PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

MEDICIÓN INTERFEROMÉTRICA DEL PERFIL DE TEMPERATURA EN TORNO A UN ALAMBRE SOMETIDO A CONVECCIÓN NATURAL

FELIX ARMANDO ALVAREZ PAREDES

Tesis presentada a la Dirección de Investigación y Postgrado
como parte de los requisitos para optar al grado de
Magister en Ciencias de la Ingeniería

Profesor Supervisor:
IGNACIO LIRA C.

Santiago de Chile, Junio 2009

© MMIX, FELIX ARMANDO ALVAREZ PAREDES

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

MEDICIÓN INTERFEROMÉTRICA DEL PERFIL DE TEMPERATURA EN TORNO A UN ALAMBRE SOMETIDO A CONVECCIÓN NATURAL

FELIX ARMANDO ALVAREZ PAREDES

Miembros del Comité:
IGNACIO LIRA C.
JORGE RAMOS G.
CRISTIAN PAVEZ M.
ALFREDO SERPELL B.

Tesis presentada a la Dirección de Investigación y Postgrado
como parte de los requisitos para optar al grado de
Magister en Ciencias de la Ingeniería

Santiago de Chile, Junio 2009

Dedicado a mi familia

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quiero dar las gracias al profesor Ignacio Lira que me dio la oportunidad de poder realizar esta tesis de magíster y me brindó su apoyo, su tiempo y sus conocimiento para llevarla a cabo. También le doy las gracias a los profesores del departamento de Ingeniería Mecánica, a los miembros del taller mecánico, a las secretarias y auxiliares del departamento por su apoyo cuando lo necesité.

Quiero dar las gracias también al programa Conicyt por el financiamiento aportado para la realización de este trabajo y también a la dirección de postgrado por otorgarme el beneficio de recidencia el cual me permitió continuar mi permanencia en el programa de magíster.

Agradezco al profesor Ramón Rodriguez del Centro de Investigaciones en Óptica (CIO) por darme la opción de poder realizar una pasantía en aquel lugar, por brindarme un buen recibimiento y por su gran disposición de ayudarme en mi tema. También agradezco a Juan Rayas, técnico a cargo del laboratorio donde trabajé, por entregarme sus conocimientos, por la paciencia, la ayuda y la simpatía. También le doy las gracias a toda la gente del CIO que me acogieron de muy buena forma.

Quiero agradecer a mis compañeros Julián Palma, Juan Luis Gabriel y Andrés Torres con los cuales compartí mi trabajo de tesis, tanto en el laboratorio como en la oficina. Además agradecer a Ignacio Torrejón y a José Miguel López por compartir sus conocimientos adquiridos en sus trabajos de tesis. Finalmente a mis compañeros de la universidad y amigos por el apoyo brindado.

Finalmente quiero dar gracias y dedicar este trabajo a mi familia quien me han brindado todo su cariño y su apoyo durante toda mi vida y gracias a los cuales no podría haber llegado a conseguir mis metas como estudiante y como persona.

INDICE GENERAL

AGRADECIMIENTOS iv

INDICE DE FIGURAS vii

INDICE DE TABLAS ix

RESUMEN x

ABSTRACT xi

1. INTRODUCCIÓN 1
   1.1. Revisión de Trabajos Anteriores 1
   1.2. Objetivos de la Tesis 2
   1.3. Organización de la Tesis 2

2. MARCO TEÓRICO 4
   2.1. Convección natural para un cilindro calentado 4
      2.1.1. Ecuaciones de Navier-Stokes 4
      2.1.2. Análisis de escala 6
      2.1.3. Método de similaridad 9
   2.2. Principios de la Óptica 11
      2.2.1. Movimiento Ondulatorio 11
      2.2.2. Comportamiento de un frente de onda plano 12
      2.2.3. Representación compleja de una onda plana 13
      2.2.4. Intensidad 14
   2.3. Interferencia 14
      2.3.1. Interferencia de dos ondas planas 14
      2.3.2. Interferómetro de Mach-Zehnder 17
      2.3.3. Objeto de fase axisimétrico 20
      2.3.4. Interferometría digital 24

2.3.5. Phase stepping 29
2.4. Análisis de franjas 31
2.4.1. Transformada inversa de Abel 31
2.4.2. Ecuación de Gladstone-Dale 32

3. MONTAJE EXPERIMENTAL Y OBTENCIÓN DE DATOS 34
3.1. Interferómetro de Mach-Zehnder 34
3.1.1. Arreglo experimental 34
3.1.2. Modificaciones al modelo original 36
3.2. Procesamiento de la información 38
3.2.1. Captura de interferogramas 38
3.2.2. Procesamiento de imágenes 40

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES Y DISCUSIÓN 43
4.1. Procesamiento de la fase 43
4.2. Análisis del índice de refracción y perfiles de temperatura 45
4.3. Comparación por termopar 50
4.4. Comparación con solución numérica 53

5. CONCLUSIONES 58

BIBLIOGRAFIA 60

ANEXO A. INTERFEROGRAMAS A DISTINTAS ALTURAS MEDIANTE ESPI 62

ANEXO B. REGLA UTILIZADA PARA CALCULAR LA ESCALA 64

INDICE DE FIGURAS

2.1 Diagrama de cilindro envuelto por un volumen de control. 5

2.2 Diagrama de la capa límite de temperatura. 7

2.3 Representación de una onda armónica. 12

2.4 Frente de onda plano. 13

2.5 Superposición de ondas. 15

2.6 Interferómetro de Mach-Zehnder. 18

2.7 Filtrado espacial. 19

2.8 Esquema para la fórmula de Bouguer. 22

2.9 Recorrido de rayo por objeto axisimétrico. 23

2.10 Fenómeno de scattering. 25

2.11 Interferograma capturado mediante Interferometría de Patrón de Moteado. . . 26

2.12 Interferogramas capturados bajo Interferometría Directa. 27

2.13 Diferencia entre fases envuelta y desenvuelta obtenidas por phase stepping. . . 31

3.1 Modelo del montaje del alambre. 36

3.2 Esquema del montaje experimental de Interferómetro Mach-Zehnder en un inicio. 37

3.3 Esquema de la modificación al montaje experimental. 38

3.4 Captura de imagen del software LabVIEW. 40

3.5 Captura de imagen del software Mathcad. 41

4.1 Orden de franjas para altura de 15 cm. 44

4.2 Derivada de la fase para altura de 15 cm. 45

4.3 Indice de refracción para altura de 15 cm mediante Interferometría Directa y ESPI. 46

4.4 Perfil de temperatura por Interferometría Electrónica y por termopar a 15 cm. 47

4.5 Perfil de temperatura para varias alturas cercanas a 15 cm por ESPI. 48
4.6 Perfil de temperatura para varias alturas cercanas a 15 cm por Interferometra Directa. 49
4.7 Perfil de temperatura por Interferometría Electrónica y por termopar a 10 cm. 50
4.8 Perfil de temperatura por Interferometría Electrónica y por termopar a 5 cm. . 51
4.9 Perfil de temperatura por Interferometría Electrónica y por termopar a 1 cm. . 52
4.10 Visor infrarrojo y termopar instalados en el arreglo experimental. 53
4.11 Cámara del visor infrarrojo. 54
4.12 Perfil de temperatura por Interferometría, por termopar y por teoría a 15 cm. . 56
4.13 Perfil de velocidades a distintas alturas. 57

A.1 Secuencia de interferogramas a 15 cm. 62
A.2 Secuencia de interferogramas a 10 cm. 62
A.3 Secuencia de interferogramas a 5 cm. 63
A.4 Secuencia de interferogramas a 1 cm. 63

B.1 Regla utilizada para calcular la escala. 64

INDICE DE TABLAS

4.1 Valores de ξ para distintas alturas z. 55

RESUMEN

El presente trabajo se basa en la hipótesis de que por medio de la interferometría electrónica, se pueden estimar los perfiles de temperatura en la capa límite generados por la transferencia de calor por convección natural alrededor de un cilindro calentado, a través del cálculo del índice de refracción. La tesis presenta la teoría óptica en la que se basa este trabajo y los métodos usados para procesar la información recogida de la experimentación. Además se describe un procedimiento teórico para estimar los perfiles de temperatura, alternativo al método experimental.

El experimento consistió en un montaje óptico llamado interferómetro de Mach-Zehnder el cual utiliza una fuente de luz láser para generar patrones de interferencia, provocados por la diferencia de camino óptico de la luz en el interferómetro. El objeto de fase sobre el cual se estimarán los gradientes de temperatura será un alambre vertical calentado mediante un diferencial de voltaje. La información será captada por una cámara CCD a través de interferogramas que captan la intensidad de la luz a la salida del interferómetro. Esta información es procesada para obtener el índice de refracción alrededor del alambre y, posteriormente, el perfil de temperatura.

Las mediciones de los perfiles de temperatura se realizaron en cuatro alturas de la base del alambre, de manera de poder visualizar el comportamiento a lo largo del alambre. Los datos obtenidos se compararon con las mediciones hechas mediante un termopar en el mismo experimento y finalmente a través de un modelo teórico.

Palabras Claves: Interferometría Electrónica, Perfil de temperatura, Convección natural.

ABSTRACT

The present work is based on the hypothesis that the temperature profiles in the natural convection boundary layer around a heated cylinder can be estimated by means of electronic interferometry through calculation of the index of refraction. The thesis presents the optical theory on which this work is based and describes the methods used to process the experimental data. In addition, the thesis considers an alternative theoretical procedure for estimating the temperature profiles.

The experiment consisted of a Mach-Zehnder optical set-up that used a laser light source to generate interference patterns, caused by the optical path difference of the light in the interferometer. The phase object used to generate the temperature gradients was a vertical wire heated by means of a voltage difference. The interferograms were captured by a CCD camera. This data was processed to obtain the index of refraction about the wire and then the temperature profiles.

The measurements were carried out at four heights from the base of the wire, in order to visualize the behavior along the wire. The results were compared with thermocouple data and with a theoretical model for the temperature profile.

Keywords: Temperature profile, Electronic interferometry, Natural convection.

1. INTRODUCCION

1.1. Revisión de Trabajos Anteriores

La convección natural alrededor de un cilindro vertical se ha estudiado hace algunos años. A partir de las ecuaciones de Navier-Stokes, correspondientes a la conservación de momentum y energía, se han analizado los campos de temperatura y velocidad del fluido alrededor del cilindro. Algunos autores (Minkowycz & Sparrow, 1974; Lee et al., 1988) han desarrollado algoritmos matemáticos en base al método por seudo-similaridad para obtener dichos campos, estableciendo estos parámetros en función del número de Grashof. El método por seudo-similaridad explicado por Bejan (1995), considera un análisis adimensional que utiliza las variables de similaridad η y una coordenada adimensional ξ asociada a la altura del cilindro y basa sus análisis en el número de Rayleigh el cual entregaría mejores resultados que los basados en el número de Grashof. Torrejón (2007) estableció un método matemático que resuelve el modelo planteado por Bejan. Los estudios mencionados, sin embargo, no han establecido comparaciones entre los resultados teóricos con mediciones experimentales.

Por otro lado, para medir el gradiente de temperatura en objetos con simetría axial se han desarrollado distintas técnicas ópticas, una de ellas es la interferometría electrónica. Esta herramienta ha sido usada en varias áreas de la ciencia (como por ejemplo la metrología óptica) para la medición de parámetros con un alto grado de exactitud. La interferometría electrónica utiliza la interferencia de haces de luz coherente para establecer parámetros de medición sobre los objetos analizados.

La interferencia es un fenómeno óptico utilizado para estudiar cambios micrométricos en sólidos, líquidos o gases debido a la superposición de dos frentes de ondas. Este fenómeno se implementa por medio de arreglos optomecánicos llamados interferómetros. Estos son montajes experimentales en los cuales se utilizan haces de luz coherente, los que a través del arreglo modifican el camino de la luz y posteriormente los hacen coincidir en un lugar del espacio. Debido a esto se generan patrones de interferencia que se verán como

franjas de distintas geometrías. Estas franjas de interferencia son captadas en forma de interferogramas por cámaras establecidas en el arreglo experimental y que, a su vez, son digitalizadas y procesadas por una computadora para evaluar los cambios en el objeto a medir. Este método posee una gran ventaja sobre otros puesto que es un método no intrusivo, o sea, no genera perturbación sobre el elemento que se está midiendo y también aprovecha los beneficios de trabajar con dispositivos electrónicos y computacionales que permiten automatizar y controlar de mejor manera el sistema.

Los resultados entregados por la interferometría electrónica están ligados a los cambios en los patrones de franjas debido al fenómeno que se está midiendo, por lo que no entregarían resultados directos. Es en este punto donde es necesario hacer uso de la teoría que relaciona estos cambios en la fase de los interferogramas con los parámetros a medir.

1.2. Objetivos de la Tesis

Este trabajo se basa en la hipótesis de que la interferometría electrónica por medio de los métodos de Interferometría Digital Directa y la Interferometría por Patrón de Moteado (Electronic Speckle-Pattern Interferometry) permitirían entregar valiosa información para la medición del gradiente de temperatura de la capa límite alrededor de un alambre vertical calentado. Esto en base a los resultados obtenidos anteriormente en la medición del perfil de temperatura de objetos de simetría axial como llamas de premezcla utilizando el mismo método (López).

1.3. Organización de la Tesis

El segundo capítulo describe el marco teórico, haciendo alusión en primer lugar a las ecuaciones que gobiernan el fenómeno de la convección natural, el análisis de escala que describe el orden de magnitud de la capa límite y la solución sugerida a partir de las variables de similaridad sobre el número de Rayleigh. En segundo lugar se hará mención a los conceptos relacionados con la óptica básica como el comportamiento ondulatorio de un haz de luz. También se hará mención al fenómeno de la interferencia, propiedad que es la

base de la interferometría digital usada en esta tesis. Finalmente se abordará la teoría para realizar el análisis posterior a los resultados experimentales, es decir, lo que se necesita para procesar los datos entregados por los interferogramas.

En el tercer capítulo se describe el experimento realizado para medir la temperatura de la capa límite, haciendo mención a la configuración del interferómetro, los elementos que componen el arreglo y las consideraciones tomadas para realizar el procedimiento experimental. Se mencionan también los cambios realizados en el arreglo inicial y los procedimientos computacionales para procesar la información de la fase.

En el cuarto capítulo se detallan los resultados experimentales tanto para la fase, el índice de refracción y la temperatura en la capa límite y el análisis de los datos en base a la comparación de éstos con mediciones por termopar. En el capítulo final se mencionan las conclusiones y los trabajos a futuro como complemento del tema estudiado.

2. MARCO TEÓRICO

Es necesario inicialmente mostrar la teoría en la que se basa este trabajo de tesis antes de poder describirlo. La teoría está fuertemente ligada a lo que es el estudio de las propiedades de las ondas, puesto que la luz, principal fuente de iluminación usada en los interferómetros, puede modelarse como tal. Este marco teórico se complementa con un modelo matemático que permite estimar los perfiles de temperatura y velocidad alrededor del alambre calentado por medio de las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido estacionario.

2.1. Convección natural para un cilindro calentado

El análisis del perfil de temperatura se realizó mediante experimentos con un alambre calentado por un diferencial de voltaje utilizando el principio del efecto Joule que explica el calentamiento de un elemento el cual es sometido a una corriente eléctrica. Este alambre se puede modelar como un cilindro sólido, por lo que esta sección introduce la teoría que involucra el fenómeno de convección natural sobre un cilindro calentado. El contenido de esta sección se basa en el trabajo realizado por Lira (2008) el cual presenta el método por similaridad para el modelamiento de este fenómeno.

2.1.1. Ecuaciones de Navier-Stokes

Consideremos un cilindro vertical de radio r_0 inmerso en un medio a temperatura ambiente T_∞ y una temperatura en toda la pared del cilindro T_W como se aprecia en la figura 2.1. Sean z y r las coordenadas axial y radial del cilindro tomadas desde el centro de la base del cilindro. El medio se halla en reposo por lo que la transferencia de calor se da por convección natural.

Las ecuaciones de Navier-Stokes entregan información con respecto al comportamiento de un fluido (en este caso el aire) alrededor de un cilindro. Mediante la aproximación de Boussinesq, se tiene (Bejan, 1995, capítulo 2):

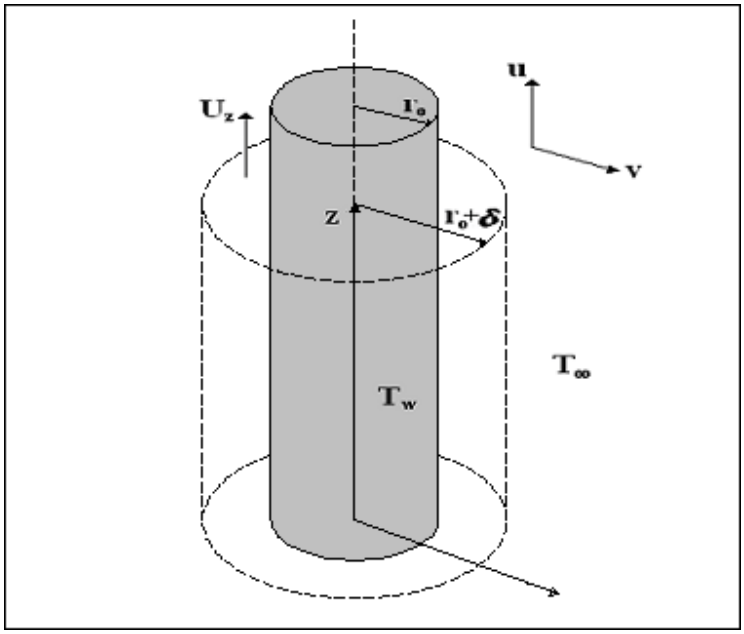


FIGURA 2.1. Diagrama de cilindro envuelto por un volumen de control.

$$\frac{\partial}{\partial z}(ru) + \frac{\partial}{\partial r}(rv) = 0 \tag{2.1}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial z} + v\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial u}{\partial r}\Big) + g\beta(T - T_\infty) \tag{2.2}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial z} + v\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\alpha}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial T}{\partial r}\Big), \tag{2.3}$$

donde u y v son las componentes de la velocidad en las direcciones z y r respectivamente, T es la temperatura del fluido, ν corresponde a la viscosidad cinemática, g es la aceleración de gravedad, β es el coeficiente volumétrico de expansión térmica y α la difusividad térmica. Las condiciones de borde son:

$$u = v = 0, \qquad T = T_W, \qquad \text{cuando} \qquad r = r_0 \tag{2.4}$$

$$u \to 0, \qquad T \to T_\infty, \qquad \text{cuando} \qquad r \to \infty. \tag{2.5}$$

Las condiciones de borde para la base del cilindro dependerán de cómo el cilindro sea sostenido. En los trabajos de Minkowycz and Sparrow (1974) y Lee et al. (1988) se

propuso para $z = 0$:

$$u = u_\infty \qquad \text{para} \qquad r \geq r_0 \tag{2.6}$$

$$T = T_\infty \qquad \text{para} \qquad r \geq r_0. \tag{2.7}$$

La ecuación (2.1) representa la conservación de masa, mientras que (2.2) corresponde a la conservación de momentum. Los términos en la izquierda de esta segunda ecuación representan la inercia del sistema y, a su vez, el primer término de la derecha representa la fricción y el último corresponde al empuje del sistema. La ecuación (2.3) define la energía del sistema, representando los términos de la izquierda a la convección y el de la derecha a la conducción.

Las ecuaciones de Navier-Stokes, que modelan el comportamiento de un fluido alrededor de un cilindro y, en general, sobre una superficie bajo convección natural aún no han sido resueltas, y es por esto que se hace necesaria una simplificación del modelo planteado. El concepto de la capa límite se ideó como una forma de poder acotar el problema a una región cercana a la pared sólida, ya que es en esta zona donde se están generando los cambios principales en cuanto a las propiedades del fluido.

La capa límite se define como la región cercana a la pared sólida donde se producen los gradientes de temperatura y velocidad en el fluido. El espesor de la capa límite de temperatura δ, será la longitud a la cual la temperatura pasa de T_W (temperatura de la pared del cilindro) a T_∞ (temperatura ambiente). El espesor de la capa límite variará según la altura del cilindro, generando un perfil a lo largo del éste, como el que se aprecia en la figura 2.2.

2.1.2. Análisis de escala

El análisis de escala presentado a continuación está basado en la teoría que explica para la convección natural sobre una placa plana (Bejan, 1995). Esta sección tiene como objetivo transformar en un sistema de ecuaciones adimensional las ecuaciones de Navier-Stokes a

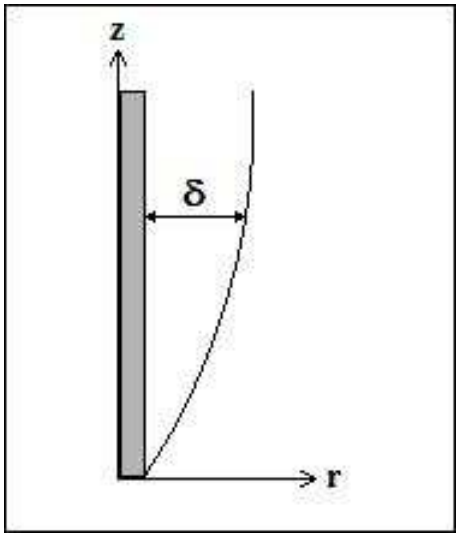


FIGURA 2.2. Diagrama de la capa límite de temperatura.

ser resuelto por el método de similaridad. A continuación se estudiará el comportamiento del espesor δ de la capa límite.

El análisis de escala es definido como el razonamiento físico para establecer el orden de magnitud de los términos involucrados en la ecuaciones que modelan un fenómeno, como es el caso de el sistema de ecuaciones presentado en la sección anterior (Lira, 2007). En base a esto se establecen números adimensionales cuyos valores pueden ser hallados de forma empírica.

El orden de magnitud establece para una función H una constante c a la cual ésta se escala dentro de un dominio dado, si se cumple:

$$\max(H) \approx c \qquad \text{si} \qquad c > 0 \tag{2.8}$$

$$\min(H) \approx c \qquad \text{si} \qquad c < 0. \tag{2.9}$$

Se dice entonces que una función H es del orden de magnitud de c de la forma $H \sim c$. Establecido esto, se define inicialmente un cilindro con las mismas características que el anterior (figura 2.1), además de un volumen de control de espesor δ y altura z alrededor del cilindro. Volviendo a las ecuaciones de Navier-Stokes y realizando un análisis de escala

sobre ellas se puede establecer que, para el balance de energía del cilindro al exterior se tiene

$$d\,\pi z k\frac{\Delta T}{\delta} \sim \Big[\rho U_z \pi(d+\delta)\delta\Big] c_p \Delta T, \tag{2.10}$$

donde el término de la izquierda corresponde al flujo de calor desde la pared del cilindro con $\Delta T = T_W - T_\infty$ y k la conductividad térmica del fluido. El término de la derecha corresponde al flujo de entalpía, siendo el término en corchetes el flujo de masa a través de un área $A = \pi(d+\delta)\delta$ y el segundo término corresponde a la variación de la entalpía específica. Acá, ρ corresponde a la densidad del fluido, U_z la velocidad vertical a la salida del volumen de control y c_p la capacidad calórica a presión constante.

El balance de momentum se puede escribir como

$$g\Delta\rho \sim \rho\frac{U_z^2}{z} + \mu\frac{U_z}{\delta^2}, \tag{2.11}$$

donde el término de la izquierda corresponde a la fuerza de empuje correspondiente a $\Delta\rho/\rho \sim \beta\Delta T$. El primer término de la derecha es la fuerza de inercia y el segundo representa a la fricción, con μ la viscosidad del fluido y $\Delta\rho$ la diferencia de densidad entre el volumen de control y el aire al exterior de éste.

Reordenando las ecuaciones (2.10) y (2.11) y definiendo $\alpha = k/(\rho c_p)$ y $\nu = \mu/\rho$:

$$U_z \sim \frac{\alpha z}{\delta^2}\frac{d}{d+\delta} \tag{2.12}$$

$$g\beta\Delta T \sim \frac{U_z^2}{z} + \nu\frac{U_z}{\delta^2}, \tag{2.13}$$

y combinando ambas ecuaciones resulta

$$\frac{1}{\mathrm{Bo}_z}\Big(\frac{z}{\delta}\Big)^4\Big(\frac{d}{d+\delta}\Big)^2 + \frac{1}{\mathrm{Ra}_z}\Big(\frac{z}{\delta}\Big)^4\frac{d}{d+\delta} \sim 1. \tag{2.14}$$

En esta ecuación, $\mathrm{Ra}_z = g\beta\Delta T z^3/(\nu\alpha)$ es el número de Rayleigh, y $\mathrm{Bo}_z = g\beta\Delta T z^3/\alpha^2$ es el número de Boussinesq, el cual puede ser expresado también como $\mathrm{Bo}_z = \mathrm{Ra}_z\mathrm{Pr}$, donde Pr es el número de Prandtl (definido como $\mathrm{Pr} = \nu/\alpha$).

El primer término de (2.14) representa la razón entre las fuerzas de inercia y empuje, mientras que el segundo representa la razón entre la fricción y el empuje.

2.1.3. Método de similaridad

A continuación se explica el método para resolver el sistema (ecuaciones (2.1) a (2.7)). El método de similaridad consiste en establecer una solución para el perfil de temperatura en la capa límite en base a un perfil maestro, el cual puede ser estirado o acortado. Para esto se define una variable de seudo-similaridad $\eta(r,z)$ y una coordenada axial adimensional $\xi(z)$ según (Lira, 2008):

$$\eta(r,z) = \frac{r^2 - r_0^2}{r_0 z}\Pi_z^{1/4} \tag{2.15}$$

$$\xi(z) = \frac{8z}{r_0}\Pi_z^{-1/4}, \tag{2.16}$$

donde Π_z es el número adimensional $\Pi_z = g\beta\Delta T z^3/p^2$, con p parámetro de difusividad elegido a conveniencia. Por lo que si $p = \sqrt{\nu\alpha}$, entonces $\Pi_z = \mathrm{Ra}_z$.

La variable de temperatura adimensional $\theta(\eta,\xi)$ y la función de corriente reducida $\psi(\eta,\xi)$ se definen como:

$$\theta(\eta,\xi) = \frac{T - T_\infty}{T_W - T_\infty} \tag{2.17}$$

$$\psi(\eta,\xi) = q r_0 \Pi_z^{-1/4} f, \tag{2.18}$$

donde q es un parámetro de difusividad y f una función dependiente de η y ξ. La función de corriente satisface

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = ru \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial\psi}{\partial z} = -rv, \tag{2.19}$$

de tal forma que (2.1) se satisface. Por lo tanto, sustituyendo las ecuaciones (2.17) y (2.18) sobres las ecuaciones (2.2) hasta (2.3) resulta:

$$\underbrace{2{f_\eta}^2 + \xi(f_\eta f_{\eta\xi} - f_\xi f_{\eta\eta}) - 3 f f_{\eta\eta}}_{I} = \frac{\nu}{q}\Big(\underbrace{\xi f_{\eta\eta} + (8+\eta\xi) f_{\eta\eta\eta}}_{F}\Big) + \Big(\frac{p}{q}\Big)^2 \underbrace{\theta}_{B} \tag{2.20}$$

$$\underbrace{\xi(f_\eta\theta_\xi - f_\xi\theta_\eta) - 3 f\theta_\eta}_{E} = \frac{\alpha}{q}\Big(\underbrace{\xi\theta_\eta + (8+\eta\xi)\theta_{\eta\eta}}_{C}\Big), \tag{2.21}$$

con las condiciones de borde:

$$f_\eta = 0, \qquad 3f + \xi f_\xi = 0, \qquad \theta = 1, \qquad \text{en} \qquad \eta = 0 \tag{2.22}$$

$$f_\eta \to 0, \qquad \theta \to 0 \qquad \text{en} \qquad \eta \to \infty. \tag{2.23}$$

Las ecuaciones (2.20) y (2.21) representan un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineal, acopladas entre sí bajo las condiciones de borde establecidas en (2.22) y (2.23). En el sistema el término I corresponde a la inercia, F corresponde a la fricción y el término B corresponde al empuje, mientras que en la segunda ecuación del sistema el término E se asocia al flujo de entapía y C corresponde a la transferencia de calor por conducción.

Si se eligen los términos p y q de tal forma que η y ξ queden expresados en función del número de Rayleigh (o sea, $p = \sqrt{\nu\alpha}$ y $q = \alpha$) se obtiene:

$$\frac{1}{\text{Pr}} I = F + B \tag{2.24}$$

$$E = C. \tag{2.25}$$

El número de Prandtl aparece en la ecuación de momentum y como se mencionó en el análisis de escala quedará definido según las propiedades del fluido en cuestión. Por ello, si Pr $\gg 1$ (aceite) el primer término puede despreciarse y la ecuación se balancea entre la fricción y el empuje, mientra que un Pr $\ll 1$ (metales líquidos) indica que en la ecuación el balance se establece entre la inercia y el empuje. Este sistema permite resolver por el método de similaridad las ecuaciones de Navier-Stockes para convección natural alrededor de un cilindro calentado.

El método por similaridad presentado anteriormente que permite estimar numéricamente los perfiles de temperatura y velocidad a partir de la capa límite, es muy importante y de gran trascendencia debido a que simplifica de gran forma un problema que actualmente aún no ha sido resuelto. Torrejón (2007) realizó en su estudio de tésis un modelo

matemático que intentaba resolver el sistema planteado, a través del cual estimaba los perfiles de la capa límite de temperatura y de velocidad realizando distintas comparaciones (comparó este modelo con el propuesto según el número de Grashof Gr_z) y modificando el modelo (utilizando distintos números de Prandtl simulando distintos fluidos). Los resultados, sin embargo, no fueron concluyentes debido a dificultades numéricas.

2.2. Principios de la Óptica

Esta sección describe los conceptos básicos de teoría ondulatoria obtenida de Gasvik (2002, capítulo 1) y de los trabajos de tesis de Varas (2003) y López (2007). Los dos últimos en sus trabajos ocuparon en sus experimentos una llama como elemento de medición de temperatura y ambos modelaron el haz láser ocupado en sus experimentos como ondas sinusoidales con todas las características que ellas poseen.

2.2.1. Movimiento Ondulatorio

La figura 2.3 muestra el diagrama de una onda armónica que se desplaza por el eje z. La ecuación que describe el comportamiento de esta onda unidimensional corresponde a

$$\boldsymbol{E}(z,t) = a(z)\cos\left[2\pi\Big(\frac{z}{\lambda} - \nu t\Big) + \delta\right]\hat{\boldsymbol{k}}, \tag{2.26}$$

donde $\boldsymbol{E}(z,t)$ corresponde a la intensidad del campo eléctrico y $a(z)$ corresponde a la amplitud en un punto dado. Además se puede identificar otros parámetros como la longitud de onda λ, la frecuencia temporal ν y el ángulo de fase δ.

El número de onda $\boldsymbol{k}$ está dado por la ecuación

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{2.27}$$

También se define la frecuencia angular como

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}, \tag{2.28}$$

siendo T el período de la onda.

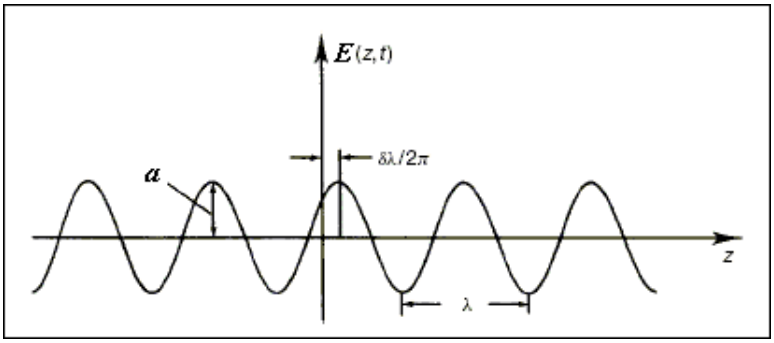


FIGURA 2.3. Representación de una onda armónica.

La relación entre la frecuencia temporal y la longitud de onda está dado por

$$\lambda\nu = c, \tag{2.29}$$

donde c corresponde a la velocidad de la onda electromagnética en el vacio, siendo

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}. \tag{2.30}$$

El índice de refracción corresponde a la razón entre la velocidad de una onda electromagética en el vacío c con la velocidad de la onda en un medio conocido v

$$n = \frac{c}{v}. \tag{2.31}$$

La onda definida en (2.26) puede desplazarse en el espacio, con una posición dada por el vector $\boldsymbol{r}(x, y, z)$. La fase inicial de las oscilaciones en un punto dado se define como

$$\Psi(\boldsymbol{r}) = \frac{2\pi r}{\lambda} + \delta = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} + \delta, \tag{2.32}$$

por lo que la ecuación (2.26) puede reescribirse como

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = a(\boldsymbol{r}) \cos\Big[\Psi(\boldsymbol{r}) - \omega t\Big]\boldsymbol{r}. \tag{2.33}$$

2.2.2. Comportamiento de un frente de onda plano

Una onda plana es cualquier onda en la cual se cumple que, en cualquier instante, las superficies de igual fase son planas. En una onda plana los puntos de igual fase yacen en

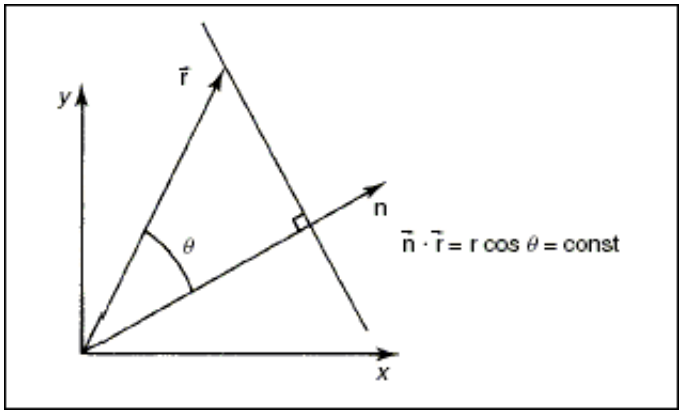


FIGURA 2.4. Frente de onda plano.

planos paralelos que son perpendiculares a la dirección de propagación tal como se aprecia en la figura 2.4. Estos son llamados frentes de onda.

En el caso general donde una onda plana se propaga en la dirección de un vector unitario $\hat{\boldsymbol{n}}$, la expresión que describe el campo en un punto arbitrario con vector posición $\boldsymbol{r}$, está dado por

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = a(\boldsymbol{r})\cos\Big[k\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t\Big], \tag{2.34}$$

donde el producto $\boldsymbol{r}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$ =cte describe un plano el cual es perpendicular a n.

2.2.3. Representación compleja de una onda plana

La ecuación (2.34) puede escribirse en forma compleja como

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = a(\boldsymbol{r})e^{i(\Psi-\omega t)}, \tag{2.35}$$

con $\Psi = k\hat{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{r}+\delta$. Esta expresión puede reescribirse como

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \underbrace{a(\boldsymbol{r})e^{i\cdot\Psi}}_{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})}\cdot e^{-i\omega\cdot t}, \tag{2.36}$$

donde $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ corresponde a la amplitud compleja de la onda y como se aprecia no depende del tiempo.

2.2.4. Intensidad

En relación al registro de la luz, se da el hecho de que los detectores más comunes (como el ojo, películas fotográficas, etc...) registran la intensidad la cual es proporcional al cuadrado del vector campo electromagnético

$$I = |\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2. \tag{2.37}$$

Cuando una onda se escribe en su forma compleja su intensidad se calcula según

$$I = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E} = |\boldsymbol{E}||\boldsymbol{E}^*| = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = |\boldsymbol{a}|^2. \tag{2.38}$$

2.3. Interferencia

El fenómeno de la interferencia sobre ondas electromagnéticas es la base en la metrología óptica para la medición de distintos fenómenos, como por ejemplo el índice de refracción de un medio, la medición de la rugosidad de una superficie o la deformación de un cuerpo sometido a una fuerza.

A continuación se procederá a estudiar las propiedades de las ondas cuando ellas generan interferencia y cómo se puede aplicar a nuestro caso en particular. Se definirá qué es un interferómetro, qué se busca con este tipo de arreglos y cuáles son los métodos para procesar la información obtenida de ellos.

2.3.1. Interferencia de dos ondas planas

Esta sección se basó en el libro de interferometría óptica de Gasvik (2002, capítulo 3).

El principio de superposición dice que si existen varios campos simultáneos propagándose en el espacio, el campo resultante es

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r}, t). \tag{2.39}$$

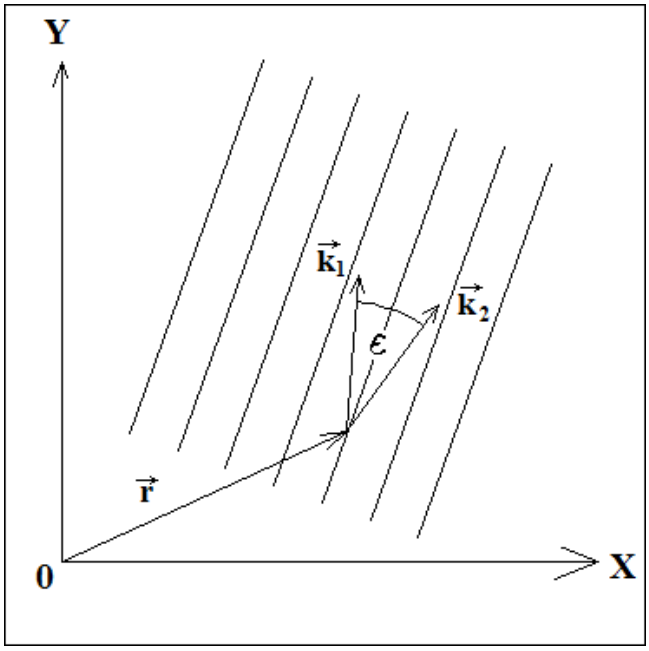


FIGURA 2.5. Superposición de ondas.

Esto puede aplicarse para el caso de las ondas luminosas. Si además estas ondas poseen la misma amplitud, entonces se tiene

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = e^{-i\omega t}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{A}e^{-i\omega t}, \tag{2.40}$$

con $\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i$. Por esto, la suma de dos ondas estará dada por la suma de los vectores complejos de sus amplitudes.

Si se consideran dos ondas planas monocromáticas de igual frecuencia, cuyos vectores complejos de amplitud son:

$$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{r})e^{-i(\delta_1 - \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{k}_1)} \tag{2.41}$$

$$\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{r})e^{-i(\delta_2 - \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{k}_2)} \tag{2.42}$$

y se supone que los vectores de intensidad de los campos eléctricos son perpendiculares al plano de la figura 2.5, la amplitud compleja de la onda resultante es

$$\boldsymbol{A} = a_1(\boldsymbol{r})e^{-i(\delta_1 - \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{k}_1)} + a_2(\boldsymbol{r})e^{-i(\delta_2 - \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{k}_2)}, \tag{2.43}$$

donde $a_1 = |\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{r})|$ y $a_2 = |\boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{r})|$ son las amplitudes independientes de la posición si se trata de ondas homogéneas inmersas en un medio no absorvente. Con este resultado, el valor de la intensidad de la onda resultante será

$$I = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos[(\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2)\cdot\boldsymbol{r} + (\delta_1 - \delta_2)]. \tag{2.44}$$

Según la ecuación (2.32), la intensidad puede escribirse como

$$I = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\Delta\Psi), \tag{2.45}$$

con $\Delta\Psi = \Psi_1 - \Psi_2$.

La intensidad resultante no corresponde únicamente a la suma de las amplitudes de cada onda. Se dice entonces que ambas ondas interfieren y el tercer término de la ecuación (2.45) es llamado el término de interferencia. A partir de este término se observa que si

$$\Delta\Psi = (2N+1)\pi, \qquad \text{para} \qquad N = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.46}$$

el $\cos(\Delta\Psi) = -1$, y la intensidad alcanza su valor mínimo. Por lo que ambas ondas presentan interferencia destructiva. Y a su vez

$$\Delta\Psi = 2N\pi, \qquad \text{para} \qquad N = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.47}$$

el $\cos(\Delta\Psi) = 1$, y la intensidad alcanza su máximo. Se dice entonces que existe interferencia constructiva. Si las ondas, a su vez, tienen igual amplitud, la ecuación (2.45) queda

$$I = 2a^2[1 + \cos(\Delta\Psi)]. \tag{2.48}$$

Si ahora se definen los vectores de onda como en las siguientes ecuaciones:

$$\boldsymbol{k}_1 = \frac{2\pi}{\lambda}\hat{\boldsymbol{e}}_1 \tag{2.49}$$

$$\boldsymbol{k}_2 = \frac{2\pi}{\lambda}\hat{\boldsymbol{e}}_2, \tag{2.50}$$

con $\hat{\boldsymbol{e}}_1$, $\hat{\boldsymbol{e}}_1$ vectores unitarios en las direcciones de $\boldsymbol{k}_1$ y $\boldsymbol{k}_2$ respectivamente, la ecuación (2.48) resulta

$$I = 2a^2\Big(1 + \cos\Big[\frac{2\pi}{\lambda}(\hat{\boldsymbol{e}}_1 - \hat{\boldsymbol{e}}_2)\cdot\boldsymbol{r} + (\delta_1 - \delta_2)\Big]\Big). \tag{2.51}$$

Con esta ecuación y por medio de las ecuaciones (2.47) y (2.48) que describen al término de interferencia constructiva y destructiva, se puede deducir que la separación entre dos franjas claras u oscuras es

$$d = \frac{\lambda}{2\sin(\epsilon/2)}, \tag{2.52}$$

donde ϵ corresponde al ángulo de separación entre k_1 y k_2 como se aprecia en la figura 2.5.

2.3.2. Interferómetro de Mach-Zehnder

La teoría descrita a continuación se basa en el trabajo de tesis presentado por Moreno (1996) que consistió en la medición del índice de refracción de un chorro de agua caliente por medios interferométricos utilizando como arreglo experimental un interferómetro de Mach-Zehnder.

Los interferómetros son arreglos optomecánicos que se utilizan en metrología óptica con el fin de medir distintas magnitudes. Una propiedad que poseen los interferómetros es que permiten realizar las mediciones sin hacer modificación alguna y sin introducir ningún elemento al medio o sobre el objeto que se está midiendo, esto se debe principalmente al método utilizado para realizar las mediciones. Mediante un haz de luz, el arreglo divide el frente de onda principal en dos o más haces para ser combinados posteriormente. Un tipo de interferómetro de división de amplitud es el Mach-Zehnder como el de la figura 2.6, utilizado para la medición de variaciones en el índice de refracción de medios transparentes como el aire y el agua.

La fuente de luz utilizada en este interferómetro y en la gran mayoría de éstos es el láser. Esto se debe al ser una fuente de luz monocromática y coherente, es decir, posee una única longitud de onda y una misma fase. Además está el hecho de que el láser puede modelarse como una onda armónica.

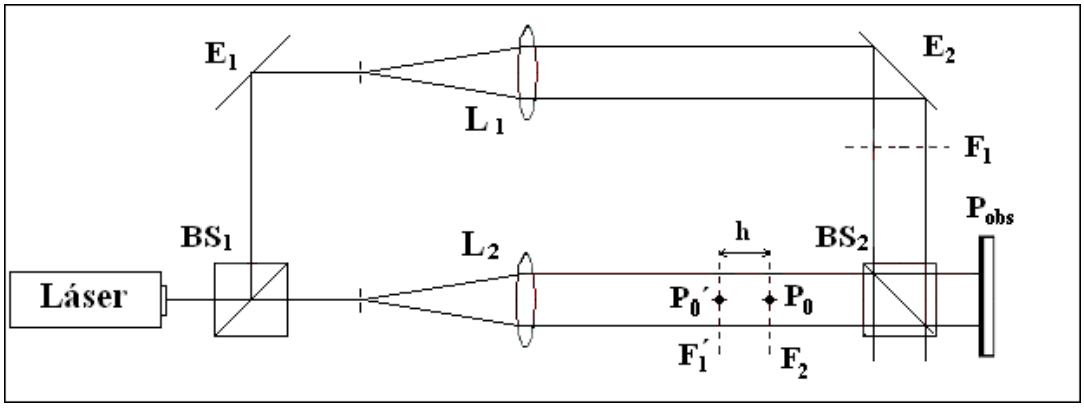


FIGURA 2.6. Interferómetro de Mach-Zehnder.

En el caso particular del interferómetro de Mach-Zehnder, el haz inicial se separa en dos haces idénticos por medio de un divisor de luz (o también llamado beam splitter). Cabe señalar que el haz láser puede presentar ondas de alta frecuencia espacial producto de la difracción, por imperfecciones en la geometría del láser o debido a alguna imperfección en la óptica del arreglo. Estas ondas pueden ser eliminadas por medio de un filtrado espacial el cual consiste en un lente de microscopio de una distancia focal muy corta que hace converger el frente de onda en el punto focal del lente. Luego, un "pinhole" o filtro espacial bloquea las ondas de mayor frecuencia (figura 2.7). El frente de onda resulta expandido y posteriormente se colima con una lente convexa. Esto permite, además, trabajar con un haz expandido de mayor diámetro.

Luego, uno de los haces sigue un camino que permanece constante en el tiempo (éste es conocido como haz de referencia), mientras que en el otro se ve modificado su camino debido al cambio en el fenómeno que se está midiendo (haz objeto) como se aprecia en la figura 2.6. Finalmente ambos haces se recombinan en un segundo beam splitter. Esta combinación de los frentes genera interferencia representado por un patrón de franjas que estará relacionado con el grado de alineación del interferómetro. Los componentes del interferómetro se alínean de tal forma de mantener una geometría rectangular entre ambos haces. La alineación de los elementos ópticos, es más sencilla con el haz regular del láser que con el haz expandido.

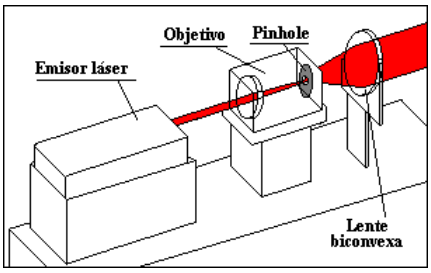


FIGURA 2.7. Filtrado espacial.

Se define F_1 el frente de onda entre E_2 y BS_2, F_2 el frente de onda entre L_2 y BS_2, y F_1' el frente de onda entre L_2 y BS_2 que emergería de BS_2 en fase con F_1 si el interferómetro fuese ideal y estuviera en el vacío. Ahora se supone que todo es vacío excepto la zona entre F_1' y F_2 donde existe un índice de refracción n. La diferencia de camino óptico entre los rayos emergentes es

$$\Phi_{1-2} = nh, \tag{2.53}$$

donde h es la distancia entre P_0 y P_0' en F_2 y F_1' respectivamente.

Si se supone un interferómetro ideal, en la pantalla de observación P_{obs} no se ven franjas sino una iluminación uniforme, que será máxima si la interferencia es constructiva y nula si la interferencia es destructiva. En la pantalla habrá iluminación máxima si la diferencia de camino óptico es múltiplo de λ, o sea

$$nh = m\lambda, \qquad \text{con} \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.54}$$

a su vez, será nula si

$$nh = m\lambda, \qquad \text{con} \qquad m = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots \tag{2.55}$$

Si en la trayectoria se interpone un fluido con índice de refracción variable, el patrón de interferencia es no uniforme y permite medir la distribución del índice de refracción de la sección. En este caso, el camino óptico estará dado por

$$\Phi = \int n \mathrm{d}s. \tag{2.56}$$

Si ahora se considera un elemento diferencia de camino óptico se tendrá:

$$\mathrm{d}\Phi = n\mathrm{d}s \tag{2.57}$$

$$n = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}s}. \tag{2.58}$$

Si $\boldsymbol{r}$ es el vector de posición de los puntos en el rayo, y s es la longitud del rayo con respecto a una referencia dada, se tiene

$$n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \nabla\Phi(\boldsymbol{r}). \tag{2.59}$$

Si (2.59) se deriva con respecto a s y se combina con la ecuación (2.58) se obtendrá la expresión conocida como la "ecuación del rayo"

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big(n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\Big) = \nabla n. \tag{2.60}$$

Esta ecuación relaciona el camino del rayo con la distribución del índice de refracción del medio.

2.3.3. Objeto de fase axisimétrico

Esta sección se basa en el trabajo realizado por Vest (1979).

Para un objeto de fase con simetría axial, el índice de refracción sólo depende de la coordenada radial. El índice de refracción entonces se considera

$$n = \begin{cases} n(r) & \text{para} \quad r < r_1 \\ n_0 & \text{para} \quad r \geq r_1 \end{cases} \tag{2.61}$$

donde n_0 es el índice de refracción del ambiente que circunda el objeto de fase.

Uno de los supuestos importantes del modelo es que el rayo no se desvía fuera del plano en el que está contenido, lo que ocurre sólo si el índice de refracción no varía en la dirección axial. Otro importante supuesto es que el frente de onda que incide sobre el objeto de fase es plano y se propaga en una cierta dirección x.

Se denomina “eje óptico” a la recta paralela a la dirección de propagación del rayo que pasa por el centro del objeto de fase, ubicado en el origen del sistema. Por lo que un rayo queda identificado por la distancia entre el eje óptico y el punto de incidencia, siendo esta distancia y.

Luego, se necesita encontrar una expresión para la trayectoria dentro del objeto de fase con simetría axial, por lo que se define el vector tangente al rayo según

$$\tau = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}, \tag{2.62}$$

lo que permite reescribir la ecuación (2.60) como

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(n\tau) = \nabla n. \tag{2.63}$$

Luego, al derivar y desarrollar el producto vectorial $r \times n\tau$, se llega a la expresión

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(r \times n\tau) = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s} \times n\tau + r \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(n\tau), \tag{2.64}$$

donde el primer término del lado derecho se anula. En el caso de tener simetría axial y siguiendo con el supuesto anterior, el gradiente del índice de refracción tiene dirección radial, por lo tanto es paralelo al vector posición r, lo que provoca que el producto vectorial de ambos sea nulo. De esta forma, y ocupando la formula (2.63) se cumple que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(r \times n\tau) = 0, \tag{2.65}$$

cuya solución es

$$r \times n\tau = p \tag{2.66}$$

con p constante.

Según la figura 2.8 la trayectoria dentro del objeto de fase axisimétrico estará descrita por la expresión

$$rn(r)\sin\gamma = p, \tag{2.67}$$

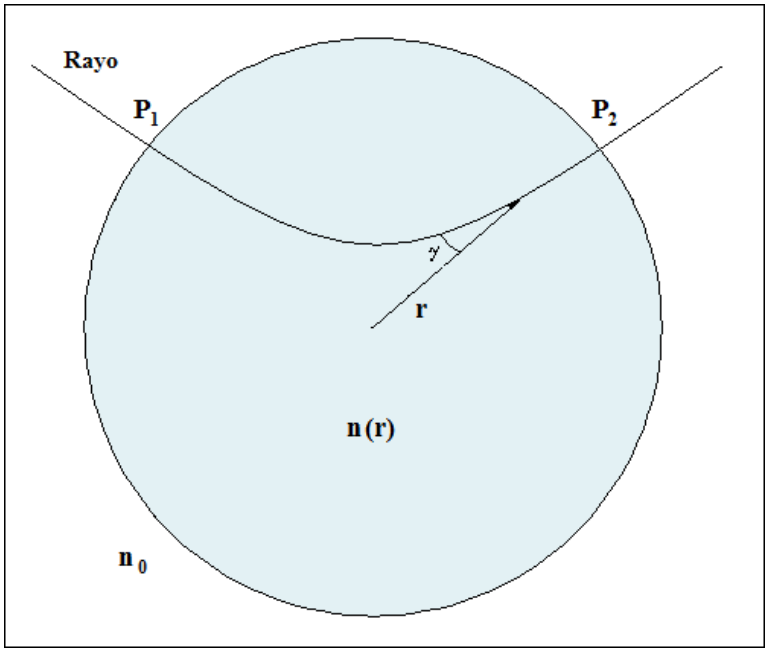


FIGURA 2.8. Esquema para la fórmula de Bouguer.

donde γ es el ángulo entre el vector posición y la tangente al rayo y p es un valor constante para cada rayo, denominado "parámetro de impacto". La ecuación (2.67) es conocida como la ley general de Snell o la fórmula de Bouguer.

La ecuación presentada anteriormente corresponde a una de las soluciones más exactas y generales dentro de la refracción. Sin embargo, los trabajos de López (2007) y Varas (2003) han mostrado que para ciertos objetos de fase axisimétricos se puede realizar una aproximación para refracción despreciable, esto ocurre cuando los ángulos de deflección son muy pequeños . Esto simplifica el modelo pues el haz incidente sobre el objeto de fase a una altura y del eje óptico puede representarse como una línea recta a lo largo de todo el camino.

En el esquema de la figura 2.9, además de lo mencionado anteriormente, se aprecia el eje óptico sobre el eje x y la presencia del cilindro de radio r_0, donde r_1 es el radio del objeto de fase correspondiente a $r_1 = r_0 + \delta$. La diferencia de camino óptico estará dada por la diferenia del camino del rayo que atraviesa el objeto de fase axisimétrico con el camino que tomaría el rayo si no estuviese este objeto. Por lo que la ecuación (2.56) queda

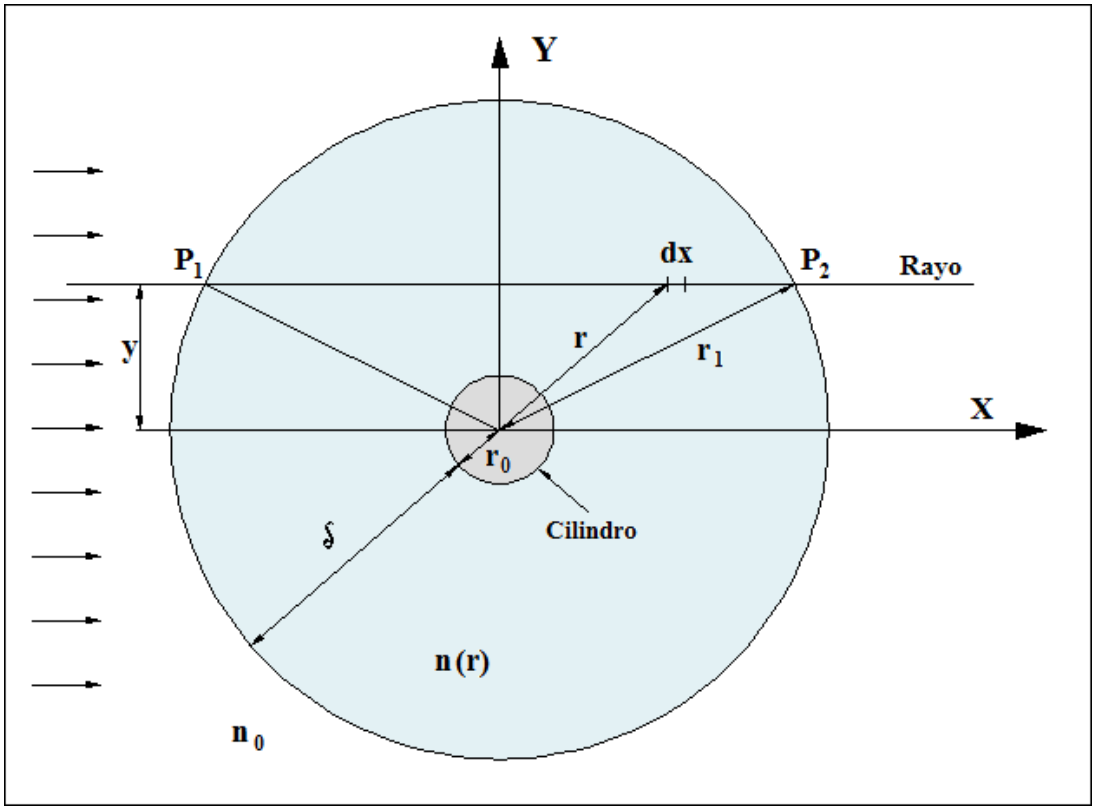


FIGURA 2.9. Recorrido de rayo por objeto axisimétrico.

$$\Delta\Phi = \int [n(r) - n_0]\mathrm{d}x. \tag{2.68}$$

La integral del índice de refracción se realiza a lo largo del camino del rayo . Cuando la refracción se hace despreciable, los haces de luz pueden considerarse como líneas rectas y la integral pasa a ser lineal (desde P_1 hasta P_2 en el esquema de la figura 2.9). Tomando un elemento diferencial del camino dx representado en función de la coordenada radial y de la altura y se tiene

$$\mathrm{d}x = \frac{r\ \mathrm{d}r}{\sqrt{r^2 - y^2}}, \tag{2.69}$$

y estableciendo los límites de integración correspondientes, la diferencia de camino óptico se presenta según la ecuación

$$\Delta\Phi = 2\int_{y}^{r_1} \frac{[n(r) - n_0]\, r\, \mathrm{d}r}{\sqrt{r^2 - y^2}}. \tag{2.70}$$

Posteriormente se revisará este resultado, pues la forma que posee es particular y servirá para obtener el índice de refracción.

2.3.4. Interferometría digital

Esta sección fue escrita según los trabajos de Malacara et al. (2005, capítulo 1) y López (2007).

La interferometría digital en sistemas estáticos consiste en la captura electrónica del patrón de intensidad resultante de un interferómetro, antes y después de efectuar alguna modificación del camino óptico de uno o más haces de éste. La modificación de este camino óptico conlleva un cambio en la fase con que los haces llegan al detector, representado por una cámara CCD.

Los interferogramas digitales se pueden representar como matrices de $p \times q$ cuyos elementos corresponden a las intensidades de cada coordenada de la imagen, llamada pixel, cuyos valores discretos pueden ir desde 0 (negro) al 255 (blanco) representando el nivel de gris.

Si el haz objeto se hace incidir sobre una superficie rugosa como una pantalla difusora se genera scattering o esparcimiento de la dirección de la onda incidente, lo que se traduce en un patrón aleatorio de manchas que captura el CCD llamado speckle (figura 2.10). Para conseguir la captura de los interferogramas y su posterior procesamiento existen varias técnicas.

Una de las técnicas que utiliza este patrón de moteado es la llamada Interferometría Electrónica de Patrón de Speckles (o patrón de moteado), abreviado ESPI por las siglas de Electronic Speckle Pattern Interferometry. Esta técnica se usa en varios tipos de mediciones interferométricas, como medición de índices de refracción o medición de las deformaciones de elementos sólidos. En ella se captura un interferograma de referencia mientras no existe cambio alguno en el elemento que se desea medir. Posteriormente se realiza la modificación

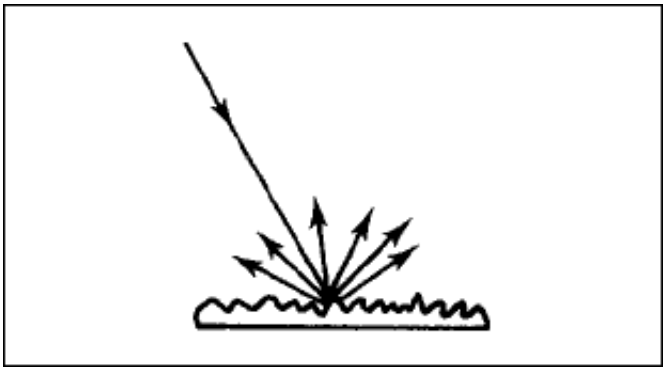


FIGURA 2.10. Fenómeno de scattering.

al sistema y se captura otro interferograma. La resta de estos interferogramas entrega información del cambio en el camino óptico del haz objeto. La diferencia de fase se obtiene, por lo tanto, de la resta de imágenes por medio de corrimiento de fase (se explicará más adelante). Además se intenta eliminar todo patrón de franjas que pueda generarse por efectos de la geometría del arreglo, esto se realiza desalineando el interferómetro hasta eliminar completamente las franjas portadoras o carrier. Un interferograma obtenido mediante esta técnica se presenta en la figura 2.11.

Otra técnica utilizada es la llamada Interferometría de Fotografía Digital o Interferometría Directa. Acá se realiza la captura directa de los interferogramas antes y después de la modificación y se trabaja con las franjas portadoras del arreglo inicial por lo que la fase que se logra a través de corrimiento de fase antes de la modificación corresponde a la fase del carrier. Por lo tanto la fase después de la modificación del sistema entrega información del carrier inicial, más la información del cambio en el sistema. Acá los interferogramas no se restan inmediatamente, sino que se obtiene la fase de cada uno de ellos y, posteriormente, se realiza la resta de esas fases. Los interferogramas obtenidos por esta técnica se presentan en las figuras 2.12, donde 2.12(a) fue obtenida con el alambre en condiciones naturales y 2.12(b) con el alambre calentado y estos interferogramas poseen una calidad mayor al interferograma obtenido mediante ESPI.

Una vez definidas ambas técnicas, se procede a la explicación matemática. Consideremos el caso de un interferómetro de dos haces (interferómetro de Mach-Zehnder por

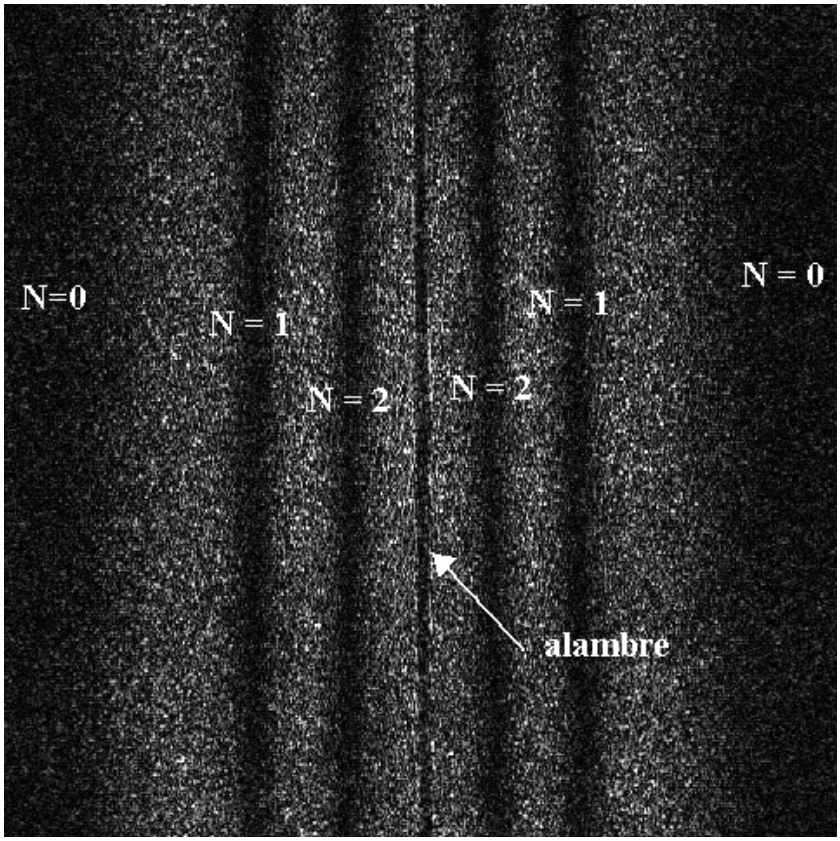


FIGURA 2.11. Interferograma capturado mediante Interferometría de Patrón de Moteado.

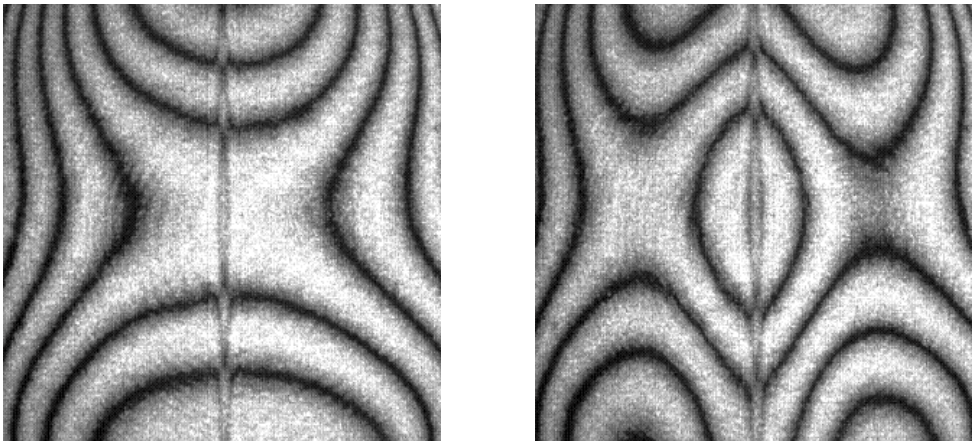
ejemplo). Inicialmente, cuando el elemento a medir no presenta modificaciones, la cámara CCD captará un intereferograma con una intensidad I_1 dada por la fórmula

$$I_1 = I_O + I_R + 2\sqrt{I_O I_R}\cos(\Delta\Psi_{O1-R}), \tag{2.71}$$

donde I_O se refiere a la intensidad del haz objeto e I_R corresponde a la intensidad del haz de referencia. A su vez $\Delta\Psi_{O1-R}$ es la diferencia de fase existente entre el haz objeto y el haz de referencia en la CCD .

Realizada la modificación al sistema, en este caso produciendo una diferencia de voltaje sobre el alambre, calentándolo y generando un gradiente de temperatura en el aire alrededor de él, la intensidad I_2 captada por el CCD estará dada por

$$I_2 = I_O + I_R + 2\sqrt{I_O I_R}\cos(\Delta\Psi_{O2-R}). \tag{2.72}$$



(a) Interferograma capturado con el cilindro en frio.

(b) Interferograma capturado con el cilindro calentado.

FIGURA 2.12. Interferogramas capturados bajo Interferometría Directa.

La diferencia de fase para el interferograma captado una vez que se establece el cambio (ecuación (2.72)) está dado por

$$\Delta\Psi_{O2-R} = \Delta\Psi_{O2-O1} + \Delta\Psi_{O1-R}, \tag{2.73}$$

donde $\Delta\Psi_{O2-O1}$ es la diferencia de fase en el CCD, entre el haz objeto antes y después de haber sido hecha la modificación.

La distribución de intensidades para I_1 es capturada, digitalizada y guardada en la memoria del computador. En la técnica ESPI se utiliza las intensidades de los interferogramas mediante la resta de la intensidad capturada I_1 y la intensidad I_2 que capta la cámara CCD durante la modificación del sistema en tiempo real. Esta resta de intensidades corresponde a una resta de matrices en valor absoluto, pues las intensidades negativas no tienen sentido físico (rectificación de la señal). La diferencia está dada por

$$I_f = |I_1 - I_2| = \left|2\sqrt{I_O I_R}\Big[\cos(\Delta\Psi_{O1-R}) - \cos(\Delta\Psi_{O2-O1} + \Delta\Psi_{O1-R})\Big]\right|. \tag{2.74}$$

Aplicando fórmulas trigonométricas, la ecuación (2.74) resulta

$$I_f = \left|4\sqrt{I_O I_R}\Big[\sin\Big(\Delta\Psi_{O1-R} + \frac{\Delta\Psi_{O2-O1}}{2}\Big)\sin\Big(\frac{\Delta\Psi_{O2-O1}}{2}\Big)\Big]\right|. \tag{2.75}$$

El efecto del primer seno en el término del lado derecho de (2.75) se desprecia porque corresponde a un patrón de franjas de una frecuencia muy alta, imposible de detectar con la CCD, por lo que sólo es ruido en la imagen. Este ruido puede reducirse aplicando un filtro pasabajas (lowpass filter). El segundo seno corresponde a las modificaciones producidas en el haz objeto, ya que sólo dependen de $\Delta\Psi_{O2-O1}$.

Se puede observar entonces que para esta ecuación se generará una franja oscura cuando el segundo término senoidal sea múltiplo de π, por lo tanto

$$\pi N = \frac{\Delta\Psi_{O2-O1}}{2}. \tag{2.76}$$

Si se define $\Delta\Psi$ según la ecuación (2.32) y suponiendo que tanto el haz de referencia y el haz objeto emiten en fase (o sea $\Delta\delta = 0$), se tiene

$$\Delta\Psi_{O2-O1} = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta r_{O2-O1}, \tag{2.77}$$

y estableciendo la diferencia de camino óptico como la ecuación (2.53) y (2.54) se tiene que

$$\Delta\Psi_{O2-O1} = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta\Phi_{O2-O1}. \tag{2.78}$$

Con esto se puede establecer la relación,

$$\lambda N = \Delta\Phi_{O2-O1}. \tag{2.79}$$

N corresponde al orden de franja, que toma valores enteros para franjas oscuras y valores medios para franjas claras, numerándose estas franjas a partir del N=0 desde los bordes hacia el centro del interferograma como se aprecia en la figura 2.11. El término $\Delta\Phi_{O2-O1}$ corresponde a la diferencia de camino óptico del rayo del haz objeto que llega a la cámara CCD antes y después de la modificación.

Con respecto a la teoría correspondiente a la Interferometría Directa, ésta se explicará en la siguiente sección.

2.3.5. Phase stepping

Esta sección se basó en los trabajos de Malacara et al. (2005), Gasvik (2002) y en la memoria de título de J. L. Gabriel (2008).

El método de phase stepping consiste en determinar la diferencia de fase $\Delta\Psi$ generada entre los caminos ópticos del haz de referencia y el haz objeto, por el cual se busca determinar la información entregada por el interferograma.

Este método se diferencia de anteriores formas de obtención de la fase, como el conteo de franjas, ya que por medio de ésta se puede conseguir información de la fase en todo el interferograma, pues la medición se realiza en cada coordenada de éste. En el conteo de franjas el análisis se realiza solamente en una sección del interferograma y la precisión de los datos obtenidos no es la mejor al ser un método por inspección.

El método phase stepping contempla la obtención de un número de interferogramas bajo ciertas características. La intensidad de los interferogramas se pueden modelar como

$$I_i(x,y) = a(x,y) + b(x,y)\cos(\Delta\Psi + \alpha_i), \tag{2.80}$$

donde a corresponde a la intensidad promedio, b es la modulación de la intensidad y α_i corresponde al ángulo de fase del i-ésimo interferograma, cuyo valor puede ser modificado a conveniencia.

Para determinar la fase $\Delta\Psi$ hacen falta al menos 3 ecuaciones para determinar las 3 variables de la ecuación (a, b y $\Delta\Psi$). Entonces el número de interferogramas introducido al sistema estará determinado por el número de variables. Se debe considerar que la estimación de la fase se realiza para cada punto (x, y) del interferograma. Los interferogramas se obtienen por medio de lo que se llama un corrimiento de fase, dado por el valor de ángulo α en cada interferograma. Por lo que se tendrá:

$$I_1(x,y) = a(x,y) + b(x,y)\cos(\Delta\Psi + \alpha_1) \tag{2.81}$$

$$I_2(x,y) = a(x,y) + b(x,y)\cos(\Delta\Psi + \alpha_2) \tag{2.82}$$

$$I_3(x,y) = a(x,y) + b(x,y)\cos(\Delta\Psi + \alpha_3). \tag{2.83}$$

Desarrollando el sistema se obtiene

$$\Delta\Psi = \arctan\left(\frac{(I_2 - I_3)\cos\alpha_1 - (I_1 - I_3)\cos\alpha_2 + (I_1 - I_2)\cos\alpha_3}{(I_2 - I_3)\sin\alpha_1 - (I_1 - I_3)\sin\alpha_2 + (I_1 - I_2)\sin\alpha_3}\right). \tag{2.84}$$

En esta ecuación se pueden ingresar valores de los ángulos de fase tales que permitan simplificar la expresión. Esto se realiza físicamente por medio del actuador de piezoeléctrico, dispositivo que se adhiere a uno de los espejos del interferómetro y que permite el desplazamiento de éste mediante diferencias de voltaje, generando así el desfase. Juan Luis Gabriel desarrolló para su tesis de memoria un programa que pudiera hacer la calibración de un piezoeléctrico para ser implementado en phase stepping.

El algoritmo de 3 pasos contempla la obtención de 3 interferogramas con ángulos de fase de $\alpha_1 = \pi/4, \alpha_2 = 3\pi/4$ y $\alpha_3 = 5\pi/4$. Reemplazando los valores se obtiene

$$\Delta\Psi = \arctan\left(\frac{I_2 - I_3}{I_2 - I_1}\right). \tag{2.85}$$

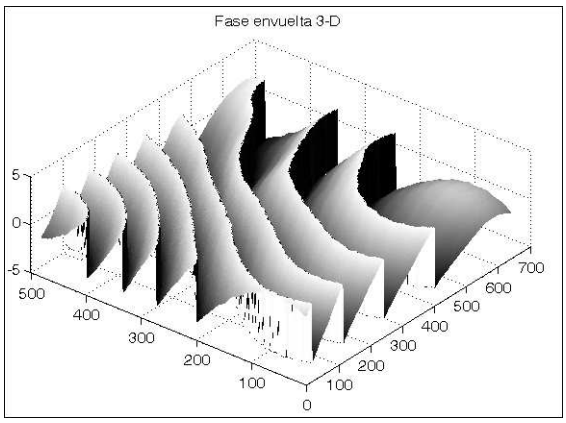
Este valor es conocido como la "fase envuelta". Para este estudio se utilizó el algoritmo de 4 pasos, para el cual se capturan 5 interferogramas, con ángulos de fase de $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \pi/2, \alpha_3 = \pi, \alpha_4 = 3\pi/2$ y $\alpha_5 = 2\pi$. El último interferograma capturado (con $\alpha_5 = 2\pi$) debiese corresponder al mismo primer interferograma debido al ángulo, ya que una vez el ángulo de fase recorre los 2π completa el ciclo y las franjas debiesen volver a como estaban en un inicio.

El valor de la fase $\Delta\Psi$ para este método es mostrado por Malacara et al. (2005) y corresponde a

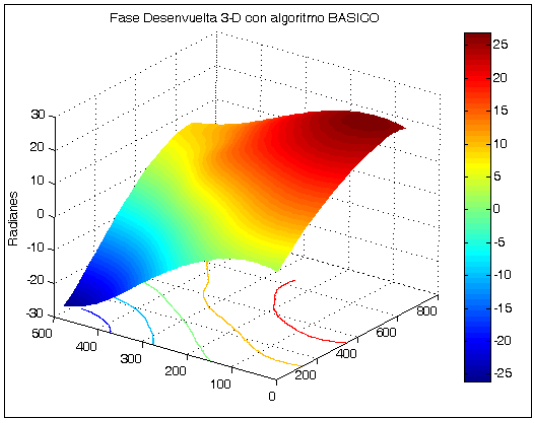
$$\Delta\Psi = \arctan\left(\frac{I_4 - I_2}{I_1 - I_3}\right). \tag{2.86}$$

En la medida que aumenta el número de interferogramas, aumenta también la precisión de los datos finales, pero a costa de una mayor incertidumbre en los valores.

Una vez obtenida la fase envuelta es necesario "desenvolver" la fase, o sea, corregir las discontinuidades generadas por la función $\arctan$ cuando la fase alcanza valores de 2π. Esto se hace con la diferencia entre 2 pixeles seguidos y según el resultado de éste se suma



(a) Fase envuelta.



(b) Fase desenvuelta.

FIGURA 2.13. Diferencia entre fases envuelta y desenvuelta obtenidas por phase stepping.

el valor siguiente más $2\pi \cdot n$. La diferencia entre las fases envuelta y desenvuelta se pueden apreciar en las figuras 2.13 (a) y 2.13 (b) obtenidas de la memoria de Juan Luis Gabriel.

Para relacionar la fase con el orden de franjas hay que tener en cuenta que entre cada franja oscura consecutiva se completa un ciclo de perfil cosenoidal considerado en (2.80), por esto lleva asociado una diferencia de fase de 2π, por lo que se cumple

$$\mathrm{d}\Psi = 2\pi \cdot \mathrm{d}N. \tag{2.87}$$

2.4. Análisis de franjas

Obtenida la información de la fase por medio de la Interferometría Digital, es necesario trabajar con ella para obtener los parámetros que se pretenden medir y que explican los fenómenos estudiados. En primer lugar se establecerá la relación entre la diferencia de fase y el índice de refracción mediante la transformada inversa de Abel y después se describirá la relación de Gladstone-Dale que permite obtener la temperatura según el índice de refracción.

2.4.1. Transformada inversa de Abel

Esta sección se basa en la teoría descrita en el paper de Posner and Dunn-Rankin (2003) y en la tesis de López (2007).

La transformada de Abel es una ecuación utilizada para el estudio de la propagación de radiación, en particular de la luz, sobre objetos cilíndricos de simetría axial (Bracewell, 1977) dada por

$$p(y) = 2\int_y^\infty \frac{F(r)r}{\sqrt{r^2 - y^2}}\mathrm{d}r, \tag{2.88}$$

donde r es la dirección radial, $F(r)$ es la distribución radial e y es la coordenada transversal. Para poder estimar la distribución radial, se debe obtener la transformada inversa. El resultado es

$$F(r) = \frac{1}{\pi}\int_r^\infty \frac{\mathrm{d}p(y)}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2 - r^2}}. \tag{2.89}$$

En la práctica se suele integrar la transformada inversa sólo hasta un punto donde la distribución radial $F(r)$ no varíe mayormente. Ahora la ecuación (2.70) puede reescribirse en función de la ecuación (2.79), resultando

$$N(y)\lambda = 2\int_y^{r_1} \frac{[n(r) - n_0]\ r\ \mathrm{d}r}{\sqrt{r^2 - y^2}}. \tag{2.90}$$

La ecuación (2.90) corresponde a una transformada de Abel para un $F(r) = n(r) - n_0$ si se supone refracción despreciable. Por tanto su transformada inversa será (Vest, 1979)

$$n(r) - n_0 = -\frac{\lambda}{\pi}\int_r^{r_1} \frac{\mathrm{d}N/\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2 - r^2}}\mathrm{d}y, \tag{2.91}$$

donde λ es la longitud de onda y N corresponde al número de franjas. Cabe señalar que en este caso r no parte de 0, sino que variará desde r_0 (radio del cilindro) hasta r_1. De la ecuación (2.91) y combinada con (2.87) se obtiene finalmente la transformada inversa de Abel que relaciona el índice de refracción con la derivada de la diferencia de fase

$$n(r) = n_0 - \frac{\lambda}{\pi}\int_r^{r_1} \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2 - r^2}}\mathrm{d}y. \tag{2.92}$$

2.4.2. Ecuación de Gladstone-Dale

Esta sección se basa en la teoría descrita en el trabajo de Xiao et al. (2002).

El índice de refracción está relacionado con la densidad local del fluido por medio de la relación de Gladstone-Dale.

En el caso particular de esta tesis, el medio sobre el cual se halla el experimento es aire. En este contexto, si se conoce $n(r)$, es posible obtener la temperatura absoluta en un punto del espacio según

$$T(r) = T_0 \cdot \frac{n_0 - 1}{n(r) - 1}. \tag{2.93}$$

Entonces $T(r)$ puede evaluarse relativa a una temperatura T_0 cuyo índice de refracción tiene un valor conocido. Con esto se obtiene finalmente una expresión para el perfil de temperatura en función del índice de refracción a lo largo del eje radial.

3. MONTAJE EXPERIMENTAL Y OBTENCION DE DATOS

Se realizó la experiencia de laboratorio en dos sitios: El laboratorio de Láser del departamento de Mecánica de la Escuela de Ingeniería de la PUC y el laboratorio de Metrología perteneciente al Centro de Investigaciones en Óptica (CIO) en León, México. En el primero se estableció cual iba a ser el arreglo experimental y mediante la experiencia las modificaciones al modelo para poder realizar las mediciones finales en el segundo laboratorio donde, además se estableció el método de obtención de los datos. Se hizo de esta forma debido a la implementación ya presentada en el laboratorio del CIO y, además, por la basta experiencia acumulada en dicho centro. El arreglo experimental apto para la experiencia será un interferómetro de Mach-Zehnder según lo especificado en la sección 2.3.2.

3.1. Interferómetro de Mach-Zehnder

3.1.1. Arreglo experimental

Para el montaje experimental realizado en el laboratorio de Metrología del CIO, se utilizaron los siguientes elementos:

- Láser de He-Cd marca Kimmon, IK serie modelo 4601R-E, con una longitud de onda de 442 nm y una potencia máxima de 300 mW, trabajando en condiciones normales a 40 mW.
- Cubo Beam Splitter o separador de haces 50/50 de 10 mm de lado, ubicado al inicio del interferómetro para dividir el haz que proviene del espejo.
- Espejo circular de diámetro 1.5 cm que recibe uno de los haces divididos. A este espejo se le adhiere un actuador de piezoeléctrico.
- Espejo cuadrado de lado 10 cm que recibe uno de los haces divididos. Es de mayor tamaño que los anteriores pues recibe el haz expandido de un brazo.
- 2 Filtros espaciales compuestos de un objetivo de microscopio de 40X y un pinhole de 15 μm. Los filtros permitirán expandir los haces que vienen de ambos brazos del interferómetro y lo harán eliminando las componentes del rayo que no tengan la dirección principal del vector del láser.

- 2 Lentes biconvexas de diámetro 75 mm y distancia focal 300 mm los cuales colimarán el rayo expandido.
- Cubo Beam Splitter 50/50 de 35 mm de lado, el cual recibirá ambos haces colimados y es en donde se producirá la interferencia generando un patrón de franjas.
- Pantalla difusora que servirá como una pantalla de observación, es utilizada para generar los speckles.
- Cámara Cohu digital (solid state camera) con sensor CCD de resolución 640x480 pixeles con 8 bits de profundidad. Realiza capturas de 30 cuadros por segundo entre la cámara y la tarjeta digitalizadora. La cámara además posee un set de lentes que permiten regular el zoom y el enfoque, además de contener un diafragma que regula la intensidad de luz capturada.

Con respecto al objeto de fase axisimétrico analizado este fue un alambre de Kanthal tipo D de 0.5 mm de diámetro, 30 cm de largo, 1.35 $\frac{\mathrm{W\,mm^2}}{\mathrm{m}}$ de resistividad eléctrica y 11 $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{mK}}$ de conductividad térmica. El alambre estaba sostenido sobre una base metálica cuyos extremos conectaban la diferencia de potencial que debía ser suministrada al alambre. Este cilindro trabajaría como una resistencia eléctrica. La figura 3.1 muestra un modelo del montaje del objeto de fase.

Además fueron necesarios tanto para la captura y posterior procesamiento de los interferogramas, como para el calentamiento del objeto de fase los siguientes elementos:

- Computadora con procesador Intel Pentium 4 a 2.6 MHz, 512 MB en memoria RAM y disco duro de 40 GB. Con sistema operativo Microsoft Windows XP Profesional 2002. Instalados en la computadora se encontraban los programas que iban a ser utilizados para el trabajo experimental.
- Fuente de voltaje BK Precision. Gracias a ella se pudo suministrar una corriente eléctrica de 3 A a 7.8 V al alambre de Kanthal para su funcionamiento.
- Actuador de piezoeléctrico Thorlabs modelo AE0505D08F de 6.5x6.5x10 mm de dimensión, con desplazamiento de 9.1 ± 1.5 μm a 150 V, una capacitancia de

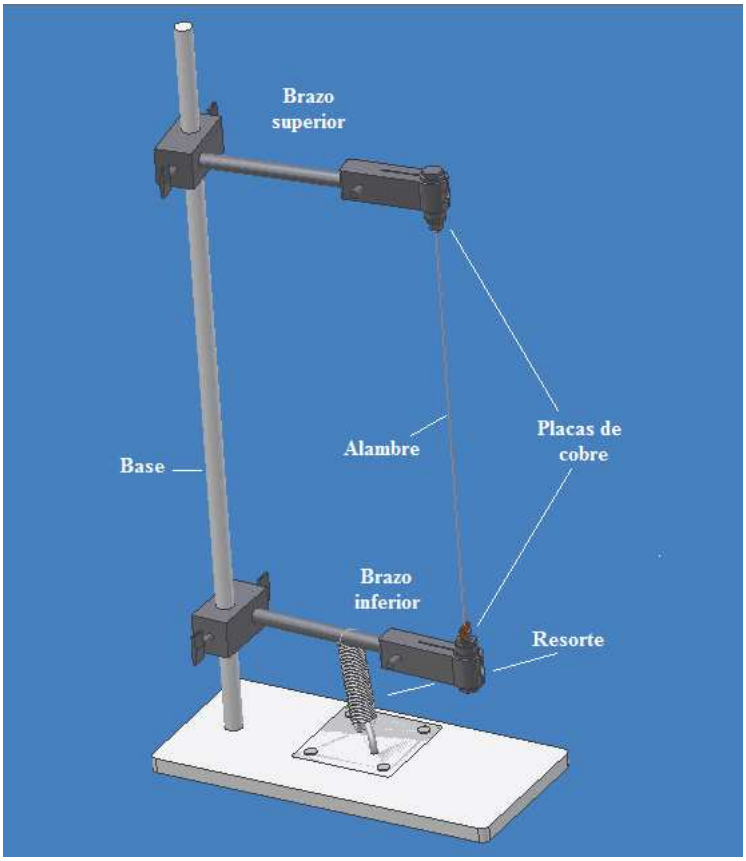


FIGURA 3.1. Modelo del montaje del alambre.

0,75 μF y una frecuencia de resonancia de 138 KHz. Este dispositivo se conectó al segundo espejo de manera de generar el corrimiento de fase.

- Controlador de piezoeléctrico Thorlabs modelo MDT693A que suministra el voltaje al actuador del piezoeléctrico.

Un esquema del montaje experimental del interferómetro es como el que se aprecia en la figura 3.2.

3.1.2. Modificaciones al modelo original

Una vez instalado el interferómetro se procedió a realizar las primeras mediciones para la obtención de los interferogramas. Sin embargo, surgieron algunos problemas en cuanto a

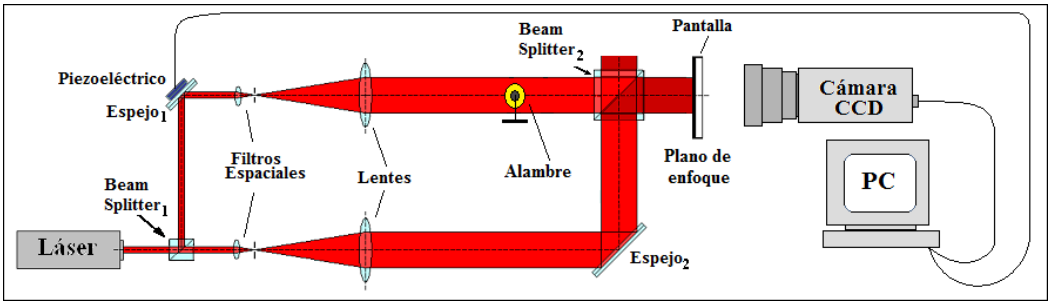


FIGURA 3.2. Esquema del montaje experimental de Interferómetro Mach-Zehnder en un inicio.

las condiciones físicas y de modelo que forzaron a modificar el arreglo, sin generar cambios en el sistema.

Inicialmente el montaje que sujetaba el alambre consistía sólamente en la base metálica y los dos brazos que mantenían al alambre vertical. Al realizarse experimentos preliminares se observó que el alambre alcanzaba temperaturas tales que lo hacían flectar una vez éste se calentaba. Esto no favorecía a la correcta obtención de los interferogramas, pues el alambre cambiaba de posición una vez se calentaba. Frente a esto se decidió reducir la temperatura de la pared del alambre por medio de la disminución del voltaje suministrado. Con esto se redujo la corriente de 5 A, como era inicialmente, a 3 A. Además se colocó un resorte de tensión entre la base metálica y el brazo inferior, como se aprecia en la figura 3.1, con el fin de mantener tenso el alambre en todo momento. Estas medidas permitieron que el alambre se mantuviera en la misma posición estando el alambre calentado o no.

Uno de los problemas tuvo relación con la aparición del alambre en los interferogramas como información adicional y como elemento físico que distorsionaba los resultados alrededor de éste. Esto produjo cambios bruscos en la diferencia de fase e información con mucho ruido. Otro punto que ocasionó problemas fue la pérdida en algún instante de la simetría en los datos de los lados opuestos que se pudo deber a que el alambre no estaba perfectamente vertical y siempre estaba inclinado con respecto al eje axial pudiendo ser en su totalidad como en regiones de éste. Un tercer punto que generó problemas en la obtención de los interferogramas fueron las corrientes de aire y los cambios de temperatura

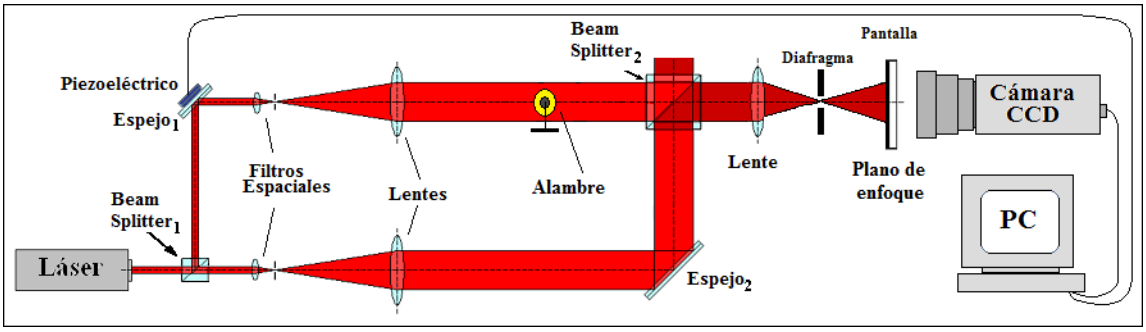


FIGURA 3.3. Esquema de la modificación al montaje experimental.

generados al interior del laboratorio, lo cual no permitía establecer la convección natural en el experimento.

Para neutralizar los flujos convectivos generados cerca del montaje experimental, se colocó un hule aislante que formó una especie de invernadero el cual redujo casi en su totalidad el problema. Para eliminar la difracción generada por el alambre se dispuso de una lente a la salida del segundo beam splitter. Además se dispuso de un diafragma instalado a la distancia focal de la lente cuya apertura se hizo coincidir aproximadamente al diámetro del haz láser. Esto generó una imagen sobre la pantalla de observación de la misma magnificación, pero se eliminó la difracción generada. Además se alineó el alambre por medio de un nivel empotrado a la mesa. Esto sin embargo resultó algo muy complejo y los resultados no se vieron modificados mayormente.

A pesar de los cambios realizados, el procedimiento para obtener los interferogramas a grandes rasgos no cambió en lo absoluto. Los cambios se pueden apreciar en el esquema de la figura 3.3.

3.2. Procesamiento de la información

3.2.1. Captura de interferogramas

La captura de las imágenes se dispuso tanto para su análisis por medio de Interferometría Digital Directa como para Interferometría por Moteado (ESPI), considerando que para la primera se realizaron dos grupos de capturas, uno con el alambre en condiciones

normales (no circula corriente por él) y otro con el alambre calentado (trabajando como resistencia). Para ESPI se dispuso solamente de un grupo de capturas, posterior a obtener una referencia con el alambre normal. Ambas técnicas ocuparon el phase stepping o corrimiento de fase para obtener la fase envuelta del grupo de interferogramas.

Se requirió entonces, un sistema que pudiera implementar el phase stepping, o sea, que controlara el corrimiento del espejo de tal forma de entregar los desplazamientos que proporcionarían los ángulos de fase necesarios, además de capturar la secuencia de interferogramas en cada paso del piezoeléctrico y que, además, realizara la resta digital en tiempo real de I_1 e I_2 para la técnica ESPI. Esto pudo ser posible a través de un software llamado LabVIEW de National Instruments.

Se utilizaron subrutinas diferentes para la captura de los interferogramas para las distintas técnicas. LabVIEW generaba la resta digital en tiempo real de los interferogramas para la técnica ESPI tomándose, como se explicó anteriormente, un interferograma de referencia I_1 con el alambre normal y el segundo I_2 mientras estaba siendo calentado. Las franjas generadas producto de la resta podían observarse a través de la pantalla, lo cual favorecía el momento propicio para la captura de los interferogramas.

El control del piezoeléctrico se realizó también por medio de LabVIEW, que a través de otro programa desarrollado en este software, permitió la calibración de este dispositivo entregando la diferencia de voltaje necesaria para realizar los corrimientos de fase. El voltaje que entregaba un ciclo completo de 2π estuvo entre 0.73 y 0.75 V, por lo que se suministraron voltajes de un cuarto de este valor para obtener los ángulos de fase múltiplos de $\pi/2$. Este corrimiento lo realizaba en un período muy corto de tiempo lo cual corresponde un gran beneficio, pues registra los datos en el instante requerido.

La captura de las imágenes se hace a través de un programa desarrollado en LabVIEW, que recoge la información de la cámara CCD en el momento en que se realiza cada corrimiento del espejo, capturando cada interferograma como un archivo de imagen BMP en escala de grises de 480x480 pixeles de tamaño, almacenándose posteriormente en la memoria del computador. Una imagen del software se puede apreciar en la figura 3.4.

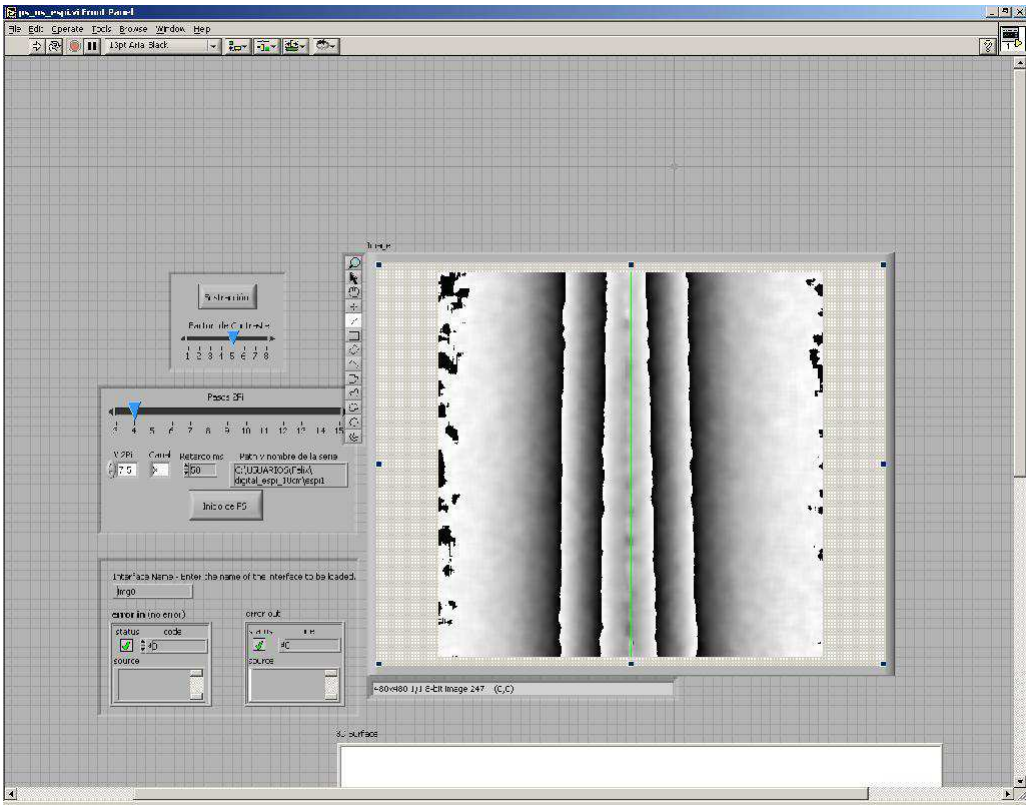


FIGURA 3.4. Captura de imagen del software LabVIEW.

En el anexo A se añadieron las secuencias de interferogramas capturadas por medio de LabVIEW a distintas alturas del alambre.

3.2.2. Procesamiento de imágenes

A continuación se dispuso de un programa desarrollado bajo la interfaz de Mathcad, de MathSoft Engineering & Education, el cual toma las 5 imágenes obtenidas por medio de LabVIEW para el cálculo de la fase envuelta. A estas imágenes se le aplica un filtro pasabajas con el objeto de mejorar la calidad de la información calculada, suavizando las franjas y disminuyendo el ruido existente. La fase envuelta obtenida por Mathcad se puede observar en la figura 3.5 que corresponde a una captura de imagen del software.

Es necesario, después de obtener la fase envuelta, aplicar algoritmos de desenvolvimiento debido a que la función $\arctan$ posee discontinuidades cuando la fase alcanza valores de 2π. Posterior a la aplicación de dichos algoritmos (implementados también en

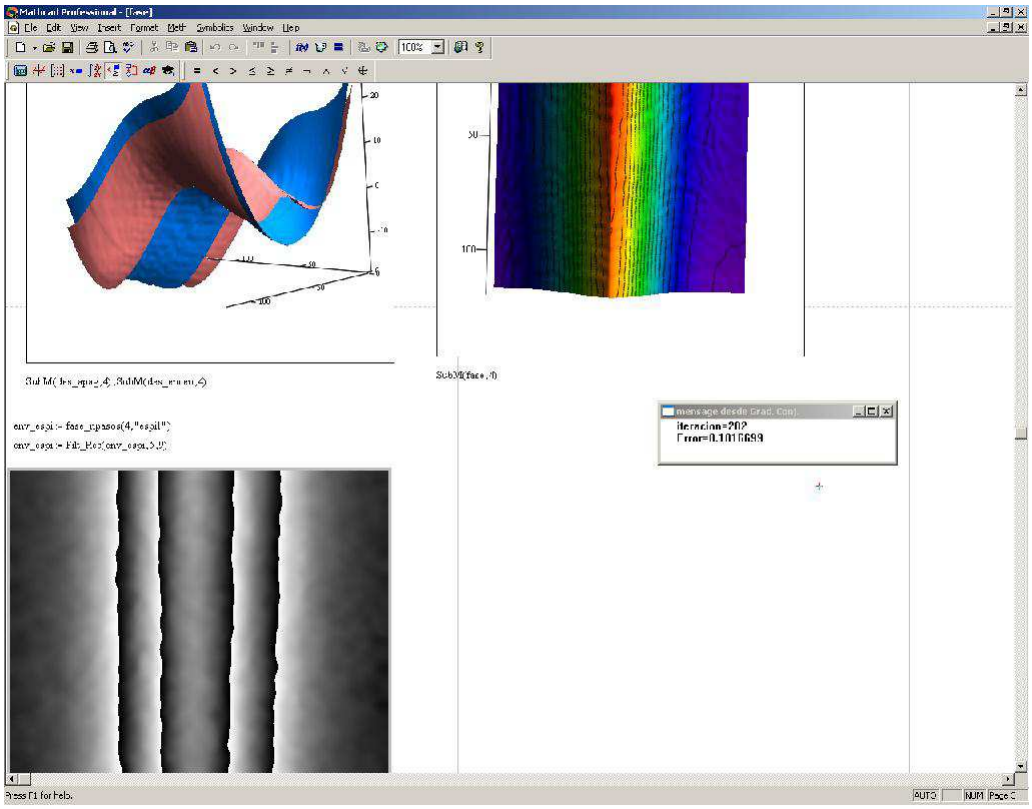


FIGURA 3.5. Captura de imagen del software Mathcad.

Mathcad) se obtiene la fase desenvuelta como una matriz de 480x480 datos, cada uno correspondiente a la información de la diferencia de la fase de cada pixel de los interferogramas analizados.

Una vez obtenida la fase, se eliminó la información del borde de la matriz (fueron eliminadas 9 columnas y 9 filas en cada extremo) debido a que los filtros direccionales pueden entregar información erronea en los extremos de los interferogramas debido a los algoritmos utilizados, esto también en virtud de la menor importancia de estos datos frente a los obtenidos cercanos al alambre. Finalmente se obtuvo una matriz de 462x462 que fue almacenada como un archivo de texto.

Tras obtener la información de la fase, es necesario saber qué distancia es la que se está abarcando físicamente, pues los datos obtenidos de la fase son discretos y corresponden a cada coordenada del interferograma. También se necesita esta información para saber cual

es el diámetro del alambre en el interferograma. Por esto es que se requiere la relación que existe entre la distancia de un pixel a otro en unidades métricas. Esta relación se consiguió colocando una regla sobre la pantalla difusora, o sea, en el punto focal del lente de la cámara y obtener una imagen de ella. Posteriormente se observó cuánto medía ese interferograma en milímetros dado por la regla. Finalmente esta distancia se dividió por el número de pixeles que posee un interferograma (que a priori se sabe son 480 pixeles). Así se obtiene cuanto mide cada pixel en milímetros, resultando ser este valor 0.059 $\frac{mm}{\text{pixel}}$. La imagen de la regla se observa en la figura B.1 del anexo B.

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES Y DISCUSIÓN

4.1. Procesamiento de la fase

Para el procesamiento de la diferencia de fase resultante se realizó un programa bajo la interfaz de Mathematica (de Wolfram Research), el cual permitía importar el archivo obtenido de Mathcad correspondiente a la fase desenvuelta y lo guardaba como una matriz con el formato tal que Mathematica pudiera trabajar con ella. Como se mencionó en la sección 3.2.2, la matriz resultante es de 462x462, donde las filas corresponden a la diferencia de la fase para una altura dada del alambre. La longitud que logra abarcar físicamente la imagen es, según el tamaño del paso mencionado en dicha sección, de 27.3 mm. Debido a que se trabajó con un objeto de fase axisimétrico cuyo índice de refracción no varía mayormente en el eje axial, la información de las columnas se promedió ya que una mayor cantidad de datos puede ser más engorroso y esto permitiría ver los datos con mayor claridad. Inicialmente se estableció como referencia la mitad del alambre ubicado a 15 cm de la base de éste, midiéndose esta altura con una huincha métrica. Esta altura sirvió para establecer el centro del interferograma. A continuación se describe el procedimiento y los resultados obtenidos a una altura de 15 cm desde la base del alambre.

Debido a que existe información en la fase que no será procesada correspondiente al alambre, se optó por realizar dos mediciones: En la primera se utilizó una máscara "virtual" implementada en Mathcad que reemplaza los valores de la fase en el alambre con ceros, esto elimina los datos del alambre y se realiza con la finalidad de que los datos cercanos a éste no se vieran modificados por la difracción generada en los bordes. La segunda medición se realizó sin la máscara. La fase en la primera medición queda discontinua debido a los ceros en el alambre, por lo que se realiza una interpolación mediante Mathcad para reestablecer la continuidad de la fase en la primera medición.

A través de la ecuación (2.87) se obtiene el orden de franjas donde cada valor entero corresponde a una franja oscura. El orden de franjas se graficó con respecto a los pixeles del interferograma. Como se puede ver en la figura 4.1 resulta indiferente el utilizar para

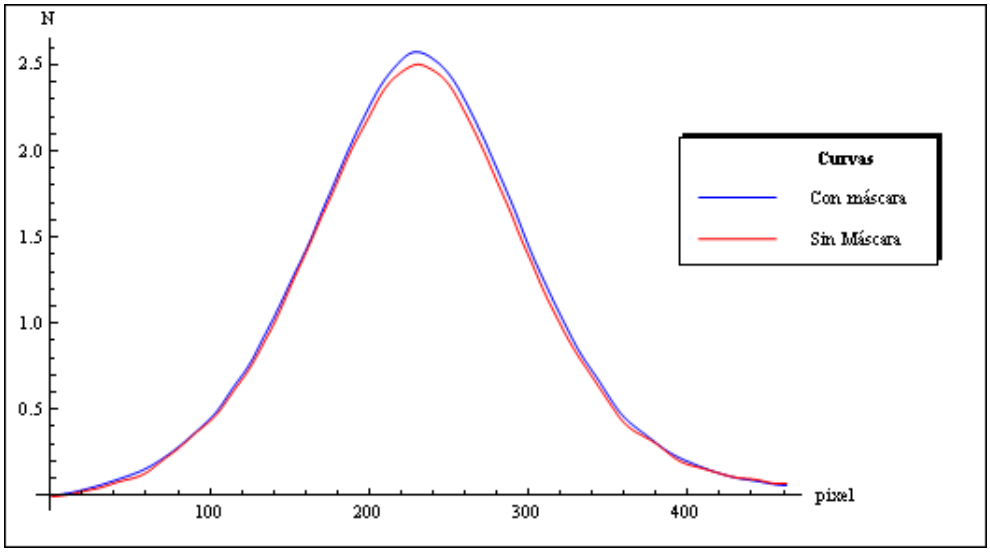


FIGURA 4.1. Orden de franjas para altura de 15 cm.

los siguientes análisis un método u otro. Se optó por la segunda medición (sin utilizar la máscara) por ser de más sencilla implementación y debido a que al utilizar la máscara se debía ser cuidadoso, pues el alambre al no estar perfectamente recto podría llevar a omitir información relevante. Además se debe ser precavido con del tamaño del paso que se esté considerando para poder discretizar de mejor manera la información en ese punto.

Una vez elegido el método de medición ya mencionado, los datos correspondientes al alambre fueron eliminados posteriormente para los siguientes análisis y esto se hizo en función al diámetro del alambre y del tamaño del paso obtenido en la sección 3.2.2. Otro punto importante es el hecho de que los perfiles a ambos lados del alambre para la fase son muy similares, lo que corresponde con la simetría axial que se tiene para el objeto de fase. Por lo que se promediaron los valores de la fase para ambos lados del alambre.

Posteriormente se procedió a calcular la derivada de la fase, ésta será usada para calcular el índice de refracción. En este punto se debe tener en consideración el hecho de que no se está trabajando con información que sea continua, de hecho se tiene una matriz con valores discretos. Por esto se obtuvo la derivada numérica realizando la resta entre los valores de la fase de dos puntos sucesivos y posteriormente dividiendo esta diferencia por el valor del paso entre cada punto. El gráfico de la derivada se muestra en la figura 4.2.

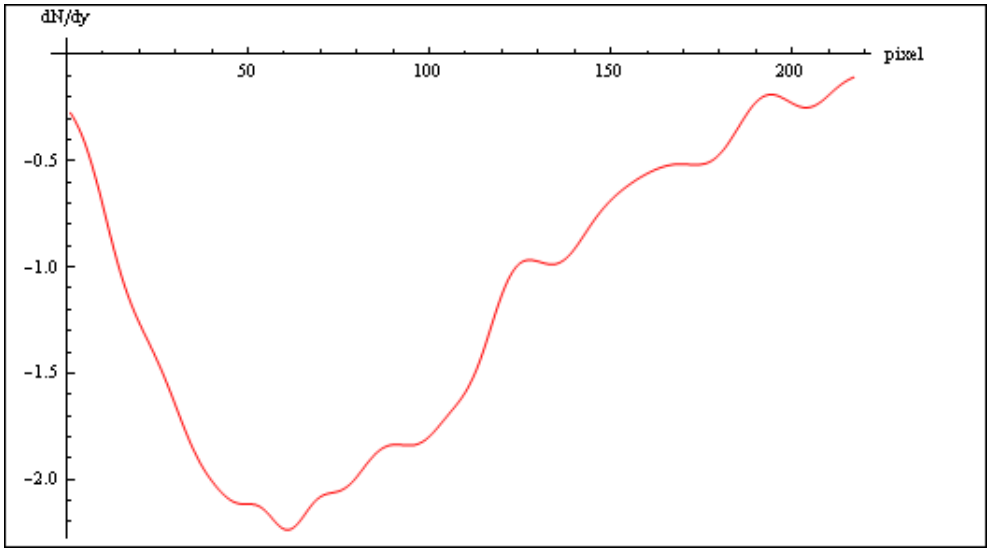


FIGURA 4.2. Derivada de la fase para altura de 15 cm.

Un detalle de este gráfico es que la diferencial muestra mucha limpieza en la información entregada, lo cual permite trabajar con ella directamente. En la tesis de López (2007, Anexo A) el autor sugiere utiliza un filtro *ksmooth* para filtrar la información de la derivada.

4.2. Análisis del índice de refracción y perfiles de temperatura

Habiéndose obtenido la diferencial de la fase se procede a mostrar los resultados obtenidos para el índice de refracción con respecto a la distancia radial del alambre. Para esto se usó la transformada inversa de Abel para elementos de simetría axial (ecuación (2.92)). La constante del índice de refracción para el aire a 26 ^{o}C (temperatura ambiente) es de $n_0 = 1.000274$ obtenido por la ecuación (2.93) correspondiente a la relación de Gladstone Dale (se utilizó como temperatura de referencia 0 ^{o}C = 273 K, a la cual el índice de refracción es igual a 1.00029). La longitud de onda corresponde a la del láser He-Cd usado en el experimento, siendo este valor 442 nm. Las mediciones realizadas fueron efectuadas por medio de las técnicas de interferometría digital e interferometría por moteado los cuales fueron graficados simultáneamente en la figura 4.3.

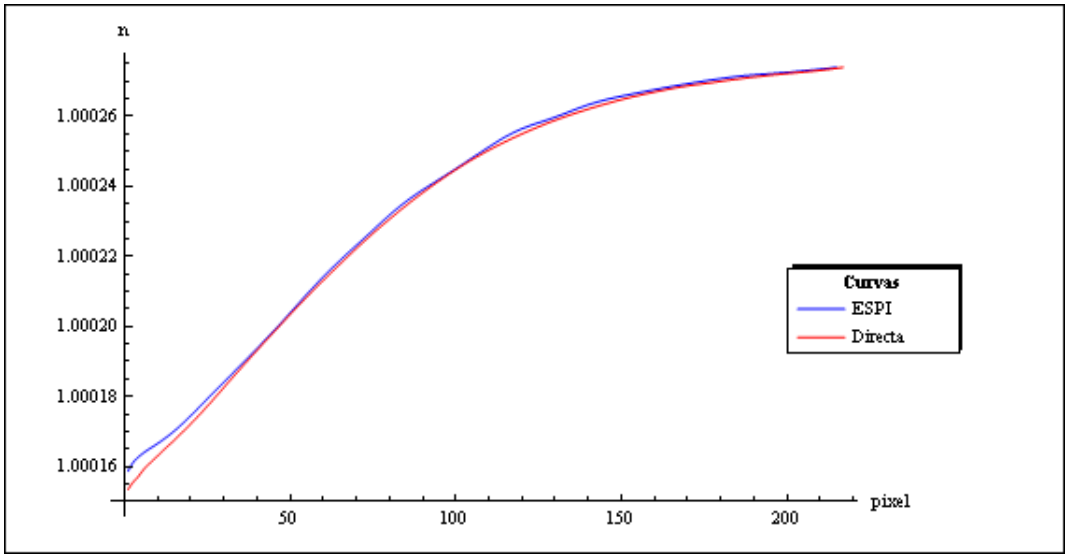


FIGURA 4.3. Indice de refracción para altura de 15 cm mediante Interferometría Directa y ESPI.

Como se puede apreciar, no existe mayor diferencia entre ambos resultados a excepción de los valores cercanos al alambre, pero no corresponde un gran cambio. Se aprecia que el índice de refracción tiende al valor del obtenido mediante Gladstone Dale para la temperatura ambiente.

Una vez conseguido el índice de refracción para el aire en la capa límite de temperatura se procede finalmente a la obtención del perfil de temperatura del aire por medio de la ecuación de Gladstone-Dale para gas ideal. El análisis se dividió en tres partes:

(i) Comparación entre Interferometría Digital Directa y ESPI.

(ii) Mediciones a distintas alturas dentro del mismo interferograma.

(iii) Mediciones a distintas alturas del alambre.

En primer lugar se compararon los perfiles obtenidos por ambas técnicas, las que a priori debieran ser muy similares porque a pesar que se mide de forma distinta, la diferencia de fase debiese ser la misma. Los resultados del los perfiles de temperatura se aprecian en la figura 4.4, donde r corresponde a la distancia en milímetros del centro del alambre, por lo que los datos comienzan en $r = 0.25$ mm y el eje de temperatura comienza a 24 ^{o}C para una mejor visualización de los perfiles. Los gráficos que se mostrarán a continuación (para

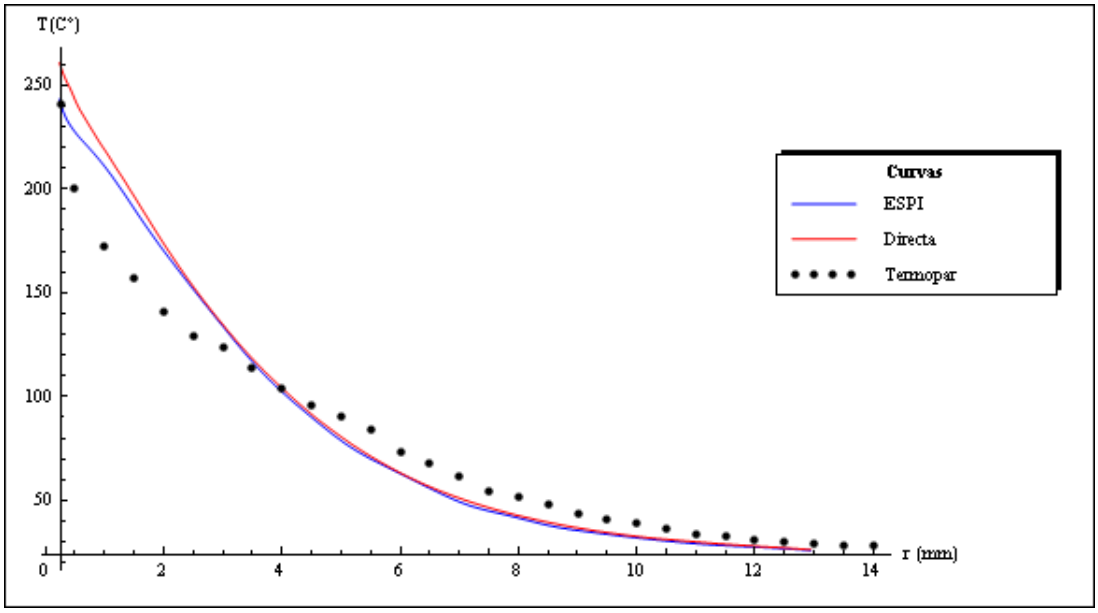


FIGURA 4.4. Perfil de temperatura por Interferometría Electrónica y por termopar a 15 cm.

las distintas alturas) entregan los valores obtenidos mediante la utilización del termopar, éstos datos se analizarán más adelante.

Como análisis general se puede establecer que el perfil de temperatura muestra que la temperatura desciende, tomando una forma exponencial en todo el rango hasta alcanzar los 12.5 mm donde se estima la temperatura llega a la ambiente. Esta distancia correspondería a la longitud de la capa límite local de temperatura. Los perfiles por ambas técnicas son muy similares, lo cual corresponde a lo que se esperaba en un principio. Las diferencias se hallan con los datos cercanos al alambre. Esto puede deberse a que los cambios en los flujos convectivos (que eran leves) podían ser percibidos más sutílmente por la técnica digital que por ESPI debido a la calidad de los interferogramas.

Posteriormente se analizó como se comporta el perfil de temperatura a distintas alturas dentro de un mismo interferograma, o sea, sin promediar todos los valores de las columnas de la imagen. Debido a que la longitud comprendida por un interferograma es de 2.73 cm y además se realizaron entre 5 y 7 mediciones, cada perfil de temperatura correspondía aproximadamente a 4 mm del interferograma.

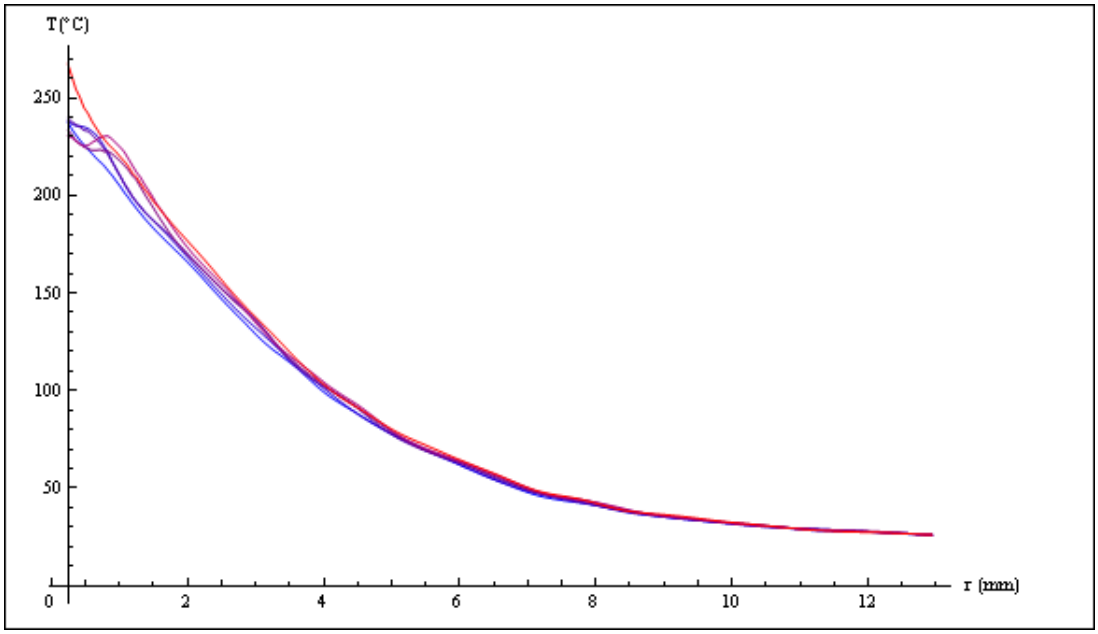


FIGURA 4.5. Perfil de temperatura para varias alturas cercanas a 15 cm por ESPI.

Como se aprecia en la gráfica de la figuras 4.5 y 4.6, los perfiles son similares uno con respecto al otro y todos convergen a la misma distancia en cuanto a alcanzar la temperatura ambiente. Las temperaturas iniciales o cercanas al alambre son distintas y fluctúan con respecto al promedio, esto indicaría que las temperaturas muy cercanas al alambre no se pueden estimar correctamente. Se puede observar también que esta fluctuación es mayor para la técnica ESPI debido a que los datos cercanos al alambre poseen mucho ruido, fenómeno que se vió atenuado cuando se promediaron los valores.

Los análisis también se llevaron a cabo a lo largo de todo el alambre, capturándose interferogramas a distintas alturas de éste y procediendo de igual forma como se ha establecido para los interferogramas capturados en la mitad del cilindro. Los gráficos se muestran en las figuras 4.7, 4.8 y 4.9 para alturas de 10, 5 y 1 cm de la base del alambre respectivamente. Estas alturas se midieron de la misma forma como se efectuó para la altura de 15 cm.

Viendo los perfiles de temperatura, éstos alcanzan la temperatura ambiente a una distancia menor a la lograda en la mitad del cilindro y esta distancia va disminuyendo en

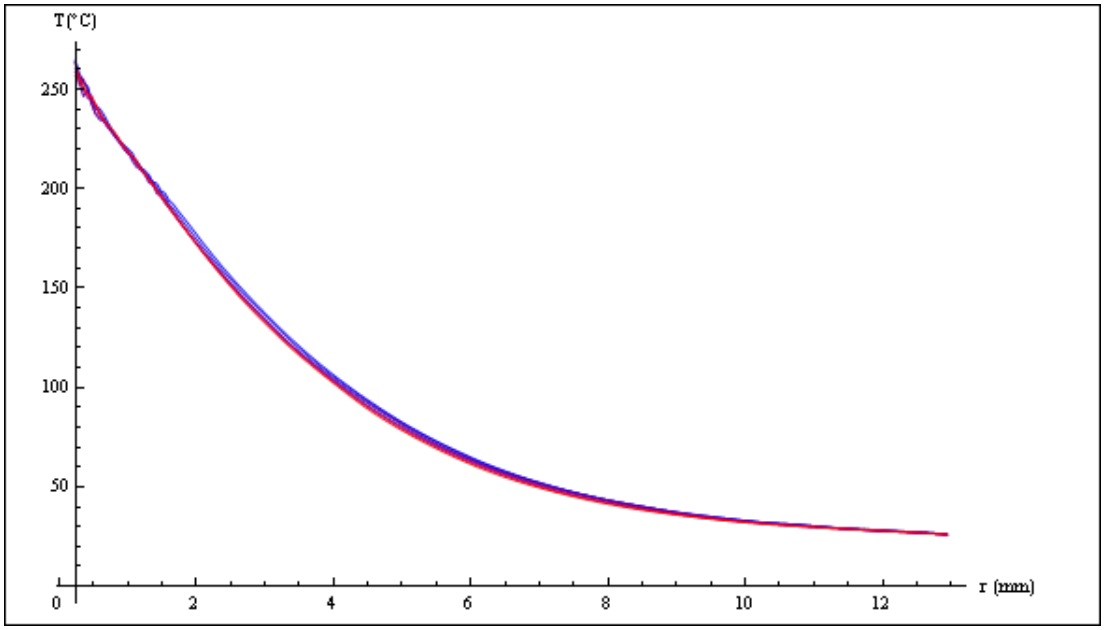


FIGURA 4.6. Perfil de temperatura para varias alturas cercanas a 15 cm por Interferometra Directa.

la medida que nos acercamos más al extremo del alambre, según la forma del perfil de capa límite. Los perfiles de temperatura para distintas alturas también son similares en su forma. Otra particularidad que se logra apreciar es que las temperaturas cercanas al alambre también descienden en la medida en que nos acercamos al extremo del cilindro. La temperatura cercana al alambre a una distancia de 15 cm es de aproximadamente 240 ^{o}C, mientras que a una altura de 1 cm la temperatura desciende a 150 ^{o}C. Esto puede señalar que el alambre no adquiere su carácter isotérmico a lo largo del éste. Si se coloca atención en las distancias a las que la temperatura alcanza la ambiente a distintas alturas, esto podría indicar un perfil de capa límite a lo largo de el alambre como el que se esperaba obtener en la sección 2.1.3 y se muestra en la figura 2.2. Si además observamos los interferogramas capturados en el extremo del alambre bajo la técnica ESPI (anexo A, figura A.4), las franjas generadas siguen la forma del perfil de capa límite de temperatura que se sugiere para dar paso a la solución por similaridad acá presentada.

Si se observa la figura 4.9, resultaría interesante entonces estimar la temperatura sobre la base del alambre, con el fin de avalar los supuestos formulados por Lee et al.

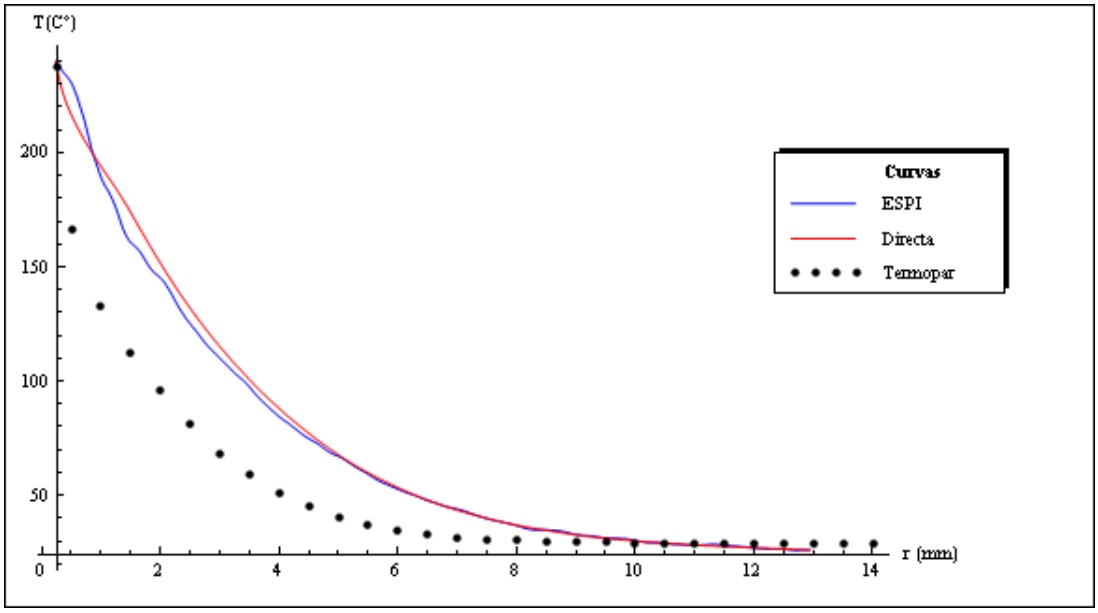


FIGURA 4.7. Perfil de temperatura por Interferometría Electrónica y por termopar a 10 cm.

y Minkowycz and Sparrow con respecto a las condiciones de borde en este punto. Sin embargo no se puede obtener un valor de la temperatura para $z = 0$ experimentalmente, debido a que el alambre está siendo sujeto por una placa de cobre con el fin de poder conducir la corriente al alambre como se muestra en la figura 3.1. Esta placa se calienta también y genera calor cercano a la base del alambre, lo cual altera las condiciones de borde supuestas para esta posición.

4.3. Comparación por termopar

Se establece como forma de comparación las mediciones efectuadas con un termopar a las distintas alturas del alambre. Una vez realizada cada medición a distintas alturas, como se explicó anteriormente, y antes de cambiar la ubicación del alambre, se realizó una medición de la temperatura por medio de un termopar. Se utilizó un termopar tipo K cuyo tamaño era de 0.7 mm en su extremo, el cual se conectó a un multímetro que desplegaba la información de la temperatura en un extremo del termopar. Este multímetro tenía una sensibilidad de décimas de grado.

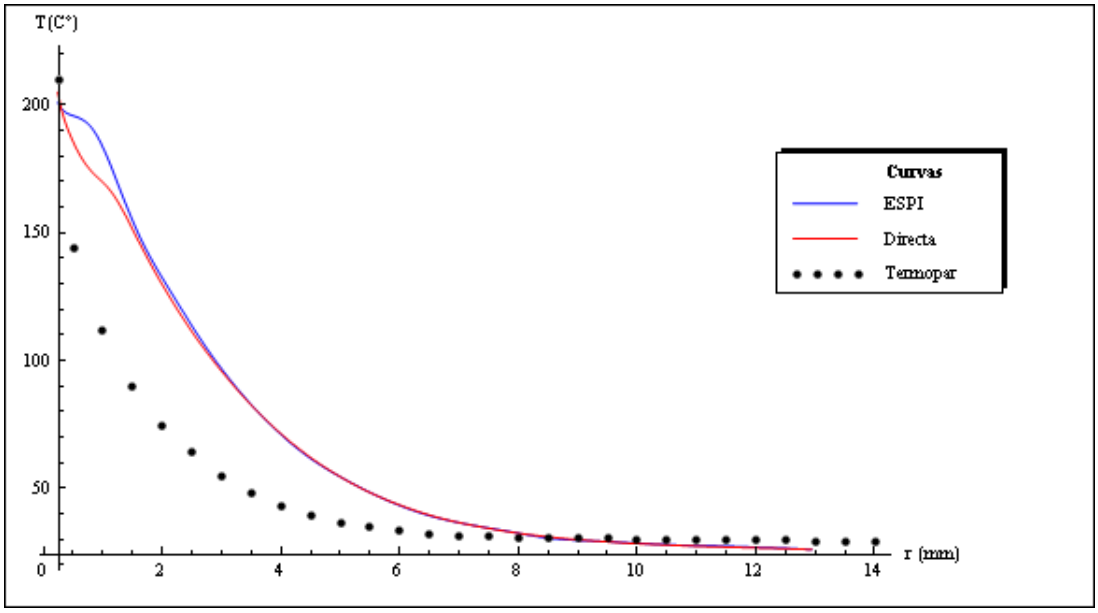


FIGURA 4.8. Perfil de temperatura por Interferometría Electrónica y por termopar a 5 cm.

El termopar se montó sobre un vástago que se encontraba empotrado a una base móvil, la que se podía desplazar en un eje (el radial del alambre) gracias a un motor que entregaba pasos de hasta 0.25 mm. La medición con el termopar se hizo desde la pared del alambre, luego avanzando 0.25 mm (a una distancia de 0.5 mm del eje axial del alambre) y a partir de ahí cada 0.5 mm hasta que la temperatura alcanzara la ambiente. Este registro se realizó por simple inspección y los datos fueron guardados en una planilla Excel registrándose los peaks y los valles de la temperatura en un punto durante un tiempo y luego estos valores se promediaban para cada punto.

Además se midió la temperatura de la pared del alambre por medio de un "visor infrarrojo", cuya particularidad era que podía ajustarse a un estrecho margen de visión, lo cual permitía medir la temperatura de la pared del alambre a pesar de lo delgado de su diámetro. Este dispositivo podía ser conectado a la computadora por medio de una entrada USB y de ahí obtener las imágenes en tiempo real de lo que el visor registraba, como se muestra en la figura 4.11. En la figura 4.10 se aprecia los 2 dispositivos instalados en el montaje experimental para estimar la temperatura. La temperatura máxima para la pared del cilindro que indicó el visor infrarrojo fue de 210 ^{o}C y se registró en el centro del alambre.

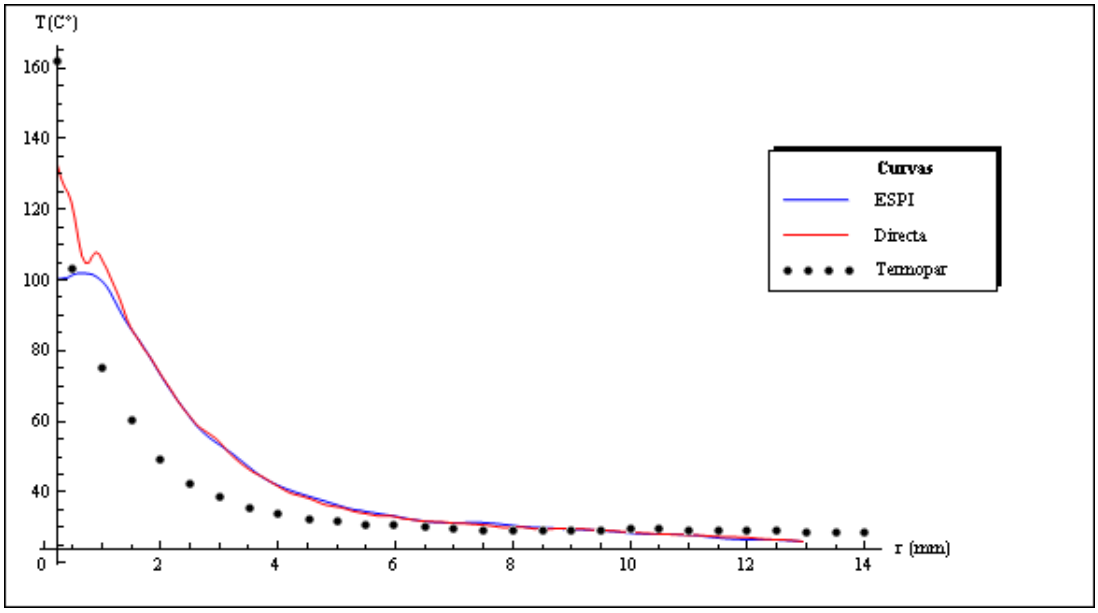


FIGURA 4.9. Perfil de temperatura por Interferometría Electrónica y por termopar a 1 cm.

A pesar de que el visor podía entregar la temperatura para el alambre, esta puede no ser lo suficientemente correcta, debido a que para encontrar el valor estimado la cámara del visor debía ser enfocado sobre el alambre, lo cual resultó complicado debido a lo delgado del alambre. Las mediciones hechas a través del termopar se tabularon y se ingresaron como información a Mathematica con el fin de poder compararla con las gráficas anteriormente obtenidas. Los resultados se muestran en la figura 4.4 hasta 4.9.

Como se aprecia en los gráficos, los perfiles obtenidos con el termopar son similares a los obtenidos mediante interferometría. La temperatura ambiente alcanzada por el termopar es algo superior (no más de 2 ^{o}C) a la obtenida por interferometría. Esto se debe a que a diferencia de las mediciones realizadas por el método interferométrico, donde la captura de los interferogramas se realiza de forma instantánea una vez el alambre logre una temperatura estable y las franjas se estabilicen llegando a un estado estacionario, la medición hecha por medio del termopar tomó mucho más tiempo debido a que obtener un dato requería de la estabilidad y el rango de valores que entregaba el termopar, lo cual para posiciones cercanas al alambre era muy variable la diferencia entre los peaks y los valles (esto se visualizó en los datos registrados en la planilla Excel) y en vista de que el arreglo

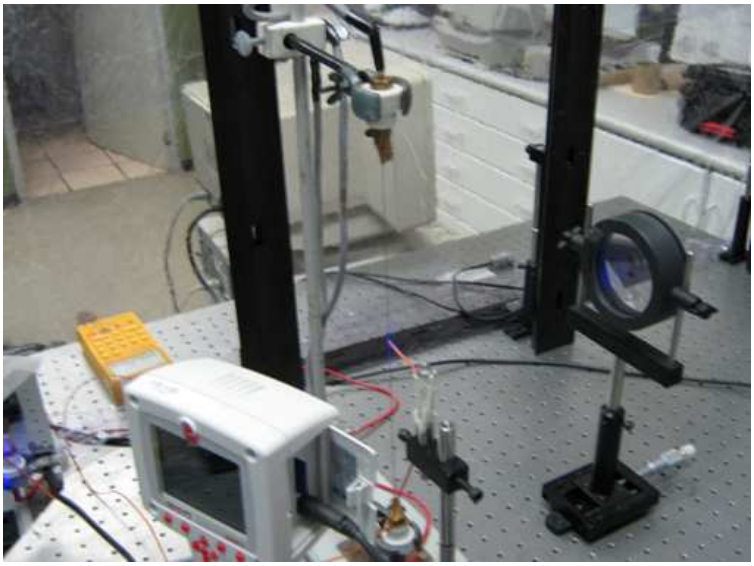


FIGURA 4.10. Visor infrarrojo y termopar instalados en el arreglo experimental.

se hallaba cubierto de hule, el cual como se mencionó anteriormente mantenía la permeabilidad por flujos externos, se generó un aumento leve de temperatura al retener calor en el interior.

Los perfiles de temperatura por interferometría, a pesar de ser parecidos no consiguen los valores exactos a los del termopar. Muy cercano al alambre se observa que el termopar adquiere valores muy altos en la temperatura, pero decae fuertemente para todas las alturas del alambre. Los gradientes de temperatura obtenidos por interferometría tienen cambios menos bruscos.

Cabe señalar también que el termopar registra un gradiente de temperatura en su sensor, indicando como valor un promedio de este gradiente representado en la mitad del sensor. Las distancias indicadas en los gráficos del termopar no corresponden a la mitad del sensor según como se ubicó este dispositivo, sino que al extremo de éste.

4.4. Comparación con solución numérica

Finalmente los perfiles de temperatura obtenidos mediante la interferometría electrónica (interferometría ESPI y directa) son comparados con los resultados obtenidos en el

FIGURA 4.11. Cámara del visor infrarrojo.

trabajo de Minkowycz and Sparrow realizado en 1974, cuyos valores se presentan en un gráfico que muestra la temperatura adimensional θ con respecto a la variable de seudo-similaridad η. Las curvas obtenidas fueron para $\xi = 0$, 1, 2, 5 y 10.

Para realizar esta comparación en primer lugar se debe obtener el valor de ξ, variable adimensional que depende de la altura del cilindro que correspondería a una altura de 15 cm (la mitad del cilindro). Minkowycz and Sparrow la obtienen por medio de la fórmula

$$\xi(z) = \frac{2z}{r_0}\left(\frac{\mathrm{Gr}_z}{4}\right)^{-1/4}, \tag{4.1}$$

donde el número de Grashof se define como

$$\mathrm{Gr}_z = \frac{g\beta(T_W - T_\infty)}{\nu^2} z^3. \tag{4.2}$$

Los valores de ν y de α, necesarios para obtener el número de Prandtl como se vio en la sección 2.1.2, son sensibles a la temperatura y se obtuvieron de las tablas presentadas en Bejan (1995, apéndice D) ingresándose por un promedio entre $T_W = 240$ °C y $T_\infty = 26$ °C. Entonces, para $T_f = 133$ °C, $\nu = 0.26825$ $\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{s}}$ y $\alpha = 0.40157$ $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{cm}^2}$. El valor de β

para un gas ideal se puede aproximar a $\beta \approx \frac{1}{T}$, donde T es la temperatura absoluta, por ende $\beta = \frac{1}{133+273} = 2.463 \cdot 10^{-3}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$. Cabe recordar que el valor de ξ será un valor fijo para la altura dada del alambre donde se medirá el perfil de temperatura. Los resultados se aprecian en la siguiente tabla.

TABLA 4.1. Valores de ξ para distintas alturas z.

Altura z (cm)	Variable ξ
0	0
$4.39 \cdot 10^{-5}$	1
$7.32 \cdot 10^{-4}$	2
$2.74 \cdot 10^{-2}$	5
$4.38 \cdot 10^{-1}$	10
1	12.28
5	18.37
10	21.85
15	24.18

Luego se procedió a obtener el resultado del sistema de ecuaciones propuesto en el trabajo de Minkowycz and Sparrow para las variables f y θ, donde θ corresponde a la temperatura adimensional, tal como se vio en la sección 2.1.3

$$(1+\eta\xi)f_{\eta\eta\eta} + (\xi+3f)f_{\eta\eta} - 2{f_\eta}^2 + \theta = 0 \tag{4.3}$$

$$(1+\eta\xi)\theta_{\eta\eta} + (\xi+3\mathrm{Pr}f)\theta_\eta = 0 \tag{4.4}$$

con las condiciones de borde

$$f = 0, \qquad f_\eta = 0, \qquad \theta = 1, \qquad \text{en} \qquad \eta = 0 \tag{4.5}$$

$$f_\eta \to 0, \qquad \theta \to 0 \qquad \text{en} \qquad \eta \to \infty. \tag{4.6}$$

En este caso, θ sólo depende de la variable de seudo-similaridad η, ya que ξ es una constante pues se está resolviendo para una altura dada, lo cual simplifica los resultados.

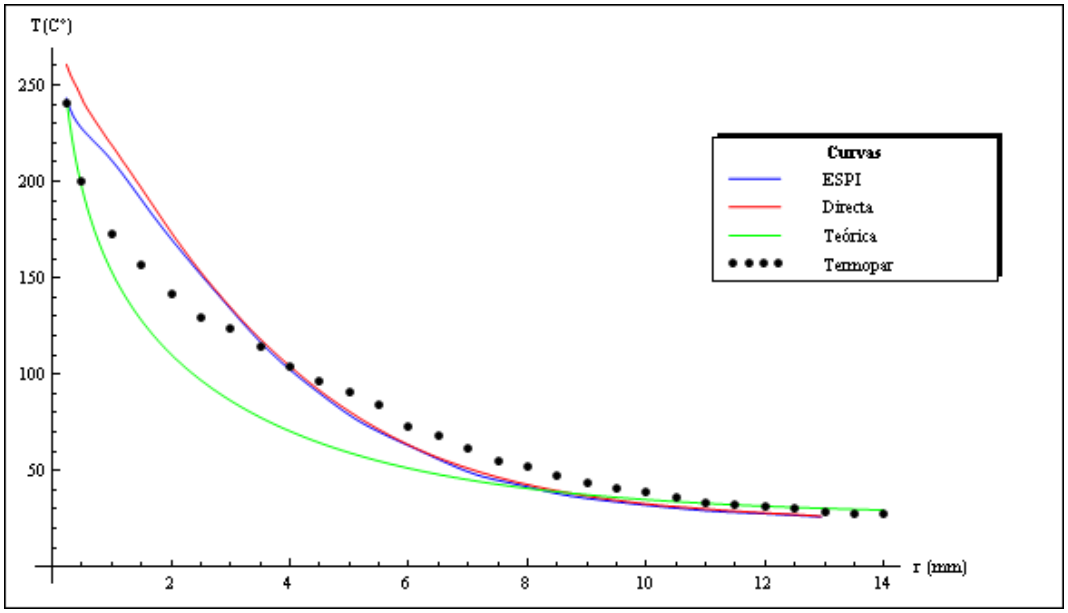


FIGURA 4.12. Perfil de temperatura por Interferometría, por termopar y por teoría a 15 cm.

Finalmente se obtienen el perfil de temperatura teórica a partir de la ecuación (2.17), despejando T y expresando la temperatura $\theta(\eta)$ en función del radio mediante la ecuación.

$$\eta(r,z) = \frac{1}{2}\frac{r^2 - r_0^2}{r_0 z}\left(\frac{\mathrm{Gr}_z}{4}\right)^{1/4}. \tag{4.7}$$

El perfil de temperatura teórico obtenido se graficó junto con los perfiles logrados mediante interferometría y termopar, los que se muestran en la figura 4.12.

Como se aprecia, la temperatura teórica es inferior tanto a los perfiles obtenido por interferometría como al logrado con el uso del termopar. Esto se puede explicar debido a que la teoría supone un estado estacionario del aire, siendo que la convección natural es muy difícil de obtener. Para mostrar este punto, se graficaron los perfiles de velocidad del aire en la capa límite a distintas alturas del alambre a partir del sistema de ecuaciones presentado en (4.3) y (4.4).

En la figura 4.13 se aprecia que la velocidad máxima es de 0.27 $\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{s}}$, en este caso un eventual flujo ascendente de aire desde la base del alambre elevaría las temperaturas cercanas al alambre, lo que explicaría los resultados obtenidos.

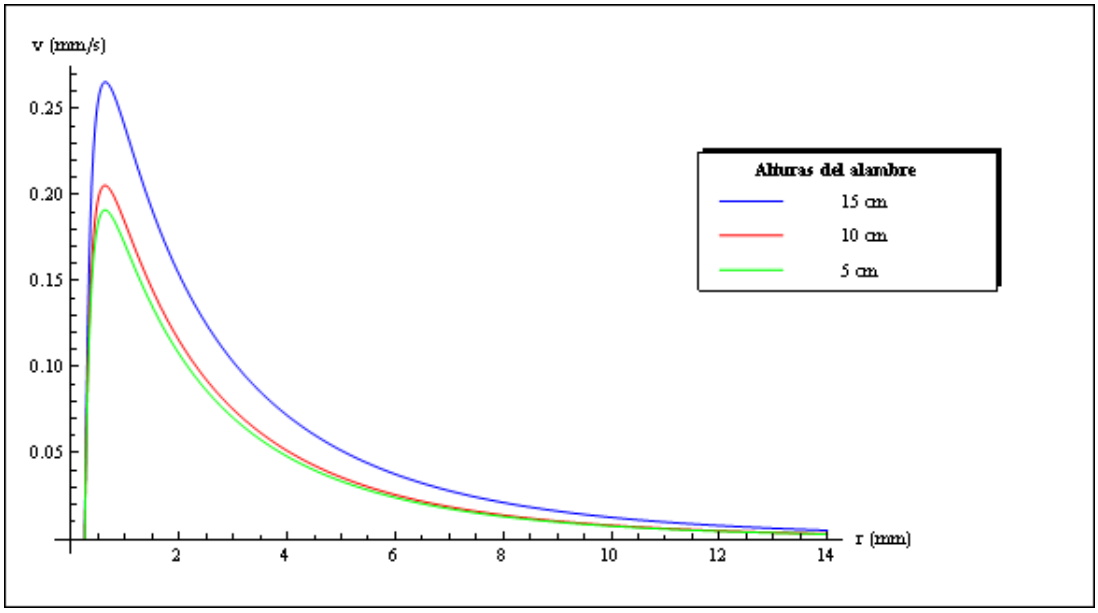


FIGURA 4.13. Perfil de velocidades a distintas alturas.

Una de las características innovadoras de este trabajo, además del hecho de que no existen trabajos publicados donde se halla medido el gradiente de temperatura de un cilindro calentado bajo convección natural por métodos interferométricos; fue el hecho de realizar el análisis del comportamiento de un elemento axisimétrico no continuo, es decir, existiendo un objeto sólido de por medio sobre la información del aire que será analizada. En anteriores trabajos donde se había hecho el estudio de elementos de fase axisimétricos, como el caso de llamas de premezcla o flujos de agua (Moreno, 1996; Varas, 2003; López, 2007), el medio analizado era la llama completa, sin interferencias de ningún tipo. En este trabajo el hecho de contar con el cilindro calentado no fue menor pues este objeto sólido no debiese ser incluido dentro de los análisis de la fase, además su inclusión generó, debido a su geometría, difracción en el límite de la pared del alambre, la cual entregaba resultados erroneos para estimar la temperatura en el límite entre el aire y el alambre. La estimación de los perfiles de temperatura resultaron cercanos a lo obtenido mediante un termopar, lo que resulta un gran beneficio para la implementación de los métodos interferométricos en la medición del gradiente de temperatura para objetos con simetría axial y como método de corroboración de modelos teóricos que pretendan obtener estos valores.

5. CONCLUSIONES

- Como conclusión se puede establecer que los métodos interferométricos utilizados para la medición del perfil de temperatura de un alambre calentado bajo convección natural, con respecto a las mediciones realizadas con termopar y su posterior comparación, pueden ser utilizados con este fin, pero sobreestiman la temperatura de la capa límite.
- La modificación del arreglo experimental con el fin de estabilizar las franjas resultó una buena medida ya que se pudo percibir la gran sensibilidad que poseía el sistema debido a cualquier flujo de corriente, por muy leve que esta fuera. Esto ayudó a la buena recopilación de los datos.
- Los resultados obtenidos para la diferencia de fase no necesitaron ser trabajados mayormente a posteriori, puesto que la calidad de las franjas analizadas era muy buena, obteniéndose buen contraste entre los peak y los valles como se observa en los interferogramas. El filtro pasabajas fue suficiente para poder eliminar el poco ruido que se obtuvo. Esto es bueno puesto que abusar del filtro para mejorar los resultados puede ser perjudicial ya que puede distorsionar los resultados reales.
- Una de las características innovadoras de este trabajo fue el hecho de realizar el análisis del comportamiento de un elemento axisimétrico no continuo, es decir, existiendo un objeto sólido de por medio sobre la información del aire que será analizada.
- Se realizó un análisis de si se debiese eliminar lo más posible el efecto de la difracción o intentar no tomar los datos del alambre. El fenómeno pudo ser controlado por medio de la lente colocada a la salida de la pantalla difusora, más que por la máscara virtual implementada en Mathcad.
- Se analizó la diferencia de utilizar para el análisis de phase stepping interferometría directa o interferometría de moteado (ESPI). Los resultados fueron muy similares para ambas técnicas, generándose leves diferencias en los datos cercanos

al alambre. Para llevar a cabo cada una de estas técnicas se debe configurar el programa sobre el software de tratamiento de imágenes (en este caso LabVIEW) de diferente forma.

- La comparación de los resultados con las soluciones numéricas establece que el rango de los valores obtenidos por medios interferométricos con respecto a los perfiles de temperatura es más alto a la solución teórica producto de que cualquier corriente de aire, por muy leve que sea ésta, haría elevar las temperaturas alrededor del alambre.
- Para futuros trabajos es interesante realizar las mediciones con distintos diámetros de alambre y en medios distintos (agua o algún otro fluido). Esto pues el modelo matemático puede modelar estas situaciones modificándose para el caso del medio en el número de Prandlt. También sería recomendable realizar estos cálculos como anteriormente fueron hechos por Torrejón y establecer la validez de ellos.

BIBLIOGRAFIA

Bejan, A. (1995). *Convection Heat Transfer*. Wiley-Interscience.

Bracewell, R. N. (1977). *The Fourier Transform and its Applications*. New York: McGraw-Hill.

Gabriel, J. L. (2008). *Calibración de Piezoeléctrico para Interferometría por Corrimiento de Fase*. Departamento de Ingeniería Mecánica y Metalúrgica, Universidad Católica de Chile. Memoria de Título.

Gasvik, K. J. (2002). *Optical Metrology*. John Wiley and Sons.

Lee, H. R., Chen, T. S., & Armaly, B. F. (1988). Natural convection along slender vertical cylinders with variable surface temperature. *Journal of Heat Transfer*(110), 103–108.

Lira, I. H. (2007). Introducing scale analysis by way of a pendulum. *European journal of physics*, *v. 28*, 289–299.

Lira, I. H. (2008). Scales of free convection around a vertical cylinder. *European journal of physics*, *v. 29*, 1301–1306.

López, J. M. (2007). *Medición Interferométrica de Temperatura de Llama Axisimétrica*. Departamento de Ingeniería Mecánica y Metalúrgica, Universidad Católica de Chile. Tesis de Magíster.

Malacara, D., Servín, M., & Malacara, Z. (2005). *Interferogram Analysis for Optical Testing* (Second ed.). Taylor and Francis.

Minkowycz, W., & Sparrow, E. (1974). Local nonsimilar solutions for natural convection on a vertical cylinder. *Journal of Heat Transfer*(96), 178–183.

Moreno, L. E. (1996). *Interferometría Digital Aplicada a la Medición de Índice de Refracción en Medios Transparentes*. Departamento de Ingeniería Mecánica y Metalúrgica, Universidad Católica de Chile. Tesis de Magíster.

Posner, J. D., & Dunn-Rankin, D. (2003). Temperature field measurement of small, nonpremixed flames with use of an Abel inversion of holographic interferograms. *Applied Optics*, *v. 42*(n. 6), 952–959.

Torrejón, I. E. (2007). *Convección Natural Alrededor de un Cilindro Vertical Delgado Isotérmico*. Departamento de Ingeniería Mecánica y Metalúrgica, Universidad Católica de Chile. Tesis de Magíster.

Varas, M. A. (2003). *Medición de Temperatura de Llama Laminar mediante Interferometría Digital Láser*. Departamento de Ingeniería Mecánica y Metalúrgica, Universidad Católica de Chile. Memoria de Título.

Vest, C. M. (1979). *Holographic Interferometry*. John Wiley and Sons.

Xiao, X., Puri, I. K., & Agrawal, A. K. (2002). Temperature measurements in steady axisymmetric partially premixed flames by use of rainbow schlieren deflectometry. *Applied Optics*, *v. 40*(n. 10), 1922–1928.

ANEXO A. INTERFEROGRAMAS A DISTINTAS ALTURAS MEDIANTE ESPI

En esta sección se muestran los interferogramas capturados a distintas alturas del alambre mediante la técnica ESPI.

Los interferogramas necesarios para obtener la fase mediante phase stepping se consiguieron físicamente por medio del actuador de piezoeléctrico, dispositivo que genera el desfase en el espejo adherido. Como se utilizó el algoritmo de 4 pasos, se capturaron 5 interferogramas, siendo el primer interferograma mostrado en la secuencia con un ángulo de fase de $\alpha_1 = 0$, el segundo de $\alpha_2 = \pi/2$, y asi hasta $\alpha_5 = 2\pi$ debiendo ser éste último muy similar al primer interferograma al recorrer el ciclo de 2π. La captura de las imágenes se hace a través de LabVIEW, que recoge la información de la cámara CCD en el momento en que se realiza cada corrimiento del espejo.

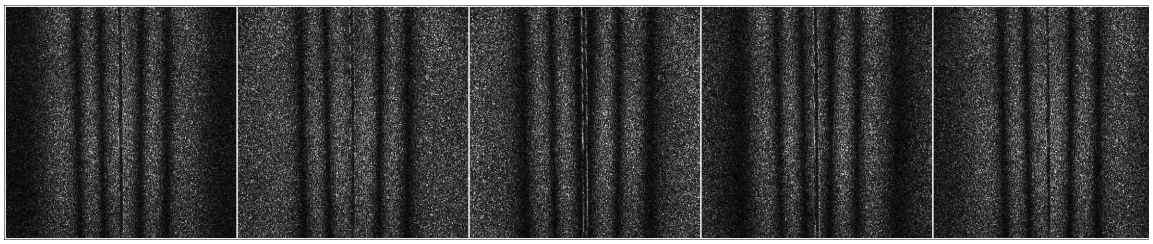


FIGURA A.1. Secuencia de interferogramas a 15 cm.

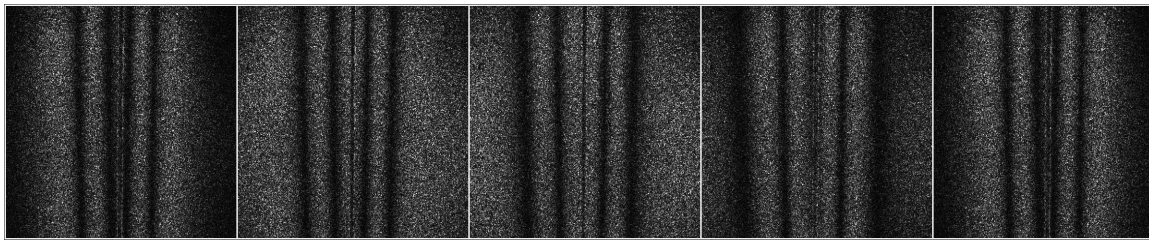


FIGURA A.2. Secuencia de interferogramas a 10 cm.

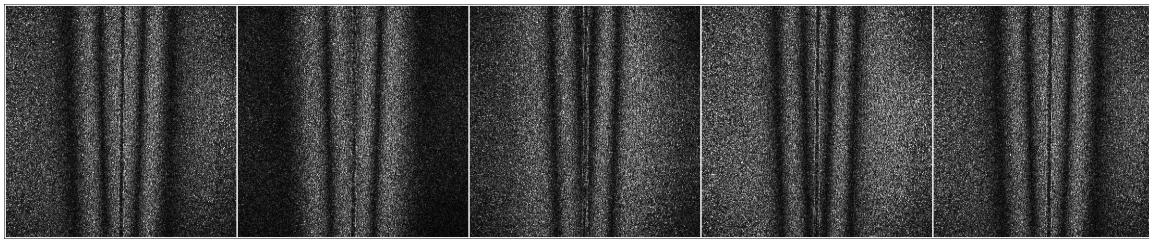


FIGURA A.3. Secuencia de interferogramas a 5 cm.

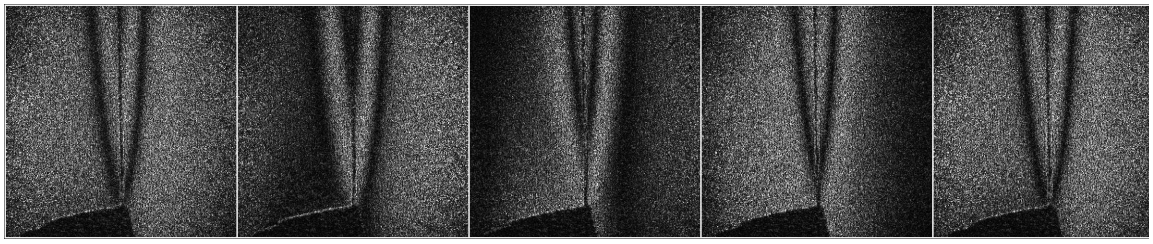


FIGURA A.4. Secuencia de interferogramas a 1 cm.

ANEXO B. REGLA UTILIZADA PARA CALCULAR LA ESCALA

A continuación se muestra una captura de la regla utilizada para estimar el escalamiento de los interferogramas.

Esto permite registrar la relación que existe entre la distancia de un pixel a otro en unidades métricas. Con esto se obtiene cuanto mide cada pixel en milímetros, resultando ser este valor 0.059 $\frac{mm}{\text{pixel}}$ como se indica en la sección 3.2.2.

FIGURA B.1. Regla utilizada para calcular la escala.