi estimado profesor, Dr. Gustavo Düring, quiero agradecerle tanto personal como científicamente. Fue su motivación y su gusto por aprender, lo que hizo que encontrara real significado en trabajar en física. Fue su paciencia y compromiso, lo que me permitió crear confianza en mí mismo. Fueron sus sabios consejos, los que me ayudaron a tomar algunas de las decisiones más difíciles que me han tocado. Por eso y mucho más, gracias.

Gracias a mis amigas y amigos que me apoyaron cuando más lo necesitaba. Especialmente a Gubi(Gabriela Muñoz), Javier (Alarcón), Tomi (Tomás Douuds) y Paula (Ulloa). Sin ellos, seguramente seguiría hundido. Gracias también a aquellos con los que compartí hablando de física y me ayudaron, de la mejor manera, a clarificar mis dudas. Si bien en éste último punto hay mucha gente para mencionar, quiero hacer una mención especial a Tewi(Esteban Cárdenas).

También quisiera agradecer a los profesores del Instituto de Física que se dieron el tiempo y, con la mejor disposición, me ayudaron a resolver mis más simples preguntas: Dr. Rafael Benguria y Dr. Enrique Muñoz. Gracias a mis hermanos, Martín, Amaranta, Vicente, Esteban y Ricardo por contribuir con su granito de arena para que yo pueda realizar esta tesis en el mejor ambiente posible.

Finalmente, quiero agradecer al Instituto de Física de la Pontificia Universidad Católica de Chile por financiar gran parte de este programa de Magíster en Física Teórica.

Resumen

En este trabajo se realizó un estudio de las ecuaciones de Föppl-von Karman con el objetivo de entender la transición entre turbulencia de onda débil y fuerte. Para esto, se utilizó un método no-perturbativo proveniente de turbulencia hidrodinámica llamado *Direct Interaction Approximation*. En esta tesis logramos establecer las ecuaciones DIA para las ecuaciones de Föppl-von Karman sujetas a inyección de energía y disipación viscosa. El formalismo se puede utilizar para otras ecuaciones de campo cuya no linealidad sea cúbica. A pesar que no se alcanzó a estudiar el comportamiento exacto de estas ecuaciones, se analizó el estado estacionario. Así, se logró determinar una condición para que esto ocurriera y se demostró la íntima relación de dicho estado con la relación de Fluctuación-Disipación. Comentarios sobre las dificultades para realizar simulaciones numéricas se pueden encontrar al final de la tesis.

Contents

Resumen	2
1 Introducción	5
2 Overview de Teoría de Turbulencia y transición a WT	9
2.1 Algunos hechos sobre turbulencia hidrodinámica	9
2.2 Problema de clausura	12
2.3 Wave Turbulence	13
2.3.1 Breakdown de WT	19
2.3.2 Analogía con proceso de coagulación-fragmentación	20
3 Turbulencia fuerte	23
3.1 Origen de DIA: Teoría de Perturbaciones vs RPT	24
3.2 Sistematización de DIA y comparación con LET	28
3.3 Realizabilidad de DIA	30
3.4 ¿Por qué se cree que DIA falla en capturar el comportamiento de turbulencia hidrodinámica fuerte?	32
4 DIA con formalismo de integrales de camino	34
4.1 Modelo a estudiar y formulación de integral de camino	35
4.2 Teoría de perturbaciones renormalizada	40
4.3 DIA	42
4.4 Límite a WT y corrección a la frecuencia	49
4.5 Sobre simulaciones numéricas directas	53

4.6	Caso estacionario	55
5	Discusión y conclusiones	61
	Appendices	63
	Appendix A Resumen de DIA original	64
	Appendix B Construcción de integral funcional para variables aleatorias complejas	67
	Appendix C Integral Funcional	69
	Appendix D Método diagramático y renormalización	72
	Appendix E Ecuación cinética y corrección a la frecuencia	77
	Appendix F Receta de McComb	82
	Bibliography	83

Chapter 1

Introducción

La palabra *turbulencia* o el adjetivo *turbulento* son de uso común en varias lenguas. En español, generalmente se ocupan para referirse a alguna situación que sea *agitada y desordenada* según la Real Academia de la Lengua Española. Si bien esta descripción no está lejos de la realidad del fenómeno en sí, ya desde comienzos de 1800 ha habido gente que intenta descifrar sus propiedades cuantitativas. Según el trabajo de Darrigol [1], en 1822 Henri Navier ya había hecho notar la diferencia entre flujos *lineales* y *no-lineales*. Luego fue Osborne Reynolds en 1883 el encargado de caracterizar la transición entre ambos estados. Sin embargo, recién en 1887 William Thomson, conocido usualmente como Lord Kelvin, introdujo la palabra *turbulencia* en su trabajo titulado *Stability of motion* [2].

A pesar de que los orígenes de Teoría de Turbulencia son en hidrodinámica, actualmente se sabe que es un fenómeno ubicuo y, desde el siglo 20, que no está necesariamente ligado a fluidos como es el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes(NS). Entre los sistemas que presentan un comportamiento similar podemos encontrar MHD[3], ondas gravitacionales [4], plasma [5], condensados de Bose-Einstein [6], entre otros. Sin embargo, a pesar de que la variedad de sistemas aumentó, el problema de turbulencia es aún un desafío para la física no lineal y la mecánica estadística. Matemáticamente las ecuaciones se caracterizan por la influencia de términos no lineales y numéricamente requiere de una capacidad de procesamiento gigante: en 1970 Orszag estimó que para un número de Reynolds suficientemente alto, la cantidad de operaciones necesarias para encontrar la solución son del orden de 10^{20} [7]. Experimentalmente la situación no es mucho. Si bien es posible alcanzar un número Reynolds suficientemente alto, las suposiciones más generales como isotropía y/o homogeneidad son comúnmente inválidas en sistemas reales. Para experimentos dentro de un

laboratorio, existen problemas como el efecto de caja finita o la incapacidad de crear las mismas condiciones iniciales. Aunque con respecto a esto último existen autores que argumentan que recrear las mismas condiciones iniciales no es una condición necesaria.

Hoy en día sabemos que el fenómeno de turbulencia no está necesariamente relacionado con fluidos, sino que existen sistemas ondulatorios que se comportan de manera similar. Esta rama se conoce como *Wave Turbulence* (WT) o turbulencia débil, que surge a partir de disminuir la influencia de la no-linealidad que rige al sistema. Quizás el mayor logro de esta rama corresponde a lo que se conoce como ecuación cinética, primera vez presentada por Robert Peierls en 1929 en el estudio de fonones en cristales anarmónicos [8]. Esta ecuación describe la dinámica de las densidades espectrales y lo más importante es que exhibe una de las características fundamentales de turbulencia: una solución con flujo constante de energía. Además, comparte una serie de propiedades generales con la ecuación de Boltzmann para gases.

Aunque WT ha logrado describir teóricamente con gran certeza un gran número de sistemas, la necesidad de una teoría analítica para el caso de fuerte no-linealidad es necesaria. Por ejemplo, se puede encontrar una condición para la cual WT deja de ser válida y por ende se presenta la posibilidad de una coexistencia de turbulencia débil y fuerte como correctamente se analiza para el caso de ondas de Langmuir en [9]. Este comportamiento fue estudiado numéricamente por Robinson, Newman y Rubenchik en 1992 [10].

Entre los resultados teóricos fundamentales podemos destacar el trabajo de Kolmogorov y Obukhov, quienes en 1941 reciclaron hábilmente la hipótesis de Lewis Richardson sobre la dinámica de interacción de un conjunto de vórtices. Esto permitió calcular los exponentes del espectro de energía en espacio de Fourier en función del vector de onda y de la tasa de disipación de energía. Es interesante notar que este resultado proviene principalmente de análisis dimensional. Por desgracia, esto no es suficiente para entender el detalle de la dinámica completa. Para intentar remediar la carencia de predicción de la teoría, se ocupa usualmente un enfoque estadístico. Esto debido a que para sistemas caóticos como turbulencia, es más abordable preguntarse por cantidades promediadas que por soluciones específicas para ciertas condiciones iniciales. Sin embargo, aquí nos encontramos con uno de los mayores problemas a resolver dentro del campo: el problema de clausura. Este consiste en que no hay un cierre con respecto a la dependencia entre los momentos. Por ejemplo, el momento de orden 2 va a depender necesariamente de momentos de orden mayor y estos a su vez de unos mayores aún obteniendo una infinita cantidad de ecuaciones a resolver. Para evitar este desastre, lo que uno puede hacer es argumentar cómo esos momentos de orden mayor, pueden escribirse en términos de aquellos de orden menor. Y para esto hay varias elecciones. El primer método fue desarrollado en el contexto

de *Reynolds-average Navier Stokes equations* por Joseph Boussinesq en 1877, el cual obtiene el nombre de *eddy-viscosity constant* [11]. Por fortuna, en Teoría Cuántica de Campos (QFT) ya se han creado diversos métodos relacionados a esta situación. Estos métodos están basados principalmente en una *renormalización* de la expansión primitiva de los campos correspondientes. Es así como nacieron métodos como: Análisis de Wyld [12], Local Energy Transfer (LET) [13, 14] y Direct Interaction Approximation (DIA) [15]. Esta última corresponde al trabajo de Robert Kraichnan, quien luego termina modificando su teoría debido a que no lograba predecir el mismo exponente que Kolmogorov.

A pesar de que puede parecer una prioridad abordar el problema de turbulencia desde un punto de vista general, el objetivo de este trabajo será algo más específico. Nos enfocaremos en el estudio de turbulencia fuerte para una placa elástica, cuya amplitud de deformación viene dada por las ecuaciones de Föppl-von Karmán [16]. Recientemente, este caso fue estudiado numéricamente [17]. Entender la turbulencia fuerte en este sistema, así como su transición desde WT, creemos que permitirá mejorar el entendimiento de turbulencia como fenómeno universal.

Aunque en principio estas ecuaciones son completamente no lineales, el espectro en el régimen de no linealidad débil ha sido ya estudiado teórica, numérica [18] y experimentalmente [19, 20, 21]. Sin embargo, existen situaciones físicas en las que la no-linealidad gobernará la dinámica del sistema. Precisamente en este régimen es donde veremos cambios sustanciales a lo ya estudiado por WT, ya que no observaremos el espectro de Kolmogorov-Zakharov (KZ). Esto debido a que el espectro KZ es válido en el régimen débilmente no lineal. Haciendo simulaciones directas de la amplitud de desplazamiento dada por las ecuaciones de Föppl-von Karmán, se midió el flujo promedio de energía para los 2 tipos de energía asociados de la placa: la parte cinética y la parte de *stretching* [17]. En 1.1 vemos cómo el flujo de energía cinética en el rango inercial es considerablemente dominante por sobre el flujo de energía de la parte de *stretching*, cuya razón de ser nulo es argumentada teóricamente. Este flujo de energía cinética conlleva a una ventana inercial exhibiendo el famoso espectro de Kolmogorov $-5/3$. Es por esto que la motivación principal de este trabajo consiste en entender este cambio de exponente y lo que correspondería a entender la transición entre turbulencia débil y fuerte. En esta tesis construiremos un marco teórico usando un método de perturbaciones renormalizadas conocido como *Direct Interaction Approximation*, con el cual ya se han estudiado sistemas como la ecuación NS [22] o plasmas [23]. Esperamos que nos permita capturar el comportamiento adecuado para un sistema de no linealidad fuerte y que en cierto límite reproduzca el comportamiento descrito por WT.

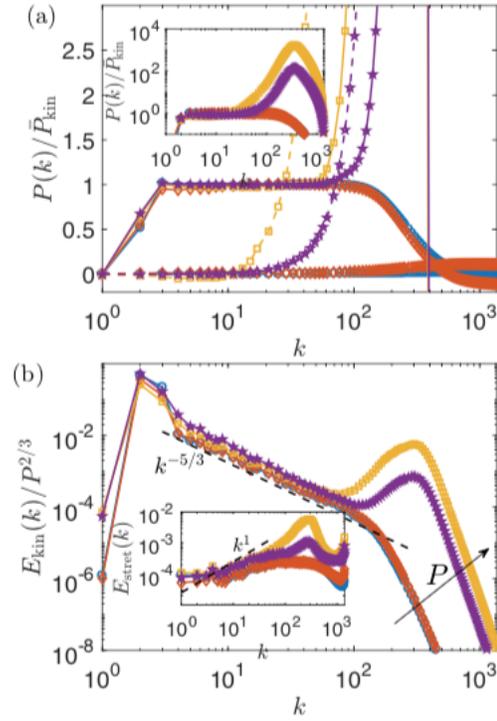


Figure 1.1: (a): Flujo cinético temporalmente promediado (línea sólidas) y flujo de energía de *stretching* también temporalmente promediado (línea discontinua). Aquí, diferentes colores indican realizaciones con distinta amplitud de forcing. (b): Energía cinética temporalmente promediada. La línea discontinua representa el espectro de Kolmogorov. En el gráfico pequeño se muestra la energía de stretching temporalmente promediada, mientras que la línea discontinua representa el espectro termalizado. Extraído de [17]

Chapter 2

Overview de Teoría de Turbulencia y transición a WT

2.1 Algunos hechos sobre turbulencia hidrodinámica

La teoría de turbulencia tiene su origen en el estudio de la hidrodinámica y gran parte de la investigación actual tanto teórica como experimental sigue siendo en base al estudio de fluidos. En esta sección se da a conocer los aspectos básicos y más importantes para el caso hidrodinámico. Empezando con las ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla P + \mu \left(\frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nabla^2 \mathbf{u} \right) \quad (2.1)$$

cuyas soluciones corresponden a un campo vectorial conocido usualmente como velocidad del fluido o de flujo \mathbf{u} como función de la posición \mathbf{x} y el tiempo t . Aquí ρ es la densidad del fluido, P es la presión y μ es la viscosidad del fluido que además se puede expresar como función del estado termodinámico del sistema. Esta ecuación ha sido ampliamente estudiada bajo razonables simplificaciones como suponer $\mu = 0$ en un caso ideal o suponer que se trata de un fluido incompresible $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Si se tiene la intención de estudiar estados fuera del equilibrio termodinámico como lo es turbulencia, la alta no linealidad de la ecuación es inevitable. Los problemas no terminan ahí. Como turbulencia representa un *movimiento caótico*, es decir, pequeñas perturbaciones en las condiciones iniciales pueden resultar en trayectorias muy distintas, es demasiado optimista intentar una descripción determinista. Es por esto que conviene empezar por análisis estadístico de propiedades macroscópicas del sistema: como la energía. Estudiar el problema en espacio

Fourier otorga una pequeña ventaja respecto a la imagen que uno debe tener para sistemas turbulentos: una cascada de energía a través de las diferentes escalas espaciales. Así, decimos que la energía total del sistema E corresponde a

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} E_{3d}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (2.2)$$

donde $E_{3d}(\mathbf{k})$ es el espectro de energía para un sistema de 3 dimensiones dado por:

$$E_{3d}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (2.3)$$

donde el promedio $\langle \cdot \rangle$ se puede pensar en un sistema homogéneo de tal modo que solo dependa de la diferencia de los argumentos de las variables promediadas. Adicionalmente, uno puede enfocarse en turbulencia isotrópica, es decir, $E_{3d}(\mathbf{k}) = E_{3d}(|\mathbf{k}|)$ para así definir $E_{1d}(k) = 4\pi k^2 E_{3d}(|\mathbf{k}|)$

Luego, para poder imaginar que está ocurriendo con las escalas de Fourier, Richardson logró capturar el proceso en un solo concepto: cascada de energía. Richardson postuló (ver 2.1) que el estado turbulento comenzaba con una inyección de energía hacia las grandes escalas (pensar en remolinos para turbulencia hidrodinámica). Luego, de la interacción de estas grandes escalas (interacción local) aparecían escalas levemente menores, las cuales interactuaban produciendo escalas aún menores. Esta secuencia terminaba cuando a cierta escala, considerada bajo ciertos parámetros "pequeña", ya entraba a jugar un rol importante la disipación del sistema.

Usando esta idea, en 1941 Kolmogorov y Obukhov insertaron la hipótesis de la ventana inercial. Esta consiste en que para números de onda lejanos a la escala de inyección k_i y a su vez lejanos a la de disipación k_d (i.e $k_i \ll k \ll k_d$), las propiedades físicas del sistema sólo dependerán de la tasa de disipación de energía ϵ . Así, surge el siguiente argumento dimensional: la hipótesis de Kolmogorov-Obukhov se puede escribir como $E(k) \sim \epsilon^a k^b$, mientras que $[E(k)] = [E][L]$ (L es longitud). Luego, $[E] = [u^2] = m^2/s^2$ mientras que $[\epsilon] = [u^2/t] = \frac{m^2}{s^3}$. De esta forma podemos concluir que

$$E(k) = C \epsilon^{2/3} k^{-5/3}$$

conocido como el espectro de Kolmogorov (K41) donde C es la constante de Kolmogorov. Por lo que el proceso en su totalidad se vería como en la figura 2.2

A pesar de que varios experimentos apoyan la idea de $C = 0.5$, hay varios aspectos a discutir. Por ejem-

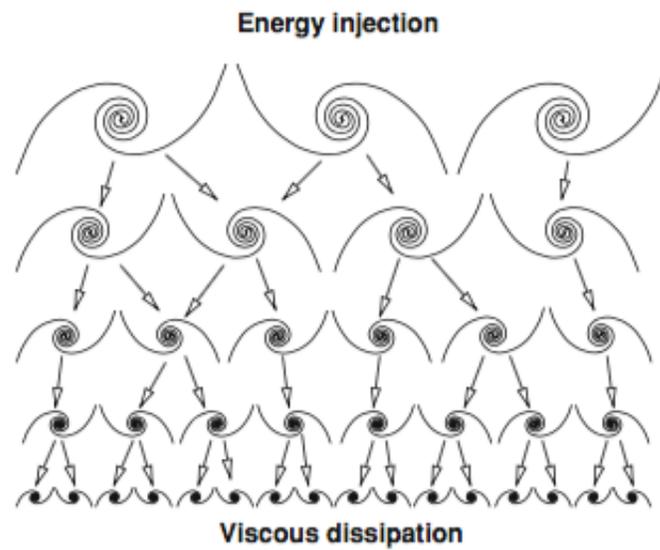


Figure 2.1: Imagen que representa el concepto de cascada de energía de Richardson [24]

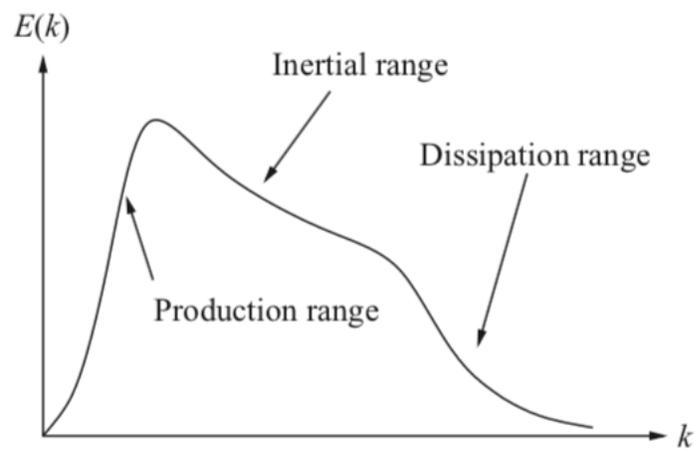


Figure 2.2: Gráfico del espectro teórico de energía según las ideas de Kolmogorov y Obukhov [25]

plo, en un principio uno podría preguntarse cosas como: ¿Es esta constante un número universal o podrá depender del sistema en cuestión?; dado que el flujo está determinado por el número de Reynolds, ¿habrá una relación de esta constante y el número de Reynolds?. Con respecto a la primera, hay resultados que muestran distintas mediciones de esta constante: como por ejemplo en MHD [26], sin embargo, atribuyen esta diferencia a transferencias de energía ineficientes. Para la segunda pregunta, existe evidencia que esta constante sí puede tener relación con el número de Reynolds [27].

2.2 Problema de clausura

Un importante aspecto a mencionar corresponde al problema de clausura. En general, los sistemas no lineales mencionados se pueden llevar a la siguiente estructura mediante la transformada de Fourier:

$$\mathcal{L}a_p = \sum_{q_1 \dots q_n} J_{pq_1 \dots q_n} a_{q_1} \dots a_{q_n} \quad (2.4)$$

donde a_p puede ser la transformada del campo o alguna combinación de transformada de los campos dinámicos, mientras que \mathcal{L} representa un operador diferencial lineal como por ejemplo $\partial_t + \nu_p$ donde ν podría ser la viscosidad. $J_{pq_1 \dots q_n} \in \mathbb{C}$ es el coeficiente de interacción entre los respectivos modos y la suma va sobre los modos de Fourier. La ecuación 2.4 corresponde a un sistema de $n + 1$ modos interactuantes. Tal y como se dijo anteriormente, es conveniente abordar este tipo de ecuaciones desde un enfoque estadístico, de modo que si nos interesa la evolución temporal del momento de orden 2: $\langle a_p(t)a_p^*(t') \rangle$, lo que hacemos es multiplicar 2.4 por $a_p^*(t') =: a_p'^*$ y promediar, obteniendo:

$$\mathcal{L}\langle a_p a_p'^* \rangle = \sum_{q_1 \dots q_n} J_{pq_1 \dots q_n} \langle a_{q_1} \dots a_{q_n} a_p'^* \rangle \quad (2.5)$$

Aquí dejaremos (por mientras) abierto el significado de promediar debido a la cantidad de formas posibles para hacerlo (ensemble mediante condiciones iniciales aleatorias, promedio en tiempo, insertando a mano variables aleatorias, random-coupling, etc), sin embargo asumiremos que ni el operador diferencial \mathcal{L} ni el coeficiente de interacción $J_{pq_1 \dots q_n}$ son variables aleatorias. Lo importante a notar es ver cómo el momento de orden 2 depende necesariamente del momento de orden $n + 1$ y, por lo tanto, habría que saber cómo éste evoluciona. Claramente si queremos saber su dinámica, vamos a necesitar de la evolución del momento de

orden $2n$:

$$\mathcal{L}\langle a_{q_1} \dots a_{q_n} a_p'^* \rangle = \sum_{k_1 \dots k_n} J_{q_1 k_1 \dots k_n} \langle a_{k_1} \dots a_{k_n} a_{q_2} \dots a_p'^* \rangle \quad (2.6)$$

y así infinitamente. Esto es lo que se conoce como problema de clausura. Sin embargo, una clara ventaja es que da la posibilidad de la comparación de distintos resultados y por ende distintos procesos, bajo distintas elecciones.

2.3 Wave Turbulence

Cerca de los años 60 se observaron propiedades turbulentas para sistemas ondulatorios no lineales. Ahora, si bien el término no lineal es un factor importante a considerar para entender la dinámica exacta del sistema, la existencia de un parámetro pequeño permite un análisis perturbativo. Esto quiere decir que podemos considerar los casos en que el término no lineal está dominado por un parámetro pequeño y atacar el problema desde distintos puntos de vista pues la solución base(lineal) está dada por la famosa y extensamente estudiada: ecuación de onda. La combinación de estas ideas da origen a la rama conocida usualmente como Wave Turbulence o Weak Turbulence. Ésta se puede definir como un sistema de ondas aleatorias y no lineales llevado fuera del equilibrio. Este fenómeno, de igual forma que lo anterior, se puede encontrar en muchos sistemas y a distintas escalas. Partiendo desde escalas cuánticas como para NLS [6, 28], escalas clásicas como ondas de capilaridad en la superficie de agua[29] y escalas planetarias como ondas de Alfvén [30].

En general, los sistemas a estudiar se pueden clasificar no sólo según la escala sino que hay más categorías. Una de ellas, es según la relación de dispersión que cumplen sus componentes lineales, por ejemplo:

1. Ondas de gravedad en una superficie de agua $\omega \sim k^{1/2}$
2. Ondas de capilaridad $\omega \sim k^{3/2}$
3. Ondas en una placa elástica $\omega \sim k^2$
4. Ondas de Kelvin (bajo ciertas aproximaciones) $\omega \sim k^2$

Aquí hay 2 aspectos importantes. Lo primero es mencionar que claramente la relación de dispersión no tiene que ser necesariamente una ley en potencia, por ejemplo está el caso de la famosa relación de Bogoliubov. Segundo, debemos mencionar que hay un caso en particular que debe ser tratado con cuidado, especialmente en el contexto de WT: sistemas no dispersivos (i.e $\omega \sim k$). Esto debido a que al ser no dispersivos, la

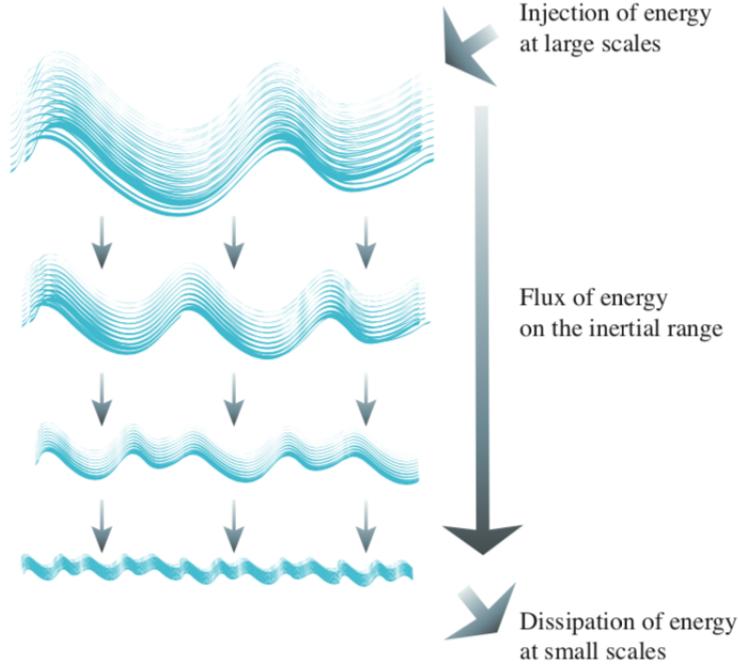


Figure 2.3: Analogía de la cascada de Richardson para un sistema ondulatorio

velocidad de grupo es constante y por ende la interacción no-lineal puede crecer de manera considerable generando estructuras como ondas de choque destruyendo la turbulencia de ondas.

Otra forma de clasificación que podemos hacer sencillamente es según el *número de ondas interactuantes*. ¿A qué nos referimos con esto? Escribiendo la ecuación 2.4 para un caso ondulatorio ($\nu \rightarrow \omega_k$) considerada en su forma más general usando la notación de Newell para las variables canónicas, es decir, $s = 1$ o $s = -1$ de modo que $a_{\mathbf{k}}^{+1} := a_{\mathbf{k}}$ y $a_{\mathbf{k}}^{-1} := a_{-\mathbf{k}}^*$ [31]:

$$(\partial_t + \omega_{\mathbf{k}}) a_{\mathbf{k}}^s(t) = \sum_{s_1 \dots s_n} \int d\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_n L_{\mathbf{k} \mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_n}^{ss_1 \dots s_n} a_{\mathbf{k}_1}^{s_1} \dots a_{\mathbf{k}_n}^{s_n} \quad (2.7)$$

El número de ondas esta generalmente ligado al grado de no linealidad de la ecuación dinámica propia del sistema ¹. Podemos mencionar distintos casos con diferente grado de interacción como sistemas de 3 ondas (MHD [34]) y de 4 ondas como ondas de Langmuir [35]. Éstos últimos suelen presentarse para casos en que hay simetría tipo $z \rightarrow -z$. Órdenes superiores son más escasos, pero podemos encontrar grado 5 en ondas

¹ En ocasiones si la relación de dispersión no permite soluciones no triviales de la ecuación resonante dada por $\delta(\omega + s_1\omega_1 + \dots)$ (como en 2.12), es necesario considerar el estudio de un numero mayor de ondas via transformaciones no lineales. Un ejemplo claro de esto es cuando $\omega \sim k^a$ y $a < 1$, como en ondas de gravedad [32, 33]

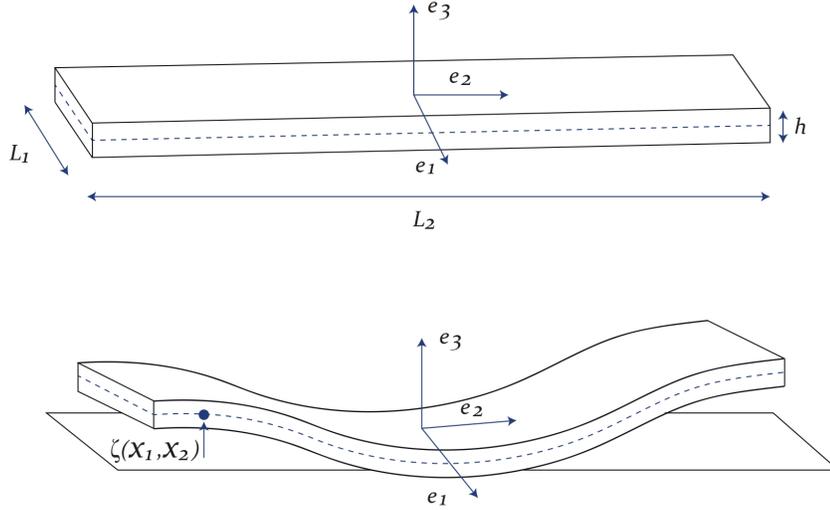


Figure 2.4: Representación gráfica de una placa elástica de dimension $L_1 \times L_2$ y con amplitud de deformación vertical $\zeta(x_1, x_2)$ como función de las coordenadas del plano horizontal.

de gravedad en 1D [33] e incluso 6 ondas para turbulencia de ondas óptica en 1D [36].

Para ejemplificar esto, usaremos el caso físico de la placa elástica. Primero que todo, este sistema corresponde a una placa (ver figura 2.4) con cierta densidad de masa ρ y cierto ancho h . Al añadirle la palabra *elástica*, nos referimos a que la descripción del sistema se hará mediante la amplitud de deformación vertical de la placa ζ , la cual sentirá fuerzas *hookianas*. El valor de ζ vendrá dado por parámetros como el módulo de Young E y el radio de Poisson σ . Además la evolución está gobernada por la versión dinámica de las ecuaciones de Föppl-von Karmán:

$$\rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) = -\frac{Eh^2}{12(1-\sigma^2)} \Delta^2 \zeta(\mathbf{x}, t) + \{\zeta, \chi\}(\mathbf{x}, t) \quad (2.8)$$

$$\frac{1}{E} \Delta^2 \chi(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{2} \{\zeta, \zeta\}(\mathbf{x}, t) \quad (2.9)$$

donde χ representa el stress interno, llamado función de stress de Airy y $\{f, g\} := f_{xx}g_{yy} + f_{yy}g_{xx} - 2f_{xy}g_{xy}$. Estas ecuaciones conservan la energía mecánica total de la placa elástica y el momentum del centro de masa. Además, provienen de una estructura Hamiltoniana que incluye por separado, términos positivos asociados a la energía cinética y términos no lineales consecuencia de la geometría de la deformación. Mediante

transformada de Fourier y cambio de variables, podemos llevar las ecuaciones 2.8 y 2.9 a una ecuación de interacción de 4 ondas ²:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + is\omega_{\mathbf{k}}\right) a_{\mathbf{k}}^s(t) = \sum_{s_1 s_2 s_3} \int L_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}^{s s_1 s_2 s_3} a_{\mathbf{k}_1}^{s_1}(t) a_{\mathbf{k}_2}^{s_2}(t) a_{\mathbf{k}_3}^{s_3}(t) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}) d\mathbf{k}_{123} \quad (2.10)$$

A su vez, el coeficiente de interacción está dado por

$$L_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}^{l_2 s_1 s_2 s_3} = \frac{-il_2}{6\pi^2} (\omega_{-\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}_1}\omega_{\mathbf{k}_2}\omega_{\mathbf{k}_3})^{-1/2} (T_{-\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} + T_{-\mathbf{k}\mathbf{k}_2\mathbf{k}_1\mathbf{k}_3} + T_{-\mathbf{k}\mathbf{k}_3\mathbf{k}_2\mathbf{k}_1}) \quad (2.11)$$

donde $\omega_{\mathbf{k}}$ se obtiene de la relación de dispersión en su forma lineal y

$$T_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4} = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|^2} + \frac{1}{|\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4|^2} \right) (\mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}_2)^2 (\mathbf{k}_3 \times \mathbf{k}_4)^2$$

Matemáticamente, uno se puede desligar un poco de la física y estudiar estos modelos desde un punto de vista genérico. Para esto, lo único necesario es ocupar la ecuación 2.7 y que el coeficiente de interacción satisfaga una serie de propiedades:

1. $L_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}^{s s_1 s_2 s_3} = - \left(L_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}^{s s_1 s_2 s_3} \right)^* = -L_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}^{s s_1 s_2 s_3}$
2. $L_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}^{s s_1 s_2 s_3}$ es simétrico en (1,2,3)
3. $L_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}^{s s_1 s_2 s_3} = 0$ cuando $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = 0$
4. $L_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3}^{s_1 s -s_2 -s_3} = \frac{s_1}{s} L_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}^{s s_1 s_2 s_3}$ cuando $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}$.

El aspecto más importante de todos estos sistemas es que, en el límite débilmente no-lineal, presentan un natural cierre de las ecuaciones dinámicas y como consecuencia principal se obtiene una ecuación cinética para las densidades espectrales definidas por $n_{\mathbf{k}}(t) := \langle |a_{\mathbf{k}}|^2 \rangle$. El nombre que se le dio a esta cantidad física puede ser explicado de distintas formas, más adelante se hará mediante la relación con un proceso de coagulación-fragmentación. La expresión exacta de la ecuación cinética varía ligeramente dependiendo de la cantidad de ondas interactuantes, sin embargo todas ellas tienen la misma estructura. A modo de ejemplo,

²Ésta ecuación se obtiene de escribir el hamiltoniano de las ecuaciones de Föppl-von Karmán haciendo una transformación de Fourier a la amplitud de deformación(detalles de la derivación en [18]). Acá $A_{\mathbf{k}}^s(t) := \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_{s\mathbf{k}}^{-1} \zeta_{s\mathbf{k}}(t) + is\chi_{s\mathbf{k}} \zeta_{s\mathbf{k}}(t))$ con $\chi_{s\mathbf{k}} := \frac{1}{\sqrt{\omega_{s\mathbf{k}} \rho h}}$, $\zeta_{\mathbf{k}}$ la transformada de Fourier de la amplitud de deformación, ρ es la densidad de masa de la placa y h es el ancho de la placa

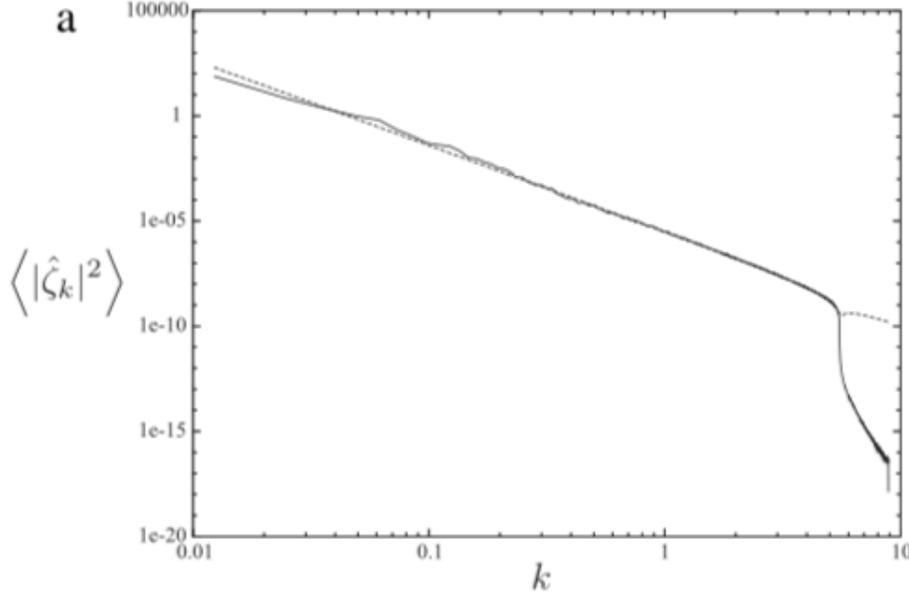


Figure 2.5: Simulación numérica del espectro de $\langle |\hat{\zeta}_k|^2 \rangle$ (línea sólida) comparado con el espectro esperado (línea punteada) obtenida de [18].

la ecuación cinética correspondiente a una placa elástica es :

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{l_2 \mathbf{k}}}{\partial t} &= 12l_2 \pi \epsilon^4 \int |L_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}^{l_2 s_1 s_2 s_3}|^2 \sum_{s_1 s_2 s_3} n_{\mathbf{k}_1} n_{\mathbf{k}_2} n_{\mathbf{k}_3} n_{\mathbf{k}} \left(\frac{l_2}{n_{\mathbf{k}}} - \frac{s_1}{n_{\mathbf{k}_1}} - \frac{s_2}{n_{\mathbf{k}_2}} - \frac{s_3}{n_{\mathbf{k}_3}} \right) \\ &\quad \times \delta(l_2 \omega_{\mathbf{k}} - s_1 \omega_{\mathbf{k}_1} - s_2 \omega_{\mathbf{k}_2} - s_3 \omega_{\mathbf{k}_3}) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}) d\mathbf{k}_{123} \end{aligned} \quad (2.12)$$

siendo ϵ el parámetro pequeño y el coeficiente viene dado por la expresión anterior 2.11. La ecuación cinética es de gran importancia en el estudio de WT por varias razones. Para comenzar, ésta despliega propiedades como: conservación de la energía lineal definida por $E_c := \frac{1}{2} \sum_s \int d\mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}} n_{s\mathbf{k}}$ y la presencia de un teorema H. ¿ Por qué de pronto nos interesa la termodinámica del asunto si queremos estudiar sistemas fuera del equilibrio? Porque a pesar de que las ecuaciones dinámicas iniciales presenten reversibilidad, la ecuación cinética muestra una evolución directa hacia el equilibrio termodinámico para un sistema aislado. Es por esto que si uno define la entropía fuera del equilibrio como $S = \frac{1}{2} \sum_s \int d\mathbf{k} \ln n_{s\mathbf{k}}$, podemos demostrar que efectivamente $\frac{dS}{dt}(t) \geq 0$ para todo t en un sistema aislado. Más aún, para el caso en que el sistema llega al equilibrio termodinámico, i.e $\frac{dS}{dt}(t) = 0$, obtenemos lo que se conoce como distribución de Rayleigh-Jeans $n_{\mathbf{k}} \sim \omega_{\mathbf{k}}^{-1}$ asociado a una equipartición de la energía.

No obstante, lo más interesante son otro tipo de soluciones: aquellas que permiten un flujo constante de

energía a través de las escalas. Éstas fueron por primera vez presentadas por Vladimir Zakharov en 1965 [37] y se les conoce actualmente como soluciones Kolmogorov-Zakharov (KZ) debido a que corresponden al espectro análogo encontrado por Kolmogorov para turbulencia hidrodinámica. Éstas soluciones se encuentran a partir de estudiar el caso estacionario de la ecuación cinética, i.e, $\frac{dn_{\mathbf{k}}}{dt} = 0$ y posteriormente realizar las famosas *transformaciones de Zakharov*, las cuales varían ligeramente dependiendo del número de ondas interactuantes. Éstas transformaciones deben ser tratadas con cuidado, ya que traslada los puntos 0 a infinito y viceversa por lo que podría ocurrir una cancelación de una divergencia con otra de signo opuesto. Usualmente si la integral del término colisional converge, entonces el espectro es una solución válida y decimos que es local. Finalmente y tomando como ejemplo la ecuación cinética 2.12, si decimos que el sistema es isotrópico ($n_{\mathbf{k}} = n_k$) y que nuestra solución va como una ley en potencia $n_k = Ak^\nu$, entonces encontramos que³ :

$$\nu = -\frac{2}{3}\beta - d \implies n_k = Ak^{-\frac{2}{3}\beta - d} \quad (2.13)$$

siendo β el grado de homogeneidad del coeficiente de interacción:

$$L_{\mathbf{a}\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}^{l_2s_1s_2s_3} = a^\beta L_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}^{l_2s_1s_2s_3} \quad (2.14)$$

y d es la dimensión del espacio vectorial de Fourier. Este resultado se conoce como espectro KZ. Ahora, fácilmente uno puede preguntarse, ¿qué tiene que ver esto con un flujo constante de energía? Para poder ver este resultado haremos el siguiente análisis. La energía para cada modo E_k está usualmente ligada al flujo de energía entre las escalas P_k a través de

$$\frac{\partial E_k}{\partial t}(k, t) = -\frac{\partial P_k}{\partial k}(k, t) \quad (2.15)$$

lo cual representa una ecuación de continuidad para la energía. Ahora si $E = \int d\mathbf{k}\omega_k n_k$, es decir no linealidad débil $H_{cin} \gg H_{int}$ (para sistemas Hamiltonianos obviamente), entonces $E_k := \Omega^d \omega_k n_k k^{d-1}$. Luego, $\frac{\partial E_k}{\partial t}(t) = \omega_k \frac{\partial n_k}{\partial t}(t)$. Por lo que si analizamos el caso estacionario obtenemos que P_k debe ser una constante, es decir, P_k no debe depender de k . Analizando los exponentes vemos que si insertamos el espectro KZ en 2.12 entonces veremos que $P_k = P \sim k^0$.

Un importante punto a destacar acá es que para un sistema con más ondas el proceso es similar. Esto tiene

³ Esta no es la única solución que uno puede encontrar. Es posible además encontrar otra solución pero que está ligada a lo que se conoce como cascada inversa del *waveaction* y corresponde a $\nu = -\frac{2}{3}\beta - d + \frac{1}{3}\alpha$ donde $\omega_k \sim k^\alpha$.

como consecuencia una gran diferencia con el espectro de Kolmogorov de hidrodinámica y es que mientras ese resultado es a través de análisis dimensional, el espectro KZ se obtiene de forma analítica y la constante de de Kolmogorov puede ser calculada. Sin embargo, para sistemas que muestran sólo un parámetro de control es posible derivar dimensionalmente el espectro KZ [24].

La validez de las soluciones de KZ ha sido ya puesta a prueba no sólo para la placa elástica sino que para diferentes sistemas. En la figura 2.5 vemos la similitud entre el espectro esperado y la simulación numérica de la deformación de la placa elástica.

2.3.1 Breakdown de WT

Otro aspecto importante es lo que se conoce como *Breakdown* de WT. Como veremos más adelante, para obtener la ecuación cinética será necesario hacer un multiscaling en el tiempo. En simples palabras lo que se hace es separar el tiempo en distintas escalas temporales para así analizar qué ocurre en cada una de ellas. Sin embargo, al hacer esto en un sistema de no linealidad débil, estamos asumiendo que la escala temporal lineal es mucho más rápida que la no-lineal. Para ser más precisos, en un sistema lineal:

$$\frac{dx}{dt} + \omega x = 0 \quad (2.16)$$

De aquí sabemos que una solución posible es $x(t) = Ae^{-\omega t}$, así los cambios en el tiempo están dictados por el producto ωt , de modo que la escala temporal lineal $\tau_L \sim \omega^{-1}$. Sin embargo, esto lo pudimos haber sabido a priori con algo de intuición. Podemos pensar en esta escala temporal como el inverso de cuanto está cambiando el campo en el tiempo y normalizado por el valor del mismo campo. Así

$$\left(\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} \right)^{-1} \sim \tau_L$$

Con este mismo razonamiento, podemos encontrar la escala temporal para el tiempo no lineal. Si en 2.12 insertamos $n_k \sim k^{-s}$ obtenemos que $\frac{dn_k}{dt} \sim k^{-3s+2\beta-\alpha+2d}$. Entonces

$$\frac{1}{n_k} \frac{dn_k}{dt} \sim k^{-2s+2\beta-\alpha+2d} \sim \tau_{NoL}^{-1}$$

Por ende, para que la derivación de la ecuación cinética sea plausible analizamos:

$$\frac{\tau_L}{\tau_{NoL}} \sim k^{-2s+2\beta-2\alpha+2d} \quad (2.17)$$

Así vemos que para pequeñas escalas, si $-2s + 2\beta - 2\alpha + 2d > 0$ entonces el espectro KZ deja de ser válido y de manera inversa para escalas grandes cuando $-2s + 2\beta - 2\alpha + 2d < 0$. Por lo tanto, vemos como el sistema deja de ser débilmente no lineal y es precisamente esta transición el comportamiento que esperamos entender para nuestro sistema.

2.3.2 Analogía con proceso de coagulación-fragmentación

A simple vista, ecuaciones como 2.12 pueden verse bastante complejas y por ende su relación explícita con la dinámica de una cascada de energía no es obvia. Sin embargo, este tipo de ecuaciones ya se han estudiado en sistemas mucho más simples (simples en términos de visualización) como en clusters de masas que interactúan entre ellos. En esta sección haremos una breve explicación de cómo podemos entender la ecuación cinética a partir de estos sistemas como se muestra en [38]. Primero que todos vamos a imaginar un caso muy simple: un sistema aislado de N pelotas con cierta distribución de masa. Ahora, vamos a suponer que estas masas pueden interactuar de tal forma que si vienen 2 pelotas de masa m_i y m_j , estas se pueden pegar/fusionar para hacer una pelota de masa $m_i + m_j$. Luego, si esto ocurre a una tasa proporcional a: $k(m_i, m_j)$ (llamado usualmente kernel), la densidad de pelotas con masa m_i (n_i) y densidad de pelotas con masa m_j (n_j) entonces estamos hablando de un proceso de coagulación y la dinámica de las densidades viene dado por la ecuación de Smoluchowski en su forma discreta:

$$\frac{\partial n}{\partial t}(m_i, t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} k(m_i - m_j, m_j) n(m_i - m_j, t) n(m_j, t) - \sum_{j=1}^{\infty} k(m_i, m_j) n(m_i, t) n(m_j, t) \quad (2.18)$$

aquí si asumiéramos desde un principio que hay infinitas pelotas entre masas m_1 y m_2 entonces esta ecuación la podríamos escribir en su forma integral asumiendo que la masa es una variable continua. La ecuación de Smoluchowski escrita en palabras corresponde a decir que el cambio de la densidad de pelotas de masa m_i (lado izquierdo) se debe a: el aumento debido a que masas m_j y m_k se fusionan tal que $m_j + m_k = m_i$ y la reducción debido a que masas m_i se fusionan con cualquier otra masa (lado derecho). Este proceso se puede ver en la imagen 2.6

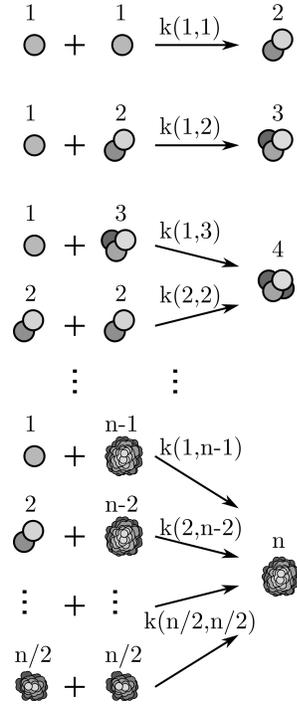


Figure 2.6: Proceso de coagulación tipo Smoluchowski discreto

Más aún, soluciones tipo de KZ para el caso estacionario han sido ya estudiadas para esta ecuación [39]. Ahora podemos añadir una interacción más en este proceso, y es que para aquellas pelotas que tienen una masa m_i , se pueden fragmentar instantáneamente en una masa m_j y otra m_k tal que $m_i = m_j + m_k$ y esto va ser proporcional a las respectivas densidades y a otro *Kernel*. Entonces, al lado derecho de la ecuación 2.18 vamos a tener términos con signo positivo que representarán procesos en que una masa m_j se divide en m_i y m_k y otros con signo negativo que representarán aquellos casos en que m_i se divide. Con todo esto en mente, podemos hacer perfectamente la analogía. El primer paso consiste en que la ecuación cinética se puede llevar a la siguiente forma para el caso isotrópico (derivado explícitamente en [38]):

$$\frac{dN_{\omega_1}}{dt} = S_1[N_{\omega_1}] + S_2[N_{\omega_1}] + S_3[N_{\omega_1}] \quad (2.19)$$

donde el término S_1 va a ser de la forma 2.18 mientras que S_2 y S_3 van a representar el proceso de fragmentación. Si consideramos sólo el término S_1 el proceso sería de Smoluchowski sólo que en vez de masas, estamos hablando de *ondas* de frecuencia ω_j y ω_k que se fusionan en una de $\omega_i = \omega_j + \omega_k$ tal que la energía de la densidad de ondas de frecuencias ω_i aumenta en $(\omega_j + \omega_k)K_1(\omega_j, \omega_k)N_{\omega_j}N_{\omega_k}$. De manera análoga se

pueden ver S_2 y S_3 como procesos de fragmentación pero cada uno de ellos con diferente kernel y por ende a diferente tasa.

Ahora, ¿cuál es el punto de mencionar esta analogía? Ver turbulencia de ondas como un proceso de fragmentación-coagulación tiene una serie de ventajas. En el trabajo antes señalado explican las ventajas desde el punto de vista numérico principalmente. Es por esto que acá señalaremos los beneficios y posibles beneficios desde una mirada teórica. En primer lugar, modelos de 2.19 con Kernels simplificados han sido vastamente estudiados por la comunidad del proceso de coagulación [40], de modo que una rápida comparación de resultados es completamente accesible. Segundo, es bien sabido que el espectro de energía para la cascada antes descrita está en el corazón de teoría de turbulencia. Sin embargo, si *a priori* intentamos visualizar que tiene en común un vaso de una bebida gaseosa lleno de espuma con el sonido de una placa elástica o con la deformación del espacio-tiempo generado por colisiones de agujeros negros, la respuesta no es obvia. Esto puede sugerir que la más pura esencia de un sistema turbulento está lejos de ser clara. Finalmente, como los procesos de fragmentación-coagulación son relativamente sencillos de imaginar, la analogía permite tener una visión más intuitiva de la dinámica que describe la ecuación cinética. Más aún, es por esto mismo que ahora parece más fácil imaginar escenarios en los cuales turbulencia de ondas es sólo un caso especial. Obviamente estos casos no necesariamente estarán relacionados a WT pero quizás sí a otras aproximaciones de sistemas turbulentos. Por ejemplo, ¿qué ocurre si la tasa bajo la cual interactúan estos clusters de masas, varía con el tiempo? ¿Habrá alguna dinámica que converja igual al espectro esperado? Además, vimos que esta dinámica está fuertemente ligada a la relación entre las frecuencias dada por la delta de Dirac, por lo que similarmente ¿podremos escribir una dinámica tipo $\delta(\omega_2(t) - \omega_3(t) - \omega_1(t))$ tal que para todo t obtengamos el espectro KZ? Siguiendo esta línea y adelantándonos a lo que se explicará más adelante, ¿podrá ser que para cierto límite, distinto al usado para llegar a WT, podremos escribir una teoría perturbativa renormalizada (DIA, LET, SCF, etc) como un proceso de coagulación-fragmentación?

Chapter 3

Turbulencia fuerte

Como mencionamos anteriormente, el problema de clausura ha sido de los mayores desafíos para lograr obtener una teoría analítica de turbulencia. Hasta ahora hemos visto que ciertos resultados pueden obtenerse a través de un método perturbativo pensando en que la no linealidad está controlada por un parámetro que se considera pequeño. Entonces nos podemos preguntar, ¿habrá alguna forma de lograr de capturar la dinámica de sistemas turbulentos dominados por la no linealidad? La respuesta no es del todo clara. En 1965, Sir Samuel Edwards señaló la equivalencia entre la ecuación de NS en espacio de Fourier con QFT pensando en el número de Reynolds *local* como la constante de acoplamiento [41]. Es por esto que poderosos métodos usados en QFT empezaron a ser reciclados en teoría de turbulencia. Estos métodos corresponden a *teorías de perturbaciones renormalizadas* (RPT) y la primera de éstas (en el contexto de turbulencia) fue desarrollada por Robert Kraichnan desde 1958 bautizada como *Direct Interaction Approximation* (DIA) [42, 15]. Sin embargo, ésta no fue la única sino que varios exponentes propusieron distintas teorías como: el análisis de Wyld, Local Energy Transfer (LET) de David McComb & Sam Edwards y Self-Consistent Field Approach (SCF) de Herring [43]. Teóricamente se ha usado DIA para el estudio de turbulencia estacionaria [15, 44], también podemos encontrar estudios de DIA usando cierres *casi-Markovianos* [45], y para estudiar el decaimiento de un sistema turbulento [22]. Además se ha mostrado una relación entre las ecuaciones simplificadas de DIA (caso estacionario e isotropía) y una aproximación tipo Fokker-Planck [22]

En este trabajo, se le dará especial énfasis a DIA debido a que este método asegura la existencia de un modelo estocástico subyacente cuya solución exacta viene dada por las ecuaciones DIA. Esto conlleva a que las cantidades físicas de nuestro interés, como la energía, muestre un buen comportamiento físico. Esto quiere

decir, que no encontraremos energías con valores negativas por ejemplo. En la única RPT donde observamos esta ventajosa característica es en DIA . Si bien DIA ha mostrado problemas para entregar el exponente de Kolmogorov en turbulencia hidrodinámica, esto no es claro para otros sistemas físicos.

3.1 Origen de DIA: Teoría de Perturbaciones vs RPT

A pesar de que Robert Kraichnan mostró los primeros fundamentos para desarrollar DIA en 1958 en el contexto de MHD [42], fue en 1959 cuando otorgó las ideas de una manera clara y concisa usando la ecuación de NS [15]. En esta sección, mostraremos las ideas principales bajo las cuales se funda DIA y como difiere del punto de vista usual de teoría de perturbaciones.

Para empezar, Kraichnan considera la ecuación NS en espacio de Fourier tal que represente un fluido incompresible en una caja cúbica de largo L usando condición de borde periódica (CBP). Lo primero a mencionar es que el análisis es básicamente el mismo para cualquier sistema de no linealidad cuadrática:

$$(\partial_t + \nu k^2) u_i(\mathbf{k}) = -\frac{i}{2} P_{ijm}(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''=\mathbf{k}} u_j(\mathbf{k}') u_m(\mathbf{k}'') \quad (3.1)$$

donde $u_i(\mathbf{k})$ es la componente i de la amplitud de Fourier del campo de velocidad del fluido , $P_{ijm}(\mathbf{k}) = k_m(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}) + k_j(\delta_{im} - \frac{k_i k_m}{k^2})$ y se usó convención de suma de Einstein para las componentes j, m . Desde ahora en adelante se ocupará la siguiente notación $u(\mathbf{k}, t) = u(\mathbf{k})$ y $u(\mathbf{k}, t') = u'(\mathbf{k})$. Además $u^*(\mathbf{k}) = u(-\mathbf{k})$, dado que $u(\mathbf{x}, t)$ es real. Entonces, el primer paso a explicar es la diferencia que hay entre abordar el problema pensando en teoría de perturbaciones y DIA. Si pensamos en teoría de perturbaciones el análisis sería el siguiente: Imaginemos que en $t = t_0$ una fuerza externa $f_i(\mathbf{k})$ se enciende y perturba al modo \mathbf{k} y por ende al sistema completo. Por lo que la perturbación que siente el modo \mathbf{k} debido a esta fuerza se postula/espera que tenga la forma:

$$\delta u_i(\mathbf{k}, t) = \int_{t_0}^t R_{ij}(\mathbf{k}, t, t') f_j(\mathbf{k}) dt' \quad (3.2)$$

donde presentamos la definición original de $R_{ij}(\mathbf{k}, t, t')$ conocida como la función respuesta o respuesta de impulso infinitesimal o en el contexto de QFT sería el *Propagador*. Si nuestro sistema fuese lineal , la función respuesta sería sólo función de \mathbf{k} y $t - t'$. Como este no es el caso, R es implícitamente función de todos los otros modos entre los respectivos tiempos.

La primera característica que vamos a señalar del sistema en sí, es que Kraichnan sólo considera aquellos flujos donde la dependencia estadística entre los modos viene puramente del término no lineal y no de condiciones iniciales o fuerzas exteriores. A esta característica le llama *maximal randomness*. Luego, un importante punto a considerar es que al tomar el límite $L \rightarrow \infty$, la perturbación anteriormente mencionada se *distribuirá* sobre una cantidad de modos que es infinita en este límite. Esto nos lleva a la primera hipótesis propuesta: el principio de dependencia débil. Esto quiere decir que en éste límite, habrá una cantidad infinita de modos que influirán en la dinámica para cada uno de ellos. Así, cada uno de estos acoples debe contribuir una cantidad infinitesimal y por ende el acople que hay entre una tríada $(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ se vuelve infinitamente débil cuando estos vectores son distintos entre sí. Así, momentos como $\langle u_i(\mathbf{k})u'_j(\mathbf{p})u''_m(\mathbf{q}) \rangle$ tienden a 0 en este límite para $\mathbf{k} \neq \pm\mathbf{p} \neq \pm\mathbf{q}$. Sin embargo, para otros momentos ocurrirá que $\langle u'_i(\mathbf{k})u_j(-\mathbf{k})u'_m(\mathbf{p})u_n(-\mathbf{p}) \rangle \rightarrow \langle u'_i(\mathbf{k})u_j(-\mathbf{k}) \rangle \langle u'_m(\mathbf{p})u_n(-\mathbf{p}) \rangle$. Esto además implica que la dependencia entre amplitud del modo \mathbf{k} y su respectiva función respuesta, se vuelve de igual forma débil en el límite. Es necesario aclarar que en ningún momento debemos confundir completa independencia estadística del principio de dependencia débil, ya que en el primer caso obtendríamos que el momento de orden 3 sería 0 y con ello no podría haber una transferencia de energía.

El objetivo principal es calcular el espectro de energía, por lo que necesitamos el momento de orden 2 $\langle u'_n(-\mathbf{k})u_i(\mathbf{k}) \rangle$ el cual obviamente depende del momento de orden 3 $S := \langle u_n(\mathbf{k})u'_r(\mathbf{p})u'_s(\mathbf{q}) \rangle$ con $\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{0}$ según 3.1. Para esto, primero consideremos las soluciones del sistema lineal U_i :

$$(\partial_t + \nu k^2) U_i(\mathbf{k}) = 0 \quad (3.3)$$

cuyas soluciones podemos conocer sencillamente dada una condición inicial. De este modo, escribimos ahora la solución de la ecuación 3.1 como solución a cualquier ecuación diferencial, es decir, una parte homogénea sumada a una no-homogénea :

$$u_i(\mathbf{k}) = U_i(\mathbf{k}) - \frac{i}{2} P_{ijm}(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''=\mathbf{k}} \int_{t_0}^t e^{-\nu k^2(t-t')} u'_j(\mathbf{k}') u'_m(\mathbf{k}'') dt' \quad (3.4)$$

Notar que adentro de la integral están las funciones exactas de las amplitudes de los modos, de forma que como primera aproximación podemos sustituir estas amplitudes por aquellas de primer orden. Así, podemos hacer esto iterativamente obteniendo distintos ordenes de aproximación. De esta forma, si pensamos en el

principio de dependencia débil y en el hecho de que no hay dependencia estadística entre los campos a orden lineal, vemos que la primera aproximación de S es:

$$S \approx \langle \Delta u_n(\mathbf{k}) U_r'(\mathbf{p}) U_s'(\mathbf{q}) \rangle + \langle U_n(\mathbf{k}) \Delta u_r'(\mathbf{p}) U_s'(\mathbf{q}) \rangle + \langle U_n(\mathbf{k}) U_r'(\mathbf{p}) \Delta u_s'(\mathbf{q}) \rangle \quad (3.5)$$

donde:

$$\Delta u_n(\mathbf{k}) = \int_{t_0}^t R_{0,ni}(\mathbf{k}, t, t') b_{0,i}(\mathbf{k}, t') dt' + \dots \quad (3.6)$$

con:

$$R_{0,ni}(\mathbf{k}, t, t') = \delta_{ni} e^{-\nu k^2(t-t')} \quad (3.7)$$

y $b_{0,i}(\mathbf{k}, t') = -i P_{ijm}(\mathbf{k}) U_j''(-\mathbf{p}) U_m''(-\mathbf{q})$. Los puntos suspensivos en la ecuación de $\Delta u_n(\mathbf{k})$ denotan la interacción con otros modos que por ahora no parecen importantes por la hipótesis de dependencia débil. Los otros términos en la expresión de S son completamente análogos. Entonces, si vemos los promedios tomados, notamos que estamos promediando sobre variables que son estadísticamente independientes entre sí, a menos que sean los mismos vectores de onda (por eso los puntos suspensivos anteriormente). Así, desde el approach de teoría de perturbaciones notamos que el primer término en la contribución de S será proporcional a $R_{0,ni}(\mathbf{k}, t, t') \langle U_r'(\mathbf{p}) U_j''(-\mathbf{p}) \rangle \langle U_s'(\mathbf{q}) U_m''(-\mathbf{q}) \rangle$.

Entonces, para diferenciar este resultado de DIA ahora consideremos la ecuación 3.1 en su completitud. Si pensamos en cuál es el factor que debe influir más sobre el momento de orden 3 para los vectores $(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$, entonces de 3.1 es intuitivo imaginar que será la interacción directa entre estos 3 la que domine por sobre las demás. Es decir, los siguientes factores:

$$\begin{aligned} b_i(\mathbf{k}, t'') &= -i P_{ijm}(\mathbf{k}) u_j(-\mathbf{p}) u_m(-\mathbf{q}) \\ b_i(\mathbf{p}, t'') &= -i P_{ijm}(\mathbf{p}) u_j(-\mathbf{q}) u_m(-\mathbf{k}) \\ b_i(\mathbf{q}, t'') &= -i P_{ijm}(\mathbf{q}) u_j(-\mathbf{k}) u_m(-\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Estos son los términos que aparecen al lado derecho de la ecuación para cada uno de los modos respectivamente. Cómo vimos anteriormente, en el rumbo de teoría de perturbaciones definimos como $\delta u(\mathbf{k})$ al incremento que se le tiene que hacer a $U(\mathbf{k})$ para obtener $u(\mathbf{k})$ que corresponde a la amplitud dada por la

retención de $b_i(\mathbf{k}, t'')$, $b_i(\mathbf{p}, t'')$ y $b_i(\mathbf{q}, t'')$ ignorando los otros términos. En otras palabras, es la amplitud generada por la interacción directa. Sin embargo, aquí Kraichnan hace la diferencia. Vamos a definir $\delta u(\mathbf{k})$ como la diferencia entre la amplitud exacta (con esto nos referimos la solución de 3.1) y el valor que tomaría si elimináramos la interacción directa. Entonces, desde este punto de vista:

$$S \approx \langle \delta u_n(\mathbf{k}) u'_r(\mathbf{p}) u'_s(\mathbf{q}) \rangle + \langle u_n(\mathbf{k}) \delta u'_r(\mathbf{p}) u'_s(\mathbf{q}) \rangle + \langle u_n(\mathbf{k}) u'_r(\mathbf{p}) \delta u'_s(\mathbf{q}) \rangle \quad (3.9)$$

pero ahora:

$$\delta u_n(\mathbf{k}) = \int_{t_0}^t R_{ni}(\mathbf{k}, t, t') b_i(\mathbf{k}, t') dt' \quad (3.10)$$

ya que por definición, dijimos que R es la función respuesta para una arbitraria perturbación infinitesimal, en este caso: la interacción directa. Por lo tanto, el primer término de la contribución de S ahora será proporcional a

$$\langle R_{ni}(\mathbf{k}, t, t') \rangle \langle u'_r(\mathbf{p}) u''_j(-\mathbf{p}) \rangle \langle u'_s(\mathbf{q}) u''_m(-\mathbf{q}) \rangle$$

Donde ya separamos los promedios usando el principio de dependencia débil. Y así, de forma análoga para los otros 2 términos, obtenemos una ecuación cerrada para el momento de orden 2. Entonces, cuando pensábamos en teoría de perturbaciones lo que obtuvimos fue en primera aproximación una expresión en términos de las funciones para el caso lineal, mientras que ahora logramos dejar la expresión en términos de las funciones **exactas** lo cual es una gigante diferencia. Obviamente podemos llegar al primer caso, simplemente aproximando $u(\mathbf{k}) \rightarrow U(\mathbf{k})$ y $R_{ni}(\mathbf{k}, t, t') \rightarrow R_{0,ni}(\mathbf{k}, t, t')$.

Por su puesto, para llegar a obtener DIA todavía queda por resolver la evolución temporal del promedio de la función respuesta. El cálculo con las ideas originales de Kraichnan será presentado en el apéndice A y en la siguiente sección con la receta de McComb. En este trabajo, usaremos un método alternativo que permite una introducción más natural de la función respuesta. Finalmente, las ecuaciones genéricas de DIA son:

$$(\partial_t + \nu_k) C_{\mathbf{k}}(t, t') - \int_{t_0}^t d\tau \Sigma_{\mathbf{k}}(t, \tau) C_{\mathbf{k}}(\tau, t') = \int_{t_0}^{t'} d\tau F_{\mathbf{k}}(t, \tau) R_{\mathbf{k}}(t', \tau) \quad (3.11)$$

y

$$(\partial_t + \nu_k) R_{\mathbf{k}}(t, t') - \int_{t'}^t d\tau \Sigma_{\mathbf{k}}(t, \tau) R_{\mathbf{k}}(\tau, t') = \delta(t - t') \quad (3.12)$$

con $\Sigma_{\mathbf{k}}(t, \tau) := \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} P_{\mathbf{k},\mathbf{p},\mathbf{q}} P_{\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{k}} R_{\mathbf{p}}(\tau, t) C_{\mathbf{q}}(\tau, t)$ y $F_{\mathbf{k}}(t, \tau) := \frac{1}{2} \sum_{p,q} P_{\mathbf{k},\mathbf{p},\mathbf{q}}^2 C_{\mathbf{p}}(\tau, t) C_{\mathbf{q}}(\tau, t)$.

A primera instancia podemos notar que estas ecuaciones corresponden un sistema con un damping y ruido no lineales, con lo cual ya se puede sospechar que en esta aproximación se puede llegar a un caso estacionario. Hablaremos más en detalle del caso estacionario al final de este trabajo. También, es importante notar que una de las características que se puede apreciar de inmediato es que se trata de un proceso no-Markoviano. Recordando en simples palabras, un proceso de Markov es aquél en el cual cada paso de iteración sólo depende del paso anterior y no de la trayectoria completa. Usualmente, también se les dice a estos procesos *sin memoria*. De este modo, si de alguna forma modificáramos DIA haciendo Σ y F proporcionales a $\delta(t-t')$ entonces el proceso se volvería de Markov. Finalmente, podemos destacar que DIA usa una aproximación que no está controlada por algún parámetro, es decir, es un método no perturbativo.

3.2 Sistematización de DIA y comparación con LET

A pesar de que todo el procedimiento para llegar a las ecuaciones DIA está intuitivamente explicado y detallado en el apéndice A, hay formas más sistemáticas de llegar al mismo resultado. Con esto queremos decir que existe una *receta* a seguir para obtener DIA sin siquiera ponernos a pensar en la hipótesis de interacción directa, lo que resulta en ocasiones una ventaja. Esta *receta* está pedagógicamente explicada en [46] por McComb. En simples palabras, lo que se hace es añadir a mano un parámetro λ al término no lineal. Añadimos un término de inyección al lado derecho de la ecuación y luego, multiplicamos por $u'(-\mathbf{k})$. Promediamos y expandimos en potencias de λ los campos hasta segundo orden. Una vez que esta expansión esté en términos de los campos a orden lineal, reemplazamos los campos u_0 por la solución exacta de la ecuación u . La ecuación de la función respuesta es completamente análoga. Este método está ilustrado en una forma tipo receta en el apéndice F.

Como mencionamos anteriormente, en todo el proceso jamás se hizo alusión a la hipótesis de interacción directa. Esto tiene la gran ventaja de que entonces podemos calcular las ecuaciones DIA para ecuaciones lineales que ni siquiera se componen de interacción de modos, por ejemplo, un oscilador de Duffing:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + kx + \beta x^3 = 0 \quad (3.13)$$

El testeo de la validez de DIA mediante ecuaciones "simples" cuyas soluciones se conocen de manera exacta ya se ha hecho. Ahora nos enfocaremos en un oscilador estocástico. Bowman [45] compara la función

respuesta que entrega DIA con la solución exacta del sistema [48]. El modelo original corresponde a:

$$\frac{d\psi}{dt} + i\omega(t)\psi(t) = 0 \quad (3.14)$$

donde $\omega(t)$ es una variable aleatoria independiente del campo con

$$\langle \omega(t)\omega(t') \rangle = \beta^2 e^{-\frac{t-t'}{\tau_c}}$$

siendo β^2 y τ_c números especificados. La función respuesta se obtiene mediante el método original presentado en el resumen de DIA en el apéndice AA. Este modelo fue detalladamente estudiado por Kubo [48] y por ende, el fácil acceso a una comparación entre los distintos resultados (numéricos y exactos). La función respuesta que encuentra Kubo en el límite de tiempos pequeños comparado con τ_c es:

$$R(\tau) = H(\tau)e^{-\beta^2\tau^2/2} \quad (3.15)$$

donde H es la función escalón. La función respuesta de DIA viene dada por la ecuación:

$$\frac{dR}{d\tau}(\tau) + \int_0^\tau dt R(t)F(t)R(\tau - t) = \delta(\tau) \quad (3.16)$$

cuya solución para el límite $\tau \ll \tau_c$ es:

$$R(\tau) = H(\tau) \frac{J_1(2\beta\tau)}{\beta\tau} \quad (3.17)$$

siendo J_1 la función de Bessel de primera especie. Como bien podemos ver en la figura 3.1, la solución entregada por DIA coincide cualitativamente con el comportamiento de decaimiento de la solución exacta y en la escala temporal de decaimiento. Sin embargo, podemos encontrar notorias diferencias: la solución de DIA presenta oscilaciones mientras que el decaimiento de la solución exacta es exponencial.

Luego, como bien dijimos, DIA no es la única ni la más "exitosa" de las RPT mencionadas anteriormente. En 1974 fue cuando WD McComb logró visualizar la razón por la cual tanto DIA como la teoría de Edwards eran incompatibles con el espectro de Kolmogorov. McComb notó problemas con respecto al signo del espectro de transferencia inercial, usualmente denotado en la literatura como $T(k)$ y su relación directa con k . Es por esto que la propuesta de McComb consistió en proponer la existencia de una función de Green

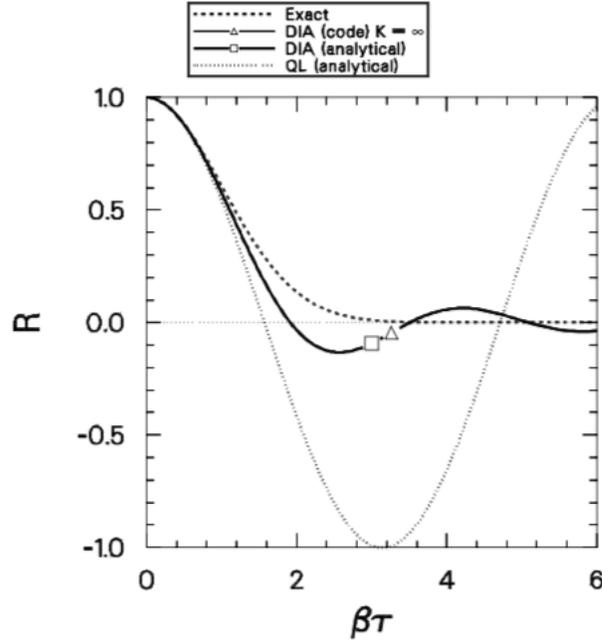


Figure 3.1: Comparación de la solución exacta de la función respuesta para el caso $\tau \ll \tau_c$ y la función respuesta entregada por DIA (numéricamente 3.16 y analíticamente 3.17). Además, está la comparación con otro tipo de aproximaciones como la *Quasi-Linear*. Extraído de [45].

H (función análoga a la función respuesta de DIA) que propague la solución exacta de la ecuación de NS desde alguna condición inicial. Esto lleva a que las ecuaciones de DIA y de LET sean equivalentes para la función de correlación, a diferencia de aquella para la función H que presenta un término extra. Justamente es la presencia de este término extra lo que permite la compatibilidad de LET con el exponente esperado en el espectro. Finalmente vale mencionar que en [46] se encuentra una detallada comparación entre las distintas RPT para el caso de turbulencia no estacionaria (en decaimiento). Estas comparaciones van desde predicciones teóricas a mediciones numéricas del espectro de energía, espectro de disipación y espectro de transferencia.

3.3 Realizabilidad de DIA

Una de las razones para escoger DIA como cierre renormalizado es que este conlleva la existencia de un modelo estocástico cuya solución exacta viene dada por DIA. Esta propiedad es comúnmente llamada *realizabilidad*. Para un cierre estadístico es de vital importancia tener esta propiedad dado que si no, el cierre

puede mostrar un comportamiento no-físico, en este caso valores negativos para $C(t, t')$ y por ende energía negativa. Por ende, si encontramos el modelo estocástico entonces podemos asegurar el buen comportamiento del sistema. El modelo es originalmente presentado por Kraichnan en 1970 [49] y viene dado por la ecuación:

$$(\partial_t + \nu_k) u(\mathbf{k}) - \int_{t_0}^t d\tau \Sigma_{\mathbf{k}}(t, \tau) u(\mathbf{k}, \tau) = f_{\mathbf{k}}(t) \quad (3.18)$$

con

$$f_{\mathbf{k}}(t) := \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} P_{\mathbf{k},\mathbf{p},\mathbf{q}} \xi_{\mathbf{p}}^*(t) \hat{\xi}_{\mathbf{q}}^*(t)$$

y donde $\Sigma_{\mathbf{k}}$ viene dado por la expresión anterior. Además, los campos $\xi_{\mathbf{p}}^*(t)$ y $\hat{\xi}_{\mathbf{q}}^*(t)$ son variables aleatorias complejas e independientes tal que cumplan la siguiente propiedad $\langle \xi_{\mathbf{p}}(t) \xi_{\mathbf{p}}^*(t') \rangle = \langle \hat{\xi}_{\mathbf{q}}(t) \hat{\xi}_{\mathbf{q}}^*(t') \rangle = \langle u(\mathbf{k}) u(-\mathbf{k}) \rangle$. Entonces, para mostrar que DIA otorga la solución exacta de este modelo primero es usar (con el mismo razonamiento anterior) la relación entre el campo y la función respuesta:

$$u(\mathbf{k}) = \int_{t_0}^t R(\mathbf{k}, t, t') \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} P_{\mathbf{k},\mathbf{p},\mathbf{q}} \xi_{\mathbf{p}}^*(t') \hat{\xi}_{\mathbf{q}}^*(t') dt' \quad (3.19)$$

Luego multiplicamos 3.18 por $u'(-\mathbf{k})$ y promediamos:

$$(\partial_t + \nu_k) \langle u(\mathbf{k}) u'(-\mathbf{k}) \rangle - \int_{t_0}^t d\tau \Sigma_{\mathbf{k}}(t, \tau) \langle u(\mathbf{k}, \tau) u'(-\mathbf{k}) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} P_{\mathbf{k},\mathbf{p},\mathbf{q}} \langle \xi_{\mathbf{p}}^*(t) \hat{\xi}_{\mathbf{q}}^*(t) u'(-\mathbf{k}) \rangle \quad (3.20)$$

Si en el lado derecho insertamos la expresión del campo como la función respuesta propagando los campos aleatorios obtenemos:

$$(\partial_t + \nu_k) C_{\mathbf{k}}(t, t') - \int_{t_0}^t d\tau \Sigma_{\mathbf{k}}(t, \tau) C_{\mathbf{k}}(\tau, t') = \int_{t_0}^{t'} R_{\mathbf{k}}(t', \tau) F_{\mathbf{k}}(t, \tau) \quad (3.21)$$

con $F_{\mathbf{k}}(t, \tau) = \langle f_{\mathbf{k}}(t) f_{-\mathbf{k}}(\tau) \rangle$. Como podemos ver, obtenemos exactamente la ecuación 3.11

3.4 ¿Por qué se cree que DIA falla en capturar el comportamiento de turbulencia hidrodinámica fuerte?

Originalmente, el deseo de usar una teoría de perturbaciones renormalizada consistía en intentar describir un sistema turbulento en el cual el término no-lineal contribuyera de manera significativa. Sin embargo, una vez que ya tenemos nuestras ecuaciones en este contexto, ¿cómo podemos saber si estas ecuaciones capturan parcialmente las propiedades de un sistema de turbulencia fuerte? Una condición necesaria para que este sea el caso, corresponde a que sea compatible con el espectro K41.

En este sentido, es que DIA falla para poder representar un sistema turbulento propiamente tal, ya que el espectro que entrega va como $E(k) \sim k^{-3/2}$ [15] y no $k^{-5/3}$ como predice Kolmogorov. Es por esto que Kraichnan se dedicó a averiguar cuál era la raíz del problema de DIA [50, 51]. Se suele argumentar que dicho problema consiste en que DIA no cumple con lo que se conoce como *random Galilean invariance* (RGI), concepto inventado por el propio Kraichnan. En resumidas cuentas, se considera un fluido gobernado por la ecuación NS. Ahora, esta ecuación será descrita en un marco de referencia S donde se observa el campo de velocidades u . Luego, se considera un sistema de referencia S' moviéndose a una velocidad constante v con respecto a S tal que $x' = x + vt$ y $u'(x', t) = u(x, t) + v$. Si es que ambos sistemas describen la misma dinámica entonces se dice que son invariantes bajo transformaciones galileanas.

Si consideramos la ecuación de NS en espacio de Fourier como lo hicimos anteriormente, vemos que en el sistema de referencia S' las amplitudes de Fourier están relacionadas con las amplitudes del sistema original mediante una fase asociada a v :

$$u'(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x' u'(x', t) e^{-i\mathbf{k}\cdot x'} = v\delta(\mathbf{k}) + u(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot vt} \quad (3.22)$$

Entonces, el punto central de esta violación a RGI consiste en que los momentos de orden superior para el mismo tiempo sean invariantes bajo estas transformaciones. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \langle u'(\mathbf{k}, t) u'(\mathbf{p}, t) u'(\mathbf{q}, t) \rangle &= \langle u(\mathbf{k}, t) u(\mathbf{p}, t) u(\mathbf{q}, t) e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{p}+\mathbf{q})\cdot vt} \rangle \\ &= \langle u(\mathbf{k}, t) u(\mathbf{p}, t) u(\mathbf{q}, t) \rangle \end{aligned} \quad (3.23)$$

para vectores distintos de 0 y sabiendo que esta presente $\delta(\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q})$. Sin embargo, como podemos notar esto se logró solamente por que pudimos agrupar las fases con el tiempo como factor común. Por ende,

basta con que una de las amplitudes estén evaluadas en un tiempo distinto para que haya una diferencia de fases entre ambos sistemas. Ahora, ¿qué tiene que ver la palabra *random* en este concepto? Lo que ocurre es que si ahora consideramos que la velocidad v es una variable aleatoria independiente del campo con distribución Gaussiana entonces el ensemble del sistema ya no es el mismo y por lo tanto las cantidades naturales a estudiar serán aquellas que son promediadas con respecto a las realizaciones de v (las cuales son constantes para cada "replica" del sistema). Sin embargo, al hacer esto entramos en la dificultad que ahora los operadores propios del sistema son "variables aleatorias" y por ende no van a poder ser sacados afuera de los promedios. Por ejemplo, dada la transformación $u'(x', t) = u(x, t) + v$ vemos que la cantidad $\partial_t u'(x', t')$ va a mostrar una dependencia de v y por ende, el término $\partial_t \hat{u}'(k, t)$ también lo hará. En este sentido no podremos separar los promedios de los operadores, es decir, no se tiene que cumplir necesariamente:

$$\langle \partial_t \hat{u}'(k, t) \rangle = \partial_t \langle \hat{u}'(k, t) \rangle$$

siendo \hat{u}' la transformada de Fourier de u' . Esto obviamente no permite obtener las mismas ecuaciones DIA¹. Es por esto, que Kraichnan decidió modificar DIA para así encontrar un cierre que sea compatible con el espectro de Kolmogorov. A esta teoría le llamó *Lagrangian history Direct Interaction* (LHDI) [53]. Aunque logró encontrar una teoría compatible con K41 , el costo fue que LHDI no tiene un modelo estocástico subyacente y por ende la realizabilidad no está asegurada.

Finalmente, un importante punto a destacar es que tanto el espectro encontrado como los argumentos que Kraichnan y otros autores proponen para explicar el espectro son realizados en el contexto puramente de hidrodinámica. Para otros sistemas físicos esta discusión no es clara. De modo que desde este punto de vista, no podríamos saber si al aplicar DIA a la placa elástica, obtendríamos el mismo exponente $k^{-3/2}$ que se obtiene en turbulencia hidrodinámica o acaso podríamos encontrar exitosamente el espectro de Kolmogorov.

¹ Un extensivo, explícito y detallado análisis realiza Filipiak en su tesis [52] donde además incluye principalmente el estudio de LET asociado a este tema.

Chapter 4

DIA con formalismo de integrales de camino

Cuando hablamos de *integrales de camino*, automáticamente pensamos en la famosa formulación de la mecánica cuántica propuesta por Richard Feynman [54]. Sin embargo, esta técnica se ha extrapolado para estudiar otro tipo de modelos: ecuaciones diferenciales estocásticas (SDE). En [55] podemos ver como si consideramos una ecuación de Langevin tipo:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, t) + g(x, t)\xi(t) \\ x(0) &= x_0\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde las funciones f y g son deterministas mientras que ξ representa un ruido blanco de media cero y delta correlado en el tiempo: $\langle \xi(t) \rangle = 0$ $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t - t')$. Entonces se puede construir una integral funcional considerando que las infinitas integrales van a ir sobre el campo y no sobre el tiempo, restringiendo a que el campo debe estar dado por una realización en particular de la variable aleatoria. Esto estará mejor explicado cuando hagamos la construcción explícita para nuestro caso en particular. Cabe mencionar que el único ingrediente que se requiere para llevar a cabo esto es una ecuación de la misma estructura que 4.1. Luego, obtendremos sistemáticamente DIA, es decir: perturbamos, expandimos hasta segundo orden y renormalizamos haciendo los cambios correspondientes. DIA ya se ha obtenido mediante el método de integrales de camino pero para una ecuación algebraica de no linealidad cúbica [56]. En este trabajo

extenderemos este método para un sistema de campos.

4.1 Modelo a estudiar y formulación de integral de camino

En este trabajo nos vamos a centrar en el estudio de la dinámica estadística para sistemas gobernados por una no linealidad cúbica, como una extensión de los resultados para el caso cuadrático. El modelo a estudiar:

$$is\partial_t A_{\mathbf{k}}^s = \frac{\delta H}{\delta A_{\mathbf{k}}^{-s}} \quad (4.2)$$

donde H es el hamiltoniano, el cual comúnmente se presenta como la suma de una parte lineal y otra asociada a las interacciones (relacionada al término no lineal). A esta ecuación le añadiremos un factor de damping y un término de forcing:

$$is\partial_t A_{\mathbf{k}}^s = \eta_{\mathbf{k}}^s - is\gamma_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}}^s + \frac{\delta H}{\delta A_{\mathbf{k}}^{-s}} \quad (4.3)$$

siendo $\eta_{\mathbf{k}}^s$ una variable aleatoria con distribución gaussiana y de estadística: $\langle \eta_{\mathbf{k}}^s \rangle = 0$ para todo tiempo y $\langle \eta_{\mathbf{k}}^s(t) \eta_{\mathbf{q}}^z(t') \rangle = 2F_{\mathbf{q}} \delta(t-t') \delta_{-s,z} \delta(\mathbf{k}+\mathbf{q})$. Aquí la notación corresponde a $(\eta_{\mathbf{k}_1}^{s_1}(t_1))^* = \eta_{\mathbf{k}_1}^{-s_1}(t_1)$. Además $\gamma_{\mathbf{k}}$ es una expresión de damping cuya expresión en términos de \mathbf{k} no será explicitada hasta que hagamos simulaciones numéricas. Específicamente esta ecuación se ve de la siguiente forma:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + is\Omega_{\mathbf{k}}^s \right) A_{\mathbf{k}}^s(t) = \eta_{\mathbf{k}}^s + \sum_{s_1 s_2 s_3} \int L_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}^{s s_1 s_2 s_3} A_{\mathbf{k}_1}^{s_1}(t) A_{\mathbf{k}_2}^{s_2}(t) A_{\mathbf{k}_3}^{s_3}(t) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}) d\mathbf{k}_{123} \quad (4.4)$$

con $\Omega_{\mathbf{k}}^s := \omega_{\mathbf{k}} - is\gamma_{\mathbf{k}}$ El coeficiente $L_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}^{s s_1 s_2 s_3}$ está dado por las condiciones descritas por 2.3.

Primero consideremos la ecuación 4.4 en su forma discretizada:

$$A_{\mathbf{k},j+1}^s = A_{\mathbf{k},j}^s + h(-is\Omega_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k},j}^s + \eta_{\mathbf{k},j}^s + (NL)_j) \quad (4.5)$$

siendo h el largo del *time step* y $(NL)_j$ el término no lineal de 4.4 evaluado en el tiempo discreto t_j . Para clarificar, el papel que juega $\eta_{\mathbf{k}}^s(t)$ en 4.4 corresponde a que en cada momento esta variable va a entregar un número aleatorio a cada modo \mathbf{k} asociado al índice superior s . Entonces, lo que tenemos que tener siempre en mente es que en cada momento $A_{\mathbf{k}}^s(t)$ depende de la realización en particular de $\eta_{\mathbf{k}}^s(t)$. A pesar de que Kraichnan considera físicamente más realista tomar los promedios de las amplitudes de Fourier (en el límite

$L \rightarrow \infty$) con respecto a una vecindad en espacio Fourier, aquí consideraremos promedios con respecto a un ensemble de realizaciones del proceso dinámico para cierto tiempo. Es decir, consideraremos que existe cierta cantidad de placas y que para cada una de ellas se generará una realización en particular de las variables aleatorias. De este modo, si tenemos un observable O que es función de cierto conjunto de amplitudes de Fourier $O = O(A_{k_1}^{s_1}(t), A_{-k_1}^{-s_1}(t), \dots, A_{k_n}^{s_n}(t), A_{-k_n}^{-s_n}(t))$ y queremos saber el promedio de este entonces para encontrar el promedio de este observable debemos en principio promediar sobre la distribución del ruido para cada instante de tiempo y para cada uno de los modos. Matemáticamente tendremos N pasos de tiempo, k_n modos y 2 índices superiores (uno con + y otro con -), esto lo escribiremos de la siguiente manera:

$$\langle O \rangle = \int \mathcal{D}\eta_k^s(t) P(\eta_k^s(t)) O(A_{k_1, \eta_{k_1}^{s_1}}^{s_1}, \dots, A_{-k_n, \eta_{-k_n}^{-s_n}}^{-s_n}) \quad (4.6)$$

donde nos referimos a $A_{k_1, \eta_{k_1}^{s_1}}^{s_1}$ como al campo dado por una realización en particular del ruido y la medida de integración corresponde a la notación usual en QFT: $\mathcal{D}\eta_k^s(t) := \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=k_1}^{k_n} \prod_{s=s_1}^{s_n} \prod_{j=1}^N d\eta_{k,j}^s$. Entonces, ahora decimos que la restricción $\delta(A_k^s - A_{k, \eta_k^s}^s)$ es equivalente a obligar al campo a cumplir la SDE.

$$\begin{aligned}
 \langle O \rangle &= \int \mathcal{D}\eta_k^s(t) P(\eta_k^s(t)) \int \mathcal{D}A_k^s(t) \delta(A_k^s - A_{k, \eta_k^s}^s) O(A_{k_1}^{s_1}, \dots, A_{-k_n}^{-s_n}) \\
 &= \int \mathcal{D}\eta_k^s(t) P(\eta_k^s(t)) \int \mathcal{D}A_k^s(t) \delta(-A_{\mathbf{k}, j+1}^s + A_{\mathbf{k}, j}^s + h(-is\Omega_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}, j}^s + \eta_{\mathbf{k}, j}^s + (NL)_j)) O(A_{k_1}^{s_1}, \dots, A_{-k_n}^{-s_n}) \\
 &= \int \mathcal{D}A_k^s(t) O(A_{k_1}^{s_1}, \dots, A_{-k_n}^{-s_n}) p(A_k^s(t)) \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

siendo $p(A_k^s(t))$ la pdf de la variable $A_k^s(t)$. Luego, lo que hacemos es ocupar la *representación integral* de la delta de Dirac e integrar con respecto al ruido sabiendo que la distribución de probabilidad de éste es gaussiana:

$$P(\eta_{\mathbf{k}, j}^s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(2F_{\mathbf{k}})}} e^{-\frac{(\eta_{\mathbf{k}, j}^s)^2}{2(2F_{\mathbf{k}})}} \quad (4.8)$$

Si el observable a estudiar es $O(A_{k_1}^{s_1}, A_{k_2}^{s_2}, \dots, A_{k_n}^{s_n}) = 1$, i.e el factor de normalización, entonces definiremos $Z := \langle 1 \rangle$ de modo que:

$$Z = \int \mathcal{D}A_{\mathbf{k}}^s \mathcal{D}\tilde{A}_{\mathbf{k}}^s e^{-\sum_s \int d\mathbf{k} \int dt \tilde{A}_{\mathbf{k}}^s(t) (\partial_t A_{\mathbf{k}}^s(t) + is\Omega_{\mathbf{k}}^s A_{\mathbf{k}}^s(t) + NL)} e^{\frac{1}{2} \sum_{s_1 s_2} \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{k}' \int dt \int dt' \tilde{A}_{\mathbf{k}}^{s_1}(t) 2F_{\mathbf{k}} \delta(t-t') \delta_{-s_1, s_2} \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \tilde{A}_{\mathbf{k}'}^{s_2}(t')} \quad (4.9)$$

aquí renombramos la variable de integración dada por la delta de Dirac a $\tilde{A}_{\mathbf{k}}^s$. Recordar que esto es completamente equivalente a la expresión dada por 4.6 para $O = 1$, la única diferencia es que integramos el ruido. Usualmente a la expresión dada por el exponente de la primera exponencial se le conoce como acción de Martin-Siggia-Rose(MSR)[57]:

$$S := \sum_s \int d\mathbf{k} \int dt \tilde{A}_{\mathbf{k}}^s(t) (\partial_t A_{\mathbf{k}}^s(t) + is\Omega_{\mathbf{k}}^s A_{\mathbf{k}}^s(t) + NL) - \frac{1}{2} \sum_{s_1 s_2} \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{k}' \int dt \int dt' \tilde{A}_{\mathbf{k}}^{s_1}(t) 2F_{\mathbf{k}} \delta(t-t') \delta_{-s_1, s_2} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \tilde{A}_{\mathbf{k}'}^{s_2}(t') \quad (4.10)$$

Si ahora, añadimos campos auxiliares $J_{\mathbf{k}}^s(t)$ y $\tilde{J}_{\mathbf{k}}^s(t)$ a la exponencial es decir, queremos $Z[J, \tilde{J}] := \langle e^{\sum_s \int d\mathbf{k} \int \tilde{J}_{\mathbf{k}}^s(t) A_{\mathbf{k}}^s(t) + J_{\mathbf{k}}^s(t) \tilde{A}_{\mathbf{k}}^s(t)} \rangle$ obtenemos:

$$Z[J, \tilde{J}] = \int \mathcal{D}A_{\mathbf{k}}^s \mathcal{D}\tilde{A}_{\mathbf{k}}^s e^{-S + \sum_s \int d\mathbf{k} \int \tilde{J}_{\mathbf{k}}^s(t) A_{\mathbf{k}}^s(t) + J_{\mathbf{k}}^s(t) \tilde{A}_{\mathbf{k}}^s(t) dt} \quad (4.11)$$

¿Cuál es la idea de añadir estos campos auxiliares y con esa forma en específico? Notar que si *derivamos funcionalmente* con respecto al campo $\tilde{J}_{\mathbf{k}}^s(t)$ e igualamos los campos a 0 obtenemos por un lado la función de correlación que nos interesa desde el principio:

$$\begin{aligned} \frac{\delta Z}{\delta \tilde{J}_{\mathbf{p}_1}^{l_1}(t_1)} [J, \tilde{J}] &= \int \mathcal{D}A_{\mathbf{k}}^s \mathcal{D}\tilde{A}_{\mathbf{k}}^s e^{-S + \sum_s \int d\mathbf{k} \int \tilde{J}_{\mathbf{k}}^s(t) A_{\mathbf{k}}^s(t) + J_{\mathbf{k}}^s(t) \tilde{A}_{\mathbf{k}}^s(t) dt} \left(\sum_s \int d\mathbf{k} \int \frac{\delta \tilde{J}_{\mathbf{k}}^s(t)}{\delta \tilde{J}_{\mathbf{p}_1}^{l_1}(t_1)} A_{\mathbf{k}}^s(t) \right) \\ &= \int \mathcal{D}A_{\mathbf{k}}^s \mathcal{D}\tilde{A}_{\mathbf{k}}^s e^{-S + \sum_s \int d\mathbf{k} \int \tilde{J}_{\mathbf{k}}^s(t) A_{\mathbf{k}}^s(t) + J_{\mathbf{k}}^s(t) \tilde{A}_{\mathbf{k}}^s(t) dt} \left(\sum_s \int d\mathbf{k} \int \delta(t-t_1) \delta_{s, l_1} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}_1) A_{\mathbf{k}}^s(t) \right) \\ &= \int \mathcal{D}A_{\mathbf{k}}^s \mathcal{D}\tilde{A}_{\mathbf{k}}^s e^{-S + \sum_s \int d\mathbf{k} \int \tilde{J}_{\mathbf{k}}^s(t) A_{\mathbf{k}}^s(t) + J_{\mathbf{k}}^s(t) \tilde{A}_{\mathbf{k}}^s(t) dt} \left(A_{\mathbf{p}_1}^{l_1}(t_1) \right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

De esta forma:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 Z}{\delta \tilde{J}_{\mathbf{p}_2}^{l_2}(t_2) \delta \tilde{J}_{\mathbf{p}_1}^{l_1}(t_1)} [J, \tilde{J}] &= \int \mathcal{D}A_{\mathbf{k}}^s \mathcal{D}\tilde{A}_{\mathbf{k}}^s e^{-S + \sum_s \int d\mathbf{k} \int \tilde{J}_{\mathbf{k}}^s(t) A_{\mathbf{k}}^s(t) + J_{\mathbf{k}}^s(t) \tilde{A}_{\mathbf{k}}^s(t) dt} \left(A_{\mathbf{p}_1}^{l_1}(t_1) A_{\mathbf{p}_2}^{l_2}(t_2) \right) \\ \frac{\delta^2 Z}{\delta \tilde{J}_{\mathbf{p}_2}^{l_2}(t_2) \delta \tilde{J}_{\mathbf{p}_1}^{l_1}(t_1)} [0, 0] &= \langle A_{\mathbf{p}_1}^{l_1}(t_1) A_{\mathbf{p}_2}^{l_2}(t_2) \rangle =: C_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}^{l_1 l_2}(t_1, t_2) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Con la función respuesta ocurre algo similar y es por eso que se añade el otro campo auxiliar en la exponencial. Para poder ver esto, recordemos que anteriormente definimos la función respuesta como $R_{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2}^{l_1 - l_2}(t_1, t_2) := \left\langle \frac{\delta A_{\mathbf{p}_1}^{l_1}(t_1)}{\delta \eta_{\mathbf{p}_2}^{l_2}(t_2)} \right\rangle$, lo cual en simples palabras nos dice como varía el campo en relación a variaciones del forcing (esto adquiere más sentido si es que consideramos al forcing como un campo continuo y no una variable aleatoria). En el sentido estadístico, esta definición debe ser equivalente a cuanta correlación hay entre

el ruido $\eta_{\mathbf{p}_2}^{l_2}(t_2)$ y el campo $A_{\mathbf{p}_1}^{l_1}(t_1)$, de modo que uno puede mostrar que de hecho: $R_{\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2}^{l_1-l_2}(t_1, t_2) = \frac{1}{2F_{\mathbf{k}}} \langle \eta_{-\mathbf{p}_2}^{-l_2}(t_2) A_{\mathbf{p}_1}^{l_1}(t_1) \rangle$. Tal y como podemos ver con las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{\delta A_{\mathbf{p}_1}^{l_1}(t_1)}{\delta \eta_{\mathbf{p}_2}^{l_2}(t_2)} \right\rangle &= \int \mathcal{D}\eta P(\eta) \int \mathcal{D}[A, \tilde{A}] \frac{\delta A_{\mathbf{p}_1}^{l_1}(t_1)}{\delta \eta_{\mathbf{p}_2}^{l_2}(t_2)} e^{\sum_s \int d\mathbf{k} \int dt \tilde{A}_{\mathbf{k}}^s(t) (A_{\mathbf{k}}^s(t) + is\omega_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}}^s(t) - \eta_{\mathbf{k}}^s(t) + NL)} \\
 &= \int \mathcal{D}\eta P(\eta) \int \mathcal{D}[A, \tilde{A}] A_{\mathbf{p}_1}^{l_1}(t_1) \left(-\frac{\delta e^{\sum_s \int d\mathbf{k} \int dt \tilde{A}_{\mathbf{k}}^s(t) (A_{\mathbf{k}}^s(t) + is\omega_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}}^s(t) - \eta_{\mathbf{k}}^s(t) + NL)}}{\delta \eta_{\mathbf{p}_2}^{l_2}(t_2)} \right) \\
 &= \int \mathcal{D}\eta P(\eta) \int \mathcal{D}[A, \tilde{A}] A_{\mathbf{p}_1}^{l_1}(t_1) \tilde{A}_{\mathbf{p}_2}^{l_2}(t_2) e^{\sum_s \int d\mathbf{k} \int dt \tilde{A}_{\mathbf{k}}^s(t) (A_{\mathbf{k}}^s(t) + is\omega_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}}^s(t) - \eta_{\mathbf{k}}^s(t) + NL)} \\
 &= \langle A_{\mathbf{p}_1}^{l_1}(t_1) \tilde{A}_{\mathbf{p}_2}^{l_2}(t_2) \rangle
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
 \langle A_{\mathbf{k}'}^{s'}(t') \eta_{\mathbf{k}}^s(t) \rangle &= \int \mathcal{D}\eta P(\eta) \int \mathcal{D}[A, \tilde{A}] A_{\mathbf{k}'}^{s'}(t') \eta_{\mathbf{k}}^s(t) e^{\int -\tilde{A}(t) (\dot{A}(t) + is\Omega A(t) - \eta(t) + NL)} \\
 &= \int \mathcal{D}\eta P(\eta) \int \mathcal{D}[A, \tilde{A}] A_{\mathbf{k}'}^{s'}(t') \eta_{\mathbf{k}}^s(t) e^{\int [-\tilde{A}(t) (\dot{A}(t) + is\Omega A(t) - \eta(t)) + b(t)\eta(t) + NL]} \Big|_{b=0} \\
 &= \int \mathcal{D}\eta P(\eta) \int \mathcal{D}[A, \tilde{A}] A_{\mathbf{k}'}^{s'}(t') \frac{\delta}{\delta b_{\mathbf{k}}^s(t)} e^{\int [-\tilde{A}(t) (\dot{A}(t) + is\Omega A(t) - \eta(t)) + b(t)\eta(t) + NL]} \Big|_{b=0} \\
 &= \frac{\delta}{\delta b_{\mathbf{k}}^s(t)} \int \mathcal{D}[A, \tilde{A}] A_{\mathbf{k}'}^{s'}(t') e^{\int -\tilde{A}(t) (\dot{A}(t) + is\Omega A(t) + NL) dt} \int \mathcal{D}\eta P(\eta) e^{\int (s\tilde{A}(t) + b(t))\eta(t) dt} \Big|_{b=0} \\
 &= \frac{\delta}{\delta b_{\mathbf{k}}^s(t)} \int \mathcal{D}[A, \tilde{A}] A_{\mathbf{k}'}^{s'}(t') e^{\int -\tilde{A}(t) (\dot{A}(t) + is\Omega A(t) + NL) dt} e^{\int \int (\tilde{A}(t_1) + b(t_1)) 2F_{\mathbf{k}} \delta_{s_1-s_2} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \delta(t_1 - t_2) (\tilde{A}(t_2) + b(t_2))} \Big|_{b=0} \\
 &= \int \mathcal{D}[A, \tilde{A}] A_{\mathbf{k}'}^{s'}(t') \left(\int \tilde{A}_{\mathbf{k}_1}^{s_1}(t_1) \delta_{-s, s_1} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}) \delta(t_1 - t) \right) e^{\int -\tilde{A}(t) (\dot{A}(t) + is\Omega A(t) + NL) + \frac{1}{2} \int \int \tilde{A}(t_1) \delta(t_1 - t_2) \tilde{A}(t_2)} \\
 &= \left(\int R_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}_1}^{s'-s_1}(t', t_1) 2F_{\mathbf{k}} \delta_{-ss_1} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1) \delta(t_1 - t) \right) \\
 &= 2F_{\mathbf{k}} R_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}^{s's}(t', t)
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

donde por un tema de notación ocupamos $\int = \sum_s \int d\mathbf{k} \int dt$. De estas identidades podemos ver que:

$$\frac{\delta^2 Z}{\delta J_{\mathbf{p}_2}^{l_2}(t_2) \delta \tilde{J}_{\mathbf{p}_1}^{l_1}(t_1)} [0, 0] = \langle A_{\mathbf{p}_1}^{l_1}(t_1) \tilde{A}_{\mathbf{p}_2}^{l_2}(t_2) \rangle = R_{\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2}^{l_1-l_2}(t_1, t_2) \tag{4.16}$$

Si es que ahora consideramos sólo la versión lineal de la ecuación 4.4 podemos arreglar la forma de la definición de $Z[J, \tilde{J}] \rightarrow Z_0[J, \tilde{J}]$ (subíndice 0 refiriéndonos al caso lineal) para obtener una forma cuadrática. De esta forma, podemos integrar con respecto a los campos para obtener una expresión explícita y simplificada de $Z_0[J, \tilde{J}]$. En resumen esto se logra, haciendo una traslación y rotación en las variables de integración lo cual

está explicado con mayor detalle en el apéndice C. La expresión final corresponde a:

$$Z_0[J, \tilde{J}] = e^{-\frac{1}{2} \sum_{s_1} \int d\mathbf{k}_1 \int dt j_{\mathbf{k}_1}^{s_1, T}(t) \phi_{\mathbf{k}_1}^{*s_1}(t)} \quad (4.17)$$

donde

$$\phi_{\mathbf{k}_1}^{*s_1}(t) = \sum_{s_2} \int d\mathbf{k}_2 \int dt' \begin{pmatrix} C_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2, 0}^{s_1 s_2}(t, t') \tilde{J}_{\mathbf{k}_2}^{s_2}(t') + R_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2, 0}^{s_1 - s_2}(t, t') J_{\mathbf{k}_2}^{s_2}(t') \\ R_{\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1, 0}^{s_2 - s_1}(t', t) \tilde{J}_{\mathbf{k}_2}^{s_2}(t') \end{pmatrix}$$

y $j_{\mathbf{k}_1}^{s_1}(t) := \begin{pmatrix} \tilde{J}_{\mathbf{k}_1}^{s_1}(t) \\ J_{\mathbf{k}_1}^{s_1}(t) \end{pmatrix}$. Aquí $C_{0, \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}^{l_1 l_2}(t_1, t_2)$ y $R_{0, \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}^{l_1 l_2}(t_1, t_2)$ corresponden a la función de correlación y función respuesta asociadas al caso lineal de la ecuación 4.4, cuyas expresiones podemos calcular. Para ver la solución explícita, basta tomar el caso lineal de la ecuación 4.4 y multiplicarla por $A_{\mathbf{p}_2}^{l_2}(t_2)$ y promediar:

$$\left(\partial_{t_1} + i l_1 \Omega_{\mathbf{p}_1}^{l_1} \right) \langle A_{\mathbf{p}_1}^{l_1}(t_1) A_{\mathbf{p}_2}^{l_2}(t_2) \rangle = \langle \eta_{\mathbf{p}_1}^{l_1}(t_1) A_{\mathbf{p}_2}^{l_2}(t_2) \rangle \quad (4.18)$$

y como vimos anteriormente

$$\left(\partial_{t_1} + i l_1 \Omega_{\mathbf{p}_1}^{l_1} \right) C_{0, \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}^{l_1 l_2}(t_1, t_2) = 2F_{\mathbf{p}_1} R_{0, \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_1}^{l_2 l_1}(t_2, t_1) \quad (4.19)$$

Por lo que para resolver la parte no homogénea (cuando $t_1 < t_2$) necesitamos la expresión de la función de $R_{0, \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_1}^{l_2 l_1}(t_2, t_1)$. Para poder ver esto consideramos de nuevo el caso lineal de 4.4, pero ahora multiplicamos por $\frac{1}{2F_{\mathbf{p}_1}} \eta_{-\mathbf{p}_2}^{-l_2}(t_2)$ y promediamos:

$$\left(\partial_{t_1} + i l_1 \Omega_{\mathbf{p}_1}^{l_1} \right) \frac{1}{2F_{\mathbf{p}_1}} \langle A_{\mathbf{p}_1}^{l_1}(t_1) \eta_{-\mathbf{p}_2}^{-l_2}(t_2) \rangle = \frac{1}{2F_{\mathbf{k}}} \langle \eta_{\mathbf{p}_1}^{l_1}(t_1) \eta_{-\mathbf{p}_2}^{-l_2}(t_2) \rangle \quad (4.20)$$

Así:

$$\left(\partial_{t_1} + i l_1 \Omega_{\mathbf{p}_1}^{l_1} \right) R_{0, \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2}^{l_1 - l_2}(t_1, t_2) = \delta_{l_1 l_2} \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \delta(t_1 - t_2) \quad (4.21)$$

Cuya solución está dada por $R_{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2}^{l_1 - l_2}(t_1, t_2) = \delta_{l_1 l_2} \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) e^{-i l_1 \Omega_{\mathbf{p}_1}^{l_1}(t_1 - t_2)}$. Cuando se da el caso en que $\Omega_{\mathbf{p}_2}^{l_2} = \Omega_{\mathbf{p}_1}^{l_1}$ hay que tener un poco de cuidado ya que tendríamos términos resonantes. Este caso ocurre cuando consideramos que no afecta la viscosidad y tenemos una relación de dispersión que no diferencia el signo de un vector de onda (por ejemplo $\omega(\mathbf{k}) \propto |\mathbf{k}|^2$) de modo que si consideramos $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$ como lo

haremos más adelante, entonces la solución viene dada por:

$$C_{0,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^{l_1l_2}(t_1, t_2) = C_{0,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^{l_1l_2}(0, 0)e^{-i(l_1\Omega_{\mathbf{p}_1}t_1+l_2\Omega_{\mathbf{p}_2}t_2)} + 2F_{\mathbf{p}_2}\delta_{l_1,-l_2}e^{il_1\omega_{\mathbf{p}_2}(t_2-t_1)}(t_1\theta(t_2-t_1) + t_2\theta(t_1-t_2)) \quad (4.22)$$

Aquí también es necesario considerar que el factor de intensidad de correlación entre los ruidos es independiente del signo, i.e, $F_{-\mathbf{p}} = F_{\mathbf{p}}$. Un aspecto crucial de esta representación es que logramos describir $Z_0[J, \tilde{J}]$ inmediatamente con respecto a las funciones de correlación para el caso lineal $C_{0,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^{l_1l_2}(t_1, t_2)$ y $R_{0,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^{l_1l_2}(t_1, t_2)$, de las cuales sabemos ya su expresión explícita. Esto es un interesante punto a destacar debido a que estas funciones aparecen de forma *natural* sin la necesidad de suponer a priori su rol en la dinámica. Sin embargo, como se explica en el apéndice C, la aparición de estas funciones no es más que una elección de soluciones de un set de ecuaciones diferenciales, por ende no podemos descartar la existencia de alguna otra solución. En este trabajo no nos enfocaremos en esta otra posibilidad.

4.2 Teoría de perturbaciones renormalizada

Como vimos en la sección anterior, logramos obtener una expresión explícita para la integral funcional dada por 4.17. Sin embargo, esto se hizo para el caso libre y por lo tanto no nos proporciona la dinámica que deseamos. Si es que ahora consideramos la ecuación 4.4 en su totalidad, vemos de 4.9 que la no-linealidad simplemente aporta en un factor exponencial a la integral funcional. Este factor es decisivo y no podemos resolver la dinámica de manera exacta. Para encontrar un sistema cerrado que determine el comportamiento estadístico del sistema usaremos DIA. Para esto trataremos 4.9 de manera perturbativa, llegaremos a segundo orden, añadiremos los campos auxiliares y luego renormalizaremos. Así, el primer paso consiste en expandir la exponencial del término no lineal en una serie de potencias:

$$Z[J, \tilde{J}] = \int \mathcal{D}[A_{\mathbf{k}}^s(t)]\mathcal{D}[\tilde{A}_{\mathbf{k}}^s(t)] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} S_{int}^n \times \exp\left(-S_0 + \sum_s \int d\mathbf{k} \int \tilde{J}_{\mathbf{k}}^s(t)A_{\mathbf{k}}^s(t) + J_{\mathbf{k}}^s(t)\tilde{A}_{\mathbf{k}}^s(t)dt\right) \quad (4.23)$$

donde separamos S en el término lineal S_0 y S_{int} que es el factor dado por la interacción no lineal. Explícitamente tenemos que:

$$\begin{aligned}
 Z[J, \tilde{J}] &= \int \mathcal{D}[A_{\mathbf{k}}^s(t)] \mathcal{D}[\tilde{A}_{\mathbf{k}}^s(t)] \\
 &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_s \int d\mathbf{k} \int dt \tilde{A}_{\mathbf{k}}^s(t) \sum_{s_1 s_2 s_3} \int L_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{s s_1 s_2 s_3} A_{\mathbf{k}_1}^{s_1}(t) A_{\mathbf{k}_2}^{s_2}(t) A_{\mathbf{k}_3}^{s_3}(t) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}) d\mathbf{k}_{123} \right)^n \\
 &\times \exp \left(-S_0 + \sum_s \int d\mathbf{k} \int \tilde{J}_{\mathbf{k}}^s(t) A_{\mathbf{k}}^s(t) + J_{\mathbf{k}}^s(t) \tilde{A}_{\mathbf{k}}^s(t) dt \right)
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Podemos notar que el término de interacción lo podemos obtener derivando funcionalmente $Z_0[J, \tilde{J}]$ con respecto a los campos:

$$\begin{aligned}
 Z[J, \tilde{J}] &= \int \mathcal{D}[A_{\mathbf{k}}^s(t)] \mathcal{D}[\tilde{A}_{\mathbf{k}}^s(t)] \\
 &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_s \int d\mathbf{k} \int dt \sum_{s_1 s_2 s_3} \int L_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{s s_1 s_2 s_3} \frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{\mathbf{k}_3}^{s_3}(t)} \frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{\mathbf{k}_2}^{s_2}(t)} \frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{\mathbf{k}_1}^{s_1}(t)} \frac{\delta}{\delta J_{\mathbf{k}}^s(t)} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}) d\mathbf{k}_{123} \right)^n \\
 &\times \exp \left(-S_0 + \sum_s \int d\mathbf{k} \int \tilde{J}_{\mathbf{k}}^s(t) A_{\mathbf{k}}^s(t) + J_{\mathbf{k}}^s(t) \tilde{A}_{\mathbf{k}}^s(t) dt \right) \\
 &\equiv Z_0[J, \tilde{J}] + Z_1[J, \tilde{J}] + Z_2[J, \tilde{J}] + \dots
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Ahora notamos que en vez de $\exp \left(-S_0 + \sum_s \int d\mathbf{k} \int \tilde{J}_{\mathbf{k}}^s(t) A_{\mathbf{k}}^s(t) + J_{\mathbf{k}}^s(t) \tilde{A}_{\mathbf{k}}^s(t) dt \right)$ podemos ocupar la expresión recién calculada 4.17. Por lo tanto, una observación importante es que independiente del orden del momento que necesitemos, la expresión del lado derecho estará escrita siempre en términos de la función de correlación y función respuesta del caso libre. De esta forma, la función de correlación viene dada por:

$$\begin{aligned}
 \langle A_{\mathbf{p}_1}^{z_1}(t) A_{\mathbf{p}_2}^{z_2}(t_0) \rangle &= \left[\frac{\delta^2}{\delta \tilde{J}_{\mathbf{p}_2}^{z_2}(t_0) \delta \tilde{J}_{\mathbf{p}_1}^{z_1}(t)} Z[J, \tilde{J}] \right]_{J=\tilde{J}=0} \\
 &= \left[\frac{\delta^2}{\delta \tilde{J}_{\mathbf{p}_2}^{z_2}(t_0) \delta \tilde{J}_{\mathbf{p}_1}^{z_1}(t)} \left(Z_0[J, \tilde{J}] + Z_1[J, \tilde{J}] + Z_2[J, \tilde{J}] + \dots \right) \right]_{J=\tilde{J}=0} \\
 &= C_{0\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}^{z_1 z_2}(t, t_0) + \left[\frac{\delta^2}{\delta \tilde{J}_{\mathbf{p}_2}^{z_2}(t_0) \delta \tilde{J}_{\mathbf{p}_1}^{z_1}(t)} Z_1[J, \tilde{J}] \right]_{J=\tilde{J}=0} + \dots
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

De igual forma para la función respuesta:

$$\begin{aligned}
 R_{\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2}^{z_1-z_2}(t, t_0) &= \left[\frac{\delta^2}{\delta J_{\mathbf{p}_2}^{z_2}(t_0) \delta \tilde{J}_{\mathbf{p}_1}^{z_1}(t)} Z[J, \tilde{J}] \right]_{J=\tilde{J}=0} \\
 &= \left[\frac{\delta^2}{\delta J_{\mathbf{p}_2}^{z_2}(t_0) \delta \tilde{J}_{\mathbf{p}_1}^{z_1}(t)} \left(Z_0[J, \tilde{J}] + Z_1[J, \tilde{J}] + Z_2[J, \tilde{J}] + \dots \right) \right]_{J=\tilde{J}=0} \\
 &= R_{0\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2}^{z_1-z_2}(t, t_0) + \left[\frac{\delta^2}{\delta J_{\mathbf{p}_2}^{z_2}(t_0) \delta \tilde{J}_{\mathbf{p}_1}^{z_1}(t)} Z_1[J, \tilde{J}] \right]_{J=\tilde{J}=0} + \dots
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

4.3 DIA

Debido a que el grado de no linealidad es lo suficientemente grande, el cálculo explícito es complejo debido al gran número de términos. Para resolver este problema, usaremos un método conocido en la literatura de mecánica cuántica como *Diagramas de Feynman* [58].

A modo de ejemplo, veremos primero qué sucede con el caso a orden 1. Notamos que en en primera instancia debemos realizar 4 derivadas funcionales solamente por la expansión de la exponencial: 3 con respecto a \tilde{J} y 1 con respecto a J . Luego para obtener alguna de las funciones que nos interesa, tenemos que derivar 2 veces más haciendo un total de 6 derivadas funcionales. Por ejemplo para $C_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^{l_1l_2}(t_1, t_2)$ las derivadas serán:

$$\frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{\mathbf{p}_2}^{l_2}(t_2)} \frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{\mathbf{p}_1}^{l_1}(t_1)} \frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{\mathbf{k}_3}^{s_3}(t)} \frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{\mathbf{k}_2}^{s_2}(t)} \frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{\mathbf{k}_1}^{s_1}(t)} \frac{\delta}{\delta J_{\mathbf{k}}^s(t)} \tag{4.28}$$

Sabemos que ciertas combinaciones de derivadas dan una función de correlación (C o R dependiendo de la combinación de J y \tilde{J}), lo que indica que podemos pensar esto como un problema de combinatoria: ¿cuántas combinaciones de parejas puedo realizar tal que me den una de las funciones que nos interesan? Como podemos ya notar, muchas de estas combinaciones resultarán en parejas en las que los \tilde{J} con respecto a los que se está derivando, están evaluados en el mismo tiempo. Ejemplo: $\frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{\mathbf{k}_2}^{s_2}(t)} \frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{\mathbf{k}_1}^{s_1}(t)}$. Esto indica que obtendremos una función de correlación: $C_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{s_1s_2}(t, t)$. Mientras que para combinaciones como $\frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{\mathbf{p}_1}^{l_1}(t_1)} \frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{\mathbf{k}_1}^{s_1}(t)}$

la función será $C_{\mathbf{p}_1 \mathbf{k}_1}^{l_1 s_1}(t_1, t)$. Así:

$$\begin{aligned}
 C_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}^{l_1 l_2}(t_1, t_2) &= C_{0, \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}^{l_1 l_2}(t_1, t_2) \\
 &+ \sum_s \sum_{s_1 s_2 s_3} \int dt \sum_{s_1 s_2 s_3} \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}_{123} L_{\mathbf{k} \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{s s_1 s_2 s_3} \hat{T}_{123} R_{0, \mathbf{p}_2 \mathbf{k}}^{l_2 s}(t_2, t) C_{0, \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{s_1 s_2}(t, t) C_{0, \mathbf{k}_3 \mathbf{p}_1}^{s_3 l_1}(t, t_1) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}) \\
 &+ \sum_s \sum_{s_1 s_2 s_3} \int dt \sum_{s_1 s_2 s_3} \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}_{123} L_{\mathbf{k} \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{s s_1 s_2 s_3} \hat{T}_{123} R_{0, \mathbf{p}_1 \mathbf{k}}^{l_1 s}(t_1, t) C_{0, \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{s_1 s_2}(t, t) C_{0, \mathbf{k}_3 \mathbf{p}_2}^{s_3 l_2}(t, t_2) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k})
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

donde \hat{T}_{123} una suma sobre las permutaciones en los índices $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ y \mathbf{k}_3 (permutando también s_1, s_2 y s_3). Para no tener que hacer el cálculo explícito para el segundo orden, se realiza un método diagramático. Este consiste en hacer una identificación entre ciertas características de la expresión matemática con dibujos que reflejarán estas características. La identificación es:

$$\begin{aligned}
 C_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}^{l_1 l_2}(t_1, t_2) &\rightarrow \text{~~~~~} \begin{array}{c} t_2 \\ \text{~~~~~} \\ t_1 \end{array} \\
 C_{0, \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}^{l_1 l_2}(t_1, t_2) &\rightarrow \text{-----} \begin{array}{c} t_2 \\ \text{-----} \\ t_1 \end{array} \\
 R_{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2}^{l_1 - l_2}(t_1, t_2) &\rightarrow \text{~~~~~} \begin{array}{c} t_2 \\ \text{~~~~~} \\ t_1 \end{array} \\
 R_{0, \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2}^{l_1 l_2}(t_1, t_2) &\rightarrow \text{-----} \begin{array}{c} t_2 \\ \text{-----} \\ t_1 \end{array}
 \end{aligned}$$

De esta forma, la ecuación 4.29 se vería:

$$\begin{aligned}
 \text{~~~~~} \begin{array}{c} t_2 \\ \text{~~~~~} \\ t_1 \end{array} &= \left. \text{-----} \begin{array}{c} t_2 \\ \text{-----} \\ t_1 \end{array} \right\} \leftarrow \text{Orden 0} \\
 &+ \left. \begin{array}{c} \text{-----} \begin{array}{c} t_2 \\ \text{-----} \\ t_1 \end{array} \\ \text{-----} \begin{array}{c} t_2 \\ \text{-----} \\ t_1 \end{array} \end{array} \right\} \leftarrow \text{Orden 1}
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

donde los *loops* que vemos corresponden a las funciones de correlación que están evaluadas en el mismo tiempo. En 4.29 vemos que el segundo término es

$$\sum_s \sum_{s_1 s_2 s_3} \int dt \sum_{s_1 s_2 s_3} \int d\mathbf{k}_{123} L_{\mathbf{k} \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{s s_1 s_2 s_3} \hat{T}_{123} R_{0, \mathbf{p}_2 \mathbf{k}}^{l_2 s}(t_2, t) C_{0, \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{s_1 s_2}(t, t) C_{0, \mathbf{k}_3 \mathbf{p}_1}^{s_3 l_1}(t, t_1) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k})$$

el cual diagramáticamente corresponde al segundo término



Donde podemos ver que el diagrama indica el producto de una línea plana desde t_2 a t dada por $R_{0,\mathbf{p}_2\mathbf{k}}^{l_2s}(t_2, t)$, un loop de línea punteada $C_{0,\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{s_1s_2}(t, t)$ y una línea punteada que va desde el tiempo t a t_1 que corresponde a $C_{0,\mathbf{k}_3\mathbf{p}_1}^{s_3l_1}(t, t_1)$. Para la función respuesta el cálculo es completamente similar.

Análogamente, para el siguiente orden necesitamos el término de segundo orden de la expansión de la exponencial:

$$\begin{aligned} & \sum_s \int d\mathbf{k} \int dt \tilde{A}_{\mathbf{k}}^s(t) \sum_{s_1s_2s_3} \int L_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}^{ss_1s_2s_3} A_{\mathbf{k}_1}^{s_1}(t) A_{\mathbf{k}_2}^{s_2}(t) A_{\mathbf{k}_3}^{s_3}(t) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}) d\mathbf{k}_{123} \\ & \times \sum_x \int d\mathbf{q} \int dt' \tilde{A}_{\mathbf{q}}^x(t') \sum_{x_1x_2x_3} \int L_{\mathbf{q}\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3}^{xx_1x_2x_3} A_{\mathbf{q}_1}^{x_1}(t') A_{\mathbf{q}_2}^{x_2}(t') A_{\mathbf{q}_3}^{x_3}(t') \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 - \mathbf{q}) d\mathbf{q}_{123} \quad (4.31) \end{aligned}$$

Por ende, sólo para obtener $Z_2[J, J]$ necesitaremos realizar 8 derivadas a una exponencial que obviamente lo único que hará será provocar términos adicionales. Más aún, para lograr obtener cualquiera de las funciones requeridas C y/o R necesitaremos 2 derivadas adicionales, por lo que para obtener las ecuaciones DIA deberíamos derivar un total 11 veces. Claramente, hacer el cálculo explícito es innecesariamente hostigoso así que haremos uso de un método diagramático.

Ahora, notar que al lado izquierdo de 4.26 y 4.27 obtenemos las funciones que necesitamos. Sin embargo, el objetivo de DIA es tener ecuaciones diferenciales así que además debemos aplicar a ambos lados de la ecuación el operador $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}_1, t_1}^{z_1} := \frac{\partial}{\partial t_1} + iz_1 \Omega_{\mathbf{p}_1}^{z_1}$ y recién después de eso renormalizar. El orden de últimos pasos es crucial debido a que al lado derecho aplicaremos el operador diferencial sobre funciones ya conocidas y por ende podemos reemplazar directamente su expresión. Por lo tanto la expresión total (calculada explícitamente en

D) corresponde a:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}_1, t_1}^{l_1} \text{~~~~~} &= \frac{t_2 \quad t_1}{\quad} \left. \right\} \leftarrow \text{Orden 0} \\
 + \frac{t_2 \quad t_1}{\text{---}} \text{ (loop)} + \frac{t_2 \quad t \quad t_1}{\quad} \text{ (loop)} &\left. \right\} \leftarrow \text{Orden 1} \\
 + \frac{t_2 \quad t_1}{\text{---}} \text{ (loop)} + \frac{t_2 \quad t \quad t_1}{\text{---}} \text{ (loop)} + \frac{t_2 \quad t' \quad t_1}{\text{---}} \text{ (loop)} &\left. \right\} \leftarrow \text{Orden 2} \\
 + \frac{t_2 \quad t' \quad w \quad t_1}{\quad} \text{ (loop)} + \frac{t_2 \quad t' \quad t_1}{\quad} \text{ (loop)} &\left. \right\} \leftarrow \text{Orden 2} \\
 + \frac{t_2 \quad t' \quad t' \quad t \quad t_1}{\quad} \text{ (loop)} + \frac{t_2 \quad t' \quad t_1}{\quad} \text{ (loop)} &\left. \right\} \leftarrow \text{Orden 2} \\
 + \frac{t_2 \quad t \quad t_1}{\text{---}} \text{ (loop)} &\left. \right\} \leftarrow \text{Orden 2} \tag{4.32}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}_1, t_1}^{l_1} \text{~~~~~} \frac{t_2 \quad t_1}{\text{~~~~~}} &= \delta_{l_1, l_2} \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \delta(t_1 - t_2) \left. \right\} \leftarrow \text{Orden 0} \\
 + \frac{t_2 \quad t_1}{\quad} \text{ (loop)} &\left. \right\} \leftarrow \text{Orden 1} \tag{4.33} \\
 + \frac{t_0 \quad t \quad t_1}{\quad} \text{ (loop)} + \frac{t_2 \quad t_1 \quad t}{\quad} \text{ (loop)} + \frac{t_2 \quad t \quad t_1}{\quad} \text{ (loop)} &\left. \right\} \leftarrow \text{Orden 2}
 \end{aligned}$$

Aquí omitimos el factor numérico que va adelante de cada diagrama, es decir, por ahora solo nos interesa saber los tipos de diagramas diferentes que podemos formar. Al momento de escribir la ecuación explícita para ambas funciones, por su puesto que nos interesará saber cuántos hay de cada tipo. Con respecto a la lectura de los diagramas es necesario explicar los siguientes aspectos. Primero, a pesar de que ya están ordenados según el orden al que pertenecen cada uno de ellos, es fácil identificar esto debido a que el orden del diagrama corresponde a la cantidad de *vértices* que el diagrama tiene. Con vertices nos referimos a cada vez que hay una intersección entre líneas distintas. Usando como ejemplo el diagrama:

$$(4.34)$$

podemos ver que este tiene 2 vértices los cuales marcaremos con cruces rojas:

$$(4.35)$$

Matemáticamente , los vértices son los coeficientes de interacción $L_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}^{s s_1 s_2 s_3}$. Por lo que este diagrama(y todos aquellos de orden 2) corresponde a un término que contiene 2 de estos coeficientes. Usando el mismo ejemplo, notamos que el diagrama tiene una especie de *loop*, es decir, un *círculo* de una línea de **un** sólo tipo(segmentada , continúa , etc). Esto corresponde a funciones de correlación evaluadas en un sólo tiempo, de modo que para este caso en específico sabremos que hay un término tipo $C(t,t)$.

Otra observación importante es que en el lado izquierdo la función tiene sólo 2 tiempos llámese t_1 y t_2 , sin embargo, desde los términos de orden 2 notamos que hay un *tiempo* adicional t . Esto quiere decir que hay una integral en el tiempo para aquellas funciones que estan evaluadas en alguno de sus extremos en t . Juntando todo esto sabemos que la estructura de la expresión matemática para el diagrama es:

$$\sim C_0(t_1, t_2) \int L_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}^{s s_1 s_2 s_3} L_{\mathbf{q}\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3}^{x x_1 x_2 x_3} C_0(t_1, t) C_0(t, t) R_0(t_1, t) dt$$

$$(4.36)$$

Finalmente, una vez que llegamos a la expresión de segundo orden debemos renormalizar: $C_{0\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^{z_1z_2}(t_1, t_2) \rightarrow C_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^{z_1z_2}(t_1, t_2)$ y $R_{0\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^{z_1z_2}(t_1, t_2) \rightarrow R_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^{z_1z_2}(t_1, t_2)$. Lo cual diagramáticamente corresponde a:

$$\begin{aligned} \overset{t_2}{\text{-----}} \overset{t_1}{\text{-----}} &\rightarrow \overset{t_2}{\text{~~~~~}} \overset{t_1}{\text{~~~~~}} \\ \overset{t_2}{\text{~~~~~}} \overset{t_1}{\text{~~~~~}} &\rightarrow \overset{t_2}{\text{~~~~~}} \overset{t_1}{\text{~~~~~}} \end{aligned}$$

Al renormalizar, podemos notar que por recursividad diagramas de orden 2 podrán ser reproducidos por diagramas de orden 1. Es decir, en 4.37 y 4.37 están contenidos todos los diagramas de 4.32 y 4.33. Más aún, la idea central de este procedimiento es que al escribir ambas funciones de correlación dependiendo de si mismas, estamos considerando una cantidad infinita de diagramas (y por ende de términos) del mismo tipo y de todo orden. Mientras hacemos esto, estamos a su vez despreciando una cantidad infinita de diagramas de diferentes nuevos tipos. La aclaración de este paso se mostrará en el apéndice D. Finalmente, las ecuaciones diagramáticas renormalizadas corresponden a:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}_1, t_1}^{l_1} \overset{t_2}{\text{~~~~~}} \overset{t_1}{\text{~~~~~}} &= \overset{t_2}{\text{~~~~~}} \overset{t_1}{\text{~~~~~}} + \overset{t_2}{\text{~~~~~}} \overset{t_1}{\text{~~~~~}} \\ &+ \overset{t_2}{\text{~~~~~}} \overset{t_1}{\text{~~~~~}} + \overset{t_2}{\text{~~~~~}} \overset{t_1}{\text{~~~~~}} \end{aligned} \tag{4.37}$$

y

$$\hat{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}_1, t_1}^{l_1} \overset{t_2}{\text{~~~~~}} \overset{t_1}{\text{~~~~~}} = \delta_{l_1, l_2} \delta(t_1 - t_2) \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) + \overset{t_2}{\text{~~~~~}} \overset{t_1}{\text{~~~~~}} + \overset{t_2}{\text{~~~~~}} \overset{t_1}{\text{~~~~~}} \tag{4.38}$$

Antes de escribir las expresiones matemáticas, haremos un pequeño paréntesis sobre homogeneidad e isotropía. Con respecto a la homogeneidad, la suposición inicial de *maximal randomness* en principio restringiría desde

ya a un sistema homogéneo como bien argumenta Kraichnan [15]. Recordar que homogeneidad significa que la PDF del espacio real es invariante bajo traslaciones de modo que por ejemplo el momento de orden 2 del campo real u (la transformada de Fourier inversa de $A_{\mathbf{k}}^s$) sólo dependerá de la diferencia entre ambos puntos y no de la localización en específico: $\langle u^s(x, t)u^{s_1}(x + r, t') \rangle = f^{ss_1}(r, t, t')$. Esto trae como consecuencia que $C_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^{l_1l_2} = \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)C_{\mathbf{p}_2}^{l_1l_2}2\pi$. Luego para la función respuesta ocurre algo similar: $R_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^{l_1l_2}(t_1, t_2) = \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)R_{\mathbf{p}_2}^{l_1l_2}(t_1, t_2)$. Notar que esto es equivalente a cuando anteriormente dijimos $\langle u(-\mathbf{k})u'(\mathbf{k})u'(-\mathbf{p})u''(\mathbf{p}) \rangle \rightarrow \langle u(-\mathbf{k})u'(\mathbf{k}) \rangle \langle u'(-\mathbf{p})u''(\mathbf{p}) \rangle$. Análogamente a la homogeneidad podemos pensar que la isotropía viene dada por la invarianza bajo rotaciones de la PDF, lo que tiene como consecuencia que las funciones dependerán sólo del número de onda. Si bien el tema de si Turbulencia puede ser realmente homogénea e isotrópica ha sido cuestionado en múltiples ocasiones [25] debido a las consecuencias teóricas que implica y la *casi* incompatibilidad experimental. En este caso supondremos la validez de ambas para poder llegar así a un set de ecuaciones que sea más fácil de manejar:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}_2, t_1}^{l_1} C_{\mathbf{p}_2}^{l_1l_2}(t_1, t_2)2\pi &= 2F_{\mathbf{p}_2} R_{\mathbf{p}_2}^{l_2l_1}(t_2, t_1) \\
 &+ 3(2\pi)^2 \sum_{s_1 s_2 s_3} \int L_{-\mathbf{p}_2 - \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_2}^{l_1 s_1 s_2 s_3} C_{\mathbf{k}_2}^{s_1 s_2}(t_1, t_1) C_{\mathbf{p}_2}^{s_3 l_2}(t_1, t_2) d\mathbf{k}_2 \\
 &+ 18(2\pi)^3 \sum_{s_1 s_2 s_3} \int d\mathbf{k}_{123} L_{-\mathbf{p}_2 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{l_1 s_1 s_2 s_3} \int_0^{t_1} dt \sum_{xx_1 x_2 x_3} L_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_2}^{xx_1 x_2 x_3} \\
 &\times C_{\mathbf{p}_2}^{x_3 l_2}(t, t_2) C_{\mathbf{k}_3}^{x_1 s_3}(t, t_1) C_{\mathbf{k}_2}^{x_2 s_2}(t, t_1) R_{\mathbf{k}_1}^{s_1 - x}(t_1, t) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_2) \\
 &+ 6(2\pi)^3 \sum_{s_1 s_2 s_3} \int d\mathbf{k}_{123} L_{-\mathbf{p}_2 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{l_1 s_1 s_2 s_3} \int_0^{t_2} dt \sum_{xx_1 x_2 x_3} L_{\mathbf{p}_2 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3}^{xx_1 x_2 x_3} \\
 &\times C_{\mathbf{k}_1}^{x_1 s_1}(t, t_1) C_{\mathbf{k}_2}^{x_2 s_2}(t, t_1) R_{\mathbf{p}_2}^{l_2 - x}(t_2, t) C_{\mathbf{k}_3}^{x_3 s_3}(t, t_1) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_2)
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}_2, t_1}^{l_1} R_{\mathbf{p}_2}^{l_1 - l_2}(t_1, t_2) &= \delta_{l_1, l_2} \delta(t_1 - t_2) + 3(2\pi) \sum_{s_1 s_2 s_3} \int L_{-\mathbf{p}_2 - \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_2 \mathbf{p}_2}^{l_1 s_1 s_2 s_3} C_{\mathbf{k}_2}^{s_1 s_2}(t_1, t_1) R_{\mathbf{p}_2}^{s_3 - l_2}(t_1, t_2) d\mathbf{k}_2 \\
 &+ 18(2\pi)^2 \sum_{s_1 s_2 s_3} \sum_{xx_1 x_2 x_3} \int_{t_2}^{t_1} dt \int d\mathbf{k}_{123} L_{\mathbf{p}_2 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{l_1 s_1 s_2 s_3} L_{\mathbf{k}_1 \mathbf{p}_2 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3}^{xx_1 x_2 x_3} \\
 &\times C_{\mathbf{k}_3}^{x_3 s_3}(t, t_1) C_{\mathbf{k}_2}^{x_2 s_2}(t, t_1) R_{\mathbf{p}_2}^{x_1 - l_2}(t, t_2) R_{\mathbf{k}_1}^{s_1 - x}(t_1, t) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_2)
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Las ecuaciones 4.39 y 4.40 son las ecuaciones DIA para la placa elástica en el caso homogéneo. Si bien, su estructura es similar a las ecuaciones DIA para turbulencia hidrodinámica 3.11 y 3.12, podemos encontrar una notoria diferencia: un término extra en el lado derecho de las ecuaciones 4.39 y 4.40 . Específicamente, el segundo término del lado derecho de 4.39 está íntimamente relacionado con una corrección a la frecuencia natural entregada por la relación de dispersión. Es precisamente esta corrección lo que nos entrega un nuevo tiempo característico de nuestro sistema y creemos que nos permitirá capturar de manera correcta la física. Cabe mencionar, que como este término esta asociado solamente a una corrección a la frecuencia, las ecuaciones 4.39 y 4.40 no mostrarán una transferencia de energía si solo retenemos los términos a orden 1. Finalmente, podemos destacar que si desde un principio consideramos un sistema de discreto de modos, las ecuaciones 4.39 y 4.40 sólo cambiarán en que tendríamos sumatorias en vez de integrales, lo cual permitiría una testeo numérico.

4.4 Límite a WT y corrección a la frecuencia

Anteriormente dijimos que el sistema presentaba a primer orden de aproximación una corrección a la frecuencia lineal. Por su puesto, llamarle a ese término frecuencia no lineal no lo hace automáticamente serlo, es decir, debemos demostrarlo. Para poder explicar esto usaremos un método que conlleva, en cierto límite, a la conocida ecuación cinética.

Lo primero es considerar el siguiente cambio de variables: $(t_1, t_2) \rightarrow (\tau, t_2)$ con $\tau := t_2 - t_1$. Esto es por conveniencia ya que posteriormente nos interesará estudiar el caso estacionario y por ende queremos que las funciones sólo dependan de la diferencia de tiempos τ y no del tiempo en específico en que se encuentran t_2 . El siguiente paso es de extrema importancia: *multiscaling* en el tiempo. En simples palabras, asumiremos que existe un parámetro pequeño ϵ el cual separará toda la dinámica del sistema en distintos procesos. Cada uno de ellos ocurrirá en su propia escala temporal (potencias de ϵ). Sin embargo, para este proceso sólo consideraremos que la diferencia entre t_2 y t_1 va como tiempo rápido. Esto equivale a decir

$(\tau, t_2) \rightarrow (\tau, t_2, T_2, \mathcal{T}_2)$ donde:

$$\begin{aligned}
 \tau &= \tau \text{ tiempo rápido} \\
 t_2 &= t_2 \text{ tiempo rápido} \\
 T_2 &= \epsilon t_2 \text{ tiempo lento} \\
 \mathcal{T}_2 &= \epsilon^2 t_2 \text{ tiempo más lento}
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

con tiempo *rápido* o *lento* nos referimos a la evolución que va sintiendo la función a partir de cierta condición inicial, es decir, para que ϵt_2 empiece a importar, t_2 debe ser lo suficientemente grande como para contrarrestar el efecto de ϵ . A modo de ejemplo consideremos la función

$$y(x) = \left(2 + \frac{x}{100}\right) \cos(x) \tag{4.42}$$

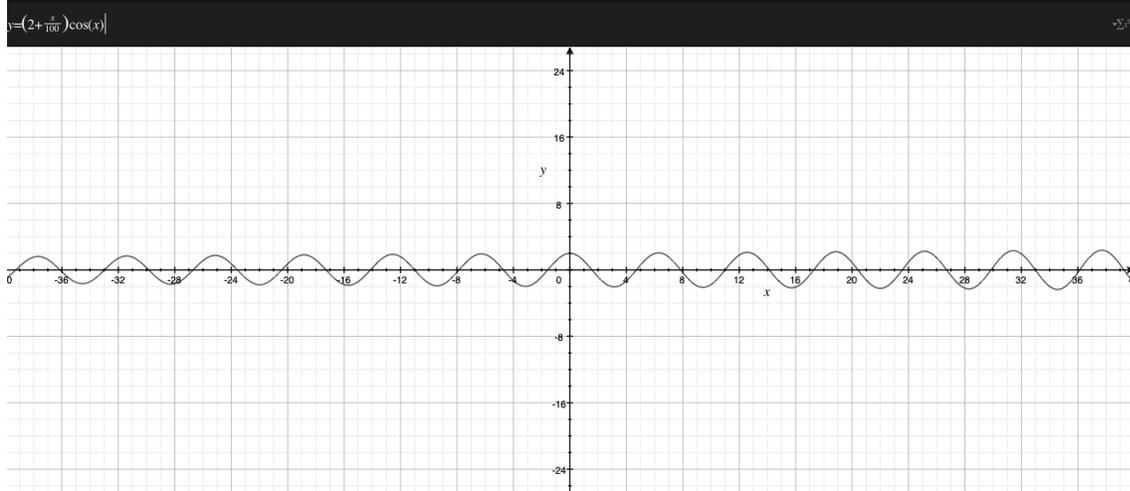
De modo que si vemos el gráfico 4.1 de esta función para intervalos de tiempos relativamente pequeños en comparación a la escala del parámetro introducido $\frac{1}{100}$, notamos que la amplitud de oscilación parece ser constante. Sin embargo, si es que aumentamos de tamaño los intervalos temporales, es decir, si vemos la misma función para tiempos más largos observamos lo que muestra 4.2. Acá podemos notar claramente como la amplitud aumenta con el paso del tiempo.

Entonces, nuestro trabajo ahora es intentar averiguar cuales son los procesos que ocurren en cada una de las escalas de nuestras ecuaciones DIA y qué condiciones se tienen que satisfacer para que la expansión este bien hecha. Para poder ver esto haremos la siguiente expansión $C_{\mathbf{p}_2}^{l_1 l_2}(\tau, t_2) = C_{\mathbf{p}_2,0}^{l_1 l_2}(\tau, t_2, T_2, \mathcal{T}_2) + \epsilon C_{\mathbf{p}_2,1}^{l_1 l_2}(\tau, t_2, T_2, \mathcal{T}_2) + \epsilon^2 C_{\mathbf{p}_2,2}^{l_1 l_2}(\tau, t_2, T_2, \mathcal{T}_2) + \dots$. Por lo tanto y a modo de ejemplo, si escribimos la ecuación a orden lineal 4.39 obtenemos:

$$-\frac{\partial C_{0,p_2}^{l_1 l_2}}{\partial \tau}(\tau, t_2, T_2) + il_1 \omega_{p_2} C_{0,p_2}^{l_1 l_2}(\tau, t_2, T_2) = 2F_{p_2} R_{0,p_2}^{l_2 l_1}(\tau) \tag{4.43}$$

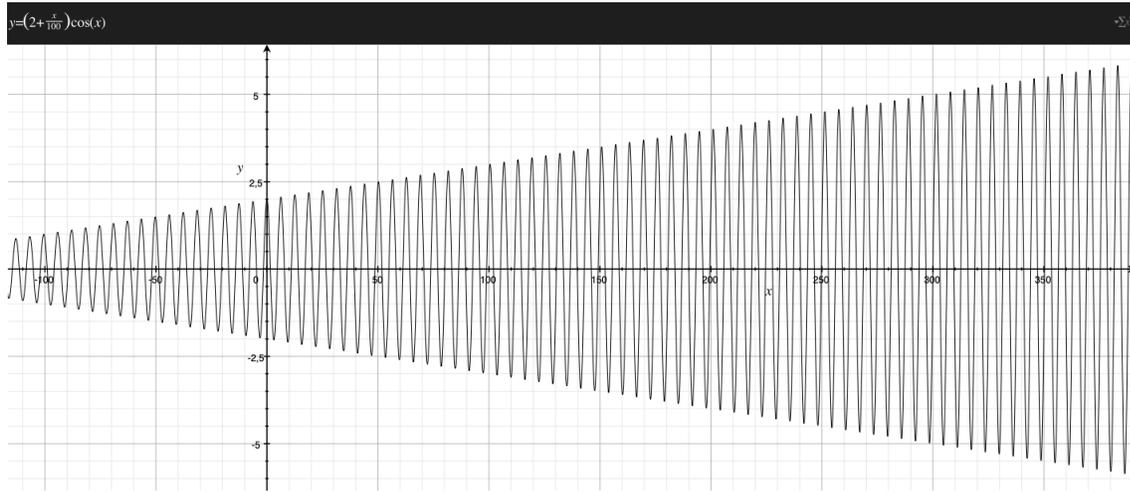
Cuya ecuación para el segundo argumento temporal es equivalente:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial t_2} + il_2 \omega_{p_2}\right) C_{0,p_2}^{l_1 l_2}(\tau, t_2, T_2) = 2F_{-p_2} R_{0,p_2}^{l_1 l_2}(-\tau) \tag{4.44}$$



(a)

Figure 4.1: Gráfico de $y(x) = (2 + \frac{x}{100})\cos(x)$ para intervalos pequeños



(a)

Figure 4.2: Gráfico de $y(x) = (2 + \frac{x}{100})\cos(x)$ para tiempos largos

La solución de este set viene dada por:

$$C_{0,p_2}^{l_1 l_2}(\tau, t_2, T_2, \mathcal{T}_2) = C_{0,p_2}^{l_1 l_2}(0, 0, T_2, \mathcal{T}_2) e^{-iM_{12}t_2 + il_1\omega_{p_2}\tau} + 2F_{p_2} \delta_{l_1, -l_2} e^{il_1\omega_{p_2}\tau} ((t_2 - \tau)\Theta(\tau) + t_2\Theta(-\tau)) \quad (4.45)$$

con $M_{12} := (l_1 + l_2)\omega_{p_2}$ y donde notamos que es bastante similar a la solución encontrada anteriormente para el caso libre 4.22. La única diferencia es que ahora tenemos una solución oscilatoria cuya amplitud ahora puede variar lentamente, donde con "lentamente" nos referimos a que para intervalos de tiempo del orden ϵ^{-1} o ϵ^{-2} la variación será notoria.

Para los ordenes siguientes el tratamiento es similar aunque hay un importante detalle a mencionar: la condición *secular* o *resonante*. Al considerar distintas escalas temporales, lo que llamábamos anteriormente variaciones en el tiempo, i.e. $\frac{\partial}{\partial t_2}$, ahora debemos hacer la diferencia: ¿con respecto a qué tiempo estamos considerando las variaciones?:

$$\frac{\partial}{\partial t_2} = \frac{\partial}{\partial t_2} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T_2} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \mathcal{T}_2} \quad (4.46)$$

Entonces si combinamos esto con la expansión de la función mostrada arriba, veremos como al orden siguiente obtendremos un término del estilo $\frac{\partial C_0}{\partial T_2}$ el cual en el caso $l_2 = -l_1$ sería constante en t_2 . Esto tiene como consecuencia, que luego de la integración crecería linealmente con t_2 por lo que la expansión se vería como:

$$C_{\mathbf{p}_2}^{l_1 l_2}(\tau, t_2) = C_{\mathbf{p}_2, 0}^{l_1 l_2}(\tau, t_2, T_2, \mathcal{T}_2) + \epsilon t_2 \times \text{constante} + \dots \quad (4.47)$$

por ende, para tiempos de t_2 del orden de ϵ^{-1} la expansión perdería completa validez. Esto puede ocurrir con más de 1 término en cada orden, por lo que para que la expansión no se quiebre pediremos que estos términos se anulen entre sí, es decir encontramos una condición *resonante*. Esto otorga consistencia a la expansión y su justificación yace cuando establecimos la "constante" para el tiempo rápido dejamos libre como variaría esta misma constante para tiempos largos, por lo que ahora simplemente estaríamos aprovechándonos de esa libertad. En simples palabras, la condición secular nos dirá como varían nuestras constantes de integración para tiempos más lentos.

Así, mediante la ecuación resonante podemos obtener que a primer orden sólo obtendremos una frecuencia asociada a un tiempo lento (detalles en el apéndice E):

$$C_{0,p_2}^{l_1 l_1}(0, 0, T_2, \mathcal{T}_2) = \tilde{C}_{0,p_2}^{l_1 l_1}(0, 0, 0, \mathcal{T}_2) e^{i\tilde{\omega}_{p_2}^{l_1} T_2} \quad (4.48)$$

con

$$\tilde{\omega}_{p_2}^{l_1} := -6\pi i \sum_{s_1} \int (L_{-p_2 - p_2 - k_1 k_1}^{l_1 l_1 - s_1 s_1} + L_{p_2 p_2 - k_1 k_1}^{l_1 l_1 - s_1 s_1}) C_{0, k_1}^{-s_1 s_1}(0) dk_1 C_{0, p_2}^{l_1 l_1}(0, T)$$

Sin embargo, como estamos interesados en soluciones asociadas a una transferencia de energía tendremos que ir a tiempos de orden ϵ^2 . Esto se calcula en el apéndice E. La ecuación resonante a este orden corresponde a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_{\mathbf{p}_2}^{l_1 - l_1}}{\partial \mathcal{T}_2}(\mathcal{T}_2) &= -12\pi(2\pi)^2 \sum_{s_1 s_2 s_3} \int d\mathbf{k}_{123} \hat{T}_{123} c_{\mathbf{p}_2}^{l_1 - l_1}(\mathcal{T}_2) c_{\mathbf{k}_3}^{-s_3 s_3}(\mathcal{T}_2) c_{\mathbf{k}_2}^{-s_2 s_2}(\mathcal{T}_2) \\ &\times \left| L_{\mathbf{p}_2 \mathbf{q}_3 \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_1}^{-l_1 s_1 s_2 s_3} \right|^2 \frac{s_1}{l_1} \delta(K_{-\mathbf{p}_2}) \delta(l_1 \omega_{p_2} + s_1 \omega_{k_1} + s_2 \omega_{k_2} + s_3 \omega_{k_3}) \\ &+ 12\pi(2\pi)^2 \sum_{s_1 s_2 s_3} \int d\mathbf{k}_{123} c_{\mathbf{k}_1}^{-s_1 s_1}(\mathcal{T}_2) c_{\mathbf{k}_2}^{-s_2 s_2}(\mathcal{T}_2) c_{\mathbf{k}_3}^{-s_3 s_3}(\mathcal{T}_2) \\ &\left| L_{\mathbf{p}_2 \mathbf{q}_3 \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_1}^{-l_1 s_1 s_2 s_3} \right|^2 \delta(K_{-\mathbf{p}_2}) \delta(l_1 \omega_{p_2} + s_1 \omega_{k_1} + s_2 \omega_{k_2} + s_3 \omega_{k_3}) \end{aligned} \quad (4.49)$$

la cual corresponde a 2.12 escrita de otra forma con $c_{\mathbf{p}_2}^{l_1 - l_1}(\mathcal{T}_2) := C_{0, p_2}^{l_1 - l_1}(0, 0, 0, \mathcal{T}_2)$ y es precisamente la ecuación cinética entregada por WT.

4.5 Sobre simulaciones numéricas directas

Basta una simple mirada para notar que las ecuaciones 4.39 y 4.40 son de gran complejidad y es por esto que no es lo más sensato dedicarse a intentar resolverlas analíticamente. Esto especialmente cuando en el día de hoy, los avances por estudios numéricos han permitido progresar en muchas áreas de la física. Por ende, para intentar entender lo que las ecuaciones nos dice que está pasando, el primer paso debiese ser simularlas. Sin embargo, una serie de consideraciones debe realizarse antes de proceder y se trata de la cantidad de operaciones que uno podría realizar.

Nos enfocaremos solamente en la ecuación para la función de correlación 4.39. Escrita en su forma discreta para el modo i :

$$C_i(t_j + h, t'_k) = C_i(t_j, t'_k) + h(-\alpha_i C_i(t_j, t'_k) - \sum_{n=1}^j \Sigma_i(t_j, t_n) C_i(t_n, t'_k) \Delta t_n + \sum_{n=1}^k R_i(t'_k, t_n) F_i(t_j, t_n) \Delta t_n) \quad (4.50)$$

Tomando como condición inicial $C_i(0, 0)$ podemos iterar para la primera entrada de la función por T pasos. Entonces podemos ver que para obtener un $C_i(t_j, t'_k)$ debemos ir evolucionando paso a paso es decir:

$$C(t_1, 0) \rightarrow C(t_1, t_1) \rightarrow C(t_2, t_1) \dots$$

donde usamos que $C(t_i, t_j) = C^*(t_j, t_i)$. Entonces, haciendo un cálculo muy burdo podemos decir que para llegar a $C(t_{final}, t_{final})$ debemos hacer $2T$ iteraciones. Luego cada iteración está compuesta por 2 integrales temporales, entonces necesitaremos $\sim 2T$ en la última iteración. Además, las funciones Σ y F cada una de ellas tiene 3 integrales en espacio Fourier, por lo que si consideramos K modos, debemos hacer entonces $\sim K^3$ iteraciones. Todo esto para cada modo obteniendo un total del orden de $\sim 2TK^4$ iteraciones. A esto se le debe sumar por supuesto las operaciones necesarias para la frecuencia no lineal, que al ser sólo una suma será del orden de K . Entonces para simular 1 segundo hacemos el time step de $\Delta t = 0.01$ (pensando en simulaciones ya hechas con la ecuación cinética), 100 pasos de tiempo y 100 modos, tendríamos que hacer algo del orden de 2×10^{10} operaciones. Más aún, este cálculo representa sólo una cota inferior ya que no consideramos que por cada iteración, debemos además ir actualizando la función respuesta.

Con la intención de hacer simulaciones numéricas de las ecuaciones DIA, se realizaron de manera preliminar simulaciones de la ecuación cinética a 3 y 4 ondas. Esto debido a que las simulaciones de DIA numéricamente son costosas. Para esto, llevamos a cabo el método de Runge-Kutta de orden 2. Por ahora, asumiremos que de alguna forma podemos hacer las integrales angulares, de modo que solo nos quedaría las integrales radiales convirtiéndose en integrales en espacio de frecuencia. Este tipo de suposiciones son bien comunes a la hora de simular la ecuación cinética. Si queremos añadir inyección-disipación para poder encontrar un caso estacionario y así compararlo con el espectro esperado, entonces se requerirá mayor sensibilidad en el time step. Esto implica que el timestep debe ser más pequeño y por ende incrementa el número de pasos 4.4. Acá, decidimos comparar la energía cinética $E := \int \omega N(\omega)$ con la *wave action* $N := \int N(\omega)$ para ver que se forma un estado estacionario.

Sin embargo, si ahora queremos probar con la ecuación cinética a 4 ondas entonces aumenta sustancialmente el tiempo necesario para realizar las simulaciones con el mismo número de modos. Notar que aquí lo único que cambió fue pasar de TK iteraciones a TK^2 usando el mismo análisis anterior. Empíricamente, las simulaciones pasaron de durar 2 minutos a más de 1 hora. Mediante este análisis podemos anticipar que al intentar hacer el mismo método con las ecuaciones DIA llevará una enorme cantidad de tiempo y por ende

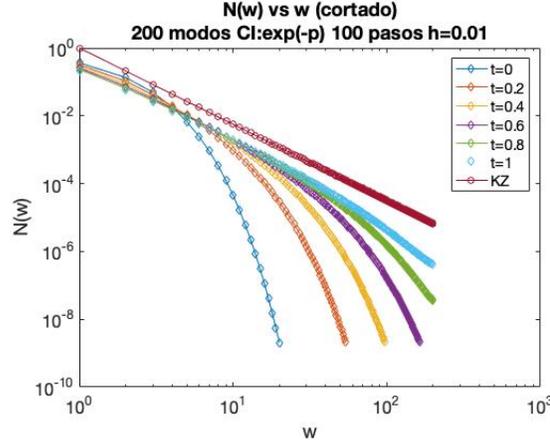


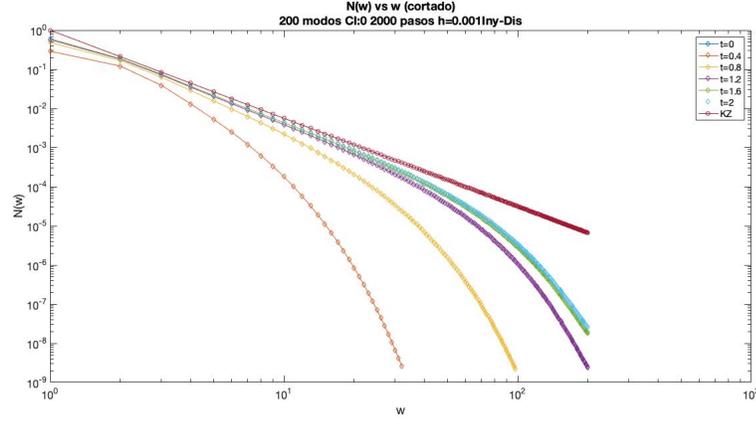
Figure 4.3: Simulación de la ecuación cinética de grado 3. Condición inicial: $N(\omega, t = 0) = e^{-\omega}$, parametro: $\lambda = 3/2$, Kernel: $K(\omega_1, \omega_2) = (\omega_1 \omega_2)^{\lambda/2}$, time step: $h = 0.01$ con 100 pasos

las simulaciones de las ecuaciones 4.39 y 4.40 quedarán para un trabajo futuro. Inclusive, dicho trabajo a futuro contempla un paso intermedio el cual consiste en hacer simulaciones de las ecuaciones DIA que se obtienen del modelo 3.13. La ventaja inmediata de esto consiste en que si insertamos un término de inyección de energía y otro de disipación en 3.13, la solución para el caso estacionario se conoce de manera exacta y se puede escribir en términos de funciones elípticas de Jacobi [47]. Por ende, para un caso tan simple y de solución exacta, podemos testear la validez de DIA para este sistema sin requerir de un gigantesco poder computacional como si se requerirá para entender las soluciones estacionarias de 4.39 y 4.40.

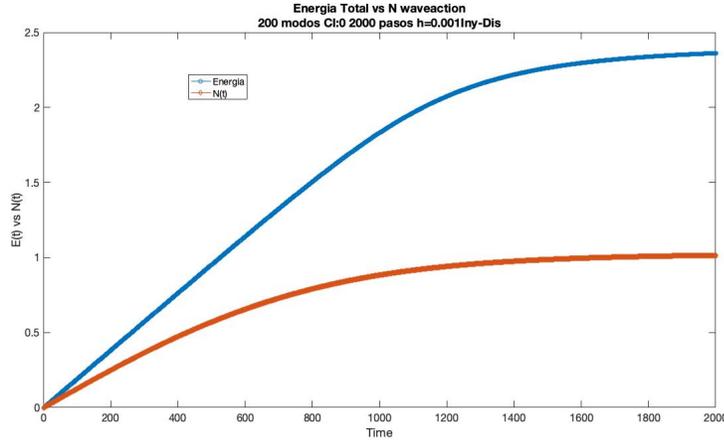
4.6 Caso estacionario

En la sección anterior vimos como quedó en evidencia que al pasar de 3 a 4 ondas, el tiempo necesario para llevar a cabo cada simulación se incrementa considerablemente. Esto sugiere que debemos simplificar de alguna forma las ecuaciones de DIA dado que el cambio en el numero de operaciones estimadas es más brusco aún. En la literatura podemos ver que el primer *approach* a este problema es estudiar directamente el caso estacionario, isotrópico y homogéneo de las ecuaciones 4.39 y 4.40 [59, 44]. En [44] se evalúa una condición para el uso de la relación *Fluctuación-Disipación*(FD), cuya validez será analizada desde nuestro punto de vista.

En la mayoría de los trabajos, y con argumentos experimentales o numéricos, se da por hecho la existencia de un estado estacionario. Sin embargo, debemos asegurarnos que las ecuaciones sean compatibles con



(a) $N(\omega, t)$ vs ω



(b) E vs N

Figure 4.4: (a): Simulación de la ecuación cinética de grado 3 con inyección y disipación comparado con el espectro esperado (rojo). Condición inicial: $N(\omega, t = 0) = 0$, parámetro: $\lambda = 3/2$, Kernel: $K(\omega_1, \omega_2) = (\omega_1 \omega_2)^{\lambda/2}$, time step: $h = 0.001$ con 2000 pasos. Inyección: en los primeros 10 modos $e^{-\omega^2/4}$, Disipación en todo el espectro: $-(\omega/20)^2 N(\omega, t)$. (b): Energía cinética (azul) vs Wave Action (naranja)

esta realidad. Para la ecuación de la función respuesta, es sencillo ver como al hacer el cambio de variable a $\tau := t_2 - t_1$ la ecuación es consistente y por ende admite un estado estacionario. Para la función de correlación esto no es claro debido a que tiene 2 integrales temporales una con límite superior t_1 y la otra con t_2 . De esta forma, el siguiente análisis consistirá en asumir que esta ecuación admite un estado estacionario y luego obtendremos una condición que se debe cumplir para que esto efectivamente ocurra. Primero, consideremos que el sistema llega a dicho estado a partir de cierto tiempo t_s de modo que la función sólo dependa de la diferencia de sus argumentos. Entonces escogemos los tiempos $t_m > t'_m > t_n > t'_n$ todos mayores a t_s , tal que $C_i(t_m, t'_m) = C_i(t_n, t'_n)$, es decir, $t_m - t'_m = t_n - t'_n$. Sus respectivas ecuaciones para el modo i son:

$$\partial_t C_i(t_m, t'_m) + \alpha_i C_i(t_m, t'_m) + \int_0^{t_m} \Sigma_i(t_m, \tau) C_i(\tau, t'_m) d\tau = \int_0^{t'_m} R_i^*(t'_m, \tau) F_i(t_m, \tau) d\tau \quad (4.51)$$

$$\partial_t C_i(t_n, t'_n) + \alpha_i C_i(t_n, t'_n) + \int_0^{t_n} \Sigma_i(t_n, \tau) C_i(\tau, t'_n) d\tau = \int_0^{t'_n} R_i^*(t'_n, \tau) F_i(t_n, \tau) d\tau \quad (4.52)$$

donde por notación suprimimos los índices superiores debido a que esta ecuación es completamente genérica para cualquier sistema desarrollado con DIA. Como $t_m - t'_m = t_n - t'_n$ entonces ambas deben representar el mismo estado, ergo $\partial_t C_i(t_m, t'_m) = \partial_t C_i(t_n, t'_n)$. Haciendo un poco de álgebra obtenemos que

$$\int_0^{t_m - t_n} (-\Sigma_i(t_m, \tau) C_i(\tau, t'_m) + R_i^*(t'_m, \tau) F_i(t_m, \tau)) d\tau = 0 \quad (4.53)$$

Al ser los tiempos t_m y t_n escogidos arbitrariamente, el integrando debe ser idénticamente 0:

$$\begin{aligned} -\Sigma_i(t_m, \tau) C_i(\tau, t'_m) + R_i^*(t'_m, \tau) F_i(t_m, \tau) = 0 &\Rightarrow C_i(\tau, t'_m) = \frac{\Sigma_i(t_m, \tau)}{F_i(t_m, \tau)} R_i^*(t'_m, \tau) \\ &= f_i(\tau) R_i^*(t'_m, \tau) \end{aligned} \quad (4.54)$$

siendo f una función de i y de τ que por ahora es desconocida. Si es que ahora nos queremos enfocar en nuestra placa elástica, necesitamos primero las expresiones para la función Σ_i y para F_i en el caso $l_2 = -l_1$:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\mathbf{p}_2}^{l_1} &:= 18(2\pi)^3 \sum_{s_1 s_2 s_3} \int d\mathbf{k}_{123} L_{-\mathbf{p}_2 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{l_1 s_1 s_2 s_3} L_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_2}^{s_1 - s_3 - s_2 l_1} \\ &\quad \times C_{\mathbf{k}_3}^{-s_3 s_3}(t, t_1) C_{\mathbf{k}_2}^{-s_2 s_2}(t, t_1) R_{\mathbf{k}_1}^{s_1 - s_1}(t_1, t) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_2) \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned}
 F_{\mathbf{p}_2}^{l_1} &:= 6(2\pi)^3 \sum_{s_1 s_2 s_3} \int d\mathbf{k}_{123} L_{-\mathbf{p}_2 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{l_1 s_1 s_2 s_3} L_{\mathbf{p}_2 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3}^{-l_1 - s_1 - s_2 - s_3} \\
 &\quad \times C_{\mathbf{k}_1}^{-s_1 s_1}(t, t_1) C_{\mathbf{k}_2}^{-s_2 s_2}(t, t_1) C_{\mathbf{k}_3}^{-s_3 s_3}(t, t_1) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_2)
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

Por lo que la ecuación 4.54 se reduce a:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{s_1 s_2 s_3} \int d\mathbf{k}_{123} \left(L_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_2}^{s_1 - s_3 - s_2 - l_1} R_{\mathbf{k}_1}^{s_1 - s_1}(t_m, \tau) C_{\mathbf{k}_3}^{-s_3 s_3}(\tau, t_m) C_{\mathbf{k}_2}^{-s_2 s_2}(\tau, t_m) C_{\mathbf{p}_2}^{l_1 - l_1}(\tau, t'_m) \right. \\
 &+ L_{\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_2}^{s_2 - s_3 - s_1 - l_1} R_{\mathbf{k}_2}^{s_2 - s_2}(t_m, \tau) C_{\mathbf{k}_3}^{-s_3 s_3}(\tau, t_m) C_{\mathbf{k}_1}^{-s_1 s_1}(\tau, t_m) C_{\mathbf{p}_2}^{l_1 - l_1}(\tau, t'_m) \\
 &+ L_{\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_2}^{s_3 - s_1 - s_2 - l_1} R_{\mathbf{k}_3}^{s_3 - s_3}(t_m, \tau) C_{\mathbf{k}_1}^{-s_1 s_1}(\tau, t_m) C_{\mathbf{k}_2}^{-s_2 s_2}(\tau, t_m) C_{\mathbf{p}_2}^{l_1 - l_1}(\tau, t'_m) \\
 &\left. + L_{\mathbf{p}_2 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3}^{-l_1 - s_1 - s_2 - s_3} C_{\mathbf{k}_1}^{-s_1 s_1}(\tau, t_m) C_{\mathbf{k}_2}^{-s_2 s_2}(\tau, t_m) C_{\mathbf{k}_3}^{-s_3 s_3}(\tau, t_m) R_{\mathbf{p}_2}^{-l_1 l_1}(t'_m, \tau) \right) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_2) = 0 \tag{4.57}
 \end{aligned}$$

Por ende, al insertar la expresión 4.54, obtenemos que si encontramos una función $f_{\mathbf{k}}^s(\tau)$ tal que:

$$L_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_2}^{s_1 - s_3 - s_2 - l_1} (f_{\mathbf{k}_1}^{*s_1}(\tau))^{-1} + L_{\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_2}^{s_2 - s_3 - s_1 - l_1} (f_{\mathbf{k}_2}^{*s_2}(\tau))^{-1} + L_{\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_2}^{s_3 - s_1 - s_2 - l_1} (f_{\mathbf{k}_3}^{*s_3}(\tau))^{-1} + L_{\mathbf{p}_2 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3}^{-l_1 - s_1 - s_2 - s_3} (f_{\mathbf{p}_2}^{l_1}(\tau))^{-1} = 0 \tag{4.58}$$

entonces aseguramos la existencia de un estado estacionario. Lo que estamos diciendo es que si uno exige que la ecuación 4.39 tenga una solución estacionaria, entonces podemos encontrar una relación tipo 4.54 la cual se conoce comúnmente como relación Fluctuación-Disipación. Más aún, como el coeficiente $f_i(\tau)$ es a priori desconocido, podemos intentar deducirlo a partir de 4.58. Es interesante notar que esto difiere un poco del análisis de Ottaviani, ya que en su trabajo se da por hecho la existencia de un estado estacionario y a partir de ahí se estudia la condición para que la relación FD sea válida.

Para muchos sistemas la condición 4.58 es usualmente sencilla de satisfacer tomando el caso $f_i(\tau) = f \in \mathbb{C}$. Estos sistemas son aquellos que conservan la energía cinética de modo que emerge una propiedad cíclica conocida en la literatura como relación Manley-Rowe análoga a

$$L_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_2}^{s_1 - s_3 - s_2 - l_1} + L_{\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_2}^{s_2 - s_3 - s_1 - l_1} + L_{\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_2}^{s_3 - s_1 - s_2 - l_1} + L_{\mathbf{p}_2 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3}^{l_1 - s_1 - s_2 - s_3} = 0 \tag{4.59}$$

Mientras que para el caso específico de la placa elástica vemos que una posible solución de 4.58 corresponde a

$$(f_{\mathbf{p}_2}^{l_1})^{-1} = \frac{1 \cdot \mathbf{p}_2}{il_1} M \quad (4.60)$$

siendo M cualquier constante real, ya que:

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_2}^{s_1 - s_3 - s_2 - l_1} &= -\frac{is_1}{(2\pi)^2} J_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \mathbf{p}_2} \\ L_{\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_2}^{s_2 - s_3 - s_1 - l_1} &= -\frac{is_2}{(2\pi)^2} J_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \mathbf{p}_2} \\ L_{\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_2}^{s_3 - s_1 - s_2 - l_1} &= -\frac{is_3}{(2\pi)^2} J_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \mathbf{p}_2} \\ L_{\mathbf{p}_2 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3}^{-l_1 - s_1 - s_2 - s_3} &= \frac{il_1}{(2\pi)^2} J_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \mathbf{p}_2} \end{aligned} \quad (4.61)$$

Entonces, insertando nuestra solución en 4.58 vemos que se convierte en:

$$1 \cdot (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_2) J_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \mathbf{p}_2} \quad (4.62)$$

lo cual es 0 debido a la delta de Dirac. Por lo tanto, si logramos encontrar esta relación para el sistema en específico estamos pasando desde un sistema en derivadas parciales a derivadas totales.¹ Si insertamos la solución 4.60 en 4.40 con $M = 1$ y $l_2 = l_1$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{d\tau} + i\Omega_{\mathbf{p}_2}^{l_1} \right) \left(\frac{1 \cdot \mathbf{p}_2}{il_1} C_{\mathbf{p}_2}^{l_1 - l_1}(\tau) \right) &= \delta(\tau) + 3(2\pi) \sum_{s_1} \int L_{-\mathbf{p}_2 - \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_2 \mathbf{p}_2}^{l_1 s_1 - s_1 l_1} C_{\mathbf{k}_2}^{-s_1 s_1}(0) \frac{1 \cdot \mathbf{p}_2}{il_1} C_{\mathbf{p}_2}^{l_1 - l_1}(\tau) d\mathbf{k}_2 \\ &+ 18(2\pi)^2 \sum_{s_1 s_2 s_3} \int_0^\tau dt' \int d\mathbf{k}_{123} L_{\mathbf{p}_2 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{l_1 s_1 s_2 s_3} L_{\mathbf{k}_1 \mathbf{p}_2 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3}^{s_1 l_1 - s_2 - s_3} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_2) \\ &\times C_{\mathbf{k}_3}^{s_3 - s_3}(\tau - t') C_{\mathbf{k}_2}^{s_2 - s_2}(\tau - t') \frac{1 \cdot \mathbf{k}_1}{is_1} C_{\mathbf{k}_1}^{s_1 - s_1}(\tau - t') \frac{1 \cdot \mathbf{p}_2}{il_1} C_{\mathbf{p}_2}^{l_1 - l_1}(t') \end{aligned} \quad (4.63)$$

Con "pasar a derivadas totales" nos referimos a que logramos reducir el número de argumentos que reciben las funciones, lo que significa que ya no tenemos que evolucionar en 2 líneas temporales por separado. Más

¹ Acá le llamamos sistema en derivadas totales a un sistema que sigue siendo en derivadas parciales dado que las funciones en cuestión dependen no solo del tiempo sino de \mathbf{k} . Sin embargo, como no hay derivadas en Fourier podemos ver esto como un sistema de ODEs acopladas (una para cada modo).

aún, la relación 4.54 nos permite ahora no tener que simular 2 ecuaciones en simultáneo sino que podemos sólo preocuparnos por una de ellas. Obviamente, la ventaja de esto es que el número de operaciones para simular las ecuaciones ahora es menor.

Un aspecto interesante a mencionar corresponde a que el hecho de que DIA presente de por sí un estado estacionario no nos debería sorprender en lo absoluto. Una sencilla razón para ver esto proviene de comparar LET con DIA. Dijimos anteriormente que sus respectivas ecuaciones para la función de correlación son equivalentes. Esto unido a que LET se basa en una relación que no es más que una generalización de la relación FD(llamada *relación fluctuación relajación*) y que originalmente fue derivada asumiendo desde el principio que las funciones eran estacionarias, nos avisa a priori que DIA también debería presentar dicho estado.

Adicionalmente, debemos decir que lo que realmente encontramos en 4.60 fue una familia de soluciones , cada una de ellas caracterizada por la constante M . Si bien la solución es consistente con las ecuaciones 4.39 y 4.40, el hecho de que ahora tendremos un parámetro extra que tendrá influencia en la ecuación a estudiar 4.63 , presenta grandes dificultades conceptuales. Sin embargo, creemos que la familia de soluciones 4.60 no aportan mayor información al problema, ya que está más asociada a la conservación de "momentum". Para remediar esto, creemos que es posible deducir una propiedad cíclica para los coeficientes L a partir de la conservación de la energía total (como para el caso hidrodinámica). Con esto último, podríamos encontrar una familia de soluciones no triviales , lo cual quedará para un trabajo a futuro de esta tesis.

Finalmente, de este análisis es necesario recalcar que la relación 4.54 es obtenida en un sistema conservativo. Si es que quisiéramos agregar términos asociados a la inyección de energía y/o disipación, entonces no podríamos asegurar que la relación de FD sea válida en un sistema fuera del equilibrio termodinámico.

Chapter 5

Discusión y conclusiones

En este trabajo modelamos un sistema turbulento como un proceso estocástico. A pesar de aún no poder verificar la similitud entre la teoría y la realidad (pues aún no validamos los resultados obtenidos) podemos ver que poderosos métodos pueden ser formulados desde este punto de vista.

El tema principal de esta tesis fueron las ecuaciones DIA. Este método presenta la ventaja conceptual de que la función respuesta aparece de forma más natural a la presentada en el método original.

Además logramos encontrar que en cierto límite las ecuaciones DIA para la placa elástica conllevan a la respectiva ecuación cinética. Si bien la implicancia *Falso*→*Verdadero* es verdadera y por lo tanto no podemos asegurar la validez de DIA a partir de la teoría cinética, surgen 2 temas interesante de esta derivación. El primero consiste en notar que la derivación de las ecuaciones DIA sería la misma si desde un comienzo consideramos en todo momento una cantidad finita de modos. En segundo lugar hay trabajos como el de Orszag de 1970 [7] que argumentan sobre la irreversibilidad hacia el equilibrio por parte de DIA. Si este fuese el caso, en este trabajo partimos de ecuaciones irreversibles y logramos obtener la ecuación cinética. A pesar de que hay argumentos sobre la irreversibilidad propia de la ecuación cinética , este hecho sugiere la posibilidad que el comportamiento irreversible este asociado a algo más general e independiente de la "fuerza" del término no lineal. Por lo tanto, el entendimiento del origen de la irreversibilidad de las ecuaciones quedará para un trabajo a futuro.

Una vez presentadas las ecuaciones DIA consideradas en un sistema homogéneo, estudiamos la posibilidad de verificar la validez de DIA desde un punto de vista numérico. En este sentido se estableció la importancia de encontrar simplificaciones para las ecuaciones, ya que la simulación directa es costosa en términos de

procesamiento y/o de tiempo.

Finalmente llegamos a una condición que se debe satisfacer para que las ecuaciones muestren la existencia de un estado estacionario. Más aún, se mostró que dicho estado está completamente relacionado a lo que llamamos usualmente relación FD. Esto difiere ligeramente de lo estudiado por Ottaviani [44]. Esta simplificación, a pesar de ser un caso específico, permite una mejor comprensión sobre la dinámica del sistema y además numéricamente hablando, reduce la cantidad de iteraciones necesarias facilitando las futuras simulaciones.

Como trabajo a futuro y siguiendo esta línea, se propone partir estudiando un sistema de 2 (o más) osciladores no lineales acoplados usando la aproximación anterior. Al tratarse de sólo 2 osciladores, la cantidad de operaciones necesarias para una simulación es considerablemente menor. Un posible ejemplo de oscilador no lineal puede ser uno de Duffing (no linealidad cúbica) pues soluciones estacionarias ya se han estudiado de manera exacta para un sólo modo.

Por otro lado, un tema interesante es considerar el caso de la placa en que $h \ll \frac{24(1-\sigma^2)}{(2\pi)^2 E}$. En dicha situación la frecuencia no lineal pasaría a dominar por sobre la lineal. Esto sugiere que podríamos tomar nuevamente el límite débilmente no lineal y recuperar la ecuación cinética con la diferencia que en este caso la variedad resonante estará determinada por la frecuencia no lineal del sistema.

Para finalizar, resulta atrayente mencionar aquellos temas que no se trataron con profundidad en este trabajo. Entre estos se encuentra estudiar la placa elástica con otra RPG como LET o incluso la mencionada alternativa LHDI. También, debido a la baja intuición sobre las ecuaciones DIA podemos preguntarnos si en cierto límite podremos escribir la ecuación estacionaria de DIA como un proceso de coagulación-fragmentación. Esto último quizás se puede llevar a cabo desde un punto de vista inverso ya que sabemos el tipo de espectro que esperaríamos $k^{-3/2}$. Cabe resaltar que con estos métodos podríamos incluso intentar aplicarlos a sistemas no estudiados, como por ejemplo la placa elástica para un material piezoeléctrico.

Appendices

Appendix A

Resumen de DIA original

La derivación matemática explícita de como obtener las ecuaciones DIA para un caso de no-linealidad cúbica (aunque esta no difiere mucho para otros grados) se puede resumir en una serie de pocos pasos. El propósito de mostrar los pasos a seguir es de gran importancia para que luego podamos comparar con otros métodos (como el de McComb) los beneficios que tiene no asumir ciertas hipotesis(las cuáles en muchos casos pueden no tener relación directa con turbulencia) y simplemente seguir ciertos pasos para obtener a "DIA" sin ser exactamente DIA. Esto quedará mucho mejor explicado con un ejemplo que veremos más adelante. Entonces, en primer lugar consideramos un sistema de no linealidad cúbica:

$$(\partial_t + \nu_k) u(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''=\mathbf{k}} P_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{k}''} u(\mathbf{k}') u(\mathbf{k}'') \quad (\text{A.1})$$

Luego descomponemos el campo en una parte que describe como se vería el campo si no estuviera la interacción directa entre $(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ y aquella parte que siente esta interacción: $u(\mathbf{k}) = \tilde{u}(\mathbf{k}) + \Delta u(\mathbf{k})$. Así:

$$(\partial_t + \nu_k) (\tilde{u}(\mathbf{k}) + \Delta u(\mathbf{k})) = P_{\mathbf{k},-\mathbf{p},-\mathbf{q}} u(-\mathbf{p}) u(-\mathbf{q}) + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''=\mathbf{k}, \mathbf{k}' \neq \mathbf{p}} P_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{k}''} (\tilde{u}(\mathbf{k}') + \Delta u(\mathbf{k}')) (\tilde{u}(\mathbf{k}'') + \Delta u(\mathbf{k}'')) \quad (\text{A.2})$$

De modo que para orden $\Delta u(\mathbf{k})$:

$$(\partial_t + \nu_k) \Delta u(\mathbf{k}) - \sum_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''=\mathbf{k}, \mathbf{k}' \neq \mathbf{p}} P_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{k}''} \tilde{u}(\mathbf{k}') \Delta u(\mathbf{k}'') = P_{\mathbf{k},-\mathbf{p},-\mathbf{q}} u(-\mathbf{p}) u(-\mathbf{q}) \quad (\text{A.3})$$

donde el término de lado derecho es del orden de $\Delta u(\mathbf{k})$ por definición. Si ahora en $t = t_0$ metemos a mano, al lado derecho de la ecuación original, un término de inyección que perturbe el sistema $f_{\mathbf{k}}(t)$ y luego si queremos saber como varía el campo con respecto a la perturbación:

$$(\partial_t + \nu_k) \frac{\delta u(\mathbf{k})}{\delta f_{\mathbf{k}}(t')} - \sum_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''=\mathbf{k}, \mathbf{k}' \neq \mathbf{p}} P_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}''} u(\mathbf{k}') \frac{\delta u(\mathbf{k}'')}{\delta f_{\mathbf{k}''}(t')} = \delta(t - t') \quad (\text{A.4})$$

definimos $\tilde{R}_{\mathbf{k}}(t, t') := \frac{\delta u(\mathbf{k})}{\delta f_{\mathbf{k}}(t')}$. Entonces, viendo a \tilde{R} como la función de Green de $\Delta u(\mathbf{k})$ entonces la contribución de la triada $(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ es:

$$\Delta u(\mathbf{k}) = \int_{t_0}^t \tilde{R}_{\mathbf{k}}(t, t') P_{\mathbf{k}, -\mathbf{p}, -\mathbf{q}} u'(-\mathbf{p}) u'(-\mathbf{q}) dt' \quad (\text{A.5})$$

Entonces, como vimos anteriormente el momento S se aproximará por la interacción directa:

$$\begin{aligned} S &\approx \langle \delta u'(\mathbf{k}) u(\mathbf{p}) u(\mathbf{q}) \rangle + \langle u'(\mathbf{k}) \delta u(\mathbf{p}) u(\mathbf{q}) \rangle + \langle u'(\mathbf{k}) u(\mathbf{p}) \delta u(\mathbf{q}) \rangle \\ &= \int_{t_0}^{t'} d\tau P_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}} \langle \tilde{R}_{\mathbf{k}}(t', \tau) u(-\mathbf{p}, \tau) u(-\mathbf{q}, \tau) u(\mathbf{p}) u(\mathbf{q}) \rangle \\ &\quad + \int_{t_0}^t d\tau P_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}} \langle u'(\mathbf{k}) \tilde{R}_{\mathbf{p}}(t, \tau) u(-\mathbf{k}, \tau) u(-\mathbf{q}, \tau) u(\mathbf{q}) \rangle \\ &\quad + \int_{t_0}^t d\tau P_{\mathbf{q}, \mathbf{k}, \mathbf{p}} \langle u'(\mathbf{k}) u(\mathbf{p}) \tilde{R}_{\mathbf{q}}(t, \tau) u(-\mathbf{k}, \tau) u(-\mathbf{p}, \tau) \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Usando el principio de dependencia débil y definiendo $R_{\mathbf{k}}(t, t') := \langle \tilde{R}_{\mathbf{k}}(t, t') \rangle$ y $C_{\mathbf{k}}(t, t') = \langle u(\mathbf{k}, t) u(-\mathbf{k}, t') \rangle$ obtenemos la ecuación DIA para la función de correlación:

$$(\partial_t + \nu_k) C_{\mathbf{k}}(t, t') - \int_{t_0}^t d\tau \Sigma_{\mathbf{k}}(t, \tau) C_{\mathbf{k}}(\tau, t') = \int_{t_0}^{t'} d\tau F_{\mathbf{k}}(t, \tau) R_{\mathbf{k}}(t', \tau) \quad (\text{A.7})$$

¹ La definición de la función respuesta debe tomarse con un poco más de cuidado debido a que por causalidad consideramos que $R_{\mathbf{k}}(t, t) = 0$, lo que usualmente se conoce como *convención de Ito* dado que en su forma discretizada la variable aleatoria actúa *después* de ser actualizado el campo. Mientras que para $t > t'$, la función es continua en el tiempo de modo que el límite $\lim_{t' \rightarrow t^-} R_{\mathbf{k}}(t, t')$ está bien definido. En su mayoría del texto esto se tratará de forma implícita a menos que sea necesario destacarlo.

con $\Sigma_{\mathbf{k}}(t, \tau) := \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} P_{\mathbf{k},\mathbf{p},\mathbf{q}} P_{\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{k}} R_{\mathbf{p}}(\tau, t) C_{\mathbf{q}}(\tau, t)$ y $F_{\mathbf{k}}(t, \tau) := \frac{1}{2} \sum_{p,q} P_{\mathbf{k},\mathbf{p},\mathbf{q}}^2 C_{\mathbf{p}}(\tau, t) C_{\mathbf{q}}(\tau, t)$.

Para la función respuesta, pensemos que perturbamos sólo el modo \mathbf{k} de modo que:

$$(\partial_t + \nu_k) \delta u(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} P_{\mathbf{k},\mathbf{p},\mathbf{q}} u(\mathbf{p}) \delta u(\mathbf{q}) + f_{\mathbf{k}} \quad (\text{A.8})$$

Sin embargo, el modo \mathbf{q} solo siente una perturbación debido a que se perturbó el modo \mathbf{k} , de este modo vamos a aproximar que esta perturbación sobre \mathbf{q} esta dominada por la interacción directa con \mathbf{k} (a través de \mathbf{p} obviamente):

$$\delta u(\mathbf{q}) = \int_{t_0}^t R_{\mathbf{q}}(t, \tau) P_{\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{k}} u(-\mathbf{p}) \delta u(-\mathbf{k}) \quad (\text{A.9})$$

Así , insertando esto en la ecuación anterior, *derivando* con respecto a la perturbación inicial y promediando obtenemos:

$$(\partial_t + \nu_k) R_{\mathbf{k}}(t, t') - \int_{t'}^t d\tau \Sigma_{\mathbf{k}}(t, \tau) R_{\mathbf{k}}(\tau, t') = \delta(t - t') \quad (\text{A.10})$$

Appendix B

Construcción de integral funcional para variables aleatorias complejas

Al momento de construir la integral funcional, debemos tener algo de cuidado debido a que la notación puede ser algo confusa. Esto principalmente debido a que estamos tratando con variables aleatorias complejas. Por ende, acá se hará una pequeña guía del paso a paso inicial. Consideremos la ecuación:

$$\frac{dA_k^s}{dt}(t) + is\Omega_k^s A_k^s(t) = \eta_k^s(t) \quad (\text{B.1})$$

donde $t \in [0, T]$ y $\eta_k^s(t)$ es un ruido gaussiano complejo con $\langle \eta_k^s(t) \rangle = 0$ y $\langle \eta_{k_1}^{s_1}(t_1) \eta_{k_2}^{s_2}(t_2) \rangle = 2F_{k_2} \delta_{s_1, -s_2} \delta(k_1 + k_2) \delta(t_1 - t_2)$ donde $(\eta_{k_1}^{s_1}(t_1))^* = \eta_{-k_1}^{-s_1}(t_1)$

Si queremos obtener el promedio de un observable O sobre el ruido necesitamos la PDF conjunta del ruido dada por:

$$P(\eta_k^s(t)) \propto \exp \left[-\frac{1}{2} \int dt_1 dt_2 \sum_{z_1 z_2} \int dk_1 dk_2 \left((\eta_{k_1}^{z_1}(t_1))^* \quad \eta_{k_1}^{z_1}(t_1) \right) G_{k_1 k_2}^{-1, z_1 z_2}(t_1, t_2) \begin{pmatrix} \eta_{k_2}^{z_2}(t_2) \\ (\eta_{k_2}^{z_2}(t_2))^* \end{pmatrix} \right] \quad (\text{B.2})$$

Donde

$$G_{k_1 k_2}^{z_1 z_2}(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} + \Sigma_{22} - i(\Sigma_{12} - \Sigma_{21}) & \Sigma_{11} - \Sigma_{22} + i(\Sigma_{12} + \Sigma_{21}) \\ \Sigma_{11} + \Sigma_{22} - i(\Sigma_{12} + \Sigma_{21}) & \Sigma_{11} + \Sigma_{22} + i(\Sigma_{12} - \Sigma_{21}) \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

siendo Σ_{11} , Σ_{22} y Σ_{12}, Σ_{21} las matrices de covarianzas de la parte real del ruido, de la parte imaginaria y las cruzadas respectivamente. Para este caso, consideraremos que la parte real e imaginaria del ruido están

descorreladas y su respectivas varianzas son distintas. Discretizando tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \langle 1 \rangle &= \prod_k \prod_s \prod_m \int d\eta_{k,m}^s P(\eta_k^s) \\
 &= \prod_k \prod_s \prod_m \int d\eta_{k,m}^s \frac{e^{\left[-\frac{1}{2} \sum_{z_1 z_2} \sum_{p,q} \sum_{K_1 K_2} \left((\eta_{K_1,p}^{z_1})^* \quad \eta_{K_1,p}^{z_1} \right) G_{K_1 K_2, pq}^{-1, z_1 z_2} \begin{pmatrix} \eta_{K_2,q}^{z_2} \\ (\eta_{K_2,q}^{z_2})^* \end{pmatrix} \right]}}{\prod_k \prod_s \prod_m \int d\eta_{k,m}^s e^{\left[-\frac{1}{2} \sum_{z_1 z_2} \sum_{p,q} \sum_{K_1 K_2} \left((\eta_{K_1,p}^{z_1})^* \quad \eta_{K_1,p}^{z_1} \right) G_{K_1 K_2, pq}^{-1, z_1 z_2} \begin{pmatrix} \eta_{K_2,q}^{z_2} \\ (\eta_{K_2,q}^{z_2})^* \end{pmatrix} \right]}}
 \end{aligned}$$

Luego definimos $\Gamma := \Sigma_{11} + \Sigma_{22}$ y $2F := \Sigma_{11} - \Sigma_{22}$.

$$G_{K_1 K_1, pq}^{-1, z_1 z_2} = \frac{1}{\Gamma^2 - (2F)^2} \begin{pmatrix} \Gamma & -2F \\ -2F & \Gamma \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

Si separamos en parte real y en parte imaginaria obtenemos 2 integrales gaussianas. Luego tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \langle O(A_{k_1}^{s_1}, A_{k_2}^{s_2}, \dots, A_{k_n}^{s_n}) \rangle &= \int \prod_{k=1}^n \prod_{s=s_1}^{s_n} \prod_{j=1}^{\infty} d\eta_{k,j}^s P(\eta_{k,j}^s) O(A_{k_1, \eta_1}^{s_1}, A_{k_2, \eta_2}^{s_2}, \dots, A_{k_n, \eta_n}^{s_n}) \\
 &= \int \prod_{k,s,j} d\eta_{k,j}^s P(\eta_{k,j}^s) \int \prod_{k,s,j} dA_{k,j}^s \delta(A_{k,j}^s - A_{k,j, \eta_{k,j}^s}^s) O(A_{k_1}^{s_1}, A_{k_2}^{s_2}, \dots, A_{k_n}^{s_n}) \\
 &= \int \mathcal{D}A_k^s \left[\int \mathcal{D}\eta_{k,j}^s P(\eta_{k,j}^s) \delta \left(\frac{A_{k,j+1}^s - A_{k,j}^s}{h} + i s \omega A_{k,j}^s - \eta_{k,j}^s \right) \right] O(A_{k_1}^{s_1}, A_{k_2}^{s_2}, \dots) \\
 &= \int \mathcal{D}A_k^s P(A_{k,j}^s) O(A_{k_1}^{s_1}, A_{k_2}^{s_2}, \dots) \quad (\text{B.5})
 \end{aligned}$$

Appendix C

Integral Funcional

En primera instancia queremos tener algo como:

$$S_0 = \frac{1}{2} \sum_{s_1 s_2} \sum_{k_1 k_2} \int \int \phi_{k_1}^{s_1, T}(t) G_{k_1 k_2}^{-1, s_1 s_2}(t, t') \phi_{k_2}^{s_2}(t') dt dt' \quad (\text{C.1})$$

Definiendo $\phi_k^s(t) := \begin{pmatrix} A_k^s(t) \\ \tilde{A}_k^s(t) \end{pmatrix}$, $G_{k_1 k_2}^{-1, s_1 s_2}(t, t') = \begin{pmatrix} G_{k_1 k_2, 1}^{-1, s_1 s_2}(t, t') & G_{k_1 k_2, 2}^{-1, s_1 s_2}(t, t') \\ G_{k_1 k_2, 3}^{-1, s_1 s_2}(t, t') & G_{k_1 k_2, 4}^{-1, s_1 s_2}(t, t') \end{pmatrix}$ y siendo $\phi_{k_1}^{s_1, T}(t)$ el vector traspuesto de $\phi_{k_1}^{s_1}(t)$. Llegamos a que la expresión para S_0 se puede escribir de la siguiente forma:

$$S_0 = \frac{1}{2} \sum_{s_1 s_2} \sum_{k_1 k_2} \int \int A_{k_1}^{s_1}(t) G_{k_1 k_2, 1}^{-1, s_1 s_2}(t, t') A_{k_2}^{s_2}(t') + A_{k_1}^{s_1}(t) G_{k_1 k_2, 2}^{-1, s_1 s_2}(t, t') \tilde{A}_{k_2}^{s_2}(t') + \tilde{A}_{k_1}^{s_1}(t) G_{k_1 k_2, 3}^{-1, s_1 s_2}(t, t') A_{k_2}^{s_2}(t') + \tilde{A}_{k_1}^{s_1}(t) G_{k_1 k_2, 4}^{-1, s_1 s_2}(t, t') \tilde{A}_{k_2}^{s_2}(t') \quad (\text{C.2})$$

Comparando vemos que:

$$G_{k_1 k_2}^{-1, s_1 s_2}(t, t') = \delta(t - t') \begin{pmatrix} 0 & \delta_{s_1, s_2} \delta_{k_1, k_2} (-\partial_{t'} + i s_2 \Omega_{-k_2}^{s_2}) \\ \delta_{s_1, s_2} \delta_{k_1, k_2} (\partial_{t'} + i s_2 \Omega_{k_2}^{s_2}) & -2F_{k_2} \delta_{k_1, -k_2} \delta_{s_1, -s_2} \end{pmatrix} \quad (\text{C.3})$$

Añadiendo a mano el campo auxiliar $j_k^s(t) := \begin{pmatrix} \tilde{J}_k^s(t) \\ J_k^s(t) \end{pmatrix}$ obtenemos:

$$Z_0 = \int \mathcal{D}[A_k^s(t)] \mathcal{D}[\tilde{A}_k^s(t)] \times \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{s_1 s_2} \sum_{k_1 k_2} \int_0^T \int_0^T dt dt' \phi_{k_1}^{s_1, T}(t) G_{k_1 k_2}^{-1, s_1 s_2}(t, t') \phi_{k_2}^{s_2}(t') + \sum_{s_1} \sum_{k_1} \int j_{k_1}^{s_1, T}(t) \phi_{k_1}^{s_1}(t) dt \right) \quad (\text{C.4})$$

Ahora, desde la ecuación C.4 llegamos a:

$$Z_0[J, \tilde{J}] = \int \mathcal{D}\phi_{1,k}^s \mathcal{D}\phi_{2,k}^s e^{\left(-\frac{1}{2} \sum_{s_1 s_2} \sum_{k_1 k_2} \int_0^T \int_0^T dt dt' \phi_{k_1}^{s_1, T}(t) G_{k_1 k_2}^{-1, s_1 s_2}(t, t') \phi_{k_2}^{s_2}(t') + \sum_{s_1} \sum_{k_1} \int j_{k_1}^{s_1, T}(t) \phi_{k_1}^{s_1}(t) dt \right)} \quad (\text{C.5})$$

Ahora hacemos el cambio de variable $y_k^s(t) = \phi_k^s(t) - \phi_k^{*s}(t)$ donde $\left[\frac{\delta S_0}{\delta \phi_k^s(t)} \right]_{\phi=\phi^*} = 0$ (en este caso el superíndice * no representa el complejo conjugado, sino que se usa para denotar solamente un caso especial). Derivando, vemos que esta condición equivale a:

$$\sum_s \sum_k \int_0^T dt' G_{k_1 k}^{-1, s_1 s}(t, t') \phi_k^{*s}(t') = j_{k_1}^{s_1}(t) \quad (\text{C.6})$$

Queremos invertir, por lo que necesitamos encontrar la inversa de $G_{k_1 k}^{-1, s_1 s}(t, t')$:

$$\sum_{s_3} \sum_{k_3} \int_0^T dt'' G_{k_1 k_3}^{-1, s_1 s_3}(t, t'') G_{k_3 k_2}^{s_3 s_2}(t'', t') = \delta_{s_1 s_2} \delta_{k_1 k_2} \delta(t - t') \mathbb{I}_{2 \times 2} \quad (\text{C.7})$$

haciendo $G_{k_1 k_2}^{s_1 s_2}(t, t') = \begin{pmatrix} G_{k_1 k_2, 1}^{s_1 s_2}(t, t') & G_{k_1 k_2, 2}^{s_1 s_2}(t, t') \\ G_{k_1 k_2, 3}^{s_1 s_2}(t, t') & G_{k_1 k_2, 4}^{s_1 s_2}(t, t') \end{pmatrix}$. Llegamos al siguiente set :

$$(-\partial_t + i s_1 \Omega_{-k_1}^{s_1}) G_{k_1 k_2, 3}^{s_1 s_2}(t, t') = \delta_{k_1 k_2} \delta(t - t') \delta_{s_1 s_2} \quad (\text{C.8})$$

$$(\partial_t + i s_1 \Omega_{k_1}^{s_1}) G_{k_1 k_2, 2}^{s_1 s_2}(t, t') = \delta_{k_1 k_2} \delta(t - t') \delta_{s_1 s_2} \quad (\text{C.9})$$

$$(\partial_t + i s_1 \Omega_{k_1}^{s_1}) G_{k_1 k_2, 1}^{s_1 s_2}(t, t') = 2F_{k_2} G_{-k_1 k_2, 3}^{-s_1 s_2}(t, t') \quad (\text{C.10})$$

donde hicimos $G_4 = 0$ por simplicidad de la solución. Entonces como vimos para orden 0, las ecuaciones son :

$$(\partial_t + is_1\Omega_{k_1}^{s_1})C_{0,k_1k_2}^{s_1s_2}(t, t') = 2F_{k_1}R_{0,k_2k_1}^{s_2s_1}(t', t) \quad (\text{C.11})$$

y

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + is_1\Omega_{k_1}^{s_1}\right)R_{0,k_1-k_2}^{s_1-s_2}(t, t') = 2F_{k_2}\delta_{s_1s_2}\delta_{k_1k_2}\delta(t-t') \quad (\text{C.12})$$

Por ende, comparando con el set de ecuaciones anterior obtenemos que una posible solución corresponde a

$$G_{k_1k_2}^{s_1s_2}(t, t') = \begin{pmatrix} C_{0,k_1k_2}^{s_1s_2}(t, t') & R_{0,k_1-k_2}^{s_1-s_2}(t, t') \\ R_{0,k_2-k_1}^{s_2-s_1}(t', t) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.13})$$

Luego llegamos a la integral:

$$Z_0[J, \tilde{J}] = \int \mathcal{D}y_{1,k}^s \mathcal{D}y_{2,k}^s e^{\left(-\frac{1}{2} \sum_{s_1s_2} \sum_{k_1k_2} \int_0^T \int_0^T dt dt' y_{k_1}^{s_1,T}(t) G_{k_1k_2}^{-1,s_1s_2}(t, t') y_{k_2}^{s_2}(t') - \frac{1}{2} \sum_{s_1} \sum_{k_1} \int j_{k_1}^{s_1,T}(t) \phi_{k_1}^{*s_1}(t) dt\right)} \quad (\text{C.14})$$

aplicando una rotación unitaria para dejar la matriz completamente diagonal y obtener integrales gaussianas, llegamos a:

$$Z_0[J, \tilde{J}] = e^{-\frac{1}{2} \sum_{s_1} \sum_{k_1} \int dt j_{k_1}^{s_1,T}(t) \phi_{k_1}^{*s_1}(t)} \quad (\text{C.15})$$

Notar que tanto la traslación como la rotación provocan un jacobiano igual a 1. Entonces, si resolvemos C.6 para $\phi_k^{*s}(t)$ usando las respectivas funciones de Green llegamos a:

$$\phi_k^{*s}(t) = \sum_{s_1} \sum_{k_1} \int dt' \begin{pmatrix} C_{0,kk_1}^{ss_1}(t, t') \tilde{J}_{k_1}^{s_1}(t') + R_{0,k-k_1}^{s-s_1}(t, t') J_{k_1}^{s_1}(t') \\ R_{0,k_1-k}^{s_1-s}(t', t) \tilde{J}_{k_1}^{s_1}(t') \end{pmatrix} \quad (\text{C.16})$$

Appendix D

Método diagramático y renormalización

Como bien dijimos anteriormente, el número de veces que debemos derivar una exponencial es demasiado grande como para hacerlo paso a paso. Mas aún, no todos estos términos van a contribuir pues muchos de ellos serán nulos dado que entregarán funciones respuesta cuyos argumentos temporales serán el mismo(que como vimos es idénticamente 0 por definición). Por ende el problema de las 11 derivadas lo veremos como un problema combinatorio. Dado que al final, lo que haremos será igualar los campos auxiliares a 0 y como la exponencial es cuadrática en estos campos, notamos que obtendremos una función luego de derivar 2 veces la exponencial:

$$\frac{\delta Z_0}{\delta J_{k^*}^{s^*}(t^*)} = Z_0 \left(\sum_{z_1} \sum_{q_1} \int d\tau_1 \tilde{J}_{q_1}^{z_1}(\tau_1) R_{q_1 k^*}^{z_1 s^*}(\tau_1, t^*) \right) \equiv Z_0 P_{k^*}^{s^*}(t^*) \quad (\text{D.1})$$

$$\frac{\delta Z_0}{\delta \tilde{J}_{k^*}^{s^*}(t^*)} = Z_0 \left(\sum_{z_2} \sum_{q_2} \int d\tau_2 C_{k^* k_2}^{s^* s_2}(t^*, \tau_2) \tilde{J}_{k_2}^{s_2}(\tau_2) + R_{k^* q_2}^{s^* z_2}(t^*, \tau_2) J_{q_2}^{z_2}(\tau_2) \right) \equiv Z_0 \tilde{P}_{k^*}^{s^*}(t^*) \quad (\text{D.2})$$

de tal modo que:

$$\left(\frac{\delta P_{k^*}^{s^*}(t^*)}{\delta \tilde{J}_{q^*}^{z^*}(\tau^*)} \right)_{J=\tilde{J}=0} = R_{q^* k^*}^{z^* s^*}(\tau^*, t^*) \quad (\text{D.3})$$

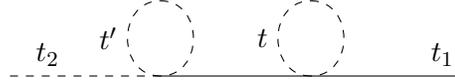
$$\left(\frac{\delta \tilde{P}_{k^*}^{s^*}(t^*)}{\delta \tilde{J}_{q^*}^{z^*}(\tau^*)} \right)_{J=\tilde{J}=0} = C_{k^* q^*}^{s^* z^*}(t^*, \tau^*) \quad (\text{D.4})$$

$$\left(\frac{\delta \tilde{P}_{k^*}^{s^*}(t^*)}{\delta J_{q^*}^{z^*}(\tau^*)} \right)_{J=\tilde{J}=0} = R_{k^* q^*}^{s^* z^*}(t^*, \tau^*) \quad (\text{D.5})$$

Por lo tanto, lo podremos ver como un problema combinatorio en el sentido en que debemos encontrar las combinaciones de pares posibles que nos entregarán resultados distintos de 0 y sus respectivas cantidades. En esta sección se mostrará detalladamente como es el cálculo diagramático sólo para la ecuación de la función de correlación debido a que es completamente análogo el procedimiento para la función respuesta. Así, las posibles combinaciones a orden 2 viene dado por:

$$a) \quad \left(\frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{p_1}^{l_1}(t_1)} \frac{\delta}{\delta J_k^s(t)} \right) \left(\frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{q_3}^{x_3}(t')} \frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{q_2}^{x_2}(t')} \right) \left(\frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{k_3}^{s_3}(t)} \frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{k_2}^{s_2}(t)} \right) \left(\frac{\delta}{\delta J_q^x(t')} \frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{k_1}^{s_1}(t)} \right) \left(\frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{p_2}^{l_2}(t_2)} \frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{q_1}^{x_1}(t')} \right) \quad (D.6)$$

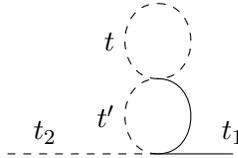
representado por:



al permutar libremente los índices x_1, x_2, x_3 (al hacer esto estamos diciendo que permutamos a la misma vez los vectores $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$), por que lo que sólo haciendo esto tenemos 3 combinaciones de parejas posibles: $(x_1, l_2)(x_2, x_3)|(x_2, l_2)(x_1, x_3)|(x_3, l_2)(x_2, x_1)$. Luego vemos que por cada uno de ellos también podemos rotar libremente s_1, s_2, s_3 (y sus vectores) en los que se emparejan también 2 de ellos, habiendo de igual forma 3 de estas combinaciones . Esto hace que hayan $3 \times 3 = 9$ términos así. Además, tenemos que existe una simetría "temporal" al permutar los tiempos t y t' . Por lo que el número total de diagramas de este tipo son 18.

$$b) \quad \left(\frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{p_1}^{l_1}(t_1)} \frac{\delta}{\delta J_k^s(t)} \right) \left(\frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{q_3}^{x_3}(t')} \frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{q_2}^{x_2}(t')} \right) \left(\frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{q_1}^{x_1}(t')} \frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{k_3}^{s_3}(t)} \right) \left(\frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{p_2}^{l_2}(t_2)} \frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{k_2}^{s_2}(t)} \right) \left(\frac{\delta}{\delta J_q^x(t')} \frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{k_2}^{s_2}(t)} \right) \quad (D.7)$$

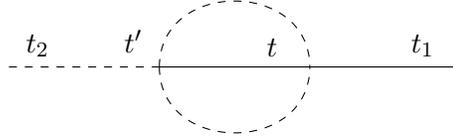
representado por:



Haciendo el mismo análisis anterior concluimos que hay 18 de ellos también.

$$c) \left(\frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{p_1}^{l_1}(t_1)} \frac{\delta}{\delta J_k^s(t)} \right) \left(\frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{q_3}^{x_3}(t')} \frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{k_3}^{s_3}(t)} \right) \left(\frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{q_2}^{x_2}(t')} \frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{k_2}^{s_2}(t)} \right) \left(\frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{p_2}^{l_2}(t_2)} \frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{q_1}^{x_1}(t')} \right) \left(\frac{\delta}{\delta J_q^x(t')} \frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{k_1}^{s_1}(t)} \right) \quad (D.8)$$

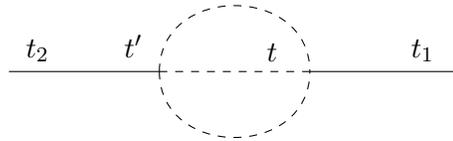
representado por:



Al momento de contar la cantidad de estos diagramas vemos que difiere en algo importante. Este tipo de diagramas no tiene emparejamientos en un mismo tiempo es decir cosas tipo (s_1, s_2) o (x_1, x_2) . Por ende, al permutar solamente los índices s_1, s_2, s_3 ya tendremos 6 combinaciones posibles haciendo un conjunto de 18 combinaciones. Por la misma simetría temporal el total será de 36 diagramas.

$$d) \left(\frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{p_1}^{l_1}(t_1)} \frac{\delta}{\delta J_k^s(t)} \right) \left(\frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{q_3}^{x_3}(t')} \frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{k_3}^{s_3}(t)} \right) \left(\frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{q_2}^{x_2}(t')} \frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{k_2}^{s_2}(t)} \right) \left(\frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{p_2}^{l_2}(t_2)} \frac{\delta}{\delta J_q^x(t')} \right) \left(\frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{q_1}^{x_1}(t')} \frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{k_1}^{s_1}(t)} \right) \quad (D.9)$$

representado por:



En este caso, tendremos sólo emparejamientos de los índices s con los x , es decir sólo 6 combinaciones. Esto más la simetría temporal hace un total de 12 términos de este tipo.

Luego con respecto a la renormalización, es necesario mostrar como al renormalizar seguiremos obteniendo los diagramas correctos con las cantidades anteriormente calculadas. Específicamente, veremos como al renormalizar el término de primer orden obtendremos los diagramas tipo A y B. A primer orden vimos que

anteriormente, la ecuación DIA para la función de correlación es:

$$\begin{aligned}
[\hat{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}_1, t_1}^{l_1}] C_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}^{l_1 l_2}(t_1, t_2) &= 2F_{\mathbf{p}_2} R_{\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1}^{l_2 l_1}(t_2, t_1) \\
&+ 3 \sum_{s_1 s_2 s_3} \int L_{\mathbf{p}_1 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{l_1 s_1 s_2 s_3} C_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{s_1 s_2}(t_1, t_1) C_{\mathbf{k}_3 \mathbf{p}_2}^{s_3 l_2}(t_1, t_2) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{p}_1) d\mathbf{k}_{123} \\
&+ 2 \sum_{s_1 s_2 s_3} \int d\mathbf{k}_{123} L_{\mathbf{p}_1 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{l_1 s_1 s_2 s_3} \sum_x \int d\mathbf{q} \int_0^{t_1} dt \sum_{x_1 x_2 x_3} \int d\mathbf{q}_{123} L_{\mathbf{q} \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_3}^{x x_1 x_2 x_3} \\
&\times \hat{\mathcal{X}}_{123} \hat{\mathcal{T}}_{123} C_{\mathbf{q}_3 \mathbf{p}_2}^{x_3 l_2}(t, t_2) C_{\mathbf{q}_1 \mathbf{k}_3}^{x_1 s_3}(t, t_1) C_{\mathbf{q}_2 \mathbf{k}_2}^{x_2 s_2}(t, t_1) R_{\mathbf{k}_1, -\mathbf{q}}^{s_1 - x}(t_1, t) \delta(\mathbf{Q} - \mathbf{q}) \delta(\mathbf{K} - \mathbf{p}_1) \\
&+ 2 \sum_{s_1 s_2 s_3} \int d\mathbf{k}_{123} L_{\mathbf{p}_1 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{l_1 s_1 s_2 s_3} \sum_x \int d\mathbf{q} \int_0^{t_2} dt \sum_{x_1 x_2 x_3} \int d\mathbf{q}_{123} L_{\mathbf{q} \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_3}^{x x_1 x_2 x_3} \\
&\times \hat{\mathcal{T}}_{123} R_{\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}}^{l_2 - x}(t_2, t) C_{\mathbf{q}_1 \mathbf{k}_1}^{x_1 s_1}(t, t_1) C_{\mathbf{q}_2 \mathbf{k}_2}^{x_2 s_2}(t, t_1) C_{\mathbf{q}_3 \mathbf{k}_3}^{x_3 s_3}(t, t_1) \delta(\mathbf{Q} - \mathbf{q}) \delta(\mathbf{K} - \mathbf{p}_1)
\end{aligned} \tag{D.12}$$

Appendix E

Ecuación cinética y corrección a la frecuencia

Primero calcularemos la corrección a la frecuencia dado que por ser de orden menor es más sencillo. Anteriormente se mostró como son las ecuaciones a orden 0 con el multi-scaling hecho cuya solución esta dada por 4.45. Ahora, al siguiente orden tendremos:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\partial}{\partial \tau} + il_1 \omega_{p_2}\right) C_{1,p_2}^{l_1 l_2}(\tau, t_2, T_2) &= 2F R_{1,p_2}^{l_2 l_1}(\tau, t_2, T_2) \\ &+ 6\pi^2 \sum_{s_1 s_2 s_3} \int L_{-p_2 - k_2 k_2 - p_2}^{l_1 s_1 s_2 s_3} C_{0,k_2}^{s_1 s_2}(0, t_2 - \tau, T_2) dk_2 C_{0,p_2}^{s_3 l_2}(\tau, t_2, T_2) \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial t_2} + il_2 \omega_{p_2}\right) C_{1,p_2}^{l_1 l_2}(\tau, t_2, T_2) &= -\frac{\partial C_{0,p_2}^{l_1 l_2}}{\partial T_2} + 2F_{p_2} R_{1,p_2}^{l_1 l_2}(-\tau, t_2, T_2) \\ &+ 6\pi^2 \sum_{s_1 s_2 s_3} \int L_{p_2 - k_2 k_2 p_2}^{l_2 s_1 s_2 s_3} C_{0,k_2}^{s_1 s_2}(0, t_2, T_2) C_{0,p_2}^{l_1 s_3}(\tau, t_2, T_2) \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Si sumamos estas dos ecuaciones para encontrar los términos resonantes encontramos :

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial}{\partial t_2} + i(l_1 + l_2)\omega_{p_2} \right) C_{1,p_2}^{l_1 l_2}(\tau, t_2, T_2) &= -\frac{\partial C_{0,p_2}^{l_1 l_2}}{\partial T_2} + 2F_{p_2} R_{1,p_2}^{l_1 l_2}(-\tau, t_2, T_2) + 2F R_{1,p_2}^{l_2 l_1}(\tau, t_2, T_2) \\
 &+ 6\pi^2 \sum_{s_1 s_2 s_3} \int L_{p_2 - k_2 k_2 p_2}^{l_2 s_1 s_2 s_3} C_{0,k_2}^{s_1 s_2}(0, t_2, T_2) C_{0,p_2}^{l_1 s_3}(\tau, t_2, T_2) \\
 &+ 6\pi^2 \sum_{s_1 s_2 s_3} \int L_{-p_2 - k_2 k_2 - p_2}^{l_1 s_1 s_2 s_3} C_{0,k_2}^{s_1 s_2}(0, t_2 - \tau, T_2) dk_2 C_{0,p_2}^{s_3 l_2}(\tau, t_2, T_2)
 \end{aligned} \tag{E.3}$$

Por ende, para el caso $l_2 = -l_1$, la ecuación resonante será:

$$\frac{\partial C_{0,p_2}^{l_1 - l_1}}{\partial T_2}(0, 0, T_2) = 0 \tag{E.4}$$

Acá podemos ver como a este orden $C_{0,p_2}^{l_1 - l_1}$ debe ser una constante para tiempos largos del orden de T_2 , lo cual indica que no hay transferencia de energía y por ende hay que ir al orden siguiente. Mientras tanto, para el caso de $l_2 = l_1$ la ecuación resonante será:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial C_{p_2}^{l_1 l_1}}{\partial T_2}(0, 0, T_2) &= 6\pi \sum_{s_1} \int L_{p_2 - k_2 k_2 p_2}^{l_1 s_1 - s_1 l_1} C_{0,k_2}^{s_1 - s_1}(0, 0, T_2) C_{0,p_2}^{l_1 l_1}(0, 0, T_2) \\
 &+ 6\pi \sum_{s_1} \int L_{-p_2 - k_2 k_2 - p_2}^{l_1 s_1 - s_1 l_1} C_{0,k_2}^{s_1 - s_1}(0, 0, T_2) C_{0,p_2}^{l_1 l_1}(0, 0, T_2)
 \end{aligned} \tag{E.5}$$

lo que nos entrega la corrección a la frecuencia.

Para el siguiente orden, los tiempos a usar corresponden a $(t_1, t_2) \rightarrow (\tau, t_2, T_2, \mathcal{T}_2)$ con $\epsilon^2 t_2 = \mathcal{T}_2$. Por lo que

las ecuaciones corresponden a:

$$\begin{aligned}
 \left[-\frac{\partial}{\partial \tau} + il_1 \omega_{p_2} \right] \left(C_{\mathbf{p}_2}^{l_1 l_2}(\tau, t_2, T_2, \mathcal{T}_2) + \epsilon C_{1, \mathbf{p}_2}^{l_1 l_2} + \epsilon^2 C_{2, \mathbf{p}_2}^{l_1 l_2} \right) &= 2F_{\mathbf{p}_2} \left(R_{0, \mathbf{p}_1}^{l_2 l_1}(\tau) + \epsilon R_{1, \mathbf{p}_1}^{l_2 l_1}(\tau, t_2, T_2, \mathcal{T}_2) + \epsilon^2 R_{2, \mathbf{p}_1}^{l_2 l_1}(\tau, t_2, T_2, \mathcal{T}_2) \right) \\
 &+ 6\pi \sum_{s_1 s_2 s_3} \int L_{-\mathbf{p}_2 - \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_2}^{l_1 s_1 s_2 s_3} C_{\mathbf{k}_2}^{s_1 s_2}(0, t_2 - \tau, T_2, \mathcal{T}_2) C_{\mathbf{p}_2}^{s_3 l_2}(\tau, t_2, T_2, \mathcal{T}_2) d\mathbf{k}_2 \\
 &+ 36(2\pi)^3 \sum_{s_1 s_2 s_3} \int d\mathbf{k}_{123} L_{\mathbf{p}_1 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{l_1 s_1 s_2 s_3} \sum_x \int_0^{t_2 - \tau} dt \sum_{x_1 x_2 x_3} L_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_2}^{x x_1 x_2 x_3} \\
 &\times C_{\mathbf{p}_2}^{x_3 l_2}(t_2 - t, t_2, T_2, \mathcal{T}_2) C_{\mathbf{k}_3}^{x_1 s_3}(t_2 - \tau - t, t_2 - \tau, T_2, \mathcal{T}_2) \\
 &\times C_{\mathbf{k}_2}^{x_2 s_2}(t_2 - \tau - t, t_2 - \tau, T_2, \mathcal{T}_2) R_{-\mathbf{k}_1}^{s_1 - x}(t_2 - \tau - t) \delta(\mathbf{K} + \mathbf{p}_2) \\
 &+ 12(2\pi)^3 \sum_{s_1 s_2 s_3} \int d\mathbf{k}_{123} L_{\mathbf{p}_1 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{l_1 s_1 s_2 s_3} \sum_x \int_0^{t_2} dt \sum_{x_1 x_2 x_3} L_{\mathbf{p}_2 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3}^{x x_1 x_2 x_3} \\
 &\times R_{-\mathbf{p}_2}^{l_2 - x}(t_2 - t) C_{\mathbf{k}_1}^{x_1 s_1}(t_2 - \tau - t, t_2 - \tau, T_2, \mathcal{T}_2) \\
 &\times C_{\mathbf{k}_2}^{x_2 s_2}(t_2 - \tau - t, t_2 - \tau, T_2, \mathcal{T}_2) C_{\mathbf{k}_3}^{x_3 s_3}(t_2 - \tau - t, t_2 - \tau, T_2, \mathcal{T}_2) \delta(\mathbf{K} + \mathbf{p}_2)
 \end{aligned} \tag{E.6}$$

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{\partial}{\partial \tau} + \partial_{t_2} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T_2} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \mathcal{T}_2} + il_2 \omega_{p_2} \right] \left(C_{0, \mathbf{p}_2}^{l_1 l_2} + \epsilon C_{1, \mathbf{p}_2}^{l_1 l_2} + \epsilon^2 C_{2, \mathbf{p}_2}^{l_1 l_2} \right) &= 2F_{\mathbf{p}_2} \left(R_{0, \mathbf{p}_2}^{l_1 l_2} + \epsilon R_{1, \mathbf{p}_2}^{l_1 l_2}(-\tau, t_2, T_2, \mathcal{T}_2) + \epsilon^2 R_{2, \mathbf{p}_2}^{l_1 l_2}(-\tau, t_2, T_2, \mathcal{T}_2) \right) \\
 &+ 6\pi \sum_{s_1 s_2 s_3} \int L_{\mathbf{p}_2 - \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_2 \mathbf{p}_2}^{l_2 s_1 s_2 s_3} C_{\mathbf{k}_2}^{s_1 s_2}(0, t_2, T_2, \mathcal{T}_2) C_{\mathbf{p}_2}^{s_3 l_2}(\tau, t_2, T_2, \mathcal{T}_2) d\mathbf{k}_2 \\
 &+ 36(2\pi)^3 \sum_{s_1 s_2 s_3} \int d\mathbf{k}_{123} L_{\mathbf{p}_2 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{l_2 s_1 s_2 s_3} \sum_x \int_0^{t_2} dt \sum_{x_1 x_2 x_3} L_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_2 \mathbf{p}_2}^{x x_1 x_2 x_3} \\
 &\times C_{-\mathbf{p}_2}^{x_3 l_1}(t_2 - \tau - t, t_2 - \tau, T_2, \mathcal{T}_2) C_{\mathbf{k}_3}^{x_1 s_3}(t_2 - t, t_2, T_2, \mathcal{T}_2) \\
 &\times C_{\mathbf{k}_2}^{x_2 s_2}(t_2 - t, t_2, T_2, \mathcal{T}_2) R_{0, -\mathbf{k}_1}^{s_1 - x}(t_2 - t) \delta(\mathbf{K} - \mathbf{p}_2) \\
 &+ 12(2\pi)^3 \sum_{s_1 s_2 s_3} \int d\mathbf{k}_{123} L_{\mathbf{p}_2 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{l_2 s_1 s_2 s_3} \sum_x \int_0^{t_2 - \tau} dt \sum_{x_1 x_2 x_3} \\
 &\times L_{-\mathbf{p}_2 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3}^{x x_1 x_2 x_3} R_{\mathbf{p}_2}^{l_1 - x}(t_2 - \tau - t) C_{\mathbf{k}_1}^{x_1 s_1}(t - t_2, t_2, T_2, \mathcal{T}_2) \\
 &\times C_{\mathbf{k}_2}^{x_2 s_2}(t - t_2, t_2, T_2, \mathcal{T}_2) C_{\mathbf{k}_3}^{x_3 s_3}(t - t_2, t_2, T_2, \mathcal{T}_2) \delta(\mathbf{K} - \mathbf{p}_2)
 \end{aligned} \tag{E.7}$$

Para el caso de orden 1, encontrar la ecuación resonante resultaba de una simple inspección. Sin embargo, para este caso debemos hacer algo un poco más sofisticado. Nos concentramos en $l_2 = -l_1$, integraremos el tiempo rápido, dividiremos por τ y tomaremos el límite $\lim_{t_2 \rightarrow \infty}$, por lo que los términos que sobrevivan a este

límite serán justamente aquellos que forman la ecuación resonante:

$$\begin{aligned}
 \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_2} \int dt'_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} C_{2, \mathbf{p}_2}^{l_1 - l_1} + \frac{\partial C_{1, \mathbf{p}_2}^{l_1 - l_1}}{\partial T_2} + \frac{\partial C_{0, \mathbf{p}_2}^{l_1 - l_1}}{\partial \mathcal{T}_2} \right\} &= \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \int \frac{dt'_2}{t_2} \left\{ 2F_{\mathbf{p}_2} (R_{2, \mathbf{p}_2}^{l_1 - l_1}(-\tau, t'_2, T_2, \mathcal{T}_2) + R_{2, \mathbf{p}_2}^{-l_1 l_1}(\tau, t'_2, T_2, \mathcal{T}_2)) \right. \\
 &+ 6\pi \sum_{s_1 s_2 s_3} \int L_{-\mathbf{p}_2 - \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_2}^{l_1 s_1 s_2 s_3} C_{\mathbf{k}_2}^{s_1 s_2}(0, t'_2 - \tau, T_2, \mathcal{T}_2) C_{\mathbf{p}_2}^{s_3 - l_1}(\tau, t'_2, T_2, \mathcal{T}_2) d\mathbf{k}_2 \\
 &+ 6\pi \sum_{s_1 s_2 s_3} \int L_{\mathbf{p}_2 - \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_2 \mathbf{p}_2}^{-l_1 s_1 s_2 s_3} C_{\mathbf{k}_2}^{s_1 s_2}(0, t_2, T_2, \mathcal{T}_2) C_{\mathbf{p}_2}^{s_3 l_1}(\tau, t'_2, T_2, \mathcal{T}_2) d\mathbf{k}_2 \\
 &+ 18(2\pi)^3 \sum_{s_1 s_2 s_3} \int d\mathbf{k}_{123} L_{\mathbf{p}_1 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{l_1 s_1 s_2 s_3} \int_0^{t'_2 - \tau} dt \sum_{x x_1 x_2 x_3} L_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_2}^{x x_1 x_2 x_3} \\
 &\times C_{\mathbf{p}_2}^{x_3 - l_1}(t'_2 - t, t'_2, T_2, \mathcal{T}_2) C_{\mathbf{k}_3}^{x_1 s_3}(t'_2 - \tau - t, t'_2 - \tau, T_2, \mathcal{T}_2) \\
 &\times C_{\mathbf{k}_2}^{x_2 s_2}(t'_2 - \tau - t, t'_2 - \tau, T_2, \mathcal{T}_2) R_{-\mathbf{k}_1}^{s_1 - x}(t'_2 - \tau - t) \delta(\mathbf{K} + \mathbf{p}_2) \\
 &+ 18(2\pi)^3 \sum_{s_1 s_2 s_3} \int d\mathbf{k}_{123} L_{\mathbf{p}_2 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{-l_1 s_1 s_2 s_3} \int_0^{t'_2} dt \sum_{x x_1 x_2 x_3} L_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_2 \mathbf{p}_2}^{x x_1 x_2 x_3} \\
 &\times C_{-\mathbf{p}_2}^{x_3 l_1}(t'_2 - \tau - t, t'_2 - \tau, T_2, \mathcal{T}_2) C_{\mathbf{k}_3}^{x_1 s_3}(t'_2 - t, t'_2, T_2, \mathcal{T}_2) \\
 &\times C_{\mathbf{k}_2}^{x_2 s_2}(t'_2 - t, t'_2, T_2, \mathcal{T}_2) R_{0, -\mathbf{k}_1}^{s_1 - x}(t'_2 - t) \delta(\mathbf{K} - \mathbf{p}_2) \\
 &+ 6(2\pi)^3 \sum_{s_1 s_2 s_3} \int d\mathbf{k}_{123} L_{\mathbf{p}_1 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{l_1 s_1 s_2 s_3} \int_0^{t'_2} dt \sum_{x x_1 x_2 x_3} L_{\mathbf{p}_2 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3}^{x x_1 x_2 x_3} \\
 &\times C_{\mathbf{k}_2}^{x_2 s_2}(t'_2 - \tau - t, t'_2 - \tau, T_2, \mathcal{T}_2) C_{\mathbf{k}_1}^{x_1 s_1}(t'_2 - \tau - t, t'_2 - \tau, T_2, \mathcal{T}_2) \\
 &\times R_{-\mathbf{p}_2}^{-l_1 - x}(t'_2 - t) C_{\mathbf{k}_3}^{x_3 s_3}(t'_2 - \tau - t, t'_2 - \tau, T_2, \mathcal{T}_2) \delta(\mathbf{K} + \mathbf{p}_2) \\
 &+ 6(2\pi)^3 \sum_{s_1 s_2 s_3} \int d\mathbf{k}_{123} L_{\mathbf{p}_2 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{-l_1 s_1 s_2 s_3} \sum_x \int_0^{t'_2 - \tau} dt \sum_{x_1 x_2 x_3} \\
 &\times L_{-\mathbf{p}_2 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3}^{x x_1 x_2 x_3} R_{\mathbf{p}_2}^{l_1 - x}(t'_2 - \tau - t) C_{\mathbf{k}_1}^{x_1 s_1}(t - t'_2, t'_2, T_2, \mathcal{T}_2) \\
 &\times C_{\mathbf{k}_2}^{x_2 s_2}(t - t'_2, t'_2, T_2, \mathcal{T}_2) C_{\mathbf{k}_3}^{x_3 s_3}(t - t'_2, t'_2, T_2, \mathcal{T}_2) \delta(\mathbf{K} - \mathbf{p}_2) \left. \right\}
 \end{aligned} \tag{E.8}$$

eliminando aquellos términos que claramente no son resonantes:

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau 4\pi \frac{\partial C_{-p_2,0}^{l_1-l_1}}{\partial \mathcal{T}_2} = & \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left\{ 24(2\pi)^3 \sum_{s_1 s_2 s_3} \sum_{x_1 x_2 x_3} \int dq_{123} \hat{T}_{123} C_{q_1,0}^{x_1 s_3}(0,0,T_2, \mathcal{T}_2) C_{q_2,0}^{x_2 s_2}(0,0,T_2, \mathcal{T}_2) \right. \\ & \times L_{-p_2-q_3-q_2-q_1}^{l_1 s_1 s_2 s_3} L_{-q_3 q_1 q_2 - p_2}^{s_1 x_1 x_2 x_3} C_{-p_2,0}^{x_3 - l_1}(0,0,T_2, \mathcal{T}_2) \delta(Q_{-p_2}) \\ & \times \left. \int_0^\tau e^{-i(s_3 \omega_{q_1} + s_2 \omega_{q_2} + s_1 \omega_{q_3} - l_1 \omega_{p_2})t} \Delta(x_1 \omega_{q_1} + x_2 \omega_{q_2} + x_3 \omega_{p_2} - s_1 \omega_{q_3}, t) dt \right\} \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

$$\begin{aligned} + \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left\{ 24(2\pi)^3 \sum_{s_1 s_2 s_3} \int dk_{123} \sum_{x_1 x_2 x_3} C_{k_1,0}^{s_1 x_1}(0,0,T_2, \mathcal{T}_2) C_{k_2,0}^{s_2 x_2}(0,0,T_2, \mathcal{T}_2) C_{k_3,0}^{s_3 x_3}(0,0,T_2, \mathcal{T}_2) \right. \\ & \times L_{p_2 k_1 k_2 k_3}^{s s_1 s_2 s_3} L_{-p_2 - k_1 - k_2 - k_3}^{l_1 x_1 x_2 x_3} \delta(K_{-p_2}) \\ & \times \left. \int_0^\tau e^{-i(x_1 \omega_{k_1} + x_2 \omega_{k_2} + x_3 \omega_{k_3} - l_1 \omega_{p_2})t} \Delta(s_1 \omega_{k_1} + s_2 \omega_{k_2} + s_3 \omega_{k_3} + l_1 \omega_{p_2}; t) dt \right\} \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

donde $\Delta(x, t) := \int_0^t d\tau e^{ix\tau} d\tau$. Usando Lema Riemman-Lebesgue obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{\mathbf{p}_2}^{l_1-l_1}}{\partial \mathcal{T}_2}(\mathcal{T}_2) = & -12\pi(2\pi)^2 \sum_{s_1 s_2 s_3} \int d\mathbf{k}_{123} \hat{T}_{123} C_{p_2}^{l_1-l_1}(\mathcal{T}_2) C_{\mathbf{k}_3}^{-s_3 s_3}(\mathcal{T}_2) C_{\mathbf{k}_2}^{-s_2 s_2}(\mathcal{T}_2) \\ & \times \left| L_{\mathbf{p}_2 \mathbf{q}_3 \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_1}^{-l_1 s_1 s_2 s_3} \right|^2 \frac{s_1}{l_1} \delta(K_{-\mathbf{p}_2}) \delta(l_1 \omega_{p_2} + s_1 \omega_{k_1} + s_2 \omega_{k_2} + s_3 \omega_{k_3}) \\ & + 12\pi(2\pi)^2 \sum_{s_1 s_2 s_3} \int d\mathbf{k}_{123} C_{\mathbf{k}_1}^{-s_1 s_1}(\mathcal{T}_2) C_{\mathbf{k}_2}^{-s_2 s_2}(\mathcal{T}_2) C_{\mathbf{k}_3}^{-s_3 s_3}(\mathcal{T}_2) \\ & \left| L_{\mathbf{p}_2 \mathbf{q}_3 \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_1}^{-l_1 s_1 s_2 s_3} \right|^2 \delta(K_{-\mathbf{p}_2}) \delta(l_1 \omega_{p_2} + s_1 \omega_{k_1} + s_2 \omega_{k_2} + s_3 \omega_{k_3}) \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

La cual corresponde a la ecuación cinética para la placa elástica.

Appendix F

Receta de McComb

Seguiremos el camino explicado por WD McComb [46]. Nuevamente podemos considerar la ecuación 3.1 pero añadiremos un parámetro de control λ al término no lineal y con un término de inyección de energía a la derecha:

$$(\partial_t + \nu_k) u(\mathbf{k}) = \lambda \sum_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''=\mathbf{k}} P_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{k}''} u(\mathbf{k}')u(\mathbf{k}'') + f_{\mathbf{k}}(t) \quad (\text{F.1})$$

Ahora consideremos que en $t = t_0$ un pequeño cambio en la inyección $f_{\mathbf{k}}(t) \rightarrow f_{\mathbf{k}}(t) + \delta f_{\mathbf{k}}$ causará un pequeño cambio en el campo (notar que la ecuación es lineal en $f_{\mathbf{k}}$) $u(\mathbf{k}) \rightarrow u(\mathbf{k}) + \delta u_{\mathbf{k}}$. Como ya sabemos, vamos a definir la función respuesta como:

$$\delta u_{\mathbf{k}}(t) = \int_{t_0}^t \tilde{R}_{\mathbf{k}}(t, t') \delta f_{\mathbf{k}} dt' \quad (\text{F.2})$$

Entonces, para encontrar la función de correlación los pasos son los siguientes:

1. multiplicar F.1 por $u'(-\mathbf{k})$ y promediar.
2. Expandir los campos $u(\mathbf{k}) = u_0(\mathbf{k}) + \lambda u_1(\mathbf{k}) + \lambda^2 u_2(\mathbf{k}) + o(\lambda^3)$ y resolver para el primer orden como función de la función de Green de orden 0 y los campos de orden 0, i.e, $\tilde{R}_0(\mathbf{k}, t, t')$ y u_0
3. Resolver para el siguiente orden dejando todo en términos de R_0 y u_0 de modo que podamos separar los promedios: $\langle R_0(\mathbf{p}) u_0(\mathbf{k}) u_0(\mathbf{j}) u_0(-\mathbf{k}) u_0(-\mathbf{j}) \rangle = \langle R_0(\mathbf{p}) \rangle \langle u_0(\mathbf{k}) u_0(-\mathbf{k}) \rangle \langle u_0(\mathbf{j}) u_0(-\mathbf{j}) \rangle$
4. Reemplazar $u_0 \rightarrow u$ y $R_0 \rightarrow R$, truncar al segundo orden y hacer $\lambda = 1$.

Explícitamente, el paso 3 corresponde a encontrar la ecuación:

$$(\partial_t + \nu_k) u_1(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''=\mathbf{k}} P_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{k}''} u_0(\mathbf{k}') u_0(\mathbf{k}'') \quad (\text{F.3})$$

De modo que podemos escribir la solución sabiendo que la función de Green es $R_0(\mathbf{k})$:

$$u_1(\mathbf{k}) = \int_{t_0}^t R_0(\mathbf{k}, t, t') \sum_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''=\mathbf{k}} P_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{k}''} u_0'(\mathbf{k}') u_0'(\mathbf{k}'') dt' \quad (\text{F.4})$$

Luego, para el siguiente paso podemos separar los promedios de la forma en que se mostró porque $u_0(\mathbf{k})$ es la solución de orden lineal y por ende es estadísticamente independiente de los otros modos debido a *maximal randomness*.

Para la función respuesta es bien similar el proceso:

1. Reemplazar los cambios $u(\mathbf{k}) \rightarrow u(\mathbf{k}) + \delta u_{\mathbf{k}}$ y $f_{\mathbf{k}}(t) \rightarrow f_{\mathbf{k}}(t) + \delta f_{\mathbf{k}}$ en F.1
2. Encontrar una ecuación para $\delta u_{\mathbf{k}}$ removiendo aquellos términos pertenecientes a la ecuación original F.1 e ignorando los términos de orden superior como $\delta u_{\mathbf{k}'} \delta u_{\mathbf{k}''}$.
3. Reemplazar en ésta ecuación F.2 para así obtener una ecuación para $R(\mathbf{k}, t, t')$
4. Expandir la función respuesta en serie de potencias $R(\mathbf{k}, t, t') = R_0(\mathbf{k}, t, t') + \lambda R_1(\mathbf{k}, t, t') + \lambda^2 R_2(\mathbf{k}, t, t') + o(\lambda^3)$ y de igual forma el campo
5. Análogamente resolver para R_1 en función de R_0 y u_0
6. Repetir los últimos 2 pasos de la función de correlación

Bibliography

- [1] O. Darrigol, *Worlds of flow: A history of hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*. Oxford University Press, 2005.
- [2] W. Thomson, “Xxxiv. stability of motion (continued from the may, june, and august numbers).—broad river flowing down an inclined plane bed,” *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, vol. 24, no. 148, pp. 272–278, 1887.
- [3] A. Alexakis, B. Bigot, H. Politano, and S. Galtier, “Anisotropic fluxes and nonlocal interactions in magnetohydrodynamic turbulence,” *Physical Review E*, vol. 76, no. 5, p. 056313, 2007.
- [4] S. Galtier and S. V. Nazarenko, “Turbulence of weak gravitational waves in the early universe,” *Physical review letters*, vol. 119, no. 22, p. 221101, 2017.
- [5] R. Z. Sagdeev and A. A. Galeev, “Nonlinear plasma theory,” *Nonlinear Plasma Theory*, 1969.
- [6] S. Dyachenko, A. Newell, A. Pushkarev, and V. Zakharov, “Optical turbulence: weak turbulence, condensates and collapsing filaments in the nonlinear schrödinger equation,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 57, no. 1-2, pp. 96–160, 1992.
- [7] S. A. Orszag, “Analytical theories of turbulence,” *J. Fluid Mech*, vol. 41, no. 2, pp. 363–386, 1970.
- [8] R. Peierls, “Zur kinetischen theorie der wärmeleitung in kristallen,” *Annalen der Physik*, vol. 395, no. 8, pp. 1055–1101, 1929.
- [9] P. Robinson, “Nonlinear wave collapse and strong turbulence,” *Reviews of modern physics*, vol. 69, no. 2, p. 507, 1997.

-
- [10] P. Robinson, D. Newman, and A. Rubenchik, “Effects of long-wavelength dissipation on beam-driven langmuir turbulence,” *Physics of Fluids B: Plasma Physics*, vol. 4, no. 8, pp. 2509–2516, 1992.
- [11] J. Boussinesq, *Essai sur la théorie des eaux courantes*. Impr. nationale, 1877.
- [12] H. Wyld Jr, “Formulation of the theory of turbulence in an incompressible fluid,” *Annals of Physics*, vol. 14, pp. 143–165, 1961.
- [13] S. F. Edwards and W. McComb, “A local energy transport equation for isotropic turbulence,” *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 325, no. 1562, pp. 313–321, 1971.
- [14] W. McComb, “A local energy-transfer theory of isotropic turbulence,” *Journal of Physics A: Mathematical, Nuclear and General*, vol. 7, no. 5, p. 632, 1974.
- [15] R. H. Kraichnan, “The structure of isotropic turbulence at very high reynolds numbers,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 5, no. 4, pp. 497–543, 1959.
- [16] A. Foppl, *Vorlesungen uber Technische Mechanik: Die Wichtigsten Lehren der Hoheren Elastizitatstheorie*. BG Teubner, 1907.
- [17] G. Düring, C. Josserand, G. Krstulovic, and S. Rica, “Strong turbulence for vibrating plates: Emergence of a kolmogorov spectrum,” *Physical Review Fluids*, vol. 4, no. 6, p. 064804, 2019.
- [18] G. Düring, C. Josserand, and S. Rica, “Weak turbulence for a vibrating plate: can one hear a kolmogorov spectrum?” *Physical review letters*, vol. 97, no. 2, p. 025503, 2006.
- [19] N. Mordant, “Are there waves in elastic wave turbulence?” *Physical review letters*, vol. 100, no. 23, p. 234505, 2008.
- [20] B. Miquel and N. Mordant, “Nonstationary wave turbulence in an elastic plate,” *Physical review letters*, vol. 107, no. 3, p. 034501, 2011.
- [21] A. Boudaoud, O. Cadot, B. Odille, and C. Touzé, “Observation of wave turbulence in vibrating plates,” *Physical review letters*, vol. 100, no. 23, p. 234504, 2008.

- [22] R. H. Kraichnan, “Decay of isotropic turbulence in the direct-interaction approximation,” *The Physics of Fluids*, vol. 7, no. 7, pp. 1030–1048, 1964.
- [23] G.-Z. Sun, D. R. Nicholson, and H. A. Rose, “Statistical theory of cubic langmuir turbulence,” *The Physics of fluids*, vol. 28, no. 8, pp. 2395–2405, 1985.
- [24] S. Nazarenko, *Wave turbulence*. Springer Science & Business Media, 2011, vol. 825.
- [25] W. D. McComb, *Homogeneous, Isotropic Turbulence: Phenomenology, Renormalization and Statistical Closures*. OUP Oxford, 2014, vol. 162.
- [26] A. Beresnyak, “Spectral slope and kolmogorov constant of mhd turbulence,” *Physical Review Letters*, vol. 106, no. 7, p. 075001, 2011.
- [27] A. Praskovsky and S. Oncley, “Measurements of the kolmogorov constant and intermittency exponent at very high reynolds numbers,” *Physics of Fluids*, vol. 6, no. 9, pp. 2886–2888, 1994.
- [28] S. Nazarenko and M. Onorato, “Wave turbulence and vortices in bose–einstein condensation,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 219, no. 1, pp. 1–12, 2006.
- [29] A. Pushkarev and V. E. Zakharov, “Turbulence of capillary waves,” *Physical review letters*, vol. 76, no. 18, p. 3320, 1996.
- [30] C. S. Salem, G. Howes, D. Sundkvist, S. Bale, C. Chaston, C. Chen, and F. Mozer, “Identification of kinetic alfvén wave turbulence in the solar wind,” *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 745, no. 1, p. L9, 2012.
- [31] A. C. Newell, S. Nazarenko, and L. Biven, “Wave turbulence and intermittency,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 152, pp. 520–550, 2001.
- [32] Q. Aubourg, A. Campagne, C. Peureux, F. Ardhuin, J. Sommeria, S. Viboud, and N. Mordant, “Three-wave and four-wave interactions in gravity wave turbulence,” *Physical Review Fluids*, vol. 2, no. 11, p. 114802, 2017.
- [33] A. Dyachenko, Y. Lvov, and V. E. Zakharov, “Five-wave interaction on the surface of deep fluid,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 87, no. 1-4, pp. 233–261, 1995.

-
- [34] S. Galtier and A. Bhattacharjee, “Anisotropic weak whistler wave turbulence in electron magnetohydrodynamics,” *Physics of Plasmas*, vol. 10, no. 8, pp. 3065–3076, 2003.
- [35] S. H. Schochet and M. I. Weinstein, “The nonlinear schrödinger limit of the zakharov equations governing langmuir turbulence,” *Communications in mathematical physics*, vol. 106, no. 4, pp. 569–580, 1986.
- [36] J. Laurie, U. Bortolozzo, S. Nazarenko, and S. Residori, “One-dimensional optical wave turbulence: experiment and theory,” *Physics Reports*, vol. 514, no. 4, pp. 121–175, 2012.
- [37] V. E. Zakharov, “Weak turbulence in media with a decay spectrum,” *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, vol. 6, no. 4, pp. 22–24, 1965.
- [38] C. Connaughton, “Numerical solutions of the isotropic 3-wave kinetic equation,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 238, no. 23-24, pp. 2282–2297, 2009.
- [39] C. Connaughton, R. Rajesh, and O. Zaboronski, “Stationary kolmogorov solutions of the smoluchowski aggregation equation with a source term,” *Physical Review E*, vol. 69, no. 6, p. 061114, 2004.
- [40] L. Pietronero and E. Tosatti, *Fractals in physics*. Elsevier, 2012.
- [41] S. Edwards, “Turbulence in hydrodynamics and plasma physics,” in *Lectures presented at the Trieste Seminar on Plasma Physics*, 1965, p. 595.
- [42] R. H. Kraichnan, “Irreversible statistical mechanics of incompressible hydromagnetic turbulence,” *Physical Review*, vol. 109, no. 5, p. 1407, 1958.
- [43] J. Herring, “Self-consistent-field approach to turbulence theory,” *The Physics of Fluids*, vol. 8, no. 12, pp. 2219–2225, 1965.
- [44] M. Ottaviani, “Direct-interaction approximation: The statistically stationary problem,” *Physics Letters A*, vol. 143, no. 6-7, pp. 325–328, 1990.
- [45] J. C. Bowman, “Realizable markovian statistical closures: general theory and application to drift-wave turbulence,” Ph.D. dissertation, Princeton University Princeton, New Jersey, 1992.
- [46] W. D. McComb, “The physics of fluid turbulence,” *Oxford*, 1990.

-
- [47] A. F. Vakakis and A. Blanchard, “Exact steady states of the periodically forced and damped duffing oscillator,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 413, pp. 57–65, 2018.
- [48] R. Kubo, “Stochastic liouville equations,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 4, no. 2, pp. 174–183, 1963.
- [49] R. H. Kraichnan, “Convergents to turbulence functions,” *J. Fluid Mech*, vol. 41, no. 1, pp. 189–217, 1970.
- [50] —, “Kolmogorov’s hypotheses and eulerian turbulence theory,” *The Physics of Fluids*, vol. 7, no. 11, pp. 1723–1734, 1964.
- [51] —, “Inertial-range spectrum of hydromagnetic turbulence,” *The Physics of Fluids*, vol. 8, no. 7, pp. 1385–1387, 1965.
- [52] M. Filipiak, “Further assessment of the let theory,” *KB thesis scanning project 2015*, 1992.
- [53] R. H. Kraichnan, “Lagrangian-history closure approximation for turbulence,” *The Physics of Fluids*, vol. 8, no. 4, pp. 575–598, 1965.
- [54] R. P. Feynman, A. R. Hibbs, and D. F. Styer, *Quantum mechanics and path integrals*. Courier Corporation, 2010.
- [55] C. C. Chow and M. A. Buice, “Path integral methods for stochastic differential equations,” *The Journal of Mathematical Neuroscience (JMN)*, vol. 5, no. 1, pp. 1–35, 2015.
- [56] S. Gauthier, M.-E. Brachet, and J.-D. Fournier, “Testing field-theoretical methods on a classical cubic equation with stochastic driving,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 14, no. 11, p. 2969, 1981.
- [57] P. C. Martin, E. Siggia, and H. Rose, “Statistical dynamics of classical systems,” *Physical Review A*, vol. 8, no. 1, p. 423, 1973.
- [58] R. P. Feynman, *Space-time approach to quantum electrodynamics*. CRC Press, 2018.
- [59] R. H. Kraichnan, “Approximations for steady-state isotropic turbulence,” *The Physics of Fluids*, vol. 7, no. 8, pp. 1163–1168, 1964.