PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

FACULTAD DE EDUCACIÓN

USO DE MATERIAL CONCRETO EN EL APRENDIZAJE DEL ALGORITMO ESTÁNDAR DE LA DIVISIÓN: CASO DE UN ESTUDIANTE CON DIFICULTADES DE APRENDIZAJE EN MATEMÁTICA

LUCÍA RAQUEL DONOSO SUÁREZ

Proyecto de tesis presentado a la Facultad de Educación de la Pontifica Universidad Católica de Chile para optar al grado académico de Magister en Educación con mención en Dificultades de Aprendizaje

Profesor guía:
FRANCISCO ROJAS SATELER

Abril 2016
Santiago, Chile

Agradecimientos

Ha sido un gran desafío el poder terminar este Magister. Sin dudas que significó muchas renuncias, sacrificios, horas de sueño y cansancio. Pero quedo inmensamente feliz y agradecida…Al primero que quiero dejar unas palabras es a Miguel, con su paciencia, tolerancia y conversaciones, me impulsó a llegar hasta aquí, aunque estuviésemos planificando nuestro matrimonio o la mudanza a nuestro nuevo hogar, siempre adaptó nuestros planes para que yo pudiera estudiar o trabajar. Eres el mejor compañero.

También agradecer a mis padres, Rosa y Luis, quiénes desde muy pequeña me llevaron por el camino del amor al aprendizaje, de lo importante que es ser perseverante y no abandonar los sueños, quienes me dieron lo más importante que unos padres le pueden dar a un hijo: amor infinito y herramientas para ser quien uno quiera en esta vida.

Entremedio de mi segundo año de magister, mi hermana, Leslie, nos trajo una inmensa alegría, con la llegada de Benjamín, mi sobrino. En ella he visto la garra que puede tener una madre, siguiendo con sus estudios hasta días antes de dar a luz, y luego, presenciar la ardua labor que significa criar, cuidar y proteger a ese pequeño ser humano que depende completamente de ti. Me hace reflexionar en cómo desde nuestro primer respiro, nuestro entorno influye positiva o negativamente en nosotros y que es imposible alejar la historia de nuestros estudiantes de la sala de clases, porque si queremos educar, debemos ser conscientes de que no trabajamos con cerebros pensantes, sino que con personas que tienen alegrías, penas, fortalezas y debilidades.

También agradecer a mis amigos profes: Camila, Eder, Andrea y Marcia, quienes siempre tuvieron una palabra de aliento y un momento para transar ideas o experiencias. Si este país tuviera más profes como ustedes, sin duda, podríamos avanzar a pasos agigantados a una educación de calidad.

Y por último, agradecer a mi profesor guía, Francisco Rojas, por ser inmensamente paciente, amable pero exigente, por compartir sus conocimientos y orientarme cuando perdía el foco o cuando no sabía por dónde empezar. Sin dudas, un excelente profesor.

Índice

Índice de tablas

Resumen

En este trabajo de tesis se busca establecer la influencia que genera el uso de material concreto, como lo son los bloques base 10, en el aprendizaje y la comprensión del algoritmo estándar de la división en un estudiante que presenta dificultades de aprendizaje en matemática.
Para ello, se genera una propuesta, que se inicia con una evaluación, para detectar la comprensión que el estudiante tiene y cómo enfrenta diferentes casos de división. Posterior a ello, se implementan cuatro sesiones de trabajo con los bloques base 10 y se termina el proceso con una evaluación espejo de la primera.
Se concluye que el trabajo a nivel de material concreto en forma paralela a lo simbólico, genera una comprensión de lo que se realiza y elimina dificultades generadas por el uso de un algoritmo de forma mecánica y sin comprensión. Al mismo tiempo, se observa la generación de mayor entusiasmo, concentración y seguridad en el estudiante.

Palabras clave: dificultades de aprendizaje, representar, material concreto, algoritmo estándar de la división.

Abstract

This thesis project seeks to establish the influence that generates the use of manipulatives material, like are base 10 blocks, in the learning and compression about the division standard algorithm of a student who has mathematics learning difficulties.
To make this, a proposal is generated, that begins with an evaluation to detect the compression that the student has and how he deal with different division cases. After that, four base 10 blocks work sessions are implemented and the process are finished with a mirror evaluation from the first one.
Is concluded that the work in a concrete level in a parallel way with the symbolic generates a compression about what is performed and eliminate difficulties generated by a without compression mechanical algorithm use. In addition, to generate more enthusiasm, concentration and security in the student.

Keywords: learning difficulties, represent, manipulatives material, division standard algorithm.

1. Introducción

Este estudio se focaliza en dos ideas centrales. Por un lado, la teoría postula que las dificultades de aprendizaje en Matemática en gran medida son problemas generados por la enseñanza, ya que se estandariza el proceso educativo y no responde a las diferentes formas de aprendizaje que presentan los estudiantes. Y por otro lado, desde la Matemática, que el aprendizaje de esta disciplina debe transitar por diferentes representaciones, desde una concreta, manipulativa, hacia una simbólica. Es por estas dos ideas, que toma fuerza el poder investigar lo que sucede cuando se utiliza el material concreto en la enseñanza de la matemática, en particular el uso y aplicación del algoritmo de la división, en un estudiante que está diagnosticado con déficit atencional, presenta bajas calificaciones en matemáticas y se encuentra con evaluación diferenciada.

Así, este trabajo de tesis se inicia presentando los antecedentes y cómo estos fundamentan la problemática de investigación. Junto a esto se plantea la pregunta de investigación y los objetivos del estudio. Para establecer un referente, tanto para la propuesta de enseñanza con el uso del material concreto, como para poder realizar el análisis se presenta un marco teórico que está formado por tres grandes apartados. El primero de ellos corresponde a las dificultades de aprendizaje, donde se presentan dos grandes perspectivas con los que se pueden entender las dificultades y luego, desde una de ellas se plantea la diferencia entre trastorno de aprendizaje y estilo de aprendizaje, se especifica sobre las dificultades en el área de matemática y lo importante que son los errores para poder comprender cómo aprenden los estudiantes. El segundo apartado, corresponde al algoritmo de la división, donde se define lo que es un algoritmo, se presenta el algoritmo estándar de la división que usualmente se utiliza en las salas de clases de nuestro país y algunos otros. Para finalizar este apartado, se plantean algunas dificultades que enfrentan los estudiantes al aprender el algoritmo de la división. El último apartado es sobre la habilidad de representar y el material concreto, donde se definen, clasifican y describen algunos de ellos, que han sido considerados los más relevantes para el trabajo de la división y cómo se utilizan.

En este estudio se espera poder determinar cómo influye el material concreto en el aprendizaje y comprensión de un estudiante con dificultades de aprendizaje y también, definir una propuesta de cómo trabajar el algoritmo estándar de la división, del cual hay escasa orientación en la bibliografía. Es por esto, que este trabajo se entiende como un estudio de indagación, donde se analiza un problema educacional acotado, utilizando reflexivamente el conocimiento acumulado y generando nueva información relevante para el campo disciplinar propio de las dificultades de aprendizaje. Este proyecto se aborda como un estudio de caso interpretativo, ya que "reúne información sobre un caso con la finalidad de interpretar o teorizar acerca del caso. Desarrolla categorías conceptuales para ilustrar, defender o desafiar presupuestos teóricos defendidos antes. El modelo de análisis es inductivo" (Latorre et al., 1997, p.236). Una vez diseñada y aplicada la metodología, se presenta el análisis y las conclusiones finales del estudio. Finalmente se encuentran la bibliografía y los anexos.

2. Antecedentes

2.1. ¿Cómo se aprende matemática?

Donovan y Bransford (2005) inician la introducción del reporte "How People Learn" señalando que las personas, más que cualquier otra especie, están "diseñadas" para ser aprendices flexibles; agentes activos en la adquisición del conocimiento y herramientas. En concordancia a esta idea, el reporte se centra en tres principios fundamentales del aprendizaje:

1. Los estudiantes traen a la sala de clases preconcepciones sobre el funcionamiento del mundo. Si sus conocimientos previos no son contemplados, los estudiantes podrían fallar en la adquisición de nueva información y conceptos, o bien aprenderlos sólo en función de la evaluación y volver a sus nociones iniciales fuera del aula.
2. Para desarrollar competencia en un área de interés, los estudiantes deben a) tener conocimiento profundo de los hechos, b) comprender hechos e ideas en un marco conceptual, y c) organizar el conocimiento de forma que sea fácil de recuperar y aplicar.
3. Un enfoque metacognitivo de la enseñanza puede ayudar a los estudiantes a tomar control de su propio aprendizaje, definiendo metas y monitoreando el progreso en la consecución de éstas.

De estos tres principios fundamentales del aprendizaje, los autores del reporte realizan un análisis en el área de la matemática, mencionando con respecto al primer principio, que muchas veces la enseñanza de la matemática anula los razonamientos de los estudiantes, remplazándolos por un "set" de reglas y procedimientos que desconectan la resolución del problema del "meaning making" (sentido de resolverlo). Por otra parte, en vez de organizar las competencias y habilidades necesarias para desarrollar la matemática de forma fluida en torno a un conjunto de conceptos matemáticos clave (aludiendo al segundo principio), son las mismas habilidades o competencias el centro de la enseñanza. Por último, y en referencia al tercer principio que involucra la metacognición, producto de que, por lo general la adquisición de conocimiento procedural se presenta separado del "meaning making", los estudiantes no son capaces de desarrollar ni utilizar estrategias metacognitivas para la resolución de problemas matemáticos.

A continuación de este análisis, presentan los autores cinco principios rectores que constituyen la competencia matemática:

1. Comprensión de conceptos matemáticos, operaciones y relaciones.
2. Habilidad de exponer procedimientos de forma flexible, precisa, eficiente y apropiada.
3. Habilidad para formular, representar y resolver problemas matemáticos.
4. Capacidad de razonamiento lógico, reflexión, explicación y argumentación.
5. Inclinación habitual a entender la matemática como algo sensible, útil y valioso; junto a la creencia en la propia diligencia y eficacia.

De estos principios, el número dos cobra real importancia en este trabajo de tesis, ya que menciona que el aprendizaje de procedimientos (como lo son los algoritmos) y, no solo los conceptos, es necesario para aprender matemática, y al igual que la habilidad de resolver problemas, los procedimientos y su comprensión son esenciales si se desea desarrollar la competencia matemática en los estudiantes.

Por tanto, el desafío de los docentes radica en ayudar a los estudiantes a construir y consolidar las competencias que son “prerrequisito”, comprender nuevos conceptos en profundidad y organizar conceptos y competencias en una red de conocimientos. Más aún, los profesores deben proveer las oportunidades para fortalecer nuevas comprensiones y procedimientos, pues en matemática son estas redes de conocimiento las que, organizadas, funcionan como camino de transición desde conocimientos concretos e informales hacia métodos abstractos, generales y abreviados.

Hasta aquí se han mencionado varias ideas importantes, pero se profundizará en dos de ellas ya que es necesario poder aclarar y especificar a lo que se refieren. La primera es sobre la idea de red de conceptos y la segunda es la comprensión profunda.

Skemp (1980) propone que una persona no puede aprender conceptos de un orden más elevado de los que tiene, y para poder asimilarlos debe integrarlos en su red de conceptos por medio de ejemplos y no por medio de definiciones. “Un concepto requiere para su formación un cierto número de experiencias que tengan algo en común. Una vez formado el concepto, podemos (retrospectiva y prospectivamente) hablar acerca de ejemplos del concepto”. (Skemp, 1980, p.26)

Y para ello, el autor propone dos principios para el aprendizaje. El primer de ellos hace referencia al orden en que los conceptos son aprendidos y es formulado de la siguiente manera: “Los conceptos de un orden más elevado que aquellos que una persona ya tiene, no le pueden ser comunicados mediante una definición, sino solamente preparándola para enfrentarse a una colección adecuada de ejemplos". (Skemp, 1980, p.36)

El segundo principio, alude a los requisitos que deben cumplir estos ejemplos con los que se enseñan nuevos conceptos: "Puesto que en matemáticas estos ejemplos son invariablemente otros conceptos, es necesario, en principio, asegurarse de que éstos se encuentran ya formados en la mente del que aprende". (Skemp, 1980, p.36) Y es por ello que se menciona que aprendemos en una red de conceptos.

Cuando aprendemos un nuevo concepto que necesitamos en la vida cotidiana, generalmente, son de orden bajo, y solemos disponer de conceptos de un orden más alto para poder incorporar el nuevo con facilidad a partir de su definición y un par de ejemplos.

> Sin embargo, en matemáticas, no sólo los conceptos son más abstractos que los de la vida diaria sino que la dirección del aprendizaje va en su mayor parte en la de una abstracción todavía mayor. La comunicación de los conceptos matemáticos es, por tanto, mucho más difícil, tanto para el que comunica como para el que recibe la comunicación. (Skemp, 1980, p.30)

Retomando el segundo principio que propone Skemp para el aprendizaje y enseñanza de un nuevo concepto, es necesario que un docente, "antes de que intente comunicar un nuevo concepto deba encontrar cuáles son sus conceptos contributorios; y, para cada uno de éstos, ha de aflorar sus conceptos contributorios; y así sucesivamente, hasta que alcance los conceptos primarios, o experiencias que suponemos como dadas". (Skemp, 1980, p.38) Por tanto, para comprender es necesario asimilar el concepto dentro de una red de conceptos al cual accedemos por variados ejemplos que nos permiten construir su definición.

En relación a la comprensión profunda, como sostiene Liping Ma (2010), un tema matemático debe ser comprendido de forma profunda y amplia. La comprensión profunda la define como: "la conexión de éste [contenido] con las ideas, conceptualmente más poderosas del tema. Mientras más cercana es una idea a la estructura de la disciplina, más poderosa será, por ende, podrá sustentar más temas". (Liping Ma, 2010, p.147) Y la comprensión amplia de un contenido, la define como el poder “conectarlo con aquellos temas con similar o menor poder conceptual”. (Liping Ma, 2010, p.147)

> Por supuesto, la razón por la que una comprensión profunda de las matemáticas elementales es posible es que, primero que todo, las matemáticas elementales son un campo de profundidad, amplitud y rigurosidad. Los profesores con esta comprensión profunda, vasta y acabada no inventan conexiones entre las ideas matemáticas pero, las revelan y representan en términos de enseñanza y aprendizaje matemáticos. (Liping Ma, 2010, p.148)

2.2. Propuesta Ministerial

El marco curricular vigente desde primero a sexto básico desde el año 2012 son las Bases Curriculares. En la introducción de dicho documento, para el área de Matemática, se incorpora la sigla COPISI (concreto – pictórico – simbólico), que apunta a la importancia de que los estudiantes aprendan con diferentes representaciones de un mismo contenido. En el proceso de aprender,

> los estudiantes de todas las edades necesitan dar sentido a los contenidos matemáticos que aprenden, para que puedan construir su propio significado de la matemática. Especialmente en los primeros niveles, esto se logra de mejor manera cuando los estudiantes exploran y trabajan primero manipulando una variedad de materiales concretos y didácticos. La formación de conceptos abstractos comienza a partir de las experiencias y acciones concretas con objetos. (Bases Curriculares, 2012, p.2)

Es claro que en las Bases Curriculares es clave abordar los contenidos matemáticos desde lo concreto, donde los estudiantes puedan manipular objetos o diferentes recursos que les permitan ir construyendo por sí mismos la matemática, relacionándola con sus experiencias y vida cotidiana. Por lo tanto, se transita lentamente hacia un aprendizaje simbólico, pasando por lo pictórico, y transitando, además, entre cada par de representaciones en sentido bidireccional.

Conociendo la metodología que proponen las Bases Curriculares, es preciso profundizar en los Objetivos de Aprendizaje (OA), los cuales definen los desempeños mínimos que se espera que todos los estudiantes logren en cada asignatura y en cada nivel de enseñanza, integrando habilidades, conocimientos y actitudes. Específicamente, para la división se proponen los que se mencionan a continuación:

Tabla 1: OA de las Bases Curriculares para la división

Curso	OA
3.°	Demostrar que comprenden la división en el contexto de las tablas de hasta 10 · 10: – representando y explicando la división como repartición y agrupación en partes iguales, con material concreto y pictórico – creando y resolviendo problemas en contextos que incluyan la repartición y la agrupación – expresando la división como una sustracción repetida – describiendo y aplicando la relación inversa entre la división y la multiplicación – aplicando los resultados de las tablas de multiplicación hasta 10 · 10, sin realizar cálculos
4.°	Demostrar que comprenden la división con dividendos de dos dígitos y divisores de un dígito: – usando estrategias para dividir, con o sin material concreto – utilizando la relación que existe entre la división y la multiplicación – estimando el cociente – aplicando la estrategia por descomposición del dividendo – aplicando el algoritmo de la división
5.°	Demostrar que comprenden la división con dividendos de tres dígitos y divisores de un dígito: – interpretando el resto – resolviendo problemas rutinarios y no rutinarios que impliquen divisiones

En las Bases Curriculares, la división se trabaja durante tres cursos, pero en tercero básico solo se trabaja como operación inversa de la multiplicación. Es en cuarto y quinto básico, donde se abordan algoritmos de esta operación. Y, explícitamente, solo se trabaja hasta el caso en que el dividendo es un número con tres cifras y el divisor un número de una cifra, quedando fuera del currículum el trabajo con un dividendo cuya cantidad de cifras sea mayor que uno.

Como las Bases Curriculares no vuelven a mencionar la división con números naturales, se asumirá que los estudiantes en sexto básico ya deben trabajar con dividendos y divisores que sean mayores a los expresados en el objetivo de aprendizaje de quinto básico.

3. El problema de investigación, preguntas y objetivos

Como ha quedado de manifiesto en los antecedentes de esta investigación, el algoritmo estándar de la división genera dificultades de aprendizaje por diversos motivos, pero principalmente porque oculta información de lo que realmente está sucediendo, es decir, por ser poco transparente. Si bien es un algoritmo que permite realizar grandes cálculos en poco tiempo, no es un algoritmo que permita su comprensión de forma sencilla para los estudiantes que están iniciando su aprendizaje sobre la división, y menos aún para aquellos estudiantes que presentan dificultades en matemática.

Por otro lado, si la enseñanza de este algoritmo es realizada a nivel simbólico, sin existir la enseñanza de otros algoritmos alternativos que sean más transparentes o la vivencia de experiencias diversas que permitan al estudiante apropiarse del cómo se llegó a construir el algoritmo estándar de la división, el aprendizaje se dificulta aún más.

Los puntos anteriores se puede observar en cualquier sala de clases, en cualquier estudiante, pero la situación es aún más compleja cuando un estudiante con dificultades de aprendizaje en matemática debe aprender un algoritmo tan complejo como lo es el de la división. Por tanto, el problema de esta investigación queda definido como:

Los estudiantes con dificultades de aprendizaje en matemática evidencian una escasa comprensión del algoritmo de la división. Sin embargo, existen antecedentes teóricos que demuestran que al mediar el proceso educativo con material concreto, la comprensión de los estudiantes se desarrolla en mayor medida pudiendo justificar una representación a nivel simbólico, como lo es un algoritmo, desde un nivel concreto o pictórico.

Para poder resolver este problema, se plantea un objetivo general y cuatro objetivos específicos, los cuáles, además, son redactados en forma de pregunta para facilitar la puesta en práctica de este proyecto.

Objetivo general: Evaluar la influencia del uso del material concreto en el aprendizaje del algoritmo de la división en un estudiante con dificultades de aprendizaje en matemática.

¿Cómo influye el uso de material concreto en el aprendizaje del algoritmo de la división en un estudiante con dificultades de aprendizaje en matemática?

Objetivos específicos:

- Generar una propuesta de trabajo para enseñar el algoritmo estándar de la división con material concreto.

  ¿Qué propuesta se podría implementar para enseñar el algoritmo estándar de la división mediado por el uso del material concreto?

- Identificar las dificultades de aprendizaje que tiene el estudiante de este estudio en la comprensión del algoritmo estándar de la división.

  ¿Cuáles son las dificultades de aprendizaje del algoritmo estándar de la división que tiene el estudiante?

- Identificar las dificultades de aprendizaje que tiene el estudiante de este estudio en la comprensión del algoritmo estándar de la división posterior a la implementación de la propuesta con material concreto.

  ¿Cuáles son las dificultades de aprendizaje del algoritmo estándar de la división que tiene el estudiante posterior al uso del material concreto?

- Analizar la comprensión del algoritmo de la división posterior a la implementación de la propuesta mediada por el uso del material concreto.

  ¿Cuáles son las dificultades que persisten y cuáles desaparecen al usar material concreto en el aprendizaje del algoritmo estándar de la división en el estudiante?

4. Marco teórico

El marco teórico que se presenta a continuación permite explicitar aquello que la literatura ha reportado y que fundamenta el problema de este estudio. Este apartado se ha dividido en tres grandes temáticas que se han desprendido del objetivo general, que son: las dificultades de aprendizaje, el algoritmo de la división y el material concreto como una forma de representar.

En el apartado de las dificultades de aprendizaje, se hace necesario definir una postura teórica sobre cómo mirar las dificultades de aprendizaje en general, y así poder dilucidar si se está hablando de una dificultad o de un estilo de aprendizaje diferente y además, aclarar y diferenciar conceptos como dificultades, obstáculos y errores, que generalmente se confunden.

Luego, en el apartado del algoritmo de la división, se definirá lo que es un algoritmo, se presentarán otros algoritmos de la división existentes y específicamente se describirá el algoritmo estándar de la división. Para finalizar este apartado, se detallarán algunas dificultades de aprendizaje en el algoritmo estándar de la división que la literatura reporta y se explicará por qué se producen.

Por último, se presenta la temática del material concreto como una forma de representar, ya que unirá las dos temáticas anteriores. Pero se hace necesario enmarcar el uso de material concreto como un medio de representación de conceptos. Por tanto, se iniciará este apartado explicando la importancia de esta habilidad, y cómo el material concreto permite a los estudiantes representar conceptos o procedimientos matemáticos, para luego al trabajar en una representación simbólica, como lo es un algoritmo, se trabaje desde la comprensión. Por último, se presentarán algunos materiales concretos, vinculándolos al algoritmo de la división, evidenciando las ventajas y desventajas de cada uno de ellos.

4.1. Dificultades de aprendizaje

Las dificultades de aprendizaje pueden ser interpretadas, principalmente, bajo dos modelos: el biomédico o el social. El primero de ellos tiene un enfoque médico, como su nombre lo indica, por tanto es la persona quien es diagnosticada con una dificultad o problema y se buscan alternativas para minimizar o mejorar dicha dificultad. El Modelo Biomédico etiqueta a la persona, es decir, se le otorgan características, necesidades, dificultades y experiencias, es un sujeto al que se le otorga su propia identidad a partir de un diagnóstico, donde se determina un déficit o una enfermedad.

Bajo este enfoque se promueve la integración de los estudiantes con dificultades de aprendizaje a las escuelas regulares, estableciendo diferentes tipos de interacción con sus pares, dependiendo del grado de dificultad que se presente. Pero de todas formas se sigue observando exclusión, ya que se hacen diferencias con algunos estudiantes, se les aparta de determinadas experiencias, si estos, no son capaces de adaptarse a la norma que se presenta en cada sala de clases.

Por otro lado, el modelo social, concibe las dificultades de aprendizaje como una causa de las decisiones que la sociedad ha tomado, por tanto, es la sociedad la que debe tomar medidas o mejorar para que todas las personas puedan poner en despliegue sus capacidades y habilidades.

Por su forma de entender las dificultades de aprendizaje, es desde este último modelo de donde se trabajará en esta investigación. A continuación se presenta una síntesis del modelo social y para ello, se dará respuesta a las siguientes preguntas:

- ¿Quién tiene la dificultad o problema?
- ¿Quién lee a quién?, es decir, ¿quién tiene el poder?
- ¿Cuál es la propuesta para el proceso de enseñanza-aprendizaje?

Y luego se define el concepto de trastorno de aprendizaje, muy usado al hablar de estudiantes con dificultades de aprendizaje, pero se cuestiona si no es mejor referirse a estilos de aprendizaje diferentes, especialmente en el área de matemática. Para finalizar se profundiza en los conceptos de error y obstáculo, que en ocasiones se confunden, pero apuntan a aspectos diferentes.

4.1.1. Modelo social

> *"Una incapacidad para caminar es una deficiencia, mientras que una incapacidad para entrar a un edificio debido a que la entrada consiste en una serie de escalones es una discapacidad"*. (Jenny Morris, cantante)

El Modelo Social tiene dos presupuestos fundamentales como menciona Palacios (2008), primero, las causas que originan la discapacidad son sociales y segundo, las personas con discapacidad tienen mucho que aportar a la sociedad.

A partir de dichos presupuestos, se puede responder la pregunta: ¿quién tiene la dificultad o problema? Lo primero es comprender el cambio del concepto de discapacidad, que ahora es definido como las restricciones sociales que se experimentan y cuando se está aludiendo a condiciones del cuerpo o la mente se habla de deficiencia. “El modelo social redefine la rehabilitación o normalización, estableciendo que éstas deben tener como objeto el cambio en la sociedad, y no de las personas”. (Palacios, 2008, p.124) Es decir, la sociedad tiene un problema y no ha sido capaz de modificar su estructura para que exista el respeto a la diversidad, considerando que cada persona tiene el mismo valor y es igualmente digna.

El poder en este modelo (¿Quién lee a quién?, es decir, ¿quién tiene el poder?) se le da a la sociedad donde al valorar la diferencia, nadie quedará excluido y todos podemos ser aceptados y tratados a partir de nuestras particularidades, adaptándose las instituciones a las diversas necesidades de cada persona.

Sobre la tercera pregunta (¿Cuál es la propuesta para el proceso de enseñanza-aprendizaje?), la educación es concebida como inclusiva, donde “se promueve la idea de adaptación curricular al alumno en función de su ritmo de aprendizaje, sin que ello suponga la exclusión del grupo”. (Palacios, 2008, p.130) En nuestro país, está instalado el discurso de la inclusión en las escuelas, pero aún no se ha podido generar un cambio conceptual en las personas, por tanto, nos encontramos entrampados en el choque discursivo - práctico.

4.1.2. ¿Trastornos de aprendizaje o estilos de aprendizaje?

En la década de los 60’ se comenzó a utilizar el concepto de trastornos del aprendizaje en Estados Unidos propuesto por Samuel Kirk.

> Como categoría conceptual, pretendía englobar una serie de denominaciones en uso en diferentes estados que aludían a niños que –sin presentar retardo mental ni otras condiciones discapacitantes ya consideradas en la legislación para la asignación de recursos destinados a su tratamiento en el ámbito de la educación especial- experimentaban serias dificultades o problemas en su progreso académico. (Bermeosolo, 2011, p.198)

El uso de este concepto de trastornos de aprendizaje trajo consigo que los docentes comenzaran a enviar fuera de la sala de clases a los estudiantes que no fueran capaces de rendir como se esperaba, destinándolos a trabajar con diferentes especialistas que pudieran remediar esta situación. Generalmente, se atribuyen las dificultades en el aprendizaje “a problemas emocionales o a discapacidad del sujeto, sin tener en cuenta otras posibilidades como que el sujeto puede no aprender por falta de oportunidades de utilizar su propio estilo de aprendizaje en clase”. (Jiménez & Aguado, 2005, p.371)

Hoy en día existe un bajo cuestionamiento sobre los docentes y las metodologías de enseñanza y aprendizaje que se imparten y que pueden estar provocando que los estudiantes no tengan la oportunidad de desplegar sus propias capacidades. Además, como propone Oliver (2003) “existe una tendencia en la institución escolar a convertir las diferencias en desigualdades”. (Oliver, 2003, p.73) ¿Qué se quiere decir con esto?, ¿a qué se alude cuando se habla de diferencias y a qué se alude cuando se habla de desigualdades?

Se considera como “diferencias aquellos rasgos personales de índole física y psicológica, así como los de índole social que tienen clara expresión en el ámbito escolar y que suponen un hecho omnipresente, relevante y significativo para el aprendizaje del alumno”. (Oliver, 2003, p.73) Son las características propias de cada estudiante y de cada persona que se entremezclan permitiendo su aprendizaje, es pensar en frases como “yo aprendo de forma visual por eso uso muchos colores”, “yo no puedo estudiar escuchando música, tiene que haber completo silencio”, las que entrelineas comunican que todos nos acomodamos a distintas estrategias y formas para lograr de una forma propia el aprendizaje.

Por otro lado, se considera como “desigualdad aquellas diferencias personales que, al pasar por el tamiz de la norma escolar, se convierten en desventajas, en falta de oportunidades de promoción y desarrollo personal, ya que quedan fuera del marco de excelencia que la propia institución se marca”. (Oliver, 2003, p.73) Siguiendo los ejemplos antes mencionados, si no logra un estudiante concentrarse con música, menos lo logrará cuando hay 40 estudiantes en su entorno moviéndose, conversando, interactuando, un docente que eleva la voz para poder comunicarse, entre otros factores. O si un estudiante necesita estímulos visuales, y la estrategia utilizada preponderantemente en las clases es el dictado de ideas o el trabajo de una innumerable cantidad de ejercicios, no se podrá lograr un aprendizaje expedito, lo que incide en los resultados obtenidos por los estudiantes, por tanto, se presentan desigualdades que provoca la norma del colegio.

¿Es por tanto, un trastorno de aprendizaje específico o es un estilo de aprendizaje particular?, entendiendo que

> estilo de aprendizaje es un patrón de conducta y realización consistente mediante el cual el individuo se aproxima a una tarea o experiencia educativa. En los estilos de aprendizaje se incluyen conductas cognitivas, afectivas y fisiológicas que sirven para indicar de manera estable cómo actúa el aprendizaje y cómo responde el sujeto a entornos de aprendizaje. (Jiménez & Aguado, 2005, p.371)

Cada persona tiene su propio estilo de aprendizaje, hasta el mismo docente el cual pretenderá de forma inconsciente que sus estudiantes aprendan de la misma forma que él aprendió. Por tanto, un desafío es que el docente en primer lugar descubra su estilo de aprendizaje, lo haga consciente e intente buscar formas de enseñar que respondan también a otros estilos de aprendizaje.

Finalmente, "la inclusión es un proceso que lleva a los centros a intentar responder a todos los alumnos reconsiderando su organización, currículum y servicios" (Oliver, 2003, p.71), lo cual es un gran desafío ya que propone cambios no solo a nivel de aula, sino a nivel macro, donde se concibe el proceso de enseñanza y aprendizaje desde una perspectiva completamente diferente a la que actualmente se practica.

4.1.3. ¿Qué son las dificultades de aprendizaje en matemática?

> En los últimos años, se ha considerado que el aprendizaje no es el mismo en cualquier ámbito, se ha planteado la construcción y la representación de conocimientos en dominios específicos, de tal manera que se reconoce que hay una forma de aprender la lectura, la escritura, las matemáticas, las ciencias y por lo tanto cada uno de estos dominios tiene dificultades particulares. (Mateos, 2008, p.194)

La matemática en general ha sido considerada como una asignatura no sólo difícil de aprender, sino también de enseñar. ¿Pero por qué? Una respuesta se puede obtener de un conocido informe que se publicó a mediados de los años 80 denominado "Las Matemáticas si cuentan. Informe Cockcroft", el cual sigue siendo un referente vigente en el área de la Didáctica de la Matemática. En ese informe, las razones que se mencionan para considerar la matemática como una asignatura difícil de aprender y enseñar se relacionan con "las 'demandas' cognitivas, su carácter fuertemente jerárquico que hace depender lo nuevo de lo previamente conocido, su exigencia de una práctica continuada, las dificultades de comprensión y memoria que plantean a muchas personas, etc." (Rivière, 1990, p.171). Es decir, hay características de la disciplina que pueden generar dificultades, pero se extreman en algunas personas o estudiantes, y es en esos casos cuando se habla de dificultades específicas de aprendizaje en matemática.

Una definición de dificultades específicas de aprendizaje, puede ser la siguiente:

> presentan LD (learning disabilities o dificultades específicas de aprendizaje) aquellos alumnos que, a pesar de mostrar una inteligencia normal (por ejemplo, un CI superior a 80 o 90) y no tener problemas emocionales graves ni deficiencias sensoriales (ceguera, sordera, etc.) tienen un rendimiento escolar pobre (pongamos dos años inferior al que corresponde a su edad) definido operacionalmente por bajas puntuaciones en pruebas de rendimiento y naturalmente por las calificaciones escolares. (Rivière, 1990, p.159)

Pero, actualmente, existen varias críticas que apuntan a las causas que generan estas dificultades. Específicamente, sobre las dificultades de aprendizaje en matemática (DAM), los estudios "son escasos y las investigaciones rigurosas lo son más aún. El análisis de las dificultades matemáticas se basan frecuentemente en conceptos muy discutidos y de dudosa consistencia" (Rivière, 1990, p.159). Por tanto, aún no hay pruebas o estudios suficientes para, por ejemplo, vincular las DAM con disfunción cerebral o trastornos neurológicos. Existen varios autores que apoyan esto, por ejemplo Coles (1978) y, también "Yule y Rutter (1985) han destacado la escasez y debilidad metodológica de los estudios sobre discalculia, así como el peligro de atribuir a los niños con DAM supuestos trastornos neurológicos sin una base suficiente". (Rivière, 1990, p.160)

Los niños con DAM se pueden agrupar en dos: los que tienen dificultades en matemática porque arrastran un problema más general como lo es la comprensión lectora, y aquellos que no tienen problemas de comprensión lectora. Esta agrupación en dos de los niños con DAM es propuesta por Fernández Baroja et. al. (1979), Rourke y Strang (1983) y Siegel y Heaven (1986). Pero el segundo grupo es descrito por Kinsbourne y Warrington (1986) y por Kose (1974) como estudiantes que "sus bajos rendimientos en pruebas de aritmética suelen acompañarse de: 1. Problemas de memoria a corto plazo, 2. Dificultades de coordinación óculo – manual, 3. Lentitud en los trabajos escritos". (Rivière, 1990, p.161)

Actualmente toma fuerza la perspectiva cognitiva de entender las dificultades de aprendizaje en matemática, en confrontación a las perspectivas más tradicionales que relacionaban las DAM con disfunciones cerebrales mínimas y diagnosticaban discalculias. Este cambio de perspectiva se puede explicar principalmente por dos razones:

1. "El enfoque cognitivo no etiqueta al niño, sino más bien categoriza los procesos que realiza y los errores que comete. […] trata de comprender y explicar lo que hace: los procesos y estrategias que emplea cuando asimila conceptos matemáticos". (Rivière, 1990, p.162)

2. "El enfoque cognitivo es neutral con relación a la "etiología – última" de las DAM. […] El enfoque cognitivo puede ayudar a precisar la naturaleza fina de las funciones mentales que no van bien en los niños con DAM favoreciendo así la búsqueda de las causas, pero no las establece por sí mismo". (Rivière, 1990, p.162)

Esta perspectiva estaría acorde a la mirada social que se le dan a las dificultades de aprendizaje. Y profundizando más, el enfoque cognitivo,

> se centra en cómo funciona mentalmente cada niño al hacer matemáticas, estableciendo una relación profunda entre los errores y los procesos normales de aprendizaje y adquisición del conocimiento. Al centrarse en los errores, se puede aplicar a todos los alumnos (a diferencia del concepto de discalculia o disfunción cerebral), ya que son considerados como seres activos frente al desarrollo del conocimiento. (Rivière, 1990, p.164)

Sin dejar de considerar en los errores que cometan los estudiantes la influencia que pueden tener los procesos mentales mencionados anteriormente, como la memoria a corto plazo, la atención, o dificultades de coordinación óculo – manual.

4.1.4. Obstáculos y errores: relaciones conceptuales

En el enfoque cognitivo de las DAM toman gran relevancia los errores que se generan en el proceso educativo, ya que permiten dilucidar el proceso que está realizando el estudiante. Pero es importante diferenciar lo que es un error de lo que es un obstáculo epistemológico, propuesto por Gastón Bachelard, que en ocasiones tienden a confundirse.

> Los obstáculos epistemológicos son todos aquellos entorpecimientos y confusiones que se experimentan durante el acto de conocer. Estos obstáculos tienen un fuerte componente psicológico, manifestación del dominio de un espíritu conservativo por sobre un espíritu formativo: el conocimiento proporciona una sensación de bienestar, de poder sobre la

> naturaleza y las cosas. Reconocer que lo que se creía saber en realidad era erróneo provoca en la persona inseguridades y conflictos. (Zunini, 2007, p.29)

Bachelard menciona variados tipos de obstáculos epistemológicos, por ejemplo, el obstáculo verbal, que puede generar un docente al utilizar una metáfora para facilitar el acceso a un concepto complejo por parte de los estudiantes. Pero la imagen mental de la metáfora es tan fuerte en el estudiante, porque fue así cómo accedió al concepto, que termina por reemplazar al problema en cuestión, generando limitaciones futuras, ya que "[…] el obstáculo no desaparece con el aprendizaje de un nuevo conocimiento. Por el contrario, opone resistencia a su adquisición, a su comprensión, frena su aplicación, subsiste en estado latente y reaparece de forma imprevista, en especial en su ámbito anterior, cuando las circunstancias lo permiten". (Brousseau, 2007, p.46)

Un obstáculo se vincula con errores, porque el primero se manifiesta a través de los segundos. "[…] pero esos errores en un mismo sujeto están unidos entre sí por una fuente común: una manera de conocer, una concepción característica, coherente aunque no correcta, un "conocimiento" anterior que tuvo éxito en todo un dominio de acciones" (Brousseau, 2007, p.45). Es por ello que generan resistencia en el estudiante, y superar un obstáculo es difícil, ya que se debe reconocer que aunque un conocimiento en un dominio funcionaba, en otros no, por tanto, se debe aprender de una forma diferente.

Por otro lado, los errores "[…] no indican una simple deficiencia del conocimiento. Los errores pueden revelar que el conocimiento le ha planteado al alumno un problema y también la forma como trata de abordarlo" (Mateos, 2008, p.197). Porque a diferencia de un computador, los niños intentan siempre dar una respuesta a los problemas que encuentran, y es en esa respuesta donde los errores evidencian la lógica seguida por el estudiante. El enfoque cognitivo nos ayuda a entender un principio fundamental: que "frecuentemente los errores no son ilógicos, sino que responden a la aplicación de ciertas reglas que, aunque no sean correctas, implican en sí mismas la posesión de una determinada competencia lógico – matemática". (Rivière, 1990, p.165)

Desde la perspectiva cognitiva, los errores en matemáticas podrían tener dos explicaciones principales:

1. Los requisitos (del contenido) podrían ser excesivos en cuanto a la carga de memoria de trabajo que exigen. […]

2. Los algoritmos correctos presuponen una base de conocimientos: no se montan en el vacío. Quizá los algoritmos incorrectos sean una indicación de que el alumno no posee tales conocimientos, por lo que en realidad no comprende. (Rivière, 1990, p.168)

Si frente a un error, por ejemplo, en el algoritmo de la división, el docente lo enfrenta diciendo "'Debes ejercitar más las divisiones' o bien 'Debes prestar más atención'…; estos errores se constituyen en obstáculos que impiden el aprendizaje, obstáculos que no se levantan solamente con más atención ni con más ejercitación". (Parra y Saiz, 1994, p.215)

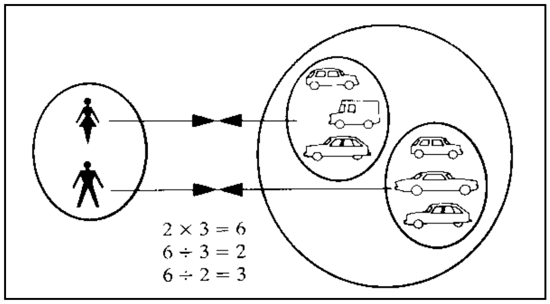
4.2. Aprendizaje y enseñanza del algoritmo de la división

La división es una de las cuatro operaciones matemáticas básicas que se enseñan durante los primeros años de escolaridad. Y una de las dificultades que encuentran los estudiantes es que una división puede representar dos situaciones diferentes:

> Por una parte, está la idea de repartir equitativamente una cantidad de objetos entre varias personas o recipientes: si tenemos 18 manzanas y las queremos repartir entre 6 personas, ¿cuántas recibe cada una? Por otra parte, está la idea de calcular cuántos recipientes se necesitan para repartir una cantidad: si tenemos 18 manzanas y queremos repartir 3 a cada persona, ¿para cuántas personas alcanza? (Lewin et al., 2013, p.160)

La adición y la sustracción generan menores dificultades en los estudiantes, ya que trabajan con conjuntos y acciones que son fáciles de representar. Pero en la multiplicación y la división, "no sólo suele suceder que los objetos de los dos conjuntos son de tipos diferentes sino que en cada caso es preciso asociar cada uno de los elementos de uno de los conjuntos con un subconjunto equivalente del otro". (Dickson et al., 1991, p.250)

Por ejemplo, en la siguiente figura, hay dos conjuntos con elementos diferentes, en el primero personas y en el segundo autos. Y cada persona del primer conjunto se asocia con tres autos del segundo conjunto. Es importante observar que el segundo conjunto es dividido en dos partes o subconjuntos equivalentes.



Profundizando en la división, en este diagrama, además, se observan las dos interpretaciones de la dicha operación: repartir y agrupar. Repartir 6 autos en 2 grupos (6 : 2) y se obtienen 3 autos por grupos. Y agrupar 6 autos en subgrupos de 3 hasta extinguir la colección disponible (6 : 3), donde se obtiene 2 grupos, cada uno asociado a una persona.

Teniendo en consideración la dificultad de que la división puede tener dos interpretaciones, además, el estudiante debe llegar a trabajar con un algoritmo, pero el problema está en que "se ha cargado mucho el acento, y sigue cargándose, en que los niños adquieran destreza y soltura en las rutinas del cálculo por escrito, independiente de si comprenden o no los fundamentos de tales técnicas". (Dickson et al., 1991, p.270)

4.2.1. ¿Qué es un algoritmo?

Krimitski (1978) nos dice que "un algoritmo es una prescripción – una orden o un sistema de órdenes – que determina el encadenamiento de operaciones elementales que permiten obtener, a partir de los datos iniciales, el resultado que se busca". (Castro et al., 2007, p.127) Un algoritmo puede entenderse como una secuencia de pasos establecidos, uno tras otro, sin alteración, que permiten resolver cualquier operatoria, en este caso, cualquier división.

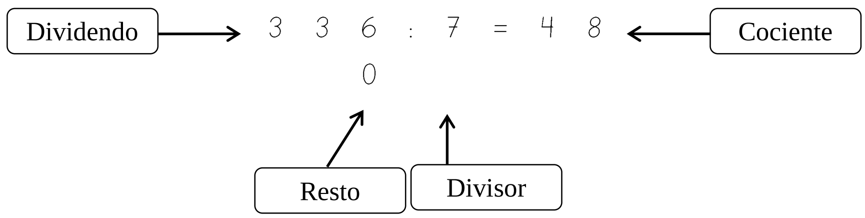
Además, un algoritmo de cálculo cumple con tres propiedades:

- Nitidez: la realización de un algoritmo es un proceso mecánico.
- Eficacia: conduce a la obtención del resultado buscado mediante un número finito de pasos suficientemente simples.
- Universalidad: es aplicable a todos los cálculos de una misma clase.

(Gairín & Sancho, 2002, p.82)

4.2.2. ¿Qué otros algoritmos de la división se conocen?

Antes de continuar, es preciso mencionar que en este estudio se considerará la expresión de una división a nivel simbólico como la utilizada en Chile, que es como la que se presenta a continuación: de izquierda a derecha, dividendo, divisor y cociente, y donde el resto se escribe debajo del dividendo.



Para una misma operación existen varios algoritmos, que pueden tener aspectos positivos y también negativos. En general, los primero algoritmos tienden a ser más intuitivos y transparentes, por tanto, son más demorosos y menos eficientes. A medida que el aprendizaje se acerca al algoritmo estándar o tradicional, los algoritmos son menos transparentes pero más eficientes. “Los niños de hoy inventan los mismos tipos de procedimientos que inventaron nuestros antepasados y necesitan pasar por un proceso similar de construcción para llegar a ser capaces de comprender los algoritmos de los adultos”. (Kamii, 1994, p.47) Para ello, se necesitan diversas experiencias y oportunidades de aprendizaje, además de tiempo, recurso que siempre es escaso en las salas de clases, por lo que se tiende a llegar rápidamente al algoritmo estándar. Sin embargo, “un solo algoritmo de cálculo no agota todas las perspectivas de la operación a que se refiere; antes bien, cada nuevo algoritmo ayuda a establecer nuevos aspectos conceptuales”. (Gairín & Sancho, 2002, p.85)

Cuando un algoritmo es enseñado sin establecer comprensión, se está promoviendo “pasividad cognitiva; es decir, es improbable que el niño se detenga a reflexionar en el cómo y el porqué del funcionamiento de un determinado procedimiento si es esa la única opción que tiene disponible”. (Dickson et al., 1991, p.273) Es por ello, la importancia que adquiere que los algoritmos sean enseñados a partir de la necesidad de los estudiantes cuando desarrollan tareas matemáticas y sean variados, para que el estudiante pueda compararlos, establecer relaciones y comprender realmente cómo funcionan.

A continuación, se presentan algunos algoritmos de la división que pueden ser utilizados en la sala de clases, previo al algoritmo estándar.

Algoritmo de la relación inversa entre la multiplicación y la división

Se utiliza principalmente cuando los estudiantes están recién comprendiendo el concepto de división, y apunta a responder a la pregunta: ¿qué número al multiplicarlo por el (divisor) da como resultado el (dividendo)?

Por ejemplo,

$$45 : 5$$

¿Qué número multiplicado por 5 da como resultado 45?

Como $5 \cdot 9 = 45$, la respuesta es 9.

En este algoritmo, se utilizan, principalmente, las combinaciones multiplicativas básicas (CMB) o tablas de multiplicar hasta 10.

Algoritmo de sustracciones reiteradas

Este algoritmo se utiliza de manera inicial, cuando el dividendo y el divisor pertenecen a un rango pequeño y el resto es igual a 0. Además, se asocia a la idea de agrupamiento, que es una de las dos situaciones con las que se puede asociar una división (agrupamiento y reparto), ya que la cantidad de elementos de cada grupo está determinada.

Por ejemplo,

$21 : 7$

$21 - 7 = 14$ ← 1° sustracción

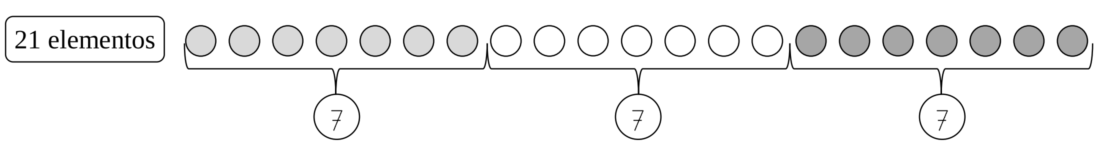
$14 - 7 = 7$ ← 2° sustracción

$7 - 7 = 0$ ← 3° sustracción

Cada grupo tiene 7 elementos.

Como se restó 3 veces 7 de 21 hasta llegar a 0, la respuesta es 3.

De forma gráfica, se puede representar como:



Donde se puede observar que si a 21 se le resta 7, es necesario realizar 3 veces esta acción para que no se pueda seguir realizando la operación.

Algoritmo de descomposición aditiva del dividendo

Consiste en descomponer aditivamente el dividendo de forma conveniente, es decir, que cada sumando sea múltiplo del divisor. De esta forma se puede aplicar la propiedad distributiva: cada sumando en que se descompuso el dividendo es dividido por el divisor.

Por ejemplo,

$$
\begin{gathered}
46 : 2 \\
(20 + 20 + 6) : 2 \\
(20 : 2) + (20 : 2) + (6 : 2) \\
10 + 10 + 3 \\
23
\end{gathered}
$$

Para obtener el resultado se realiza la suma de los cocientes parciales. En el ejemplo anterior, los cocientes parciales son 10, 10 y 3, y al realizar la suma de estos, se obtiene el cociente de la división inicial.

Algoritmo realizando estimaciones

El siguiente algoritmo, se asocia a la situación de reparto y se explicará a partir de un ejemplo.

Pensemos que tenemos 341 dulces y queremos repartirlos equitativamente entre 7 niños. Repartamos 10 dulces a cada niño.

$$
\begin{array}{rrrr}
 & 3 & 4 & 1 : 7 = 10 \\
- & & 7 & 0 \\
\hline
 & 2 & 7 & 1
\end{array}
$$

Repartamos ahora 20 dulces más a cada niño:

$$
\begin{array}{rrrr}
 & 3 & 4 & 1 : 7 = 10 + 20 \\
- & & 7 & 0 \\
\hline
 & 2 & 7 & 1 \\
- & 1 & 4 & 0 \\
\hline
 & 1 & 3 & 1
\end{array}
$$

Como nos quedan 131 dulces, no podemos repartir 20 dulces nuevamente a cada niño, entonces probemos con 15:

$$\begin{array}{rrrrl}
 & 3 & 4 & 1 & : 7 = 10 + 20 + 15 \\
- & & 7 & 0 & \\
\cline{2-4}
 & 2 & 7 & 1 & \\
- & 1 & 4 & 0 & \\
\cline{2-4}
 & 1 & 3 & 1 & \\
- & 1 & 0 & 5 & \\
\cline{2-4}
 & & 2 & 6 &
\end{array}$$

Aún quedan 26 por repartir, por lo que podemos entregar 3 dulces más a cada niño. De esta forma, se tiene:

$$\begin{array}{rrrrl}
 & 3 & 4 & 1 & : 7 = 10 + 20 + 15 + 3 = 48 \\
- & & 7 & 0 & \\
\cline{2-4}
 & 2 & 7 & 1 & \\
- & 1 & 4 & 0 & \\
\cline{2-4}
 & 1 & 3 & 1 & \\
- & 1 & 0 & 5 & \\
\cline{2-4}
 & & 2 & 6 & \\
- & & 2 & 1 & \\
\cline{3-4}
 & & & 5 &
\end{array}$$

Así, cada niño recibió $10 + 20 + 15 + 3 = 48$ dulces, y quedaron 5 dulces sin repartir. (Lewin et al., 2013, p.169)

Algoritmo utilizando productos entre potencias de 10 y el divisor (de un dígito)

Podemos hacer más eficiente el proceso anterior buscando los productos entre 7 y las potencias de 10. Si repartiéramos 100 dulces a cada niño, utilizaríamos $7 \cdot 100 = 700$ dulces, es decir, más de los que queremos repartir. Consideremos entonces 7 por los múltiplos de 10, es decir, por 10, 20, 30, 40, 50… Así, se tiene que $7 \cdot 40 = 280$ es el múltiplo menor más cercano a la cantidad que se quiere repartir, pues $7 \cdot 50 = 350$. Entonces se tiene que:

$$\begin{array}{rrrrl}
 & 3 & 4 & 1 & : 7 = 40 \\
- & 2 & 8 & 0 & \\
\cline{2-4}
 & & 6 & 1 &
\end{array}$$

Consideremos ahora las combinaciones multiplicativas básicas relacionadas con 7. Como $7 \cdot 8 = 56$, entonces se pueden repartir 8 dulces más a cada niño, de tal forma que:

$$\begin{array}{rrrrl} & 3 & 4 & 1 & : 7 = 40 + 8 = 48 \\ - & 2 & 8 & 0 & \\ \cline{2-4} & & 6 & 1 & \\ - & & 5 & 6 & \\ \cline{2-4} & & & 5 & \end{array}$$

(Lewin et al., 2013, p.170)

Algoritmo eligiendo astutamente los cocientes parciales

Al resolver 745 : 21, se considera primero los productos de 21 con el máximo múltiplo de 10, que no exceda al dividendo. Se resta $21 \cdot 30 = 630$, ya que $21 \cdot 40 = 840$ es mayor que 745. Luego quedan 115. Se elige la mayor unidad que multiplicada por 21 no exceda a 115, es decir 5:

$$\begin{array}{rrrrl} & 7 & 4 & 5 & : 21 = 30 + 5 = 35 \\ - & 6 & 3 & 0 & \\ \cline{2-4} & 1 & 1 & 5 & \\ - & 1 & 0 & 5 & \\ \cline{2-4} & & 1 & 0 & \end{array}$$

(Lewin et al., 2013, p.172)

Algoritmo sustractivo o extendido

Es muy similar al algoritmo estándar, pero las sustracciones parciales van quedando registradas. Por ejemplo,

$$\begin{array}{rrrrl} & 3 & 4' & 1 & : 7 = 48 \\ - & 2 & 8 & & \\ \cline{2-3} & & 6 & 1 & \\ - & & 5 & 6 & \\ \cline{3-4} & & & 5 & \end{array}$$

La comilla que se usa para marcar el dividendo no es otra cosa que escribir $341 = 340 + 1$ y decir: “Tenemos 34 decenas que debemos dividir por 7”. Observemos que al poner la comilla hemos determinado la descomposición adecuada del dividendo, pero esto queda oculto en el algoritmo, y nunca se explicita que estamos dividiendo 34 decenas por 7, solo decimos 34 dividido 7 es 4 y sobran 6. Pero este 4 es en realidad 4 decenas y el 6 corresponde, también, a 6 decenas. (Lewin et al., 2013, p.171)

En mayor o menor medida los algoritmos anteriores son menos eficientes que el algoritmo estándar que se utiliza hoy en día, pero "permiten que una persona exteriorice su razonamiento paso a paso" (Kamii, 1994, p.42). Al exteriorizarse cada paso del algoritmo, se transforma en un algoritmo transparente, que permite a los estudiantes comprender lo que está sucediendo y no sólo repetir de memoria pasos sin sentido, como el de utilizar comillas en el dividendo o "bajar un número".

4.2.3. ¿Cuál es el algoritmo estándar de la división?

El algoritmo estándar de la división es el algoritmo menos transparente de todos, pero es el más eficiente, es por ello que tiene un lugar importante en las salas de clases, donde se busca que los estudiantes sean capaces de utilizarlo por la economía en el cálculo y tiempo que conlleva. Si bien, no se desconocen estos beneficios, es importante que se tengan algunos aspectos en consideración al momento de ser enseñado.

Para representarlo, se resolverá la división $584 : 13$, paso a paso, según el algoritmo estándar de la división:

Tabla 2: Pasos del algoritmo estándar de la división

Paso 1	5 8' 4 : 1 3 = 4	Se utilizan los dígitos del dividendo de izquierda a derecha, como 5 es menor que 13, se considera 58 y se marca con una comilla. Además, el 13 está contenido 4 veces en 58.
Paso 2	5 8' 4 : 1 3 = 4 6	Se multiplica 4 por 13 ($4 \cdot 13 = 52$) y el resultado se resta de 58 ($58 - 52 = 6$). El resultado de esta sustracción es el que se registra en la operación.
Paso 3	5 8' 4' : 1 3 = 4 6 4	Se continúa con el siguiente dígito del dividendo, se marca con una comilla y se reescribe al lado del resultado del paso anterior.
Paso 4	5 8' 4 : 1 3 = 4 4 6 4	El 13 está contenido 4 veces en 64.

Paso 5	5 8' 4 : 1 3 = 4 4 6 4 1 2	Se multiplica 4 por 13 ($4 \cdot 13 = 52$) y el resultado se resta de 64 ($64 - 52 = 12$). El resultado de esta sustracción es el que se registra en la operación.
Paso 6	5 8' 4 : 1 3 = 4 4 6 4 1 2 //	Como no hay más dígitos en el dividendo, y el resto es menor que el divisor, se finaliza la división. En ocasiones se agregan // para dar por finalizada la resolución.

El resultado de 584 : 13 es 44 y el resto es 12.

Este algoritmo no evidencia las sustracciones parciales que se realizan lo que permite que el dividendo se considere, erróneamente, como la unión de dígitos independientes, sin considerar su valor posicional.

4.2.4. ¿Qué dificultades de aprendizaje hay en el algoritmo de la división?

La división es la última de las cuatro operaciones que generalmente se trabaja en la sala de clases. Y su principal dificultad para los estudiantes está en que el divisor representa un doble papel: "número de partes en las que se divide la cantidad inicial o bien cantidad fija que sirve para ir formando las diferentes partes en las que se divide la cantidad total" (Castro et al., 2007, p.148). Pero a diferencia del aprendizaje del algoritmo estándar, "los casos simples de división resultan sencillos y los diferentes modelos llegan a manejarse con soltura. La dificultad real de la división aparece en la mecanización de su algoritmo". (Castro et al., 2007, p.148)

De todos modos, la división como operación puede presentar algunas dificultades, como las que se enuncian a continuación, citadas por J. Martínez (2010):

1. Suelen emplearse como sinónimos reparto y división. Sin embargo, no es así. Repartir es dividir cuando se trata de reparto en partes iguales. Pero la mayor parte de los repartos que conoce el niño (y el adulto) son repartos desiguales.

2. En la división, el resultado que se obtiene no es el resultado, sino una parte del mismo. Al ser las partes restantes iguales, no es preciso repetirlas. El resultado de dividir 8 manzanas

entre 4 niños no es 2, sino 2, 2, 2 y 2. […] La suma, resta y multiplicación reflejan en su resultado la totalidad del cálculo.

3. En todas las operaciones, si se sigue el algoritmo tradicional, se comienza a calcular por la derecha y se sigue la dirección derecha-izquierda. En la división, también siguiendo el enfoque tradicional, ocurre al contrario: se empieza por la primera cifra de la izquierda y se sigue la dirección izquierda-derecha.

4. En las operaciones anteriores que ha efectuado el niño, no tenía que hacer ningún tipo de transformación de los datos […] En la división va reajustando permanentemente el dividendo en función de los cálculos que hace.

(Martínez, 2010, p.365)

El algoritmo estándar aparece rápidamente en la sala de clases, incluso, hay ocasiones en que es el único algoritmo que se enseña, por tanto, los estudiantes no trabajan procedimientos más primitivos pero más transparentes que les permitan comprender la lógica que este sigue. "Los alumnos no tienen clara la relación entre este algoritmo de resolución y otros más simples […] que podrían ser usados como control. El único recurso de control a disposición de los alumnos es "creer" que es así como se ejecuta el algoritmo". (Parra & Saiz, 1994, p.214)

El algoritmo estándar presenta diversas dificultades a los estudiantes, pero las principales son tres:

1. <u>La propiedad distributiva y el sistema decimal</u>

El algoritmo clásico de la división resulta de una aplicación inicial de la propiedad distributiva de la división respecto de la suma y de un empleo sistemático del sistema decimal de numeración. Así, la operación $458 : 4$ se realiza teniendo en cuenta que:

$$(400 + 50 + 8) : 4 = 400 : 4 + 50 : 4 + 8 : 4$$

En el algoritmo estándar la propiedad distributiva no es evidente, y en general, los estudiantes consideran que están dividiendo $4 : 4$, $5 : 4$ y $8 : 4$, es decir, el dividendo está formado por 3 cifras independientes a las cuales se les anula su valor posicional.

Un caso más particular es cuando “los dígitos [del dividendo] son iguales al divisor, un error es dividir cada dígito por separado sin considerar el valor posicional. Por ejemplo:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 1 & 2 & : & 1 & 2 & = & 1 & 1 \\ & 0 & & & & & & & & \end{array}$$

Este error se produce generalmente cuando se tiene una noción de los números como yuxtaposición de dígitos, sin considerar que la posición que ocupa el dígito determina un valor”. (Lewin et al., 2013, p.176)

2. <u>Tamaño relativo de la primera cifra del dividendo y el divisor</u>

Cuando el divisor es de una cifra, se pueden distinguir hasta tres casos diferentes: Que la cifra de mayor valor posicional del dividendo sea menor que el divisor (236 : 4), que sea igual (436 : 4) o que sea mayor (936 : 4). ¿Presentan distinta dificultad estos casos? Para el método distributivo creemos que sí. No tanto si el método aplicado es el sustractivo. (Maza, 1991, p.126)

3. <u>La presencia de ceros</u>

El cero tiende a generar dificultades. Puede ser cuando este aparece al medio del dividendo o cuando el resto en una de las restas parciales es 0.

“Cuando en el dividendo aparece un cero intermedio, puede suceder que se considere la cifra siguiente al cero, sin escribir un cero en el cociente, por ejemplo:

$$\begin{array}{ccccccccc} & 4 & 0 & 8 & : & 4 & = & 1 & 2 \\ - & 4 & & & & & & & \\ \hline & 0 & 0 & 8 & & & & & \\ - & & & 8 & & & & & \\ \hline & & & 0 & & & & & \end{array}$$

En este caso, la división de las centenas se realiza correctamente, sin embargo, al llegar a la cifra de las decenas, no se escribe el resultado de dividir 0 por 4 y se pasa directamente a la cifra de las unidades para continuar la división”. (Lewin et al., 2013, p.175)

El segundo caso, es cuando el resto en una de las restas parciales es cero y además, al considerar la cifra siguiente, esta es menor que el divisor, por ejemplo:

	8	1	5	3	:	8	=	1	1	9
−	8									
	0	1	5							
	−		8							
			7	3						
		−	7	2						
				1						

(Lewin et al., 2013, p.175)

4.2.5. ¿Cómo enfrentar las dificultades de aprendizaje en el algoritmo de la división?

Con respecto al proceso de enseñanza y aprendizaje del algoritmo estándar de la división, es importante mencionar que “el formato clásico del algoritmo de la división no es de los más inadecuados. Es muy explícito, bastante transparente y permite fácilmente dar sentido a lo que se hace”. (Martínez, 2010, p.370) Pero se han eliminado apoyos o andamios que pueden facilitar el aprendizaje. Son estos apoyos los que se recomiendan incluir para evitar las dificultades en el aprendizaje. A continuación se presentan cinco sugerencias.

1. <u>Inserción de cabeceras en el dividendo y en el cociente</u>

A continuación se presentan tres casos, donde el uso de cabeceras ligadas a un contexto monetario permite obviar tres dificultades diferentes. En cada caso se reparten euros en una determinada cantidad de personas, por tanto, C identifica a los billetes de 100 euros, D a los de 10 y E a las monedas de 1 euro.

C	D	E				C	D	E
4	7	5	:	4	=	1	1	8
0	7							
	3	5						
		3						

(1)

C	D	E				C	D	E
13	7	5	:	4	=	3	4	3
1	7							
	1	5						
		3						

(2)

C	D	E					C	D	E
86	5	4	:	1	7	=	5	0	9
1	5	4							
		1							

(3)

“En (1), se plantea un reparto de 475 euros entre 4 personas. […] Naturalmente, y como se trata de repartir, en el cociente aparecen cuántos billetes de cien, de diez y monedas euro les corresponden a cada persona”. (Martínez, 2010, p.371)

“En (2), se plantea un reparto de 1.375 euros entre 4 personas. Como no hay billetes de mil euros, acumulamos ese valor convirtiéndolo en billetes de 100. Por ello, aparecen 13. Es también una forma de ejemplificar cómo obviar la dificultad de dividir cuando el primer número del dividendo es menor que el primer (o único en este caso) número del divisor”. (Martínez, 2010, p.371)

“En (3), se muestra la dificultad señalada en (2), y añade el caso del “cero al cociente…”. Aquí, el alumno tiene una guía clara de lo que hace, puesto que no reparte números sin mayor orden, sino que queda de manifiesto que cuando no tiene suficiente cantidad de una unidad (en este caso, billetes de diez euros), no puede dar nada a ninguno, y, por tanto, debe poner cero en el lugar correspondiente”. (Martínez, 2010, p.371)

2. Inclusión de restos parciales

Se vuelven a resolver las tres sustracciones anteriores, pero ahora incluyendo los restos parciales.

C	D	E				C	D	E
4	7	5	:	4	=	1	1	8
-4								
0	7							
	-4							
	3	5						
	-3	2						
		3						

(1)

C	D	E				C	D	E
13	7	5	:	4	=	3	4	3
-12								
1	7							
-1	6							
	1	5						
	-1	2						
		3						

(2)

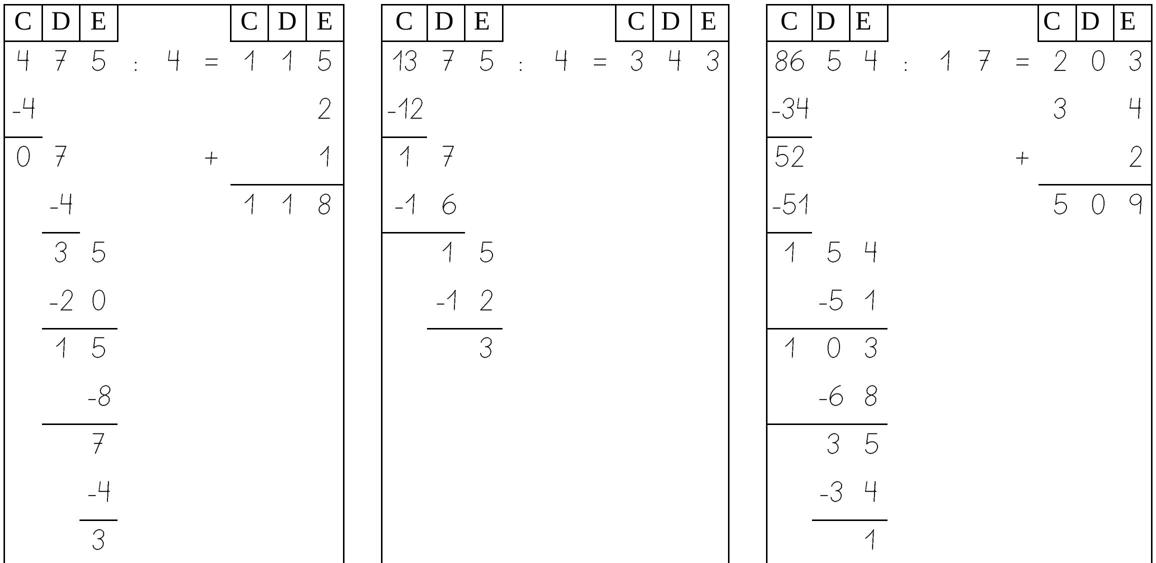
C	D	E				C	D	E
86	5	4	:	1 7	=	5	0	9
-85								
1	5	4						
-1	5	3						
		1						

(3)

Es útil para los estudiantes incluir los restos parciales ya que “para niños con una memoria de trabajo poco entrenada, la tarea descrita más arriba [resolución sin restos parciales] puede ser excesiva. Escribir los restos parciales se convierte en una forma de mantenerla menos ocupada y, por tanto, le permite una mayor capacidad de control sobre la cuenta”. (Martínez, 2010, p.372)

3. <u>Flexibilidad en cocientes</u>

“Una de las cosas que pasan desapercibidas es que en el cálculo de la división sólo se permite que el alumno alcance el resultado exacto al primer intento, sin ningún tipo de flexibilidad”. (Martínez, 2010, p.373)



(1) (2) (3)

En las divisiones resueltas anteriormente el estudiante no necesariamente tiene que alcanzar el resultado exacto, sino que puede ir intentándolo de a poco, llegando exactamente al mismo resultado. En (1) y (3) se muestran algunas posibles maneras de flexibilizar el cociente. En (2) se presenta el desarrollo tradicional.

“Evidentemente, al maestro que corrige los problemas de aprendizaje, le viene bien observar cuántos intentos hace el alumno y cómo los hace, para averiguar el dominio del proceso que tiene”. (Martínez, 2010, p.374)

4. <u>Transformación de dividendos</u>

Las dos divisiones que se presentan a continuación permiten tener la visión de la totalidad de la cantidad que entra en la operación a cada instante, además, se incluyen cabeceras correspondientes a unidades de mil (M), centenas (C), decenas (D) y unidades (U). “Así, en el primer caso, el alumno divide 2.689 : 7; luego 589 : 7, y, por último, 29 : 7. En el segundo caso, lo que divide entre 13 es 1.508, luego 208 y, por último, 78”. (Martínez, 2010, p.374)

M	C	D	U				C	D	U
2	6	8	9	:	7	=	3	8	4
-2	1								
	5	8	9						
		-6							
		2	9						
		-2	8						
			1						

(1)

M	C	D	U					C	D	U
1	5	0	8	:	1	3	=	1	1	6
-1	3									
	2	0	8							
	-1	3								
		7	8							
		-7	8							
			0							

(2)

5. <u>Tratamiento integral del dividendo y del cociente</u>

Se sugiere esta forma de trabajar el algoritmo de la división, ya que se maneja la totalidad de la cantidad que expresa el dividendo con todas sus consecuencias: "si se divide 2.689 entre 7 (1), y se sabe lo que se hace, no puede ser que todo el cálculo se reduzca a dividir 26 entre 7, se ponga un 3 y que luego el devenir de la cuenta convierta a ese tres en trescientos o en lo que sea". (Martínez, 2010, p.375)

M	C	D	U				C	D	U
2	6	8	9	:	7	=	3	0	0
-2	1	0	0					8	0
	5	8	9			+			4
	-5	6	0				3	8	4
		2	9						
		-2	8						
			1						

(1)

M	C	D	U					C	D	U
1	5	0	8	:	1	3	=	1	0	0
-1	3	0	0						1	0
	2	0	8				+			6
	-1	3	0					1	1	6
		7	8							
		-7	8							
			0							

(2)

"El presente modelo también admite que cualquier orden de unidades del cociente se estime en varios intentos, y no sólo en uno". (Martínez, 2010, p.375)

A partir de las sugerencias que se han mencionado, Martínez (2010) sugiere una propuesta para llegar al algoritmo estándar en siete pasos, que es similar a la siguiente:

1. Cocientes exactos (resto igual a 0) y que coincidan con las tablas de multiplicar (combinaciones multiplicativas básicas).

2. Cocientes exactos (resto igual a 0) e inexactos (resto distinto de 0).

   “Se trata de terminar los dividendos del modelo anterior con un número que ya no sea cociente exacto: 9 : 2; 89 : 2; 823 : 2; 8.247 : 2; etc. Queda al final un número que es más pequeño que el divisor y con el que no se puede hacer nada”. (Martínez, 2010, p.367)

3. Agregación de restos parciales.

   Aquí el alumno debe saber componer un nuevo número con el resto que obtiene, de una parte, y con el número siguiente de la otra. En el caso 2 (cocientes exactos e inexactos), el estudiante dejaba un resto, pero ahora debe aprovecharlo y continuar con la división.

8	3	4	:	2	=	4	1	7
0	3							
	1	4						
		0						

4. El primer número del dividendo (digito de mayor valor posicional) es más pequeño que el divisor (de un digito).

   Es la clásica situación a la que responde el ejemplo siguiente: 124 : 2; 819 : 9, etc.

5. Cero al cociente y se baja la cifra siguiente.

   “El alumno debe darse cuenta de que la única forma de poder continuar la cuenta es componiendo un nuevo número con el siguiente del dividendo, y como con ese número no ha hecho ningún reparto, debe poner un cero en el lugar correspondientes del cociente”. (Martínez, 2010, p.368)

8	1	4	:	2	=	4	0	7
0	1	4						
		0						

6. Cero al cociente al final de la cuenta.

   Esta situación es similar a la del caso 5 (cero al cociente y se baja la cifra siguiente), pero está situada al final de la división. El problema para el estudiante es que no sabe si la división ha terminado o no.

   Para evitar esto, el mejor remedio es comparar la misma cuenta con otra en la que el dividendo termine en 2 (en lugar de 1), y el niño se dé cuenta lo que haría en ese otro supuesto, y, al mismo tiempo, compare el número de cifras del cociente de ambas cuentas. (Martínez, 2010, p.368)

8	6	1	:	2	=	4	3	0
0	6							
	0	1						
		1						

7. Cero al cociente en medio y al final.

   Es una situación en la que los estudiantes comenten muchos errores, y necesitan mucho entrenamiento para enfrentarla adecuadamente.

8	0	1	:	2	=	4	0	0
0	0	1						
		1						

   Una forma de abordar este tipo de divisiones es identificar el número del dividendo con el número correspondiente del cociente: "en el caso del ejemplo, debe haber tres números en el cociente, que son los correspondientes al 8, al 0 y al 1, o, lo que es igual, los números correspondientes a las centenas, a las decenas y a las unidades". (Martínez, 2010, p.369)

4.3. Material concreto: una forma de representar

El tercer y último apartado que forma parte de este marco teórico es sobre el uso del material concreto en los procesos de aprendizaje, y cómo media este en ese proceso. Pero para poder abordar este punto, se hace necesario enmarcarlo en la habilidad de representar, la cual es una de las cuatro habilidades que, como mencionan las Bases Curriculares, permiten desarrollar el pensamiento matemático, ya que permiten la adquisición de nuevas destrezas, conceptos y la aplicación de conocimientos para resolver los problemas propios de la matemática y de otros ámbitos. Es por ello, que primero se presentará esta habilidad y su importancia, para luego, relacionarla con el uso del material concreto y cómo usarlos en el algoritmo de la división.

4.3.1. La habilidad de representar

Una de las prácticas para una enseñanza y aprendizaje eficaz de la matemática, es decir, aquella que involucre a los estudiantes, en un aprendizaje significativo mediante experiencias individuales y colaborativas fomentando su habilidad para dar sentido a las ideas matemáticas y para razonar de una manera matemática, es el uso y vinculación de las representaciones matemáticas (NCTM, 2015):

> Una enseñanza eficaz de las matemáticas obliga a los estudiantes a establecer conexiones entre diferentes representaciones matemáticas para profundizar el entendimiento de conceptos y procedimientos matemáticos, así como para concebir a ambos como herramientas para la resolución de problemas. (NCTM, p.10)

El currículum chileno define, para enseñanza básica, la habilidad de representar como:

Representar

Al metaforizar, el alumno transporta experiencias y objetos de un ámbito concreto y familiar a otro más abstracto y nuevo, en que habitan los conceptos que está recién construyendo o aprendiendo. Por ejemplo: "los números son cantidades", "los números son posiciones en la recta numérica", "sumar es juntar, restar es quitar", "sumar es avanzar, restar es retroceder", "dividir es repartir en partes iguales".
En tanto, el alumno "representa" para entender mejor y operar con conceptos y objetos ya construidos. Por ejemplo, cuando representa las fracciones con puntos en una recta numérica, o una ecuación como $x + 2 = 5$ por medio de una balanza en equilibrio con una caja de peso desconocido x y 2 kg en un platillo y 5 kg en el otro.

Manejar una variedad de representaciones matemáticas de un mismo concepto y transitar fluidamente entre ellas, permitirá a los estudiantes lograr un aprendizaje significativo y desarrollar su capacidad de pensar matemáticamente. Durante la educación básica, se espera que aprendan a usar representaciones pictóricas como diagramas, esquemas y gráficos, para comunicar cantidades, operaciones y relaciones, y que luego conozcan y utilicen el lenguaje simbólico y el vocabulario propio de la disciplina.

(Bases Curriculares, 2012, p.90)

En esta definición se aprecian dos sentidos del concepto "representar". Por una parte, se entiende como una metáfora, que permite "hacerse una idea" de lo que significa un determinado concepto matemático. Por otra parte, incluida en esta definición está la idea de representación semiótica, es decir, los lenguajes y símbolos que se requieren para que dichas metáforas sean comunicadas. De este modo esta habilidad implica realizar una traslación progresiva de la realidad, desde un ámbito más concreto y familiar para el alumno hasta llegar a niveles de abstracción mayores.

En ciertas investigaciones, se ha observado que el uso de “distintas representaciones es como examinar el concepto a través de una variedad de lentes, en donde cada uno ofrece una perspectiva distinta que hace que la imagen (el concepto) sea más rica y profunda”. (Tripathi, 2008, p.439)

Bruner ya en 1984 proponía tres diferentes tipos de representaciones o modos necesarios para el aprendizaje. “Estos tres modos son […], la representación enactiva, la representación icónica y la representación simbólica: conocer algo por medio de la acción, a través de un dibujo o una imagen y mediante formas simbólicas como el lenguaje”. (Bruner, 1984, p.122) Bruner no planteaba estas tres representaciones únicamente para el aprendizaje matemático, sino que las consideraba como necesarias para todo tipo de aprendizaje, para el desarrollo del pensamiento.

Por otro lado, estas representaciones no son necesariamente secuenciales, es decir, una fase no necesariamente es para iniciar el aprendizaje de un determinado concepto, y luego se pasa a una segunda etapa, hasta llegar a la etapa simbólica. Bruner propone que deben ser dominadas las tres representaciones y poder realizar una traducción parcial de una representación a otra.

Además, por otro lado, “las capacidades del niño para entender y aprender, y por supuesto la forma en que el niño ve el mundo como totalidad, están determinados por el estadio particular de desarrollo en el que se encuentra”. (Castro et al., 2007, p.62) Piaget plantea que existen tres niveles del paso de la acción a la operación:

> En el comienzo está el nivel senso-motor de acción directa sobre lo real, y luego viene el nivel de las operaciones, desde los siete-ocho años, que afectan igualmente a las transformaciones de lo real, pero por acciones interiorizadas y agrupadas en sistemas coherentes y reversibles (reunir y disociar, etc.); y entre ambos hay, de dos-tres a seis-siete años, un nivel que no es de simple transición, porque si se halla seguramente en progreso sobre la acción inmediata, que la función semiótica permite interiorizar, está señalado ciertamente también por obstáculos serios y nuevos, dado que hacen falta cinco o seis años para pasar de la acción a la operación. (Piaget & Inhelder, 1969, p.97)

Desde la teoría de Piaget, en la etapa escolar (6 años en adelante) los estudiantes estarán en una fase pre-operatoria, para luego pasar a la fase de operaciones concretas y ya en segundo ciclo, lograr la fase de operaciones formales, desarrollando la abstracción. Por tanto, el proceso educativo debería responder a estas fases, generando secuencias didácticas que permitan a los estudiantes trabajar desde su fase de pensamiento, e ir mediando hacia una fase superior, donde la representación concreta de los conceptos permitiría que los estudiantes accedan al conocimiento desde la fase de pensamiento en la que se encuentran.

En resumen, al aprender matemáticas, y en vista de su naturaleza abstracta, "las personas tienen acceso a las ideas matemáticas sólo mediante las representaciones de dichas ideas" (National Research Council, p.94), y el grado de profundidad de la comprensión se relaciona con la solidez de las conexiones entre las representaciones que los estudiantes hayan interiorizado (Pape & Tchoshanov, 2001; Webb et al., 2008). Sin olvidar que los estudiantes de enseñanza básica dependerán aún más de las representaciones concretas, por la fase de pensamiento en la que se encuentran.

4.3.2. Los materiales concretos y la división

Los materiales concretos o manipulativos, no tienen un fin en sí mismos, ni tampoco aseguran que los estudiantes adquieran de forma automática conceptos matemáticos, ya que siempre es necesario que estén acompañados de la propuesta de enseñanza, que oriente en su uso y genera la construcción del aprendizaje esperado.

> El material auxiliar es necesario en la enseñanza de las matemáticas en las primeras edades por dos razones básicas: primera, posibilita el aprendizaje real de los conceptos – el niño puede elaborarlos por sí mismo a través de las experiencias provocadas, sin esperarse que surjan espontáneamente –. Segunda, ejerce una función motivadora para el aprendizaje, en especial si se saben crear situaciones interesantes para el niño, en las que sea un sujeto activo y no pasivo-receptivo. (Cascallana, 2002, p.29)

No existe un consenso sobre la definición de material concreto, es más, existen dos posturas, la primera de ellas, "sostiene que el material debe ser muy estructurado" (Cascallana, 2002, p.30) y la segunda, "defiende la utilización de un material poco estructurado y multivalente". (Cascallana, 2002, p.30) Es por ello que se han clasificado los materiales concretos en estos dos grupos: estructurados y no estructurados, que hace referencia al fin para el que fue creado. Por ejemplo, el ábaco es un material estructurado porque fue creado para resolver cálculos, en cambio, las palitos de helado, es un material no estructurado, ya que no fueron creados para representar números o resolver adiciones, sino que para sostener un helado. "Ambos tipos de materiales son recursos didácticos útiles, el empleo de uno u otro dependerá de la situación educativa, del proceso evolutivo del niño, del momento de la adquisición del concepto y del profesor." (Cascallana, 2002, p.30)

Es importante mencionar que los materiales estructurados, aunque han sido construidos para trabajar un concepto en particular, "la mayor parte de ellos podríamos decir que son multiuso, en la medida de que pueden utilizarse para varios conceptos y objetivos. Un material determinado no es tampoco privativo de una edad muy específica" (Cascallana, 2002, p.31). El grado de dificultad lo pondrá el docente en la tarea que diseñe y la mediación que realice con el material.

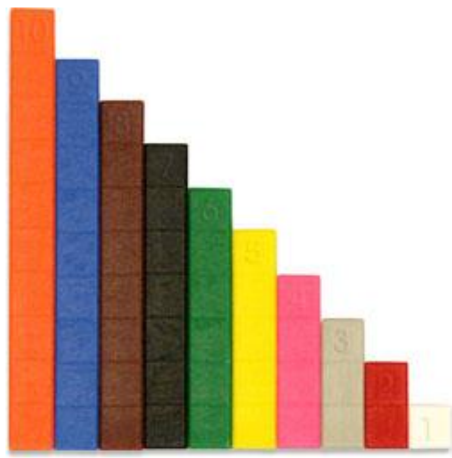
Además, al trabajar un contenido, el estudiante puede apoyarse en diferentes materiales, para que no asocie de forma exclusiva un concepto con un elemento concreto. El poder usar varios materiales lo ayudará a generalizar y comenzar a abstraer.

Los materiales estructurados más utilizados para trabajar aritméticamente son: las barras Cuisenaire, bloques base 10 y ábaco. A continuación se profundizará en cada uno de ellos.

4.3.2.1. Barras Cuisenaire

Las barras o regletas Cuisenaire "son un material matemático destinado básicamente a que los niños aprendan la descomposición de los números e iniciarles en las actividades de cálculo". (Cascallana, 2002, p.94) Está formado por diez barras de diferente tamaño y color. Cada una de ellas representa un número del 1 al 10.

> Las regletas fueron llamadas así luego de que su inventor, Georges Cuisenaire, un profesor de la escuela primaria de Bélgica, publicara un libro sobre su uso, llamado "Los números en colores". El uso de las regletas para la enseñanza de las matemáticas fue desarrollado y popularizado por Caleb Gattegno. (Adalid, 2010, p.15)



Regleta blanca de 1 cm.

Regleta roja de 2 cm.

Regleta verde claro o gris de 3 cm.

Regleta rosada de 4 cm.

Regleta amarilla de 5 cm.

Regleta verde oscuro de 6 cm.

Regleta negra de 7 cm.

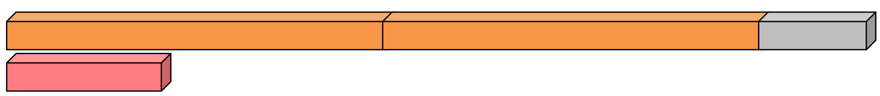
Regleta café de 8 cm.

Regleta azul de 9 cm.

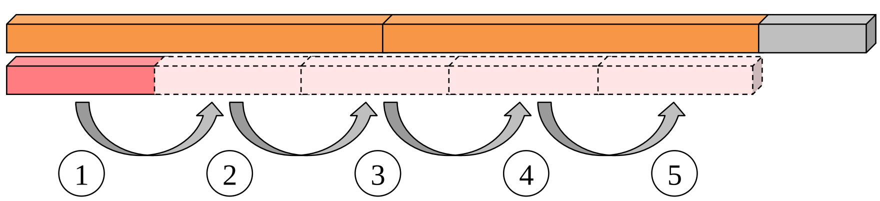
Regleta naranja de 10 cm.

Para dividir 23 : 4 con las Barras Cuisenaire se pueden realizar los siguientes pasos:

1. Se representa el dividendo (23), ubicando una barra al lado de la otra. Y debajo del dividendo se representa el divisor (4).

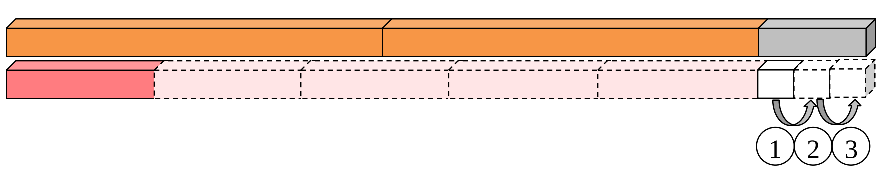


2. La barrita que representa el divisor se va trasladando para ver cuántas veces está contenida en la representación del dividendo.



La barra del 4 está contenida 5 veces en el 23.

3. Se determina el resto, probando las barritas o utilizando la barrita 1 y contando cuántas veces está contenida.



El resto es 3.

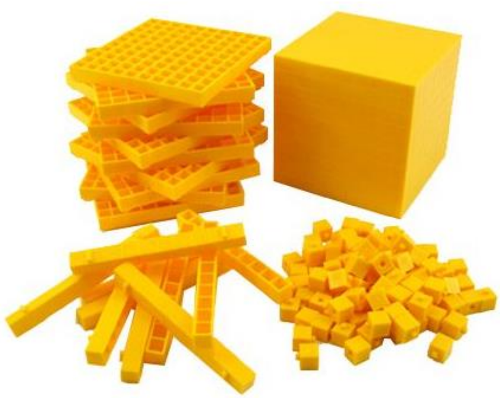
El resultado final de 23 : 4 es 5 con resto 3.

Se observa que una restricción de usar este material es el rango numérico, ya que principalmente se puede representar hasta números con dos cifras, por tanto, es útil cuando se está iniciando el aprendizaje de la división y sus algoritmos.

4.3.2.2. Bloques base 10

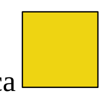
“Los bloques aritméticos multibásicos de Dienes son un recurso matemático diseñado para que los niños lleguen a comprender los sistemas de numeración sobre una base manipulativa concreta”. (Cascallana, 2002, p.77) Como nuestro sistema de numeración es decimal, se ha popularizado el uso de la Base 10, pero originalmente existe el material para trabajar en otras bases.

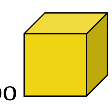
Zoltan Dienes (1916 – 2014), creo los bloques multibásicos, los bloques lógicos y otros materiales para la enseñanza de la matemática. Los bloques base 10, constan de cuatro tipos diferentes de piezas, que representan a las unidades, decenas, centenas y unidades de mil.



Cubito representa una unidad.

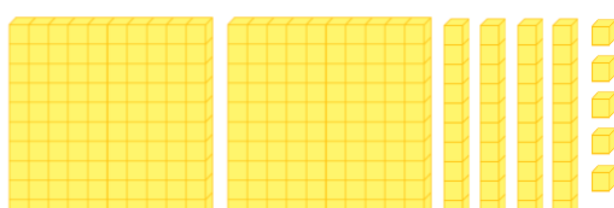
Barra representa una decena.

Placa  representa una centena.

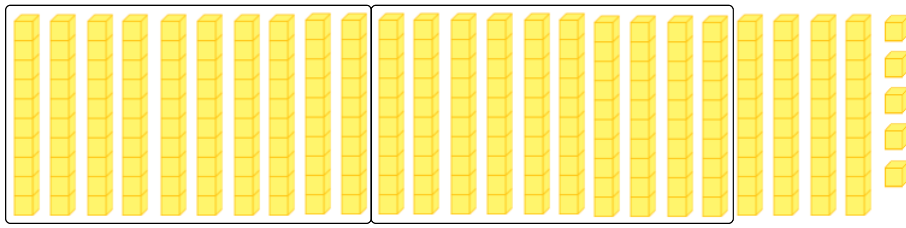
Cubo  representa una unidad de mil.

Para resolver 245 : 4 utilizando los bloques base 10, se pueden realizar los siguientes pasos:

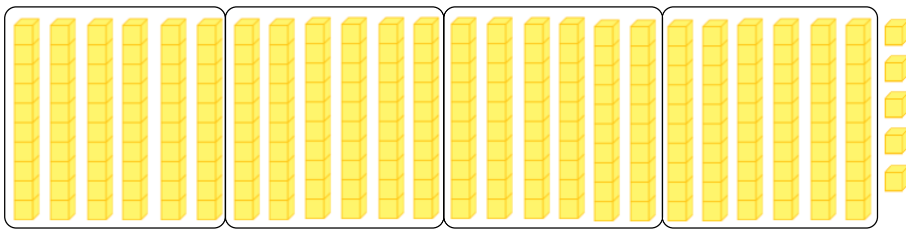
1. Se representa el dividendo (245).



2. Se reagrupan las centenas en decenas, ya que no se pueden formar 4 grupos con igual cantidad de centenas.

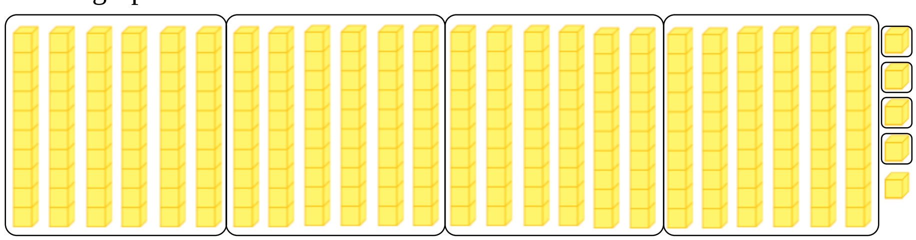


3. Se forman 4 grupos de igual cantidad de decenas.



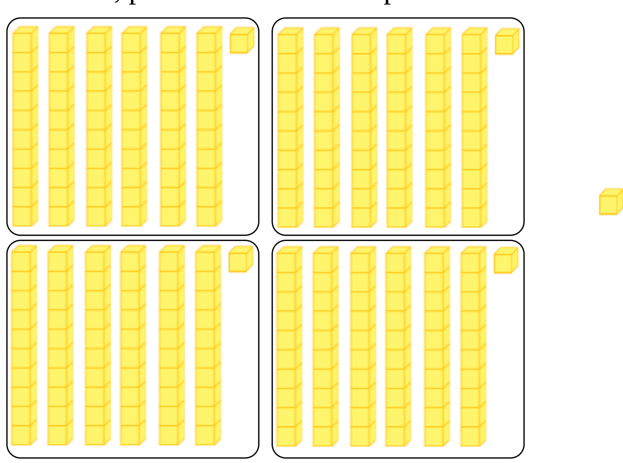
Se forman 4 grupos de 6 decenas.

4. Se reparten en 4 grupos las unidades.



Se forman 4 grupos de 1 unidad y sobra 1 unidad.

5. Se juntan decenas y unidades, para determinar la respuesta.



En cada grupo quedaron 6 decenas y 1 unidad y sobró 1 unidad.

El resultado de 245 : 4 = 61 con resto 1.

Una de las ventajas de los bloques base 10, es que permite trabajar con un rango numérico mayor, ya que incluye hasta una unidad de mil, por tanto, se pueden resolver divisiones con un dividendo de hasta tres cifras, sin ninguna dificultad. Además, se pueden realizar reagrupaciones lo que permite al estudiante tener presente el valor posicional de cada dígito.

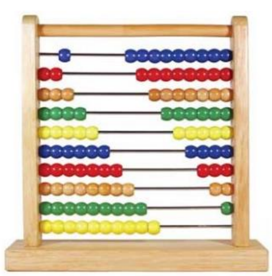
Los bloques base 10 permiten trabajar con un rango numérico superior que las Barras Cuisenaire, llegando hasta 1.000, pero en ocasiones sigue siendo insuficiente. Además, otra desventaja que tiene el material es, al trabajar el reagrupamiento, la cantidad de material que tiene un set no es suficiente (e.g. al reagrupar tres centenas en decenas, se requerirán 30 barras).

4.3.2.3. Ábaco

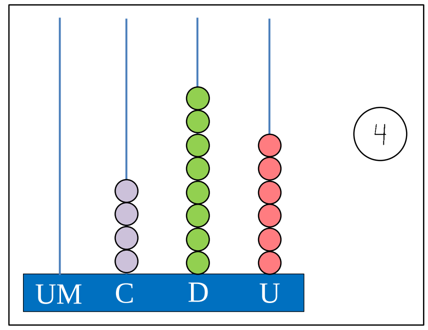
El ábaco es uno de los recursos más antiguos para la matemática, “a través de su utilización el niño llega a comprender los sistemas de numeración y el cálculo de las operaciones con números naturales.” (Cascallana, 2002, p.54) Este material permite al estudiante trabajar con el valor posicional de los dígitos de un número.

La persona que utiliza un ábaco tiene que saber si el valor de la posición corresponde a unidades, decenas, centenas, etc. En cambio, en un algoritmo escrito, cuando se han alineado las columnas, cada columna se puede tratar como si fuera una columna de unidades. (Kamii, 1994, p.40)

Existen diferentes tipos de ábacos, pero cada varilla representa una posición y las cuentas que se ubican en cada una de ellas, representan el valor asignado a esa posición.

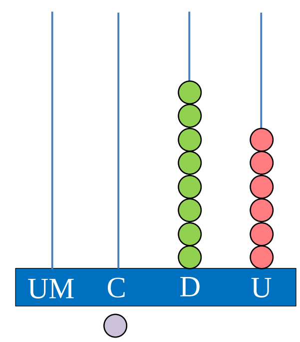
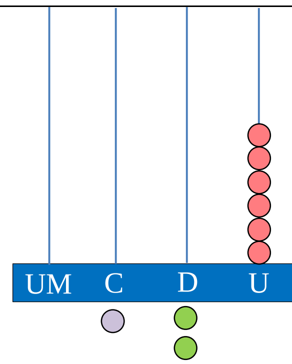
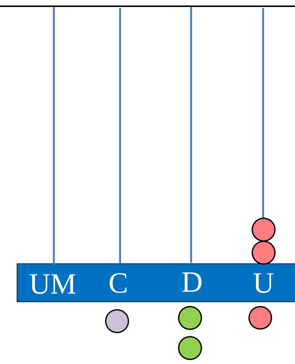


Para dividir 486 : 4 utilizando el ábaco se pueden realizar los siguientes pasos:



1. Representar el dividendo en el ábaco (486) y anotar el divisor (no se representa).

2. Se trabaja con las pelotitas de cada posición, repartiéndolas según el divisor, y el resultado se deja al frente del ábaco, de la siguiente forma:

		
Se reparten las 4 centenas en 4, quedando 1 centena en cada grupo.	Se reparten las 8 decenas en 4, quedando 2 decenas en cada grupo.	Se reparten las 6 unidades en 4, quedando 1 unidad en cada grupo. Sobran 2 unidades.

El resultado de 486 : 4 = 121 con resto 2.

Una ventaja del ábaco es que se puede trabajar con números de un rango numérico superior, pero la desventaja se encuentra al realizar los reagrupamientos, ya que si, por ejemplo, hay que reagrupar 2 centenas en decenas, se deben agregar 20 pelotitas a la varilla de las decenas, que por espacio de la misma, se hace complejo.

Para finalizar este apartado, los bloques base 10 presentan la ventaja de trabajar con un rango numérico mayor que las barras Cuisenaire y en comparación con el ábaco, los bloques base 10 evidencian los reagrupamientos de forma más sencilla para el estudiante. Si bien cada material tiene sus ventajas y desventajas dependiendo del objetivo de aprendizaje y el estudiante, para estudiantes de sexto básico y al trabajar el algoritmo de la división, los bloques base 10 presenta mejores cualidades relativas a los procedimientos que están por detrás del algoritmo (e.g. reagrupamiento).

5. Diseño metodológico

En este apartado de la investigación, se explica más en detalle lo que se realizará para lograr el objetivo general y se fundamenta el porqué de cada decisión.

5.1. Metodología y enfoque

La investigación tiene una **metodología cualitativa**, la cual se caracteriza por ser “una actividad sistemática orientada a la comprensión en profundidad de fenómenos educativos y sociales, a la transformación de prácticas y escenarios socioeducativos, a la toma de decisiones y también hacia el descubrimiento y desarrollo de un cuerpo organizado de conocimientos”. (Sandín, 2003, p.123)

> Esta orientación metodológica tiene como objeto la comprensión del complejo mundo de la experiencia humana: cómo las personas viven, experimentan, interpretan y construyen los significados del mundo social, y cómo estos son integrados en la cultura, el lenguaje y las acciones de los actores sociales. (Latorre et al., 1997, p.197)

Dentro de la metodología cualitativa, se ha seleccionado un estudio de indagación, donde se analiza un problema educacional acotado, como lo son las dificultades de aprendizaje en el algoritmo estándar de la división y cómo el uso de material concreto puede ser de ayuda para que estas dificultades sean superadas. Un **estudio de casos** permite utilizar reflexivamente el conocimiento acumulado y generando nueva información relevante para el campo disciplinar propio de las dificultades de aprendizaje en un tiempo acotado y con pocos recursos. El potencial de este tipo de estudio “radica en que permite centrarse en un caso concreto o situación e identificar los distintos procesos interactivos que lo conforman”. (Latorre et al., 1997, p.233) Cabe señalar que un estudio de casos se da en un periodo corto de tiempo y al profundizar en una situación particular permite evidenciar procesos interactivos que en un estudio de muestras podría permanecer oculto.

Existe en la literatura una propuesta de tres tipos de estudios de casos, dependiendo de la naturaleza del informe final, que pueden ser: descriptivos, interpretativos o evaluativos. En este estudio se realizará un **estudio de caso interpretativo**, el cual, “reúne información sobre un caso con la finalidad de interpretar o teorizar acerca del caso. Desarrolla categorías conceptuales para ilustrar defender o desafiar presupuestos teóricos defendidos antes. El modelo de análisis es inductivo”. (Latorre et al., 1997, p.236)

La idea de realizar un estudio de caso interpretativo se justifica en que se quiere conocer la influencia que provoca el uso de material concreto, por tanto, el poder trabajar con un estudiante que ha sido diagnosticado con dificultades de aprendizaje en matemática y conocer lo que va realizando paso a paso al momento de resolver una división, permitirá evidenciar sus dificultades, contrastarlas con las que propone la teoría y además, después de la implementación de las sesiones con el material concreto, determinar si el estudiante avanza en su comprensión superando las dificultades detectadas inicialmente.

Para establecer las fases o etapas que forman el estudio de casos, hay que tener en cuenta que participa "de la idiosincrasia que caracteriza las sucesivas etapas de planificación y desarrollo de los modelos de investigación cualitativos" (Sandín, 2003, p.176), solo que el propósito es un estudio en profundidad de un caso.

5.2. El estudiante y su escenario

El escenario es un colegio de la comuna de San Miguel, de la región Metropolitana y la Jefa de UTP del ciclo básico, es quien mantiene el nexo entre el estudiante, su apoderado y la investigadora.

Para este estudio de caso, se ha seleccionado a un estudiante de sexto básico. La decisión fue tomada en conjunto con la Directora y la Jefa de UTP del ciclo básico del establecimiento. Inicialmente se seleccionaría a un estudiante de quinto básico, ya que es el último nivel en el que ven las operaciones matemáticas con números naturales, y específicamente, en la división aparece el concepto de resto. Pero conversando con la Directora y la Jefa de UTP, mencionaron que hay un estudiante al que les gustaría que pudiera acompañar durante el periodo que esté en el establecimiento, y estaba dispuesto a participar en el proceso de investigación junto a su apoderado.

5.2.1. El establecimiento educativo

Esta investigación se realizará en un colegio de la comuna de San Miguel, en la Región Metropolitana. Es un colegio particular subvencionado, que tiene dos cursos mixtos en cada nivel desde pre-kinder hasta cuarto medio. En cada sala hay aproximadamente 45 estudiantes y tienen jornada escolar completa. El establecimiento además, cuenta con dos salas de computación, biblioteca, una sala audiovisual y gimnasio techado.

Este establecimiento, desde el año 2014 no realiza selección de sus estudiantes, pero anteriormente, al proceso de admisión postulaban, aproximadamente, 200 estudiantes cada año, de los que seleccionaban a 70. Además, este proceso de selección evaluaba, principalmente, habilidades cognitivas en el área de lenguaje y matemática pasando por diferentes rincones de trabajo. Los niños que presentan dificultades de aprendizaje u otro tipo de necesidad y que se encuentran en el colegio son porque han tenido algún tipo de accidente y ya han estado al interior del colegio o porque no se detectó en el periodo de selección. El estudiante de este estudio ingresó al establecimiento pasando por el proceso de selección.

Los estudiantes con dificultades de aprendizaje que ya están insertos en él, tiene muy escasas oportunidades de desplegar, potenciar y expresar su forma particular de entender, significar y simbolizar el mundo, ya sea desde una discapacidad física, alguna dificultad o virtud académica, algún origen étnico, alguna religión, algún país extranjero, etc., pues el colegio no está preparado para brindar metodologías de trabajo acorde a sus diversidades, y que por ende, los haga sentir valorados y apreciados en sí mismos porque no existe ningún planteamiento respecto a cómo considerar la diversidad, y tampoco, como considerar las dificultades de aprendizaje.

El colegio cuenta con una psicopedagoga que trabaja con los estudiantes que son diagnosticados con dificultades de aprendizaje en un horario alterno, es decir, los estudiantes son citados a un horario posterior al de trabajo en aula de clases. Pero esto se efectúa hasta cuarto básico y solo con los casos más complejos.

5.2.2. La sala de clases

La sala de clases de sexto básico es de forma cuadrangular, los estudiantes se sientan de a dos mirando hacia el frente de la sala, donde se ubica la pizarra. El espacio disponible no permite formar grupos de trabajo con los estudiantes, ya que se toparían constantemente los unos con los otros, y prácticamente desaparecerían los pasillos.

En la sala de clases no se observan trabajos de los estudiantes, ni material educativo o recursos utilizados en las clases. Existen dos murales, donde se ubican noticias educativas o de interés de los estudiantes y en el otro el horario de clases junto a las ubicaciones espaciales de los estudiantes al interior de la sala.

Al interior de la sala de clases los estudiantes se comportan de forma inquieta, aunque no se mueven de sus puestos constantemente, si conversan entre ellos, se dan vuelta y en reiteradas ocasiones durante una misma clase dicen chistes hacia sus compañeras o compañeros o hacia la profesora. La profesora por su parte está la mayor parte de la clase cerca de la pizarra, y solo en un par de ocasiones se pasea por la sala de clases para poder observar el trabajo que realizan los estudiantes. Esta dinámica fue constante durante las dos observaciones de clase que se realizaron. Si los estudiantes tienen dudas mientras trabajan deben acercarse ellos hacia la docente y en ningún momento es la docente la que se acerca a ellos mientras trabajan. Además solo una de las rutinas de clases consistió en trabajo en parejas, donde respondían una guía con calificación, pero el resto de las ocasiones la clase fue unidireccional, donde la docente explicaba los conceptos matemáticos y los estudiantes tomaban apuntes y luego, resolvían ejercicios propuestos por el texto escolar.

Se observa que la profesora es cercana a los estudiantes, estos últimos participan en clases, pero hay un grupo de ellos que no está llevando el ritmo de la clase y es ajeno a lo que sucede en ella, esto se infiere a partir de sus acciones, como por ejemplo conversar constantemente entre ellos, jugando o escribiendo notitas en papeles que hacer circular. La cantidad de estudiantes en la sala de clases es 45, los que difícilmente pueden ser atendidos por la docente de forma personalizada durante la sesión de noventa minutos, lo que provoca que exista un grupo de ellos que no está siendo partícipe del proceso.

Al mirar el libro de clases del curso, hay observaciones sobre diagnósticos respecto a tres estudiantes, que son:

- Estudiante 1: Síndrome de déficit atencional
- Estudiante 2: Síndrome de déficit atencional
- Estudiante 3: Trastorno del ánimo

Uno de estos estudiantes es el que ha sido parte de este estudio.

Con respecto a la interacción entre los estudiantes, son escasas durante las clases, principalmente no interactúan entre ellos durante el proceso de aprendizaje, no hay instancias de clases donde sean los estudiantes los principales protagonistas del aprendizaje, y tampoco hay actividades de trabajo en equipo, donde aprendan de los otros. Las únicas instancias constantes de participación de los estudiantes son al revisar los ejercicios de tarea o realizados durante la misma actividad, pero dan la respuesta obtenida, dejando de lado el proceso llevado a cabo para encontrar esa respuesta. No se evidencia un compartir las diferentes experiencias o formas de encontrar una respuesta, lo que podría generar un aprendizaje más enriquecedor en los estudiantes.

5.2.3. El estudiante

El estudiante de este estudio de caso, es un hombre que cursa sexto básico. Ingresó al colegio en Kinder en el año 2009. Y desde 1.° básico ha sido diagnosticado con déficit atencional por lo que está con evaluación diferenciada. El neurólogo solicita que se le apoye con más tiempo para responder las evaluaciones, que se dé prioridad a evaluaciones de forma oral y se solicita que pueda realizar trabajos o tareas que le den puntos para las evaluaciones. Además está en tratamiento con un estimulador del sistema nervioso central, específicamente está tomando Aradix retard 20 mg. (Anexo 1)

El estudiante en la sala de clases interactúa frecuentemente con sus compañeros que tiene en los puestos alrededor de él. En ocasiones no escucha las instrucciones que se han dado debido a que está realizando otra actividad o simplemente no está interesado en hacerlas. No tiene problemas de convivencia con sus pares, ya que no se observa aislado de ellos. Sobre su comportamiento, se puede mencionar que tiene, aproximadamente, 30 anotaciones negativas en el libro de clases, pero de estas, 27 corresponden a que no se presenta con materiales en alguna asignatura y las restantes tres corresponden a problemas conductuales del tipo: conversa en clases, llega tarde después del recreo, no obedece instrucciones.

Con respecto a sus calificaciones en matemática, se observa que en general, están más cercanas al 4,0 y que desde 4° básico han ido descendiendo. En tercero básico obtuvo un promedio de 4,3; en cuarto, 5,1; en quinto, 4,4 y actualmente, tiene un promedio de 3,9 pero no se han considerado las calificaciones del último trimestre. (Anexo 2)

Por último, es importante mencionar que es un estudiante que se está acostumbrando a una nueva realidad familiar. Sus padres se divorciaron y además existía violencia intrafamiliar entre sus padres. En la actualidad su madre tiene una nueva pareja, con la cual tiene un hijo.

5.3. Etapas de la investigación

Para llevar a cabo este estudio, se realizarán varios procesos o etapas que ayudarán a cumplir los diferentes objetivos específicos que se plantearon inicialmente. A continuación, se detalla cada una de ellas, para posteriormente, incluir las estrategias o instrumentos necesarios para recolectar información.

El objetivo general del estudio es: Evaluar la influencia del uso del material concreto en el aprendizaje del algoritmo de la división en un estudiante con dificultades de aprendizaje en matemática. Y para lograrlo se definieron cuatro objetivos específicos que se desglosan en cinco etapas.

Tabla 3: Objetivos específicos y etapas del proyecto

Objetivo específico	Etapa de la investigación
Generar una propuesta de trabajo para enseñar el algoritmo estándar de la división con material concreto.	1. Creación de una propuesta para enseñar el algoritmo estándar de la división con los bloques base 10.
Identificar las dificultades de aprendizaje que tiene el estudiante de este estudio en la comprensión del algoritmo de la división.	2. Evaluación de la comprensión y dificultades que tiene el estudiante sobre el algoritmo estándar de la división.
Identificar las dificultades de aprendizaje que tiene el estudiante de este estudio en la comprensión del algoritmo estándar de la división posterior a la implementación de la propuesta con material concreto.	3. Implementación de la propuesta. 4. Evaluación de la comprensión y dificultades del estudiante en el aprendizaje del algoritmo estándar de la división posterior a la implementación de las sesiones con los bloques base 10.
Analizar la comprensión del algoritmo de la división posterior a la implementación de la propuesta mediada por el uso del material concreto.	5. Análisis final a partir de la comprensión del algoritmo de la división y las dificultades de aprendizaje que se superan o permanecen.

5.3.1. Etapa 1: Creación de una propuesta para enseñar el algoritmo estándar de la división con los bloques base 10.

En esta etapa se crea una propuesta de enseñanza del algoritmo estándar de la división con material concreto, en este caso, los bloques base 10. Para ello, se utiliza de base la propuesta que realiza Martínez (2010) y se adapta dejando seis casos que deberían abordarse al trabajar el algoritmo estándar de la división.

Tabla 4: Casos para trabajar el algoritmo estándar de la división

<table>
<tr><th></th><th>Caso</th><th colspan="2">Ejemplo</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Utilización de CMB</td><td>C1: Combinaciones multiplicativas básicas (CMB)</td><td colspan="2">2 5 : 5 = 5
Porque 5 · 5 = 25</td></tr>
<tr><td>C2: Resto igual a 0 o distinto de 0 que no coincidan con las CMB y sin restos parciales</td><td>9' 3' : 3 = 3 1</td><td>8' 3' : 2 = 4 6
1</td></tr>
<tr><td>Restos parciales</td><td>C3: Restos parciales con resto igual o distinto de 0</td><td colspan="2">7' 7' : 5 = 1 5
− 5
2 7
− 2 5
2</td></tr>
<tr><td>Relación del dígito de la posición de mayor valor con el divisor.</td><td>C4: El dígito de la posición de mayor valor del dividendo es menor que el divisor</td><td colspan="2">1 2' 4' : 2 = 6 2
0 4
4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Presencia de ceros en el cociente</td><td>C5: Presencia de ceros al medio del cociente</td><td colspan="2">8' 1' 4' : 2 = 4 0 7
0 1
1 4
0</td></tr>
<tr><td>C6: Presencia de ceros al final del cociente</td><td colspan="2">8' 6' 1' : 2 = 4 3 0
0 6
0 1
1</td></tr>
</table>

Se consideran necesarias cuatro sesiones de trabajo con el estudiante para trabajar los casos anteriores. Cada sesión es dirigida por la investigadora y solo participa el estudiante de esta investigación. Además, estás se desarrollan en el establecimiento educacional durante una hora cronológica cada una y se graba cada una de ellas para poder analizarlas posteriormente.

Durante las sesiones de trabajo, los casos se organizaron de la siguiente forma:

Tabla 5: Organización de casos del algoritmo de la división en las sesiones

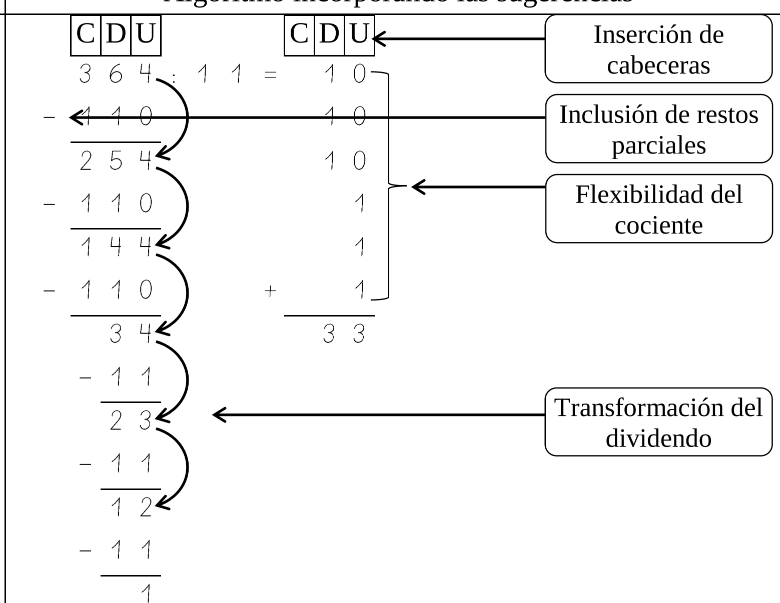
Sesión de enseñanza – aprendizaje 1: Caso 1 y 2
Sesión de enseñanza – aprendizaje 2: Caso 2 y 3
Sesión de enseñanza – aprendizaje 3: Caso 4
Sesión de enseñanza – aprendizaje 4: Caso 5 y 6

Es importante mencionar, que el uso de material concreto se hace de forma paralela al trabajo a nivel simbólico, para que el estudiante asocie los pasos del algoritmo con lo que sucede con los bloques. Y también se tomaron ciertas sugerencias que se tomaron del marco teórico (Ver 4.2.5), como lo son:

- inserción de cabeceras en el dividendo y en el cociente
- inclusión de restos parciales
- flexibilidad del cociente
- transformación del dividendo

En el siguiente ejemplo se pueden identificar los puntos anteriores:

Tabla 6: Algoritmo estándar incorporando sugerencias para facilitar su aprendizaje

Algoritmo estándar	Algoritmo incorporando las sugerencias
3 6' 4' : 1 1 = 3 3 3 4 1	

Para ver el detalle de la propuesta sesión a sesión ver Anexo 5.

5.3.2. Etapa 2: Evaluación de la comprensión y dificultades que tiene el estudiante sobre el algoritmo estándar de la división.

En esta etapa se aplicará un diagnóstico que permita evidenciar las dificultades del estudiante al enfrentar la resolución de una división utilizando el algoritmo estándar.

Todos estos casos se complejizan cuando el divisor es de más de una cifra, por lo que en el diagnóstico se consideraron los siguientes casos:

Tabla 7: Divisiones del diagnóstico

Casos	**Cantidad de dígitos en el divisor**	
	1 dígito	**2 dígitos**
Caso 1	Pregunta 1 D U D U 4 9 : 7 = 7	No se presenta un caso, ya que las CMB contemplan hasta la tabla del 10.
Caso 2	Pregunta 2 C D U C D U 4 8 6 : 4 = 1 2 1 2	No se presenta un caso, porque se incorporarían los restos parciales.
Caso 3	Preguntas 3 y 4 C D U C D U 9 8 4 : 4 = 2 4 6 C D U C D U 8 8 3 : 3 = 2 9 4 1	No se presenta un caso, porque en la secuencia didáctica se contempló incluir el divisor de 2 dígitos desde el siguiente caso.
Caso 4	Pregunta 5 C D U C D U 6 5 1 : 7 = 9 3	Pregunta 6 C D U C D U 5 5 2 : 1 2 = 4 6
Caso 5	Pregunta 7 C D U C D U 8 4 0 : 8 = 1 0 5	Pregunta 8 UM C D U C D U 2 2 6 6 : 1 1 = 2 0 3

Caso 6	Pregunta 9 UM C D U C D U 5 5 8 0 : 9 = 6 2 0	Pregunta 10 UM C D U C D U 3 9 0 0 : 1 5 = 2 6 0

Para ver las respuestas del estudiante, ver Anexo 6.

5.3.3. Etapa 3: Implementación de la propuesta para el aprendizaje del algoritmo estándar de la división.

En esta etapa se aplica la propuesta, y se acomoda dependiendo de los progresos del estudiante, por ejemplo, quizás alguno de los casos necesite más tiempo del considerado y deba ajustarse la programación.

En general la propuesta pudo implementarse de forma completa y para ver más detalle, en el anexo 7 se encuentran las transcripciones de todas las sesiones y fotografías de las divisiones que realizó el estudiante.

5.3.4. Etapa 4: Evaluación de la comprensión y dificultades del estudiante en el aprendizaje del algoritmo estándar de la división posterior a la implementación de las sesiones con los bloques base 10.

En esta etapa se construye y aplica una evaluación espejo al diagnóstico, para poder luego, contrastar, y determinar si existen diferencias al usar el material concreto en la comprensión y aprendizaje del algoritmo estándar de la división.

Las diez divisiones que se utilizaron en esta evaluación son:

Tabla 8: Divisiones de la evaluación final

Casos	**Cantidad de dígitos en el divisor**	
	1 dígito	**2 dígitos**
Caso 1	Pregunta 1 D U D U 5 6 : 8 = 7	No se presenta un caso, ya que las CMB contemplan hasta la tabla del 10.

Caso 2	Pregunta 2 C D U C D U 6 3 8 : 3 = 2 1 2 2	No se presenta un caso, porque se incorporarían los restos parciales.
Caso 3	Preguntas 3 y 4 C D U C D U 5 3 2 : 4 = 1 3 3 C D U C D U 7 4 9 : 3 = 2 4 9 2	No se presenta un caso, porque en la secuencia didáctica se contempló incluir el divisor de 2 dígitos desde el siguiente caso.
Caso 4	Pregunta 5 C D U C D U 4 5 6 : 8 = 5 7	Pregunta 6 UM C D U C D U 3 2 4 0 : 2 4 = 1 3 5
Caso 5	Pregunta 7 UM C D U C D U 3 6 2 4 : 6 = 6 0 4	Pregunta 8 UM C D U C D U 2 2 5 5 : 1 1 = 2 0 5
Caso 6	Pregunta 9 UM C D U C D U 5 8 5 0 : 9 = 6 5 0	Pregunta 10 UM C D U C D U 4 8 0 0 : 1 5 = 3 2 0

Para ver las respuestas del estudiante en ambas evaluaciones, ver Anexo 6.

5.3.5. Etapa 5: Análisis final, a partir de la comprensión del algoritmo de la división y las dificultades de aprendizaje que se superan o permanecen.

En esta última etapa se incluirá a los resultados de las evaluaciones, el proceso de las sesiones, donde el estudiante va tomando decisiones o a través de diferentes expresiones dando cuenta de lo que realiza y de lo que comprende. Es en esta etapa donde se volverá al marco teórico y se podrá determinar la influencia del uso de material concreto en una propuesta de enseñanza para el algoritmo estándar de la división para un estudiante que ha sido diagnosticado con dificultades de aprendizaje en matemática.

5.4. Instrumentos y estrategias de recolección de información

En primer lugar se realizaron observaciones de clases, para poder conocer las interacciones que se dan al interior del aula entre docente y estudiantes, y también para conocer la dinámica del estudiante de este estudio y cómo interactúa con sus pares. (Anexo 4)

Junto a esto se pidió poder revisar el libro de clases, donde existe información sobre el comportamiento del estudiante y sus calificaciones.

El registro de las observaciones de clases, y la lectura del libro de clases, brindó información general que permitió construir evaluaciones, contextualizar y también dieron indicios para realizar el análisis final.

Por último, se construyeron dos evaluaciones que son espejo entre sí, es decir, evalúan los mismos objetivos de aprendizaje. La primera de ellas, corresponde al diagnóstico, que se aplicó al estudiante antes de las sesiones de enseñanza del algoritmo estándar de la división con el material concreto, y permitió poner en evidencia si el estudiante tenía alguna dificultad. Luego, posterior a las sesiones, se aplicó la segunda evaluación para poder detectar los cambios que se habían producido.

6. Análisis de los resultados obtenidos

A continuación, se presenta el análisis de la información obtenida en la puesta en práctica del diseño metodológico. Durante el análisis se pondrán extractos de las transcripciones de las sesiones con el estudiante.

Si bien, se espera un análisis inductivo, se han creado algunas categorías principales para el análisis a priori y luego, en el mismo análisis fueron surgiendo otras. Finalmente, las categorías y sub-categorías son:

Tabla 9: Categorías y sub-categorías del análisis

Categorías	Definición	Sub-categorías
Sugerencias a incluir en el algoritmo de la división	Son las sugerencias que se han propuesto para la enseñanza del algoritmo estándar de la división y que se pusieron en práctica en las sesiones con el estudiante.	- Inserción de cabeceras - Restos parciales - Flexibilidad del cociente - Transformación del dividendo
Casos para la enseñanza del algoritmo de la división	Son los 6 casos que se han distinguido y que tienen diferente complejidad para los estudiantes al aprender el algoritmo a nivel simbólico. En las sesiones, el estudiante trabajó todos estos casos.	- C1: Combinaciones multiplicativas básicas. - C2: Resto igual a 0 o distinto de 0 que no coincida con las CMB y sin restos parciales. - C3: Restos parciales con resto igual o distinto de 0. - C4: El dígito de la posición de mayor valor del dividendo es menor que el divisor. - C5: Presencia de ceros al medio del cociente. - C6: Presencia de ceros al final del cociente.

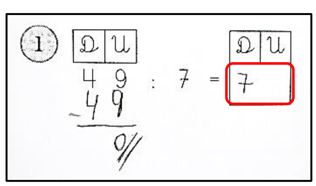
Dificultades de aprendizaje	Son las dificultades que la teoría postula que un estudiante puede enfrentar en el algoritmo estándar de la división y que se analizan es este estudio.	- Propiedad distributiva. - El dígito de la posición de mayor valor del dividendo es menor que el divisor. - Presencia de ceros en el cociente. - Cantidad de dígitos del divisor.

6.1. Sugerencias a incluir en el algoritmo de la división

En este primer apartado del análisis se revisará cómo influyeron las sugerencias que propone la literatura para la enseñanza del algoritmo estándar de la división y que se pusieron en práctica en las sesiones con el estudiante. En total son cuatro sugerencias: 1) Inserción de cabeceras al momento de resolver una división, tanto en el divisor como en el dividendo. 2) Incluir los restos parciales. 3) Flexibilidad en el cociente, ya que se puede ir construyendo en el paso a paso. 4) Transformación del dividendo, ya que al incluir el trabajo de restos parciales, es el dividendo el que se va modificando.

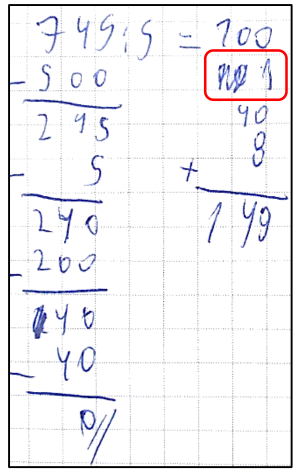
6.1.1. Inserción de cabeceras

Con respecto a la inserción de cabeceras en el dividendo y en el cociente al trabajar de forma simbólica, su importancia radica en que recuerda al estudiante que cada dígito de un número, dependiendo de la posición, tiene un valor diferente. En la evaluación inicial, el estudiante no reparó en las cabeceras y solo registró el resultado utilizando el espacio desde izquierda a derecha:

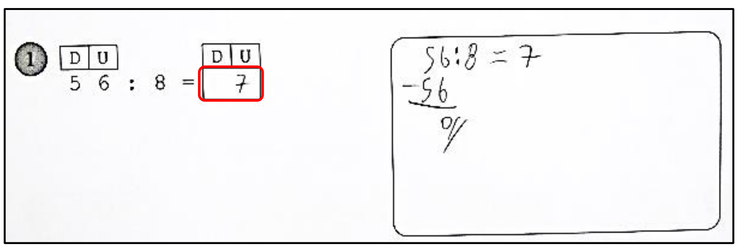


Durante las sesiones de trabajo, el estudiante comienza a trabajar de forma paralela con el material y a nivel simbólico, y al escribir como adición el cociente, en una ocasión realizó lo siguiente:

I: ¿Pero cuánto quedó en cada grupo?
E: Ah 1 (escribe 1 debajo del 1 del 100 que había escrito antes)
I: Tienes que escribir a la izquierda porque es una unidad.
E: Si sé… ah me confundí (se tapa la cara)



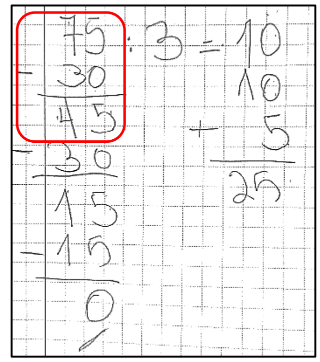
Donde el estudiante se hace consciente de que no es igual ubicar el dígito en la posición de las centenas que en las unidades. Y ya en la evaluación final, se observa que el estudiante repara en la presencia de las cabeceras y las utiliza:

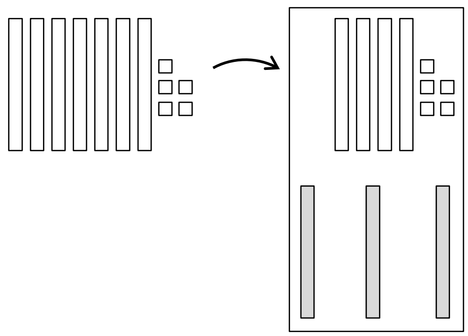


6.1.2. Restos parciales

Una segunda sugerencia que se desprendió del marco teórico es que se incluyan los restos parciales que se van obteniendo al resolver una división con el algoritmo estándar, ya que permite al estudiante utilizar menos memoria de trabajo, lo que a un estudiante con déficit atencional puede permitirle cometer menos errores.

I: Tú hiciste una división (tomo el cuaderno) que era 75 : 3. Entonces lo que tú primero hiciste fue poner 1 barrita, ¿cierto?
E: Sí
I: (escribo en el cuaderno) Entonces tú probaste con 10. ¿3 por 10?
E: 30
I: 30, ¿cuánto nos queda por repartir? 75 menos 30 es 45.



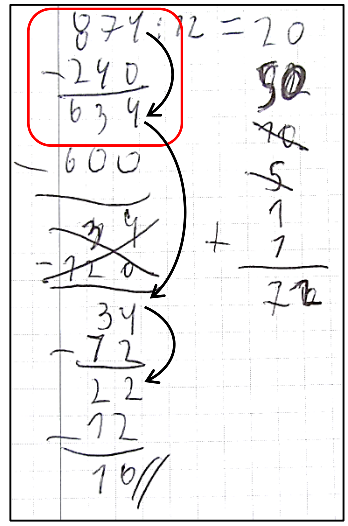


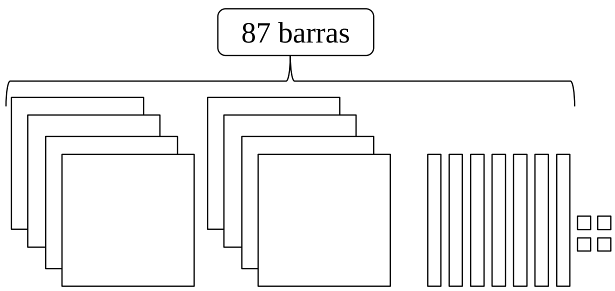
El registrar los restos parciales, le permite al estudiante dejar de resolver ese proceso en su memoria y dejarlo registrado, para poder revisarlo en caso de algún error. Es simplemente registrar un paso que en el algoritmo estándar se realiza mentalmente.

6.1.3. Transformación del dividendo

En directa relación con la sugerencia anterior es la transformación del dividendo, y en esto ayuda el material, ya que le permite al estudiante tener conciencia de que el dividendo o "nuevo" dividendo son los elementos que no ha repartido aún. En el siguiente ejemplo, el estudiante pasa de repartir 874 a 634, y con el uso del material él puede visualizar esta acción.

I: 874 : 12
E: (Representa con el material 874)
I: (Tomo las placas y las pongo una al lado de otra) Mira, tienes muchas de estas (barra) para repartir (haciendo alusión a que las placas están formadas por 10 barras), porque todas estas (placas) están formadas por estas (barras), una al lado de la otra. Tienes que formar 12, ¿te alcanzará para dar?... 100 no te alcanza porque tienes solo 8 (mostrando las placas), ¿pero te alcanzará para darle 20 a cada grupo?
E: Sí
I: Ya, prueba con 20.
E: (comienza a trabajar en su cuaderno, usa la calculadora para 12 por 20)
I: ¿Te quedan cuántas por repartir?
E: 634





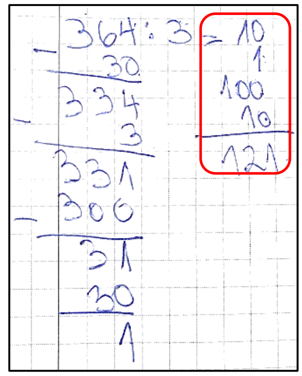
En la división el estudiante transforma tres veces el dividendo: 634, 34 y 22.

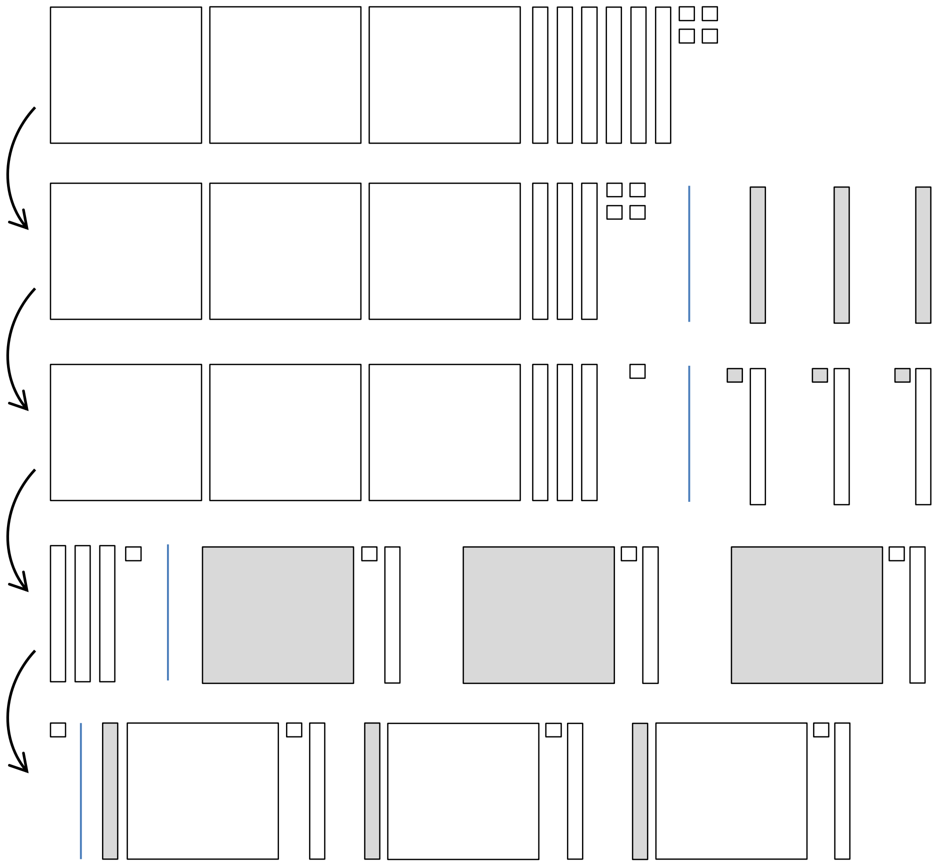
6.1.4. Flexibilidad del cociente

Y la última sugerencia es la flexibilidad del cociente, donde el estudiante puede ir construyéndolo en varios pasos y luego realizar una adición. Esto permite al estudiante poder tener sus propias estrategias para llegar al cociente y también probar con números que para él sean más cómodos de trabajar como lo son las potencias de 10, ya que es más sencillo realizar la multiplicación. A continuación se presentan dos ejemplos en los que el estudiante va construyendo el cociente.

Primer ejemplo:

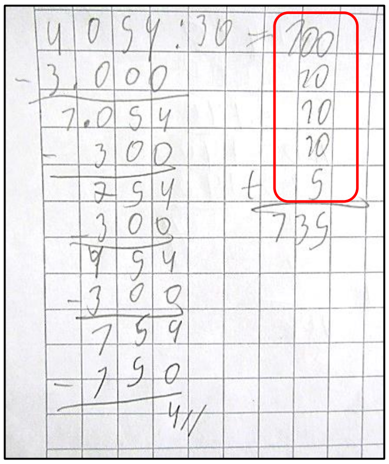
I: Ahora vamos a recordar cómo lo hacíamos en el papel. ¿Te acuerdas que lo íbamos haciendo en paralelo? (escribiendo en el papel) Entonces era 364:3, ¿qué fue lo primero que repartiste?
E: los 10
I: Pusiste 10, ¿cuánto es 10 por 3?
E: 30
I: ¿364 – 30? 334.. ¿Y después que repartiste?
E: 1
I: Ya 1, ¿1 por 3?
E: 3
I: Ya restamos y nos queda 331. ¿Después que repartiste?
E: 100
I: ¿3 por 100?
E: 300
I: ¿Y después que repartiste?
E: nada más
I: Si…
E: Ah, 10 más
I: ¿10 por 3?
E: 30
I: ¿Puedo seguir repartiendo si me queda 1 cubito?
E: No
I: El resultado es 121 (realizando la adición en el cuaderno) que es lo mismo que obtuviste tú (con el material).





Segundo ejemplo:

> *I: 4054:30… Esta de nuevo no podemos representarla porque necesitamos 4000 y tenemos solo 1000. Entonces, ¿qué podríamos hacer?... Una estrategia que yo te recomiendo es ver qué pasa si le doy 1, si le doy 10, si le doy 100, si le doy 1000, dependiendo del número, por ejemplo… si le damos 1000 (mostrando la división en el cuaderno), ¿Cuánto es 30 por 1000?*
> *E: 30000*
> *I: ¿Te alcanza?*
> *E: No*
> *I: No le podemos dar 1000, pero quizás si le podemos dar 100. ¿Cuánto sería 30 por 100?*
> *E: 3000*
> *I: ¿Y te alcanza?*
> *E: Sí (hace el proceso es su cuaderno)*



Si bien, el desarrollo de la división es más extenso que si no se utilizara la flexibilidad del cociente, se observa que fue una sugerencia útil para el estudiante, ya que presentaba pocas estrategias de cálculo mental y tampoco tenía agilidad al recuperar los resultados de las CMB, por lo tanto, encontrar el cociente en la cantidad mínima de pasos podría generar más dificultades en el estudiante.

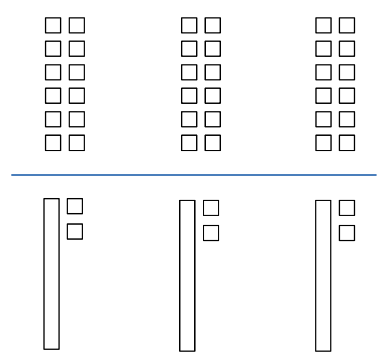
6.2. Casos para la enseñanza del algoritmo de la división

La segunda categoría del análisis corresponde al proceso de enseñanza del algoritmo estándar de la división que se trabajó con el estudiante, dividido en seis casos, los cuales, son sugeridos en la bibliografía del marco teórico.

A continuación, se presentará un ejemplo de cada uno de los casos resueltos con el estudiante. A medida que van pasando las sesiones, el estudiante pasa por cuatro formas de resolver, la primera es utilizar el material sin hacer el traspaso a nivel simbólico, luego, trabaja de forma paralela con el material y a nivel simbólico. Una tercera forma es que apoya ciertos procesos en el material, pero otros solo a nivel simbólico, y por último trabaja a nivel simbólico dejando el uso del material. Estas formas de trabajo también se evidenciarán en los ejemplos que se presentan.

6.2.1. C1: Combinaciones multiplicativas básicas (CMB)

En este caso, el estudiante evidencia de forma concreta la relación existente entre la multiplicación y la división, representando ambos casos y observando que las representaciones coinciden.



I: 3 por 12.
E: (forma 3 grupos de 12 unidades)
I: (formo 3 grupos con 1 barra y 2 unidades) ¿Yo representé lo mismo que tú?
E: Sí
I: SÍ, ¿cierto?... ¿cuál es la diferencia?
E: (se queda callado con las manos en la boca)
I: Que representamos de distinta forma el 12… tú solo utilizaste unidades, ¿y yo utilicé?
E: ehh decenas
I: y unidades! Porque el 12 tiene 1 decena y 2 unidades. (desarma la representación con decenas, dejando solo la inicial del estudiante) Ahora si quisieras representar 36:3, ¿cambiaría esa representación?
E: SÍ
I: ¿Cómo la representarías?
E: (toma 3 barras y se queda mirando la otra representación. Luego de un rato, toma 6 unidades y las ponen al lado de las 3 barras)
I: ¿y dividido 3?, ¿cómo dividimos este número en 3?
E: Así! (y muestra la representación de 12 por 3 hecha utilizando solo unidades)

I: Pero divide este que representaste tú en 3.
E: No sé
I: (forma tres grupos, cada uno con una barra y dos unidades) Sí o no?
E: Sí
I: ¿todos los grupos tienen la misma cantidad?
E: (afirma con la cabeza)
I: ¿Y este grupo tiene lo mismo que ese? (haciendo el vínculo entre la representación de la multiplicación y de la división)
E: Sí
I: Entonces, ¿se representaban igual?
E: Sí

Si bien no se confirmó con el estudiante, pero pareciera que no era explícito para él la relación existente entre la multiplicación y división, debido a que no le fue sencillo o evidente que la representación de la multiplicación era útil para representar la división que pertenecía a la misma familia de operaciones.

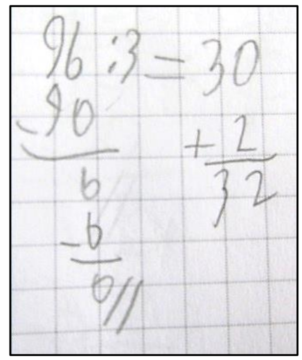
6.2.2. C2: Resto igual a 0 o distinto de 0 que no coincidan con las CMB y sin restos parciales

En este caso, el estudiante incorpora el trabajo de divisiones con resto distinto de cero. Inicialmente, no asocia el concepto, pero al verlo representado en el cuaderno, lo reconoce. Es probable que no tenga un trabajo de interpretación del resto, sino que sólo lo conozca porque es como termina de resolver una división utilizando el algoritmo.

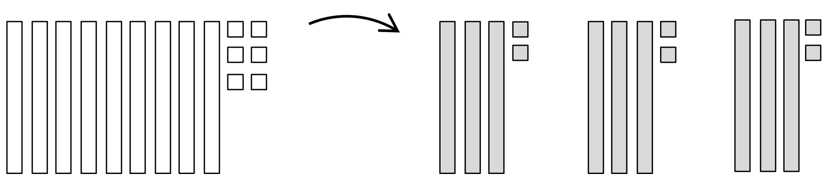
I: Ya, ¡hagamos otra! 46:3
E: (representa 46 y mientras lo hace me mira para recibir aprobación de lo que hace)
I: Dividido 3
E: (forma 3 grupos con una barra cada uno)
I: ¿Qué puedes hacer ahora con esa barra?
E: La cambio (muestra las unidades)
I: muy bien
E: (toma 10 unidades)
I: ahora empieza a repartirlos
E: (comienza a repartir de a 5 unidades y titubea)
I: dale
E: (continúa y le sobra uno)
I: ¿Qué pasó aquí?, ¿qué sobró?
E: (en silencio con la pieza que sobró en su mano)
I: ¿Cuántos sobraron?
E: 1
I: ¿Y ese cubito lo podemos dividir?
E: no
I: ¿Escuchaste alguna vez decir que hay divisiones que tienen resto distinto de cero?

E: (niega con la cabeza)
I: en este caso representamos 46:3 (escribiendo en el cuaderno a nivel simbólico) y a ti te dio que en cada grupo había 15 y te sobró 1. Ese de abajo es el resto. Yo creo que sí lo conocías ¿o no?, ¿alguna vez te dio una división con resto distinto de cero?
E: ah, sí
I: Viste!

Es en este caso donde el estudiante comienza a trabajar de forma paralela con el material y a nivel simbólico, estableciendo la relación entre ambas representaciones.



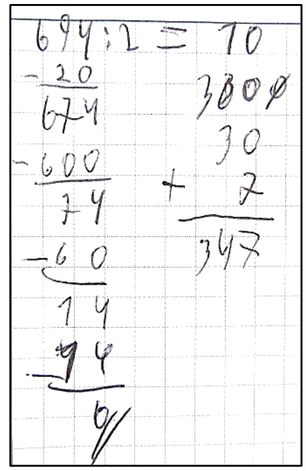
I: 96:3
E: (lo anota en el cuaderno. Representa el 96. Forma 3 grupos de 1 barra cada uno. Y le da una segunda barra a cada grupo) ¿Le puedo dar otra?
I: Sí, obvio que sí
E: (le da una tercera barra a cada grupo)
I: ¿Cuánto le diste a cada grupo?
E: 30 (lo registra en el cuaderno)
I: ¿y 30 por 3?
E: 90
I: muy bien.
E: (realiza la resta y obtiene como resultado 6)
I: super
E: (da 2 unidades a cada grupo)
I: ¿cuánto le volviste a dar?
E: 2 (lo anota en el cuaderno)
I: ¿2 por 3?
E: 9, no, 6 (lo anota)
I: ¿Te quedaron por repartir?
E: no
I: entonces 96:3 es 32 y de resto me quedó?
E: 0



6.2.3. C3: Restos parciales con resto igual o distinto de 0

En este caso el estudiante no presenta más dificultades que en los dos casos anteriores. Sigue más centrado en el trabajo con el material, pero ya comienza a seguir el procedimiento a nivel simbólico con mayor agilidad.

Así que vamos a empezar con 694:2
E: (Representa con el material el número 694)
I: Dividido 2
E: (Forma 2 grupos con 1 barra cada uno y luego agrega 2 placas a cada uno) ¿Se puede así?
I: Sí
E: (Agrega 1 placa y 3 barras más a cada grupo)
I: ¿Qué más puedes repartir?
E: (Agrega 2 unidades a cada grupo)
I: ¿Y esa no la puedes repartir? (señalando 1 barra que E tiene en las manos)
E: Cambiarlo (guarda la barra y saca 10 unidades. Luego forma 2 grupos de a 5 y las agrega a los grupos)
I: ¿Cuál es el resultado?
E: ¿De todo esto?
I: Sí, de 694:2. ¿Cuánto te dio?
E: 300, 40 y 7
I: ¿Y te quedó resto?
E: No

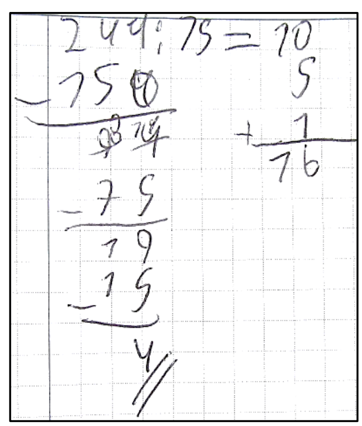


En este ejemplo, el estudiante dice la respuesta como “300, 40 y 7”, haciendo alusión a la representación que tiene con el material, se hace explícito el valor posicional de cada dígito, lo que está oculto en el algoritmo estándar cuando no se trabaja con la flexibilidad del cociente.

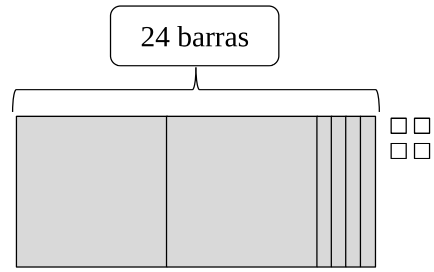
6.2.4. C4: El dígito de la posición de mayor valor del dividendo es menor que el divisor

En este caso se incorpora el trabajo con dos dígitos en el divisor y además, es importante mencionar que durante el diagnóstico presentó dudas al resolver este tipo de divisiones.

I: Ahora anota 244:15. ¿Cómo lo harás?
E: (representa con el material 244 de forma canónica)
I: ¿En cuántos grupos tienes que repartirlos?
E: 15 (toma la placa en actitud de cambiarla por 10 barras)
I: Mira, antes de que las cambies, (pongo una placa al lado de la otra y a continuación las 4 barras), si estas de aquí (decenas que forman las placas) fueran como estas (barras sueltas). ¿Cuántas de estas tendrías? (mostrando una barra)
E: 20 (cuenta las de las placas)
I: ¿Y hasta acá? (mostrando las 4 unidades sueltas) 24
E: (se toca la cabeza)
I: Tengo 24 barritas, si le doy una a cada grupo, ¿me alcanza?
E: Si
I: Dale
E (registra en su cuaderno)
I: ¿15 por 10? Acuérdate de lo que aprendimos.



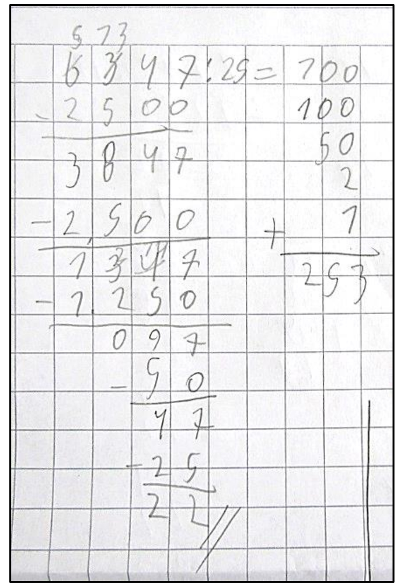
E: 150 (y continúa trabajando en el cuaderno de forma autónoma)
I: Te quedan 94, ¿cierto? (mostrando el resultado en el cuaderno). Entonces, eso sí lo podemos representar. (deja sobre la mesa 9 barras y 4 unidades)
E: (Afirma)
I: ¿Cuánto le podríamos dar a cada grupo?, ¿me alcanza para darle 10?
E: No
I: Démosle 5
E: (comienza a trabajar en su cuaderno)
I: 5 por 15, ¿tienes celular?
E: Sí
I: Usa la calculadora de tu celular. ¿Sabes dónde está la calculadora de tu celular?, ¿la has usado alguna vez?
E: No (se demora en encontrarla). 75 (continúa trabajando en su cuaderno)
I: Entonces, ¿cuántas te quedan por repartir?
E: 19
I: (deja sobre la mesa 1 barra y 9 unidades), ¿cómo repartirías esto?
E: (toma las unidades con intención de repartir)
I: ¿Cuántas hay ahí?
E: ¿En total?
I: Sí
E: (comienza a contar) 19
I: ¿Te alcanza para darle 1 a cada grupo?
E: No… Síii (comienza a trabajar en su cuaderno)
I: Te quedaron 4 (deja sobre la mesa 4 unidades), ¿puedes seguir?
E: No
I: Termina la división
E: 16, listo.
I: ¿16 y cuánto te dio de resto?
E: 4



El estudiante, al trabajar con el material concreto, pareciera no evidenciar las dificultades que tuvo en el diagnóstico. También puede observarse cómo se comienzan a introducir estrategias que eviten la dependencia del material, al pedirle que no haga el reagrupamiento, sino que solo lo visualice en el material.

En el siguiente ejemplo se observa la primera vez en que el dividendo es superior al material disponible, por lo que no puede realizar toda la división con el apoyo de los bloques, pero ciertos pasos sí.

I: Sigamos con la que viene. 6347:25. Esta es más difícil porque no podemos representar ese número (6347) porque tenemos solo 1000 (mostrando la unidad de mil del material). Entonces lo que yo te propongo que hagamos es… ¿Cuánto es 25 por 100?



E: 2500
I: ¿Me alcanzaría para darle 100 a cada grupo? (mostrando el dividendo en el cuaderno)
E: (afirma con la cabeza)
I: Sí, ¿cierto? Porque es menor que 6347… anota los 100.
E: (registra en el cuaderno)
I: ¿Cuánto te queda por repartir?
E: 3847
I: ¿Te alcanzaría para darle 100 de nuevo a cada grupo? (mostrándole el resultado de 100 por 25)
E: (Afirma con la cabeza)
I: Dale
E: (registra el proceso en su cuaderno) 1347
I: ¿Te alcanza para darle 100 a cada grupo?
E: Sí
I: Mira los números
E: Ah no no no
I: No te alcanza, ¿y si le repartimos 50?, ¿alcanzará?
E: (asienta con la cabeza y comienza a hacer el proceso en su cuaderno)
I: Realiza la multiplicación (25 por 50) allá abajito (señalando la parte inferior de la hoja)
E: (se queda pensando)
I: Aquí tienes las tablas.
E: ¿Dónde lo ponía? (haciendo referencia de cómo registrar el resultado en la multiplicación)… ah aquí, aquí… (sigue con los cálculos) 97
I: Ya, ¿cuánto le podrías dar a cada grupo?
E: (se queda en silencio)

I: Si le das 1 a cada grupo, ¿cuántos ocuparías?
E: ¿1?
I: Sí, ¿cuántos grupos tienes que formar?
E: Eh… 25
I: 25.. y si le das 1 a cada grupo, ¿cuántas ocupas?
E: (me mira)
I: Usarías 25… ¿y si usaras 2 en cada grupo?, ¿cuántas ocuparías?
E: (me mira)
I: Mira (representa con el material 2 grupos de 25)… ¿cuántos hay?
E: ¿En total?... 50
I: Ya, 25 por 2 es 50, ¿te alcanzará?
E: Sí (realiza el proceso en su cuaderno)

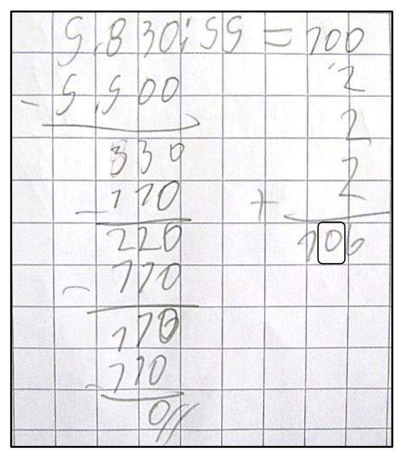
I: ¿Te alcanza para volver a darle 2 a cada grupo?
E: No
I: Entonces dale 1
E: (realiza el proceso en su cuaderno) 22
I: ¿Cuál es el resultado de la división?
E: 253
I: Super bien.

Además, se observa que el estudiante aún necesita apoyo al seguir el procedimiento a nivel simbólico porque hay situaciones, como las destacadas en el recuadro, que no es capaz de visualizar mentalmente. Por ejemplo, tenía que repartir 97 en 25 y se le pregunta cuánto ocuparía si repartiera 1, y no responde, pero al representarlo con los bloques base 10 su respuesta es rápida y certera. Pareciera que aún prefiere visualizar el reparto de forma concreta, antes de llevarlo al papel.

6.2.5. C5: Presencia de ceros al medio del cociente

En este caso, el estudiante presentó errores en el diagnóstico, pero se observa que al trabajar con el material y las sugerencias a nivel simbólico que se propusieron en el apartado anterior, desaparecen estas dificultades. El estudiante cada vez es más autónomo en su trabajo.

I: 5830:55… ¿cuánto le vas a dar a cada grupo?
E: 100
I: Ya, maravilloso, me encanta.
E: (realiza los cálculos)
I: ¿Te alcanza para darle 100 de nuevo?
E: No
I: Ya, prueba con tu calculadora
E: 10
I: ¿Te alcanza para darle 10?
E: No (saca su celular)… 55 por 2 son 110
I: Ya, dale 2
E: (hace los cálculos)
I: ¿Te alcanza para darle de nuevo 2?
E: Sí (hace los cálculos hasta finalizar la división) 106
I: Ya

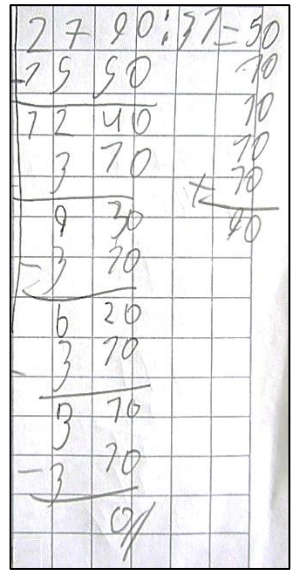


Al flexibilizar el cociente, el estudiante no enfrenta el 0 en el cociente, sino que solo aparece al realizar la adición final para expresar el dividendo. Es por este motivo que este caso no le presenta dificultades a diferencia del diagnóstico. Además, al usar el material para representar las divisiones, el estudiante entiende que repartió centenas y unidades.

6.2.6. C6: Presencia de ceros al medio del cociente

Al trabajar este caso, el estudiante ya no utiliza el material concreto y logró total autonomía al desarrollar las divisiones a nivel simbólico. Se observa que prefiere trabajar con potencias de 10 al construir el cociente, e incorporó el trabajo con restos parciales y la transformación del dividendo.

I: 2790:31… ¿Con cuál vas a probar?
E: Con 10
I: Prueba con 50
E: (usa la calculadora para resolver 31 por 50 y continúa) 10?
I: Sí, prueba con 10
E: (continúa hasta terminar la división)
I: ¿Cuánto te dio?
E 90 con resto 0.



Por último, de los resultados del diagnóstico y la evaluación final, se puede destacar que en el diagnóstico el estudiante presentó dificultades al trabajar con un divisor de más de un dígito y cuando hay ceros al medio del cociente (ambos ejercicios estuvieron incorrectos), y en la evaluación final estas dificultades desaparecieron y los errores que se cometieron fueron de cálculo y no asociados a las dificultades propias de cada caso. (Para ver el desarrollo de cada división, ir al anexo 6)

6.3. Dificultades

Por último, se analizarán las dificultades de aprendizaje que puede provocar la enseñanza del algoritmo estándar de la división y que desde el marco teórico se desprendieron. Se presentan cuatro dificultades, la más general de ellas es la propiedad distributiva, la cual está oculta en los pasos del algoritmo estándar, pero es la propiedad que lo justifica y por tanto le da sentido al algoritmo. Las otras tres dificultades son más específicas, y corresponden a: el dígito de la posición de mayor valor del dividendo es menor que el divisor (por ejemplo, 756 : 8), la presencia de ceros en el cociente y la cantidad de dígitos del divisor.

6.3.1. Propiedad distributiva

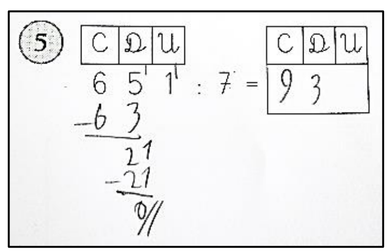
Con respecto a la propiedad distributiva, se observa que para el estudiante no es evidente la justificación del algoritmo, sino que simplemente lo aplica. Al preguntarle por 651 : 7, se presenta el siguiente diálogo:

> *I: ¿por qué nos preguntamos cuántas veces cabe el 7 en el 6, si estamos dividiendo 7 en 651?, ¿sabes por qué?*
> *E: (mueve la cabeza negando)*

Con el uso del material, el estudiante representaba de forma canónica el dividendo, por tanto sabía que estaba dividiendo 6 centenas y al no poder, reagrupaba en decenas, dejando 65 decenas. Por tanto, el uso del material le permite al estudiante hacer explícito el trabajo de esta propiedad, que anteriormente no comprendía o por lo menos su lenguaje no lo evidenciaba.

6.3.2. El dígito de la posición de mayor valor del dividendo es menor que el divisor

Otra dificultad que la teoría postula al aprender el algoritmo estándar de la división se presenta cuando el dígito de la posición de mayor valor del dividendo es menor que el divisor, por ejemplo en 651 : 7, el estudiante explica de la siguiente forma lo que realizó:

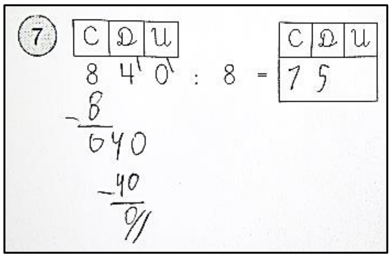


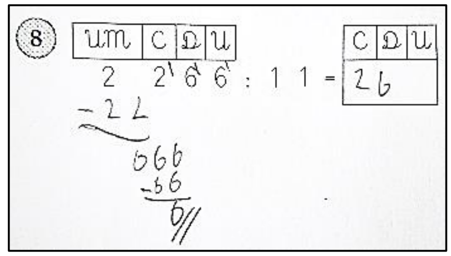
> *I: Lo que te quiero pedir ahora, para terminar, si me puedes explicar, por ejemplo… ¡esta! (señalando el ejercicio 5). ¿Cómo la resolviste?, ¿qué fue lo que hiciste tú para poder resolverla?*
> *E: Vi si el número 6… pero no me alcanzaba, así que junté el 6 con el 5, daría 65. Entonces, busqué una multiplicación que me diera cerca de 65 o igual a 65, y me salió 63. Luego, lo resté, me quedaron 2, bajé el 1. Ahh pero, el número multiplicado?, lo digo?... El número multiplicado que me diera cerca de 65, era por 9, y me dio 63.*

Si bien, el proceso mecánico es correcto, el estudiante desnaturaliza los números, porque expresa “junté el 6 con el 5, daría 65”, lo cual no es correcto, ya que 6 y 5 es 11. Además no es 6, sino 6 centenas o 600; ni 5, es 5 decenas o 50. Esta expresión de “juntar los números” se justifica por el uso de la comilla en el algoritmo estándar de la división para marcar en el dividendo lo que se está dividiendo, ya que no se trabaja con todo el número. En el ejemplo anterior, como 6 centenas no se pueden repartir en 7, se reagrupan en decenas y se dividen 65 decenas en 7.

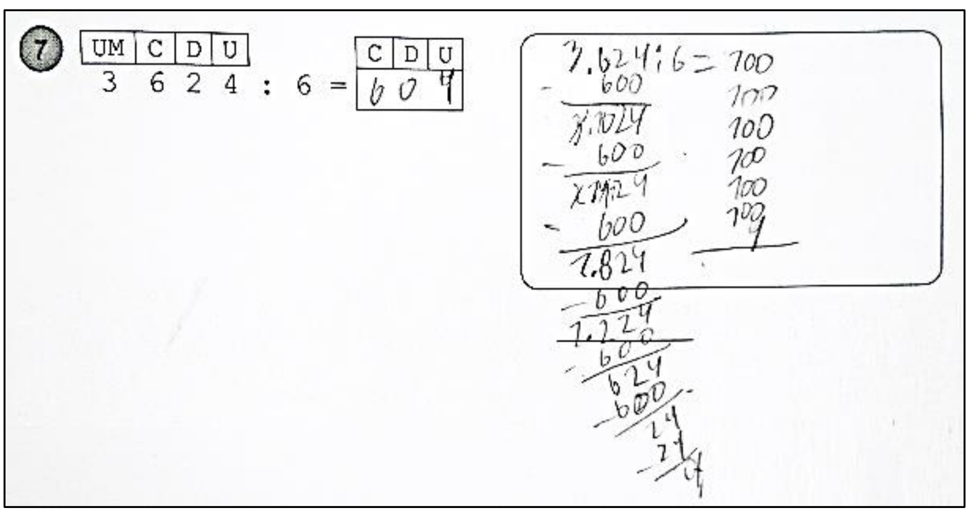
6.3.3. Presencia de ceros en el cociente

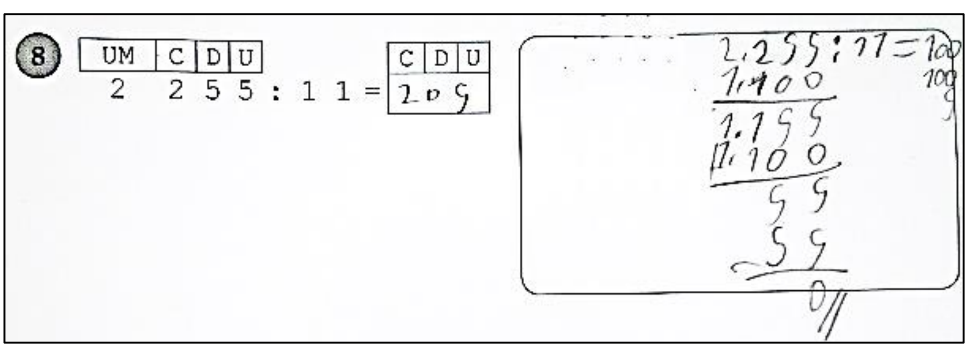
Con respecto a la dificultad sobre la presencia de ceros, se observa en el diagnóstico esta dificultad en los ejercicios 7 y 8, donde en la primera el resultado es 105 y en la segunda 206. Ambos casos, aluden a la presencia de ceros en el cociente al medio de la cuenta. En la misma evaluación había dos casos donde la presencia de ceros era al final del cociente y fueron resueltos de forma correcta. Por tanto, el estudiante presenta dificultades en uno de los casos.





Pero en la evaluación final, el estudiante resuelve correctamente los ejercicios que tienen ceros al medio o al final del cociente, como se muestra a continuación:





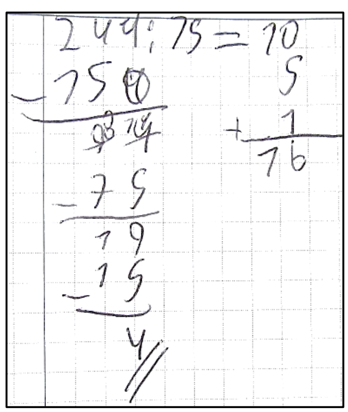
6.3.4. Cantidad de dígitos del divisor

Finalmente, sobre la dificultad de que la cantidad de dígitos del divisor sea mayor que 1, en la evaluación inicial el estudiante pregunta al llegar al sexto ejercicio que coincide con ser el primero en el que el divisor tiene dos cifras.

> *E: Tengo una duda en este.*
> *I: Dígame*
> *E: ehh, el 12, no sé cómo hacerlo aquí (552:12).*
> *I: pero este (señalando el ejercicio anterior) lo pudiste hacer super bien. ¿Cuál es la diferencia con ese?*
> *E: los dos números (señalando el divisor)*

El estudiante finalmente sigue la lógica aplicada en los ejercicios donde el divisor tiene una cifra, preguntándose ¿cuántas veces cabe? y utilizando una comilla para juntar los primeros dos dígitos del dividendo.

Durante las sesiones, el estudiante no presenta esta dificultad, ya que el material funciona de la misma forma para un divisor con 1 dígito o con 2. Y posteriormente, al trasladar el trabajo del nivel concreto al simbólico, el estudiante aplica la flexibilidad del cociente lo que le permite obviar esta dificultad.



Para finalizar el análisis, se mencionarán algunos puntos que no se incluyeron en los apartados anteriores, pero merecen ser mencionados por su relación con el uso del material concreto.

En el aprendizaje de la matemática, los estudiantes utilizan diferentes representaciones y toma importancia en las representaciones concretas, como es usar un material, que sea el estudiante quien decida cuando dejarla y quedarse con lo simbólico, o cuando volver a lo concreto si lo necesita. Por ejemplo, el uso de los dedos para resolver cálculos pequeños:

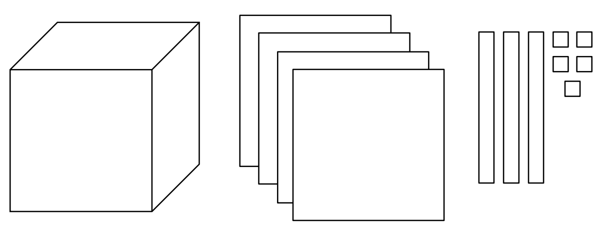
I: Revisa eso… 7 – 4
E: Ay
I: usa los dedos
E: no, mi hermana salió de cuarto medio y usa los dedos
I: ¿Y qué tiene? Todo el mundo usa los dedos, hasta la gente exitosa usa los dedos, no hay ningún problema, los dedos son tuyos, nadie te puede retar por usarlos.
E: La profe retaba a la I, ¿te acordai? (mirando a E2)
I: Si no es malo, la gente adulta también los usa, yo también los uso, todo el mundo los usa.
E2: Sí, yo también uso los dedos a veces
I: ¿viste?
E: es que I hacía con los dedos y decía no!, tienen que acordarse!
I: Usa los dedos, conmigo por lo menos no hay problema.

Otro aspecto es que el estudiante en ocasiones necesitaba recordar lo que hacía con el material para darle sentido a lo que estaba haciendo a nivel simbólico. Es en estas ocasiones donde se hace evidente la relación del trabajo acorde a las necesidades del estudiante, a su estilo de aprendizaje.

I: Muy bien. Sigamos con 122:2. ¿Tienes que formar cuántos grupos?
E: (Se queda mirando la operación anotada en su cuaderno)
I: Si tuvieras que ocupar el material, ¿cuántos grupos formarías?
E: 2

Por último, mencionar que el docente puede ir sugiriendo el traspaso hacia lo simbólico, dejando de lado el uso del material concreto, pero si el estudiante no está preparado no se debe forzar.

I: Ya, anota esta división, 1.435:5. Vamos a intentar hacerla sin el material, pero si nos vemos complicados, usamos el material. Ahí tienes las tablas por si las necesitas. Mira tienes 1.435:5, ¿le podrás dar 100 a cada grupo?



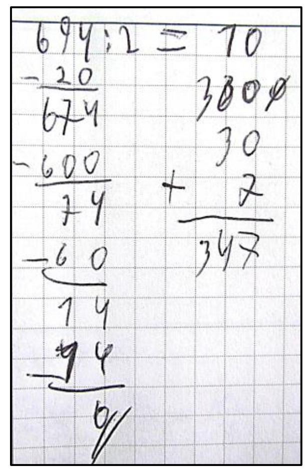
E: (me mira y luego se toca la cabeza)
I: Porque lo vas a dividir en 5, entonces si yo le doy 100, 100, 100, 100, 100 (moviendo la mano sobre la mesa, como si pusiera una placa en cada grupo) ¿Cuántas voy a ocupar en los 5 grupos?
E: No entiendo (sigue con las manos en la cabeza)
I: (tomo 5 placas y las pone sobre la mesa), ¿Cuántas tengo aquí?
E: ¿En total?
I: Sí
E: 500
I: Hay 500, ¿me alcanza?, ¿este número (señalando el dividendo) es mayor o menor que 500?
E: Mayor

Debe ser el estudiante quien de a poco deje el material, y así sucedió en este estudio de caso, que ya en la última sesión el estudiante abandonó el material.

Por último, se quiere destacar que en este estudio se trabajó de forma paralela con el material y a nivel simbólico, para que el estudiante pudiera hacer conexiones entre ambas representaciones y comprendiera el porqué del algoritmo.

I: Ahora lo vamos a hacer en el cuaderno, sin eliminar esto (moviendo en la mesa la representación de la división con el material) 694:2 (mientras E escribe) ¿Qué es lo primero que hiciste?

E: Puse este que es la centena (mostrando una barra)



I: ¿Centena?

E: Decena

I: Entonces, ¿cuánto le pusiste a cada grupo?

E: 10 (escribe en el cuaderno 1)

I: ¿Esto es 1? (mostrando la barra)

E: Ah no, es 10

I: ¿Y de ahí qué hacías?

E: Ah (se tapa la cabeza)

I: Dijiste que le diste 10 a cada grupo (levanta 1 barra de cada grupo y se las muestra a E) Entonces ¿10 por 2?

E: Ah 20

I: Y ahí lo anotamos acá para ver cuántos nos quedan por repartir

E: (registra en el cuaderno)

I: ¿Después qué hiciste?

E: Puse las centenas

I: Entonces, ¿cuánto le diste?

E: 100

I: ¿Y le diste 1 a cada grupo?

E: No, 3…300

I: Entonces, 300 por 2, porque le diste 300 a este y 300 a este (mostrando la representación)

E: 600

I: ¿Después qué hiciste?

E: Agregué 30

I: Ya, ¿y 30 por 2?

E: 60

I: Y ahí te quedaron 14… ¿y ahí cuánto le diste a cada uno?

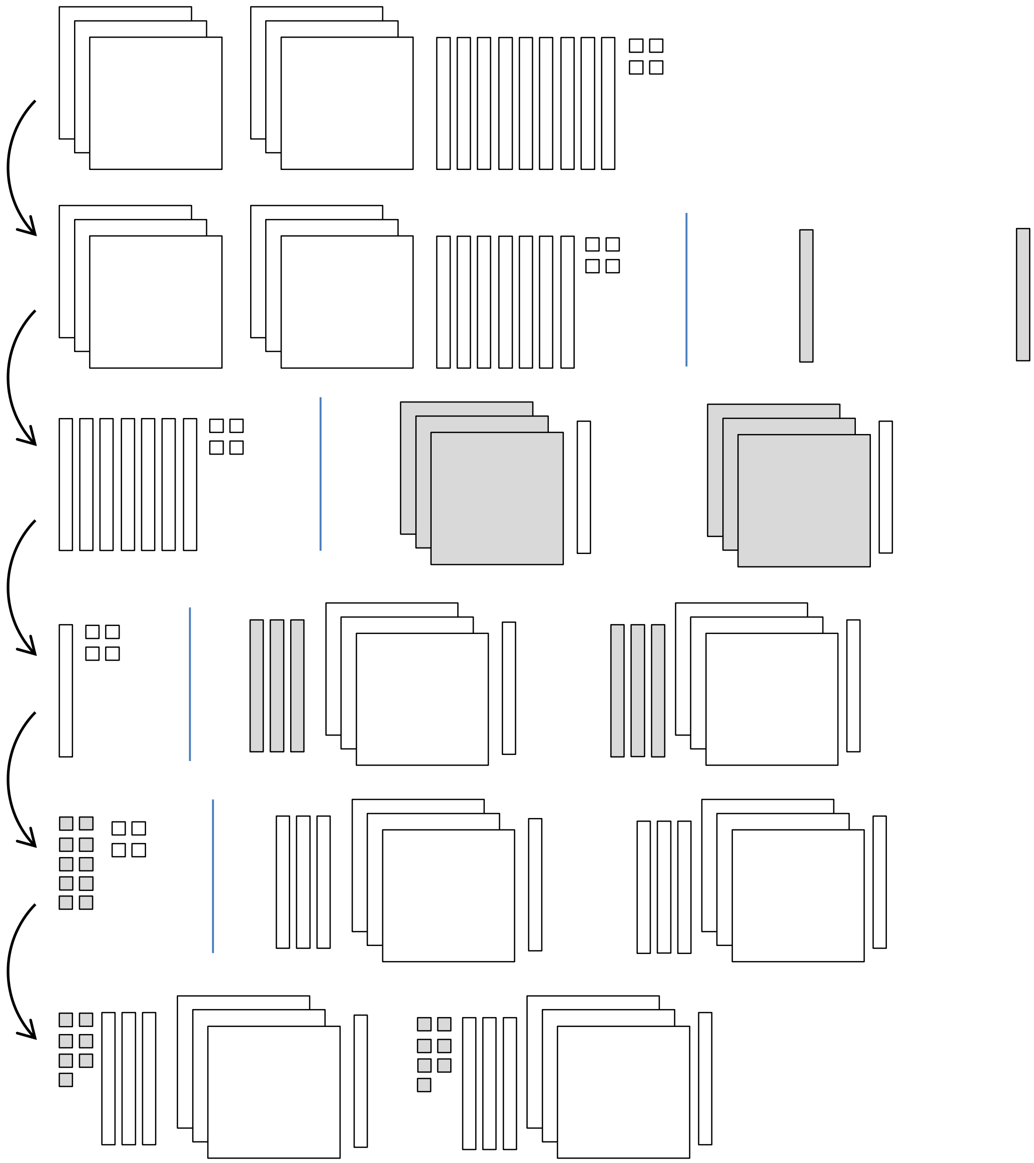
E: (cuenta las unidades) 7

I: ¿7 por 2?

E: 14

I: ¿Cuál es el resultado de tu división?

E: (realiza la adición en su cuaderno de forma correcta)



Como se mencionó en el marco teórico, el material por sí solo no genera conocimientos, sino que depende de la intención del docente, y su importancia en el proceso de aprendizaje radica en que el estudiante es capaz de vincular dos representaciones (concreta y simbólica), dándole sentido a esta última, lo que le permite generar conocimientos fundamentados y que el estudiante pueda aprehender conceptos abstractos sin dificultades.

7. Discusión y conclusiones

La matemática es una disciplina que trabaja conceptos abstractos y por ello, es importante que los estudiantes puedan trabajar diferentes representaciones de los conceptos, estableciendo relaciones entre ellas y a partir de un registro concreto acceder a uno simbólico. Si las representaciones son variadas y el estudiante es capaz de transitar entre ellas, significa que ha comprendido el concepto profundamente.

En este proyecto de tesis se abordó cómo influye el uso del material concreto en la comprensión del algoritmo estándar de la división en un estudiante con dificultades de aprendizaje en matemática, para lo cual se plantearon cuatro objetivos específicos. A continuación, se mencionarán las conclusiones obtenidas en este estudio a partir de cada uno de los objetivos y cómo estos se relacionan con las categorías presentadas en el análisis.

El primer objetivo fue “Generar una propuesta para enseñar el algoritmo estándar de la división con material concreto”. Para lograrlo fue necesario consultar diferentes referentes bibliográficos, donde finalmente se enunciaron seis casos diferentes que deben enfrentar los estudiantes al momento de aprender el algoritmo estándar de la división. Cada uno de estos casos fue abordado en la propuesta. Además, la bibliografía presenta algunas sugerencias para abordar el algoritmo estándar de la división, como son: inserción de cabeceras en el dividendo y en el cociente, registrar los restos parciales, tener la opción de transformar el dividendo y, por último, que exista flexibilidad en el cociente.

Tomando en cuenta las dificultades que se observan generalmente en el aprendizaje del algoritmo y las sugerencias a incorporar en el trabajo a nivel simbólico, se construye una propuesta en que el algoritmo es trabajado de forma paralela al uso del material concreto, es decir, se trabaja con una representación concreta y una representación simbólica, estableciendo conexiones entre ellas, lo que permite una comprensión profunda del concepto, evitando el sinsentido que en ocasiones se atribuyen a los algoritmos, y también respetando el nivel de operaciones concretas en el que se encuentran los estudiantes de enseñanza básica.

El segundo objetivo fue “Identificar las dificultades de aprendizaje que tiene el estudiante de este estudio en la comprensión del algoritmo estándar de la división”. Para ello, lo primero que se realizó fue una evaluación que consideraba los seis casos detectados en el primer objetivo y que el estudiante pudiera resolverlos con sus aprendizajes, sin mayor intervención del investigador. Por otro lado, la bibliografía presenta cuatro grandes dificultades del algoritmo estándar de la división: 1) la propiedad distributiva, 2) el dígito de la posición de mayor valor del dividendo sea menor que el divisor, 3) la presencia de ceros en el cociente y 4) la cantidad de dígitos del divisor. Estas cuatro dificultades son observadas cuando el algoritmo de la división en enseñado de forma simbólica y sin ningún apoyo o paso previo que permita al estudiante dimensionar el por qué funciona cada uno de sus pasos. Se analiza si estas dificultades están presentes en el estudiante al momento de abordar cada uno de los seis casos.

A partir de la evaluación inicial y algunas situaciones que se presentaron en las primeras sesiones se puede establecer que el estudiante presentaba las dificultades antes enunciadas. Con respecto a la propiedad distributiva, el estudiante tiende a desnaturalizar los números tratándolos como la suma de varios dígitos que no tienen un valor posicional, por tanto, se puede inferir que no comprende que el algoritmo de la división funciona por esta propiedad. Luego, con respecto a una división, donde el dígito de la posición de mayor valor del dividendo es menor que el divisor, presenta dudas, pero finalmente aplica los mismos pasos que en otros casos y es capaz de resolverla. Sobre la presencia de ceros en el cociente, el estudiante no presenta dificultades cuando el cero está al final, pero sí cuando está al medio. Esto quedó en evidencia en el diagnóstico, ya que ambos ejercicios que apuntaban a esta dificultad fueron resueltos de forma errónea. Por último, con respecto a la cantidad de cifras del divisor, el estudiante puede resolver el cálculo, pero presenta dudas y se muestra inseguro en su trabajo.

El tercer objetivo fue “Identificar las dificultades de aprendizaje que tiene el estudiante de este estudio en la comprensión del algoritmo estándar de la división posterior a la implementación de la propuesta con material concreto”. Los resultados se presentan desde la implementación, ya que en cada caso el estudiante lograba aprendizajes que iba poniendo en práctica para el próximo, por tanto, se notaban avances o cambios a partir desde el primer momento.

La propuesta para enseñar el algoritmo de la división se abordó en seis casos. Los dos primeros sin incorporar el trabajo con restos parciales ya que sólo se enfoca en el trabajo desde las combinaciones multiplicativas básicas. Estos casos son: combinaciones aditivas básicas y resto igual a 0 o distinto de 0 que no coincida con las combinaciones multiplicativas básicas y sin restos parciales. Seguido de estos casos, se incluyen: los restos parciales, cuando el dígito de la posición de mayor valor del dividendo es menor que el divisor, y dos casos sobre la presencia de ceros en el cociente: al medio y al final.

Durante la implementación de las sesiones y en la evaluación final se pudo observar que el estudiante presentaba cambios en la forma de resolver una división con el algoritmo. En primer lugar, durante las tres primeras sesiones utilizó el material concreto de forma paralela a la representación simbólica. Pero desde la tercera sesión comenzó a usarlo en menor medida, y ya en las últimas divisiones que resolvió prefirió hacerlo sólo a nivel simbólico. Esto confirma la idea de que el estudiante a medida que comprende deja los apoyos y es capaz de lograr un nivel de abstracción mayor.

Con respecto a las dificultades detectadas en el diagnóstico se observa que la propiedad distributiva, sin institucionalizarla, se hace transparente para el estudiante en la utilización del material concreto, ya que al representar un número con los bloques base 10 de forma canónica, por ejemplo 432, ya no es un 4 al lado de un 3, sino que son 4 centenas y 3 decenas, porque utiliza placas y barras para representarlos y los está observando.

Por otro lado, cuando el dígito de la posición de mayor valor del dividendo es menor que el divisor, el estudiante no evidencia dificultades ya que trabaja con el dividendo completo, y lo va modificando. Esto sucede a nivel concreto y simbólico, ya que con el material corresponde a las piezas que no ha repartido y que siempre las está visualizando y a nivel simbólico, con la inserción de los restos parciales, el estudiante realiza el mismo proceso que con los bloques base 10.

Con respecto a la presencia de ceros al medio del cociente, se logra que esta dificultad sea superada con la utilización del material ya que el estudiante representa el dividendo y para que haya un cero al medio del cociente significa que, por ejemplo, en las decenas no se pueden agrupar, y para determinar el cociente el estudiante visualiza lo que agrupó, por ejemplo, si el cociente fuera 106, el estudiante tiene en cada grupo con una placa y seis cubitos o unidades. Esta dificultad también es superada a nivel simbólico con la ayuda de la inserción de las cabeceras y también con la flexibilidad del cociente, porque trabaja siempre con los valores posicionales de los dígitos del cociente.

En la dificultad sobre la cantidad de cifras del divisor se observa que con el material no hay diferencias entre un divisor de una cifra o más, y a nivel simbólico, el estudiante al utilizar la flexibilidad en el cociente, principalmente, con el uso de las potencias de 10, no comete errores porque siempre trabaja con el valor posicional de los dígitos del cociente.

No se abordó en este estudio, pero se presume que si el estudiante trabajara estrategias de cálculo mental, podría reducir la cantidad de pasos que utiliza al momento de determinar el cociente. El estudiante tiene dificultades para trabajar recuperar el resultado de las combinaciones multiplicativas básicas, por tanto, durante las sesiones prefirió trabajar con potencias de 10, pero esto significaba que se acercaba al cociente de forma más lenta.

El último objetivo fue "Analizar la comprensión del algoritmo de la división posterior a la implementación de la propuesta por el uso del material concreto". Además de lo evidenciado en términos de la superación de dificultades en el cálculo, se pudo observar que el estudiante inició el trabajo de este proyecto con poca seguridad, ya que por ejemplo esperaba mi aprobación para mover las piezas o si no sabía una respuesta se tapaba la cara, lo cual fue cambiando rápidamente durante las sesiones, para terminar con un estudiante conversador, que hacía preguntas o se concentraba hasta terminar un ejercicio de forma autónoma. Así, el uso del material no solo mejora la comprensión del estudiante, sino que también aporta a su autoestima y confianza.

Para cerrar este proyecto, se considera una idea central en el aprendizaje matemático el poder conectar las diferentes representaciones, en este caso, concreta y simbólica, para que los estudiantes puedan realizar conexiones y comprender. El uso de material concreto puede ser una excelente herramienta para que los estudiantes construyan por ellos mismos los conceptos matemáticos y logren llegar a las ideas abstractas. En matemática, las dificultades de aprendizaje, en general, responden a una defectuosa enseñanza, donde el estudiante no tuvo la oportunidad de conectar con la metodología del docente o simplemente no pudo reconstruir por sí mismo el concepto trabajado, impidiendo una comprensión profunda y, por tanto, dando pie a un proceso mecánico.

8. Bibliografía

Adalid, M. (2010). Las regletas de G. Cuisenaire. *Revista digital Eduinnova*, *22*, 15 – 18. Recuperado de http://www.eduinnova.es/mayo2010/regletas.pdf

Bermeosolo, J. (2010). *Psicopedagogía de la diversidad en el aula*: *desafío a las barreras en el aprendizaje y la participación.* Ciudad de México: Alfaomega.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Bruner, J. (1984). *Acción, pensamiento y lenguaje*. Madrid: Alianza.

Cascallana, M. (2002). *Iniciación a la matemática. Materiales y recursos didácticos*. Madrid: Santillana.

Castro, E., Rico, L. & Castro E. (2007). *Números y operaciones. Fundamentos para una aritmética escolar.* Madrid: Síntesis.

Ministerio de Educación. (2012). *Bases Curriculares educación básica Matemática*. Recuperado de http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-21321_programa.pdf

Dickson, L., Brown, M. & Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas.* Madrid: Labor.

Donovan, M, & Bransford, J. (2005). *How students learn. History, mathematics, and science in the classroom*. Washington, D.C.: The national academies press.

Gairín, J. & Sancho, J. (2002). *Números y algoritmos*. Madrid: Síntesis.

Jiménez, R & Aguado, T. (2002). *Pedagogía de la diversidad.* Madrid: UNED.

Kamii, C. & Jones, S. (1995). *Reinventando la aritmética III. Implicaciones de la teoría de Piaget*. Madrid: Visor Libros.

Latorre, A., Del Rincón, D. & Arnal, J. (1997). *Bases metodológicas de la investigación educativa.* Madrid: Experiencia ediciones.

Lewin, R., López, A., Martínez, S., Rojas, D. & Zanocco, P. (2013). *Recursos para la formación inicial de profesores de educación básica. Números. Para futuros profesores de educación básica*. Santiago: Ediciones SM.

Liping, M. (2010). *Conocimiento y enseñanza de las matemáticas elementales. La comprensión de las matemáticas fundamentales que tienen los profesores en China y los EE.UU*. Santiago: Academia Chilena de Ciencias.

Martínez, J. (2010). *Enseñar matemáticas a alumnos con necesidades educativas especiales*. Madrid: Wolters Kluwer.

Mateos, T. (2008). Una aproximación a las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. Un punto de vista psicogenético. *Ethos Educativo*, *41*, 193 - 208.

Maza, C. (1991). *Enseñanza de la multiplicación y la división*. Madrid: Síntesis.

National Research Council. (2009). *Mathematics Learning in Early Childhood: Paths toward excellence and equity*. Washington, D.C.: National Academies Press.

National Council of Teachers of Mathematics. (2015). *De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático para todos*. Reston, VA.: NCTM.

Oliver, M (2003). *Estrategias didácticas y organizativas ante la diversidad.* Barcelona: Octaedro.

Palacios, A. (2008). Caracterización del modelo social y su conexión con los derechos humanos. En A. Palacios, *El modelo social de discapacidad: orígenes, caracterización y plasmación en la Convención Internacional sobre los Derechos de las Personas con Discapacidad*. (p. 103-203). Madrid: Cinca.

Pape, S., & Mourat A. (2001). The role of representation(s) in developing mathematical understanding. *Theory into practice*, *40*(2), 118-127.

Parra, C. & Saiz, I. (1994). Dividir con dificultad o la dificultad de dividir. En *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires: Paidós.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1969). *Psicología del niño*. Madrid: Morata.

Preety, N. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics teaching in the middle school, 13*(8), 438 – 445.

Rivière, A. (1990). Problemas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva cognitiva. En: Marchesi, A., Coll, C. & Palacios, J. (comp.) *Desarrollo psicológico y educación, III. Necesidades educativas especiales y aprendizaje escolar*. Madrid: Alianza.

Sánchez, J. & Fernández J. (2003). *La enseñanza de la matemática. Fundamentos teóricos y bases psicopedagógicas*. Madrid: CCS.

Sandín, M. (2003). *Investigación cualitativa en educación: fundamentos y tradiciones*. Madrid: McGrawHill.

Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.

Webb, D., Boswinkel, N. & Dekker, T. (2008). Beneath the tip of the iceberg: using representations to support student understanding. *Mathematics teaching in the middle school, 14*(2), 110-113.

Zunini, P. (2007). El docente como obstáculo epistemológico. *Revista de Informática Educativa y Medios Audiovisuales, 4*(9), 28-34.

9. Anexos

Anexo 1: Certificado médico de déficit atencional y Ficha de solicitud de evaluación diferenciada.

Anexo 2: Calificaciones del estudiante del estudio de caso

Anexo 3: Anotaciones del libro de clases del estudiante del estudio de caso

Anexo 4: Observaciones de clases

Anexo 5: Planificación de las sesiones y evaluaciones

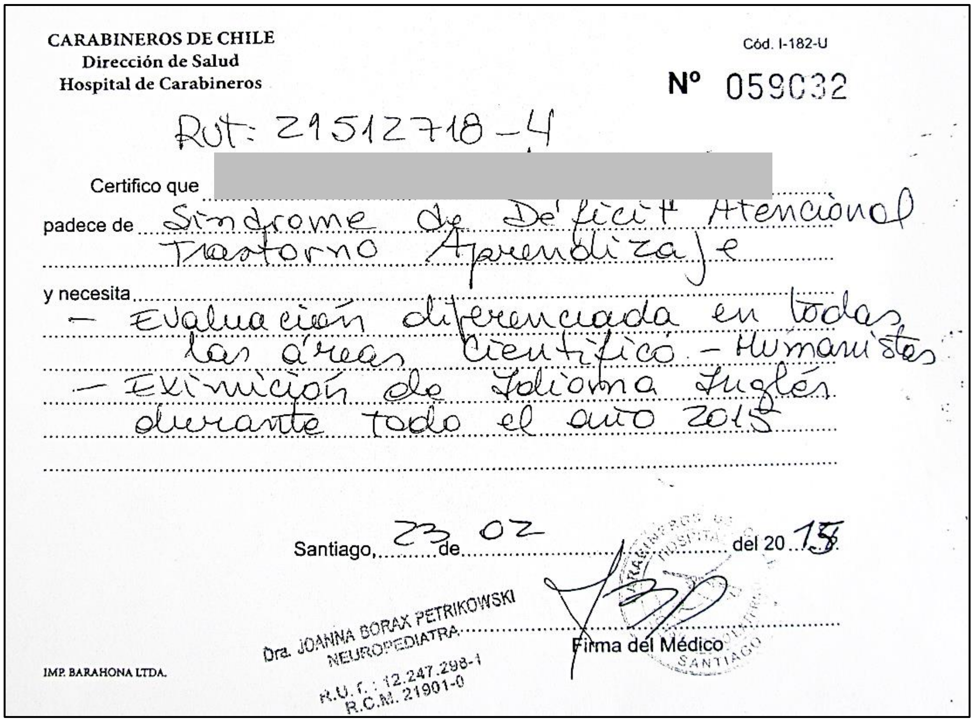
Anexo 6: Diagnóstico y evaluación final

Anexo 7: Transcripción de las sesiones

Anexo 8: Consentimientos de los participantes

Anexo 1: Certificado médico de déficit atencional y Ficha de solicitud de evaluación diferenciada.

Certificado médico año 2015



CARABINEROS DE CHILE
Dirección de Salud
Hospital de Carabineros

Cód. I-182-U

Nº 059032

Rut: 21512718-4

Certifico que [redacted]

padece de Síndrome de Déficit Atencional
Trastorno Aprendizaje

y necesita
- Evaluación diferenciada en todas las áreas Científico - Humanistas
- Eximición de Idioma Inglés durante todo el año 2015

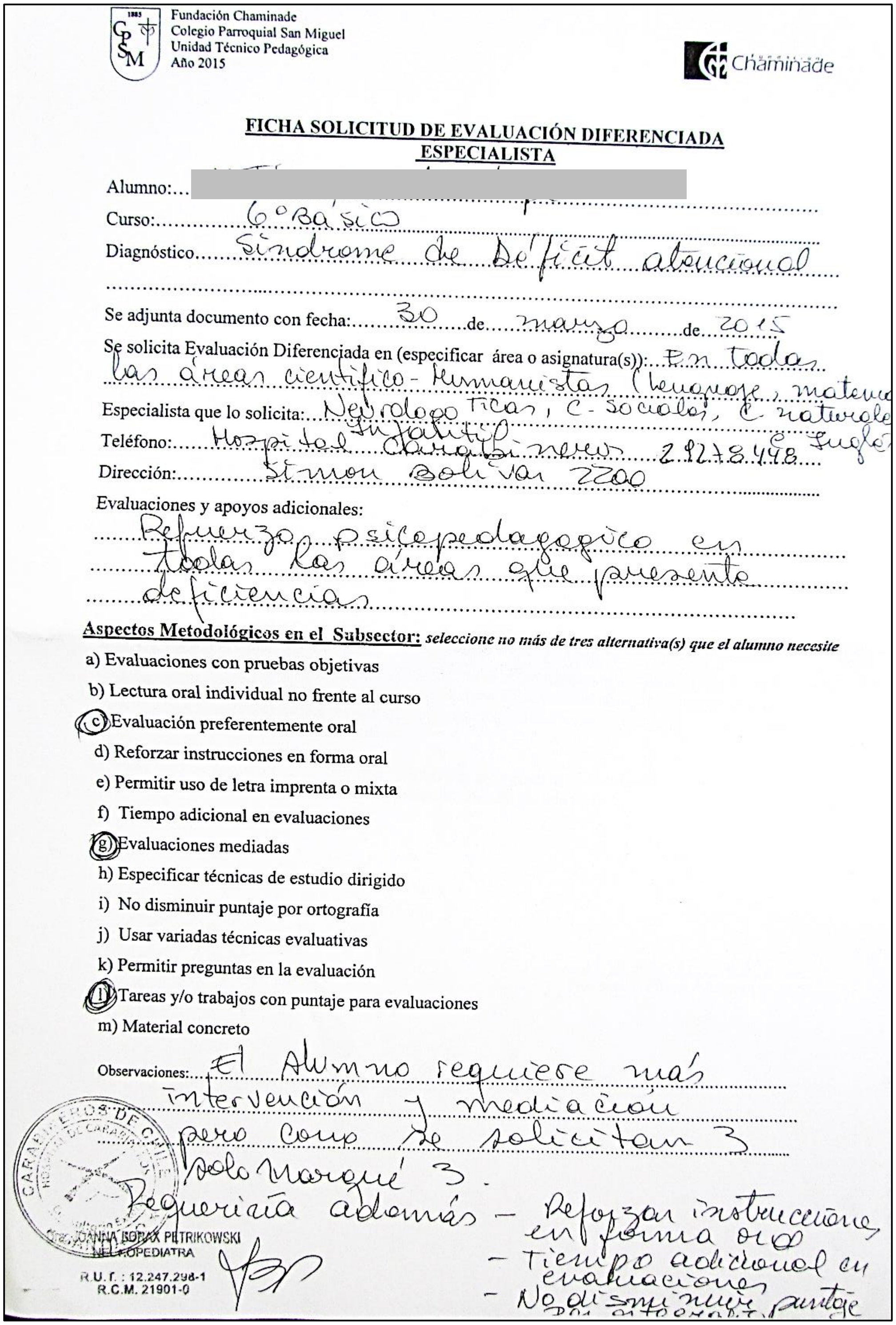
Santiago, 23 de 02 del 2015

Dra. JOANNA BORAX PETRIKOWSKI
NEUROPEDIATRA
R.U.T.: 12.247.298-1
R.C.M. 21901-0

Firma del Médico

IMP. BARAHONA LTDA.

Ficha solicitud de evaluación diferenciada.



Fundación Chaminade
Colegio Parroquial San Miguel
Unidad Técnico Pedagógica
Año 2015

Chaminade

FICHA SOLICITUD DE EVALUACIÓN DIFERENCIADA
ESPECIALISTA

Alumno:…[redacted]

Curso:……6° Básico

Diagnóstico……Síndrome de Déficit atencional

Se adjunta documento con fecha:……30…de……marzo……de…2015

Se solicita Evaluación Diferenciada en (especificar área o asignatura(s)):…En todas las áreas científico-humanistas (lenguaje, matemáticas, C. sociales, C. naturales, Inglés)

Especialista que lo solicita:…Neurólogo infantil

Teléfono:……Hospital Carabineros……2.9278.498…

Dirección:……Simón Bolívar 2200

Evaluaciones y apoyos adicionales:
……Refuerzo psicopedagógico en todas las áreas que presente deficiencias

Aspectos Metodológicos en el Subsector: *seleccione no más de tres alternativa(s) que el alumno necesite*

a) Evaluaciones con pruebas objetivas
b) Lectura oral individual no frente al curso
c) Evaluación preferentemente oral
d) Reforzar instrucciones en forma oral
e) Permitir uso de letra imprenta o mixta
f) Tiempo adicional en evaluaciones
g) Evaluaciones mediadas
h) Especificar técnicas de estudio dirigido
i) No disminuir puntaje por ortografía
j) Usar variadas técnicas evaluativas
k) Permitir preguntas en la evaluación
l) Tareas y/o trabajos con puntaje para evaluaciones
m) Material concreto

Observaciones:…El Alumno requiere más intervención y mediación pero como se solicitan 3 solo marqué 3.
Requeriría además: – Reforzar instrucciones en forma oral
– Tiempo adicional en evaluaciones
– No disminuir puntaje por ortografía

Carabineros de Chile
Dra. Joanna Borax Petrikowski
Neuropediatra
R.U.T.: 12.247.298-1
R.C.M. 21901-0

Anexo 2: Calificaciones del estudiante del estudio de caso

Calificaciones de 3.° básico

Asignatura			3								
	P.P 1	P.P 2	P. 1	P. 2	P. 3	P. 4	P. 5	P. 6	P. 7	P.P 3	P.F
LENGUAJE Y COMUNICACIÓN	4.7	4.1	4.0	4.3	3.6	5.8	4.2	5.5		4.6	4.5
LENGUA EXTRANJERA: INGLES	3.4	3.9	3.9	3.5	5.3					4.2	3.8
MATEMÁTICA	4.8	4.4	4.5	2.0	2.8	2.0	5.9	3.0	5.3	3.6	4.3
CIENCIAS NATURALES	3.7	3.2	3.7	5.9	6.8	3.8				5.1	4.0
HISTORIA, GEOGRAFÍA Y CIENCIAS SOCIALES	4.3	4.8	6.8	2.5	5.8	3.2				4.6	4.6
EDUCACIÓN TECNOLÓGICA	5.5	6.4	4.5	6.8	5.8					5.7	5.9
EDUCACIÓN ARTÍSTICA	5.0	4.8	4.0	2.5	6.0	3.0				3.9	4.6
EDUCACIÓN FÍSICA	6.2	6.1	6.4	6.5	6.0					6.3	6.2
RELIGIÓN	B	MB	B	B	S					S	B
Promedio General Alumno	4.7	4.7								4.8	4.7

Calificaciones de 4.° básico

Asignatura			3							
	P.P 1	P.P 2	P. 1	P. 2	P. 3	P. 4	P. 5	P. 6	P.P 3	P.F
LENGUAJE Y COMUNICACIÓN	4.9	4.5	3.5	7.0	3.8	3.0	2.6	4.2	4.0	4.5
INGLÉS	5.1	4.0	5.2	4.0	3.8				4.3	4.5
MATEMÁTICA	4.4	5.2	6.1	7.0	4.0	7.0	5.7	5.0	5.8	5.1
HISTORIA, GEOGRAFÍA Y CIENCIAS SOCIALES	4.9	3.6	2.0	4.0	5.4	3.5			3.7	4.1
CIENCIAS NATURALES	4.8	4.9	3.1	5.0	4.2				4.1	4.6
ARTES VISUALES	5.3	4.7	4.0	5.0	4.5				4.5	4.8
MÚSICA	6.7	5.0	3.0	2.0	5.0				3.3	5.0
EDUCACIÓN FÍSICA Y SALUD	6.4	5.9	7.0	7.0	6.5	6.0			6.6	6.3
TECNOLOGÍA	5.8	5.8	2.5	5.0	7.0				4.8	5.5
RELIGIÓN	MB	MB	S	MB	MB				B	MB
Promedio General Alumno	5.4	4.8							4.6	4.9

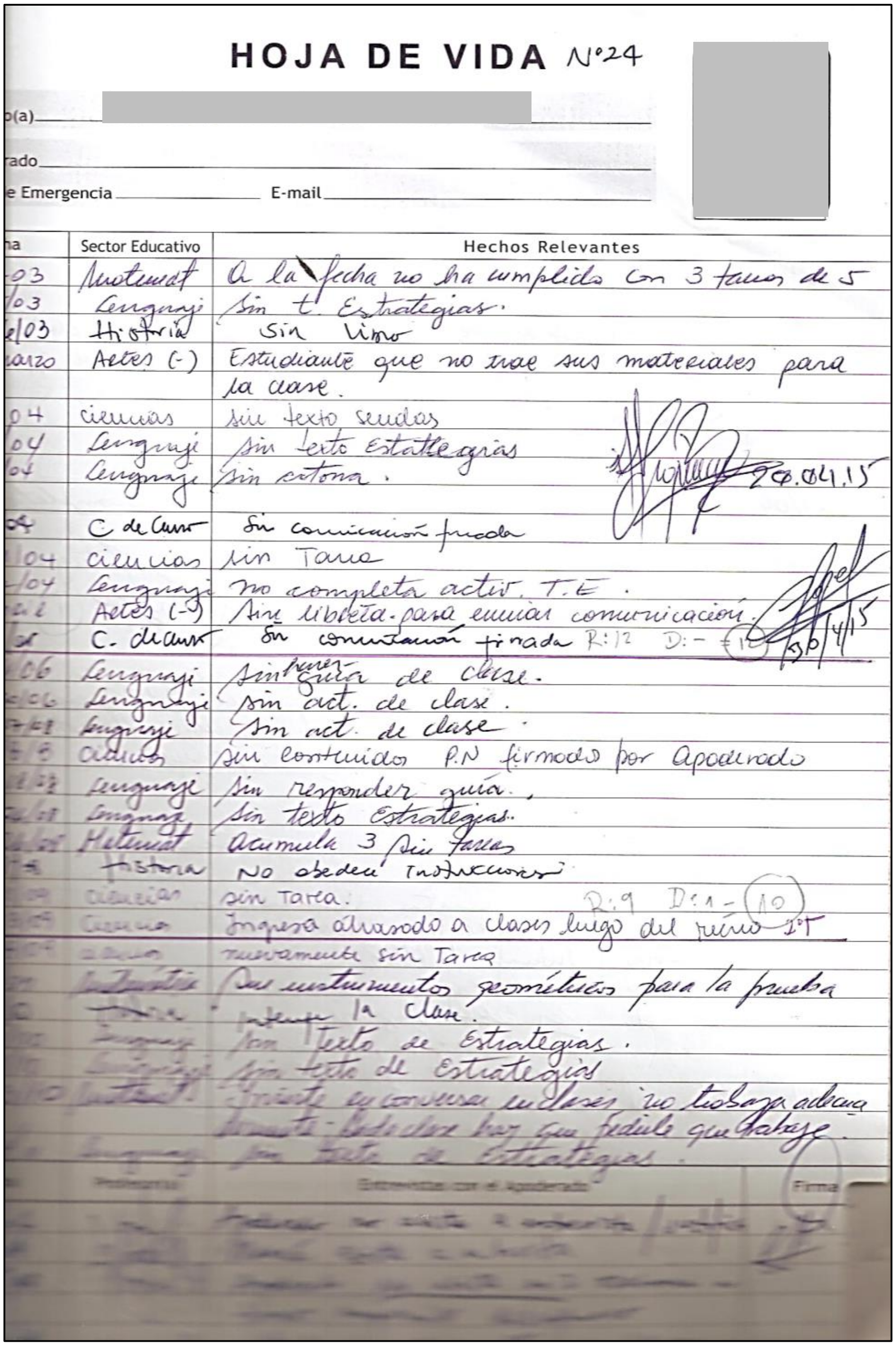
Calificaciones de 5.° básico

Asignatura	3						P.P 3	P.F
	P. 1	P. 2	P. 3	P. 4	P. 5	P. 6		
LENGUAJE Y COMUNICACIÓN	4.2	4.9	3.5	3.0	7.0	3.5 3.5	4.2	4.6
INGLÉS	5.9	4.8	4.4 4.4				4.9	4.5
MATEMÁTICA	2.7	5.2	6.0	5.0	6.4 6.4		5.3	4.4
HISTORIA, GEOGRAFÍA Y CIENCIAS SOCIALES	4.0	3.7	5.7	4.6 4.6			4.5	3.8
CIENCIAS NATURALES	4.7	6.1 6.1	6.0				5.7	5.0
ARTES VISUALES	2.0	6.5	5.0				4.5	4.9
EDUCACIÓN FÍSICA Y SALUD	5.0	7.0 7.0	7.0				6.5	6.6
MÚSICA	6.2	5.5	4.9				5.5	5.2
TECNOLOGÍA	6.0	6.5	6.0				6.2	5.5
RELIGIÓN	MB	B	MB				MB	B
Promedio General Alumno							5.3	4.9

Calificaciones de 6.° básico

Asignaturas / Subasignaturas / Categorías	Notas												P.P.	Prom.	Resumen Anual			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12			1T	2T	Prom Final	PC
Lenguaje y Comunicación														4,0	4,8	4,0	4,4	5,4
Notas	3,6	3,9	3,0	5,7	3,9$_2$	4,3							**4,0**					
Notas	3,6	3,9	3,0	5,7	3,9$_2$	4,3							**4,0**					
Inglés														4,3	4,4	4,3	4,4	5,2
Notas	5,6	4,1	3,8$_2$										**4,3**					
Notas	5,6	4,1	3,8$_2$										**4,3**					
Matemática														3,3	4,5	3,3	3,9	5,4
Notas	3,0	4,0	4,2	3,0	3,5	2,6$_2$							**3,3**					
Notas	3,0	4,0	4,2	3,0	3,5	2,6$_2$							**3,3**					
Historia, Geografía y Ciencias Sociales														4,0	5,0	4,0	4,5	5,2
Notas	6,8	2,3	4,1	3,5$_2$									**4,0**					
Notas	6,8	2,3	4,1	3,5$_2$									**4,0**					
Ciencias Naturales														5,1	4,4	5,1	4,8	5,6
Notas	3,6	5,7	5,5$_2$										**5,1**					
Notas	3,6	5,7	5,5$_2$										**5,1**					
Educación Física y Salud														7,0	7,0	7,0	7,0	7,0
Notas			7,0										**7,0**					
Notas			7,0										**7,0**					
Artes Visuales														5,8	5,9	5,8	5,9	6,4
Notas	4,5	6,5$_2$											**5,8**					
Notas	4.5	6.5$_2$											**5.8**					
Música														4,5	5,9	4,5	5,2	6,3
Notas	5,0	4,3$_2$											**4,5**					
Notas	5,0	4,3$_2$											**4,5**					
Tecnología														6,6	4,3	6,6	5,5	6,6
Notas	7,0	5,8	6,8$_2$										**6,6**					
Notas	7,0	5,8	6,8$_2$										**6,6**					
Religión														S	S	S	S	S
Notas	4,0	4,0$_2$	4,0										**S**					
Notas	4,0	4,0$_2$	4,0										**S**					
													Promedio General:	**4,9**	**5,0**	**4,9**	**5,0**	**5,9**

Anexo 3: Anotaciones del libro de clases del estudiante del estudio de caso



HOJA DE VIDA N°24

o(a)

rado

e Emergencia E-mail

ha	Sector Educativo	Hechos Relevantes
-03	Matemát	A la fecha no ha cumplido con 3 tareas de 5
/03	Lenguaje	Sin t. Estrategias.
/03	Historia	Sin libro
marzo	Artes (-)	Estudiante que no trae sus materiales para la clase.
04	ciencias	sin texto ciencias
04	Lenguaje	sin texto Estrategias
04	Lenguaje	sin cotona. 20.04.15
04	C. de Curso	Sin comunicación firmada
04	ciencias	sin Tarea
/04	Lenguaje	no completa activ. T.E.
	Artes (-)	Sin libreta para enviar comunicación
	C. de Curso	Sin comunicación firmada R: 12 D: -
/06	Lenguaje	Sin guía de clase.
/06	Lenguaje	sin act. de clase.
	Lenguaje	Sin act. de clase.
	Ciencias	sin contenidos P.N firmado por Apoderado
	Lenguaje	Sin responder guía.
	Lenguaje	Sin texto Estrategias.
	Matemát	Acumula 3 sin tareas
	Historia	No obedece Instrucciones
	ciencias	sin Tarea. R: 9 D: 1 - (10)
	Ciencias	Ingresa atrasado a clases luego del recreo
	ciencias	nuevamente sin Tarea
	Matemática	Sin instrumentos geométricos para la prueba
	Historia	Interrumpe la clase.
	Lenguaje	Sin texto de Estrategias.
	Lenguaje	Sin texto de Estrategias
	Matemát.	Siempre conversa en clases no trabaja adecuadamente. En toda clase hay que pedirle que trabaje.
	Lenguaje	Sin texto de Estrategias.

Profesor(a) Entrevistas con el Apoderado Firma

Anexo 4: Observaciones de clases

Previo a la implementación de las sesiones con el estudiante, se realizaron dos observaciones de clases para conocer las dinámicas que existen en la sala de clases y en el taller de reforzamiento que está acompañado por la psicopedagoga del colegio.

Fecha: Lunes 7 de septiembre de 2015

La psicopedagoga del colegio va a la sala de clases y le solicita a seis estudiantes que tomen su cuaderno y estuche y la acompañen a su oficina. Al llegar, se observa que es una oficina que tiene un escritorio y seis bancos de estudiantes que forman un círculo y están mirando hacia una pizarra. Los estudiantes al llegar se acomodan en los bancos sin preguntar ni esperar ninguna instrucción. Luego de eso, se saludan y me presentan. Los estudiantes me observan pero no me hacen ninguna pregunta ni tampoco interactúan conmigo durante la sesión.

Luego, la psicopedagoga les pide que continúen con la construcción de ángulos con transportador que les pidió la profesora de matemática.

Mientras los estudiantes trabajan y se ayudan entre ellos, la psicopedagoga se acerca y me comenta que este taller comenzó hace un mes aproximadamente, y que su objetivo es poder dar un espacio a los estudiantes que tienen más dificultades en la asignatura para que trabajen de forma más personalizada, porque en la sala de clases se distraen mucho y no trabajan. Así ella les exige y los hace trabajar durante el tiempo que están con ella.

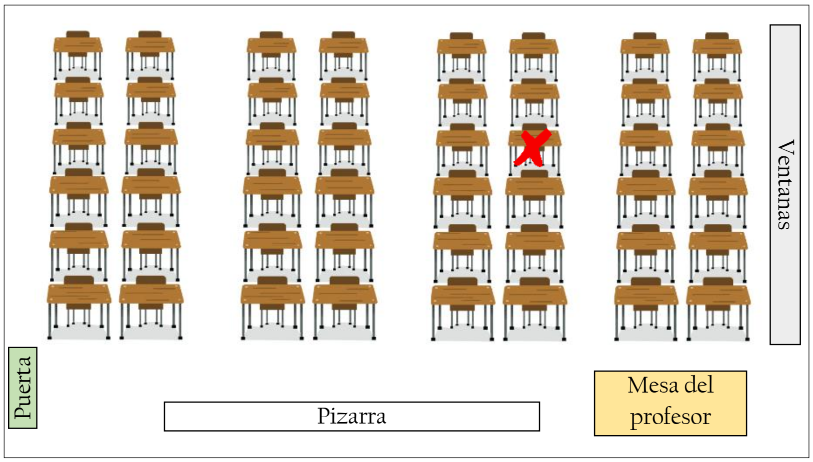
Aproximadamente estuvieron 40 minutos y sonó el timbre para salir a recreo, con lo que los estudiantes guardaron rápidamente sus cosas y se fueron.

Fecha: Lunes 21 de septiembre de 2015

Después de una semana de vacaciones, el día comenzó con un acto para todos los cursos en conmemoración de las fiestas patrias. Luego, cada curso pasa a su sala de clases.

El curso ya se encuentra en la sala junto con la psicopedagoga cuando entro y me presentan a todos los estudiantes, ya que en la ocasión anterior solo estuve con los estudiantes que tienen reforzamiento. La psicopedagoga en esta ocasión se queda toda la sesión junto al curso. Inicia la clase con un par de actividades en la pizarra ya que la docente de matemática está atendiendo a unos apoderados y no ha podido pasar a la sala de clases.

Los puestos de los estudiantes están distribuidos en 4 columnas, sentados en parejas, la mayoría mixtas. El estudiante de este estudio está en la segunda columna en la cuarta fila de adelante hacia atrás.



El estudiante conversa con su compañero que está sentado detrás de él y también come galletas sin que la psicopedagoga se dé cuenta.

Pasan 10 minutos y la profesora entra a la sala de clases y retoma la sesión. Se acerca, me saluda y le comenta a la psicopedagoga: Estoy molesta, ya nos dieron la orden de que pasáramos todos los contenidos antes del Simce y no me gusta, yo creo en los procesos.

Luego, saluda a los estudiantes y les entrega los resultados de una evaluación de ángulos y como no están buenos los resultados les dice que tendrán 20 minutos para corregir y luego pondrá las notas. El estudiante en observación, por mientras me observa como tomo notas en mi cuaderno. La profesora llama a algunos estudiantes, que obtuvieron mejor calificación y les pide que la ayuden a entregar las evaluaciones a sus compañeros y compañeras. El estudiante en observación exclama: ¡Voy a tenerlo todo malo!

Luego que todos tienen su evaluación, la profesora pide atención para recordar en la pizarra cómo se copia un ángulo utilizando transportador. Comienza a realizar el procedimiento en la pizarra y exclama: ¡Me encanta Sr. (apellido del estudiante en observación) como toma atención!. Esta expresión es dada de forma irónica para que ponga realmente atención a lo que está sucediendo. Aunque esto no fue suficiente para que mirara lo que sucedía delante de la sala, ya que la mayoría del tiempo está mirando su evaluación o bostezando.

La profesora da la instrucción: Los que terminan de corregir su evaluación, trabajan en las primeras páginas del cuadernillo que entrega el Ministerio de Educación junto al texto escolar.

El estudiante en observación durante unos diez minutos trabaja de forma ordenada y constante en la corrección de su prueba. Borra constantemente. Luego la entrega antes de que acabe el tiempo que la profesora ha dado y continúa con una guía que entregó la profesora (y no sigue la instrucción de trabajar con las páginas del cuadernillo del Ministerio de Educación). Luego, se da vuelta a conversar con su compañero de atrás, o si está trabajando se da vuelta a mirarlo a cada instante. La psicopedagoga se acerca y le dice que tiene que terminar primero las páginas del cuadernillo.

La psicopedagoga se acerca a donde estoy y me comenta: El estudiante en observación tiene déficit atencional hipoactivo creo yo, y también cierto grado de inmadurez, se ve más chico que sus compañeros. Yo asiento con la cabeza y ella se aleja hacia otros niños.

Luego, la profesora se acerca y me entrega una evaluación de ecuaciones que realizó el estudiante en observación. Está calificada con un 3,3. Observo la evaluación y hay algunas dificultades para realizar unas divisiones, como por ejemplo:

27 : 3 = 8	22 : 3 = 9
0	1

La profesora me comenta que generalmente no trae materiales y que está con evaluación diferenciada, y que la mamá solo la quiere para que le den una segunda oportunidad en cada evaluación, aunque no sirva de mucho. Además, lo que se ve en una sesión ya no lo recuerda en la próxima.

Luego, pide que retiren las evaluaciones que están corrigiendo y comienza a revisar las páginas del cuadernillo del Ministerio. Mientras tanto, el estudiante en observación mira a su alrededor o a sus compañeros. Luego toma jugo, conversa con el compañero de adelante, se estira y bosteza. Él no revisó ninguno de los ejercicios.

Suena un timbre, y la profesora da la instrucción de que saquen sus libros porque harán la lectura silenciosa. Como no siguen la instrucción, comienza a anotar a algunos estudiantes en la pizarra. Los estudiantes reaccionan y sacan sus libros. El estudiante en observación se da vuelta en su puesto para sacar el libro de la mochila que está en el respaldo de la silla y se queda en esa posición conversando con sus compañeros que están sentados detrás de él. Se da vuelta y sigue tomando jugo. No lee nada durante el tiempo asignado.

Suena otro timbre y los estudiantes guardan todo y salen de la sala de clases a recreo. El estudiante en observación sale corriendo hacia la puerta.

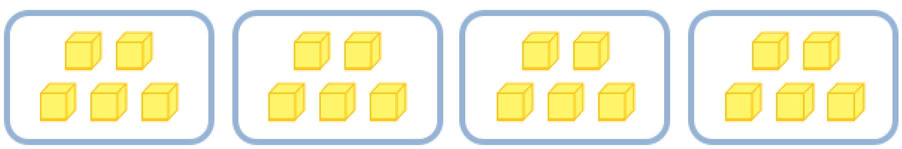
Anexo 5: Planificación de las sesiones y evaluaciones

Sesión 1: Casos 1 y 2

En la primera sesión, se le presentará al estudiante el material con el que se trabajará: bloques base 10. La idea es que el estudiante lo explore libremente durante unos 5 minutos, y luego se le pida:

- Identificar los 4 tipos de piezas que forman el material (unidad, barra, placa y cubo)
- Asociar cada uno de los tipos de piezas a las diferentes posiciones (unidad, decena, centena y unidad de mil)
- Representar los números 25, 131, 654, 1.432
- Realizar algunas equivalencias. Por ejemplo: se representa el número 11 con una barra y una unidad, y luego pedir al estudiante que solo utilice unidades.

Terminada esta primera fase de exploración del material, se trabajará el primer caso en la enseñanza del algoritmo de la división: **Combinaciones multiplicativas básicas (CMB)**. Para ello se le pedirá que represente con el material la multiplicación $4 \cdot 5$

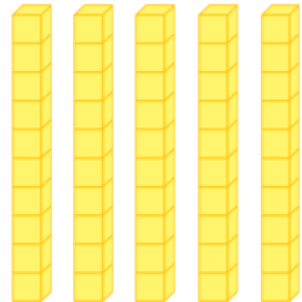
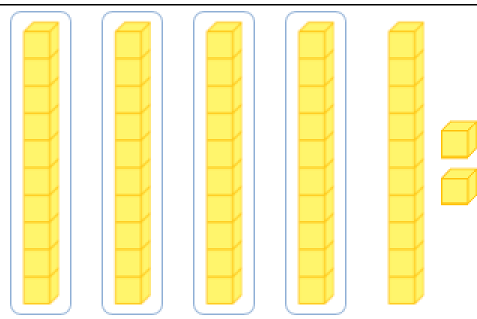
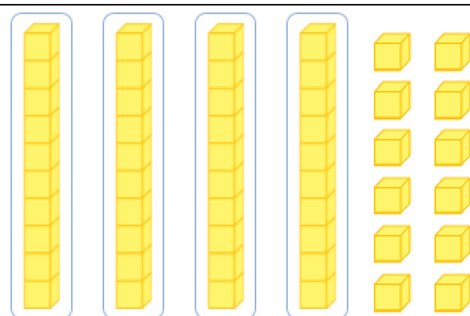
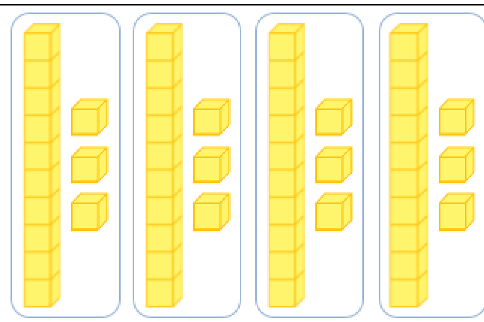


Se le preguntará:

- ¿Cuánto es $4 \cdot 5$?
- ¿Cómo representarías $20 : 4$?
- ¿Hay alguna relación entre $4 \cdot 5$ y $20 : 4$?, ¿sucede con otro ejemplo?

Comprobará la relación existente con otras multiplicaciones.

Se pasará a presentar el segundo y tercer caso en conjunto: **Resto igual a 0 o distinto de 0 que no coincidan con las CMB y sin restos parciales** y **Restos paraciales con resto igual o distinto de 0**. Se comenzará pidiendo al estudiante que represente el número 52 y que lo divida en 4. A medida que va realizando la representación, se irá explicando el proceso a nivel simbólico de forma paralela. La idea es que realice un proceso similar al que se detalla a continuación:

Representar el número 52 de forma canónica.		D U D U 5 2 : 4 =
Dividir en 4 las decenas.		D U D U 5 2 : 4 = 1 0 4 0
Reagrupar 1 decena.		D U D U 5 2 : 4 = 1 0 − 4 0 3 1 2 1 2
Dividir en 4 las unidades y juntar un grupo de decenas con un grupo de unidades.		D U D U 5 2 : 4 = 1 0 − 4 0 + 3 1 2 1 3 − 1 2 0

El resultado es 13 y el resto es 0.

Luego se le pedirá que realice el mismo proceso pero con la división: 46 : 3 (resto distinto de 0).

Sesión 2: Caso 2 y 3

Para continuar el trabajo de la sesión anterior, se le pedirá al estudiante que resuelva las siguientes divisiones, de forma autónoma, a nivel simbólico. Él podrá utilizar los bloques base 10 en su trabajo. El primero se realizará a modo de recuerdo de la sesión anterior.

D U D U 8 4 : 7 = 1 0 − 7 0 + 2 1 4 1 2 − 1 4 0	C D U C D U 3 6 4 : 3 = 1 0 0 − 3 0 0 2 0 6 4 + 1 − 6 0 1 2 1 4 − 3 1	C D U C D U 7 4 5 : 5 = 1 0 0 − 5 0 0 4 0 2 4 5 + 9 − 2 0 0 1 4 9 4 5 − 4 5 0
C D U C D U 8 7 7 : 4 = 2 0 0 − 8 0 0 1 0 7 7 + 9 − 4 0 2 1 9 3 7 − 3 6 1	C D U C D U 6 9 4 : 2 = 3 0 0 − 6 0 0 4 0 9 4 + 7 − 8 0 3 4 7 1 4 − 1 4 0	UM C D U C D U 1 4 3 5 : 5 = 2 0 0 − 1 0 0 0 8 0 4 3 5 + 7 − 4 0 0 2 8 7 3 5 − 3 5 0

El último ejercicio, hace referencia al caso 4, que se verá en la próxima sesión. Pero si el estudiante ha podido resolver los anteriores ejercicios sin mayores dificultades, se puede introducir para que desde el acompañamiento del material concreto sea capaz de resolverlo.

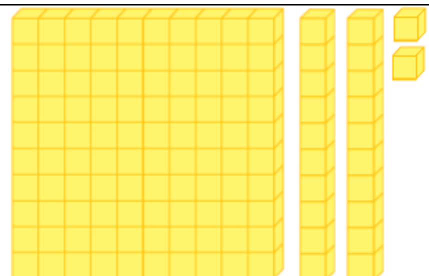
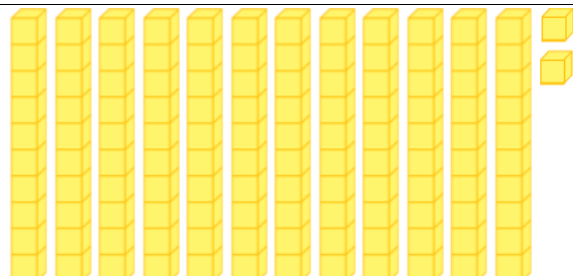
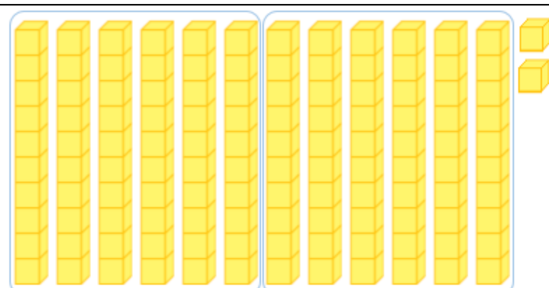
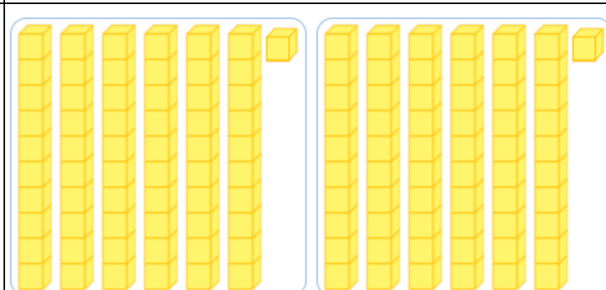
En caso de que el estudiante aún no se encuentre preparado para realizar el último ejercicio, seguir realizando ejercicios como los anteriores.

Es necesario mencionar que el rango numérico no exceda a mil, en una primera instancia, para que el estudiante pueda representar con los bloques su trabajo y los reagrupamientos necesarios.

Sesión 3: Caso 4

Este caso corresponde a que el **dígito de la posición de mayor valor del dividendo es menor que el divisor**. Al igual que en las sesiones anteriores se trabajará con los bloques base 10. También, en esta sesión se le presentará al estudiante por primera vez el divisor con dos dígitos.

Se comenzará la sesión resolviendo la siguiente división: 122 : 2

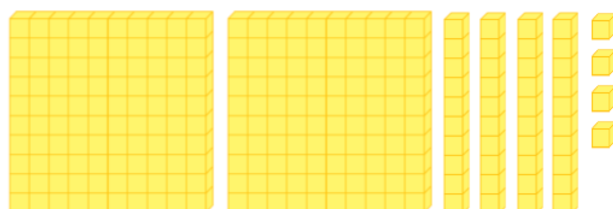
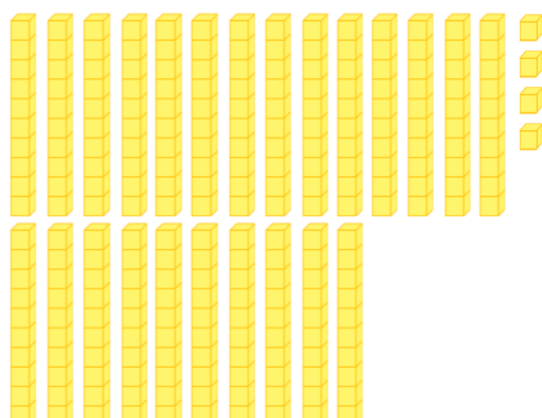
Representar el número 124 en forma canónica.		C D U C D U 1 2 2 : 2 =
Reagrupar la centena.		C D U C D U 12 2 : 2 =
Dividir las decenas.		C D U C D U 12 2 : 2 = 6 0 − 12 0 2
Dividir las unidades y juntar un grupo de decenas con un grupo de unidades.		C D U C D U 12 2 : 2 = 6 0 − 12 0 + 1 2 6 1 − 2 0

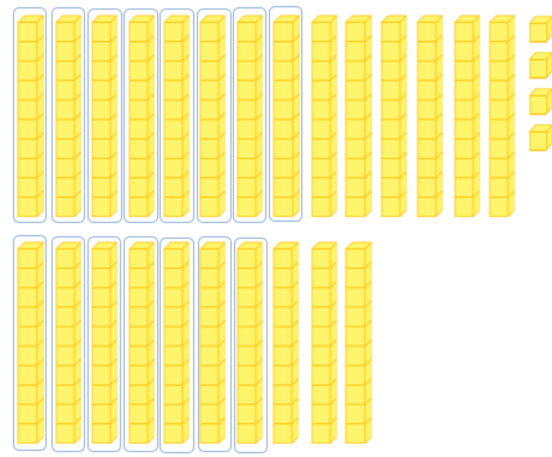
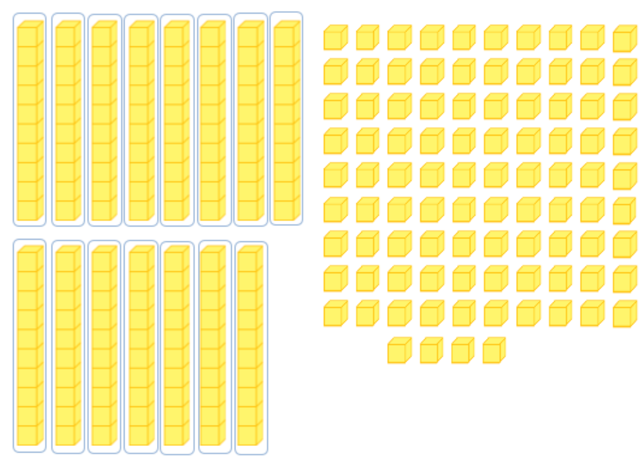
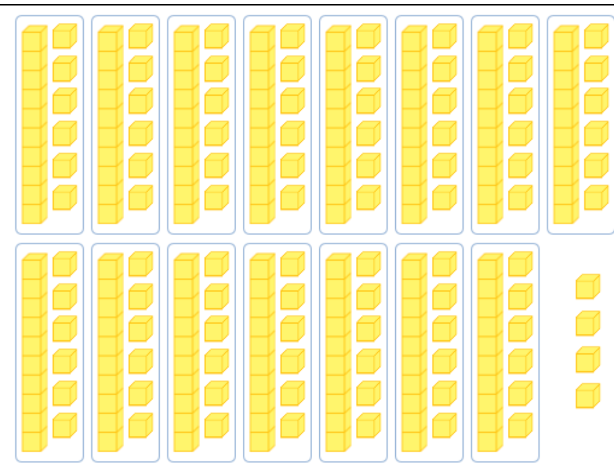
El resultado es 61 con resto 0.

A continuación se le presentan más ejercicios para que el estudiante trabaje de forma autónoma.

C D U C D U 3 4 5 : 5 = 6 0 − 3 0 0 + 9 4 5 6 9 − 4 5 0	UM C D U C D U 1 2 3 3 : 6 = 2 0 0 − 1 2 0 0 + 5 3 3 2 0 5 − 3 0 3	UM C D U C D U 1 4 5 7 : 3 = 4 0 0 − 1 2 0 0 8 0 2 5 7 + 5 − 2 4 0 4 8 5 1 7 − 1 5 2

Como segunda parte de la sesión, se plantea una división, cuyo divisor tiene 2 dígitos, y se resuelve en conjunto.

Representar el número 248 de forma canónica. C D U C D U 2 4 4 : 1 5 =	
Reagrupar las decenas. C D U C D U 24 4 : 1 5 =	

Dividir las decenas. C | D | U C | D | U 2 4 4 : 1 5 = 1 0 − 1 5 0 9 4	
Reagrupar las decenas. C | D | U C | D | U 2 4 4 : 1 5 = 1 0 − 1 5 0 9 4	
Dividir las unidades y juntar un grupo de decenas con un grupo de unidades. C | D | U C | D | U 2 4 4 : 1 5 = 1 0 − 1 5 0 + 6 9 4 1 6 − 9 0 4	

El resultado es 16 con resto 4.

Para finalizar la sesión se resuelven los siguientes ejercicios.

C D U C D U 8 7 4 : 1 2 = 7 0 − 8 4 0 + 2 3 4 7 2 2 4 1 0	UM C D U C D U 1 4 5 8 : 1 3 = 1 0 0 − 1 3 0 0 1 0 1 5 8 + 2 − 1 3 0 1 1 2 2 8 − 2 6 2
UM C D U C D U 6 3 4 7 : 2 5 = 2 0 0 − 5 0 0 0 4 0 1 3 4 7 1 0 1 0 0 0 + 3 3 4 7 2 5 3 − 2 5 0 9 7 − 7 5 2 2	UM C D U C D U 4 0 5 4 : 3 0 = 1 0 0 − 3 0 0 0 3 0 1 0 5 4 + 5 − 9 0 0 1 3 5 1 5 4 − 1 5 0 4

Sesión 4: Casos 5 y 6

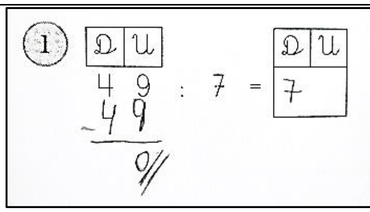
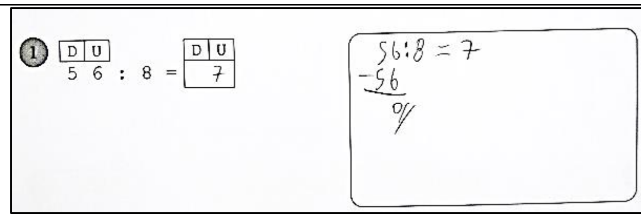
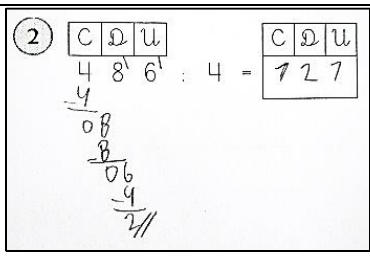
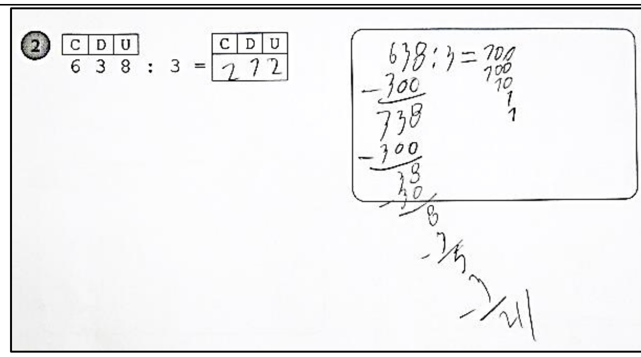
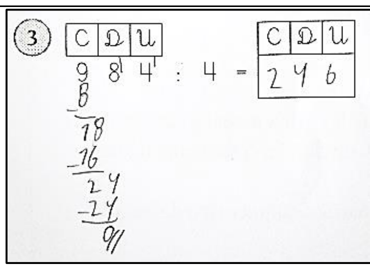
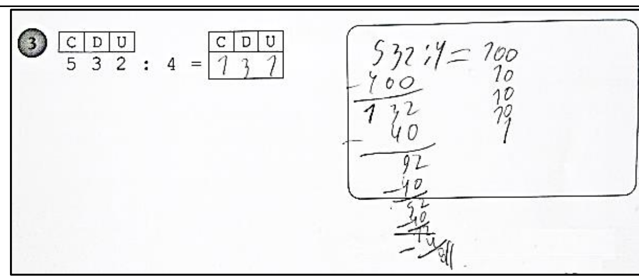
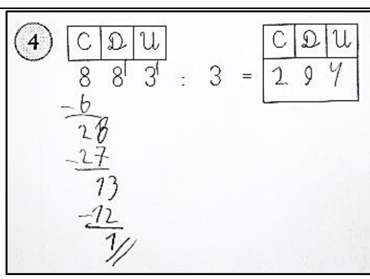
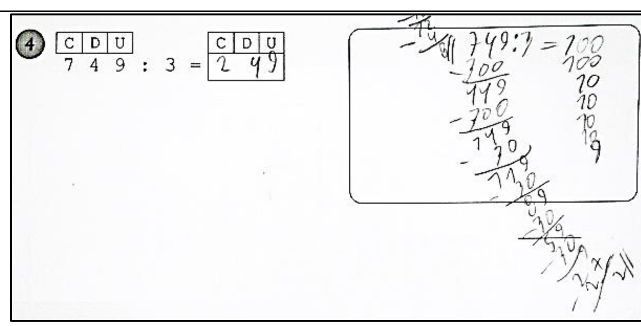
En esta sesión se trabajarán dos casos: **presencia de ceros al medio del cociente** y **presencia de ceros al final del cociente**.

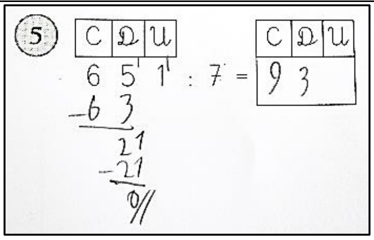
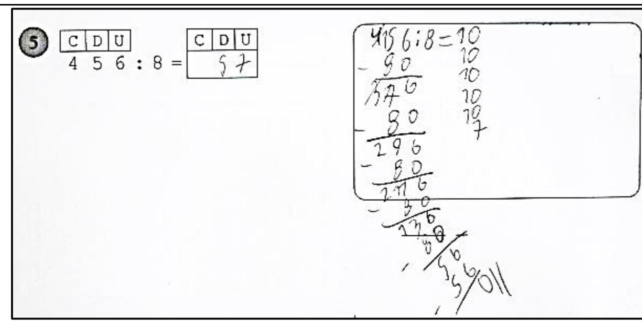
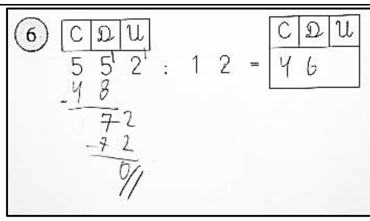
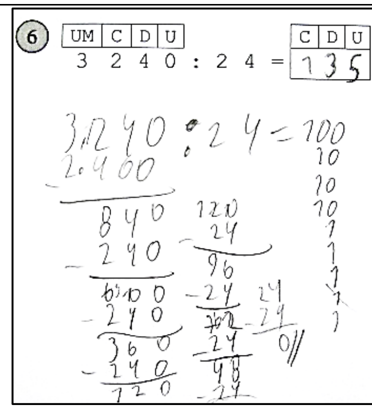
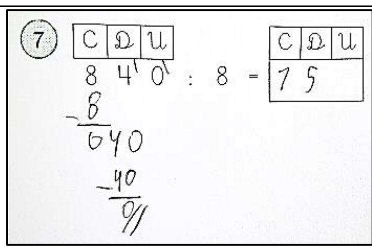
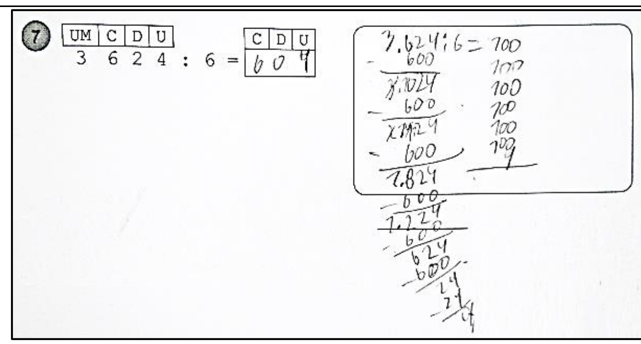
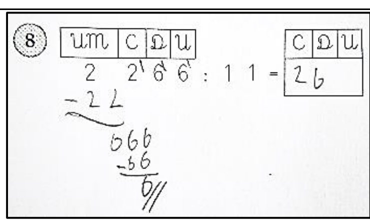
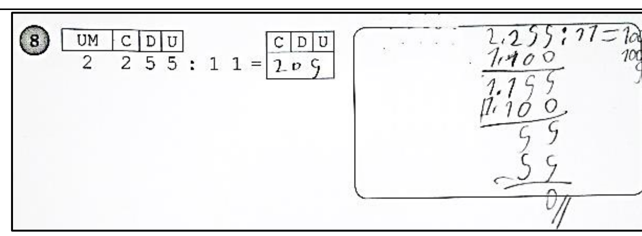
Se invitará al estudiante a resolver las siguientes divisiones, siempre teniendo a su disposición los bloques base 10.

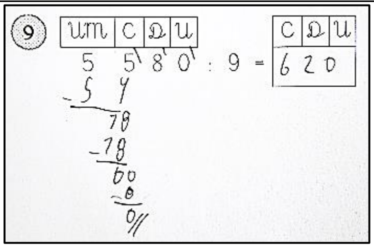
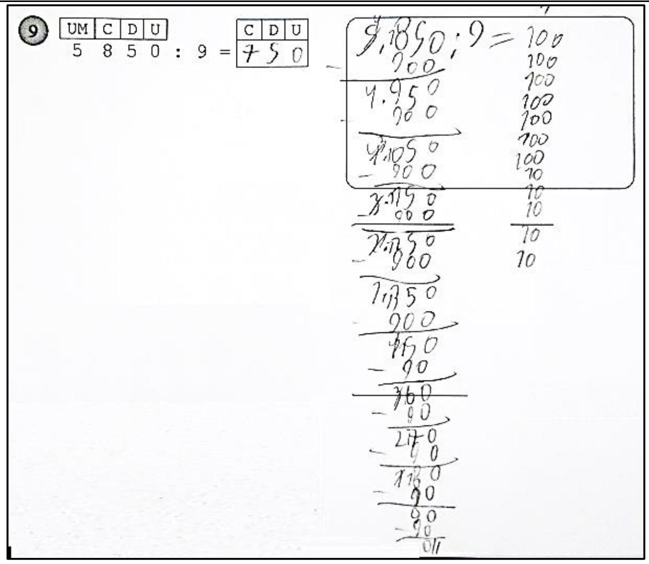
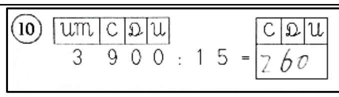
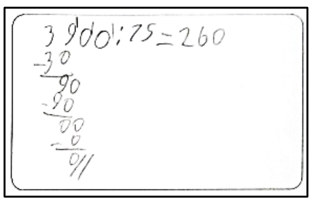
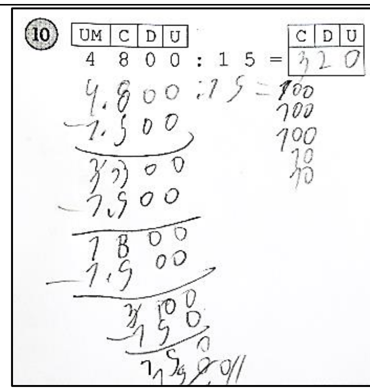
C D U C D U 3 0 0 : 1 5 = 2 0 − 3 0 0 0	UM C D U C D U 1 2 7 2 : 1 2 = 1 0 0 − 1 2 0 0 + 6 7 2 1 0 6 − 7 2 0

<table>
<tr>
<td>UM | C | D | U   C | D | U
4 4 8 0 : 1 4 = 3 0 0
− 4 2 0 0   + 2 0
2 8 0   3 2 0
− 2 8 0
0</td>
<td>UM | C | D | U   C | D | U
4 9 4 4 : 2 4 = 2 0 0
− 4 8 0 0   4
1 4 4   + 2
− 9 6   2 0 6
4 8
− 4 8
0</td>
</tr>
<tr>
<td>UM | C | D | U   C | D | U
2 7 9 0 : 3 1 = 8 0
− 2 4 8 0   + 1 0
3 1 0   9 0
− 3 1 0
0</td>
<td>UM | C | D | U   C | D | U
5 8 3 0 : 5 5 = 1 0 0
− 5 5 0 0   + 6
3 3 0   1 0 6
− 3 3 0
0</td>
</tr>
</table>

Anexo 6: Diagnóstico y evaluación final

Diagnóstico	Evaluación final
	
	
	
	

5 C D U 6 5 1 : 7 = C D U 9 3	5 C D U 4 5 6 : 8 = C D U 5 7
6 C D U 5 5 2 : 1 2 = C D U 4 6	6 UM C D U 3 2 4 0 : 2 4 = C D U 1 3 5
7 C D U 8 4 0 : 8 = C D U 7 5	7 UM C D U 3 6 2 4 : 6 = C D U 6 0 4
8 UM C D U 2 2 6 6 : 1 1 = C D U 2 6	8 UM C D U 2 2 5 5 : 1 1 = C D U 2 0 5

Anexo 7: Transcripción de las sesiones

I: Investigadora

E: Estudiante

Evaluación inicial

I: Te cuento, vas a resolver diez divisiones. Puedes utilizar la estrategia que a ti te plazca, no es necesario que utilices la estrategia que te enseñaron acá en el colegio, si tú tienes otra estrategia para hacerlo, puedes utilizarla, si quieres hacer dibujitos, puedes hacerlos. Acá (señalando los bloques base 10) tienes este material, que se llama bloques base 10, como tú me decías parece que no lo conoces, cierto?
E: (Mueve la cabeza en señal de negación)
I: Si tu quisieras usarlo para representar, aquí hay cubitos chiquititos que te pueden ayudar también. Y aquí (mostrando una hoja con las tablas de multiplicar) tenemos una gran pista, tenemos las tablas de multiplicar. Entonces, por ejemplo, si tú quieres saber el resultado de 4 por 5 es 20 (mostrando cómo se utiliza la hoja entregada).

I: ¿Te parece muy difícil la división?
E: Ehmm sí.
I: Porque de las cuatro operaciones, por ejemplo, la suma, la resta, la multiplicación y la división, ¿cuál es la que más te cuesta?
E: Uhmm ninguna, pero no me sé las tablas de multiplicar.

(Comienza a trabajar)
(En las cinco primeras divisiones utiliza las tablas de multiplicar y trabaja en silencio)

Al llegar a la sexta división:
E: Tengo una duda en este.
I: Dígame.
E: Ehh, el 12, no sé cómo hacerlo aquí.
I: Pero este (señalando el ejercicio anterior) lo pudiste hacer super bien. ¿Cuál es la diferencia con ese?

E: Los dos números (señalando el divisor).

I: Ahh que tenga dos números. ¿Y si sigues la misma lógica del ejercicio anterior?, porque, ¿cómo lo hiciste acá?

E: Dije que número me daba igual o cerca de 65, porque con este (mostrando el primer número del dividendo) no me alcanza.

I: Y si hacemos lo mismo acá?

E: ¿Pero con uno? (haciendo alusión a un dígito del divisor)

I: No con los dos, con el 12.

E: Sí.. (mira la hoja de las tablas de multiplicar)

I: Eso sí, ahora no nos sirve esa tabla.

E: Pucha.

I: Pero la podemos anotar.

E: Ya

I: 12 por 1… esa es fácil.

E: Ehh (se ríe y escribe el resultado, pero igual duda)

I: 12 por 2 es 24. 12 por 3 es 36. 12 por 4 sería 48. 12 por 5 sería 60. 12 por 6, 72. 12 por 7, 84. 12 por 8, 96. 12 por 9, 108. 12 por 10, 120.

(sigue trabajando en el ejercicio 6)

E: (Pone cara de duda)

I: Esa la podemos hacer usando los dedos.

E: No me acuerdo

I: ¿Pero cuánto es 55 – 48?

E: (Se rasca la cabeza)

I: ¡Pero usa los dedos! En el colegio retan a los niños porque no pueden usar los dedos. Yo digo que es importante usar los dedos.

E: (Comienza a usar los dedos pero de forma escondida, debajo de la mesa) ¡No puedo!

I: Pero mira: 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55 (mostrando con mis dedos).

E: (Se ríe) ¿7?

I: Sí

E: ¿Y eso? (haciendo alusión a que eso era todo para resolver la sustracción)

I: Sí

(Con esas ayudas es capaz de resolver el ejercicio 6)

En el ejercicio 7

E: ¿Está malo?

I: No te insegurices, hasta el momento vas super bien. ¿Quieres que anotemos la tabla del 11?

E: (Mueve la cabeza afirmando)

I: 11 por 1, 11. 11 por 2… esta es muy fácil! Yo te voy a enseñar un truco. 22. 11 por 3, 33. 11 por 4, 44. Fíjate en los resultados. 11 por 5, 55. 11 por 6, 66. 11 por 7. ¿Te fijaste cómo funciona? 77. 11 por 8, ¿cuánto sería?

E: (Se ríe) 88.

I: ¿Viste? Es la más fácil. 11 por 9, 99. Y 11 por 10. ¿Cuánto sería 11 por 10?

E: 111

I: 110. Recuerda, tomamos el número y le agregamos un cero.

(El ejercicio 8 lo hace sin preguntar nada más)

(En el último ejercicio pide la tabla del 15)

E: Ya (señalando que terminó).

I: Lo que te quiero pedir ahora, para terminar, si me puedes explicar, por ejemplo… ¡esta! (señalando el ejercicio 5). ¿Cómo la resolviste?, ¿qué fue lo que hiciste tú para poder resolverla?

E: Vi si el número 6… pero no me alcanzaba, así que junté el 6 con el 5, daría 65. Entonces, busqué una multiplicación que me diera cerca de 65 o igual a 65, y me salió 63. Luego, lo resté, me quedaron 2, bajé el 1. Ahh pero, el número multiplicado?, lo digo?... El número multiplicado que me diera cerca de 65, era por 9, y me dio 63.

I: ¿Y tú aprendiste a dividir así acá en el colegio?, o ¿te enseñaron en tu casa?

E: En mi casa y aquí.

I: ¿Y en las dos partes te enseñaron de la misma forma?

E: No me acuerdo bien como me enseñaron. Pero me acostumbré así… creo que fue mi mamá.

I: ¿Sí?, ¿tu mamá te enseñó? ¿Y tú sabes por qué funciona al final?, ¿por qué nos preguntamos cuántas veces cabe el 7 en el 6, si estamos dividiendo 651?, ¿sabes por qué?

E: (Mueve la cabeza negando)

I: Solo sabes que funciona… ¿y tus compañeros dividen de la misma forma?, ¿sabes?

E: No, no sé si dividen de la misma forma que yo.

I: ¿No te acuerdas en qué curso aprendiste a dividir acá en el colegio?

E: Cuarto, quinto, creo.

I: En cuarto yo creo que te enseñaron a dividir. ¿Y fue difícil?

E: Al principio sí.

I: ¿Por qué?

E: Porque, porque me decía, no entendía nada y me decían 7, ¿cómo era?, ¿cuántas veces cabía en el… como este, como este de acá. (muestra el ejercicio 5) Y yo no cachaba.

I: Y después, ¿por qué lo entendiste?

E: Porque me enseñaban todos los días en mi casa.

I: ¿Te hacían hacer muchas divisiones?

E: Repasar y eso.

I: Ya! Vamos a hacer un experimento. Vamos a hacer una de estas divisiones con este material. ¿Ya?, yo te voy a explicar en qué consiste este material. Mira, tenemos estas piezas (mostrando unidades), tenemos estas (mostrando barras), estas (mostrando la placa) y el cubo (mostrándolo).

E: (Toma el cubo grande y trata de desarmarlo)

I: No ese no se desarma. Pero con estas (mostrando placas) puedes formar otro.

E: (Se ríe)

I: ¿Cómo representarías tú el número 840?... ¿se te ocurre?

E: (Mueve la cabeza negando)

I: Ya… cuenta cuántos cubitos hay en ese (señalando la barra)

E: 10

I: ¿Cuántas barritas hay acá? (mostrando la placa).

E: 8

I: Vuelve a contar.

E: 10

I: Entonces yo podría decir que esta es una unidad (mostrando el cubito), esta una decena (mostrando la barra), una centena (mostrando la placa) y una unidad de mil (mostrando el cubo).

(Tuve problemas para seguir registrando con la cámara, pero representamos el número 840 con el material y se finalizó la sesión)

Sesión 1

I: ¿Recuerdas cómo se llama este material? (mostrando la caja de los bloques base 10).

E: No

I: Se llama bloques base 10. ¿Y te recuerdas de las piezas que tenía?

E: (Afirma con la cabeza)

I: ¡Sácalas!... Estas se llaman cubitos o unidades (mostrándolos). Estas se llaman barras (mostrándolas). Estas de acá, que pueden formar el cubo se llaman placas (mostrándolas) y ese de allá es el cubo grande (mostrándolo). Entonces, ¿cuántas de estas chiquititas hay en una barra?

E: 10

I: ¡Muy bien! ¡Te acuerdas!... ¿Y en estas? (mostrando la placa), ¿cuántas de estas chiquititas hay?

E: 10

I: ¿Estás seguro?

E: (Toma una placa y comienza a contar) ¿En total?

I: Sí, en total.

E: (Sigue contando de uno en uno, pero se detiene) 100.

I: Entonces, ¿cuántas de estas (barras) hay ahí (placa)?

E: (Piensa un momento) 10.

I: Y este, que es el cubo grande, ¿cuántas de estas (placa) lo forman?

E: (Cuenta) 10.

I: ¿Y cuántas de estas (barra) forman el cubo?

E: ¿Cómo?

I: ¿Cuántas de estas (barras) forman el cubo?

E: (Cuenta en el cubo) mil.

I: De estas (unidades) hay mil. ¿Pero de estas (barra)?

E: 100

I: Ya. ¿Tú conoces los conceptos de unidad, decena, centena y unidad de mil?

E: Sí

I: ¿Cuál de estas representaría las unidades? (mostrando el material).

E: (Señala las unidades o cubitos)

I: ¿Cuál las decenas?

E: (Señala las barras)

I: ¿Cuál las centenas?

E: (Señala la placa)

I: ¿Y cuál la unidad de mil?

E: (Señala el cubo)

I: Entonces ahora, vamos a representar un número. Partamos por el número 25. ¿Cómo lo representarías con este material?

E: (Empieza a tomar el material) ¿Cuánto?

I: 25

E: (Representa 25)

I: ¿Y cuántas decenas tendría este número?

E: Ehhh ¿dos? (mostrando las dos barras).

I: ¿Y cuántas unidades?

E: 5

I: Si tuvieras que representar ese número utilizando solo unidades, ¿cómo lo representarías?

E: ¿El 25 solo con unidades? (toma la bolsa de las unidades y comienza a sacar piezas).

I: Yo te recomiendo que siempre que representes un número agrupes de a 10, para poder contarlas más fácilmente… Ahora, ¿cómo representarías el número 131? Utilizando cualquiera de las piezas.

E: (Toma una placa) ¿diez?

I: Recuerda que cada una representa a la unidad, decena, centena y unidad de mil.

E: ¿Cien? (titubea) ¿131? (lo representa correctamente con el material).

I: ¿Cuántas centenas tiene este número?

E: Ehhh 1

I: ¿Decenas?

E: (Mirando la representación) 3.

I: ¿Y unidades?

E: 1

I: ¡Muy bien! Ahora el 654.

E: (Titubea) ¿600?

I: Sí

E: (Toma las placas y selecciona 6) ¿600 cincuenta y cuántos?

I: 654

E: (Representa correctamente el número)

I: ¿Cuántas centenas tenemos?

E: Ehhh 4

I: ¿Centenas?

E: No, 5.

I: Vuelve a contar.

E: 5

I: ¿Cuántas centenas? (poniendo énfasis en “cen”).

E: Ahhh… (toma las placas y las cuenta) 6.

I: ¡Muy bien! ¿Decenas?

E: 5

I: ¿Y unidades?

E: 4

I: El último, representa el número 1.432.

E: (Representa más seguro que en las ocasiones anteriores)

I: ¿Cuántas unidades de mil tenemos?

E: (Mira la representación) 1.

I: ¿Cuántas centenas?

E: 4

I: ¿Decenas?

E: 3

I: ¿Unidades?

E: 2

I: Entonces, este material, esta es la gracia que tiene, que nos permite representar números y también nos permite resolver operaciones. A veces en los colegios se enseña primero con el material y luego con los números, en tu caso, entiendo que fue al revés, con números primero, ¿cierto?, y ahora vamos a aprender a hacerlo con el material.

I: ¿Cómo representarías la multiplicación 4 por 5 con este material?

E: ¿Tiene que ser el resultado también?

I: No necesariamente…

E: (Mira el material y se toca la cabeza)

I: ¿Qué significa para ti 4 por 5?

E: Se multiplica 4 por 5.

I: ¿Pero cómo podríamos representarlo? Ponte tú, si yo te digo que hay 4 amigos y cada uno quiere 5 dulces, ¿cómo encontrarías el total de dulces que necesitamos?

E: 25, multiplicando.

I: Ya y multiplicarías, ¿qué multiplicarías?

E: 5… era por 4?.. 5 por 5 es 25, me equivoqué, 5 por 4 es 20.

I: Entonces, ¿qué multiplicarías?

E: 5 por 4

I: Entonces lo que podríamos hacer es que esto representen los dulces (mostrando los cubitos). Aquí estarían los dulces de un niño (5 unidades), aquí los de otro, de otro y de otro (5 cubitos cada vez). ¿Sí o no?, ¿representamos 4 veces 5?

E: Sí

I: ¿Y cuántas hay?

E: ¿Cómo?

I: ¿Cuántos dulces hay?

E: 20

I: ¿Y 4 por 5 es 20?

E: Sí

I: Entonces, ¿cómo representarías 3 por 8? Siguiendo la misma lógica, hay 3 niños y cada uno tiene 8 dulces.

E: (Piensa un momento y luego hace correctamente la representación)

I: ¿Entonces cuánto es 3 por 8?

E: (Mira la hoja con las tablas de multiplicar)

I: Fresco (risas)

E: 24

I: ¿Y ahí hay 24? (señalando la representación)

E: Sí

I: ¿Podríamos decir que cuando yo digo una multiplicación estoy diciendo, por ejemplo, si tengo 3 por 8, 3 veces el 8?, ¿o no?

E: (Cara de duda) Sí

I: Cuando era 4 por 5, era 4 veces el 5… La última: 3 por 12.

E: (Forma 3 grupos de 12 unidades)

I: (Formo 3 grupos con 1 barra y 2 unidades) ¿Yo representé lo mismo que tú?

E: Sí

I: Si, ¿cierto?... ¿cuál es la diferencia?

E: (Se queda callado con las manos en la boca)

I: Que representamos de distinta forma el 12… tú solo utilizaste unidades, ¿y yo utilicé?

E: Ehh decenas.

I: Y unidades! Porque el 12 tiene 1 decena y 2 unidades. (Desarmo la representación con decenas, dejando solo la inicial del estudiante) Ahora si quisieras representar 36 : 3, ¿cambiaría esa representación?

E: Sí

I: ¿Cómo la representarías?

E: (Toma 3 barras y se queda mirando la otra representación. Luego de un rato, toma 6 unidades y las ponen al lado de las 3 barras)

I: ¿Y dividido 3?, ¿cómo dividimos este número en 3?

E: ¡Así! (y muestra la representación de 12 por 3 hecha utilizando solo unidades).

I: Pero divide este que representaste tú en 3.

E: No sé.

I: (Formo tres grupos, cada uno con una barra y dos unidades) Sí o no?

E: Sí

I: ¿Todos los grupos tienen la misma cantidad?

E: (Afirma con la cabeza)

I: ¿Y este grupo tiene lo mismo que ese? (haciendo el vínculo entre la representación de la multiplicación y de la división).

E: Sí

I: Entonces, ¿se representaban igual?

E: Sí

I: Ya, yo te voy a contar que entre la multiplicación y la división hay una relación porque si yo digo 2 por 3, ¿cuánto es?

E: (Mira las tablas de multiplicar) 6.

I: Y ¿6 : 2 cuánto es?

E: (Se tapa la cara)

I: Mira… (toma el cuaderno y escribe en él) 3 por 2 es 6 y 6 : 2… ¿cuánto será? (muestra el cuaderno al estudiante) Si están relacionadas estas operaciones.

E: 3

I: Entonces si yo te digo (escribiendo en el cuaderno) 4 por 5 es 20, ¿cuánto será 20 : 4? Solo mirando los números puedes saber la respuesta.

E: 5

I: Si yo te digo que 120 por 3 es 360, ¿cuánto es 360 : 120? (escribiendo en el cuaderno).

E: 3

I: ¿Se entendió que hay una relación entre la multiplicación y la división?

E: Sí

I: Entonces, ahora vamos a pasar a la división 52 : 4, ¿cómo lo representarías?

E: (Representa 52) ¿dividido 4? (me mira y no hace nada)

I: Puedes empezar dándole una barra a cada grupo.

E: (Se afirma la cabeza)

I: No te estreses… mira (pongo una barra en cada grupo)… pero no podemos seguir dividiendo en 4, ¿entonces qué podemos hacer con esta (mostrando la quinta barra)?

E: Dividirla.

I: Podemos cambiarla por estas (mostrando las unidades).

E: (Se ríe y devuelve una barra a la bolsa y comienza a sacar unidades, llega a 3 y me mira).

I: Tienes que llegar a 10 porque esta (la barra) tiene 10 unidades.

E: (Llega hasta 10 unidades).

I: ¿Ahora puedes dividirlo entre 4?

E: (Prueba con 4 en cada grupo y cuando llega al segundo se detiene) no.

I: Prueba con uno más chiquitito, ponte tú, 2 a cada uno.

E: (Reparte de a 3)

I: Suuuper bien. Entonces, ¿cuánto es 52 : 4?

E: 3… no, no, no.

I: ¿Cuánto hay en cada grupo?

E: 13

I: Entonces 52: 4 es 13.

I: Ya, ¡hagamos otra! 46 : 3

E: (Representa 46 y mientras lo hace me mira para recibir aprobación de lo que hace)

I: Dividido 3.

E: (Forma 3 grupos con una barra cada uno)

I: ¿Qué puedes hacer ahora con esa barra?

E: La cambio (muestra las unidades).

I: Muy bien.

E: (Toma 10 unidades)

I: Ahora empieza a repartirlos.

E: (Comienza a repartir de a 5 unidades y titubea)

I: Dale

E: (Continúa y le sobra uno)

I: ¿Qué pasó aquí?, ¿qué sobró?

E: (En silencio con la pieza que sobró en su mano)

I: ¿Cuántos sobraron?

E: 1

I: ¿Y ese cubito lo podemos dividir?

E: No

I: ¿Escuchaste alguna vez decir que hay divisiones que tienen resto distinto de cero?

E: (Niega con la cabeza)

I: En este caso representamos 46 : 3 (escribiendo en el cuaderno) y a ti te dio que en cada grupo habían 15 y te sobró 1. Ese de abajo es el resto. Yo creo que sí lo conocías ¿o no?, ¿alguna vez te dio una división con resto distinto de cero?

E: Ah, sí.

I: Ahora representa 75 : 3

E: (Representa 75 y forma 3 grupos con 1 barra cada uno, y toma las otras 4 barras) Tengo que cambiarlas.

I: ¿Puedes entregarla 1 más a cada grupo?

E: (Me queda mirando y no hace nada)

I: Entrégale una barra más a cada grupo.

E: (Entrega una barra más a cada grupo)

I: ¿Te alcanzaba, cierto? Entonces ahora esa, que no la puedes repartir la cambias.

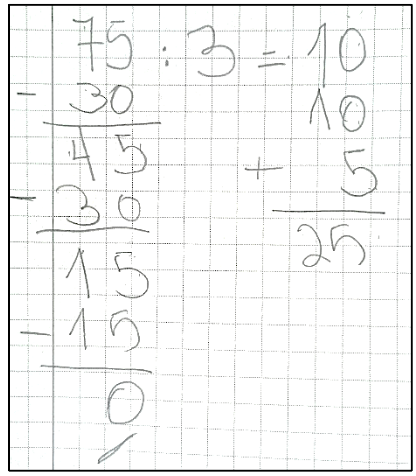
E: (Guarda la barra y saca 10 unidades)

I: Ahora divídelas en 3 esas que te quedaron ahí.

E: (Prueba repartiendo las unidades en 3, se da cuenta que le alcanzan 5 para cada grupo y las reparte)

I: Entonces, ¿cuánto es 75 : 3?

E: (Cuenta) 25.



I: Tú hiciste una división (toma el cuaderno) que era 75 : 3. Entonces lo que tú primero hiciste fue poner 1 barrita, ¿cierto?

E: Sí

I: (Escribiendo en el cuaderno) Entonces tú probaste con 10. ¿3 por 10?

E: 30

I: 30, ¿cuánto nos queda por repartir? 75 menos 30 es 45. Y yo te dije, pero nos alcanza para repartir una barrita más. Entonces volvimos a probar con 10, ¿3 por 10?

E: 30

I: Restamos y nos quedan 15. Nos quedaba 15, pero tenías 1 decena y 5 unidades y lo que hiciste fue cambiar la decena por 10 unidades. Entonces tú las agrupaste y dijiste son 5 para cada una. 5 por 3 es 15 y 15 menos 15 es 0, porque no nos quedó ninguna. Y ahora sumamos, 10 + 10 + 5

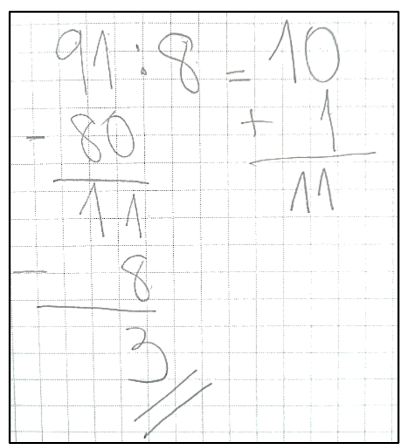
E: 25

I: (Mostrando la representación) 25. ¿Fue los mismo cierto?, ¿lo que hicimos acá (mostrando la representación) ahora lo hicimos en papel?, ¿Habías visto a alguien dividir así?

E: No

I: ¿Te parece más fácil?

E: (Afirma con la cabeza)



I: Ahora representa 91 : 8.

E: (Representa 91) ¿dividido 8?

I: Dividido 8.

E: (Forma 8 grupos de 1 barra cada uno)

I: Espérame (escribiendo en el cuaderno la división) 91 : 8. ¿Qué fue lo primero que hiciste?, ¿le diste cuánto a cada grupo?

E: 10

I: Ya le diste 10 (escribiendo en el cuaderno). ¿8 por 10?

E: 80

I: ¿Cuánto nos queda por repartir?

E: 11

I: ¿Y qué vas a hacer ahora para poder seguir repartiendo?

E: Cambiar (muestra la barra).

I: Ya, cámbiela.

E: (Saca 10 unidades y deja la barra)

I: Ya reparta.

E: (Prueba agrupando las unidades de a 3, luego de a 4 y me mira)

I: Le puedes dar una a cada grupo.

E: (Reparte una unidad a cada grupo y le quedan 3 sin repartir)

I: Mira para acá (escribe en el cuaderno). Le dimos 1 a cada grupo, ¿1 por 8?

E: 8

I: ¿Cuántas nos quedaron por repartir?, ¿8 a 11?

E: Ehhh 3

I: ¿Cuántas te quedan por repartir? (indicando las 3 unidades que la queden por repartir)

E: 3

I: ¿Puedes seguir repartiendo?

E: No

I: Entonces, ¿91 : 8?, ¿cuál es el resultado?

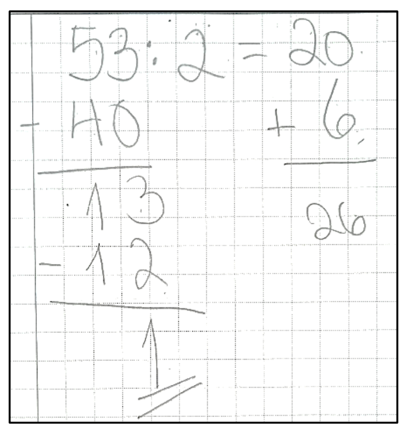
E: 11

I: Lo sumamos (mostrando en el cuaderno). ¿Y cuál es el resto?

E: 3

I: ¡Muy bien!

I: Sigamos, 53 : 2.



E: (Representa 53)

I: ¿Cuánto le vas a dar a cada grupo primero?

E: (Mira las barras, y forma 2 grupos con 2 barras cada uno)

I: ¿Cuánto le diste a cada uno? (escribe en el cuaderno)

E: 20

I: ¿Y 20 por 2?

E: (Pone cara de complicado) ehh.

I: 2 por 2, ¿cuánto es?

E: 4

I: Y le agregas un cero.

E: 40

I: 40. Restamos, ¿cuántas nos quedan por repartir?

E: 13

I: ¿Y tienes 13?

E: (Afirma con la cabeza)

I: Ya, ¿puedes seguir repartiendo?

E: Sí

I: Ya reparte.

E: (Toma la barra y la cambia por 10 unidades)

I: ¿Cuánto le vas a dar a cada uno?

E: (Forma dos grupos de a 4 y se da cuenta que le sobran, y luego prueba de a 5 y por último de a 6. Reparte 6 a cada grupo)

I: ¿Cuánto le diste?

E: 6

I: Ya le diste 6, mira acá (mostrando en el cuaderno). ¿6 por 2?

E: 12

I: Restamos, ¿cuánto nos queda?, ¿13 menos 12?

E: 1

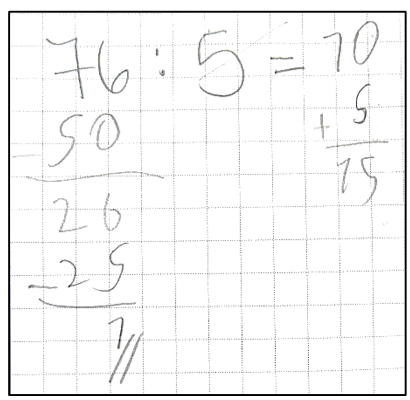
I: ¿Cuántas te quedaron? (mostrando la representación).

E: 1

I: ¿Cuánto es el resultado?

E: 26

I: Entonces 53 : 2 es 26 y me sobra 1.



I: Ahora 76 : 5

E: (Representa 76 y forma 5 grupos de 1 barra cada uno)

I: Ya (le entrega el lápiz en señal de que él vaya registrando el proceso). ¿Cuánto le diste a cada grupo?

E: 10 (lo anota en el cuaderno)

I: ¿Cuánto es 10 por 5?

E: 50 (lo anota).

I: Resta para saber cuánto queda por repartir.

E: (Realiza la sustracción en el cuaderno) 26.

I: ¿Y te quedan 26 allá por repartir? (señalando la representación con el material).

E: Sí

I: Super bien. Entonces, ¿qué vas a hacer ahora para seguir repartiendo?

E: Cambiarlas.

I: Muy bien, cámbielas.

E: (Entrega 2 barras y saca 20 unidades)

I: Entonces ahora las vamos a repartir entre 5.

E: (Forma 4 grupos de 6)

I: Entre 5.

E: Ahhh (forma 5 grupos de 5 y reparte).

I: ¿Cuánto le diste a cada uno?

E: 5

I: 5 más, ¿cierto?

E: (Lo anota en el cuaderno)

I: ¿Cuánto es 5 por 5?

E: 20

I: Noo

E: 5 por 5… 25 (lo anota en el cuaderno).

I: ¿Cuánto nos queda por repartir?

E: 1 (lo anota en el cuaderno).

I: ¿Y la podemos repartir?

E: No

I: En este caso no… ¿y cuánto es el resultado?

E: (Realiza la adición en su cuaderno y anota 15)

I: ¿Crees que es más fácil aprender así?

E: (Afirma con la cabeza)

I: ¿Por qué?

E: Porque sí (se ríe).

I: Ya po, dime por último que es más entretenido o más fácil o no sé…

E: Es más entretenido.

I: ¿Por qué?, ¿cómo aprendiste tú?

E: Porque se puede ver con figuras en vez de hacerlo solo con números.

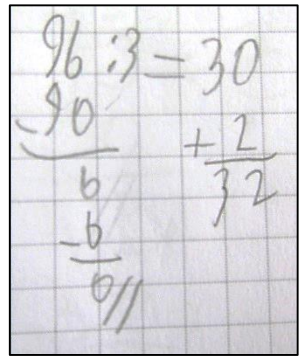
I: ¿Cierto?, ¿y se entiende por qué funciona esto? (mostrando las divisiones hechas en el cuaderno). Que aquí vamos dejando lo que nos va quedado por repartir. Y aquí vamos juntando el resultado.

E: Sí

I: ¿Y te parece más fácil que la forma en que tú divides normalmente?

E: Sí

I: Yaa vamos a hacer el último, pero lo vas a hacer solito, yo no te voy a ayudar en nada, nada, nada. ¿Te parece?



E: Ya

I: 96 : 3

E: (Lo anota en el cuaderno. Representa el 96. Forma 3 grupos de 1 barra cada uno. Y le da una segunda barra a cada grupo) ¿Le puedo dar otra?

I: Sí, obvio que sí.

E: (Le da una tercera barra a cada grupo)

I: ¿Cuánto le diste a cada grupo?

E: 30 (lo registra en el cuaderno).

I: ¿Y 30 por 3?

E: 90

I: Muy bien.

E: (Realiza la resta y obtiene como resultado 6)

I: Super.

E: (Da 2 unidades a cada grupo)

I: ¿Cuánto le volviste a dar?

E: 2 (lo anota en el cuaderno).

I: ¿2 por 3?

E: 9, no, 6 (lo anota).

I: ¿Te quedaron por repartir?

E: No

I: Entonces 96 : 3 es 32 y de resto ¿me quedó?

E: 0

Sesión 2

Antes de iniciar la sesión, el estudiante me preguntó si podía ir con un amigo (compañero de curso), a lo cual, accedí.

E2: estudiante amigo

I: Recordemos un poco de lo que hicimos la clase pasada. ¿Te acuerdas cuántas de estas (señalando las unidades) podemos encontrar en esta (señalando una barra)?

E: Sí, 10.

I: ¿Y de estas (señalando la barra) en estas (señalando la placa)?

E: 100

I: ¿Y en este (señalando el cubo)?

E: 1.000

I: ¡Super bien! (el estudiante se ríe y mira a su amigo) ¿Y cómo representarías el número 324?

E: (Representa con los bloques base 10 el número 324)

I: Super. Te acuerdas bien de lo que hicimos la última vez. ¿Qué más aprendimos la otra vez?... Si yo te digo una decena, ¿qué me mostrarías?

E: ¿Decena?

I: Acuérdate decena (haciendo énfasis en la sílaba "de").

E: (Muestra una barra)

I: ¿Y una centena? (haciendo énfasis en la sílaba "cen").

E: (Muestra la placa)

I: ¿Y una unidad de mil?

E: (Muestra el bloque)

I: ¿Y una unidad?

E: (Muestra un cubito y mira a su amigo)

I: Entonces vamos a empezar a hacer divisiones, que es lo nuestro, a lo que vinimos a aprender. ¿Tú cómo aprendiste en el colegio a dividir? (preguntando a E2)

E2: ¿Ah?

I: ¿Cómo aprendiste a dividir?, ¿te acuerdas?

E2: Sí, viendo como un número se encaja, el divisor… (mueve las manos).

I: Ya…¿el dividendo?

E2: En el dividendo.

I: Entonces, ¿te parece? (dirigiéndose a E2)... mira, yo te voy a dar una hoja y una lápiz y tú vas a hacer la misma división que va a hacer él con los cubitos, tú la haces con lápiz y veamos si llegamos al mismo resultado.

E2: ¿Él con los cubitos y yo con el lápiz?

I: Sí. Ya va a ser 84 : 7

E: (Representa el número 84)

E2: Listo.

I: Ya calma (dirigiéndose a E2). Ya ahí tenemos el 84, y ¿después qué hacíamos para dividirlo en 7? (dirigiéndose a E).

E: (Forma 7 grupos con 1 barra cada uno)

I: Ya, y ahora, ¿puedes seguir repartiendo esos?

E: No

I: ¿Qué vas a hacer?

E: Cambiarlos (devuelve una barra y saca 10 cubitos).

E2: ¿Saca fotos para hacer propaganda? (mirando la cámara de video).

I: No, para acordarme después, porque yo tengo que analizar cómo él divide. De eso se trata mi tema, entonces lo grabo porque o sino después se me olvida lo que pasó en la sesión.

E: Ya

I: ¿Cuántas hay ahí?

E: 10

I: Deberías tener 14.

E: ¿14?

I: Recuerda que tenías la decena y 4 cubitos.

E: Ah verdad (agrega 4 cubitos).

I: Ahora divida.

E: (Comienza probando con grupos de 3 cubitos, luego de a 2, y comienza a repartirlos) No…

I: Sí, estamos bien.

E: Ah sí

I: ¿Tuvimos resto?

E: No

I: ¿Cuánto es 84 : 7?

E: 0… ah no… 12… no… sí 12.

I: ¡Super bien! Entonces ahora vamos a hacer otra. ¿A ti también te dio 12? (dirigiéndose a E2).

E2: Sí

I: ¿Resto 0?

E2: Sí

I: ¡Super bien!

I: Ahora vamos a hacer una más grande… 364 : 3

E: (Representa 364 con el material y forma 3 grupos de 1 barra cada uno) ¿Cómo es esto? (mira las placas, ya que en la sesión anterior el dividendo tenía 2 dígitos)

I: Tienes que dividir todo en 3.

E: ¿Los reparto? (toma las placas y pone una en cada grupo y agrega una barra más a cada grupo).

I: ¿Y esas de allá?, ¿qué pasó? (señalando las unidades).

E: (Las mira, me mira y luego agrega una unidad a cada grupo)

I: ¿Cuánto te dio de resultado?

E: ¿De todo esto?

I: ¿Cuál es el resultado de 364 : 3?

E2: Sácalo de aquí (le señala un grupo)

E: Ya sé (se tapa la cara con cierto nerviosismo). ¿100?... 121

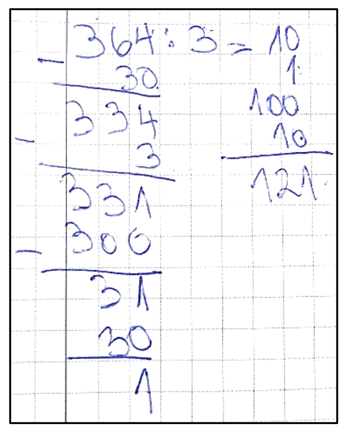
I: 121, ¿cuánto te dio de resto?

E: 1

I: ¿Y a ti te dio lo mismo? (dirigiéndose a E2).

E2: Sí

I: Ahora vamos a recordar cómo lo hacíamos en el papel. ¿Te acuerdas que lo íbamos haciendo en paralelo? (escribiendo en el papel) Entonces era 364 : 3, ¿qué fue lo primero que repartiste?



E: Los 10

I: Pusiste 10, ¿cuánto es 10 por 3?

E: 30

I: ¿364 – 30? 334.. ¿Y después que repartiste?

E: 1

I: Ya 1, ¿1 por 3?

E: 3

I: Ya restamos y nos queda 331. ¿Después que repartiste?

E: 100

I: ¿3 por 100?

E: 300

I: ¿Y después que repartiste?

E: Nada más.

I: Sí

E: Ah, 10 más.

I: ¿10 por 3?

E: 30

I: ¿Puedo seguir repartiendo si me queda 1 cubito?

E: No

I: El resultado es 121 (realizando la adición en el cuaderno) que es lo mismo que obtuviste tú.

E: Esto es lo que hago (mirando a E2).

I: Ahora vas a escribir en el papel tú (dirigiéndose a E) y vamos a hacer otra más. 745 : 5

E: (Comienza a representar 745) ¿Qué nos están pasando? (preguntando a E2)

E2: Geometría

I: Ah, ¿tú vas en el otro sexto?

E2: No en el mismo.

I: ¿Y por qué están viendo cosas distintas?

E: ¿Por qué?

I: Cómo le preguntaste ¿qué están pasando?

E: ¿Qué estamos pasando?

I: Ah, entendí estás.

E: (Termina de representar el número y forma 4 grupos de 1 barra y me queda mirando)

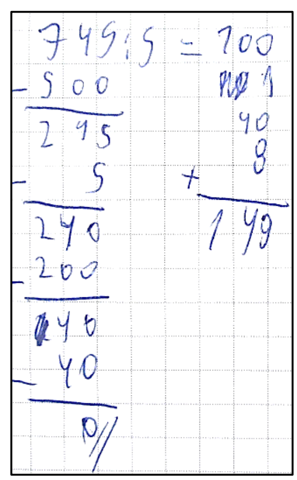
I: No te alcanza, prueba con otro.

E: (Se queda mirando el material)

I: Reparte las centenas primero.

E: (Forma 5 grupos con 1 placa cada uno)

I: Ya pudiste repartir 100, ¿cierto? Entonces empecemos (apuntando el cuaderno).



E: (Registra en el cuaderno que repartió 100)

I: ¿Qué harías ahora en el papel?

E: (Se tapa la boca)

I: ¿100 por 5?

E: Verdad (se ríe y multiplica y sigue solo haciendo la resta).

I: ¿Por qué restamos?

E: Porque sí.

I: ¿Qué información nos da este número? (señalando el resultado de la resta).

E: (Mueve la cabeza en señal de negación)

I: ¿Cuánto te dio la resta?

E: 245

I: ¿Y qué representa eso?

E: (Se queda en silencio)

I: Lo que queda por repartir ¿o no?

E: Sí

I: Porque ya repartiste estas (señalando las 5 placas), te queda por repartir solo esto de acá (señalando lo que no ha repartido: 245).

E: Ahhh

I: ¿Qué vas a repartir ahora?, ¿puedes repartir algo más?

E: (Reparte una unidad a cada grupo)

I: Ya repartiste, ¿cuánto repartiste? (señalando el cuaderno).

E: 5

I: ¿Pero cuánto quedó en cada grupo?

E: Ah 1 (escribe 1 debajo del 1 del 100 que había escrito antes)

I: Tienes que escribir a la izquierda porque es una unidad.

E: Si sé… ah me confundí (se tapa la cara).

I: Ya no importa, mira ¿cuánto repartiste ahora en cada grupo?

E: 1 (sigue con las manos en la cabeza).

I: ¿1 por 5?

E: 5 (sigue con las manos en la cabeza)

I: Anotamos 5 y hacemos la resta para ver cuánto nos queda por repartir.

E: (Realiza la resta sin sacar su mano de la cabeza)

I: Esto no lo puedes repartir (señalando las dos placas que le quedan), ¿cierto?, ¿qué puedes hacer?

E: (Golpea con el lápiz la mesa, se tapa la boca) ¿Cambiarlos?

I: Ya

E: Todas (y toma las barras).

I: Mira, tenemos dos opciones, puedes cambiar las barras por unidades o las placas por estas (mostrando las barras).

E: (Toma las 2 placas)

I: ¿Cuántas de estas necesitas para cambiar? (señalando las barras).

E: 200

I: Piensa bien.

E: Ah no.

E2: 20

E: Cállate, viniste a ver no más, no a soplar (hablándole a E2).

E2: Verdad

I: No tenemos 20 (barras), es una limitación del material, pero lo que podemos hacer es usar lápices.

E: Pero tenemos estas (muestra las unidades).

I: También podemos usarlas.

(E junto conmigo formamos barras con las unidades)

E2: Es como jugar a los legos.

I: Sí es parecido… ¿conocías este material tú?

E2: No… yo nunca había tenido taller de matemática.

I: Ah, pero si no se usa solo en taller, se usa para aprender en clases, porque sirve para aprender números, y para aprender las operaciones. Sirve para aprender todas las operaciones, la multiplicación, la división, la adición y la resta.

E: No nos alcanzó.

I: ¿De verdad no nos alcanzó?, ¿cuánto te quedaba? 240 (mostrando en el cuaderno)

(ponen lápices por las decenas que faltan para hacer el reagrupamiento).

E: Juega Chile.

I: ¿Ah?

E: Juega Chile.

I: ¿Tienen más lápices? Necesito lápices.

E: ¿Por qué?

I: Nos faltan…

E: (Las cuenta) ohhh

I: ¿Viste? ¡Estás más desconcentrado!

E2: Agrega más lápices.

I: Ya ahí estamos (risas) Ahora puedes repartir.

E: Se ve raro con los lápices.

I: Si po, pero recuerda un lápiz es una decena.

E: (Reparte 4 barras a cada grupo y le quedan 4 por repartir)

I: ¿Y esas?, ¿qué puedes hacer con esas? Antes que sigamos repartiendo, ¿cuántas repartiste? (señalando el cuaderno).. de las decenas.

E: 3… no 4

I: ¿Entonces cuántas entregaste a cada grupo?, ¿cuánto significan 4 decenas?

E: 40

I: ¿Y 40 por 5 cuánto es?

E: (Me mira)

I: Recuerda 5 por 4 y le agregas un cero.

E: 200

I: Muy bien.

E: (Realiza la resta)

I: ¿Cuántas te quedaron por repartir?

E: 40

I: ¿Y te quedan 40?, ¿cuántas hay ahí?

E: No, 50… nooo broma, 40.

I: ¿Y qué vamos a hacer ahora? Porque esto no ha terminado.

E: Cambiarlas (se ríe).

I: Sí, ¿pero por qué?

E: (Me mira)

I: ¿Qué es más chico que la decena?

E: La unidad.

I: Desármalas (son de las barras que formamos con las unidades)

E: Ehh

I: Ya reparte.

E: (Comienza formando grupos de a 10 y cuando va en el segundo se detiene)

E2: Cuenta cuantas tienes y las divides en el cuaderno.

E: (Sigue trabajando con los cubitos, formando grupos de a 9, y al llegar al último grupo se queja al darse cuenta que no le alcanzan)

I: No te alcanzó, sácale uno a cada grupo y prueba.

E: (Forma 5 grupos de 8 cubitos)

I: Ya reparte

E: (Comienza a repartir a cada grupo)

I: ¡Acuérdate!, ¿cuántas estás repartiendo a cada grupo?

E: 8

I: ¿Cuánto agregaste? (señalando el cuaderno).

E: (Deja caer las piezas en la mesa)

I: ¡Que desordenado!

E2: Imagíneselo en clases.

I: 8, ¿8 por 5?

E: 40

I: Síi

E: No, 45

I: No, estabas bien.

E: 40

I: ¿Cuánto quedó de resto?

E: 0

I: ¿Y el resultado de la división?

E: Uhmm… ¿hay que sumar cierto?

I: Sí

E: (Llega a 149)

I: ¿Hay 149 en cada grupo?

E: Sí

I: Sigamos con otra.

E: ¿Hasta qué hora es?

I: Nos quedan 13 minutos… alcanzamos a hacer otra.

E2: ¿Tan poco tiempo?

I: Sí es que empezamos más tarde, porque como me demoré en encontrar a la directora, no pudimos empezar a la hora. ¡Ya! 877 : 4

E: (Comienza a representar 877)

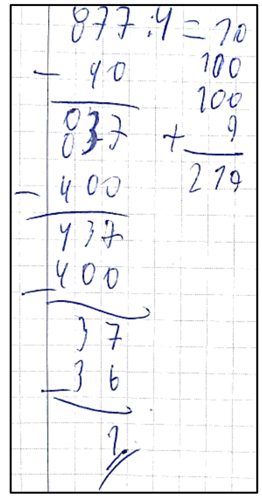
I: ¿Cuánto tienes ahí?

E: 877

I: ¿Y dónde están los 7?

E: Ay verdad.

I: Ahora si divide, ¿en cuánto tienes que dividir?



E: (Forma 4 grupos con 1 decena cada uno)

I: Le diste 10 a cada uno, empieza ahí (señala el cuaderno).

E: (Comenzó a realizar la sustracción)

I: Revisa eso… 7 – 4

E: ¡Ay!

I: Usa los dedos.

E: No, mi hermana salió de cuarto medio y usa los dedos.

I: ¿Y qué tiene? Todo el mundo usa los dedos, hasta la gente exitosa usa los dedos, no hay ningún problema, los dedos son tuyos, nadie te puede retar por usarlos.

E: La profe retaba a la I, ¿te acordai? (mirando a E2)

I: Si no es malo, la gente adulta también los usa, yo también los uso, todo el mundo los usa.

E2: Sí, yo también uso los dedos a veces.

I: ¿Viste?

E: Es que I hacía con los dedos y decía ¡no!, tienen que acordarse.

I: Usa los dedos, conmigo por lo menos no hay problema. Ya ahora, ¿cuánto le vas a dar a cada grupo?

E: (Reparte 1 centena a cada grupo)

I: ¿Cuánto le diste a cada grupo?

E: 100

I: Ya anota

E: Listo

I: Tenemos 400, 30 y 7 (señalando las piezas que aún no reparte) Ya, puedes seguir repartiendo.

E: (Agrega una centena más a cada grupo)

I: ¿Cuánto le volviste a dar a cada grupo?

E: 100 (y registra el proceso en el cuaderno).

I: Super, te quedan 37. ¿Qué puedes repartir ahora?

E: Uhmmm voy a cambiarlas (tiene en sus manos 3 decenas)

I: Ya cámbialas.

E: (Las cambia y comienza a formar grupos de a 5 unidades) Me van a sobrar.

I: No importa, después repartes las que te quedan.

E: Uhm 7.

I: Ya

E: Puchaa

I: ¿Puedes darle 2 a cada grupo?

E: (Forma 4 grupos de 9 unidades) Me quedaría 1.

I: Ese déjalo y reparte. ¿Cuánto le estás dando a cada grupo?

E: 9

I: Ya anota que diste 9 a cada uno.

E: Ehmmm

I: ¿9 por 4?

E: 36… resto.

I: ¿Qué significa eso?, ¿puedo seguir dividiendo?

E: No

I: ¿Y cuánto te dio de resultado?

E: (Resuelve la adición) 219.

I: ¿Y hay 219 aquí? (mostrando la representación).

E: Sí

I: Super bien

Sesión 3

I: Vamos a empezar recordando lo que hicimos la última sesión, y nos quedaron dos divisiones pendientes, porque empezamos muy tarde la clase pasada. Así que vamos a empezar con 694 : 2.

E: (Representa con el material el número 692)

I: Dividido 2.

E: (Forma 2 grupos con 1 barra cada uno y luego agrega 2 placas a cada uno) ¿Se puede así?

I: Sí

E: (Agrega 1 placa y 3 barras más a cada grupo)

I: ¿Qué más puedes repartir?

E: (Agrega 2 unidades a cada grupo)

I: ¿Y esa no la puedes repartir? (señalando 1 barra que E tiene en las manos).

E: Cambiando (guarda la barra y saca 10 unidades. Luego forma 2 grupos de a 5 y las agrega a los grupos)

I: ¿Cuál es el resultado?

E: ¿De todo esto?

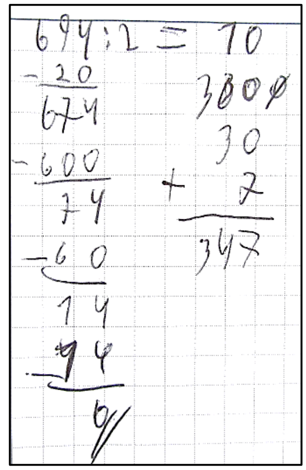
I: Sí, de 694 . 2. ¿Cuánto te dio?

E: 300, 40 y 7

I: ¿Y te quedó resto?

E: No

I: Ahora lo vamos a hacer en el cuaderno, sin eliminar esto (moviendo un poco la representación de la división con el material) 694 : 2 (mientras E escribe) ¿Qué es lo primero que hiciste?



E: Puse este que es la centena (mostrando una barra).

I: ¿Centena?

E: Decena.

I: Entonces, ¿cuánto le pusiste a cada grupo?

E: 10 (escribe en el cuaderno 1).

I: ¿Esto es 1? (mostrando la barra)

E: Ah no, es 10.

I: ¿Y de ahí qué hacías?

E: Ah (se tapa la cabeza)

I: Relax… Dijiste que le diste 10 a cada grupo (levanta 1 barra de cada grupo y se las muestra a E) Entonces ¿10 por 2?

E: Ah 20

I: Y ahí lo anotamos acá para ver cuántos nos quedan por repartir.

E: (Registra en el cuaderno)

I: ¿Después qué hiciste?

E: Puse las centenas.

I: Entonces, ¿cuánto le diste?

E: 100

I: ¿Y le diste 1 a cada grupo?

E: No, 3…300.

I: Entonces, 300 por 2, porque le diste 300 a este y 300 a este (mostrando la representación).

E: 600

I: ¿Después qué hiciste?

E: Agregué 30.

I: Ya, ¿y 30 por 2?

E: 60

I: Y ahí te quedaron 14… ¿y ahí cuánto le diste a cada uno?

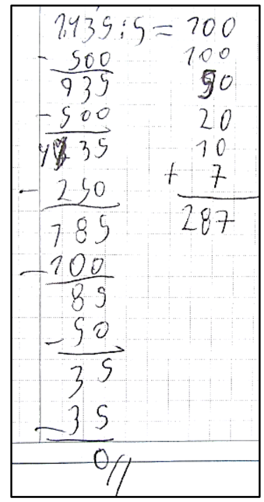
E: (Cuenta las unidades) 7.

I: ¿7 por 2?

E: 14

I: ¿Cuál es el resultado de tu división?

E: (Realiza la adición en su cuaderno de forma correcta)



I: Ya, anota esta división, 1.435 : 5. Vamos a intentar hacerla sin el material, pero si nos vemos complicados, usamos el material. Ahí tienes las tablas por si las necesitas. Mira tienes 1.435 : 5, ¿le podrás dar 100 a cada grupo?

E: (Me mira y luego se toca la cabeza)

I: Porque lo vas a dividir en 5, entonces si yo le doy 100, 100, 100, 100, 100 (moviendo la mano sobre la mesa, como si pusiera una placa en cada grupo) ¿Cuántas voy a ocupar en los 5 grupos?

E: No entiendo (sigue con las manos en la cabeza).

I: (Tomo 5 placas y las pongo sobre la mesa), ¿Cuántas tengo aquí?

E: ¿En total?

I: Sí

E: 500

I: Hay 500, ¿me alcanza?, ¿este número (señalando el dividendo) es mayor o menor que 500?

E: Mayor.

I: Me alcanza, ¿cierto? Ya dale 100 a cada grupo.

E: (Se toca la cabeza)

I: Escribe 100 ahí. ¿100 por 5?

E: 500

I: Entonces, réstale 500 porque ya repartiste 500.

E: Pero si ese es menor, ¿le pido al del lado? (al realizar la resta 1.435 – 500 y llegar a la posición de las centenas)

I: Pero puedes decir 14 – 5, ¿cuánto es 14 – 5?

E: Ehhh (se rasca la cabeza y luego usa los dedos para restar) 9.

I: Muy bien. ¿Qué significa eso? Que nos quedan 935 por repartir. ¿Puedo repartir de nuevo 100 a cada grupo?, ¿me alcanza para darle 100?

E: Sí

I: Ya

E: (Escribe en su cuaderno, realiza la multiplicación y la sustracción de forma autónoma)

I: ¿Te quedan cuántos por repartir?

E: 100… ah no… 435.

I: ¿Te alcanza para repartir 100 de nuevo a cada uno?

E: No

I: ¿Y alcanzarán 50?

E: Sí

I: Ya, dale. ¿50 por 5?

E: Ehm

I: Usa las tablas

E: 25

I: Entonces, ¿cuánto es 50 por 5?

E: 25, no, 250.

I: Super

E: (Anota los cálculos en su cuaderno) No puedo.

I: Si puedes.

E: ¿Le tengo que pedir a él? (al realizar la resta y hacer reagrupamiento)

I: Mira, tienes 435 (toma los bloques base 10 y comienza a representar el número) ¿Y cuánto le tienes que quitar?

E: 250

I: Le quito 100, le quito 200, 30 (sacando el material). Llevo 230, y como no puedo seguir quitando, esta (la placa) la cambio por estas (barras). Había quitado 230, 240 y 250 (sacando 2 barras más). ¿Cuánto me quedó? 100, 10, 20, …, 80 y 5. 185 (contando sobre el material).

E: (Lo anota en su cuaderno)

I: Ya, eso te queda por repartir. Cuando repartiste 50, usaste 250, porque 50 por 5 es 250 (mostrando en su cuaderno). ¿Te alcanza para repartir 50 de nuevo?

E: (Niega con la cabeza)

I: ¿Y 20 alcanzará?

E: Sí

I: Ya

E: (Realiza los cálculos de forma autónoma)

I: ¿Te quedan cuántas por repartir?

E: 85

I: ¿Cuánto vas a repartir a cada una?, ¿te alcanzarán 10?

E: (Comienza a trabajar en su cuaderno)

I: Ya llegamos a 35 (lo que queda por repartir). ¿Qué número multiplicado por 5 me da 35? (señalando la hoja con las tablas de multiplicar).

E: 5 por 7

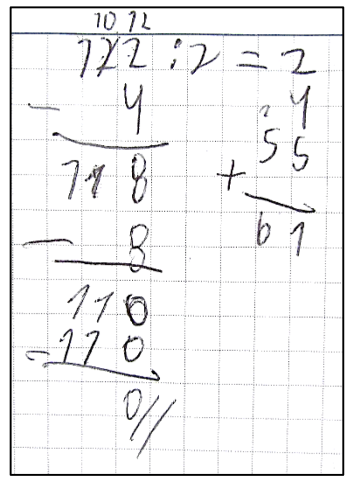
I: Entonces reparte 7.

E: (Comienza a anotar en su cuaderno)

I: ¿Cuál es el resultado?

E: (Realiza la adición en su cuaderno) 287.

I: Muy bien. Sigamos con 122 : 2. ¿Tienes que formar cuántos grupos?



E: (Se queda mirando la operación anotada en su cuaderno)

I: Si tuvieras que ocupar el material, ¿cuántos grupos formarías?

E: 2

I: ¿Cuánto le vas a dar a cada uno al comienzo?

E: 2

I: ¿Le vas a dar solo 2? Ya, dale 2.

E: (Comienza a escribir, pero al llegar a la sustracción) ¿Le pido cierto?

I: Sí, pida.

E: (No hace nada, se queda mirando el ejercicio)

I: Represéntala con el material.

E: Osea, si a este le pide y este queda en 12 (unidades) y ese 1(decena). ¿Y si le pido al otro?

I: ¿A cuál?, ¿A las centenas? Mira, (tomando el material) 100, 20 y 2. ¿Cuánto le tenemos que restar?

E: 4

I: Y tú me dijiste no puedo quitar 4 porque tengo solo 2 (mostrando los cubitos). Entonces le voy a pedir 1 al vecino (mostrando una barra) que está aquí y las voy a agregar acá (agrega 10 cubitos) Y me quedan 12 (mostrando los cubitos) y acá me queda 10 (mostrando la barra). Y acá te queda 12 y acá te queda 10 (mostrando lo que había hecho en el cuaderno)

E: Verdad

I: Entonces ahora ¿puedo a 12 quitarle 4?

E: Sí

I: A 12 le quitamos 4 (con el material), ¿cuántas quedaron?

E: 8

I: Y acá me quedan 10 o 1 decena (mostrando la barra).

E: (Termina la sustracción en su cuaderno)

I: Te quedan 118 por repartir, ¿cuánto le vas a dar a cada grupo?

E: (Se toca la cabeza y bosteza) Ah, estoy muy cansado.

I: Vamos a hacerlo con el material. (Representa 122). Tú lo que hiciste primero fue darle 2 a cada grupo, como no puedo darle de aquí (mostrando cubitos) vamos a darle de acá (mostrando una barra). La vamos a cambiar. Y le diste 2 a cada grupo (lo reparte). Ahora, ¿cuánto le vas a dar a cada grupo?

E: (Con el material, da 4 cubitos a cada grupo)

I: ¿Cuánto le diste?

E: 4 (Hace los cálculos en su cuaderno, mira las tablas para 4 por 2).

I: Ya te quedan 110 (mostrando el material) ¿Cuánto le darías a cada grupo? Sin cambiarlas, si las pudiéramos partir por la mitad, ¿cuánto le darías a cada una?

E: (Toma la placa y cuenta) No puedo.

I: Si se puede. (Toma la placa) ¿Cuál es la mitad?

E: 5

I: Ya, le darías 5 a cada una, ¿y la mitad de esto cuánto es? (mostrando la barra).

E: 5

I: ¿Cuánto le darías? 50 y…

E: 5

I: 55 a cada uno, si es dividir esto en la mitad.

E: (Comienza a escribir)

I: ¿Cuánto es 55 por 2? (le muestra la barra y la placa).

E: ¿110?

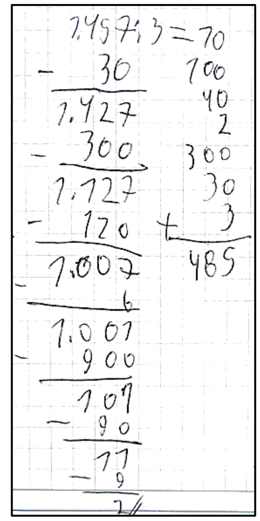
I: Muy bien.

E: Ya, 61.

I: ¿Y te quedó resto?

E: No

I: Ya, vamos a resolver este: 1.457 : 3. ¿Cómo lo harías?



E: ¿Uso este? (mostrando el cubo grande).

I: Sí, mil.

E: (Representa 1407 con el material)

I: Ahí hay 1407, ¿qué te falta?

E: Ahhh 1457 (toma 5 barras y las agrega a su representación)

I: Ya, ¿cuántos grupos tienes que formar?

E: 3 (Forma 3 grupos de 1 barra cada uno y se queda mirando el material).

I: ¿Cuánto le diste a cada grupo? Anda haciéndolo en el cuaderno también.

E: Ehh 10 (lo registra en su cuaderno de forma autónoma).

I: ¿Ahora qué vas a repartir?

E: (Agrega 1 placa a cada grupo)

I: ¿Cuánto le diste a cada grupo?

E: 100 (lo registra en el cuaderno de forma autónoma).

I: ¿Cuánto te queda por repartir?

E: (Mira el cuaderno) 1.127

I: 1000, 100, 20, 7 (señalando el material). ¿Qué vas a repartir ahora?

E: (Toma una placa y la cambia por 10 barras. Luego, agrega 3 barras a cada grupo)

I: ¿Cuántas les repartiste? Te quedan acá. (mostrando que aún no repartía todas las barras que tenía).

E: (Agrega 1 barra más a cada grupo)

I: ¿Cuántas repartiste?

E: 50

I: Recuerda que ya habías repartido 10. Si ya habías repartido 10, ¿cuántas repartiste ahora?

E: 40 (Realiza el proceso de forma autónoma. Utiliza las tablas de multiplicar)

I: 1.007 (mostrando el material). ¿Qué vas a repartir ahora?

E: (Me queda mirando)

I: Este déjalo para el final (mostrando la unidad de mil), reparte esas primero. (mostrando las unidades).

E: (Toma las unidades y agrega 2 a cada grupo)

I: ¿Cuántas repartiste?

E: 2

I: ¿Y qué pasó?

E: Me sobró una (me muestra la unidad) (registra el proceso en su cuaderno).

I: Te queda 1.001. Este (mostrando la unidad de mil) tiene 10 de estas (placas). ¿Cuántas le podríamos dar a cada grupo?

E: 9

I: Podrías repartir 9, ¿y cuántas le darías a cada grupo?

E: 3

I: ¿Y eso es 3 o 3 de estas (mostrando la placa)?

E: 3 de estas (mostrando la placa).

I: ¿Y eso cuánto es?

E: 300

I: Reparte 300.

E: (Hace el proceso en el cuaderno)

I: De este (unidad de mil) repartiste 900, entonces te quedó 101. (Aleja la unidad de mil y deja sobre la mesa una placa y una unidad). ¿Cuánto le podríamos repartir a cada grupo?

E: 9

I: ¿Y cuántos serían para cada uno?

E: 3

I: ¿3 qué?

E: (Muestra una barra)

I: ¿Cuánto son 3 de esas? (mostrando una barra).

E: 30 (hace el proceso en el cuaderno).

I: Te quedan 11, que eran esta de aquí (mostrando la barra que no ocupó de la placa) y una unidad. ¿Cuánto le podrías dar a cada uno? Tienes 11.

E: (Piensa y se queda mirando)

I: Mira, tienes que formar 3 grupos, entonces me voy a la tabla del 3 (en la hoja). Tengo 9 y tengo12. Si reparto 12, me paso porque tengo solo 11. ¿Entonces cuál es la más cercana?, ¿cuánto le puedo dar a cada grupo?

E: 9

I: ¿Y qué significa darles cuántos a cada uno?

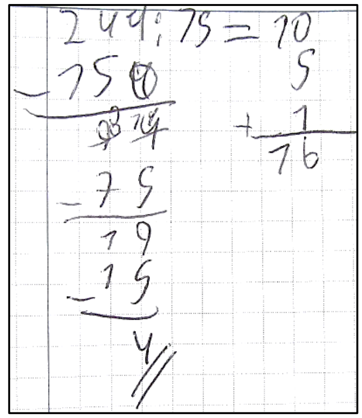
E: 3

I: Muy bien, hazlo en el cuaderno.

E: (De forma autónoma termina la división en su cuaderno)

I: ¿Cuál es el resultado?

E: 485



I: Super! Ahora anota 244 : 15. ¿Cómo lo harías?

E: (Representa con el material 244)

I: ¿Cuántos grupos tienes que formar?

E: 15 (toma la placa en actitud de cambiarla por 10 barras)

I: Mira, antes de que las cambies, (pongo una placa al lado de la otra y a continuación las 4 barras), si estas de aquí (decenas que forman las placas) fueran como estas (barras sueltas). ¿Cuántas de estas tendrías? (mostrando una barra).

E: 20 (cuenta las de las placas).

I: ¿Y hasta acá? (mostrando las 4 unidades sueltas) 24.

E: (Se toca la cabeza)

I: Tengo 24 barritas, si le doy una a cada grupo, ¿me alcanza?

E: Sí

I: Dale.

E (Registra en su cuaderno)

I: ¿15 por 10? Acuérdate de lo que aprendimos.

E: 150 (y continúa trabajando en el cuaderno de forma autónoma).

I: Te quedan 94, ¿cierto? (mostrando el resultado en el cuaderno). Entonces, eso sí lo podemos representar. (deja sobre la mesa 9 barras y 4 unidades).

E: (Afirma)

I: ¿Cuánto le podríamos dar a cada grupo?, ¿me alcanza para darle 10?

E: No

I: Démosle 5.

E: (Comienza a trabajar en su cuaderno)

I: 5 por 15, ¿tienes celular?

E: Sí

I: Usa la calculadora de tu celular. ¿Sabes dónde está la calculadora de tu celular?, ¿la has usado alguna vez?

E: No (se demora en encontrarla). 75 (continúa trabajando en su cuaderno).

I: Entonces, ¿cuántas te quedan por repartir?

E: 19

I: (Deja sobre la mesa 1 barra y 9 unidades), ¿cómo repartirías esto?

E: (Toma las unidades con intención de repartir)

I: ¿Cuántas hay ahí?

E: ¿En total?

I: Sí

E: (Comienza a contar) 19.

I: ¿Te alcanza para darle 1 a cada grupo?

E: No… Síii (comienza a trabajar en su cuaderno).

I: Te quedaron 4 (deja sobre la mesa 4 unidades), ¿puedes seguir?

E: No

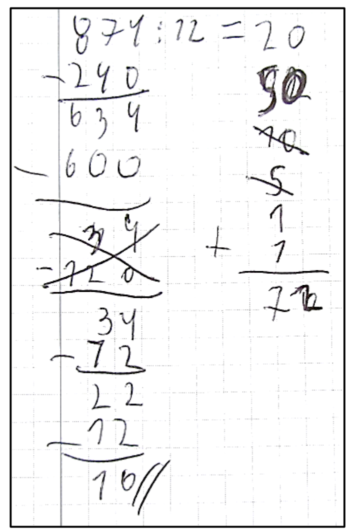
I: Termina la división.

E: 16, listo.

I: ¿16 y cuánto te dio de resto?

E: 4

I: 874 : 12



E: (Representa con el material 874)

I: (Toma las placas y las pone una al lado de otra) Mira, tienes muchas de estas (barra) para repartir (haciendo alusión a que las placas están formadas por 10 barras), porque todas estas (placas) están formadas por estas (barras), una al lado de la otra. Tienes que formar 12, ¿te alcanzará para dar?... 100 no te alcanza porque tienes solo 8 (mostrando las placas), ¿pero te alcanzará para darle 20 a cada grupo?

E: Sí

I: Ya, prueba con 20.

E: (Comienza a trabajar en su cuaderno, usa la calculadora para 12 por 20)

I: ¿Te quedan cuántas por repartir?

E: 634

I: (Deja sobre la mesa 634) ¿Cuánto le podrías repartir a cada grupo?, ¿te alcanza para repartirle 100?

E: Sí (se ríe).

I: ¿Y si le damos la mitad de cada una de estas (placa) nos alcanza?

E: Sí (comienza a trabajar en el cuaderno).

I: ¿Cuánto es la mitad de esto? (mostrando una placa).

E: 50 (sigue en su cuaderno, usa la calculadora para resolver 50 por 12).

I: ¿Cuánto te quedó por repartir?

E: 34

I: (Deja sobre la mesa 34) ¿Te alcanza para darle 10 a cada grupo?

E: Sí (se ríe).

I: Dale 10 a cada grupo para ver si te alcanza.

E: (Comienza a hacer los cálculos en su cuaderno)

I: ¿Te alcanza?

E: No

I: ¿Cuánto le podrás repartir a cada grupo?, ¿Si le repartes 5 te alcanzará?

E: (Iba a comenzar a trabajar en su cuaderno)

I: No, pero mira esto. Aquí hay 5 (muestra la mitad de una barra), 1 grupo, 2, 3, 4, 5, 6 (mostrando en las barras), ¿te alcanza?

E: Sí

I: Ya, dale.

E: (Empieza a trabajar en su cuaderno)

I: ¿Cuánto es 5 por 12?

E: 60

I: ¿Y aquí hay 60?

E: No

I: ¿Hay más o menos?

E: Menos

I: ¿Te alcanza, entonces, para repartir 5 para cada uno?

E: No

I: ¿Cuánto crees que nos alcanza? 10 no alcanzó, 5 tampoco, así que es menor que 5.

E: 1 (se ríe).

I: Ya, reparte 1.

E: (Hace los cálculos en el cuaderno)

I: Muy bien. ¿Te alcanza para repartir otro más?

E: No

I: ¿Por qué?, ¿cuántos te sobran?

E: 22

I: ¿Te alcanza para darle 1 si son 12 grupos?

E: Sí (comienza a trabajar en el cuaderno).

I: Muy bien, ¿cuánto te quedó?

E: 10

I: ¿Y puedes seguir repartiendo?

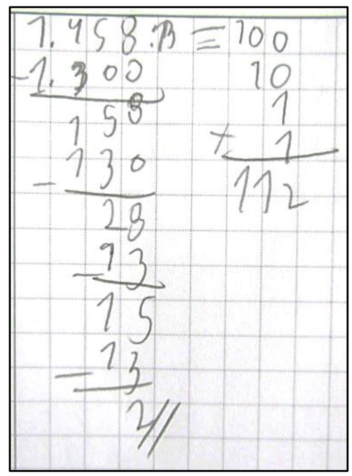
E: No. (realiza la suma en su cuaderno) 72.

I: ¿Y cuánto te quedó de resto?

E: 10

Sesión 4

P: profesora de matemática



I: Trabajamos en el cuaderno y si vamos necesitando el material lo usamos. 1458 : 13.

E: (Toma el la unidad de mil) ¿Mil?

I: Sí, mil.

E: (Representa con el material 1458)

I: Ya, ¿en cuántos grupos los tienes que repartir?

E: 13

I: En 13… mira te recomiendo algo…¿Qué pasa si ponemos estos una al lado del otro (las barras y las placas)?... ya, ¿cuántas de estas (placas) hay aquí (unidad de mil)?

E: 10

I: Si hay 10, hay 11, 12, 13, hay 14 de estas (señalando la unidad de mil y luego las placas), ¿cierto?

E: Sí

I: Entonces, ¿le podrías dar 1 a cada grupo?

E: Sí

I: Entonces, ¿cuánto le vas a dar?

E: 10… no…

I: ¿Cuántos cubitos tiene esta (mostrando la placa)?

E: 100 (registra en su cuaderno).

I: ¿100 por 13? Acuérdate, ¿cómo era cuando multiplicábamos por 10, 100…?

E: (Escribe el resultado en el cuaderno)

I: Y ahora la resta para ver cuánto queda por repartir.

E: (Realiza el cálculo en su cuaderno)

I: ¿Cuánto te queda?

E: 158

I: Entonces, esas se fueron (tomando la unidad de mil y las 3 placas y moviéndolas hacia un lado), son las que ya repartimos… ¿Cuántas de estas (barras) hay aquí (mostrando la placa y las 5 barras que hay sobre la mesa)?

E: 10

I: Ya, aquí hay 10 (mostrando la placa), ¿y esas? (mostrando las barras).

E: 15

I: ¿Me alcanza para repartirle 1 a cada grupo?

E: Sí

I: Muy bien, ¿y cuántos cubitos hay aquí? (mostrando la barra).

E: 10 (registra en el cuaderno)

I: ¿10 por 13?

E: 130

I: Muy bien.

E: (Sigue de forma autónoma)

I: ¿Cuánto te quedó?

E: 28

I: Se fueron estas (mueve del centro de la mesa la placa y las 3 barras). ¿Y ahora cuánto le podrías repartir a cada grupo?

E: (Mira el material) 4.

I: Como tú quieras, prueba con 4.

E: (Comienza a formar grupos de 4 unidades con el material)

I: ¿Nos alcanzará a para formar 13 grupos?

E: (Se pone la mano en la boca)

I: Puedes hacer la equivalencia.

E: (Toma las barras y las cambia por unidades)

I: Ahora, trata de formar 13 grupos… yo que tú, a lo más pruebo con 2…

E: (Agrupa las unidades de a 2) me sobraron 2.

I: ¿Cuánto le diste a cada grupo?

E: 2

I: Anótalo.

E: (Registra el proceso en su cuaderno)

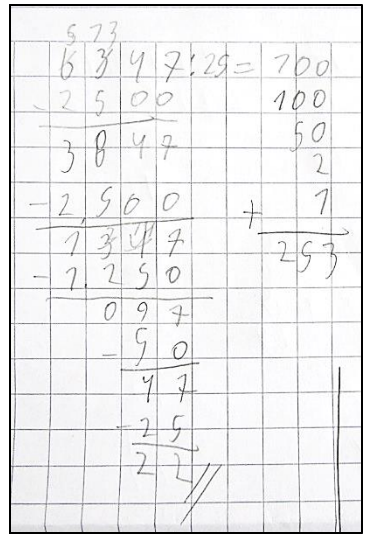
I: ¿2 por 13?

E: (Usa sus dedos para calcular) 26.

I: Muy bien. Y esas son las que te sobraron (señalando las 2 unidades), y ya no las podemos repartir… ¿El resultado de esta división es?

E: 112

I: Muy bien.



I: Sigamos con la que viene. 6347:25. Esta es más difícil porque no podemos representar ese número (6347) porque tenemos solo 1000 (mostrando la unidad de mil del material). Entonces lo que yo te propongo que hagamos es… ¿Cuánto es 25 por 100?

E: 2500

I: ¿Me alcanzaría para darle 100 a cada grupo? (mostrando el dividendo en el cuaderno).

E: (Afirma con la cabeza)

I: Sí, ¿cierto? Porque es menor que 6347… anota los 100.

E: (Registra en el cuaderno)

I: ¿Cuánto te queda por repartir?

E: 3817

I: ¿Te alcanzaría para darle 100 de nuevo a cada grupo? (mostrándole el resultado de 100 por 25)

E: (Afirma con la cabeza)

I: Dale

E: (Registra el proceso en su cuaderno) 1347

I: ¿Te alcanza para darle 100 a cada grupo?

E: Sí

I: Mira los números.

E: Ah no no no.

I: No te alcanza, ¿y si le repartimos 50?, ¿alcanzará?

E: (Asiente con la cabeza y comienza a hacer el proceso en su cuaderno)

I: Realiza la multiplicación (25 por 50) allá abajito (señalando la parte inferior de la hoja).

E: (Se queda pensando)

I: Aquí tienes las tablas.

E: ¿Dónde lo ponía? (haciendo referencia de cómo registrar el resultado en la multiplicación)… ah aquí, aquí… (sigue con las cálculos) 97.

I: Ya, ¿cuánto le podrías dar a cada grupo?

E: (Se queda en silencio)

I: Si le das 1 a cada grupo, ¿cuántos ocuparías?

E: ¿1?

I: Sí, ¿cuántos grupos tienes que formar?

E: Eh… 25.

I: 25.. y si le das 1 a cada grupo, ¿cuántas ocupas?

E: (Me mira)

I: Usarías 25… ¿y si usaras 2 en cada grupo?, ¿cuántas ocuparías?

E: (Me mira)

I: Mira (representa con el material 2 grupos de 25)… ¿cuántos hay?

E: ¿En total?... 50.

I: Ya, 25 por 2 es 50, ¿te alcanzará?

E: Sí (realiza el proceso en su cuaderno).

I: ¿Te alcanza para volver a darle 2 a cada grupo?

E: No

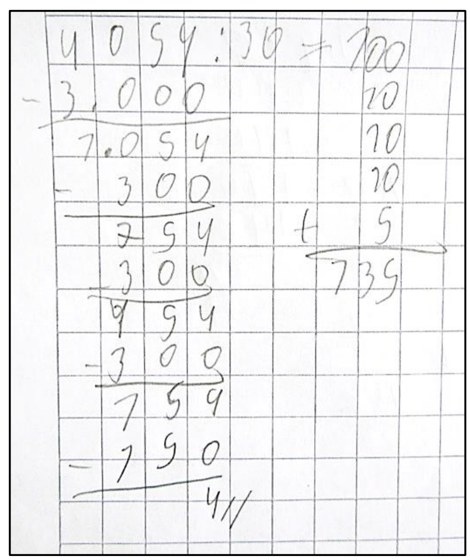
I: Entonces dale 1.

E: (Realiza el proceso en su cuaderno) 22.

I: ¿Cuál es el resultado de la división?

E: 253

I: Super bien.



I: 4054:30… Esta de nuevo no podemos representarla porque necesitamos 4000 y tenemos solo 1000. Entonces, ¿qué podríamos hacer?... Una estrategia que yo te recomiendo es ver que pasa si le doy 1, si le doy 10, si le doy 100, si le doy 1000, dependiendo del número, por ejemplo… si le damos 1000 (mostrando la división en el cuaderno), ¿Cuánto es 30 por 1000?

E: 30000

I: ¿Te alcanza?

E: No

I: No le podemos dar 1000, pero quizás si le podemos dar 100. ¿Cuánto sería 30 por 100?

E: 3000

I: ¿Y te alcanza?

E: Sí (hace el proceso es su cuaderno).

I: ¿Te alcanza para volver a darle 100 a cada uno?

E: No

I: Entonces, ¿te alcanzará para darle 10?

E: 300 (30 por 10).

I: ¿Te alcanza?

E: Sí (realiza el proceso en el cuaderno).

I: ¿Te alcanza para volver a dar 10?

E: Sí (continúa el proceso en el cuaderno).

I: ¿Te alcanza para darle 10?

E: Sí (continúa el proceso en el cuaderno).

I: Ahora, ¿te alcanza para darle 10?

E: Sí (se ríe), no, no alcanza.

I: Entonces, probemos, nos quedan 154, ¿cuánto le podríamos dar? Ya no nos alcanza para darle 10, ¿alcanzará para darle la mitad?, ¿o 4? Prueba con algún número…

E: (Mira el cuaderno)

I: ¿Tú puedes calcular rápidamente cuál es la mitad de 300?, piensa en monedas, ¿cuál es la mitad de 300 pesos?

E: 200… no… sí… no sé.

I: Mira (pongo en la mesa 3 placas), si lo quiero dividir en 2... Sería 1 para cada grupo y este lo tendría que partir por la mitad, ¿cierto?, ¿cuánto es la mitad de esto?

E: 5

I: 5 barritas, pero, ¿cuánto es eso?

E: 50

I: Entonces, ¿cuál es la mitad de 300?

E: 150

I: Ya… si cuando yo le daba 10 a cada grupo ocupaba 300…Cuando yo le doy la mitad de 10, osea 5, ¿cuántos voy a ocupar?

E: 150

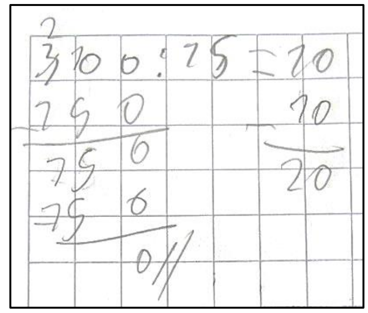
I: Muy bien.

E: (Registra el proceso en su cuaderno) 4.

I: ¿Y cuánto te dio de resultado?

E: 135

I: Maravilloso.



I: 300 : 15… Trata de no usar el material, recuerda que te dije que probaras si le das 1, 10, 100, 1000? Si le doy 1 es muy poquito, porque 15 a 300… Si le doy 10, ¿cuántos ocuparía?

E: 150

I: ¿Te alcanza para darle 10?

E Sí (realiza el proceso en su cuaderno).

I: ¿Te alcanza para darle 10 de nuevo?, ¿te alcanza?

E: 150

I: Ya, pero, ¿cuánto le vas a dar a cada grupo?

E: 10

I: Muy bien.

E: (Realiza el proceso en su cuaderno)

I: ¿Cuánto te dio el resultado?

E: 20

I: Muy bien, maravilloso.

I: 1272 : 12… ¿Cuánto vas a probar darle a cada grupo?

E: (Se queda pensando)

I: Si le das 10 como a este (ejercicio anterior), sería 120, que es muy lejano todavía de 1272.

E: 50

I: Prueba darle… ya 50, o podrías probar con 100, ¿por qué?, te recomiendo por 100 porque es más fácil multiplicar.

E: ¡100!

I: Ya, dale (risas).

E: (Realiza el proceso)

I: Te quedan solo 72 y tienes que hacer 12 grupos…

E: ¿10?

I: Ya, ¿cuánto es 10 por 12?

E: 120

I: ¿Te sirve?

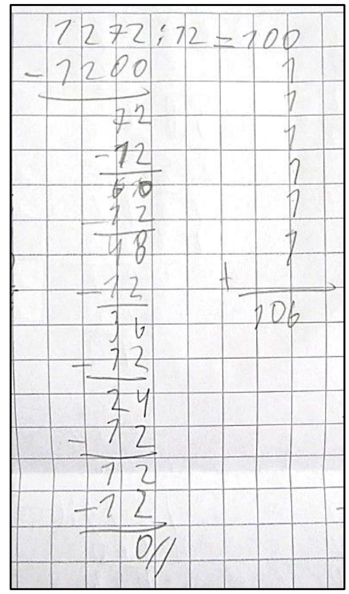
E: No

I: Prueba con 1.

E: (Realiza el proceso en su cuaderno)

I: Ya, 60 te quedan por repartir.

E: (Sigue repartiendo 1 a cada grupo de forma autónoma hasta terminar la división)



I: Yujuu… una más.

E: ¿Vino la señorita P?

I: No sé.

E: Ojalá que no, me cae mal.

I: ¿Por qué te cae mal?, ¿es muy exigente?

E: ¡Uy! es que a mi me va más o menos y no me gusta que me saque a la pizarra y cuando ruego que no, justo me saca… y cuando entro a la pizarra, me pongo nervioso y no… se me olvida todo y como que la profe me reta y…

I: ¿Pero te portas bien o te portas mal?

E: Bien

I: ¿Estás seguro? (risas)

E: Sí (se ríe) tengo 12, 14 anotaciones, pero bien.

I: Igual es harto.

E: Si sé, pero…

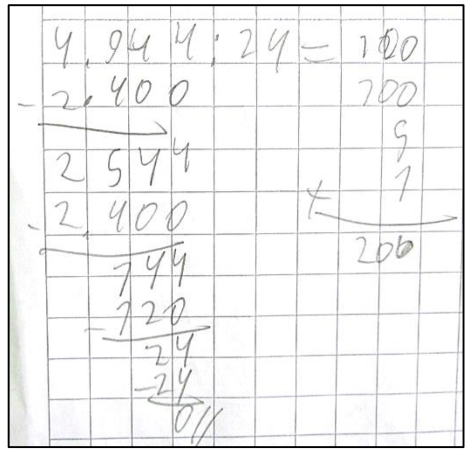
I: ¿Por qué te ponen anotaciones?, ¿conversas en clases?

E: Porque no traigo cotona, una vez no traje agenda, otra porque…

I: De puro olvidadizo..

E: Osea lo que a mí me enojó caleta fue por la agenda que es lo más estúpido.

I: Pucha es que yo sé que de repente cuando uno está en el colegio te piden cosas que parecen estúpidas pero a la larga sirven, porque uno aprende a ser ordenado y a que no se le queden las cosas, porque ponte tu, ahora cuando estas en el colegio no pasa nada que se te quede la agenda, pero imagínate que yo voy a mi trabajo y se me quedó algo super importante que necesitaba ese día, eso si es grave… entonces si uno no lo aprende cuando chico, después cuando grande te pasa la cuenta. Y hay gente que nunca lo aprende, que es lo peor.



I: 4944 : 24… ¿Qué vas a probar dándole? Si le das 100.

E: (Iba a anotarlo en el cuaderno)

I: Piénsalo primero…

E: 2400

I: Muy bien.

E: (Realiza el proceso en su cuaderno) 2544.

I: ¿Te alcanza para darle de nuevo?

E: Sí (sigue con el cálculo).

I: Ya, ahora te quedó menos… ¿cuánto te quedó?

E: 144

I: Ya, ¿cuánto le podrías dar?

E: (Me queda mirando)

I: Vamos a hacer algo, solo por hoy día. ¿Andas con tu celular aquí?

E: Sí

I: Ya, tienes que formar 24 grupos y te quedan 144… 24 por 1, te va a quedar demasiado para llegar a 144. Multiplica por otro número…

E: 10

I: Pero eso ya sabes que es 240 (mostrando el cuaderno), y te pasas.

E: (Se queda pensando)

I: Multiplica en tu calculadora, por 8, o por 4… y ve si te alcanza o si te pasas.

E: (Hace varias pruebas en la calculadora)

I: ¿Por cuánto?

E: Por 5.

I: Ya

E: (Realiza los cálculos en su cuaderno hasta terminar la división) 306.

I: Yujuuu, ¡Muy bien!

I: 5830:55… ¿cuánto le vas a dar a cada grupo?

E: 100

I: Ya, maravilloso, me encanta.

E: (Realiza los cálculos)

I: ¿Te alcanza para darle 100 de nuevo?

E: No

I: Ya, prueba con tu calculadora.

E: 10

I: ¿Te alcanza para darle 10?

E: No (saca su celular)… 55 por 2 son 110.

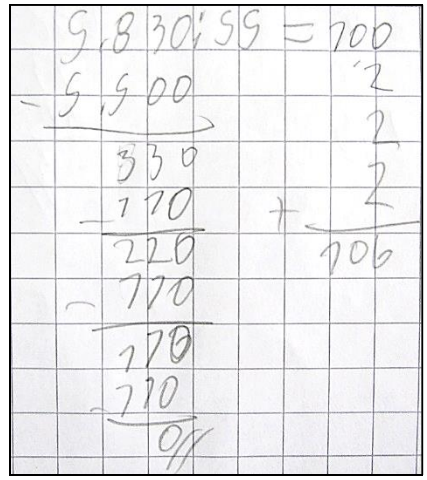
I: Ya, dale 2.

E: (Hace los cálculos)

I: ¿Te alcanza para darle de nuevo 2?

E: Sí (hace los cálculos hasta finalizar la división) 106.

I: Ya



I: 4480:14… ¿Cuánto le vas a dar?

E: 100

I: Muy bien.

E: (Continúa la división en su cuaderno hasta la que termina) 320

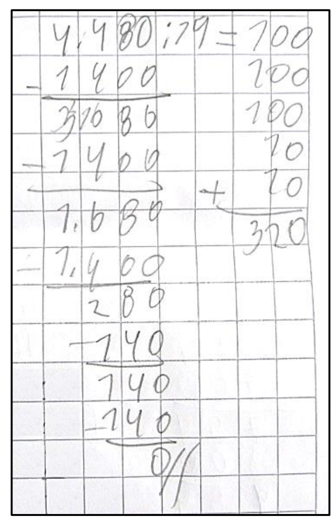
I: ¡¡Muy bien!!

I: 345:5

E: (Piensa un momento) 50.

I: Ya, dale

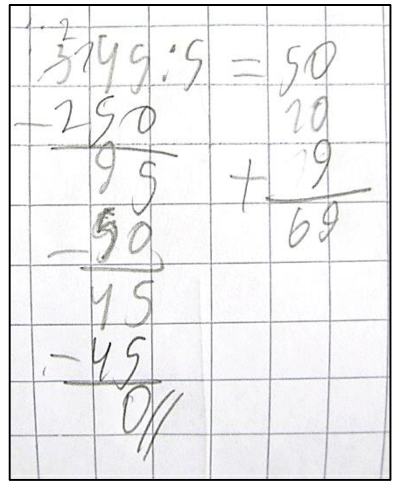
E: (Usa la calculadora para resolver 50 por 5 y continúa la división. Luego reparte 10 y cuando le quedan 45 por repartir).



I: Esa la puedes sacar de acá (mostrando las tablas de multiplicar). La tabla del 5 y que no te pases de 45.

E: (Termina la división correctamente)

I: Yujuuu



I: 1233:6

E: 100

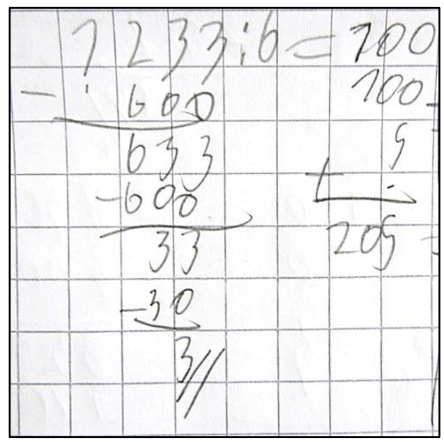
I: (Asienta con la cabeza)

E: (Realiza los cálculos en su cuaderno y continúa hasta que le quedan por repartir 33)

I: Utiliza esta (mostrando las tablas de multiplicar).

E: (Finaliza la división)

I: ¿Cuánto te dio?



E: 205

I: ¿Y el resto?

E: 3

I: ¡Uuuu!

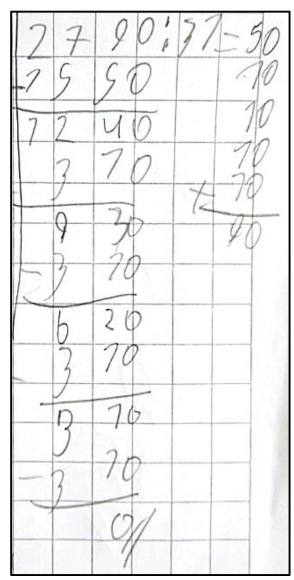
E: ¿Por qué?

I: Porque los has hecho todos.

E: ¿Todos?

I: ¡Todos los ejercicios!

I: 2790:31… ¿Con cuál vas a probar?



E: Con 10.

I: Prueba con 50.

E: (Usa la calculadora para resolver 31 por 50 y continúa) 10?

I: Sí, prueba con 10.

E: (Continúa hasta terminar la división)

I: ¿Cuánto te dio?

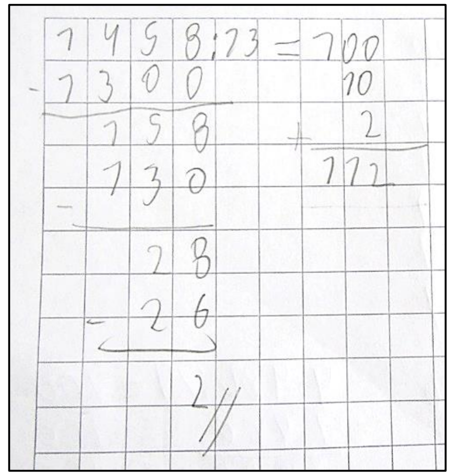
E 90 con resto 0.

Evaluación final

I: Hoy día vamos a hacer una evaluación, igual que la primera. ¿Viste es el mismo formato de la hicimos la primera vez? (mostrando la evaluación) Son 10 divisiones.

E: ¿Y se termina?

I: Sí… hagamos una división antes de empezar la evaluación…1458:13…¿Te acuerdas que la clase pasada ya no representábamos el número sino que intentábamos por 10, por 100 o por 1000?... Si le diéramos 100 a cada grupo, ¿cuántos ocuparíamos?



E: (Comienza a resolver la división)

I: Muy bien, ¿y cuántos te quedarían por repartir?

E: 158

I: Entonces ahora, ¿cuánto le vas a dar a cada grupo?

E: (continúa resolviendo la división)

I: Ya muy bien. Entonces estás listo para hacer la evaluación. Te puedes demorar el tiempo que quieras, puedes usar los bloques, ahí tienes todas las tablas de multiplicar… Empecemos…

E: (Comienza a resolver la evaluación)

En el primero utiliza las tablas de multiplicar que tiene para poder resolver.

En el ejercicio 2

(dando por terminada la división)

I: Te quedaron 5, ¿te alcanza para repartir uno más?

E: Oh me equivoqué (borra y termina la división).

En el ejercicio 4

I: ¿Qué número tienes ahí?

E: 30.. ah no, 29

I: (Señalando las tablas de multiplicar) ¿Cuál te sirve?

E: Ninguna

I: Ya, pero, ¿cuál está más cerca?

E: 27

I: ¿Entonces te alcanza para darle 9 a cada grupo?

E: (Sigue trabajando en su cuaderno)

E: ¿Puedo ir al baño?
I: Vaya no más.

En el ejercicio 6
I: Mira bien esa resta, ¿la puedes hacer?
E: (Se tapa la cara, se ríe y borra)

I: ¿Por qué no le diste 100?
E: Porque tenía 429.
I: ¿Y ese? (haciendo alusión a un dígito inicial de un número) Según yo ahí dice 2429.

I: ¿64 o 604?
E: Borra y vuelve a escribir.

En el ejercicio 7
I: Yo una vez te enseñé un truco para la tabla del 11. Mira 11 por 1 es 11, 11 por 2 es 22, 11 por 3 es 33.. ya… ¿puedes sacarlo solo?
E: (Escribe 5 en el cuaderno) 11 por 5, 55.

Cuando termina la evaluación:

E: Ya
I: Yujuu... yo ahora te voy a mostrar tu evaluación, la primera que hicimos.
E: ¿Es con nota?
I: No… Son casi los mismos ejercicios (enfrentando ambas evaluaciones) Antes usabas otra forma de dividir.
E: (Mira atentamente las dos evaluaciones)
I: Te quiero pedir que hagamos una división pero solo con el material, de las primeras que hicimos. 77:5
E: (Toma el material y representa 77. Luego forma 5 grupos con 1 barra cada uno) Los cambio… (mostrando las 2 barras que no ha repartido).
I: Sí

E: (Cambia las barras por unidades y forma grupos con las 20 unidades) ¿Estas las puedo ocupar? (mostrándome las 7 unidades iniciales).

I: ¿Las puedes o no puedes ocupar?

E: Sí (Formó 5 grupos de 5 unidades y le sobraron 2)… Ya.

I: ¿Cuánto era?

E: 15

I: ¿Y el resto?

E: 2

I: Muy bien.

I: ¿Qué significa dividir 77 por 5?, ¿Qué fue lo primero que hiciste con el material?

E: Representé el 77.

I: ¿Y después que hiciste?

E: Dividí en 5.

I: Ya, ¿y cuánto le diste a cada grupo?

E: 5

I: ¿Y que más le diste?

E: 10

I: Muy bien, y hubo un momento en que te quedaron 2 barras, y ¿qué hiciste con ellas?

E: Las cambié.

I: ¿Y por qué las cambiaste?

E: Por 20.

I: ¿Por 20 qué?

E: Unidades.

I: Ya y ahí pudiste continuar la división.

Anexo 8: Consentimientos de los participantes

Consentimiento Director del establecimiento

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Educación
Magister en Educación con mención en Dificultades de aprendizaje

CONSENTIMIENTO INFORMADO: DIRECTOR DEL ESTABLECIMIENTO

Investigadora responsable: Lucía Raquel Donoso Suárez

Título del proyecto: Impacto del uso de material concreto en el aprendizaje del algoritmo estándar de la división en niños con dificultades de aprendizaje en matemática

Estimado(a) Sr(a):
Presente

Usted ha sido invitado a participar en el proyecto de investigación "Impacto del uso de material concreto en el aprendizaje del algoritmo estándar de la división en niños con dificultades de aprendizaje en matemática"

El objetivo de este estudio es: poder evaluar cómo impacta el uso de un material concreto, como los bloques base 10, en el aprendizaje del algoritmo de la división, el cual es considerado el más complejo de las cuatro operaciones básicas que los estudiantes aprenden durante la enseñanza básica.

Por este motivo, se solicita su colaboración como DIRECTOR. Esta consistirá en permitir el acceso al establecimiento educacional y poder contactar a un estudiante que cursen 6.° básico y que presente dificultades de aprendizaje en la asignatura de matemática. Además, de facilitar que el investigador pueda recolectar información sobre dicho estudiante.

La investigación es conducida por la señora Lucía Raquel Donoso Suárez, egresada del Magister de Educación con mención en Dificultades de aprendizaje de la Facultad de Educación de la Pontificia Universidad Católica de Chile, teléfono 87628347, correo electrónico ladonoso@uc.cl.

BENEFICIOS Y RIESGOS:
Este estudio tiene el beneficio de producir conocimiento científico para las dificultades de aprendizaje en el área de matemática, la cual está en bastante desventaja frente al área de lenguaje. Las dificultades de aprendizaje en matemática traen fuertes repercusiones en los estudiantes y en su propio futuro, ya que es una disciplina que está fuertemente presente en lo cotidiano y también en las diferentes ciencias del conocimiento.

Consentimiento informado 1

También se verá beneficiado el estudiante que participe en el estudio, ya que se podrán determinar las principales dificultades que presenta en la división y también se realizarán un par de sesiones que pretenden ayudarlo en comprender el algoritmo de la división.

Usted se podrá retirar de esta investigación cuando lo estime y sin dar razones que lo justifiquen. El estudio no contempla compensaciones –directas o indirectas– a los participantes.

A juicio de los investigadores su participación en este estudio no conlleva riesgos ni consecuencias para Ud. ya que consiste en lo siguiente:

- Junto al docente de matemática de 6.° básico se seleccionará un estudiante que tenga dificultades de aprendizaje en matemática. Además se debe tener el consentimiento de su apoderado y el asentimiento del propio estudiante.

- Luego, se aplicará en una sesión un diagnóstico de lo que sabe de la división y del algoritmo estándar de la división. Este instrumento será construido por la investigadora a cargo y puede ser revisado previamente por el establecimiento.

- Se procederá a analizar el diagnóstico y a partir de los resultados se realizarán cuatro sesiones (como máximo de dos horas pedagógicas cada una) con el estudiante donde se potenciará el uso de material concreto para comprender el algoritmo de la división.

- Para finalizar, se realizará una evaluación final, que permita evidenciar los cambios que se han producido después de las sesiones con el material concreto.

- Es importante añadir que se solicitará colaboración del docente a cargo para obtener información de los estudiantes y del proceso de aprendizaje que han tenido. Y las sesiones se podrán realizar en el momento que el establecimiento considere pertinente y menos perjudicial para los estudiantes.

ALMACENAMIENTO DE LOS DATOS PARA LA CONFIDENCIALIDAD DEL PROYECTO:
En los registros de la investigación no se identificará el nombre de los participantes, ni cualquier otra información que lleve a identificarlos.

La información será ingresada a una base de datos codificados, la cual no permite establecer la identidad de las personas ni cualquier otra información que lleve a identificarlas. La base de datos sólo será manejada por los académicos investigadores que desarrollan el proyecto.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Educación
Magister en Educación con mención en Dificultades de aprendizaje

LUGAR Y TIEMPO INVOLUCRADO:
Las visitas al establecimiento serán realizadas en el lugar y tiempo convenidos con usted. El tiempo que demanda es aproximadamente de seis sesiones de dos horas pedagógicas como máximo.

CÓMO SE USARÁN LOS RESULTADOS:
Los resultados del estudio serán usados para divulgarlos en revistas y actividades de divulgación especializadas. No se identificarán nombres de las personas ni de los establecimientos. Toda divulgación se hará con propósitos educativos.

DERECHOS DE LOS PARTICIPANTES
He leído y discutido la descripción de la investigación con el investigador responsable. He tenido la oportunidad de hacer preguntas acerca del propósito y procedimientos en relación con el estudio.

- Mi participación en esta investigación es voluntaria. Puedo negarme a participar o renunciar a participar en cualquier momento sin perjuicio para mí como profesional, ni para mi establecimiento.
- Si durante el transcurso del estudio nueva información significativa llega a estar disponible y se relaciona con mi voluntad de continuar participando, el investigador deberá entregarme esta información.
- Si en algún momento tengo alguna pregunta relacionada con la investigación o con mi participación, puedo contactarme con el investigador responsable, quién responderá mis preguntas. El teléfono de contacto es 87628347 y su correo electrónico es ladonoso@uc.cl.
- Si en algún momento tengo comentarios o preocupaciones relacionadas con la conducción de la investigación o preguntas acerca de los derechos de mi representado(a) al participar de este estudio, yo puedo contactarme con el Programa de Magíster de la Facultad de Educación de la Pontificia Universidad Católica de Chile, a través de la coordinadora de mención, profesora Marta Infante al número telefónico 23545306.
- Firmo este documento en dos ejemplares y recibo uno de estos.
- Mi firma significa que acepto participar en el estudio "Impacto del uso de material concreto en el aprendizaje del algoritmo estándar de la división en niños con dificultades de aprendizaje en matemática", permitiendo que se realicen seis sesiones con un estudiante del establecimiento educacional que curse 6° básico. Además estoy de acuerdo en que estas sean registradas en audio y en video, respectivamente.
- Así mismo, autorizo el uso del registro de videos para fines de difusión de las actividades realizadas y resultados de este proyecto de investigación. Entiendo que estas imágenes serán utilizadas exclusivamente en un documental a presentar en ámbitos académicos y pedagógicos.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Educación
Magister en Educación con mención en Dificultades de aprendizaje

CONSENTIMIENTO INFORMADO

Yo [redacted] (nombre) estoy de acuerdo en participar en el estudio titulado: "Impacto del uso de material concreto en el aprendizaje del algoritmo estándar de la división en niños con dificultades de aprendizaje en matemática". El propósito y naturaleza del estudio me ha sido totalmente explicado por el investigador responsable, señora Lucía Raquel Donoso Suárez. Yo comprendo lo que se me pide. Sé que puedo contactarme con el investigador en cualquier momento, para realizar preguntas y resolver dudas. También comprendo que puedo renunciar al estudio en cualquier momento.

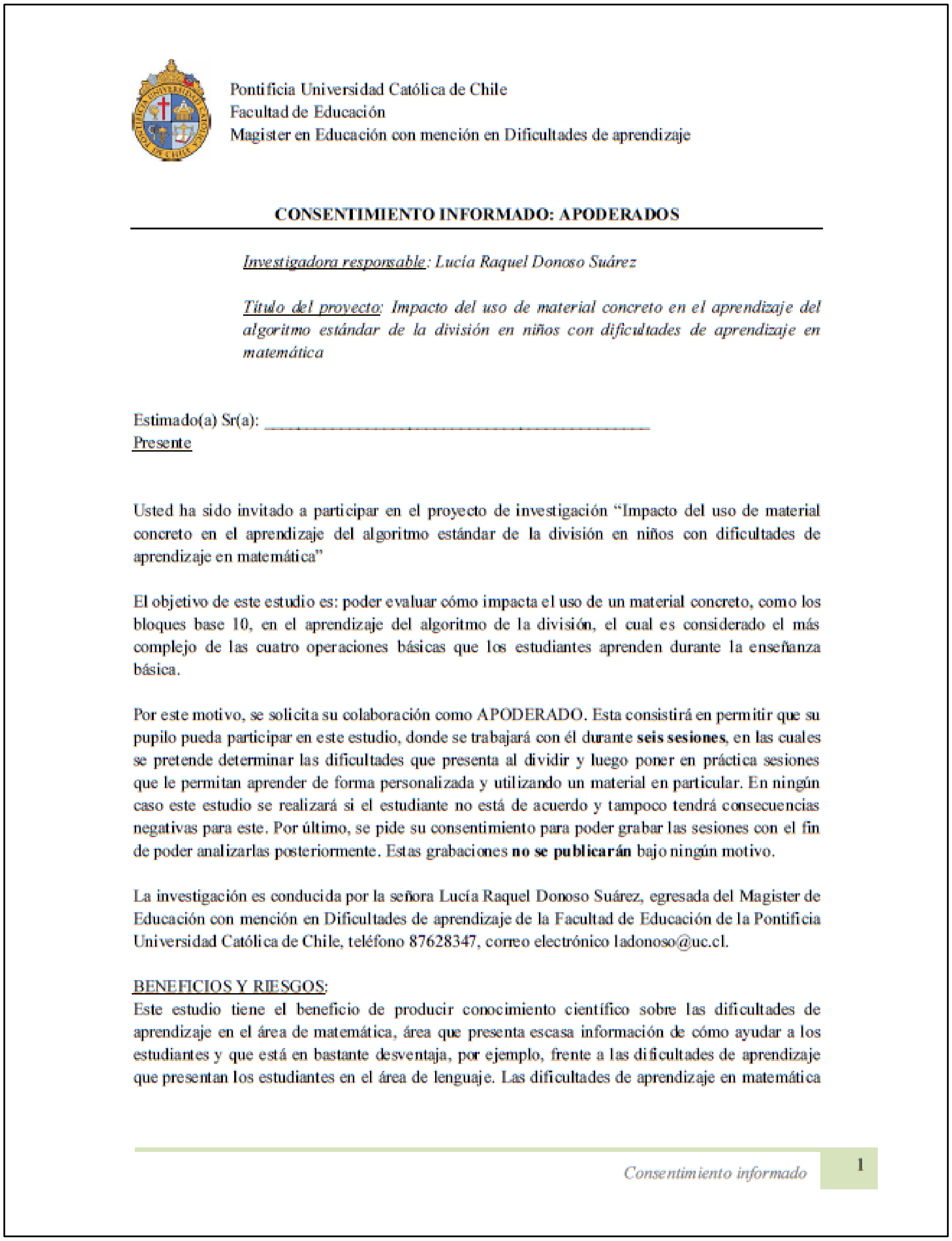
Nombre del director	: [redacted]
Firma	: [redacted]

Nombre del establecimiento	: Colegio [redacted]
Fecha	: 08 / 10 / 2015

Nombre del investigador responsable	: Lucía R. Donoso Suárez
Firma	: Lucía Donoso

Consentimiento informado 4

Consentimiento Apoderado



Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Educación
Magister en Educación con mención en Dificultades de aprendizaje

CONSENTIMIENTO INFORMADO: APODERADOS

Investigadora responsable: Lucía Raquel Donoso Suárez

Título del proyecto: Impacto del uso de material concreto en el aprendizaje del algoritmo estándar de la división en niños con dificultades de aprendizaje en matemática

Estimado(a) Sr(a): ____
Presente

Usted ha sido invitado a participar en el proyecto de investigación "Impacto del uso de material concreto en el aprendizaje del algoritmo estándar de la división en niños con dificultades de aprendizaje en matemática"

El objetivo de este estudio es: poder evaluar cómo impacta el uso de un material concreto, como los bloques base 10, en el aprendizaje del algoritmo de la división, el cual es considerado el más complejo de las cuatro operaciones básicas que los estudiantes aprenden durante la enseñanza básica.

Por este motivo, se solicita su colaboración como APODERADO. Esta consistirá en permitir que su pupilo pueda participar en este estudio, donde se trabajará con él durante **seis sesiones**, en las cuales se pretende determinar las dificultades que presenta al dividir y luego poner en práctica sesiones que le permitan aprender de forma personalizada y utilizando un material en particular. En ningún caso este estudio se realizará si el estudiante no está de acuerdo y tampoco tendrá consecuencias negativas para este. Por último, se pide su consentimiento para poder grabar las sesiones con el fin de poder analizarlas posteriormente. Estas grabaciones **no se publicarán** bajo ningún motivo.

La investigación es conducida por la señora Lucía Raquel Donoso Suárez, egresada del Magister de Educación con mención en Dificultades de aprendizaje de la Facultad de Educación de la Pontificia Universidad Católica de Chile, teléfono 87628347, correo electrónico ladonoso@uc.cl.

BENEFICIOS Y RIESGOS:
Este estudio tiene el beneficio de producir conocimiento científico sobre las dificultades de aprendizaje en el área de matemática, área que presenta escasa información de cómo ayudar a los estudiantes y que está en bastante desventaja, por ejemplo, frente a las dificultades de aprendizaje que presentan los estudiantes en el área de lenguaje. Las dificultades de aprendizaje en matemática

Consentimiento informado 1

traen fuertes repercusiones en los estudiantes y en su propio futuro, ya que es una disciplina que está fuertemente presente en lo cotidiano y también en las diferentes ciencias del conocimiento.

También se verá beneficiado el estudiante que participe en el estudio, ya que se podrán determinar las principales dificultades que presentan en la división y también se realizarán sesiones que pretenden ayudarlo en comprender el algoritmo de la división.

Usted se podrá retirar de esta investigación cuando lo estime y sin dar razones que lo justifiquen. El estudio no contempla compensaciones –directas o indirectas– a los participantes.

A juicio de los investigadores su participación en este estudio no conlleva riesgos ni consecuencias para Ud. ya que consiste en lo siguiente:

- En la primera sesión (una hora pedagógica) se realizará un diagnóstico sobre lo que el estudiante sabe de la división y del algoritmo estándar de la división. Este instrumento será construido por la investigadora a cargo.
- Luego, se procederá a analizar el diagnóstico y a partir de los resultados se realizarán cuatro sesiones (como máximo de dos horas pedagógicas cada una) con el estudiante donde se potenciará el uso de material concreto para comprender el algoritmo de la división.
- Para finalizar, se realizará una evaluación final, que permita evidenciar los cambios que se han producido después de las sesiones con el material concreto.
- Las sesiones se podrán realizar en el momento que el establecimiento considere pertinente y que sea menos perjudicial para el estudiante.

ALMACENAMIENTO DE LOS DATOS PARA LA CONFIDENCIALIDAD DEL PROYECTO:
En los registros de la investigación **no se identificará el nombre del participante**, ni cualquier otra información que lleve a identificarlo.

La información será ingresada a una base de datos codificados, la cual no permite establecer la identidad de las personas ni cualquier otra información que lleve a identificarlas. La base de datos sólo será manejada por los académicos investigadores que desarrollan el proyecto.

LUGAR Y TIEMPO INVOLUCRADO:
Las visitas al establecimiento serán realizadas en el lugar y tiempo convenidos con el establecimiento educacional. El tiempo que demanda es aproximadamente de seis sesiones de dos horas pedagógicas como máximo cada una.

CÓMO SE USARÁN LOS RESULTADOS:
Los resultados del estudio serán usados para divulgarlos en revistas y actividades de divulgación especializadas. No se identificarán nombres de las personas ni de los establecimientos. Toda divulgación se hará con propósitos educativos.

DERECHOS DE LOS PARTICIPANTES
He leído y discutido la descripción de la investigación con el investigador responsable. He tenido la oportunidad de hacer preguntas acerca del propósito y procedimientos en relación con el estudio.

- Mi participación en esta investigación es voluntaria. Puedo negarme a participar o renunciar a participar en cualquier momento sin perjuicio para mí como profesional, ni para mi establecimiento.
- Si durante el transcurso del estudio nueva información significativa llega a estar disponible y se relaciona con mi voluntad de continuar participando, el investigador deberá entregarme esta información.
- Si en algún momento tengo alguna pregunta relacionada con la investigación o con mi participación, puedo contactarme con el investigador responsable, quién responderá mis preguntas. El teléfono de contacto es 87628347 y su correo electrónico es ladonoso@uc.cl.
- Si en algún momento tengo comentarios o preocupaciones relacionadas con la conducción de la investigación o preguntas acerca de los derechos de mi representado(a) al participar de este estudio, yo puedo contactarme con el Programa de Magíster de la Facultad de Educación de la Pontificia Universidad Católica de Chile, a través de la coordinadora de mención, profesora Marta Infante al número telefónico 23545306.
- Firmo este documento en dos ejemplares y recibo uno de estos.
- Mi firma significa que acepto participar en el estudio "Impacto del uso de material concreto en el aprendizaje del algoritmo estándar de la división en niños con dificultades de aprendizaje en matemática", permitiendo que se realicen seis sesiones con mi pupilo. Además estoy de acuerdo en que estas sean registradas en audio y en video, respectivamente.
- Así mismo, autorizo el uso del registro de videos para fines de análisis de las actividades realizadas y resultados de este proyecto de investigación. Entiendo que estas imágenes serán utilizadas exclusivamente en un ámbito académico y pedagógico. Y nunca se mostrará el rostro de mi pupilo para evitar que sea identificado.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Educación
Magister en Educación con mención en Dificultades de aprendizaje

CONSENTIMIENTO INFORMADO

Yo ______________________________ (nombre) estoy de acuerdo en participar en el estudio titulado: "Impacto del uso de material concreto en el aprendizaje del algoritmo estándar de la división en niños con dificultades de aprendizaje en matemática". El propósito y naturaleza del estudio me ha sido totalmente explicado por el investigador responsable, señora Lucía Raquel Donoso Suárez. Yo comprendo lo que se me pide. Sé que puedo contactarme con el investigador en cualquier momento, para realizar preguntas y resolver dudas. También comprendo que puedo renunciar al estudio en cualquier momento.

Nombre del apoderado	:	[redacted] López
Nombre del estudiante	:	[redacted] Morales
Firma	:	

Nombre del establecimiento	:	[redacted]
Fecha	:	7 / 10 / 15

Nombre del investigador responsable	:	Lucía R. Donoso Suárez
Firma	:	Lucía Donoso

Consentimiento informado 4

Asentimiento del estudiante

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Educación
Magister en Educación con mención en Dificultades de aprendizaje

ASENTIMIENTO INFORMADO: ESTUDIANTE

Estimado(a) estudiante: Matías Morales

Se te ha invitado a participar en un proyecto de investigación en el que se busca conocer cómo impacta el uso de bloques base 10 en el aprendizaje de la división, el cual realiza la investigadora Lucía Raquel Donoso Suárez.

Al firmar este documento entiendo que:

1. En esta investigación tendré que participar en seis sesiones con la investigadora Lucía Raquel Donoso Suárez, en las cuales tendré que responder dos evaluaciones (una al inicio y otra al final), y también participaré activamente en las actividades que me propongan para aprender sobre la división.
2. Cualquier pregunta que yo quiera hacer en relación a las sesiones, deberá ser contestada por Lucía Raquel Donoso Suárez (fono: 87628347; mail: ladonoso@uc.cl).
3. Podré retirarme de la investigación en cualquier momento, sin dar razones que lo justifiquen.
4. Los resultados de esta investigación pueden ser publicados, pero **mi nombre y datos personales no serán revelados**, permanecerán en forma absolutamente confidencial.
5. Mi participación es voluntaria y con mi firma declaro haber comprendido lo que se me solicita.

Nombre del estudiante	: [redacted] Morales
Firma	: f
Nombre del establecimiento	: Colegio p[redacted]el
Fecha	: 23/09/2019
Nombre del investigador responsable	: Lucía R. Donoso Suárez
Firma	: Lucía Donoso

Consentimiento informado 1