



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE  
ESCUELA DE INGENIERÍA

**PROGRAMACIÓN DE ITINERARIOS DE  
LÍNEAS AÉREAS BAJO INCERTIDUMBRE  
EN LOS TIEMPOS DE OPERACIÓN  
MEDIANTE OPTIMIZACIÓN ROBUSTA**

**MIGUEL ÁNGEL ANDRÉS GONZÁLEZ VELIS**

Tesis para optar al grado de  
Magister en Ciencias de la Ingeniería

Profesor Guía:  
JORGE RAFAEL VERA A.

Santiago de Chile, Agosto 2012

© MMXII, MIGUEL ÁNGEL ANDRÉS GONZÁLEZ VELIS



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE  
ESCUELA DE INGENIERÍA

**PROGRAMACIÓN DE ITINERARIOS DE  
LÍNEAS AÉREAS BAJO INCERTIDUMBRE  
EN LOS TIEMPOS DE OPERACIÓN  
MEDIANTE OPTIMIZACIÓN ROBUSTA**

**MIGUEL ÁNGEL ANDRÉS GONZÁLEZ VELIS**

Miembros del Comité:

JORGE RAFAEL VERA A.

SERGIO MATURANA V.

VICTOR ALBORNOZ S.

MIGUEL FELIX RÍOS O.

Tesis presentada para optar al grado de  
Magister en Ciencias de la Ingeniería

Santiago de Chile, Agosto 2012

© MMXII, MIGUEL ÁNGEL ANDRÉS GONZÁLEZ VELIS

*Dedicado*  
*a mis Padres,*  
MIGUEL y JACQUELINE,  
*y mis hermanos,*  
BENJAMÍN Y CAMILO.

*"Since most important decision problems almost always involve some uncertainties (...),  
I suspect that in the future any (good) decision maker confronted with an important  
decision will only let himself be guided by solutions generated by stochastic optimization  
models (that take into account these uncertainties)."*

ROGER J.B. WETS

## AGRADECIMIENTOS

Son muchas las personas e instituciones a las que quiero agradecer por la realización de este trabajo, ya que sin su apoyo económico, académico y motivacional esta Tesis no sería posible.

En primer lugar, quiero agradecer al Profesor Jorge Vera por haberme dado la oportunidad de trabajar con él en un problema real dentro de la Ingeniería, en que la incertidumbre incentiva la creación de nuevos y mejores sistemas de apoyo a la toma de decisiones. La incorporación de la variabilidad dentro de los problemas de Optimización y la matemática detrás de la forma de resolverlos son una herramienta que podré aplicar en muchas industrias, por la que siempre estaré agradecido. A través del Profesor Vera, agradezco el apoyo económico de FONDECYT, el cual a través del proyecto 1100412, esta investigación pudo llevarse a cabo.

Mis agradecimientos van también para Sergio Velis, quién me presentó con los funcionarios de la Gerencia de Soporte de Operaciones de la línea aérea más importante de Chile. De esta división, doy gracias a Nicolás Rodríguez y Antonio Orlandini, quienes nos recibieron dos veces en esa gerencia, para conocer su Centro de Control de Operaciones y entender los problemas frecuentes que ellos enfrentan respecto al cumplimiento a tiempo de sus operaciones.

Al Departamento de Ingeniería Industrial y Sistemas de la Pontificia Universidad Católica de Chile, a sus profesores, en especial al Profesor Sergio Maturana, por sus ideas y sugerencias que complementaron mi investigación, y a sus funcionarios, a su coordinadora, Sra. Pilar Martínez y las secretarías del Departamento, las Sras. Marcela Berríos y Jacqueline Lefin, por haberme prestado ayuda siempre y cuando se presentaba algún inconveniente inesperado.

A los miembros de la comisión revisora de esta Tesis, en particular al Profesor Victor Albornoz de la Universidad Técnica Federico Santa María, por su alta dedicación en la revisión del primer borrador y por entregarme críticas constructivas para mejorarlo.

Quiero mencionar a los compañeros de Universidad que he conocido durante este tiempo, con los cuales he creado nuevos lazos de amistad. Agradezco a Álvaro Lorca y Armin Lüer, por sus ideas y conversaciones sobre diversos temas, las veces que fuimos ayudantes del curso Programación Entera y Combinatorial. Y para John Ríos y Cristóbal Muñoz, mis compañeros de oficina para alumnos de postgrado en Ingeniería Industrial y Sistemas, por las agradables conversaciones sobre nuestros respectivos temas de investigación y otras cosas.

Finalmente, quiero agradecer a mi familia, a mis Padres, Miguel y Jacqueline, y a mis hermanos, Benjamín y Camilo, quienes no dudaron en apoyarme para hacer el Magister en Ciencias de la Ingeniería, pese a los costos que muchas veces conllevan este tipo de decisiones, pero cuyos beneficios me servirán para toda la vida.

## INDICE GENERAL

AGRADECIMIENTOS . . . . .	v
INDICE GENERAL . . . . .	vii
INDICE DE FIGURAS . . . . .	xii
INDICE DE TABLAS . . . . .	xv
RESUMEN . . . . .	xviii
ABSTRACT . . . . .	xix
1. INTRODUCCIÓN . . . . .	1
1.1 Motivación . . . . .	7
1.2 Hipótesis . . . . .	10
1.3 Objetivos . . . . .	10
1.3.1 Objetivo General . . . . .	10
1.3.2 Objetivos Específicos . . . . .	10
1.4 Presentación del Problema . . . . .	11
1.5 Organización del Documento . . . . .	13
2. INVESTIGACIÓN OPERATIVA APLICADA AL TEMA . . . . .	15
2.1 Air Traffic Flow Management . . . . .	16
2.2 Aircraft Scheduling Recovery . . . . .	18
3. OPTIMIZACIÓN ROBUSTA . . . . .	21
3.1 Presencia de Información de la Naturaleza Probabilística de los Parámetros . . . . .	21
3.2 Falta de Información Probabilística de los Datos . . . . .	22
3.3 Función de Protección Lineal: <i>The Price of Robustness</i> . . . . .	26
4. FORMULACIÓN DEL MODELO DE NUEVA PROGRAMACIÓN DE VUELOS AÉREOS . . . . .	29

4.1	Supuestos a Considerar . . . . .	35
4.1.1	Mismo modelo de Avión . . . . .	35
4.1.2	Tiempos de Permanencia en Tierra Invariables . . . . .	35
4.1.3	Unidades de Tiempo Similares . . . . .	36
4.1.4	Intervalo de Tiempo de Estudio . . . . .	36
4.1.5	Fuente de Variabilidad: Tiempo de Vuelos . . . . .	36
4.1.6	Operaciones Continuas y sin Fallas . . . . .	37
4.2	Definición de Conjuntos . . . . .	37
4.3	Parámetros . . . . .	37
4.4	VARIABLES DEL MODELO . . . . .	38
4.4.1	VARIABLES DE DECISIÓN . . . . .	38
4.4.2	VARIABLES AUXILIARES . . . . .	39
4.5	Restricciones para las Variables de Asignación . . . . .	39
4.5.1	Conservación de Flujos por Nodo . . . . .	39
4.5.2	Asignación del Vuelo Siguiete . . . . .	40
4.6	Restricciones de Programación para la Hora de Salida de Vuelos . . . . .	40
4.7	Restricciones al Retraso de Vuelos . . . . .	41
4.7.1	Exclusión de Variables . . . . .	42
4.7.2	Costo Efectivo por Retraso de Vuelos . . . . .	42
4.8	Naturaleza de las variables . . . . .	43
4.9	Función Objetivo . . . . .	44
4.10	Incertidumbre de Este Modelo . . . . .	44
4.11	Criterio de Asignación de Vuelos . . . . .	45
4.11.1	Escalas en Común . . . . .	46
4.11.2	Tiempos Posteriores de Vuelos . . . . .	46
4.11.3	Intervalos de Tiempo . . . . .	47
4.12	Costos de Retrasos . . . . .	49
4.13	Costo de Asignación . . . . .	50
5.	PROTECCIÓN FRENTE LA INCERTIDUMBRE . . . . .	51

5.1	Consideraciones Previas . . . . .	51
5.2	Función de Protección Propuesta . . . . .	53
6.	APLICACIÓN A SITUACIONES REALES . . . . .	57
6.1	Aplicación a Vuelos Nacionales . . . . .	57
6.1.1	Descripción de los Vuelos Nacionales Programados . . . . .	61
6.2	Aplicación a Vuelos Regionales . . . . .	65
6.2.1	Itinerarios que Operan dentro del Espacio Aéreo Chileno . . . . .	67
6.2.2	Itinerarios de Vuelos Fuera del Espacio Aéreo Chileno . . . . .	70
7.	RESULTADOS DE RESOLUCIÓN COMPUTACIONAL . . . . .	74
7.1	Procedimiento de Resolución . . . . .	74
7.2	Resultados para el Caso de Vuelos Nacionales . . . . .	74
7.3	Resultados para el Caso de Vuelos Regionales . . . . .	89
8.	EXTENSIÓN DEL MODELO CON AVIONES DE DISTINTOS MODELOS . . . . .	97
8.1	Cambios en las Variables . . . . .	99
8.2	Modificación de las Restricciones . . . . .	99
8.2.1	Conservación de Flujo . . . . .	99
8.2.2	Una Sola Asignación por Vuelo . . . . .	100
8.2.3	Programación de Hora de Salida por Vuelo . . . . .	100
8.3	Función Objetivo . . . . .	100
8.4	Problema Robusto . . . . .	101
8.5	Aplicación del Modelo General a Vuelos Internacionales . . . . .	101
8.5.1	Itinerarios Operados por el Boeing B767 . . . . .	104
8.5.2	Itinerarios Operados por Airbus A320 . . . . .	106
8.6	Resultados de Computación . . . . .	109
8.6.1	Resultado para $\Gamma_k = 0,5$ . . . . .	110
8.6.2	Resultado para $\Gamma_k = 1,0$ . . . . .	113
9.	SIMULACIÓN DE SITUACIONES DE INFECTIBILIDAD EN RESTRICCIONES PROTEGIDAS DE LA INCERTIDUMBRE . . . . .	117

9.1	Estimación de Probabilidades de Soluciones Infactibles . . . . .	118
9.2	Resultados de la Simulación . . . . .	119
9.3	Infactibilidad Acumulada . . . . .	122
9.4	Infactibilidad Acumulada Porcentual . . . . .	125
10.	HEURÍSTICA BASADA EN BÚSQUEDA TABÚ APLICADA . . . . .	130
10.1	Fundamentos de Búsqueda Tabú . . . . .	131
10.2	Detalle de la Explicación de la Heurística en el Problema . . . . .	132
10.2.1	Definición de la Vecindad . . . . .	134
10.2.2	Cálculo de la Función Objetivo para la Heurística . . . . .	135
10.2.3	Definición de la Lista Tabú . . . . .	135
10.3	Resultados de la Aplicación de la Heurística . . . . .	136
10.3.1	Resultados para el Problema Particular de un Mismo Tipo de Avión .	136
10.3.2	Resultados para el Problema General de Varios Tipo de Avión . . . .	139
10.4	Comparación de los Tiempos de Cálculo de las Soluciones Exactas con el Empleado por la Heurística . . . . .	142
11.	CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS . . . . .	146
	BIBLIOGRAFÍA . . . . .	151
A.	GLOSARIO . . . . .	159
B.	ALGORITMOS COMPUTACIONALES APLICADOS . . . . .	161
B.1	Generación de las Asignaciones Posibles . . . . .	161
B.2	Costos de Asignación . . . . .	163
B.3	Costos de Retraso . . . . .	165
C.	SOLUCIONES COMPUTACIONALES . . . . .	166
C.1	Primer Caso de Vuelos Nacionales . . . . .	166
C.2	Segundo Caso y Real de Vuelos Nacionales . . . . .	172
C.3	Caso de Vuelos Regionales . . . . .	179
C.4	Caso Extendido a Muchos Tipos de Aviones . . . . .	186

C.4.1	Ejemplo con $\Gamma_k = 0,5$ . . . . .	186
C.4.2	Ejemplo con $\Gamma_k = 1,0$ . . . . .	189
C.5	Infactibilidad Acumulada . . . . .	193
C.6	Infactibilidad Acumulada Porcentual . . . . .	194

## INDICE DE FIGURAS

4.1	Programación de Vuelos para un Avión . . . . .	30
4.2	Programación de Vuelos para cuatro aviones . . . . .	31
4.3	Programación de vuelos visto como un grafo . . . . .	32
4.4	Ejemplo de reasignación de vuelos . . . . .	33
4.5	Grafo completo con nodo Destino . . . . .	34
4.6	Asignación de vuelos para escalas en común . . . . .	46
4.7	Asignaciones posibles para cuatro vuelos . . . . .	47
4.8	Situación de retraso de uno de los vuelo de la figura 4.7 . . . . .	48
4.9	Reasignación de vuelos ante la situación de retraso . . . . .	48
6.1	Ciudades Chilenas a Considerar en Nuestro Primer Caso . . . . .	58
6.2	Primer itinerario para vuelos nacionales . . . . .	61
6.3	Ciudades dentro de Sudamérica a Considerar en Nuestro Ejemplo . . . . .	65
6.4	Vuelos Nacionales Considerados en el Caso Regional . . . . .	68
6.5	Vuelos Internacionales Considerados en el Caso Regional . . . . .	71
7.1	Costo Total en función del nivel de protección . . . . .	75
7.2	Costo de asignación para vuelos nacionales para variaciones de 0,1 a 0,25 horas . . . . .	76
7.3	Costo de asignación para vuelos nacionales para variaciones de 0,3 a 0,5 horas . . . . .	77
7.4	Índice de Puntualidad para al caso de vuelos nacionales . . . . .	78
7.5	Costo Total para Caso Real de Vuelos Nacionales . . . . .	80
7.6	Costo de Asignación para Caso Real de Vuelos Nacionales . . . . .	81
7.7	Costo de Asignación como Porcentaje de Costos Totales para Caso Real de Vuelos Nacionales . . . . .	82
7.8	Índice de Puntualidad para Caso Real de Vuelos Nacionales . . . . .	83

7.9	Costo por Protección en SCL para Vuelos Nacionales en un Caso Real . . . . .	84
7.10	Comparación Costos Protección Total frente a SCL para vuelos nacionales . . . . .	85
7.11	Asignación para Protección en SCL de vuelos nacionales . . . . .	86
7.12	Porcentaje asignación de los costos totales para protección en SCL de vuelos nacionales . . . . .	87
7.13	Índice de Puntualidad para protección en SCL de vuelos nacionales . . . . .	88
7.14	Costo Total para Vuelos Regionales . . . . .	90
7.15	Costo de Asignación para Vuelos Regionales . . . . .	91
7.16	Índice de Puntualidad para el Caso de Vuelos Regionales . . . . .	92
7.17	Costo de Protección en SCL para Vuelos Regionales . . . . .	93
7.18	Costo de Protección en SCL como Porcentaje de Costos de Protección Total de Vuelos Regionales . . . . .	94
7.19	Costo de Asignación para Protección SCL de Vuelos Regionales . . . . .	95
7.20	Índice de Puntualidad en Protección a SCL de Vuelos Regionales . . . . .	96
8.1	Grafo extendido para el caso de varios modelos de aviones . . . . .	98
8.2	Aeropuertos Americanos a Considerar para el Problema Extendido . . . . .	102
8.3	Vuelos Operados por Boeing B767 para Caso General . . . . .	104
8.4	Vuelos Operados por Airbus A320 para Caso General . . . . .	107
8.5	Costo de protección para el caso general, con $\Gamma_k = 0,5$ . . . . .	111
8.6	Costo de asignación para el caso general, con $\Gamma_k = 0,5$ . . . . .	112
8.7	Índice de puntualidad para el caso general, con $\Gamma_k = 0,5$ . . . . .	113
8.8	Costo de protección para el caso general, con $\Gamma_k = 1,0$ . . . . .	114
8.9	Costo de asignación para el caso general, con $\Gamma_k = 1,0$ . . . . .	115
8.10	Índice de puntualidad para el caso general, con $\Gamma_k = 1,0$ . . . . .	116
9.1	Porcentaje de infactibilidad para tiempos con distribución Uniforme . . . . .	119

9.2	Porcentaje de infactibilidad para tiempos con distribución Normal al 95% de cobertura . . . . .	120
9.3	Porcentaje de infactibilidad para tiempos bajo un proceso 6-Sigma . . . . .	121
9.4	Infactibilidad Acumulada en Horas para el caso de distribución Uniforme . . .	123
9.5	Infactibilidad Acumulada en Horas para el caso de distribución Normal al 95% de cobertura . . . . .	124
9.6	Infactibilidad Acumulada en Horas para el caso del proceso 6-Sigma . . . . .	125
9.7	Infactibilidad Acumulada Porcentual para la distribución Uniforme . . . . .	126
9.8	Infactibilidad Acumulada Porcentual para la distribución Normal al 95% . . .	127
9.9	Infactibilidad Acumulada Porcentual para el proceso 6-Sigma . . . . .	128
10.1	Dos itinerarios con asignaciones posibles para definir vecindad para la Búsqueda Tabú . . . . .	134
10.2	Error Relativo de la Heurística Tabú para caso particular tras 2 Iteraciones . .	137
10.3	Error Relativo de la Heurística Tabú para caso particular tras 5 Iteraciones . .	137
10.4	Error Relativo de la Heurística Tabú para caso particular tras 10 Iteraciones .	138
10.5	Error Relativo de la Búsqueda Tabú para caso General después de 1 Iteración	139
10.6	Error Relativo de la Búsqueda Tabú para caso General después de 2 Iteraciones	140
10.7	Error Relativo de la Búsqueda Tabú para caso General después de 5 Iteraciones	140
10.8	Error Relativo de la Búsqueda Tabú para caso General tras 10 Iteraciones . .	141

## INDICE DE TABLAS

6.1	Descripción de Aeropuertos para el Caso de Vuelos Nacionales . . . . .	59
6.2	Tiempo estimado en horas de vuelos nacionales para Airbus A320 . . . . .	60
6.3	Detalle del primer itinerario de vuelos nacionales . . . . .	62
6.4	Detalle del segundo itinerario de vuelos nacionales . . . . .	62
6.5	Detalle del tercer itinerario de vuelos nacionales . . . . .	63
6.6	Detalle del cuarto itinerario de vuelos nacionales . . . . .	64
6.7	Detalle del quinto itinerario de vuelos nacionales . . . . .	64
6.8	Descripción de Aeropuertos para el Caso de Vuelos Regionales . . . . .	66
6.9	Tiempo estimado en horas de vuelos regionales para Airbus A320 . . . . .	66
6.10	Costo de Retraso por Ciudad . . . . .	67
6.11	Detalle del primer itinerario de vuelos regionales . . . . .	69
6.12	Detalle del segundo itinerario de vuelos regionales . . . . .	69
6.13	Detalle del tercer itinerario de vuelos regionales . . . . .	70
6.14	Detalle del cuarto itinerario de vuelos regionales . . . . .	72
6.15	Detalle del quinto itinerario de vuelos regionales . . . . .	72
6.16	Detalle del sexto itinerario de vuelos regionales . . . . .	73
6.17	Detalle del séptimo itinerario de vuelos regionales . . . . .	73
8.1	Descripción de Aeropuertos de Estados Unidos . . . . .	103
8.2	Tiempo estimado en horas de vuelos desde SCL hacia aeropuertos de Estados Unidos . . . . .	103
8.3	Detalle del primer itinerario general . . . . .	105
8.4	Detalle del segundo itinerario general . . . . .	105
8.5	Detalle del tercer itinerario general . . . . .	106

8.6	Detalle del cuarto itinerario general . . . . .	106
8.7	Detalle del quinto itinerario general . . . . .	108
8.8	Detalle del sexto itinerario general . . . . .	108
8.9	Detalle del séptimo itinerario general . . . . .	109
8.10	Detalle del octavo itinerario general . . . . .	110
10.1	Tiempo en Segundos Empleados para la Solución Exacta del Problema Particular para Vuelos Nacionales . . . . .	142
10.2	Tiempo en Segundos Empleados para la Heurística Aplicada al Problema Particular para Vuelos Nacionales . . . . .	143
10.3	Tiempo en Segundos Empleados para Resolver Óptimamente el Problema General en Vuelos Internacionales . . . . .	143
10.4	Tiempo en Segundos Empleados para la Heurística Aplicada al Problema General en Vuelos Internacionales . . . . .	144
C.1	Costo total del primer caso de vuelos nacionales . . . . .	166
C.2	Costo de asignación para el primer caso de vuelos nacionales . . . . .	168
C.3	Índice de Puntualidad para el primer caso de vuelos nacionales . . . . .	170
C.4	Índice de Puntualidad para el primer caso de vuelos nacionales . . . . .	172
C.5	Índice de Puntualidad para el primer caso de vuelos nacionales . . . . .	175
C.6	Índice de Puntualidad para el primer caso de vuelos nacionales . . . . .	177
C.7	Índice de Puntualidad para el primer caso de vuelos nacionales . . . . .	179
C.8	Índice de Puntualidad para el primer caso de vuelos nacionales . . . . .	181
C.9	Índice de Puntualidad para el primer caso de vuelos nacionales . . . . .	184
C.10	Costos totales para caso general, con $\Gamma_k = 0,5$ . . . . .	186
C.11	Costos de asignación para caso general, con $\Gamma_k = 0,5$ . . . . .	187
C.12	Índice de puntualidad para caso general, con $\Gamma_k = 0,5$ . . . . .	188

C.13	Costos totales para caso general, con $\Gamma_k = 1, 0$ . . . . .	189
C.14	Costos de asignación para caso general, con $\Gamma_k = 1, 0$ . . . . .	190
C.15	Índice de puntualidad para caso general, con $\Gamma_k = 1, 0$ . . . . .	191
C.16	Infactibilidad Acumulada en Horas para Distribución Uniforme . . . . .	193
C.17	Infactibilidad Acumulada (Hrs.) para Distribución Normal al 95% de Cobertura	193
C.18	Infactibilidad Acumulada en Horas para Proceso 6-Sigma . . . . .	194
C.19	Infactibilidad Acumulada Porcentual para Distribución Uniforme . . . . .	194
C.20	Infactibilidad Acumulada Porcentual para Distribución Normal al 95% de Cobertura . . . . .	195
C.21	Infactibilidad Acumulada Porcentual para Proceso 6-Sigma . . . . .	195

## RESUMEN

Las líneas aéreas optimizan sus operaciones buscando cumplir el mejor servicio al menor costo. Sin embargo, está la posibilidad de que la programación no se cumpla debido a malas condiciones meteorológicas y fallas mecánicas inesperadas, retrasando y causando molestias en los usuarios. Por medio de Optimización Robusta, se buscan soluciones no afectas a la incertidumbre de los parámetros que producen infactibilidad, con una función de protección dependiente de un nivel de protección fijo, asumiendo que los datos están contenidos dentro de un intervalo conocido aunque faltos de información probabilística.

Propondremos un nuevo modelo de optimización para la programación de itinerarios de líneas aéreas bajo incertidumbre en los tiempos de vuelo, considerando cada vuelo como una tarea operada por un avión y que protegeremos con Optimización Robusta. Su solución nominal es la programación original de vuelos, pero la variabilidad de los datos obliga a pagar costos adicionales buscando protegerse de esta, obteniendo nuevos itinerarios. Sus soluciones, calculados de ejemplos de operaciones en Chile y Sudamérica, muestran que el modelo se comporta bastante bien ante diversos niveles de robustez, haciendo que los costos aumenten a medida que se busca mayor protección y haciendo nuevas asignaciones de vuelos a los aviones considerados. La puntualidad del plan de vuelos disminuye, pensando en que a mayor protección los retrasos en las horas de salida de vuelos aumentan.

La formulación puede tardar bastante tiempo en el cálculo de su solución. Por ello, proponemos una heurística basada en Búsqueda Tabú que resuelve en menos tiempo los problemas protegidos, esperando ser aplicados con grandes cantidades de datos. Los resultados mostraron que la heurística calcula buenas soluciones cuyo error relativo a las soluciones exactas no superan el 3,5%.

**Palabras Claves:** Líneas Aéreas, Programación de Itinerarios, Optimización, Optimización Robusta, Incertidumbre, Heurísticas, Búsqueda Tabú

## ABSTRACT

Airlines use Optimization Models to program their operations looking for achieve an efficient service. However, exist chances that generated planning could not be satisfied due bad weather conditions and unexpected mechanical failures, causing delays in flight departure times and discomfort in customers. Through Robust Optimization, we search for immune solutions to data uncertainty that produce infeasibility, using a protection function that depend a arbitrary parameter which is a protection level, assuming random data are contained in a known interval with a few information about their probabilistic nature.

We propose a new Optimization model to generate new airline flights itineraries under uncertainty conditions in flight times, considering each flight as a task operated for one aircraft and we will protect them with Robust Optimization. Their nominal solution is the original flight program, but because data randomness costs grow as increase protection level, obtaining new itineraries. Results calculated from operations cases in Chile and South America, showed this model behaves quite well to various protection levels doing costs increase looking for more protection and generating new assignment between flights and aircrafts of the fleet. Punctuality in departure time decreases due more protection implies more delays and less punctuality.

The robust formulation takes many time in solving, for which we propose an heuristic based in Tabu Search to solve in less time the protected problem, expecting to be applied in large data problems. Experimental results showed the heuristic calculate good solutions which relative error with respect to exact solution do not pass 3,5%.

**Keywords:** Airlines, Airline Operations, Aircraft Scheduling, Optimization, Robust Optimization, Uncertainty, Heuristics, Tabu Search

## 1. INTRODUCCIÓN

Actualmente, el transporte aéreo es una de las formas más usadas de desplazamiento entre dos lugares que se encuentran a gran distancia, debido a que su tiempo es bastante menor comparado con otros medios como el marítimo y el terrestre. Respecto del transporte de pasajeros en Chile, millones de estos lo han usado para vuelos nacionales e internacionales entre los años 2002-2011. En vuelos nacionales, se ha calculado que el tráfico de pasajeros ha llegado a un promedio anual de 4.221.195 de usuarios, habiendo un mínimo de 2.858.893 en 2003 y un máximo de 7.024.988 en 2011. Para vuelos internacionales, el tráfico promedio para viajes desde y hacia Chile ha alcanzado un promedio 4.397.772 de pasajeros por año, siendo el mínimo 3.066.133 en 2002, y el máximo 5.964.330 en 2011.

Durante el mismo periodo señalado en el párrafo anterior, 44 líneas aéreas han operado en los cielos nacionales, de las cuales 9 son chilenas y 35 extranjeras. De estos vuelos, la principal línea aérea nacional ha transportado más del 70% de esos pasajeros en operaciones nacionales y más del 50% en internacionales, controlando buena parte del mercado nacional.

Los destinos más recurrentes dentro del país son conexiones entre ciudades con Santiago, debido sobretodo a que los vuelos internacionales de muchas líneas aéreas salen por la capital de Chile, por lo que tienen que pasar por esta ciudad para hacer la conexión correspondiente. Incluso esta conexión es para vuelos que van dentro del país, ya que las compañías tienen a Santiago como un *Hub* definido como un “Centro de Conexión” de vuelos. Para vuelos internacionales, los pasajeros van más frecuentemente a Argentina, Brasil, México, Perú y Estados Unidos, en el caso del continente americano. Entre los destinos de Europa tenemos Alemania, España y Francia, mientras que del resto del mundo destacan Australia y Nueva Zelanda.

Si hacemos un análisis más global de todo el tráfico de pasajeros, la mayoría de ellos se desplazan desde Chile por el continente americano, haciendo más viajes dentro de la región sudamericana, siguiendo con Europa y terminando con Australia y Nueva Zelanda.

Algunos países han sido cubiertos desde Chile, aunque sin mucha frecuencia, suponiendo que deberán llegar pasando por otras escalas y abordando otras aerolíneas <sup>1</sup>.

En general, los pasajeros que han usado el transporte aéreo en Chile manifiestan un buen nivel de satisfacción respecto del servicio recibido por las compañías y esta sensación ha sido recopilada por diversos estudios de opinión (Collect-Gfk, 2010). No obstante, tanto en Chile como en el mundo, aún persiste un ítem que no se considera completamente bueno y que es importante mejorar como lo son los retrasos existentes en la llegada y salida de vuelos desde los aeropuertos. El retraso tiene principalmente dos causas: internas y externas. Las internas son aquellas relacionadas con aspectos que las aerolíneas suelen manejar, como el proceso de embarque de pasajeros y tripulación, y la mantención de los aviones de sus flotas. El otro factor es lo que llamamos externas, que se refiere a todo aquello que tiene relación con el entorno donde la empresa aérea opera, como factores meteorológicos o pasajeros que se retrasan en tomar su vuelo. Ambas causas escapan del control de la empresa y se manifiestan en variabilidad que afecta el funcionamiento esperado de sus operaciones.

Todas las líneas aéreas llevan cuentas del dinero que pierden cuando estas situaciones suceden. En el caso de las empresas con centros de operaciones fuera de Chile, contamos con costos totales estimados por retrasos y cancelaciones que se muestran en algunos estudios (Weber et al., 2005; Lan et al., 2006; Agustín et al., 2012a). Debido a esto, las compañías buscan aumentar el grado de control de sus funciones, por medio de una planificación y gestión eficiente.

La Investigación Operativa aplicada a la industria del transporte aéreo de pasajeros ha cubierto buena parte de sus procesos involucrados, tanto para operaciones nacionales como internacionales. La necesidad de su uso, en esta y todo tipo de industrias, obedece a la de poder contar con herramientas que nos permita tomar mejores decisiones, teniendo

---

<sup>1</sup>Este estudio del transporte aéreo en Chile fue realizado a partir de los datos descargados en la página web de la Junta Aeronáutica Civil de Chile, <http://www.jacchile.cl/>

presente las múltiples restricciones que las limitan. En particular, referido a planificación aérea, la Investigación Operativa ha sido una herramienta fundamental para la programación estratégica, táctica y operacional del oficio de estas empresas. Dentro de esta ciencia existen los modelos y técnicas de Optimización, los cuales mejoran la toma de decisiones sujetas a las limitaciones propias de la empresa con el fin de ser más rentables y eficaces. En efecto, la eficacia operacional es el objetivo buscado de forma constante para hacer esta industria más rentable. El retraso en la salida y llegada de vuelos, que puede provocar la posible cancelación de estos si son grandes, genera molestias en los usuarios que deben ser compensadas, con lo cual aumentan los costos operacionales y por ende afecta la rentabilidad de cada aerolínea.

La planificación de las operaciones de estas empresas es algo que no está ajeno a los problemas de Optimización. Una de esas formas de planificar tiene que ver con el problema de Asignación de Flotas o *Fleet Assignment*, en el que dado un plan de vuelos previamente definido, cada uno de los cuales contiene un conjunto de vuelos, se decide qué avión va a operar cada conjunto. Sus primeras formulaciones y métodos de solución provienen de Abara (1989) y Daskin y Panayotopoulos (1989), aunque se han propuesto otras extensiones por Hane et al. (1995), que propuso un modelo basado en *Multicommodity Flow*, Rexing et al. (2000) que incluye la posibilidad de optimizar los tiempos de salida de los vuelos y Barnhart et al. (2002), quienes incorporan los costos producto del efecto conjunto de ciertos vuelos (además de verlos cada uno por separado), en operaciones con aviones con capacidad de pasajeros definida, sin el cual se generan soluciones subóptimas, para lo cual proponen modelo y estrategia de solución.

Otros autores trabajan el problema anterior como un problema de ruteo de aviones, llamado *Aircraft Routing*, en el cual a cada avión de la flota se decide que pase por un número definido de escalas. Este ruteo viene acompañado a veces con programación del horario de salida de los vuelos o *Aircraft Scheduling*. Fue desarrollado por Levin (1971) y extendido en trabajos como Desaulniers et al. (1997) en la que incorpora el *Scheduling* de los aviones, Stojković et al. (2002) que propone un modelo en tiempo real, similar a la

programación de procesos y Lohatepanont y Barnhart (2004), quienes lo integran junto con el problema de *Fleet Assignment* en uno solo.

La programación del plan de vuelos de las compañías se construye siguiendo criterios de maximización de utilidades, el cual descarta todo plan que genere gastos innecesarios a la empresa. Poco se habla respecto de los posibles retrasos que eventualmente ocurren en el momento de las operaciones de los aviones, por lo que esto nos dice que en estos trabajos se supone que los tiempos efectivamente se cumplen, lo que equivale a un caso ideal. Este caso consiste en que los parámetros que juegan en la formulación de todo problema de optimización son constantes y la búsqueda de solución no tiene complicaciones adicionales más que las que dependen de la naturaleza de las variables que participan. La realidad es que existen diferentes fuentes de incertidumbre que dificultan la mejor toma de decisiones frente a las múltiples realizaciones de los parámetros y es por estos que necesitamos extender nuestras herramientas para considerar la naturaleza estocástica de los parámetros involucrados que pueden causar “infactibilidad”, en el sentido que soluciones factibles para ciertos valores de los parámetros dejan de serlo para otros. Por esto es que además de buscar la solución del problema de optimización tenemos que pedirle que sea factible para todo posible valor de los parámetros, es decir que sea inmune a la variabilidad de estos.

Lo anterior nos hace pensar si la programación de itinerarios apoyada por la Investigación Operativa se pueden seguir al pie de la letra, es decir si se cumple a cabalidad en los tiempos programados y sin retrasos que desencadenen costos adicionales para los operadores. La respuesta es no necesariamente, ya que por motivos no controlables por la empresa, como el ya mencionado factor meteorológico, los tiempos de los vuelos pueden experimentar variaciones que hacen menos probable que el avión llegue a la hora señalada. Más aún, si el retraso es muy grande no se sabe con exactitud qué hacer ante estos escenarios. Los controladores aéreos de cada compañía o *Controllers* como se conoce en la industria, personas de gran experiencia que están constantemente haciendo un seguimiento de la situación de cada vuelo, deben determinar qué hacer con determinado vuelo, si retrasarlo, cancelarlo, o reasignarlo a otro avión que está llegando a su destino. Sus decisiones se

basan tanto en su propio criterio, determinados por su experiencia, o apoyados por modelos de Investigación Operativa.

La necesidad de poder contar con un sistema de apoyo a la toma de decisiones que involucren operaciones aéreas bajo un enfoque táctico-operacional es evidente, con el fin de determinar qué hacer ante ciertas situaciones en que la incertidumbre, toma parte del juego. Esta necesidad puede ser satisfecha antes de que comiencen las actividades o durante el seguimiento de estas.

Una forma de atacar la incertidumbre de este y otros problemas es por medio de Optimización Estocástica, en la cual modelamos y resolvemos conociendo la naturaleza aleatoria de los datos. El problema es que hay que disponer de esa información y una forma para hallarla es ajustando estadísticamente la distribución de probabilidad de los parámetros, para lo cual necesitamos datos.

Una relativamente reciente forma de considerar la variabilidad de los datos es por medio de una metodología llamada Optimización Robusta. En ella asumimos que los parámetros están dentro de un intervalo, cuyo largo representa la variabilidad de cada uno. Aunque conocemos la naturaleza incierta de los parámetros, existe falta o nula información sobre su distribución de probabilidad.

Respecto al uso de Optimización Robusta en planificación aérea, han habido autores quienes han logrado obtener programaciones de vuelos protegida de la variabilidad externa, minimizando el posible retraso en los tiempos de salida de los vuelos, mostrado en las investigaciones hechas por Rosenberger et al. (2003) y Lan et al. (2006). Una dificultad de este enfoque es que es una tarea difícil, sobre todo pensando en lo complicado que es predecir las incertidumbres de los modelos (Clausen et al., 2010).

Como el último enfoque puede no ser suficiente, otras visiones tienen relación con hacer un seguimiento en tiempo real de las operaciones en la que, dado el plan de vuelos para un día dado, se toman decisiones de gestionar este plan de modo de minimizar los costos por retrasos. Ambos enfoques se muestran en problemas conocidos como *Air Traffic*

*Flow Management Problem* (Odoni, 1987) y *Aircraft Scheduling Recovery* (Teodorović y Guberinić, 1984).

El seguimiento no solo lo hacen las líneas aéreas, ya que los organismos administradores del espacio aéreo de los países han impuesto programas que asignan espacios de tiempo previamente asignados a determinadas aerolíneas para que aterricen en determinados aeropuertos y se preparen nuevamente para partir, llamados *time-slots*, con el fin de minimizar los retrasos debido a aviones que llegan más tarde de la hora señalada, proyecto conocido como *Ground Delay Program* (GDP). El GDP va decidiendo qué aviones mantener en tierra y a cuales dar prioridad para que despeguen su siguiente vuelo (Rosenberger et al., 2004). Esto es lo que hace desde fines de los años 80, la *Federal Aviation Administration* (FAA), en Estados Unidos, el ente que regula las funciones del espacio aéreo local<sup>2</sup>.

El GDP ha sido complementado con el resultado del trabajo conjunto de la FAA con las líneas aéreas que operan en el espacio aéreo estadounidense, el cual se conoce como *Collaborative Decision Making*. Consiste en que, debido a la falta de información de los controladores aéreos de los aeropuertos, las compañías aéreas comparten su información en tiempo real con los aeropuertos, de modo que mediante nuevos algoritmos se obtiene una nueva asignación en los turnos de entrada y salida en cada escala (Chang et al., 2001). Al respecto, algunos autores han compuesto artículos que entregan modelos que asignan *time-slots* ya distribuidos antes por la FAA a cada vuelos dependiendo de cada compañía, en un concepto llamado *Free-Flight* (Andreatta et al., 2000).

En esta tesis, vamos a trabajar el problema cuando los aviones no cumplen con la programación esperada de sus operaciones, para lo cual debemos tomar decisiones relacionadas con generar una nueva programación de itinerarios a partir de uno ya establecido. Esta nueva programación considera la asignación de los vuelos a los aviones de la flota y la postergación de su hora de salida, minimizando los costos adicionales que ocurren al modificar el plan original. Para esto, es que vamos a proponer un modelo de optimización

---

<sup>2</sup>Organismo equivalente a la Dirección General de Aeronáutica Civil (DGAC), de Chile

en la que incorporaremos decisiones de asignación de vuelos a aviones y la de programación del tiempo de salida efectiva de estos.

El modelo se basa en la combinación de los problemas de *Minimum Flow Cost* (que puede extenderse a uno de *Multicommodity Flow*) y *Job-Shop Scheduling*. Nuestra propuesta está pensada para que su solución nominal, es decir cuando no existe incertidumbre de ningún tipo en el problema de Optimización, sea la programación original de los itinerarios. Para atacar la incertidumbre de los datos es que vamos a agregar una función que nos permita buscar soluciones protegidas de la variabilidad, término conocido como “soluciones robustas”, la cual fue propuesta por Bertsimas y Sim (2004). Probaremos este caso, considerando una línea aérea nacional que opera dentro y fuera de Chile.

Este problema, como veremos en los capítulos respectivos, es del tipo NP-Completo. Esto quiere decir que se requiere de muchos recursos para resolverlo exactamente, desde tiempo hasta memoria computacional, una necesidad que se hace patente cuando usamos una gran cantidad de datos y al requerir de soluciones cada vez más protegidas. Si usáramos este modelo como apoyo de decisiones operacionales, es importante obtener soluciones en el menor tiempo posible. Por esta razón, vamos a proponer una heurística basada en Búsqueda Tabú, el cual fue propuesta por Fred Glover (1989, 1990a), que nos permita obtener soluciones de nuestro modelo, sin que estos sean precisamente la solución exacta. Compararemos, por medio del error relativo, la solución lograda por esta heurística con lo hecho por el método exacto. Además cotejaremos los tiempos empleados en la computación de las soluciones de ambos métodos, con el fin de determinar en qué situaciones es preferible usar la heurística y en qué otros es mejor resolver el problema de forma exacta.

## **1.1 Motivación**

La idea de trabajar en un problema relacionado con el transporte aéreo de pasajeros surgió de los contactos que nos permitió conocer la Gerencia de Soporte de Operaciones de la más importante línea aérea de Chile. En ella se nos propuso trabajar en el estudio de las

propiedades estadísticas del clima en las regiones donde la línea aérea opera y cómo afecta en los tiempos de vuelo de la compañía.

Pese a que en el proyecto estadístico sobre meteorología no se avanzó, fue una interesante idea estudiar los efectos de la variabilidad de los tiempos de vuelo en la toma de decisiones de los *Controllers* y ver qué posibles decisiones podrían tomar para atacar el retraso de los vuelos.

Para entender cómo gestiona la empresa los vuelos en tiempo real se hizo una visita a la Base de Operaciones de la empresa ubicada en el Aeropuerto Arturo Merino Benitez, en Santiago. Recorriendo el llamado Centro de Control Operacional (CCO), conocimos la enorme oficina donde muestran el estado de sus operaciones y cómo los gestionan de modo de prevenir inconvenientes.

Las líneas aéreas comúnmente programan su serie de vuelos para satisfacer la demanda de pasajeros que necesitan desplazarse dentro y fuera de Chile. Estas son operadas por aviones de ciertos modelos que tienen ciertas características operativas que las hacen convenientes para volar desde y hacia el país. Anticipadamente, las compañías aéreas arman lo que denominaremos un “Itinerario”, que es un plan definido de vuelos a ser operados por determinados modelos de aviones. Por ejemplo, vuelos nacionales suelen ser operados por modelos con una autonomía máxima de 6 horas, mientras que para vuelos transhemisféricos se suelen usar modelos con autonomía de hasta 13 horas. Estos se ordenan siguiendo un esquema similar a una “Carta Gantt” en el que cada vuelo corresponde a una tarea, solo que esta tarea lo puede operar sólo un avión. Este enfoque de procesos operados por una sola máquina se relaciona con un conocido problema llamado *Job-Shop Scheduling*.

En el CCO, se siguen en tiempo real cada uno de los vuelos y los *Controllers* deciden qué hacer con los vuelos cuando ocurren inconvenientes. La mayoría de sus decisiones se apoyan en su criterio, alimentado por su experiencia. Sin embargo, sus decisiones están comenzando a ser apoyadas por softwares que usan modelos propuestos en la literatura y usados por las más importantes aerolíneas del mundo. La mayoría de los trabajos han sido hechos considerando los casos de compañías internacionales que operan principalmente en

Europa y Estados Unidos. Pocos modelos han sido originados a partir de los casos de la región sudamericana.

Los artículos que hemos revisado han considerado formulaciones que trabajan con modelos de optimización binaria que incluyen parámetros que eventualmente pueden ser constantes o bien pueden adaptarse a situaciones en que estas cambian dinámicamente. En el caso de la variabilidad de los datos, se han hecho trabajos que usan Optimización Estocástica, mas no Optimización Robusta debido que estos trabajos se han hecho antes de que se publicasen los avances más interesantes del tema que aplicaremos.

Otra consideración a destacar es que, salvo algunas pocas excepciones, no se han encontrado artículos que trabajen directamente con la programación directa de los tiempos de los vuelos, o sea que no se introducen variables que programen la salida de vuelos. El uso de variables binarias en los modelos programan en base a una discretización del espacio de tiempo, obteniendo una red espacio-tiempo con la cual se toman las respectivas decisiones.

El trabajo que propondremos aprovecha la estructura del seguimiento de los vuelos como “Cartas Gantt” usado por las empresas, el cual muestra cada vuelo como una tarea que debe ser ejecutada por sólo un avión. Luego la malla resultante es similar a un proyecto, con el que se busca una solución óptima.

Debido a que cada vuelo tiene un tiempo de duración (visto desde el punto de vista de una “Carta Gantt”), estos pueden experimentar variaciones que hacen que el itinerario nominal no pueda ser cumplido como tal, por lo que aquí surge la posibilidad de reasignar, retrasar e incluso cancelar los vuelos siguientes. Dado que no disponemos de la información probabilística, usaremos Optimización Robusta que nos permitirá obtener decisiones que no estén afectadas por la incertidumbre. Aunque Optimización Robusta ha servido para el problema de programación de horarios antes que estos sean operados (como lo vimos en el inicio de este capítulo), la idea del modelo es usarlo para itinerarios hechos, para tener planes que se anticipen a la incertidumbre en caso que no se cumpla lo planificado.

## **1.2 Hipótesis**

La hipótesis de este trabajo es que un sistema de apoyo a la toma de decisiones basado en Optimización Robusta puede ayudar a obtener soluciones que no están afectados por la variabilidad de los datos y que puede causar infactibilidad en sus restricciones. Esto se logra protegiendo las restricciones de los modelos de optimización de la incertidumbre de sus parámetros.

Aplicado al tema de nueva planificación de itinerarios aéreos, Optimización Robusta logra obtener una visión de los escenarios de decisiones a considerar cuando fijamos el nivel de protección con respecto a la dispersión de los datos.

## **1.3 Objetivos**

La especificación de los objetivos de este trabajo lo vamos a subdividir en dos subapartados. La primera se refiere al objetivo general que vamos a mostrar en esta tesis, mientras que en la segunda nos referiremos a los objetivos específicos que vamos a abordar en los capítulos siguientes.

### **1.3.1 Objetivo General**

Nuestro Objetivo General es el diseño de un modelo de Optimización que sirva de apoyo a la toma de decisiones para una nueva programación de vuelos, los cuales van a estar protegidos frente la incertidumbre de los datos y cuya presencia en las restricciones pueden causar que haya soluciones infactibles de estos.

Como segundo objetivo, tenemos que debido a que el problema puede experimentar dificultades con grandes cantidades de datos, desarrollaremos una heurística que genere buenas soluciones, ojalá cerca del óptimo, con el fin de alcanzar soluciones en menor tiempo respecto de los necesarios para obtener la solución exacta del problema.

### **1.3.2 Objetivos Específicos**

Los objetivos específicos de este trabajo son los siguientes:

**Diseño de un modelo de Optimización para una nueva Programación de Vuelos:** Esta formulación decidirá cuales vuelos son asignados a determinado avión y a qué hora se decide su salida desde su aeropuerto de origen. Ambas decisiones tienen costos de por medio.

**Protección del modelo propuesto frente la incertidumbre:** Como el modelo propuesto en su forma nominal tiene como solución el cumplimiento cabal de los planes de vuelos, para el problema incierto vamos a proteger las restricciones que tienen estos parámetros por medio de una función de protección.

**Prueba del modelo protegido con datos reales:** Dado ciertos itinerarios, probaremos el modelo propuesto con el fin de encontrar soluciones robustas, es decir que no estén afectadas por la variabilidad.

**Extensión y aplicación de la formulación para aviones de distintas series:** Nuestro trabajo está pensado para aviones de marcas y series similares. Esto se puede extender a aviones distintos en los que los costos y tiempos de preparación son distintos. Extenderemos nuestra investigación a esta realidad y lo aplicaremos a un caso consistente de una operación aérea diaria.

**Diseño de una heurística para resolver problemas con grandes datos:** Esta heurística sirve para resolver casos de itinerarios con una gran cantidad de datos. Usaremos la heurística para los itinerarios propuestos en el punto anterior y compararemos la calidad de las soluciones con las exactas de estos casos.

## 1.4 Presentación del Problema

Consideremos una planificación de itinerarios de vuelos lista a ser operada. Sabemos que en el mejor de los casos, si no existen incertidumbres de ningún tipo, no hay retrasos. Entonces los itinerarios para todos los aviones se cumplen a la perfección, aunque sabemos que esto no siempre pasa en la realidad.

Modelando esta planificación como una red en la que cada nodo corresponde a un vuelo o “proceso”, los aviones recorren una ruta que pasa por estos nodos simulando ser su

respectivo plan de vuelos. Esto por una parte, ya que cada vuelo tiene un horario de salida que en el mejor de los casos es el tiempo original programado.

Variaciones pequeñas o grandes en los tiempos de operaciones originan retrasos que nos obligan a hacer una nueva programación de vuelos para minimizar los costos adicionales que las líneas aéreas pueden incurrir por estos conceptos. Estas decisiones conllevan reasignar vuelos a otros aviones que van llegando antes o simplemente retrasar la hora de salida de estos. Si no ocurren retrasos, el costo adicional por cumplir el plan original será igual a cero, tanto en la asignación de vuelos que en la planificación previa no tienen costos, como en la hora de salida que no registra retraso alguno.

Con todo lo anterior programamos un itinerario mezclando una serie de problemas conocidos. Por un lado, el que los aviones recorren una serie de vuelos es similar a un problema de *Minimum Cost Flow* (Ahuja et al., 1993). Pero además, tenemos un problema de “Programación de Horarios” para la salida de vuelos, cuya formulación se asemeja mucho a uno de *Job-Shop Scheduling* en el que una serie de tareas y máquinas deben ser programadas de forma tal que una máquina ejecuta una sola tarea.

El problema consiste en estudiar los efectos de la incertidumbre, que en este caso corresponde a los tiempos de los vuelos aéreos. Esta incertidumbre puede ser prevenida por medio de una serie de decisiones para una programación que sea lo más inmune o robusta posible, ya que la variabilidad de los vuelos puede desencadenar en posibles casos de infactibilidad. Para esto protegeremos las restricciones más afectadas por la variabilidad de los tiempos de vuelos por medio de lo que describiremos como “Función de Protección”, la cual puede ser ajustada según el grado de aversión al riesgo que uno tiene, moviéndose desde menos a más conservador, con lo cual uno puede ver el costo que se paga por estar más protegido y las posibles decisiones que se toman bajo estos escenarios.

Esta forma de protegerse tiene como sustento lo que describiremos como Optimización Robusta, en la cual se supone que la incertidumbre de los datos se encuentra en medio de intervalos y se desconoce su información probabilística que nos permita determinar su distribución, como ocurre con Optimización Estocástica.

## 1.5 Organización del Documento

El presente documento se organiza de la siguiente manera. En el capítulo 2 presentaremos las aplicaciones de la Investigación Operativa en la materia de disminución de posibles retrasos siguiendo los tópicos de *Aircraft Flow Management* y *Aircraft Schedule Recovering*. En el capítulo 3 vamos a detallar los avances en el tema de Optimización Robusta considerando la presencia o ausencia de información probabilística sobre los parámetros de los modelos.

En el capítulo 4 vamos a mostrar una formulación del modelo que vamos a utilizar dejando el problema como uno de *Job Shop Scheduling*, suponiendo que trabajamos con modelos similares de aviones, cuya solución nominal es la planificación original, mientras que en el capítulo 5 añadiremos a la formulación la protección del modelo siguiendo las últimas investigaciones en Optimización Robusta.

Mostraremos en los capítulos 6 y 7 una aplicación del modelo usando datos de vuelos nacionales e internacionales, con sus resultados y análisis pertinentes.

El modelo es generalizable para considerar más de un tipo de avión, por lo que una extensión a ello lo podremos ver en el capítulo 8. Junto a lo anterior, mostraremos una aplicación a vuelos regionales y transhemisféricos para dos modelos de avión.

En el capítulo 9 haremos un estudio referente a la estimación del porcentaje de violación de restricciones, en las que mediante una Simulación de Montecarlo generamos valores para los datos aleatorios, dado que tenemos la solución robusta del problema para todos los niveles de protección. Mediante esta metodología, vamos a estimar otras medidas de interés al usuario concernientes al grado de violación de las restricciones del modelo.

El capítulo 10 es la implementación de una heurística basada en búsqueda Tabú orientada a la obtención de soluciones buenas de casos grandes de problemas de nueva planificación, comparando los resultados de esta heurística con los del capítulos 7 y 8, en precisión y en tiempos empleados en ambos procedimientos.

Finalmente, en el capítulo 11 entregaremos las conclusiones de esta investigación acompañado de posibles extensiones y problemas abiertos que van a quedar para trabajos posteriores.

## 2. INVESTIGACIÓN OPERATIVA APLICADA AL TEMA

La principal consecuencia de los eventos fuera del control de los operadores de líneas aéreas es el retraso de los vuelos tanto en su hora de salida como de llegada. Se suele atribuir principalmente a factores meteorológicos, en especial a la velocidad del viento. Otro factor que provoca demoras se debe a factores mecánicos, tanto en los periodos de mantenimiento como previo a la salida del avión, haciendo que los tiempos de permanencia de los aviones en las escalas aumenten, causando que los aviones demoren su salida del aeropuerto.

La importancia de la Investigación Operativa aplicada a este tema es atenuar y minimizar estos factores que causan los retrasos en los vuelos por medio de la implementación de modelos que buscan lograr la mejor toma de decisiones.

Un primer enfoque del problema considera una visión que toma en cuenta los efectos de los factores externos mencionados antes y que afectan las “capacidades” tanto del espacio aéreo como de los aeropuertos donde tienen que llegar los aviones. Esto obliga a tomar decisiones relacionadas con atrasar la llegada y salida de ciertos vuelos, en el caso de los aeropuertos, y a apurar otros, en el caso de los aviones que están operando en el cielo. Esta forma de estudiar la cuestión la llamamos *Air Traffic Flow Management Problem*.

Por otro lado, los mismos eventos mencionados pueden obligar a tomar decisiones solo en los aeropuertos cuando los aviones aterrizan. En ellos, los aviones pueden continuar con su itinerario, operando su próximo vuelo programado o bien pueden ser asignados a otro vuelo debido a que el avión que lo va a operar aún no llega ya que se retrasó. Esto es lo que podemos denominar como una “Reasignación de Vuelos” o “Cruce de Itinerarios” y al igual que la postergación de la salida de los aviones se tienen que pagar costos adicionales al respecto. Esta forma de ver el problema se conoce como *Aircraft Schedule Recovery*.

En este capítulo, repasaremos ambos enfoques, destacando sus principales aportes hechos hasta la actualidad en la que se aplican casos estáticos y dinámicos, para situaciones determinísticos y probabilísticos.

Dado que nuestra investigación es también una aplicación de Optimización Robusta, vamos a hacer una detallada revisión de las contribuciones hechas hasta ahora al respecto, considerando la presencia y ausencia de información probabilística de los datos.

## **2.1 Air Traffic Flow Management**

Una forma de atacar los retrasos es por medio de una visión macroscópica de las operaciones aéreas en la que se consideran escalas, vuelos y espacios aéreos que abarca la compañía. Se menciona a Odoni (1987) como el primer autor que presentó este problema, llamado *Air Traffic Flow Management Problem*. En este enfoque, debido a eventos no controlables, las “capacidades” tanto del espacio aéreo como de los aeropuertos experimentan variaciones, cuya consecuencia más directa es el aumento del retraso de los vuelos, que se traduce en un aumento en los costos operacionales de la línea aérea.

Muchos autores comenzaron a proponer versiones de este problema en las que involucraron atenuación inmediata de la incertidumbre o modelos que fueron resueltos bajo condiciones estocásticas. En ambos problemas, se proponen modelos de redes los cuales operan bajo condiciones estáticas y dinámicas. A diferencia de las condiciones estáticas, las dinámicas juegan su parte cuando cambian las condiciones externas de los problemas, como por ejemplo las meteorológicas, que actualizan las capacidades de los aeropuertos y/o de los espacios aéreos por lo que se resuelve en un escenario distinto.

Una primera aproximación fue el caso especial de este modelo aplicado a la capacidad de los aeropuertos, llamado *Ground Holding Problem*, consistente en decidir cuándo y en cuánto retrasar la llegada y salida de los vuelos en determinados momentos del día, cuando la capacidad del aeropuerto varía en esos momentos. El primer trabajo fue hecho por Terrab y Odoni (1991) para el caso de un sólo aeropuerto, proponiendo un modelo determinístico en situaciones estáticas y dinámicas, mostrando además estrategias de solución. El caso estocástico fue resuelto por medio de los trabajos de Richetta y Odoni (1993) y Richetta y Odoni (1994). Mientras el primero resuelve el caso estático, el segundo hace lo mismo para el caso dinámico.

Extendiendo los trabajos anteriores bajo parámetros fijos, Vranas et al. (1994a) proponen la aplicación anterior para múltiples aeropuertos bajo una red estática, mientras que la para una red dinámica puede verse en el trabajo de Vranas et al. (1994b). La versión estocástica del problema se trató en el trabajo de Terrab y Paulose (1993).

Los artículos posteriores presentan el problema más general en el que participan las capacidades de los espacios aéreos donde vuelan los aviones operados por las aerolíneas, consideración introducida por primera vez por Lindsay et al. (1993). Por ejemplo, Helme (1992) propuso un modelo de *Multicommodity Flow* en una red espacio-temporal, aunque como citan los próximos autores, su performance computacional no es de las mejores pese a su simplicidad. Bertsimas y Stock Patterson (1998) presentan una formulación binaria que resuelve un caso determinístico y con ambiente estático. En base al trabajo anterior, Lulli y Odoni (2007) generan un modelo aplicable al caso de vuelos operados en Europa.

Por otro lado, Bertsimas y Stock Patterson (2000) extienden el trabajo de 1998 a un caso de ambiente dinámico. En este trabajo se considera la posibilidad de “Rerutear” vuelos a otros aeropuertos, concepto conocido como *Rerouting*. Ambos trabajos (1998 y 2000), consideran también la posibilidad de cancelar vuelos.

Siguiendo con la posibilidad de rerutear los vuelos, Bertsimas, Lulli y Odoni (2008) proponen de su modelo esta opción por medio de restricciones locales que permiten la desviación vuelos si así se requiere. Más adelante, Bertsimas, Lulli y Odoni (2011) proponen un problema de Optimización en la que se presenta como alternativa para disminuir los retrasos en las escalas y los espacios aéreos la de cambiar la velocidad de los vuelos.

Más reciente es el trabajo de Agustín et al. (2012a) que crearon un modelo binario mixto para este problema en que se puede hacer *rerouting*. Si bien, el modelo propuesto parte aplicando las variables binarias propuestas en el trabajo de Bertsimas y Stock Patterson, se proponen variables continuas que representan diferencias de tiempo entre el tiempo actual y el programado para el tiempo total de vuelo y de permanencia en el cielo del avión. Este modelo se aplicó para un caso con parámetros fijos. En el siguiente trabajo, Agustín et al. (2012b) aplican su modelo hecho con datos de naturaleza estocástica.

## 2.2 Aircraft Scheduling Recovery

Otro enfoque para minimizar los retrasos es hacer una nueva asignación de los vuelos de modo que los operen otros aviones cuando estos llegan a determinados aeropuertos. Esta forma de atacar el problema en cuestión tuvo como origen la necesidad de resguardarse ante fallas mecánicas en los aviones, aunque esto puede extenderse a retrasos por eventos meteorológicos.

El tema de Recuperación de Itinerarios de Vuelos se inicia con los resultados de Teodorović y Guberinić (1984). En este trabajo, proponen una metodología en caso que uno de los aviones que opera la compañía experimente una falla mecánica, con lo cual se tiene que rehacer los itinerarios de modo de minimizar lo mejor posible los retrasos inevitables. La forma de resolver este problema es por medio de un procedimiento de ramificación, la cual consiste en que dada una cadena de vuelos a ser operados por determinados aviones, previamente elegidas, se ramifica y busca un nuevo miembro de la cadena para ser agregada siguiendo criterios golosos. El procedimiento es una heurística que agrega soluciones paso a paso hasta cubrir todos los vuelos dados. El artículo de Teodorović y Stojković (1990) propone una heurística basada en Programación Dinámica que resuelve una función bi-objetivo, en la cual una de ellas representa los costos de cancelaciones y la otra de los costos de retraso de aviones. Haciendo énfasis en minimizar las cancelaciones, si existen soluciones múltiples se busca la mejor solución minimizando el tiempo total de retraso de vuelos. Una tercera extensión lo hacen Teodorović y Stojković (1995), en la que incorporan nuevas rotaciones de tripulación y aviones cuando ocurren perturbaciones a la planificación original de vuelos.

Otros autores modelaron este problema como aplicación de flujos en redes que se construyen dentro de una estructura espacio-tiempo. El primer trabajo al respecto es desarrollado por Jarrah y Yu (1993), que aplica los resultados de reasignación por medio de Rutas Mínimas Sucesivas, desarrollado por Gershkoff (1987). Se proponen dos modelos que respectivamente programan y cancelan vuelos al menor costo en situaciones de inconvenientes con los aviones disponibles en los aeropuertos. Dada la falta de aviones en un

aeropuerto, una serie de rutas mínimas reasignan aviones a los próximos vuelos retrasando la hora de salida o cancelando definitivamente.

Cao y Kanafani (1997a) atacan este problema del desarrollo anterior y proponen la toma de decisiones de reasignación y cancelación en un sólo problema. Debido a los costos que surgen con motivo de retrasos y asignaciones de vuelos entre aviones y cancelaciones se obtiene un modelo cuadrático binario, para la cual proponen una heurística que resuelve el problema. Los detalles de la heurística y sus resultados experimentales se pueden consultar en la segunda parte de este artículo (Cao y Kanafani, 1997b).

En otros trabajos se definen estructuras de líneas de tiempo para los cuales cada avión cumple con una secuencia lineal de escalas y cada uno tiene una posición del tiempo determinados. Yan y Yang (1996) propusieron una primera aproximación, cuyo modelo tiene una estructura de flujo en redes, en la que se encuentran definidos arcos de vuelos, permanencia en tierra y guardado por la noche de cada avión. Por medio de este modelo, proponen cuatro posibles modelos estratégicos en las que se puede decir que una es la extensión de la anterior. Dado que este problema es “difícil” de resolverlo exactamente, los autores desarrollan una heurística de solución basado en Relajación Lagrangiana. Como extensión al tema, Yan y Tu (1997) consideran este modelo y la forma de resolución para el caso de múltiples flotas. Yan y Lin (1997) hacen lo propio para el caso de cierre temporal del aeropuertos.

Las siguientes investigaciones fueron publicadas partiendo de las conclusiones obtenidas de la Tesis de Doctorado de Argüello (1997) y que se encuentra explicado en detalle en Argüello et al. (1998), en la que se modela el problema mediante una red de “Bandas de Tiempo” o *Time-Band*. En el artículo de Bard et al. (2001), se propone un modelo basado en *Multicommodity Flow*, cuyos nodos de Origen-Destino son aquellos tales que corresponden al inicio y término del intervalo de tiempo de recuperación del plan de vuelos. La dificultad de este problema fue la razón por la que Argüello y Bard (1997) desarrollaron una heurística basada en *Greedy Randomized Adaptive Search Procedure* (GRASP), que es complementado con una formulación *Time-Band*, que crea una cota inferior para el

problema, demostrando con los datos usados que la mejor solución de este problema se acerca bastante al óptimo o a veces lo alcanza. Además, se vio que el 90% de los resultados obtenidos están en un intervalo del 10% de la cota inferior.

La investigación de Rosenberger et al. (2003) propone un modelo de *rerouting* de aviones y cancelación de vuelos usando un esquema basado en *Set Packing Problem*. La propuesta considera las decisiones mencionadas las cuales pagan un costo mencionado, restringida las capacidades de los aeropuertos que varían en caso que hayan eventos meteorológicos y los denominados *time-slots* correspondientes al intervalo de tiempo en que los vuelos pueden aterrizar y despegar en los aeropuertos. Debido a que el problema es “difícil”, se desarrolló una heurística que dice cuales vuelos van a cambiar de ruta.

Aunque los trabajos que hemos presentado se enfocan sólo en una nueva programación de vuelos y aviones, han habido trabajos que integran todos los aspectos operativos, incluyendo asignaciones de tripulación y pasajeros. Esto se puede observar en Lettovsky (1997), en el que incorpora una función objetivo mixta que considera estos tres componentes de las operaciones y en la que se propone nuevas estrategias de *Branch & Bound* como forma de solución. Esta forma general de ver las operaciones es seguido por Stojković et al. (2002), que modelan las operaciones con un modelo de optimización similar a la de programación de proyectos, en la que sus respectivas tripulaciones y pasajeros pueden intercalar aviones cuando sea pertinente.

### **3. OPTIMIZACIÓN ROBUSTA**

En problemas reales, los parámetros de los modelos de optimización pueden manifestar una naturaleza aleatoria y por lo tanto los modelos donde participan pasan a ser bajo condiciones de incertidumbre, que puede provocar que los modelos determinísticos pueden ser infactibles cuando los parámetros toman ciertas realizaciones, con lo cual se requiere de técnicas que ataquen este tipo de inconvenientes.

Uno de los enfoques que disponemos para protegernos de la incertidumbre mencionada es por medio de Optimización Robusta. Esta técnica busca soluciones que sean “inmunes” a cualquier realización de los valores de los parámetros del problema. Es lo mismo a decir que está protegida de posibles perturbaciones de los parámetros, cuando estos se mueven dentro de un intervalo conocido, concepto que algunos autores denominan “Solución Robusta” (Ben-Tal, El Ghaoui y Nemirovski, 2009).

Si bien a primera vista se tiende a confundir con el análisis post-optimal, en el que disponiendo de una solución óptima de un problema se estudia cuánto puede afectar la perturbación de los datos a la solución previamente encontrada, un enfoque más bien reactivo, la Optimización Robusta es proactivo, en el sentido que anticipa la incertidumbre de los datos, buscando aquellas soluciones que sean insensibles a dicha incertidumbre (Mulvey, Vanderbei y Zenios, 1995).

#### **3.1 Presencia de Información de la Naturaleza Probabilística de los Parámetros**

Aunque conocemos la naturaleza de los parámetros como aleatorias, disponemos o no de información sobre su distribución de probabilidades. Algunos autores han trabajado sobre la hipótesis de la existencia de información probabilística de forma tal que se aplica el robustecimiento bajo el argumento de la penalización en caso de violación de ciertas restricciones. Este enfoque abrió un tópico conocido como *Robust Stochastic Programming* o “Programación Estocástica Robusta” y la primera investigación, la cual es muy citada

en trabajos posteriores y propone lo explicado antes, corresponde a Mulvey, Vanderbei y Zenios (1995).

Otros autores que trabajan este concepto de robustez son Ruszczyński y Shapiro (2003), que asumieron la existencia de información probabilística para problemas *Two-Stage* o Dos-Etapas, importantes para modelar problemas importantes como planificación de producción con inventario. Para mayor información sobre este tipo de problemas puede consultar Shapiro, Dentcheva y Ruszczyński (2009).

Los demás trabajos sobre *Robust Stochastic Programming* son aplicaciones concretas a temas de interés en Investigación Operacional.

### 3.2 Falta de Información Probabilística de los Datos

Los últimos avances consideran que los parámetros son variables aleatorias que están dentro de un intervalo determinado, pero no se dispone de información sobre la distribución de probabilidades bajo la cual obedece su comportamiento. Este enfoque es diferente a Optimización Estocástica, en la cual los parámetros siguen una distribución de probabilidad conocida o que se puede ajustar estadísticamente.

Para esto, vamos a considerar el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_j c_j x_j \\
 \text{s.a.} \quad & \sum_j a_{ij} x_j \leq b_i \quad \forall i \\
 & l_j \leq x_j \leq u_j \quad \forall j
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Supongamos que cada una de las entradas de la matriz  $A$ , llámese  $(a_{ij})_{i \in I, j \in J}$  experimentan variabilidad. Para cada parámetro definimos un valor  $\hat{a}_{ij}$  tal que:

$$[a_{ij} - \hat{a}_{ij}, a_{ij} + \hat{a}_{ij}]$$

Mientras que la constante  $a_{ij}$  es el “Valor Nominal” del dato, el valor  $\hat{a}_{ij}$  representa la dispersión máxima que experimenta una variable aleatoria, llámese  $\tilde{a}_{ij}$ , que se mueve

dentro del intervalo señalado arriba, aunque sin tener información sobre su distribución de probabilidades.

Podemos extender estos conceptos a todos los parámetros del problema. Para los  $b_i$  y  $c_i$ , definimos intervalos del siguiente modo:

$$\begin{aligned} b_i - \hat{b}_i &\leq b_i \leq b_i + \hat{b}_i \\ c_i - \hat{c}_i &\leq c_i \leq c_i + \hat{c}_i \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dado que queremos protegernos de posibles situaciones de violación de las restricciones, si se da el caso que la incertidumbre se genera en los costos  $c_i$  se considera como restricción adicional a las anteriores la siguiente:

$$\sum_j c_j x_j - t \leq 0 \quad (3.3)$$

Y optimizamos para la variable adicional  $t$  aplicando los resultados que mostraremos a continuación. Estas consideraciones ya fueron discutidos en trabajos como Ben-Tal y Nemirovski (2000), y Bertsimas y Sim (2004).

En cambio, para el caso de la variabilidad en  $b_i$ , correspondiente al lado derecho de las restricciones, se pueden reemplazar las restricciones de 3.1 por las siguientes:

$$\begin{aligned} \sum_j a_{ij} x_j - b_i y_i &\leq 0 \quad \forall i \\ y_i &= 1 \quad \forall i \end{aligned} \quad (3.4)$$

Lo cual es coherente con los mostrado para los casos anteriores anteriores (Bertsimas y Thiele, 2006).

El primer acercamiento a esta ciencia fue hecho por Soyster (1973). En su trabajo, propuso un criterio de búsqueda y aceptación de soluciones óptimas, cuando los parámetros

se encuentran contenidos en intervalos (considerando como caso particular intervalos cerrados y acotados), sin importar el hecho que puedan tener un comportamiento aleatorio<sup>1</sup>. En estos casos, se prefiere buscar el peor de los casos posibles, un criterio sumamente conservador que descarta otras posibles soluciones que son menos conservadoras o más optimistas.

Tomando lo anterior y ya asumiendo que los datos tienen comportamiento aleatorio, varios autores proponen formulaciones que protegen los problemas de optimización frente a la incertidumbre, extendiendo con esto el planteamiento original de los trabajos de Soyster.

Uno de esos trabajos corresponden a El Ghaoui et al. (1998). Estos autores introdujeron una metodología que buscaba soluciones robustas para problemas de Programación Semi-definida (SDP), que como sabemos es una generalización de los problemas de optimización lineal. El artículo citado es una extensión a su vez del trabajo de El Ghaoui y Lebret (1997) en la que se busca soluciones robustas para problemas de mínimos cuadrados.

Independiente de los anteriores, otras investigaciones que se citan son los realizados por Ben-Tal y Nemirovski (1998, 1999, 2000). Ambos investigadores proponen en dichas menciones un *Framework* para problemas convexos que están afectados por incertidumbre, expresado en conjuntos de datos que son elipsoidales<sup>2</sup>, mostrando que estos son tratables computacionalmente (Ben-Tal y Nemirovski, 1998), por lo que pueden ser resueltos en un tiempo polinomial. El estudio se aplica a muchos tipos de problemas conocidos (Cuadrático, Semidefinida Positiva y Lineales), aunque en Ben-Tal y Nemirovski (1999) hay un tratamiento especial en modelos de programación lineal.

El artículo hecho por Ben-Tal y Nemirovski (2000) aplica los trabajos de El Ghaoui y Lebret (1997); El Ghaoui et al. (1998), y Ben-Tal y Nemirovski (1998, 1999) para lograr una metodología para obtener soluciones robustas para problemas de optimización, en la

---

<sup>1</sup>El desarrollo de Soyster fue parte de lo denominado como Optimización por Intervalos, en la que los datos estaban contenidos dentro de una banda de valores posibles

<sup>2</sup>Por elipsoidales se entienden que los conjuntos son elipsoides, o bien una intersección finita de un gran número de estos.

que incorporamos en los problemas nominales lo que denominamos “Función de Protección” frente a la variabilidad.

La protección se deriva de las propiedades de los datos y está dado por la ecuación 3.5:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_j c_j x_j \\
\text{s.a.} \quad & \sum_j a_{ij} x_j + \hat{a}_{ij} y_{ij} + \Omega \sqrt{\sum_j a_{ij}^2 z_{ij}^2} \leq b_i \quad \forall i \\
& -y_{ij} \leq x_j - z_{ij} \leq y_{ij} \quad \forall i, \forall j \in J_i \\
& l_j \leq x_j \leq u_j \quad \forall j \\
& y_{ij} \geq 0 \quad \forall i, \forall j \in J_i
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Con  $J_i$  el conjunto de parámetros sujetos a variabilidad para la restricción  $i$ .

Para esta expresión, a cada restricción en donde existen parámetros inciertos se le agregó una función de protección que resulta ser la combinación de incertidumbres por intervalos y elipsoidales (Bertsimas y Sim, 2004). El valor  $\Omega$  es un parámetro que acota la probabilidad que las restricciones sean violadas, la cual acota de la siguiente manera:

$$\mathbb{P} \left( \sum_j a_{ij} x_j > b_i \right) \leq \exp \left( \frac{-\Omega^2}{2} \right) \tag{3.6}$$

Para esta cota, los parámetros  $a_{ij}$  no asumen una distribución de probabilidad en particular, salvo que estas sean simétricas.

Si bien este modelo ofrece una protección contra la incertidumbre, esta formulación es no lineal aunque convexa y su resolución es complicado, en especial cuando las variables de decisión son enteras. Este comentario, referido por trabajos posteriores, fue importante para ofrecer una solución alternativa a la de las estas investigaciones.

Podemos decir que los autores nombrados en esta sección fueron los pioneros en el campo de la Optimización Robusta en que la falta de información probabilística de los datos juega un rol clave dentro de sus supuestos. Muchos autores que han contribuido en

este campo citan los trabajos de ellos. Para una mayor y ordenada información respecto de las teorías mencionadas antes puede consultar Ben-Tal, El Ghaoui y Nemirovski (2009).

### 3.3 Función de Protección Lineal: *The Price of Robustness*

Bertsimas y Sim (2004) desarrollaron una nueva formulación robusta, la cual no sacrifica la linealidad del problema original como ocurren en los trabajos de Ben-Tal et al..

Para cada restricción  $i \in I$ , consideramos un conjunto  $J_i$  de variables  $j$  sujetos a incertidumbre. Sea  $\Gamma_i$  un parámetro que ajusta el nivel de protección frente a la variabilidad de los datos, siendo no necesariamente entero y que se encuentra definido entre 0 y la cardinalidad del conjunto  $J_i$ . Con esto, tenemos que para  $\Gamma_i = 0$  el problema es equivalente al problema nominal, mientras que si  $\Gamma_i = \text{card}\{J_i\}$  tenemos el enfoque de Soyster que es el más conservador posible.

Con estas definiciones, planteamos el problema propuesto por ambos autores:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_j c_j x_j \\
 \text{s.a.} \quad & \sum_j a_{ij} x_j + z_i \Gamma_i + \sum_{j \in J_i} p_{ij} \leq b_i \quad \forall i \\
 & z_i + p_{ij} \geq \hat{a}_{ij} y_j \quad \forall i, \forall j \in J_i \quad \forall i, j \\
 & -y_j \leq x_j \leq y_j \\
 & l_j \leq x_j \leq u_j \quad \forall j \\
 & y_j \geq 0 \\
 & z_i \geq 0 \\
 & p_{ij} \geq 0
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Las variables  $z_i$  y  $p_{ij}$  representan las variables duales del siguiente problema:

$$\begin{aligned}
& \max \quad \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} |x_j^*| z_{ij} \\
& \text{s.a.} \quad \sum_{j \in J_i} z_{ij} \leq \Gamma_i \\
& \quad \quad 0 \leq z_{ij} \leq 1 \quad \forall i, \forall j \in J_i
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Este es un problema lineal con variable de decisión  $z_{ij}$  para un valor de  $x_j$  dado. Se busca maximizar la protección frente la incertidumbre, la cual corresponde a la linealización de una función de protección equivalente no lineal. Al igual que los trabajos anteriores, cuestiona la posibilidad de que exista una violación de restricciones debido a realizaciones de los datos inciertos del modelo. Este trabajo demostró que la probabilidad que exista violación queda acotado por el siguiente valor.

$$\mathbb{P} \left( \sum_j a_{ij} x_j \geq b_i \right) \leq \exp \left( -\frac{\Gamma_i^2}{2|J_i|} \right) \tag{3.9}$$

Aunque esta cota no es interesante si es que estamos trabajando para niveles de protección demasiados pequeños. Los autores crean otras cotas mejores para esta probabilidad que funcionan cuando el nivel de protección es pequeño, pero a medida que se acercan a niveles de protección más conservadores son prácticamente iguales, para lo cual se puede consultar Bertsimas y Sim 2004, pag. 39–40.

Los autores introducen un nuevo concepto conocido como *Price of Robustness*, definido como el efecto en la función objetivo cuando variamos el nivel de protección  $\Gamma_i$ . Se demuestra que existe un *Trade-Off* entre la protección frente la incertidumbre (y por ende de la probabilidad de violación de restricciones) y el valor representado por la función objetivo.

Previamente, en 2003, ambos autores citados publicaron aplicaciones de esta investigación a problemas de Optimización Entera y Flujo en Redes, basándose en trabajos previos en esta materia, como Kouvelis (1997) y Averbakh (2001).

Los siguientes artículos son ejemplos de aplicaciones prácticas de Optimización Robusta en la que el problema obtenido no siempre coincide con lo pedido en la literatura, por lo que se hacen algunas modificaciones que permitan aplicarlo.

Uno de ellos es el artículo de Bohle, Maturana y Vera (2010). Se propone un modelo de planificación de cosecha de uvas para la producción de vinos, con una única fuente de incertidumbre dada por la productividad de la cosecha en forma manual. La restricción que se obtiene comprende una sola variable y una solución robusta para este tipo de problemas corresponde siempre a la más conservadora posible. Por esto, se agrega una restricción redundante que agrupa a todas las variables y se hace una protección de todas las restricciones mencionadas.

El ejemplo de Shafia et al. (2011), es el de una aplicación a un problema de *Job Shop Scheduling* en la cual existe restricciones por la asignaciones de tareas a solo una máquina. Al igual que en el problema anterior son desagregadas, por lo que los autores proponen replantear el modelo completo agregando además una restricción redundante que protegen, similar al artículo anterior. Debido a la dificultad de resolución del problema, proponen una heurística basada en *Simulated Annealing*, la cual analizan variando los parámetros que participan de este algoritmo.

## **4. FORMULACIÓN DEL MODELO DE NUEVA PROGRAMACIÓN DE VUELOS AÉREOS**

Vamos a proponer en este capítulo un nuevo modelo que toma conceptos extraídos tanto de la literatura como de la forma que tienen las compañías aéreas de modelar el seguimiento de sus operaciones diarias. El propósito es formular la programación de vuelos como uno de optimización en la que vamos a añadir la incertidumbre de los datos que hagan existan problemas de infactibilidad, para lo cual agregaremos una protección siguiendo los conocimientos propuestos en el capítulo anterior.

Este problema de Optimización está hecho de tal forma que tiene como solución óptima nominal el cumplimiento cabal de todo el plan de vuelos, en los tiempos programados y sin retrasos que generen costos adicionales por minuto de retraso que obliguen por ejemplo a que ciertos vuelos sean operados por otros aviones (Cao y Kanafani, 1997a).

Esto es en el caso ideal, ya que una vez que el problema experimente incertidumbre, la construcción del modelo hace que se tengan que tomar dos decisiones. En primer lugar, se tienen que asignar los vuelos que lleguen a su destino a los próximos que estén por salir, equivalente a determinar el plan de vuelos para un avión determinado. La otra decisión es la de retrasar la hora de salida de los vuelos en dificultades, el cual es importante sobre todo si estamos experimentando inconvenientes de algún tipo.

Ambas decisiones que se tomen estarán obligadas a pagar un costo, por lo que la función a minimizar es el costo total otorgado por la suma de los costos de estas decisiones. Ante el escenario de la incertidumbre se tienen que pagar costos adicionales, que es lo mismo a pagar un determinado precio por protegerse el problema ante la incertidumbre, obteniendo una solución robusta del problema de optimización.

Para modelar esto, vamos a considerar una planificación de vuelos dispuestos a ser operados para un día cualquiera del año, la que podemos ver en la figura 4.1.

En ella, la recta horizontal corresponde al tiempo expresado en horas, mientras que la vertical corresponde al vuelo que es operado. Cada barra horizontal es un vuelo, concepto conocido como *Flight Leg*. Cada uno de estos tiene un par origen-destino (el cual puede

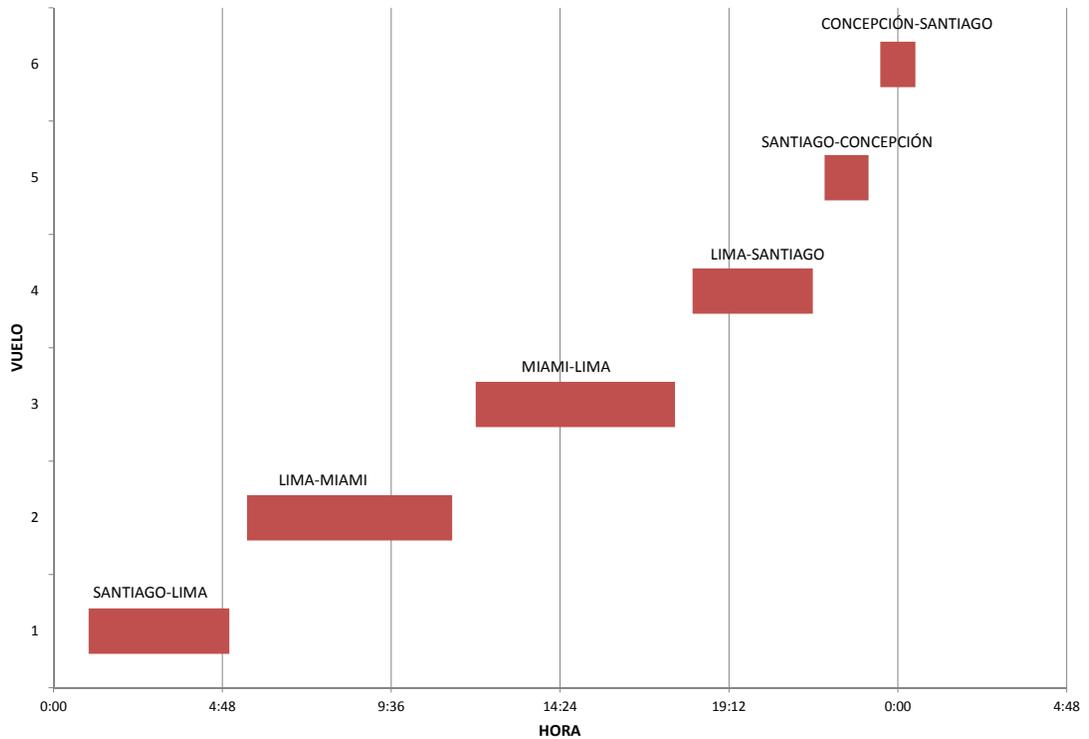


FIGURA 4.1. Programación de Vuelos para un Avión

verse sobre cada una de estas), horas de salida-llegada y un largo, que es su duración estimada.

Por lo general, las compañías aéreas muestran la *Carta Gantt* no sólo para un avión, sino que para todos los que componen su flota, como se muestra en la figura 4.2.

Podemos ver que hemos ordenado los vuelos según el avión que los va a operar. Cada barra es un vuelo o *Flight Leg*, definido de modo similar en la figura 4.1, por lo que todos los itinerarios de todos los aviones están en ella.

Si bien lo ideal es que el plan se cumpla, ocurre que debido a razones fuera de nuestro control este plan original no se cumple y se tiene que hacer un nuevo plan, buscando minimizar los costos adicionales que inevitablemente se van a tener que asumir.

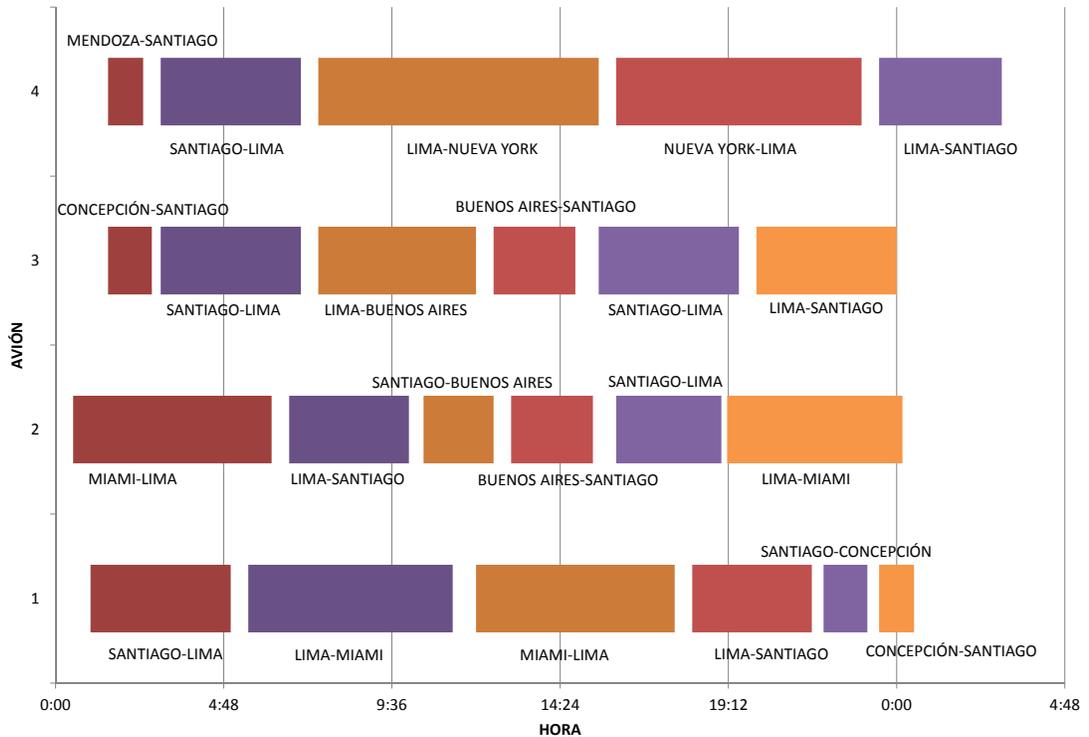


FIGURA 4.2. Programación de Vuelos para cuatro aviones

Para modelar estos itinerarios vamos a asumir que cada vuelo es una tarea que tiene una hora de inicio y un tiempo de duración, esperando terminar en el momento programado. Lo interesante de este enfoque es que a diferencia de la manera tradicional de modelar la programación de tareas, tenemos que cada una de las tareas tienen que ser hechas por una y sólo una máquina (sin interrupciones), lo que equivale a que tiene que ser operado por un solo avión. Esto es lo mismo que la programación de procesos tipo *Job Shop Scheduling* Garey et al. (1976) en la que operaciones de una tarea se programan en una sola máquina al menor costo de tiempo posible.

Siendo rigurosos, la formulación propuesta se asemeja a una variante del problema anterior, llamado *Flexible Job Shop Scheduling* (Kacem et al., 2002), donde cada vuelo

es visto como una tarea, pero las que le siguen están dentro de un conjunto de posibles alternativas, cada una de las cuales pueden hacerse o no, lo que equivale a cancelar un vuelo, por lo que cada itinerario equivale a un conjunto de tareas hechas.

Para entender mejor esto, tenemos el ejemplo de la figura 4.2, mostrada de la siguiente manera.

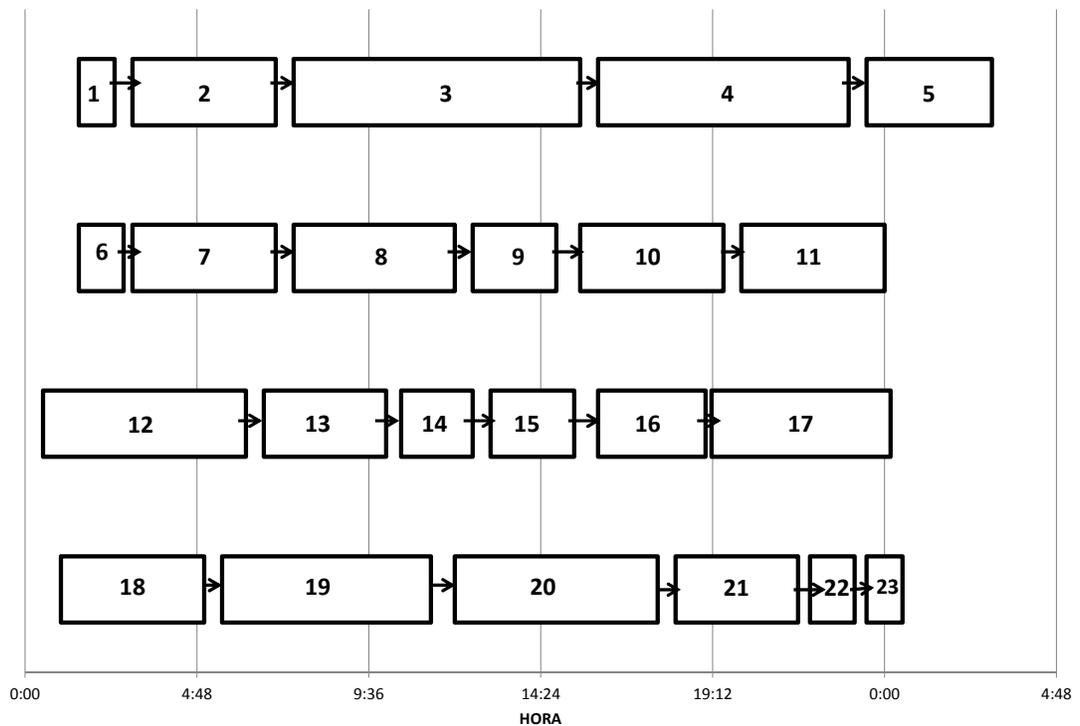


FIGURA 4.3. Programación de vuelos visto como un grafo

Todos los vuelos o “procesos” se encuentran enumerados, mientras que las flechas corresponden a asignaciones entre un vuelo de una que llega a su destino y el siguiente para un avión. Con estas definiciones, tenemos 4 aviones que operan 4 planes distintos de vuelos.

La figura 4.3 es una solución del problema cuando no existen variabilidad. En caso contrario, sabiendo que tenemos dos decisiones a nuestro haber, asignación y programación, podemos calcular nuevas soluciones actualizando la asignación de vuelos a los aviones o haciendo que salgan más tarde. Un ejemplo lo muestra la figura 4.4.

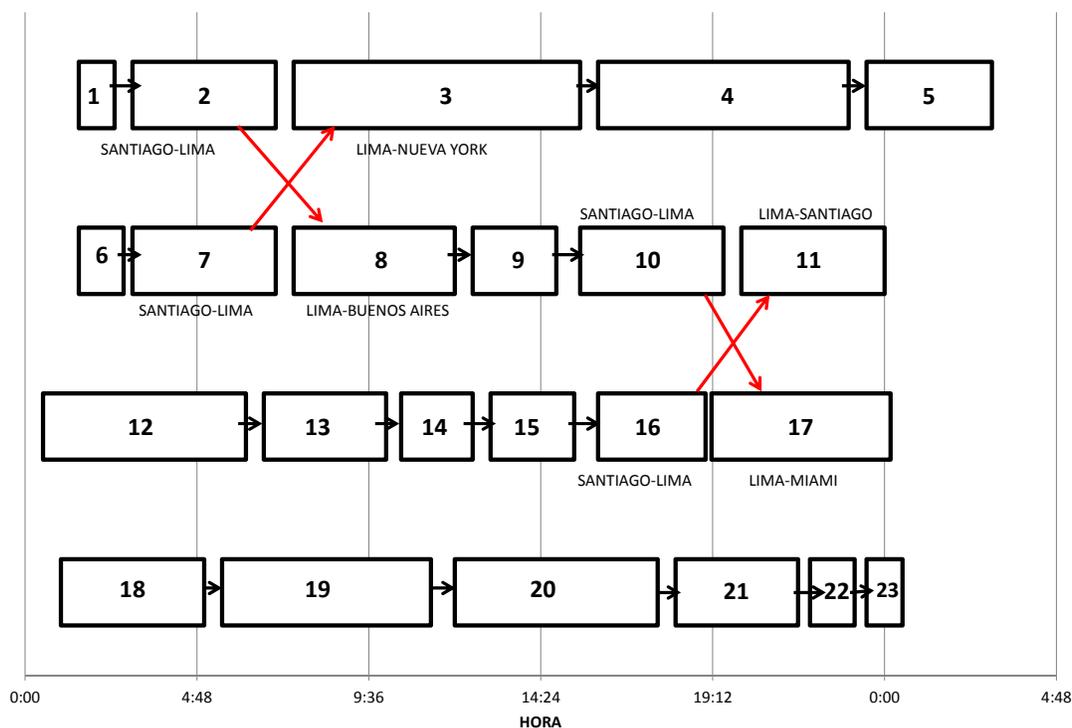


FIGURA 4.4. Ejemplo de reasignación de vuelos

En base a la figura 4.2, las nuevas asignaciones (marcadas en rojo) ocurren en vuelos cuyo destino es Lima, por lo que los próximos vuelos que salen de allí van a ser operados por otros aviones con un costo de por medio, aunque también las asignaciones pueden involucrar la cancelación de ciertos vuelos.

Se puede dar que para un vuelo dado, el próximo sea aquel que está más allá del intervalo de tiempo que estamos estudiando (lo que eventualmente involucra un buen número de vuelos cancelados). Para enfrentarlo, completamos el grafo agregando un nodo “Destino” correspondiente a una demanda, como se ve en la siguiente figura.

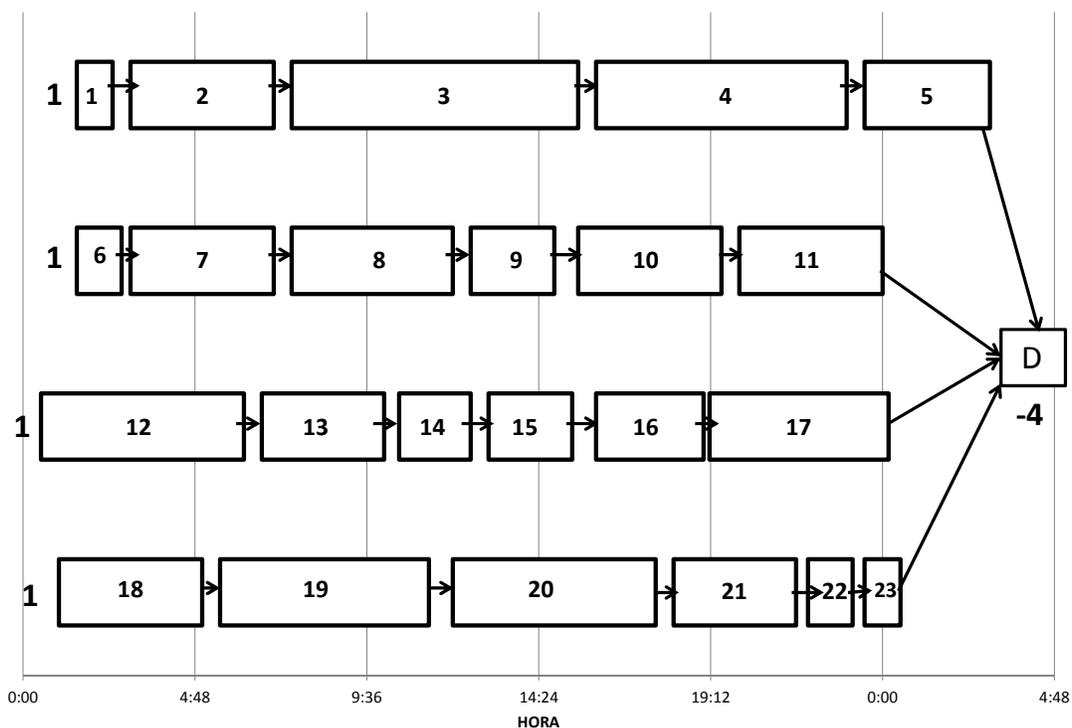


FIGURA 4.5. Grafo completo con nodo Destino

La figura muestra que los vuelos que están en el inicio del intervalo de tiempo de nuestro estudio corresponden a “Ofertas” iguales a 1, mientras que el nodo “Destino” tiene una demanda de 4<sup>1</sup>. Con esto, obtenemos un problema de optimizar en la que enfocamos

<sup>1</sup>Equivalente a una oferta de -4

la programación de vuelos como procesos y en que las restricciones que tendremos que incorporar van a ser los relacionados con *Minimum Cost Flow* y *Job Shop Scheduling*.

En las siguientes secciones, describiremos los supuestos que vamos a usar en esta investigación, siguiendo con la formulación matemática propiamente tal, consistente en las variables, restricciones y función objetivo que utilizaremos, describiendo su significado en el contexto de este problema.

## **4.1 Supuestos a Considerar**

Los siguientes supuestos buscan simplificar el problema para la formulación del modelo sin sacrificar demasiado la realidad que buscamos modelar.

### **4.1.1 Mismo modelo de Avión**

Para nuestro modelo vamos a suponer que estamos considerando el mismo modelo de avión. Esto implica que el tiempo de permanencia en los aeropuertos desde el momento de llegada del avión hasta el momento de partir a su siguiente vuelo van a ser iguales.

Este tiempo de permanencia, llamado *Turnaround*, consiste en la preparación del avión para su siguiente vuelo, en la que se hacen los procesos de revisión, limpieza y recarga de combustible. El *turnaround* es un tiempo de espera de la tripulación y pasajeros para que aborden el avión para partir.

### **4.1.2 Tiempos de Permanencia en Tierra Invariables**

Sabiendo que los *turnaround* de todos los aviones son iguales, vamos a suponer que ninguno de estos sufren variaciones de ningún tipo. Esto significa que no hay retrasos en las preparaciones de los aviones ni en las llegadas de la tripulación ni pasajeros, por lo no existen retrasos adicionales antes de partir a su siguiente vuelo.

### **4.1.3 Unidades de Tiempo Similares**

Dejaremos en claro la unidad de tiempo con la que expresaremos los tiempos de salida y llegada de vuelos, duración de los vuelos y permanencia de los aviones en los aeropuertos para su preparación para su próximo vuelo. La unidad elegida es horas.

### **4.1.4 Intervalo de Tiempo de Estudio**

Consideraremos un conjunto de operaciones aéreas que están contenidos dentro de un cierto rango de tiempo, por ejemplo 24 ó 48 horas. Dependiendo de la complejidad del problema, para evitar que el tiempo de resolución de los casos que mostraremos en los próximos capítulos se alargue demasiado, dejaremos en claro el rango de horas que van a abarcar nuestros estudios.

Otra cosa a destacar es que no nos referiremos al tiempo con su expresión hora-minuto. Por comodidad, dejaremos esto expresado como un número continuo comenzando desde 0 hasta la hora final del intervalo. Por ejemplo, la hora 25 equivale a las 1:00 hrs. del día siguiente.

### **4.1.5 Fuente de Variabilidad: Tiempo de Vuelos**

Como sabemos, factores externos pueden afectar los tiempos de los vuelos, por lo que no siempre llegan a la hora prometida. Por esto es que en nuestro modelo vamos a suponer que es el tiempo de vuelos el que experimenta incertidumbre, el cual va a estar contenido en un intervalo definido.

Los tiempos son independientes entre todos los vuelos considerados. Esto para aplicar la protección frente a su incertidumbre sin agregar más variables relacionados con la correlación que puede existir entre ellas. Es posible que exista correlación, pero para efectos prácticos es tan pequeña que la vamos a omitir.

Más adelante vamos a detallar cómo es la incertidumbre en nuestro modelo matemático.

#### 4.1.6 Operaciones Continuas y sin Fallas

Muchas aerolíneas pueden verse afectadas por la falla imprevista de algún avión que cause un retraso considerable de ciertos vuelos programados antes. Vamos a suponer que esto no ocurre, debido a que esto afectaría la permanencia en tierra de algún avión.

Otro hecho es que la línea aérea siempre va a estar operativa y ningún avión va a estar detenido en algún aeropuerto, bajo el argumento de costos de oportunidad de dejar el avión parado frente a la opción de operarlo para más vuelos.

Es posible que un avión quede detenido para un mantenimiento programado dentro del mismo plan de vuelos. Es normal que esto ocurra, que en las compañías aéreas por especificaciones de los fabricantes de aviones, los mantenimientos deben hacerse. Por ahora, no vamos a considerar mantenimientos, aunque pueden modelarse como “vuelos virtuales” debido a que en el fondo son procesos que toman tiempo.

## 4.2 Definición de Conjuntos

Definimos los siguientes conjuntos que nos ayudarán a entender los roles que cumplen cada nodo de nuestra red:

$N$ : Conjunto de nodos, cada uno de los cuales corresponde a uno de los vuelos considerados y el nodo de “Destino”

$F \subset N$ : Conjunto de vuelos programados con anticipación a ser operados.

$O \subset F$ : Conjunto de vuelos que están actualmente en etapa de operaciones.

$P \subset F$ : Vuelos próximos a ser operados por un avión.

## 4.3 Parámetros

Los parámetros que definiremos a continuación guardan relación con costos y tiempos. Entre los costos tenemos los de asignación y por retraso, mientras que en los tiempos están los de duración de vuelos y *turnaround*, definido como el de permanencia del avión en tierra para prepararse para el siguiente vuelo.

Por una parte, tenemos los siguientes costos:

$a_{ij}$ : Costo de asignar al vuelo  $i$  el vuelo  $j$ .

$d_i$ : Costo de retrasar el vuelo  $i$  respecto de su hora original de salida.

Mientras que por el otro, definimos los siguientes parámetros temporales:

$TF_i$ : Tiempo de operación del vuelo  $i$ . Este es el tiempo que un vuelo tarda en partir de su origen y llegar a su destino.

$TRD_{ij}$ : Tiempo de *turnaround* entre los vuelos  $i$  y  $j$ . Debido a que estamos trabajando con un mismo modelo de avión, vamos a considerar que este valor es similar para todo  $i$  y  $j$ .

$TDO_i$ : Tiempo programado de salida para el vuelo  $i$ .

## 4.4 Variables del Modelo

Dentro de nuestro modelo distinguimos dos tipos de variables. Las variables de decisión, aquellas que van a estar relacionados con la de asignación de vuelos para un avión determinado. Y las de programación de hora de salida de vuelos una vez que ocurre lo primero. Otras variables tienen el carácter de auxiliares, los cuales contribuyen con la decisión de retrasar los vuelos más allá de ciertos umbrales, que implican un aumento significativo de los costos de retraso por minuto de tiempo.

### 4.4.1 Variables de Decisión

Se definen las siguientes variables de decisión:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si se asigna el vuelo } j \text{ como vuelo siguiente de } i \\ 0 & \text{Si no} \end{cases}$$

$$TD_i = \text{Tiempo efectivo de salida del vuelo } i \in F$$

#### 4.4.2 Variables Auxiliares

Definimos las siguientes variables auxiliares:

$r_{1i}$  =Retrasar desde más de 15 minutos (0,25 horas) hasta 30 minutos (0,5 horas) el vuelo  $i \in F$ .

$r_{2i}$  =Retrasar más de 30 minutos y menos de 45 minutos (0,75 horas) el vuelo  $i \in F$ .

$r_{3i}$  =Retrasar más de 45 minutos hasta cierto límite (un valor grande) el vuelo  $i \in F$ .

$cd_i$  =Costo Total de retraso, tomando en cuenta los retrasos más allá de las tolerancias  $i \in F$

#### 4.5 Restricciones para las Variables de Asignación

Las restricciones que mostraremos a continuación guardan relación con las variables binarias  $x_{ij}$  que son las que deciden cuál vuelo es el próximo para un avión dado. Estas restricciones sirven para tratar el problema de asignación de vuelos para un avión como uno de *Minimum Cost Flow*.

##### 4.5.1 Conservación de Flujos por Nodo

La conservación de flujos es una de las características de cualquier modelo de este tipo. En nuestro caso, hemos definido unos nodos “Origen” y un nodos “Destino” en el inicio de este capítulo. Mostramos la restricción de conservación de flujo:

$$\sum_{r \in N} x_{ir} - \sum_{t \in N} x_{ti} = s_i \quad \forall i \in N \quad (4.1)$$

Siendo  $s_i$  el siguiente valor:

$$s_i = \begin{cases} 1 & i \in O \\ 0 & i \in P \quad \forall i \in F \\ -card\{O\} & i \in D \end{cases}$$

Con esto, definimos matemáticamente que los aviones que están siendo operados al inicio del horizonte son los nodos de oferta iguales a uno, mientras que el destino recoge la totalidad de ofertas por medio de su demanda igual a la suma de los vuelos en operación en el inicio del intervalo de estudio.

#### 4.5.2 Asignación del Vuelo Siguiete

Esta restricción es importante porque muestra que el enfoque de proyecto que vamos a detallar en las restricciones de programación de tiempos de vuelos, es el que llamamos *Job Shop Scheduling*:

$$\sum_{j \in F} x_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in F \quad (4.2)$$

Con la ecuación 4.2 un vuelo  $i$ , el siguiente vuelo  $j$  que va a operar tiene que ser a lo más uno.

#### 4.6 Restricciones de Programación para la Hora de Salida de Vuelos

La restricción de programación de vuelos tiene relación con la salida efectiva de los vuelos, dado que se da una asignación para un avión determinado. Es una restricción fundamental dentro de los problemas de *Job Shop Scheduling*, ya que con esto se garantiza el cumplimiento del “proceso” o vuelo pendiente por parte de una “máquina” o avión.

Esta restricción nos va decir que el tiempo de salida de un vuelo  $j$  depende del tiempo de salida del vuelo anterior  $i$  más su tiempo de operación y de *turnaround* para un avión determinado.

$$TD_j \geq TD_i + TF_i + TRD_{ij} - M \cdot (1 - x_{ij}) \quad \forall i \in F, j \in P \quad (4.3)$$

Considerando un  $M$  lo suficientemente grande.

La ecuación anterior está descrito usando un tipo de restricciones llamando “Disjunciones”. Este tipo de restricción relaciona las variables de asignación  $x_{ij}$  con las de programación  $TD_i$  del siguiente modo: Si  $x_{ij} = 1$  significa que asignamos el vuelo  $j$  como siguiente de  $i$ . Luego, la restricción queda así:

$$TD_j \geq TD_i + TF_i + TRD_{ij} \quad \forall i \in F, j \in P \quad (4.4)$$

Con lo que la programación de la salida del vuelo  $j$  depende de los tiempos de salida y operación de  $i$ , elegido previamente.

En cambio, en el caso que  $x_{ij} = 0$  la restricción queda de la forma escrita abajo:

$$TD_j \geq TD_i + TF_i + TRD_{ij} - M \quad \forall i \in F, j \in P \quad (4.5)$$

Dado que el valor  $M$  es grande, al restarlo con los valores asociados al vuelo  $i$ , no influyen en lo absoluto en el tiempo de salida del vuelo  $j$ . Dicho esto, se concluye que las disjunciones hacen que el tiempo de salida de un vuelo  $j$  dependa de solamente un vuelo anterior  $i$ .

Para mayor información respecto de este tipo de restricciones puede consultar Wolsey (1998).

Además cabe considerar que se tiene que cumplir con un plan original de vuelos, cada uno de los cuales tienen que partir al menos en el horario previamente planificado. Por esta razón, se agrega a la restricción la ecuación 4.6:

$$TD_i \geq TDO_i \quad \forall i \in F \quad (4.6)$$

## 4.7 Restricciones al Retraso de Vuelos

Estas restricciones tienen relación con la política de retraso cuando el tiempo de partida supera ciertas tolerancias, es decir aquellas en las que participan las variables auxiliares  $r_{1i}$ ,  $r_{2i}$  y  $r_{3i}$ , los cuales guardan relación con la exclusión entre estas decisiones y los costos que finalmente van a cuantificarse en la función objetivo. La idea es que a medida que se cruzan estas tolerancias estas restricciones operan de modo tal que los costos de retraso de un vuelo determinado aumentan.

Veremos que nuevamente ocuparemos las restricciones, los cuales modelarán el hecho que la pendiente de los costos de retraso mencionados aumenta.

#### 4.7.1 Exclusión de Variables

En este modelo estamos autorizados a retrasar hasta 15 minutos con el costo original de retraso. Cuando sea necesario, podemos retrasar aún más, hasta 30, 45 y mucho más de ese valor en minutos, con lo cual los costos por ese concepto se multiplican.

La toma de decisiones de retrasar los vuelos, cuya consecuencia es el ascenso en su costo depende de la diferencia entre el tiempo de salida efectivo del vuelo  $i$  y su tiempo programado, las cuales mostramos en las restricciones 4.7 y 4.8

$$TD_i - TDO_i \leq 0,25 + 0,25 r_{1i} + 0,5 r_{2i} + 100 r_{3i} \quad (4.7)$$

$$TD_i - TDO_i \geq 0,25 r_{1i} + 0,5 r_{2i} + 100 r_{3i} \quad (4.8)$$

Estas diferencias activan una de las variables, dependiendo de los niveles de tolerancia permitidos. Como queremos que sola una de las variables se active, tenemos que agregar la restricción 4.9:

$$r_{1i} + r_{2i} + r_{3i} \leq 1 \quad \forall i \in F \quad (4.9)$$

La cual nos indica que sola y solamente una de las variables es la que se tiene que activar al momento de ejecutar la decisión de retrasar el vuelo. Como lo dijimos antes, la idea es que al momento de retrasar el vuelo se tiene que pagar un costo adicional por retrasar el vuelo.

#### 4.7.2 Costo Efectivo por Retraso de Vuelos

El aumento en los costos de retraso considerando las restricciones de la subsección anterior, se puede modelar considerando una vez más restricciones de disjunción, definidos esta vez mediante las variables  $r_{1i}$ ,  $r_{2i}$  y  $r_{3i}$ . Las siguientes ecuaciones hacen uso de los costos de retrasar más allá de ciertos límites que implican multiplicar el costo de retrasar y que vamos a relacionar con las variables adicionales  $cd_i$ .

$$cd_i \geq d_i \cdot (TD_i - TDO_i) - M \cdot (r_{1i} + r_{2i} + r_{3i}) \quad (4.10)$$

$$cd_i \geq 10 \cdot d_i \cdot (TD_i - TDO_i) - M \cdot (1 - r_{1i}) \quad (4.11)$$

$$cd_i \geq 50 \cdot d_i \cdot (TD_i - TDO_i) - M \cdot (1 - r_{2i}) \quad (4.12)$$

$$cd_i \geq 80 \cdot d_i \cdot (TD_i - TDO_i) - M \cdot (1 - r_{3i}) \quad (4.13)$$

Como vemos, estas restricciones son disjuntivas entre sí. Cuando ninguna de estas variables se activa sólo la ecuación 4.10 es la que determina el costo por retraso, mientras que las ecuaciones 4.11, 4.12 y 4.13 se van a activar siempre y cuando sean necesarias, aunque eso depende de la situación si se quiere evitar multiplicar los costos de retraso.

## 4.8 Naturaleza de las variables

Las variables de decisión consideradas son  $x_{ij}$  y  $TD_i$ , quienes son binaria y continua respectivamente. Las variables auxiliares  $r_{1i}$ ,  $r_{2i}$  y  $r_{3i}$  son binarias, mientras que las variables  $cd_i$  son continuas.

Por lo tanto, podemos describir algebraicamente las variables consideradas así:

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in F, j \in P$$

$$TD_i \geq 0 \quad \forall i \in F \quad (4.14)$$

$$r_{1i}, r_{2i}, r_{3i} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in F$$

$$cd_i \geq 0 \quad \forall i \in F$$

## 4.9 Función Objetivo

La Función Objetivo busca minimizar los costos adicionales producto de posibles decisiones que comprometen el cumplimiento del plan de vuelos original.

Esto en el mejor de los casos, porque si suceden casos de posibles retrasos y reasignaciones producto de la no controlable fuente de incertidumbre. Por esto, la función objetivo es:

$$\min \sum_{i \in F} \sum_{j \in P} a_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in F} cd_i \quad (4.15)$$

Notamos nuevamente que la función objetivo suma los costos por las respectivas decisiones de retrasar y reasignar, bajo las restricciones que enlazan ambas decisiones. Esto es importante, ya que para minimizar los retrasos se tendrá que retrasar o cancelar vuelos con costos que pagar. Por otra parte, si uno no quiere asignar vuelos, lo mejor es que se tiene que retrasar algunos vuelos y pagar los costos debidos.

Sabiendo que la solución nominal es la planificación inicial de operaciones, para que esto efectivamente ocurra hacemos que los costos de asignación para aviones de un mismo itinerario sean costo cero. A menos que variamos algún parámetro, el plan de vuelos se cumple a la perfección, sin retrasos ni reasignaciones. Lo interesante es ver qué pasa cuando no se cumplen los planes esperados debido a la incertidumbre de los tiempos de vuelo.

## 4.10 Incertidumbre de Este Modelo

La discusión importante antes de hacer un proceso de protección del problema frente la incertidumbre, es sobre el parámetro que experimenta la variabilidad, razón por la cual si no se protege anticipadamente puede suceder que para ciertas realizaciones de estos parámetros el problema entero queda incierto.

En el caso de los problemas de planificación de procesos, la realidad nos muestra que los parámetros de tiempo experimentan incertidumbre, por lo que ocurre que ciertos procesos pueden terminar antes o después del tiempo nominal de finalización.

En nuestro problema pasa esto, es decir la incertidumbre corre por los tiempos de los vuelos, debido a factores externos como las condiciones actuales meteorológicas, los cuales hacen que los vuelos no se cumplan a la perfección y que los vuelos siguientes tengan que salir más retrasados que los anteriores.

Respecto del tiempo de *turnaround*, es razonable también asumir que experimentan incertidumbre, pero debido a que estas incertidumbres pueden ser muy menores si los comparamos con la variabilidad de los tiempos de vuelos, vamos a suponer que no existe este efecto en los tiempos en tierra de cada avión.

Por lo tanto, el parámetro del tiempo de vuelo  $TF_i$ , es la que es incierto. A diferencia del tiempo de *turnaround* que se cumple de forma íntegra y en los tiempos programados con anticipación.

#### **4.11 Criterio de Asignación de Vuelos**

Originalmente, se tiene un plan de vuelos en las que hay asignaciones definidas con costo cero, operadas por un determinado avión. Eso es lo que se define como un itinerario. Cuando hay inconvenientes, se toman decisiones que forma tal que impiden que se incurran en costos adicionales de operación.

Si se desea reasignar vuelos entre itinerarios, el modelo debe permitirlos de tal forma que tengan sentido. Es decir, hacer reasignaciones que cumplan con una serie de requisitos que detallaremos a continuación. El propósito de estos criterios es la de programar una rutina computacional que encuentre todas las posibles conexiones para el vuelo que llega a su aeropuerto de destino además del que le corresponde por itinerario.

#### 4.11.1 Escalas en Común

Sabemos que cada vuelo tiene un origen y un destino. Por ejemplo el vuelo “Santiago-Lima” quiere decir que su origen es Santiago y su destino es Lima. En los próximos capítulos vamos a referirnos a las escalas por su aeropuerto, usando de forma simplificada su código IATA. Este código es con el que frecuentemente se refieren los expertos en temas de transporte aéreo a los aeropuertos alrededor del mundo.

Cuando el vuelo está en su destino, tiene que ser reasignado a un vuelo siguiente. Los próximos vuelos tiene que tener como punto origen la misma escala que el destino de este vuelo. Esto se tiene que cumplir tanto para vuelos de su propio itinerario, a saber, el siguiente a ser operado y aquellos que vienen mucho después (que se traduce en la cancelación de los vuelos intermedios), como los vuelos siguientes de otros itinerarios programados.

#### 4.11.2 Tiempos Posteriores de Vuelos

Es importante conocer que los vuelos que serán asignados son aquellos que vienen en un tiempo próximo al que está ya en su destino. Por esto es que el siguiente criterio de asignación de vuelos, es la de aquellos que tienen un tiempo posterior al de la llegada del vuelo que llega. La explicación es obvia si miramos la figura 4.6.

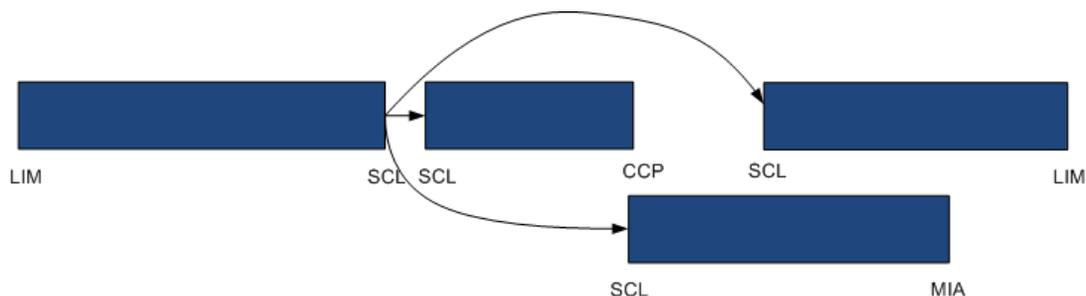


FIGURA 4.6. Asignación de vuelos para escalas en común

Para todos los vuelos, consideramos sólo los tiempos de llegada estimados al puerto de destino. Luego, se consideran como posibles asignaciones las próximas operaciones

teniendo en cuenta solo los tiempo de salida programados, tanto para vuelos del mismo itinerario previo como los de otros itinerarios para los cuales hacemos un cruce de estos.

### 4.11.3 Intervalos de Tiempo

Hacemos un especial hincapié en este criterio. Esta forma de asignar vuelos considera aquellos cuyo tiempo de llegada para un itinerario puede ser posterior al de salida de otros de los restantes itinerarios.

Para entender esto, analicemos el caso dado por la figura 4.7.

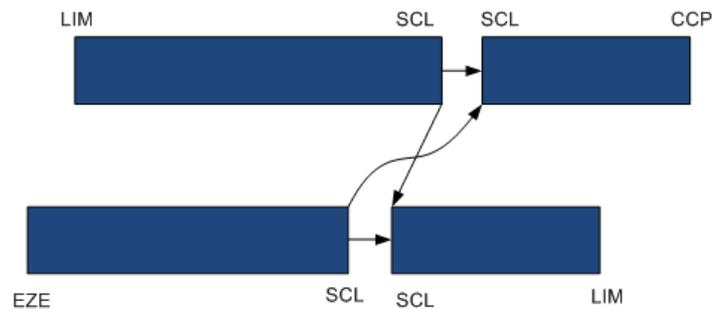


FIGURA 4.7. Asignaciones posibles para cuatro vuelos

Este caso tendría sentido si alguno de los vuelos que llegan, Lima-Santiago (LIM-SCL) y Buenos Aires-Santiago (EZE-SCL), se retrasan. Supongamos que el vuelo Buenos Aires-Santiago se retrasa, por lo que existe una extensión de su tiempo de operación. Este caso lo podemos ver en la figura 4.8 y el retraso se muestra con color gris.

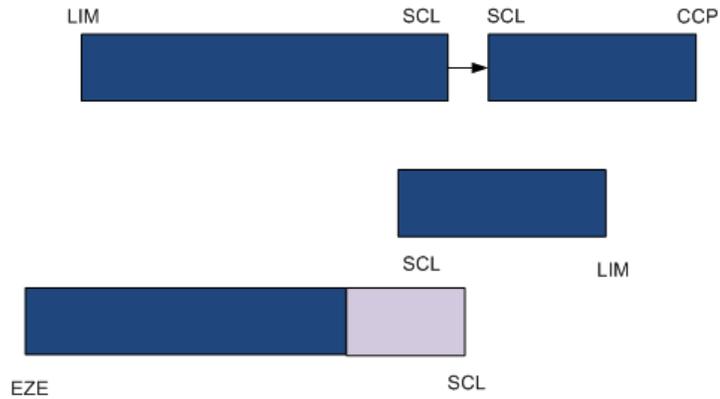


FIGURA 4.8. Situación de retraso de uno de los vuelo de la figura 4.7

Para poder mitigar los costos adicionales por retraso, una forma es hacer un cruce de itinerarios, en la que vuelos asignados a determinados aviones se reasignan a otros vuelos. Esta reasignación se ve de forma gráfica en la figura 4.9.

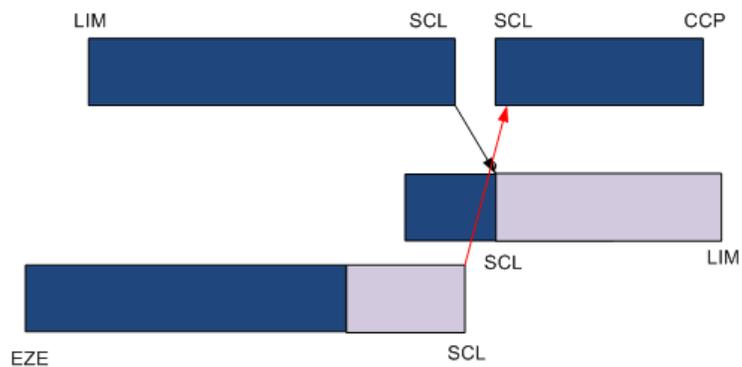


FIGURA 4.9. Reasignación de vuelos ante la situación de retraso

Se aprecia que para el vuelo que experimentó retraso se le reasignó como próximo vuelo de salida el que previamente fue asignado al otro avión y viceversa.

Otra forma de resolver sería dejando permitir los retrasos, si es que los costos de asignar superan los de retraso.

Estos criterios se puede programar en un computador, para lo cual propusimos un algoritmo computacional que define las posibles asignaciones, cuyos detalles de pueden apreciar en la sección B.1.

La forma de asignar en base a este criterio es para vuelos cuyos tiempos respectivos de llegada y salida están contenidos dentro de un intervalo fijo. La única información disponible para estos efectos es la ligada a los tiempos previamente programados y usando estos datos definimos que si la diferencia entre tiempos de llegada y salida es menor a cierto valor arbitrario, podemos crear un cruces de itinerario como alternativa para minimizar los retrasos posteriores.

Dependiendo de los casos que en los capítulos siguientes vamos a proponer, fijaremos un valor de este intervalo. Esta tolerancia no puede ser demasiada alta, ya que estaríamos considerando vuelos cuya diferencia puede ser poco realista para nuestro caso.

## **4.12 Costos de Retrasos**

En primer lugar, uno de los costos que se asume en el modelo es el de retrasar la hora de salida de un vuelo en una unidad de tiempo, como por ejemplo en una hora. Este costo se multiplica en caso de que los retrasos superen un cierto umbral, cuestión que fue modelada considerando las ecuaciones 4.10, 4.11, 4.12 y 4.13.

El costo base, el cual se define como el valor a pagar antes que pasen la primera barrera de tiempo y se multiplique, va a depender del lugar de origen donde el vuelo se ejecute. Dependiendo de lugar de partida de determinado avión se va a pagar un determinado valor por retrasarlo. En los ejemplos donde aplicaremos nuestra formulación vamos a detallar el valor a pagar ese retraso.

En la sección B.3 mostraremos el pseudocódigo usado para calcular el costo de retrasar un vuelo determinado.

### 4.13 Costo de Asignación

Para este tipo de costos se consideraron primero las posibles asignaciones, mostrados en la sección 4.11. Para ello se programó en un computador un algoritmo que los calcula, según los criterios que mostraremos a continuación:

**Escalas de un mismo itinerario:** Para los vuelos que estaban programados para un mismo avión, se les consideró un costo igual a cero.

**Escalas de vuelos dentro de un cierto intervalo de tiempo:** Tal como se explicó en la sección 4.11.3, se especificó que si la diferencia entre vuelos que llegan y salen están dentro de un cierto intervalo de tiempo van a tener un costo muy bajo, que no es cero. Esto para proteger la solución nominal del problema que es cuando se cumple todo el programa sin retrasos, ya que podríamos tener múltiples soluciones, al menos para el problema nominal.

**Escalas de vuelos posteriores:** Dependiendo de la diferencia del tiempo de llegada de los vuelos con el de salida de los próximos, se establece que a medida que aumenta ese valor el costo de asignación es cada vez mayor con el fin de incorporar la posibilidad de cancelación de vuelos que hayan entremedio.

Sobre este último punto, decimos que la decisión de cancelar vuelos está implícitamente relacionado con la de reasignar vuelos, ya que hay decisiones de asignación que conllevan la de que algunos vuelos no operen, lo que equivalen a cancelación de estos. Como ya sabemos, estas decisiones van a pagar un costo muy alto.

El algoritmo mostrado en la sección B.2 muestra la forma en que se programó los valores a usar para calcular los costos de asignación dados.

## 5. PROTECCIÓN FRENTE LA INCERTIDUMBRE

En el capítulo anterior, dijimos que el modelo propuesto estaba construido, en virtud de los costos de asignación y retrasos, para que se satisfagan todos los planes de vuelo definidos con anticipación, sin retrasos que nos obliguen a rehacer toda la programación del plan de vuelos.

En este capítulo, vamos a considerar la incertidumbre derivada de los tiempos de vuelo, la cual es frecuente en las operaciones aéreas, ya que factores como el clima y la maniobra de los pilotos de los aviones hacen que los tiempos de operación de todos los vuelos no sean exactamente los mismos y se generen retrasos que pueden acumularse para los vuelos posteriores de todos los itinerarios.

Vamos a proponer una formulación adicional a la que propusimos en el capítulo 4, en la que vamos a añadir variables y restricciones auxiliares, asociados con una función de protección similar al conocimiento propuesto por Bertsimas y Sim.

Presentaremos consideraciones adicionales respecto a la naturaleza aleatoria de los datos de nuestro modelo y algunas variaciones de ciertas restricciones importantes antes de protegerlo. Finalmente, detallaremos la formulación robusta como tal, antes de aplicarlo a ejemplos con datos reales.

### 5.1 Consideraciones Previas

Primero que todo, tenemos que preguntarnos cuál restricción es la que hay que proteger. Sabiendo que la fuente de incertidumbre se encuentra en los tiempos de los vuelos, la restricción a proteger es aquella referida a la programación de estos, correspondiente a la ecuación 4.3:

$$TD_j \geq TD_i + TF_i + TRD_{ij} - M \cdot (1 - x_{ij}) \quad \forall i \in F, j \in P$$

Podemos ver que la restricción contiene al parámetro  $TF_i$  que es la que tiene un comportamiento aleatorio.

Nuestro objetivo es la de robustecer esta restricción por medio de la adopción de la función de protección especificada por Bertsimas y Sim. No obstante, esta parte se realiza cuando el parámetro  $TF_i$  está ponderada por una variable de decisión como la que se mostró en la sección 3.3 y en este caso no ocurre. Como consecuencia, el problema muestra que los datos se pueden ordenar hacia el lado derecho de las ecuaciones, con que la solución robusta para cualquier nivel de protección está dada por la más conservadora decisión posible.

Para arreglar esto, vamos a redefinir la ecuación 4.3 escribiéndola del siguiente modo.

$$TD_j \geq TD_i + (TF_i + TRD_{ij}) x_{ij} - M \cdot (1 - x_{ij}) \quad \forall i \in F, j \in P \quad (5.1)$$

Notamos que en la ecuación 5.1 el valor  $TF_i + TRD_{ij}$  está multiplicado por  $x_{ij}$  por lo que el valor  $(TF_i + TRD_{ij}^k) x_{ij}$  ya no está asociado al lado derecho de las ecuaciones.

Para simplificar las notaciones definimos un nuevo parámetro  $T_{ij}$ , tal que:

$$T_{ij} = TF_i + TRD_{ij} \quad (5.2)$$

Con lo que la restricción queda:

$$TD_j \geq TD_i + T_{ij} x_{ij} - M \cdot (1 - x_{ij}) \quad \forall i \in F, j \in P \quad (5.3)$$

Equivalente con la ecuación anterior podemos ordenar los los valores, obteniendo la siguiente formulación que mostraremos, junto con la ecuación 5.3, en los próximos capítulos de este documento.

$$TD_i - TD_j + T_{ij} x_{ij} \leq M \cdot (1 - x_{ij}) \quad \forall i \in F, j \in P \quad (5.4)$$

Una pregunta que nos podemos hacer es porqué dejar así esta ecuación, siendo que lo correcto es ordenar todos los parámetros con sus variables respectivas. Es decir, ordenando la ecuación anterior para dejarlo como sigue:

$$TD_i - TD_j + (T_{ij} + M) x_{ij} \leq M \quad \forall i \in F, j \in P \quad (5.5)$$

La ecuación 9.1 fue ordenada así por dos razones. La primera es para mantener la forma de la restricción de “Disjunción”, mostrada en la sección 4.6. La segunda es para la protección que agregaremos en esta ecuación, siguiendo la teoría propuesta por Bertsimas y Sim (2004) y que detallaremos más adelante.

Como sabemos, la incertidumbre está acotada aunque con poca información sobre su naturaleza probabilística (Ben-Tal y Nemirovski, 1998). Con esto definimos el parámetro  $\hat{T}_{ij}$  que es el largo del intervalo donde se mueve el parámetro  $T_{ij}$ . Es decir, si  $T_{ij}$  es el valor nominal del problema, la variable aleatoria está en el siguiente intervalo:

$$T_{ij} - \hat{T}_{ij} \leq \tilde{T}_{ij} \leq T_{ij} + \hat{T}_{ij}$$

Siendo  $\tilde{T}_{ij}$  la variable aleatoria igual al largo del tiempo total (*flight leg+turnaround*). Recordemos que en nuestros supuestos acordamos que los tiempos de vuelos van a ser aleatorios, mientras que los de *turnaround* no lo son. Por ende y para tomar en cuenta en los resultados finales, vamos a dejar establecido que  $\hat{T}_{ij} = \widehat{TF}_i$ .

Se propuso proteger sólo estas restricciones, incorporando al pie de la letra lo propuesto en la sección 3.3. Haciendo las mismas pruebas iniciales, se descubrió que esta formulación robustece muy bien obteniendo soluciones protegidas bastante razonables y esperadas. Mostraremos a continuación los detalles al respecto.

## 5.2 Función de Protección Propuesta

Lo anterior mostró que podemos proteger sólo una restricción del tipo “Disjunción” como lo es la ecuación 4.3. Mostraremos el camino recorrido para obtener lo que llamaremos la protección definitiva contra la variabilidad del problema propuesto en esta investigación. Este camino propuso variables y restricciones considerando todo el trabajo de Bertsimas

y Sim. Sin embargo, algunas variables se verán ligeramente modificadas, buscando hacer más fácil el modelo en términos de su tiempo de resolución.

Con estos detalles, vamos a detallar las siguientes variables:

$z_{ij}$ : Variable dual.

$p_{ij}^{uv}$ : Variable dual.

$y_{ij}$ : Variable auxiliar.

Definimos también el siguiente parámetro:

$\Gamma_{ij}$ : Nivel de protección para el parámetro que experimenta la incertidumbre, que son los tiempos  $T_{ij}$ .

Detallando este parámetro, éste va a estar en la restricción 4.3 protegiendo sólo la variable ponderada al parámetro que experimenta incertidumbre, en este caso es la de asignación  $x_{ij}$ . Como sólo hay una de estas variables por restricción, tenemos que el valor máximo del nivel de protección corresponde al total de variables por restricción, en este caso 1.

Por esto, la manera de variar este parámetro es que esté entre 0 y 1. Si  $\Gamma_{ij} = 0$ , para todo  $i$  y  $j$ , tenemos el caso nominal, mientras que si  $\Gamma_{ij} = 1$  para todos los valores de la red tenemos el caso más conservador.

Presentamos las siguientes restricciones adicionales correspondientes a la formulación robusta del modelo de programación de vuelos y de protección de la restricción 4.3:

$$TD_i - TD_j + T_{ij} x_{ij} + z_{ij} \Gamma_{ij} + p_{ij}^{ij} \leq M (1 - x_{ij}) \quad (5.6)$$

$$z_k + p_{ij}^{ij} \geq \hat{T}_{ij} y_{ij} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} x_{ij} &\leq y_{ij} \\ z_{ij}, p_{ij}^{uv} &\geq 0 \quad \forall i, j, u, v \end{aligned} \quad (5.8)$$

Notar que en las restricciones 5.6 y 5.7 participan las variables  $p_{ij}^{uv}$ , que se repiten los índices  $i$  y  $j$ , escribiendo la variable como  $p_{ij}^{ij}$ . Esto puede ser un exceso de variables que causarían que versiones más grandes del problema sean imposibles de resolver, causado principalmente porque la memoria del computador queda sobrepasada, por lo que el proceso de solución mediante *Branch & Bound* finalice repentinamente.

Es por esto que necesitamos reducir el tamaño del modelo, reemplazando las variables con cuatro subíndices por las variables duales  $p_{ij}$  que dependen sólo de dos índices.

Por lo tanto, la formulación robusta definitiva del modelo es de la siguiente forma.

$$TD_i - TD_j + T_{ij} x_{ij} + z_{ij} \Gamma_{ij} + p_{ij} \leq M (1 - x_{ij}) \quad (5.9)$$

$$z_{ij} + p_{ij} \geq \hat{T}_{ij} y_{ij} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} x_{ij} &\leq y_{ij} \\ z_{ij}, p_{ij} &\geq 0 \quad \forall i \in F, j \in P \end{aligned} \quad (5.11)$$

Otro detalle que analizaremos es sobre la forma de evaluar la protección asignando un valor al parámetro  $\Gamma_{ij}$ . Es importante recalcar que para todo par  $(i, j)$  definido en los capítulos anteriores, como corresponden a vuelos ambos tienen en común el aeropuerto de llegada, en el caso de  $i$ , y el de salida, en el caso del vuelo  $j$ .

Para los pares  $(i, j)$  escogeremos un parámetro de protección privilegiando el nodo  $i$  antes que  $j$ , ya que este corresponde a un vuelo que está siendo operado, por lo que la protección ante la incertidumbre del vuelo  $i$  garantiza minimizar los efectos posteriores sobre el vuelo próximo  $j$ .

Sea el siguiente parámetro que definiremos como nuestra protección:

$\Gamma_i$ : Protección frente la incertidumbre de los tiempos de operación de vuelos en lugar de  $\Gamma_{ij}$ , con  $0 \leq \Gamma_i \leq 1$ .

Por lo tanto la ecuación 5.12 lo reemplazamos por la siguiente:

$$TD_i - TD_j + T_{ij} x_{ij} + z_{ij} \Gamma_i + p_{ij} \leq M (1 - x_{ij}) \quad (5.12)$$

La formulación mostrada arriba, cumple con lo pedido en el trabajo de Bertsimas y Sim, en la que la máxima protección la logramos cuando  $\Gamma_i = 1$ , mientras que el problema nominal se alcanza con todos los valores  $\Gamma_i = 0$ .

## **6. APLICACIÓN A SITUACIONES REALES**

El propósito de esta parte es ofrecer una aplicación concreta del modelo y formulación robusta equivalente propuestos en los dos capítulos anteriores.

Para esto, vamos a armar unos casos de itinerarios de vuelos en las que consideramos Orígenes y Destinos, horas estimadas de salida y llegada, y tiempos de vuelos.

La mayor aerolínea nacional tiene operaciones en todo el mundo, pero su mayor concentración es en el territorio nacional y la región de Sudamérica. En las secciones de este capítulo vamos a considerar los casos de itinerarios de vuelos nacionales y un caso de vuelos regionales, en las que trabajamos con los vuelos operados dentro de Sudamérica.

### **6.1 Aplicación a Vuelos Nacionales**

Para este caso vamos a considerar las siguientes ciudades de Chile las cuales son Santiago, Concepción, Antofagasta, Iquique, La Serena, Puerto Montt y Punta Arenas.

Cada una de estas ciudades las ubicamos en el siguiente mapa:

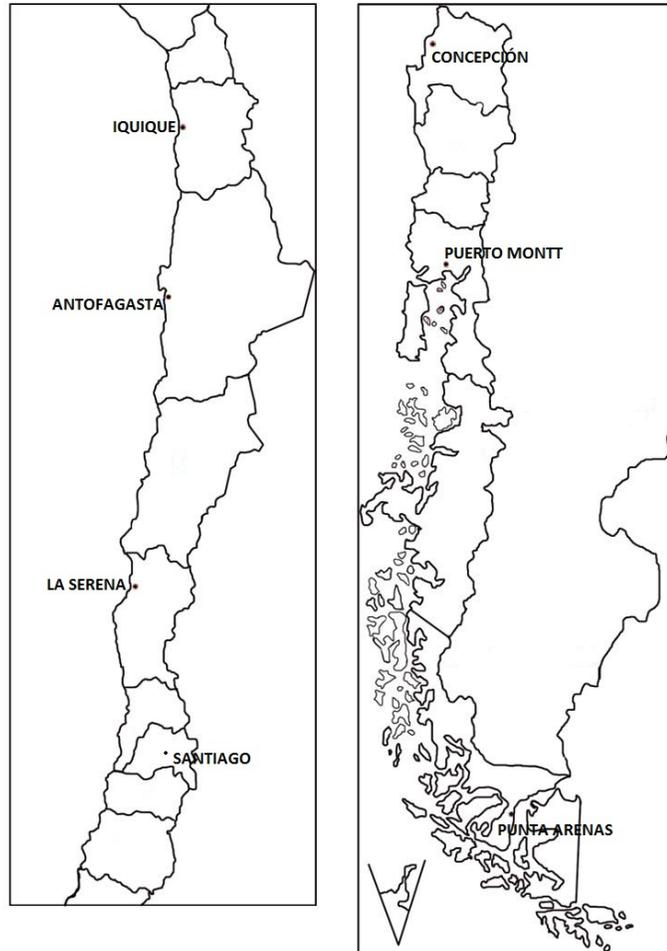


FIGURA 6.1. Ciudades Chilenas a Considerar en Nuestro Primer Caso

Cada uno de estas ciudades cuentan con su respectivo aeropuerto, los cuales detallaremos en la tabla 6.1:

TABLA 6.1. Descripción de Aeropuertos para el Caso de Vuelos Nacionales

CIUDAD	AEROPUERTO	CÓDIGO IATA
Santiago	Cmdro. Arturo Merino Benitez	SCL
Concepción	Carriel Sur	CCP
Antofagasta	Cerro Moreno	ANF
La Serena	La Florida	LSC
Iquique	Diego Aracena	IQQ
Puerto Montt	El Tepual	PMC
Punta Arenas	Pdte. Carlos Ibañez del Campo	PUQ

De los aeropuertos mencionados solo La Serena y Punta Arenas no son internacionales. Los otros corresponden a aeropuertos internacionales.

Como dijimos antes, el código IATA<sup>1</sup> es una de las maneras más tradicionales de referirse a los aeropuertos del mundo, por lo que para simplificar un poco las cosas, vamos a denominar a las escalas por medio de este código.

Como pusimos en los supuestos, los aviones que operan todos los vuelos son del mismo modelo, con lo que tenemos los mismos costos de reasignación, además de los mismos tiempos de vuelos y *turnaround*. La mayor aerolínea chilena opera para vuelos nacionales con aviones Airbus modelos de la serie A320. Este modelo tiene un tiempo de autonomía aproximada de 6 horas, cantidad que fue calculado teniendo como datos su velocidad de crucero (828 km/h) y su alcance máximo (5.900 km.) aproximados. Este tiempo de autonomía es más que suficiente para recorrer Chile entero si es necesario.

La siguiente tabla muestra los tiempos estimados (en horas) para los vuelos programados dentro del territorio nacional y operados con el A320. Están ordenadas según escalas y dependiendo si viene de Santiago o sí va para la capital.

---

<sup>1</sup>IATA: International Air Transport Association

TABLA 6.2. Tiempo estimado en horas de vuelos nacionales para Airbus A320

Escala	Desde SCL	Hacia SCL
CCP	1,0	1,3
ANF	2,0	1,9
IQQ	2,4	2,25
LSC	1,0	0,9
PMC	1,75	1,7
PUQ	3,4	3,4

El hecho de mostrar los tiempos si van hacia o desde Santiago obedece a una cuestión simple en temas de planificación de vuelos. Santiago es lo que en lenguaje de transporte se conoce como *Hub* definido como un puerto o lugar de conexión de vuelos. Para la mayor aerolínea nacional Santiago es su principal *Hub* tanto para vuelos nacionales como internacionales.

Definiremos los vuelos programados mostrando un gráfico en que se aprecian el número del vuelo, el avión que lo opera, su origen y destino usando sus respectivos códigos IATA y las horas de salida y llegada programadas. La forma de programación es siguiendo de nuevo lo propuesto en la figura 4.2, en la que mostramos el plan como una *Carta Gantt*.

Esta red consiste en 55 vuelos operados por 5 aviones definidos. Sabiendo que los costos son cero en el caso de asignaciones en un mismo itinerario, los costos de asignación son pequeños para la aerolínea los aviones están dentro de cierta tolerancia. Además, el costo de retraso de los vuelos nacionales, sin considerar otras operaciones lo vamos a suponer todos iguales a uno.

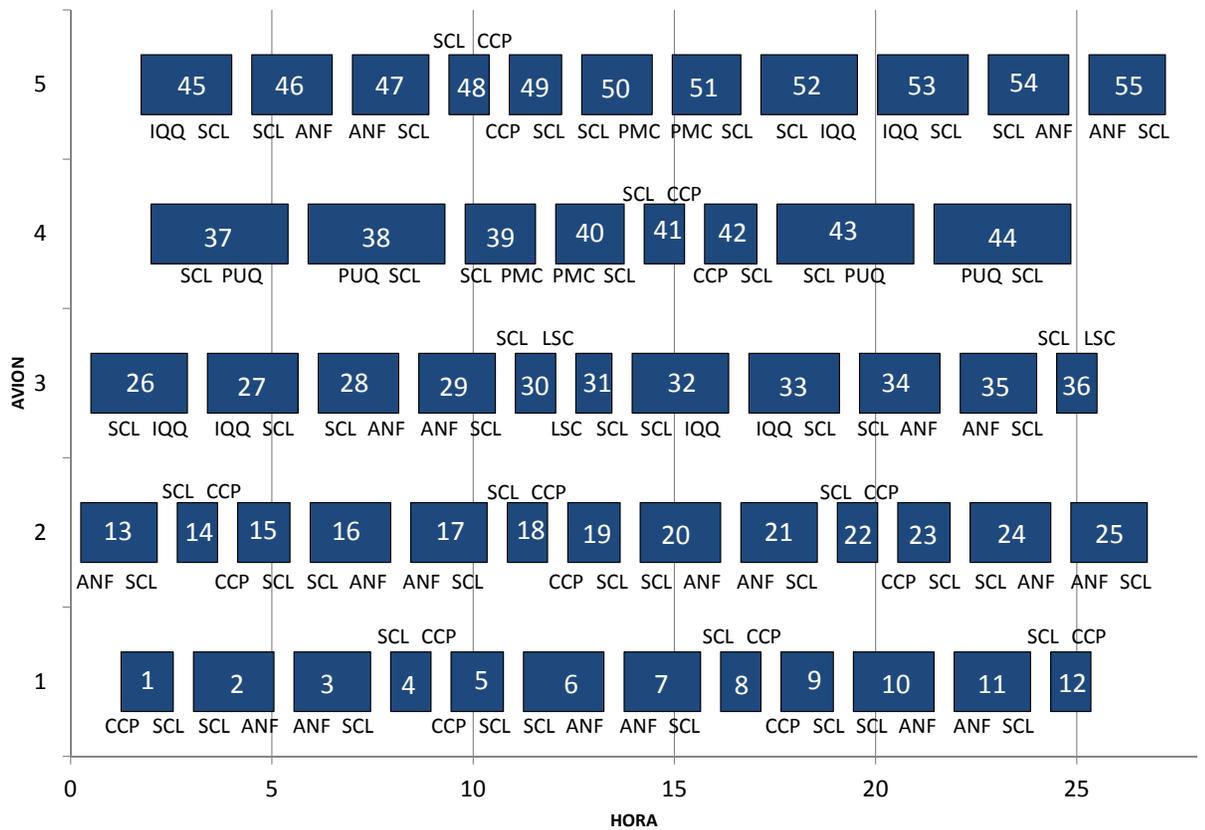


FIGURA 6.2. Primer itinerario para vuelos nacionales

### 6.1.1 Descripción de los Vuelos Nacionales Programados

La forma que vamos a definir los vuelos será mediante la descripción de cada uno de los 5 itinerarios que lo incorporan. El detalle de cada itinerario incluye Origen, Destino, Tiempos de Salida y Llegada a su Destino, para terminar con el tiempo de operación de cada vuelo.

#### a) Primer y Segundo Itinerario de Vuelos Nacionales

El primer y segundo itinerario de este caso comprende vuelos que pasan por las escalas de Santiago (SCL), Concepción (CCP) y Antofagasta (ANF).

La tabla 6.3 muestra los vuelos que constituyen el primer itinerario:

TABLA 6.3. Detalle del primer itinerario de vuelos nacionales

VUELO	ORIGEN	DESTINO	HR. SALIDA	HR. LLEGADA	T. VUELO
1	CCP	SCL	1,25	2,55	1,3
2	SCL	ANF	3,05	5,05	2,0
3	ANF	SCL	5,55	7,45	1,9
4	SCL	CCP	7,95	8,95	1,0
5	CCP	SCL	9,45	10,75	1,3
6	SCL	ANF	11,25	13,25	2,0
7	ANF	SCL	13,75	15,65	1,9
8	SCL	CCP	16,15	17,15	1,0
9	CCP	SCL	17,65	18,95	1,3
10	SCL	ANF	19,45	21,45	2,0
11	ANF	SCL	21,95	23,85	1,9
12	SCL	CCP	24,35	25,35	1,0

Mientras que el segundo itinerario lo detallamos en la tabla 6.4:

TABLA 6.4. Detalle del segundo itinerario de vuelos nacionales

VUELO	ORIGEN	DESTINO	HR. SALIDA	HR. LLEGADA	T. VUELO
13	ANF	SCL	0,25	2,15	1,9
14	SCL	CCP	2,65	3,65	1,0
15	CCP	SCL	4,15	5,45	1,3
16	SCL	ANF	5,95	7,95	2,0
17	ANF	SCL	8,45	10,35	1,9
18	SCL	CCP	10,85	11,85	1,0
19	CCP	SCL	12,35	13,65	1,3
20	SCL	ANF	14,15	16,15	2,0
21	ANF	SCL	16,65	18,55	1,9
22	SCL	CCP	19,05	20,05	1,0
23	CCP	SCL	20,55	21,85	1,3
24	SCL	ANF	22,35	24,35	2,0
25	ANF	SCL	24,85	26,75	1,9

b) Tercer Itinerario de Vuelos Nacionales

El tercer itinerario comprende vuelos con destinos ubicados en el norte del país, es decir Iquique (IQQ), Antofagasta (ANF) y La Serena (LSC). Todos estos vuelos necesariamente pasan por Santiago (SCL).

TABLA 6.5. Detalle del tercer itinerario de vuelos nacionales

VUELO	ORIGEN	DESTINO	HR. SALIDA	HR. LLEGADA	T. VUELO
26	SCL	IQQ	0,5	2,9	2,4
27	IQQ	SCL	3,4	5,65	2,25
28	SCL	ANF	6,15	8,15	2,0
29	ANF	SCL	8,65	10,55	1,9
30	SCL	LSC	11,05	12,05	1,0
31	LSC	SCL	12,55	13,45	0,9
32	SCL	IQQ	13,95	16,35	2,4
33	IQQ	SCL	16,85	19,1	2,25
34	SCL	ANF	19,6	21,6	2,0
35	ANF	SCL	22,1	24	1,9
36	SCL	LSC	24,5	25,5	1,0

c) Cuarto Itinerario de Vuelos Nacionales

Nuevamente los vuelos van desde y hacia Santiago (SCL). A diferencia de los casos anteriores, los vuelos van a ciudades del sur de Chile. A saber, Concepción (CCP), Puerto Montt (PMC) y Punta Arenas (PUQ). El detalle en la tabla 6.6.

TABLA 6.6. Detalle del cuarto itinerario de vuelos nacionales

VUELO	ORIGEN	DESTINO	HR. SALIDA	HR. LLEGADA	T. VUELO
37	SCL	PUQ	2	5,4	3,4
38	PUQ	SCL	5,9	9,3	3,4
39	SCL	PMC	9,8	11,55	1,75
40	PMC	SCL	12,05	13,75	1,7
41	SCL	CCP	14,25	15,25	1,0
42	CCP	SCL	15,75	17,05	1,3
43	SCL	PUQ	17,55	20,95	3,4
44	PUQ	SCL	21,45	24,85	3,4

d) Quinto Itinerario de Vuelos Nacionales

Este itinerario es un poco más general, ya que concentra vuelos Norte-Sur de Chile, pasando por Santiago (SCL). Las ciudades participantes son por el norte Iquique (IQQ) y Antofagasta (ANF), y por el sur Concepción (CCP) y Puerto Montt (PMC).

TABLA 6.7. Detalle del quinto itinerario de vuelos nacionales

VUELO	ORIGEN	DESTINO	HR. SALIDA	HR. LLEGADA	T. VUELO
45	IQQ	SCL	1,75	4	2,25
46	SCL	ANF	4,5	6,5	2,0
47	ANF	SCL	7	8,9	1,9
48	SCL	CCP	9,4	10,4	1,0
49	CCP	SCL	10,9	12,2	1,3
50	SCL	PMC	12,7	14,45	1,75
51	PMC	SCL	14,95	16,65	1,7
52	SCL	IQQ	17,15	19,55	2,4
53	IQQ	SCL	20,05	22,3	2,25
54	SCL	ANF	22,8	24,8	2
55	ANF	SCL	25,3	27,2	1,9

## 6.2 Aplicación a Vuelos Regionales

Por vuelos regionales nos referimos a todas aquellas operaciones en las que los aeropuertos correspondientes a escalas de las operaciones van a estar dentro de Sudamérica. Estos aeropuertos son propios de las ciudades de la región, los cuales mostramos en la figura adjunta.



FIGURA 6.3. Ciudades dentro de Sudamérica a Considerar en Nuestro Ejemplo

Como se observa en la figura 6.3, vamos a considerar las mismas ciudades chilenas del ejemplo anterior más las que se encuentran dentro del subcontinente. Por esto es que

además de los aeropuertos señalados en la tabla 6.1, añadiremos los siguientes aeropuertos dentro de la región.

TABLA 6.8. Descripción de Aeropuertos para el Caso de Vuelos Regionales

CIUDAD	AEROPUERTO	CÓDIGO IATA
Buenos Aires	Ministro Pistarini - Ezeiza	EZE
Lima	Jorge Chavez	LIM
São Paulo	Gobernador André Franco Montoro - Guarulhos	GRU
Rio de Janeiro	Galeão	GIG
Mendoza	El Plumerillo	MDZ
Córdoba	Ingeniero Ambrosio Taravella	COR
Montevideo	Carrasco	MVD

Además de los aeropuertos que estamos estudiando, necesitamos saber sus tiempos de vuelos desde y hacia Santiago, siendo esta ciudad el punto de conexión de todos los vuelos de la empresa. Una vez más, suponemos el uso del modelo de avión Airbus A320.

TABLA 6.9. Tiempo estimado en horas de vuelos regionales para Airbus A320

Escala	Desde SCL	Hacia SCL
LIM	4	4
EZE	2,3	2
GRU	3,8	4,3
GIG	4,2	4,6
MDZ	0,92	0,92
COR	1,4	1,5
MVD	2,25	2,51

A diferencia del caso de vuelos nacionales, vamos a estudiar un número de 71 vuelos extendiendo el intervalo de 24 horas del ejemplo nacional para considerar un rango de aproximadamente 30 horas. Esto se debe a que 24 horas es un rango bajo para los vuelos internacionales que tiene mayor duración, por lo que considera pocos vuelos.

El costo de retraso lo vamos a asignar del siguiente modo.

TABLA 6.10. Costo de Retraso por Ciudad

DESTINO VUELO	COSTO RETRASO
Santiago (SCL)	5
Internacionales	2
Nacionales	1

Lo que significa que vamos a aumentar el costo para vuelos destinados al *hub* Santiago es mayor que las de las escalas de vuelos internacionales, terminando con los vuelos nacionales en el menor costo.

### **6.2.1 Itinerarios que Operan dentro del Espacio Aéreo Chileno**

Los siguientes vuelos son parte de los ejemplos mostrado en la sección 6.1, definidos en el rango de operaciones extendido de 30 horas.

El orden de estos vuelos, que lo ordenamos en 3 programas de vuelos operados por similar cantidad de aviones, lo vemos en la siguiente figura.

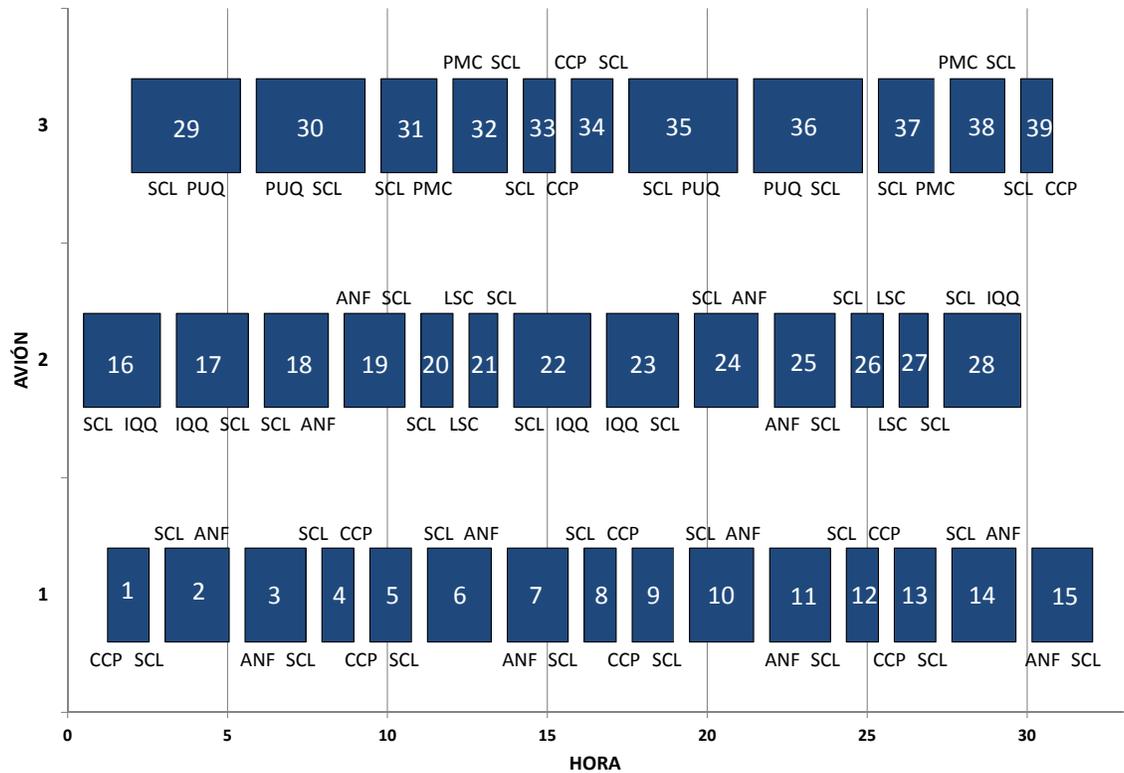


FIGURA 6.4. Vuelos Nacionales Considerados en el Caso Regional

a) Primer Itinerario de Vuelos Regionales

Este caso es de vuelos operados en el eje Santiago-Concepción-Antofagasta. Podemos ver que es similar a lo que se ve en el detalle del caso de vuelos nacionales.

b) Segundo Itinerario de Vuelos Nacionales

Este programa cubre aeropuertos ubicados en el norte del país. Estos Aeropuertos son los de Iquique (IQQ), Antofagasta (ANF) y La Serena (LSC).

TABLA 6.11. Detalle del primer itinerario de vuelos regionales

VUELO	ORIGEN	DESTINO	HR. SALIDA	HR. LLEGADA	TIEMPO VUELO (HRS.)
1	CCP	SCL	1,25	2,55	1,3
2	SCL	ANF	3,05	5,05	2,0
3	ANF	SCL	5,55	7,45	1,9
4	SCL	CCP	7,95	8,95	1,0
5	CCP	SCL	9,45	10,75	1,3
6	SCL	ANF	11,25	13,25	2,0
7	ANF	SCL	13,75	15,65	1,9
8	SCL	CCP	16,15	17,15	1,0
9	CCP	SCL	17,65	18,95	1,3
10	SCL	ANF	19,45	21,45	2,0
11	ANF	SCL	21,95	23,85	1,9
12	SCL	CCP	24,35	25,35	1,0
13	CCP	SCL	25,85	27,15	1,3
14	SCL	ANF	27,65	29,65	2,0
15	ANF	SCL	30,15	32,05	1,9

TABLA 6.12. Detalle del segundo itinerario de vuelos regionales

VUELO	ORIGEN	DESTINO	HR. SALIDA	HR. LLEGADA	TIEMPO VUELO (HRS.)
16	SCL	IQQ	0,5	2,9	2,4
17	IQQ	SCL	3,4	5,65	2,25
18	SCL	ANF	6,15	8,15	2,0
19	ANF	SCL	8,65	10,55	1,9
20	SCL	LSC	11,05	12,05	1,0
21	LSC	SCL	12,55	13,45	0,9
22	SCL	IQQ	13,95	16,35	2,4
23	IQQ	SCL	16,85	19,1	2,25
24	SCL	ANF	19,6	21,6	2,0
25	ANF	SCL	22,1	24	1,9
26	SCL	LSC	24,5	25,5	1,0
27	LSC	SCL	26	26,9	0,9
28	SCL	IQQ	27,4	29,8	2,4

c) Tercer Itinerario de Vuelos Regionales

Similar al segundo itinerario, solo que cubre aeropuertos ubicados en el sur de Chile. Estos son Concepción (CCP), Puerto Montt (PMC) y Punta Arenas (PUQ).

TABLA 6.13. Detalle del tercer itinerario de vuelos regionales

VUELO	ORIGEN	DESTINO	HR. SALIDA	HR. LLEGADA	TIEMPO VUELO (HRS.)
29	SCL	PUQ	2	5,4	3,4
30	PUQ	SCL	5,9	9,3	3,4
31	SCL	PMC	9,8	11,55	1,75
32	PMC	SCL	12,05	13,75	1,7
33	SCL	CCP	14,25	15,25	1,0
34	CCP	SCL	15,75	17,05	1,3
35	SCL	PUQ	17,55	20,95	3,4
36	PUQ	SCL	21,45	24,85	3,4
37	SCL	PMC	25,35	27,1	1,75
38	PMC	SCL	27,6	29,3	1,7
39	SCL	CCP	29,8	30,8	1,0

### 6.2.2 Itinerarios de Vuelos Fuera del Espacio Aéreo Chileno

Como bien dijimos, las operaciones de esta línea aérea consiste de vuelos que salen del aeropuerto de Santiago con destinos fuera del país.

La siguiente figura muestra la red que representa el orden de salida de 4 itinerarios que cubren aeropuertos de Sudamérica y que pasan por el aeropuerto de Santiago.

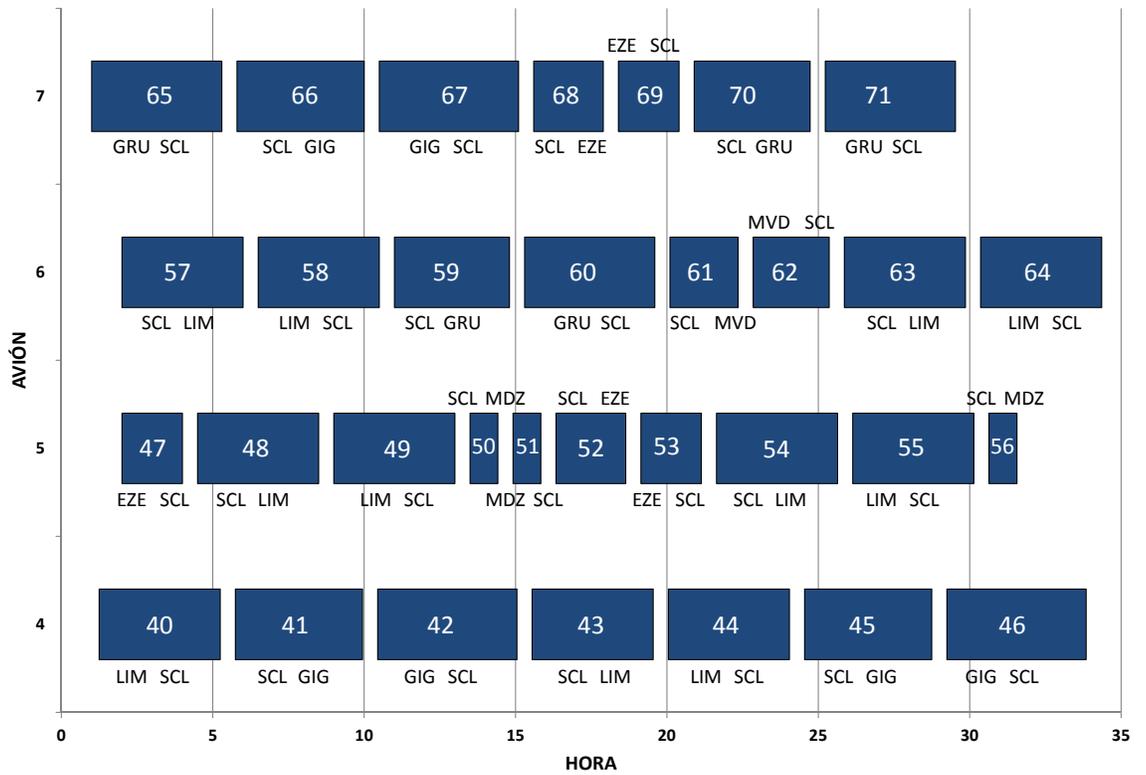


FIGURA 6.5. Vuelos Internacionales Considerados en el Caso Regional

a) Cuarto Itinerario de Vuelos Regionales

Este itinerario cubre los aeropuertos de Lima (LIM) y de Rio de Janeiro (GRU).

TABLA 6.14. Detalle del cuarto itinerario de vuelos regionales

VUELO	ORIGEN	DESTINO	HR. SALIDA	HR. LLEGADA	TIEMPO VUELO (HRS.)
40	LIM	SCL	1,25	5,25	4,0
41	SCL	GIG	5,75	9,95	4,2
42	GIG	SCL	10,45	15,05	4,6
43	SCL	LIM	15,55	19,55	4,0
44	LIM	SCL	20,05	24,05	4,0
45	SCL	GIG	24,55	28,75	4,2
46	GIG	SCL	29,25	33,85	4,6

b) Quinto Itinerario de Vuelos Regionales

Nuevamente pasa por Lima, aunque también cubre aeropuertos argentinos, los cuales son los de Buenos Aires (EZE) y Mendoza (MDZ).

TABLA 6.15. Detalle del quinto itinerario de vuelos regionales

VUELO	ORIGEN	DESTINO	HR. SALIDA	HR. LLEGADA	TIEMPO VUELO (HRS.)
47	EZE	SCL	2	4	2,0
48	SCL	LIM	4,5	8,5	4,0
49	LIM	SCL	9	13	4,0
50	SCL	MDZ	13,5	14,42	0,92
51	MDZ	SCL	14,92	15,84	0,92
52	SCL	EZE	16,34	18,64	2,3
53	EZE	SCL	19,14	21,14	2,0
54	SCL	LIM	21,64	25,64	4,0
55	LIM	SCL	26,14	30,14	4,0
56	SCL	MDZ	30,64	31,56	0,92

c) Sexto Itinerario de Vuelos Regionales

A pesar que también cubre Lima, este itinerario se extiende por São Paulo (GRU) y Montevideo (MVD).

TABLA 6.16. Detalle del sexto itinerario de vuelos regionales

VUELO	ORIGEN	DESTINO	HR. SALIDA	HR. LLEGADA	TIEMPO VUELO (HRS.)
57	SCL	LIM	2	6	4,0
58	LIM	SCL	6,5	10,5	4,0
59	SCL	GRU	11	14,8	3,8
60	GRU	SCL	15,3	19,6	4,3
61	SCL	MVD	20,1	22,35	2,25
62	MVD	SCL	22,85	25,36	2,51
63	SCL	LIM	25,86	29,86	4,0
64	LIM	SCL	30,36	34,36	4,0

d) Séptimo Itinerario de Vuelos Regionales

Se extiende por los aeropuertos de São Paulo, Río de Janeiro y Buenos Aires.

TABLA 6.17. Detalle del séptimo itinerario de vuelos regionales

VUELO	ORIGEN	DESTINO	HR. SALIDA	HR. LLEGADA	TIEMPO VUELO (HRS.)
65	GRU	SCL	1	5,3	4,3
66	SCL	GIG	5,8	10	4,2
67	GIG	SCL	10,5	15,1	4,6
68	SCL	EZE	15,6	17,9	2,3
69	EZE	SCL	18,4	20,4	2,0
70	SCL	GRU	20,9	24,73	3,83
71	GRU	SCL	25,23	29,53	4,3

## 7. RESULTADOS DE RESOLUCIÓN COMPUTACIONAL

Con los datos de entradas mostrados en el capítulo anterior, vamos a resolver el problema de asignación y programación de vuelos con las restricciones adicionales propuestas en el capítulo 5 correspondientes a su formulación robusta.

Sabiendo que los tiempos de vuelos experimentan variaciones, vamos a resolver para distintos valores de incertidumbre, destacando las variaciones de 0,25 y 0,5 horas, equivalentes a 15 y 30 minutos respectivamente.

La idea es obtener gráficos que estén en función del nivel de protección  $\Gamma$  una vez que los variamos desde el mínimo hasta el máximo nivel de protección, que como sabemos equivale desde  $\Gamma = 0$  a  $\Gamma = 1$ .

### 7.1 Procedimiento de Resolución

Se programó el modelo en AMPL y fue resuelto con CPLEX 12.3 Profesional obtenido por medio del llamado IBM *Academic Initiative*, iniciativa orientada a investigadores quienes desean usar programas gratis con fines académicos.

Los cálculos fueron hechos en un PC con procesador Intel<sup>®</sup> Core<sup>™</sup> modelo 2 Quad Q8400, consistente en 4 núcleos de 2,66 GHz de velocidad de procesamiento cada uno, es decir el computador consiste de 4 procesadores con la misma velocidad indicada antes.

El tener 4 procesadores trabajando a la vez permite resolver problemas bajo un nivel de protección en un tiempo más o menos razonable, aún para casos “pequeños” como los que detallamos antes.

### 7.2 Resultados para el Caso de Vuelos Nacionales

Recordemos que este caso consiste en 55 vuelos operados entre 6 escalas, operados por 5 aviones, todos ellos de modelos similares. Supongamos que deseamos estudiar la protección para todas las variables del modelo, por lo que variamos el nivel de protección para todas las variables.

El primer gráfico muestra el costo por protegerse de la incertidumbre en función del nivel de protección  $\Gamma$ .

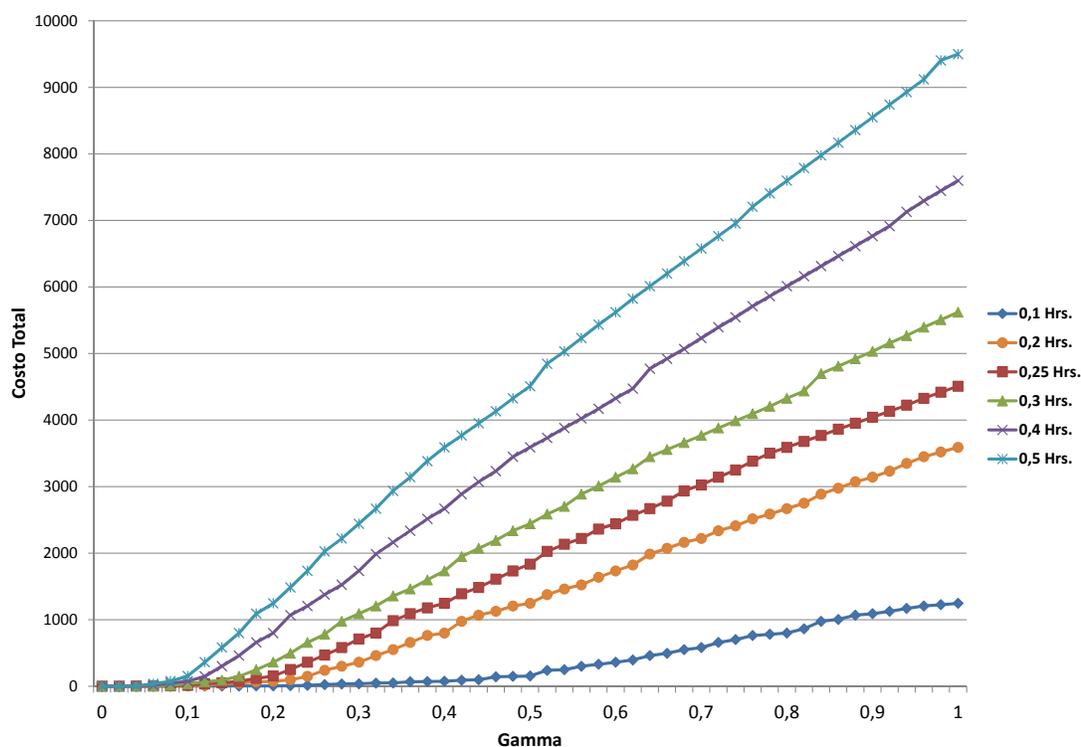


FIGURA 7.1. Costo Total en función del nivel de protección

Cada una de las líneas nos muestran, que ante mayores incertidumbres en los tiempos de vuelos se tiene que pagar un mayor precio por protección a medida que se aumenta el grado de protección. La incertidumbre de los vuelos tiende a acumularse para los vuelos próximos a ser operados, por lo que es posible que los vuelos de partida de esos vuelos terminen superando los límites impuestos en las restricciones (secciones 4.7.1 y 4.7.2). Esto hace que los costos experimenten un repentino ascenso cuando se tiene determinado  $\Gamma$ .

Se puede ver que para 0,1 horas, cuando  $\Gamma = 0,5$  el costo experimenta un leve ascenso. Por otro lado, hay ascensos importantes para  $\Gamma \leq 0,2$  en los restantes casos.

Dado que el costo total se compone de un costo de reasignación de vuelos entre aviones y un costo por programar la salida de estos en un horario distinto a los que fueron previamente programados, exploraremos la evolución separada de estos costos en función del parámetro  $\Gamma$ . Dicho esto, mostramos los siguientes gráficos:

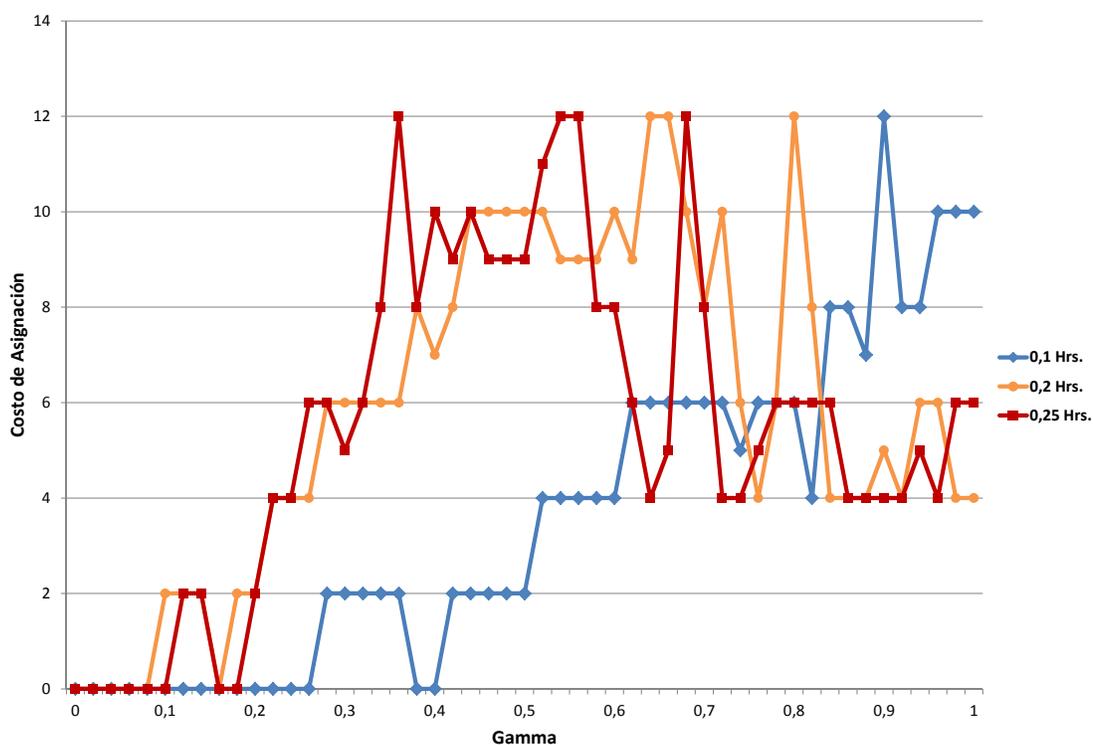


FIGURA 7.2. Costo de asignación para vuelos nacionales para variaciones de 0,1 a 0,25 horas

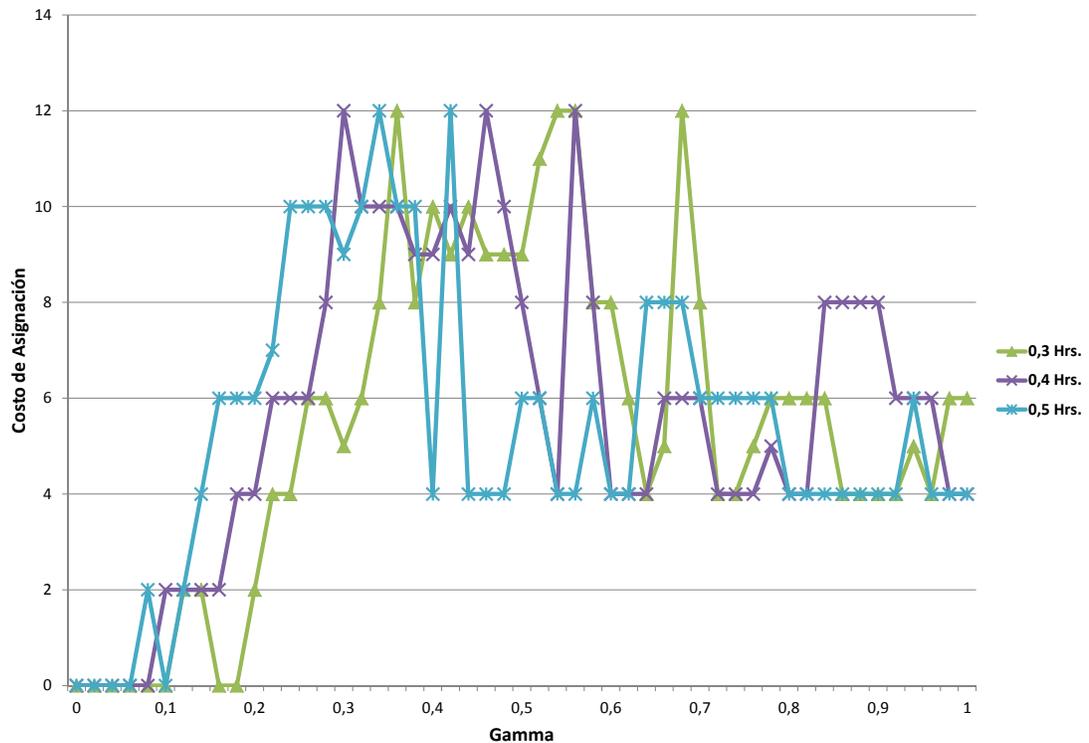


FIGURA 7.3. Costo de asignación para vuelos nacionales para variaciones de 0,3 a 0,5 horas

En primer lugar, notamos que el valor máximo para el costo de asignación es 12 para todas los casos, por lo que no influye mucho en el costo total en comparación con los costos de programación, por lo que mostramos estos costos.

Una vez más, cuando la incertidumbre es de 0,1 horas el número de asignaciones tiende a aumentar a valores de  $\Gamma$  superiores a 0,5. Mientras que para los otros casos, ese aumento explosivo de las asignaciones comienza a explotar mucho antes, comenzando desde  $\Gamma = 0, 1$ .

Otro resultado que podremos mostrar es sobre lo que definimos como “Índice de Puntualidad”, el cual es el porcentaje de vuelos que salen puntuales. Para efectos prácticos, los vuelos que salen con un retraso inferior a 15 minutos van a ser considerados como

“Puntuales”<sup>1</sup>. En caso contrario, los vuelos pasan a estar “Retrasados”. Dado que tenemos 55 vuelos, descontamos los que están siendo operados, con lo cual obtenemos un número de 50 vuelos con los que calcularemos los respectivos porcentajes.

En la figura siguiente se muestran los Índices de Puntualidad para los mismos casos de incertidumbres de vuelos mostrados en las figuras anteriores y en función del nivel de riesgo.

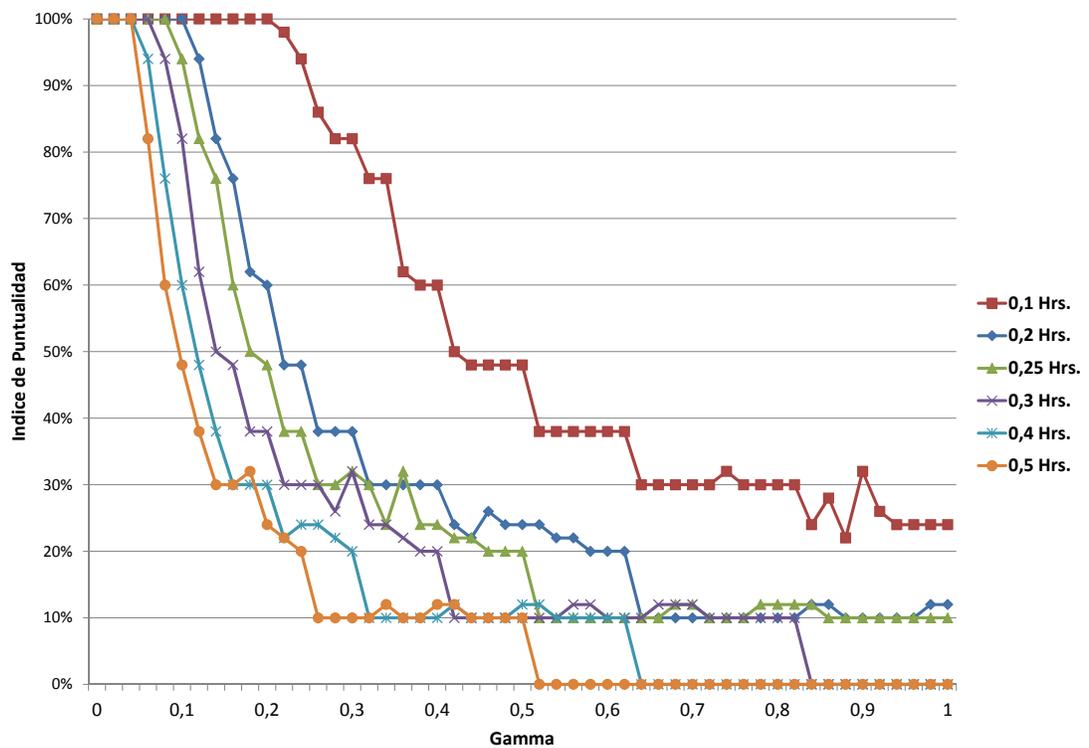


FIGURA 7.4. Índice de Puntualidad para el caso de vuelos nacionales

Para una incertidumbre de 0,1 horas, se ve que la puntualidad no es más allá del 25%, comenzando a caer cuando  $\Gamma = 0,22$ . Para las restantes incertidumbres, tenemos que la

<sup>1</sup>Se asume que los retrasos inferiores a 15 minutos no afectan al usuario

caída del índice comienza antes, cuando el  $\Gamma = 0,1$ . Para grandes variaciones, la puntualidad cae a cero en algún punto del gráfico, como lo son 0,4 y 0,5 horas.

Aunque, estos resultados pueden ser interesantes, estos no nos dan una visión realista de una situación en la que involucramos vuelos nacionales. Nuestro siguiente resultado es para el caso en que mantenemos constante la variación de algunos vuelos, mientras que los restantes los variamos como siempre. En base a esto, los vuelos desde Santiago a Concepción y a La Serena, cuya duración son aproximadamente 1 hora, la variación queda constante en 0,09 horas (un poco más de 10 minutos), mientras que para los vuelos restantes examinamos desde 0,1 a 0,3 horas de variación.

Dicho esto, el costo total se muestra en la siguiente figura.

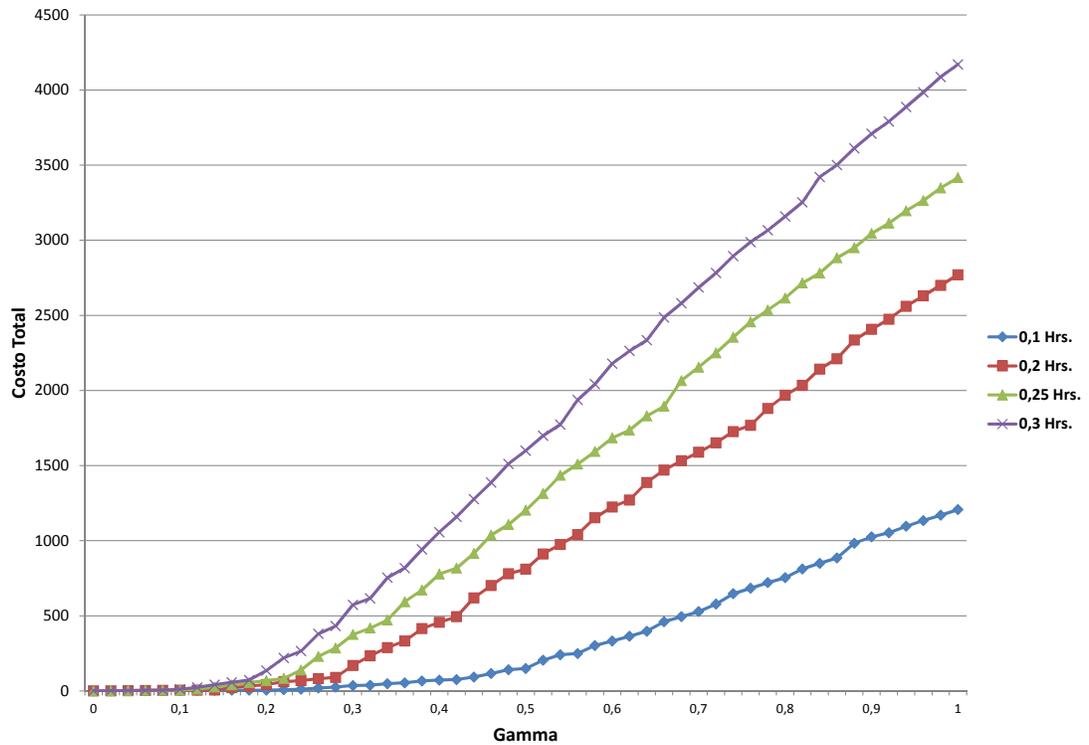


FIGURA 7.5. Costo Total para Caso Real de Vuelos Nacionales

Vemos que si comparamos los costos con los mostrados en la figura 7.1, estas bajan aproximadamente en un 50%. La forma de las curvas es similar a lo visto en el gráfico mencionado por lo que el resultado es razonable con la teoría.

Separando de este costo el de asignación, obtenemos la siguiente figura.

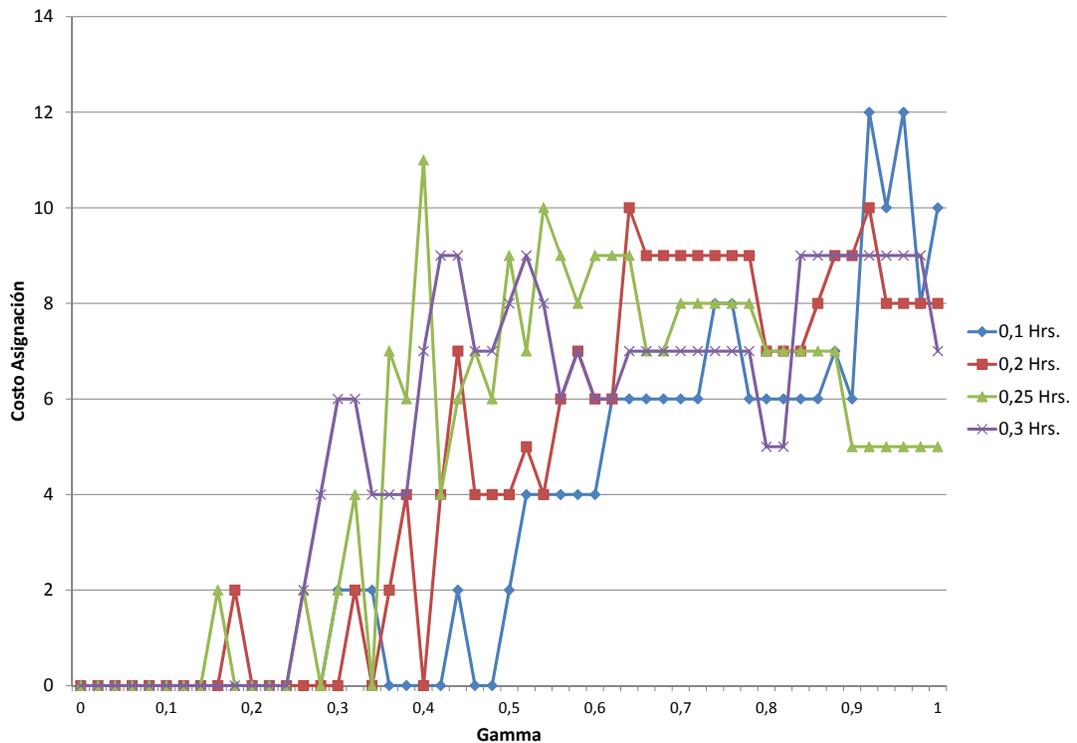


FIGURA 7.6. Costo de Asignación para Caso Real de Vuelos Nacionales

En ella, el número de asignaciones es similar a lo que ocurre en el caso anterior, en que se reasignan vuelos sin cancelaciones de por medio, en el que se pagan más.

La estructura de estos costos dice que hay un aumento sustancial a partir de cierto nivel de  $\Gamma$ , dependiendo de la variabilidad usada, desde  $\Gamma = 0,2$  hasta  $\Gamma = 0,5$  a medida que aumentan la dispersión.

Comparando estos costos con los totales, veremos que estos son pequeños comparados con los de retrasar.

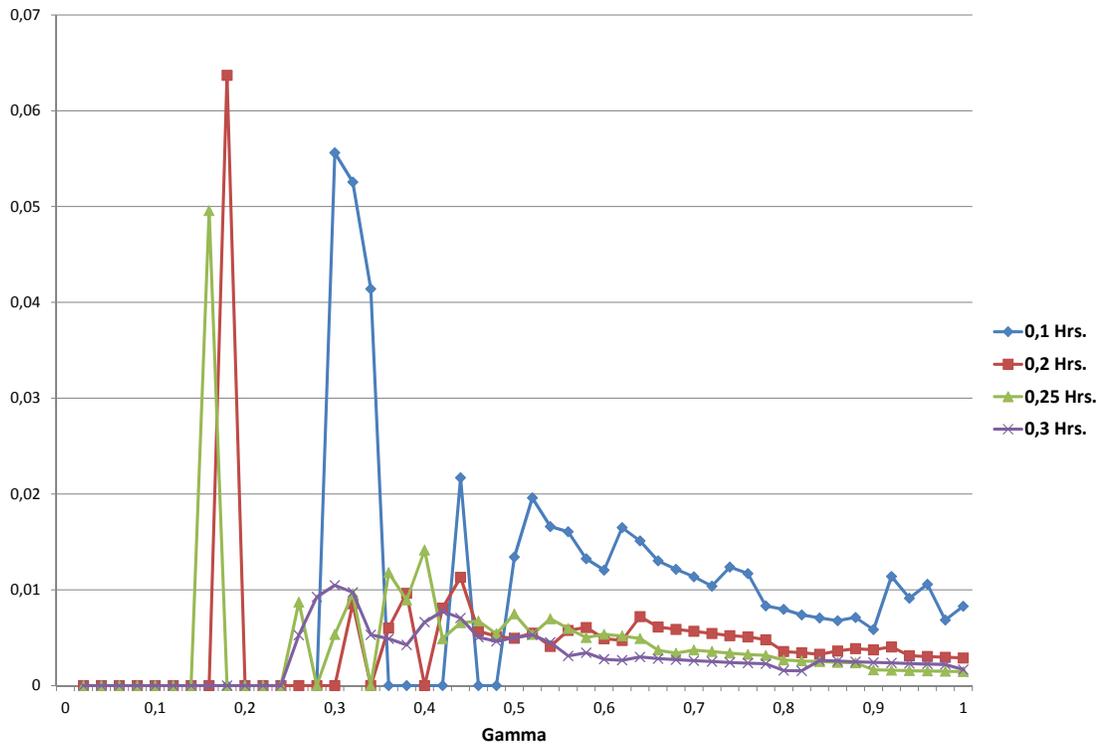


FIGURA 7.7. Costo de Asignación como Porcentaje de Costos Totales para Caso Real de Vuelos Nacionales

Para casos aislados, como por ejemplo protección de 0,18 para 0,1 horas de variación, el costo de retraso representa alrededor de un 6,5% de los costos totales. Para los restantes casos, esta razón queda acotada en un 1% del costo total.

El Índice de Puntualidad que definimos en las páginas anteriores lo mostramos en la siguiente figura:

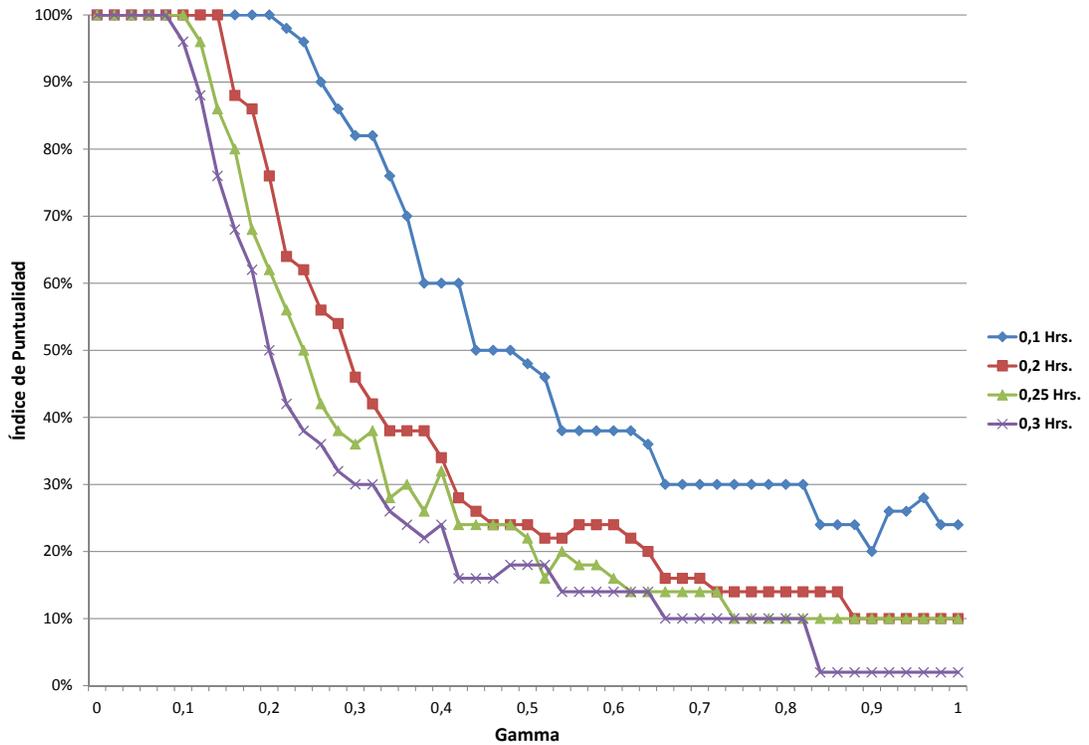


FIGURA 7.8. Índice de Puntualidad para Caso Real de Vuelos Nacionales

En este caso, se representa que para mayores variaciones puede alcanzarse una puntualidad nula cuando alcanzamos la máxima protección. La caída desde el cumplimiento a tiempo de las operaciones tiene un comportamiento similar al mostrado en la figura 7.4.

La excesiva protección para todos los vuelos de este ejemplo puede no ser la mejor, ya que además de ser costosa, la puntualidad en la salida de vuelos puede verse alterada en valores pequeños de protección en que comienza a caer. Desde el punto de vista de los nuevos tiempo de operación se espera aumentar la puntualidad, ya que estaríamos cumpliendo mejor, aunque se tiene que pagar el costo que definimos antes.

Protegeremos sólo los vuelos con Origen en Santiago como una alternativa a lo mostrado antes.

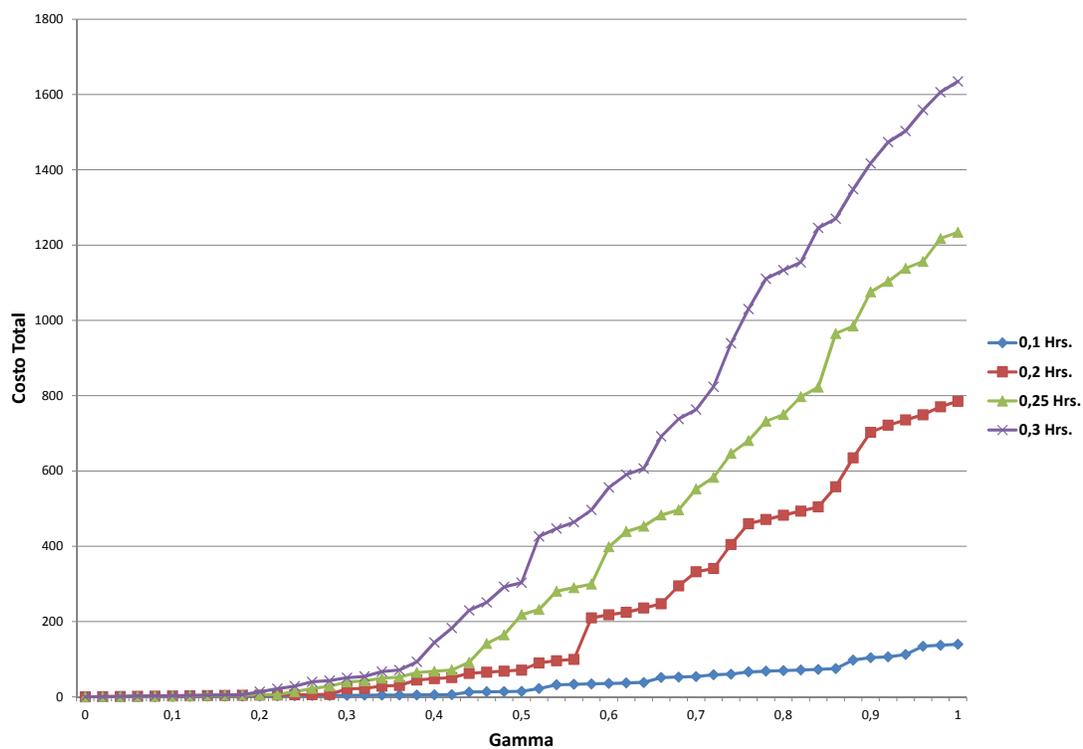


FIGURA 7.9. Costo por Protección en SCL para Vuelos Nacionales en un Caso Real

El precio pagado por esta inmunidad es más bajo en este caso, la comparación de estos costos se muestra en la siguiente figura:

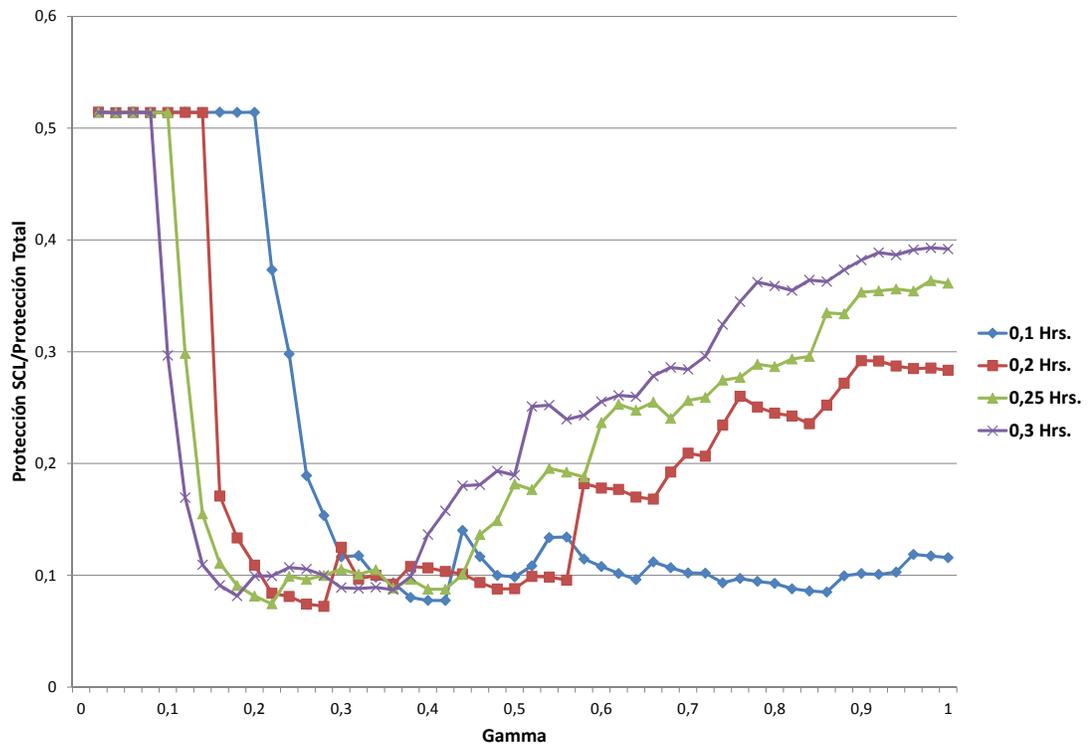


FIGURA 7.10. Comparación Costos Protección Total frente a SCL para vuelos nacionales

Esta nos muestra que para valores de  $\Gamma$  pequeños el costo supera un poco el 50%, pero caen abruptamente para comenzar a ascender a lo más un 40% para 0,3 horas de incertidumbre. Cuando la incertidumbre baja es posible ver que el porcentaje representa cada vez menos.

Si consideramos los costos de asignación lo vemos en la gráfica siguiente:

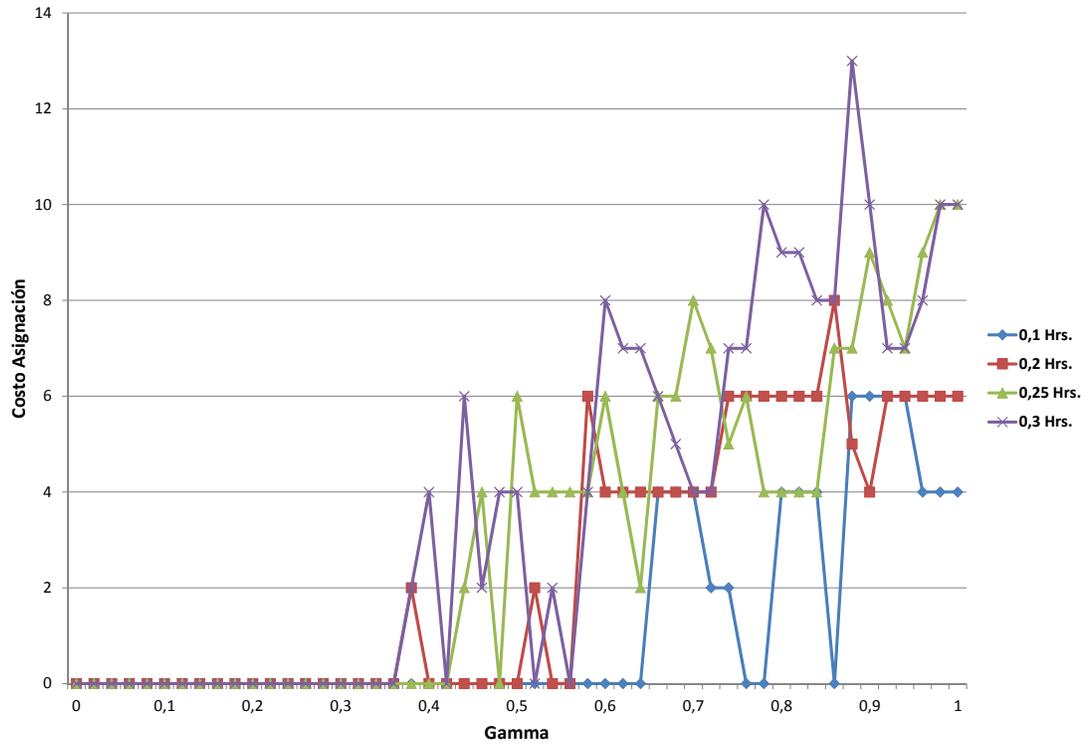


FIGURA 7.11. Asignación para Protección en SCL de vuelos nacionales

Todos los costos comienzan a explotar a partir del nivel 0,5 de protección, siendo los mayores valores para 0,3 horas de variabilidad.

El siguiente gráfico muestra la relación de estos costos de asignación frente al total.

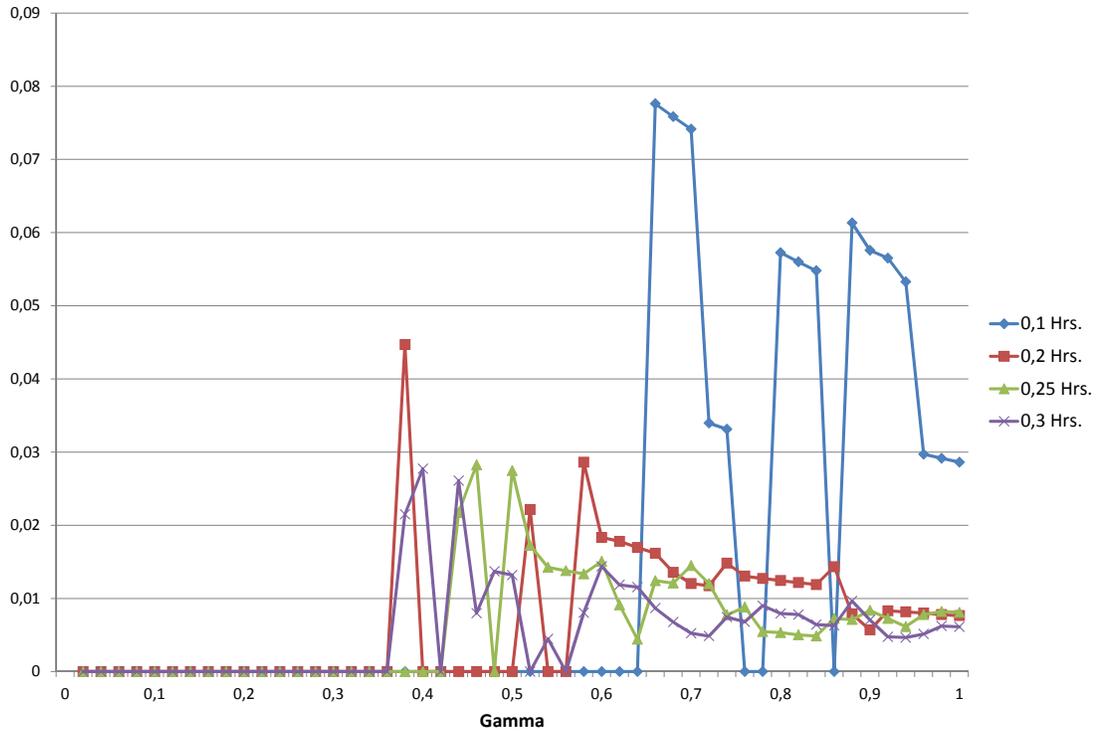


FIGURA 7.12. Porcentaje asignación de los costos totales para protección en SCL de vuelos nacionales

Los mayores saltos son los dados por la 0,1 horas de incertidumbre. El resto de los casos, estos quedan acotados en 3% de los costos totales.

Finalmente, para esta parte, tenemos el mencionado índice de puntualidad para esta protección de vuelos con origen en Santiago.

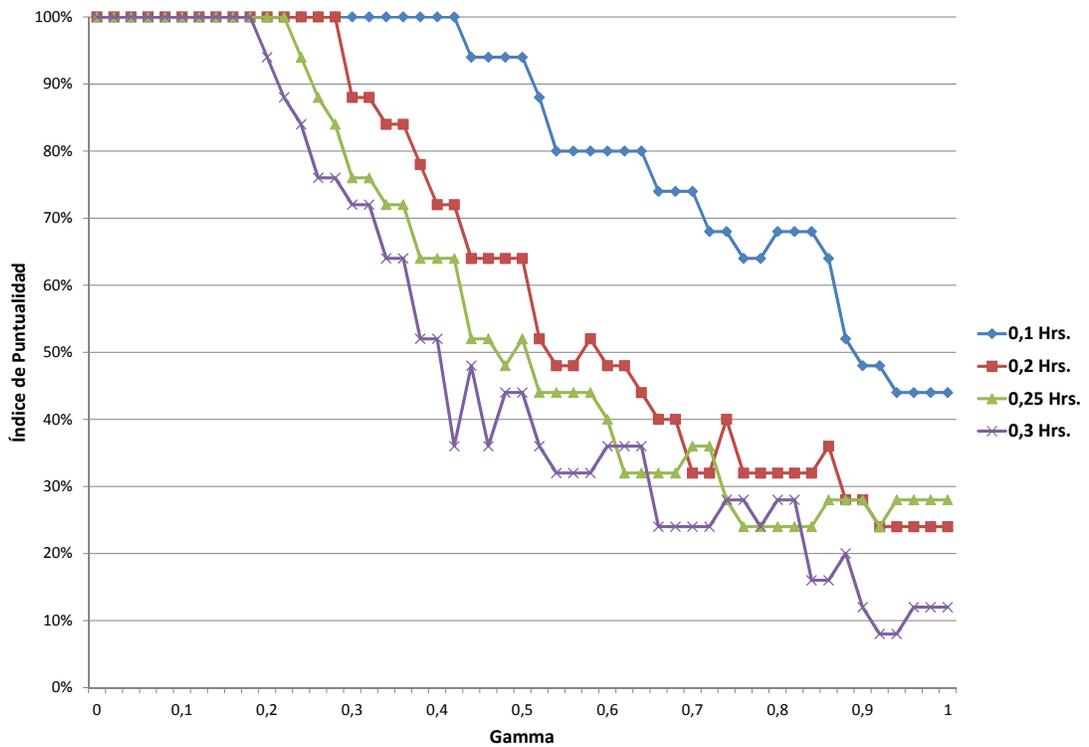


FIGURA 7.13. Índice de Puntualidad para protección en SCL de vuelos nacionales

A diferencia de la protección total, es posible mantener un cumplimiento cabal del horario de salida de vuelos, hasta ciertos límites un poco superior de protección en que caen hasta a lo más 10% para la mayor variabilidad.

### **7.3 Resultados para el Caso de Vuelos Regionales**

Para este caso, recordamos que disponemos de 71 vuelos desde Santiago a aeropuertos ubicados en Chile y dentro de Sudamérica.

Esta vez, mostraremos un caso más realista, en la que la incertidumbre es baja en el caso de vuelos nacionales, mientras que para los vuelos internacionales aumentaremos los intervalos de variabilidad de forma similar a lo hecho en el caso anterior.

Las incertidumbres que vamos a definir son las siguientes. Para los vuelos nacionales e internacionales de a lo más 1 hora de duración su incertidumbre se define en 0,09 horas (un poco más de 10 minutos). Para los vuelos internacionales restantes, la variabilidad es similar a lo mostrado en el caso anterior desde 0,1 a 0,5 horas. De esto, el vuelo de Santiago a Mendoza es la única que permanece con variabilidad baja y constante.

Cuando protegemos todos los vuelos considerados, mostramos todos los costos totales de esta protección.

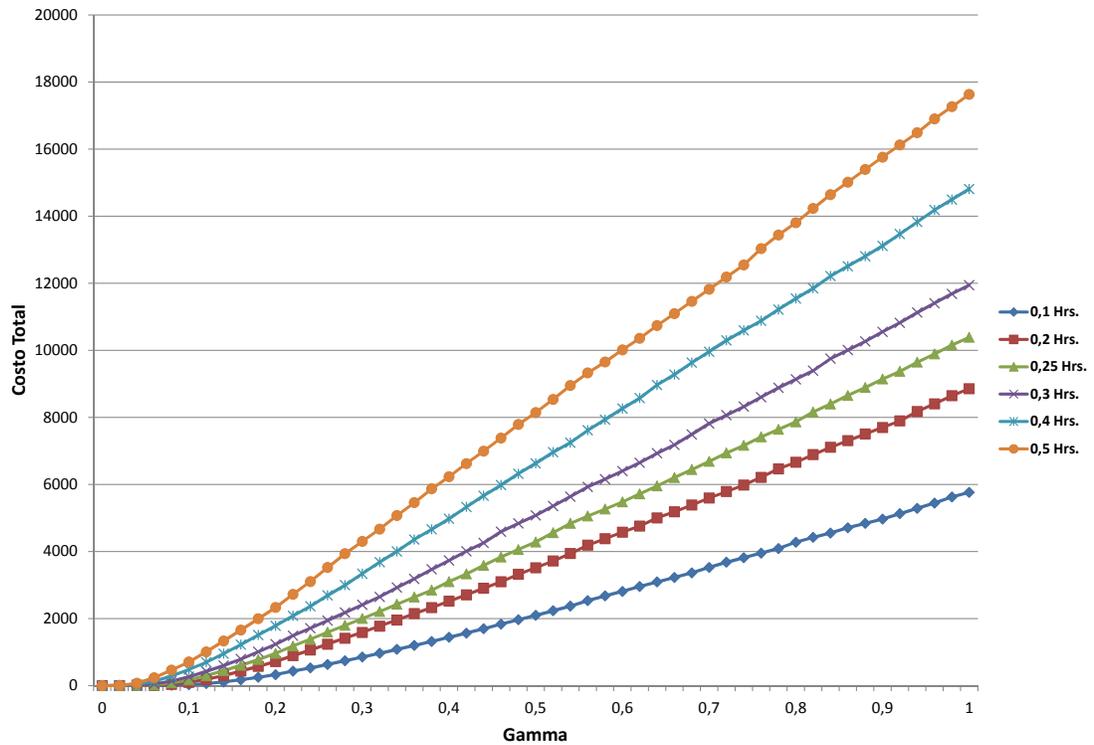


FIGURA 7.14. Costo Total para Vuelos Regionales

Al igual que para la situación de vuelos nacionales los costos aumentan a medida que protegemos más de la incertidumbre y cuando esta es mayor. Se concluye que este caso, la protección cumple lo dicho por la teoría de Bertsimas y Sim.

Haciendo el mismo ejercicio, respecto de la separación del costo total el costos de asignación mostramos sus respectivos gráficos.

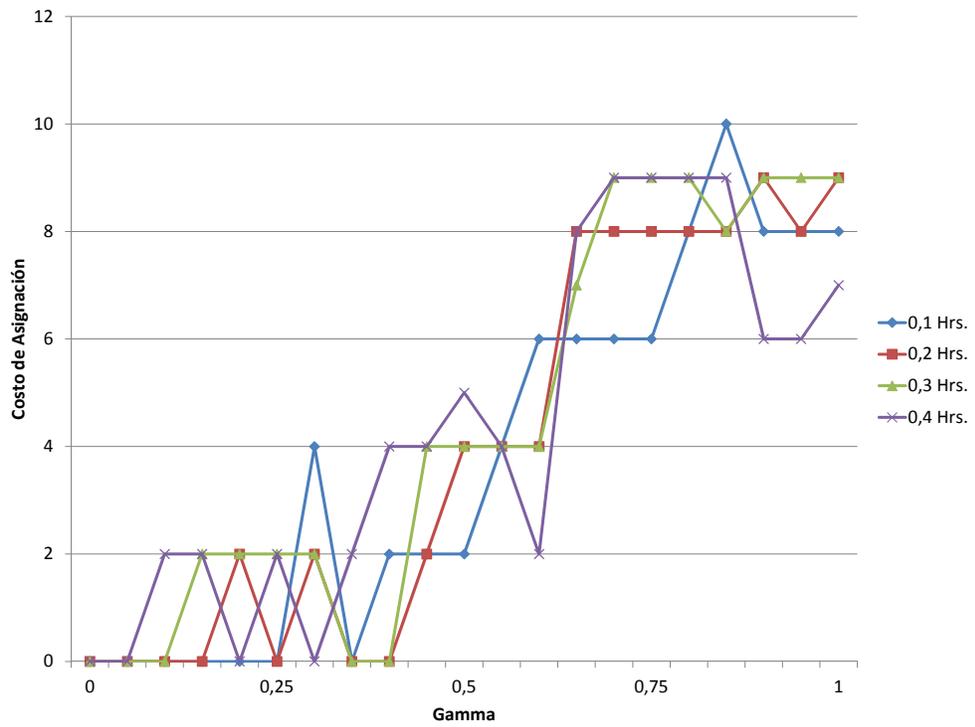
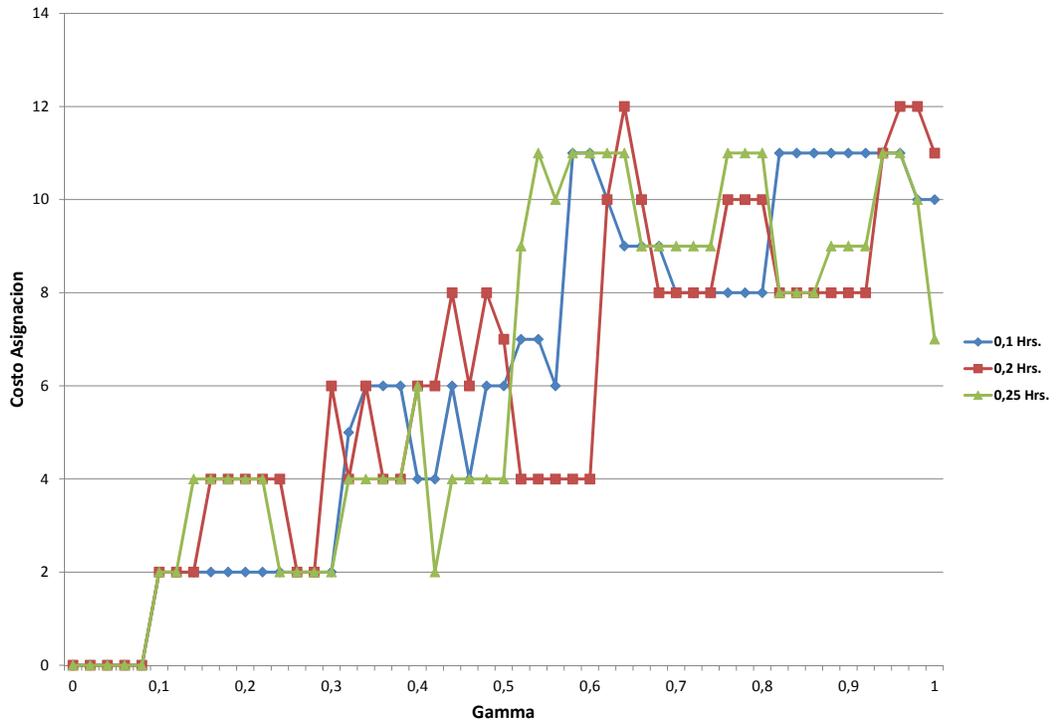


FIGURA 7.15. Costo de Asignación para Vuelos Regionales

Vemos que para una variabilidad de hasta 0,25 horas, los costos de asignación aumentan para valores cercanos al máximo nivel de protección, en cambio para grandes incertidumbres el costo aumenta mucho antes.

Nuevamente mostramos la puntualidad en los tiempos de salida de vuelos, que en este ejemplo se evalúa sobre 54 vuelos, ya que de los 71 considerados 7 están actualmente en operación.

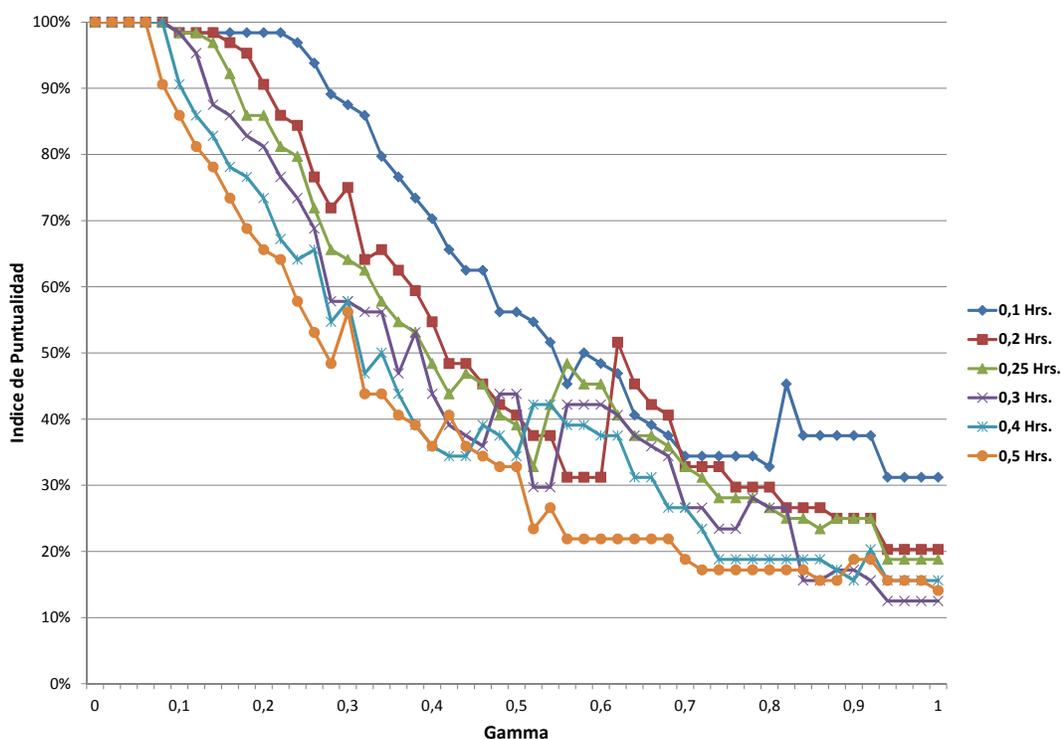


FIGURA 7.16. Índice de Puntualidad para el Caso de Vuelos Regionales

Al igual que lo mostrado en el caso de vuelos nacionales, existe un temprano descenso del cumplimiento “a tiempo” de la salida de vuelos, cayendo entre un 10% a 35% dependiendo del grado de incertidumbre, cuando protegemos totalmente.

Nuevamente pensamos si lo mejor es proteger los vuelos originados en Santiago, por ser el *Hub* de este caso. Haremos esto comparando los resultados con la primera protección total.

El costo por la protección en el *Hub* Santiago para este caso regional es el siguiente:

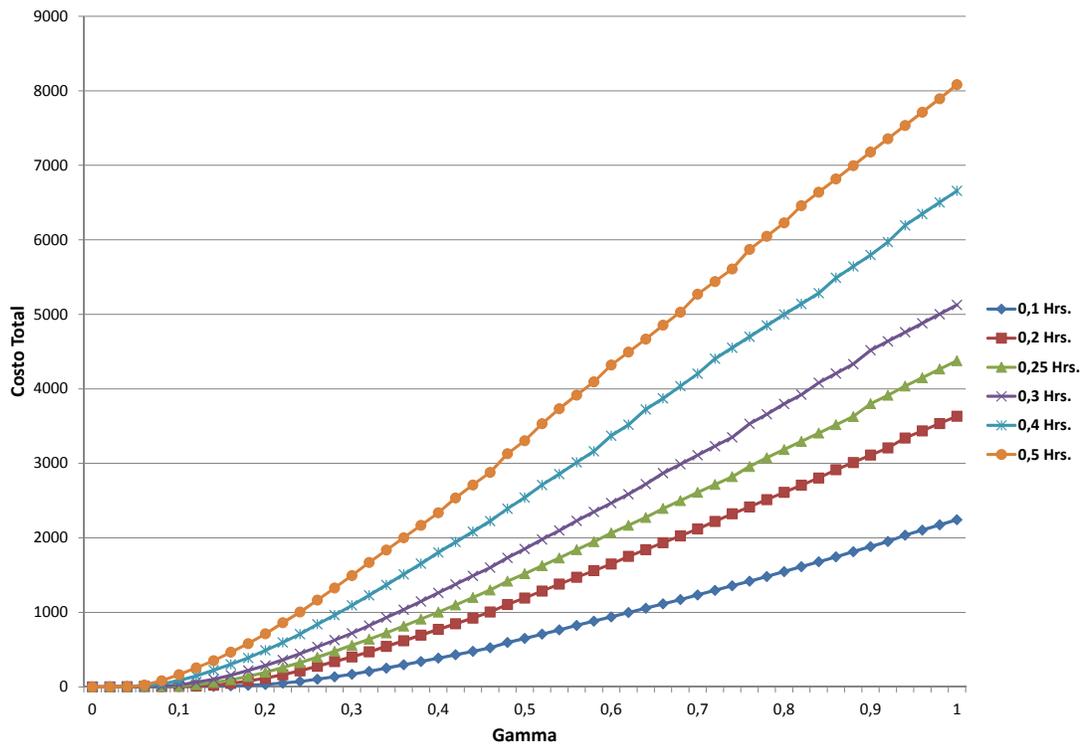


FIGURA 7.17. Costo de Protección en SCL para Vuelos Regionales

La forma es nuevamente razonable, aunque hace falta comparar esto con el costo por la protección total mostrada antes. Acompañamos a la figura 7.17 con la siguiente:

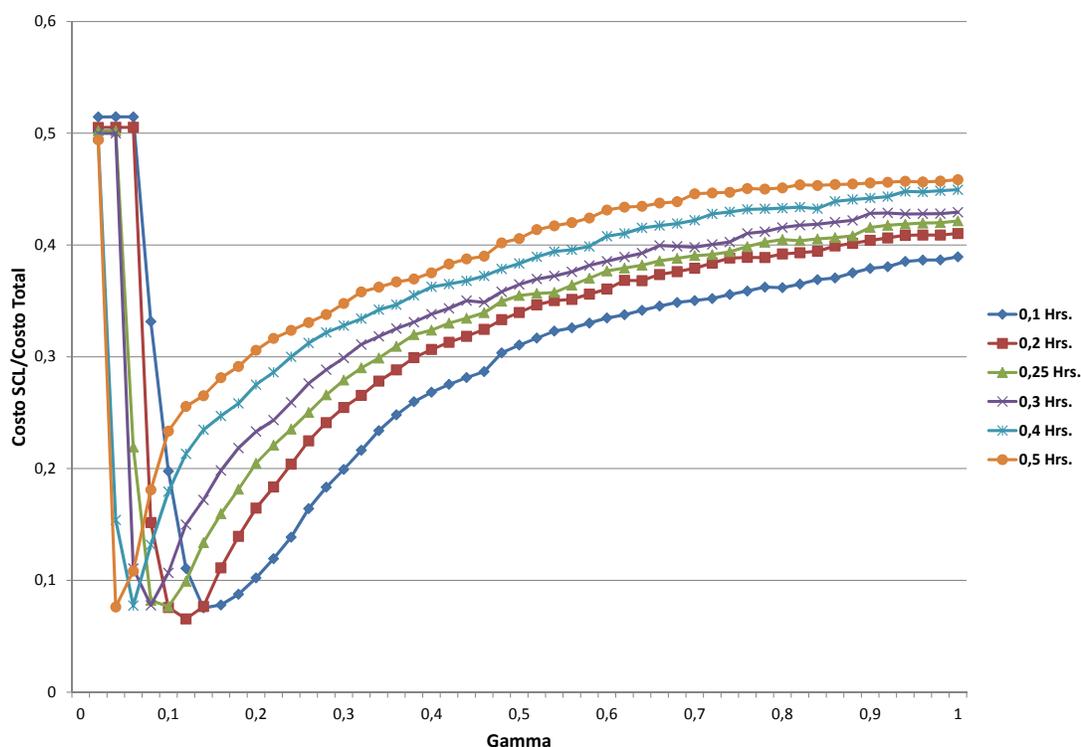


FIGURA 7.18. Costo de Protección en SCL como Porcentaje de Costos de Protección Total de Vuelos Regionales

Vemos que para pequeñas protecciones los costos representan alrededor del 50% de la protección total, luego una caída repentina para experimentar un ascenso asintótico a un valores cercanos al rango 38-45%.

Separando de nuevo el costo de asignación del total en este caso, vamos a mostrarlo en la figura siguiente.

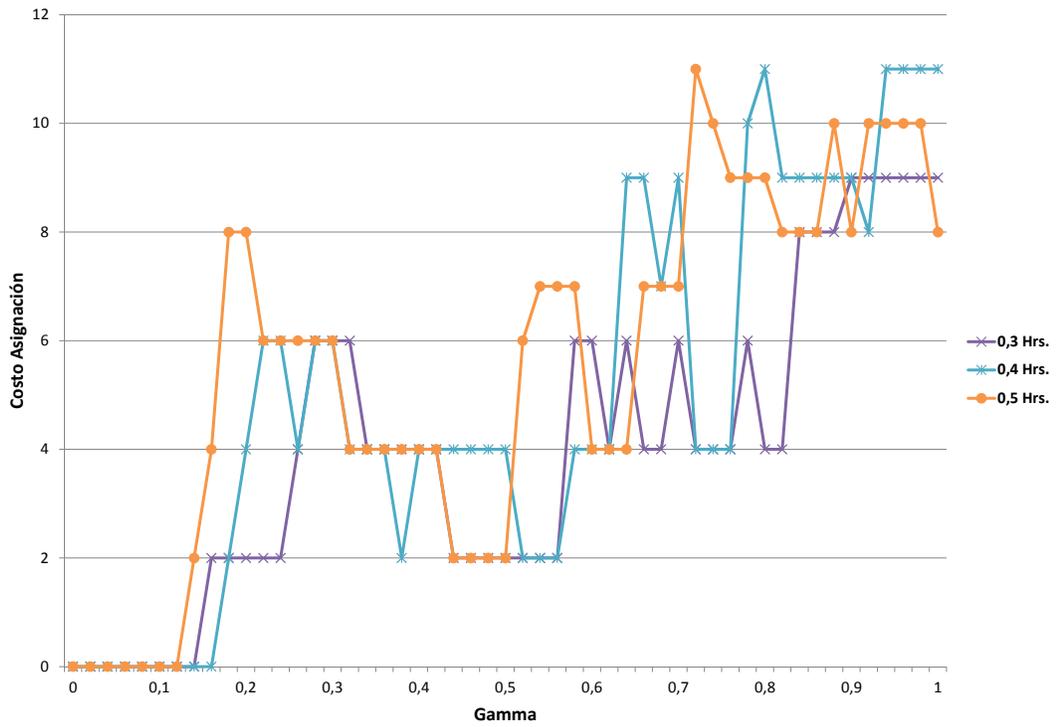
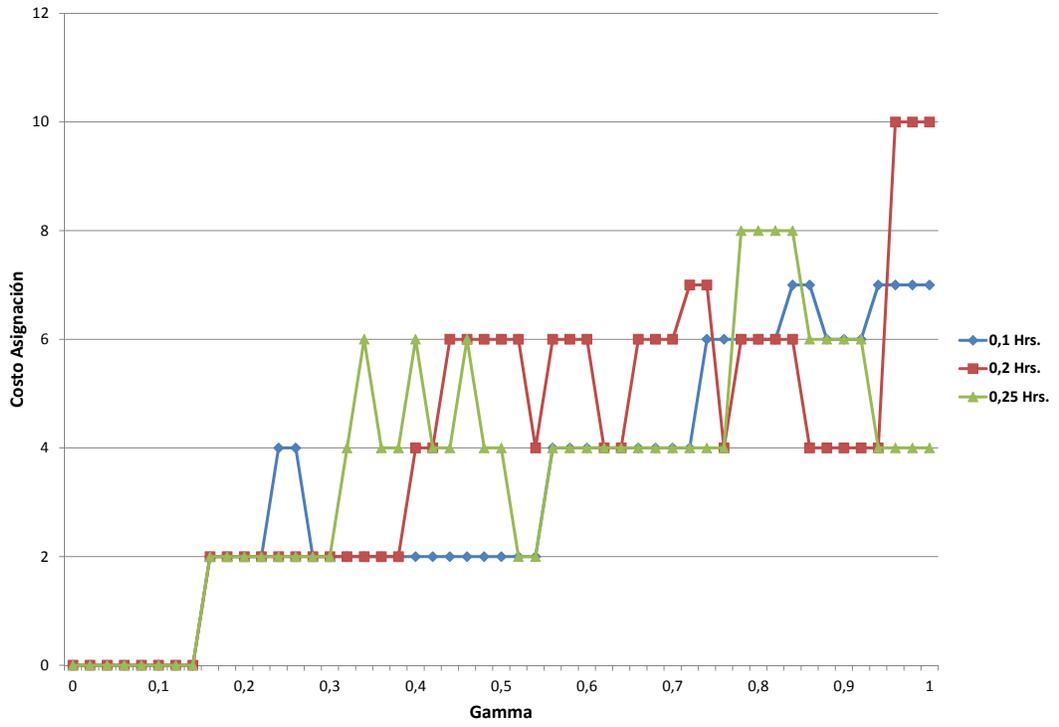


FIGURA 7.19. Costo de Asignación para Protección SCL de Vuelos Regionales

A medida que aumenta la variabilidad, el costo por asignar vuelos aumenta cuando protegemos aún más.

El siguiente gráfico muestra el porcentaje de operaciones que despegan a tiempo o con retrasos inferiores a 15 minutos.

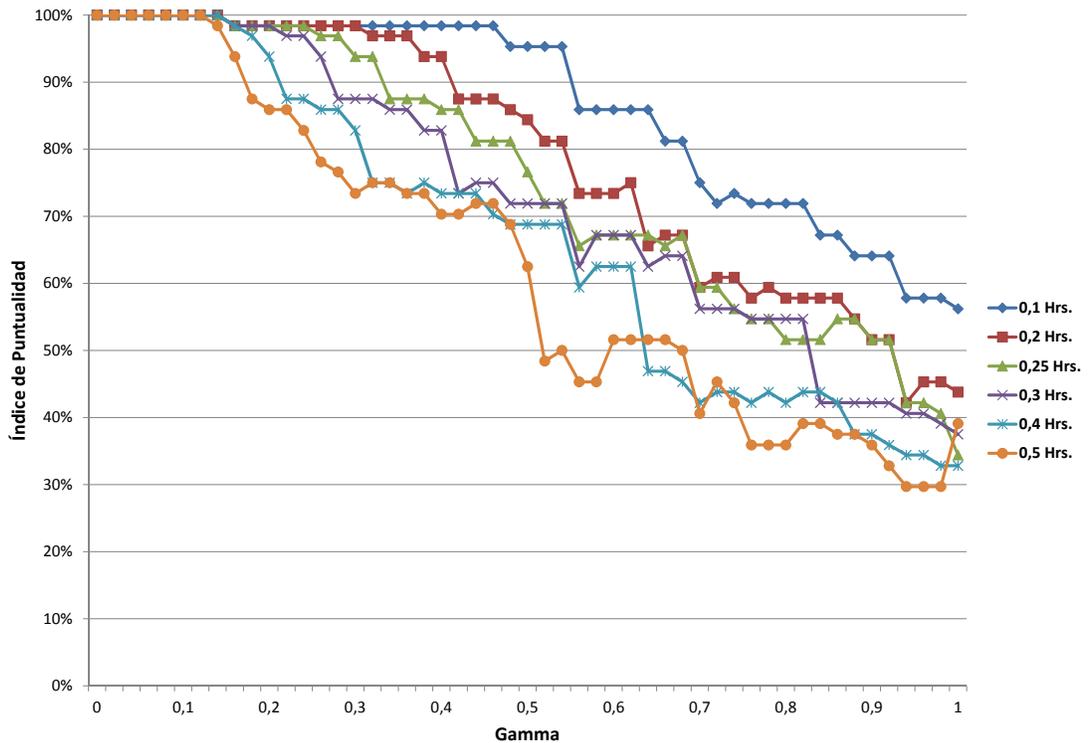


FIGURA 7.20. Índice de Puntualidad en Protección a SCL de Vuelos Regionales

Apreciamos que para bajas variaciones se mantiene un correcto funcionamiento de las operaciones a medida que aumentamos la protección. El descenso que experimentan no es tan pronunciado, a diferencia del caso anterior, llegando hasta un 30% para el caso de mayor variación.

## **8. EXTENSIÓN DEL MODELO CON AVIONES DE DISTINTOS MODELOS**

El problema de optimización mostrado en esta tesis considera, además de los vuelos en operación y por operar, que los aviones que se encargan de volar son de los mismos modelos.

Existe un caso general que es la de suponer que los aviones son de modelos diferentes, de modo que podemos trabajar con todos los tipos de aviones de la flota en un problema de optimización más integrado. La diferencia con respecto a lo anterior es que los tiempos y costos de asignación van a diferir para cada tipo de avión.

Si bien, podríamos utilizar el mismo modelo anterior para resolver una versión robusta del modelo, vamos a extenderlo de modo que el modelo resultante es uno de *Multicommodity Flow*.

Para modificar este modelo, consideramos un único grafo como el que se muestra a continuación:

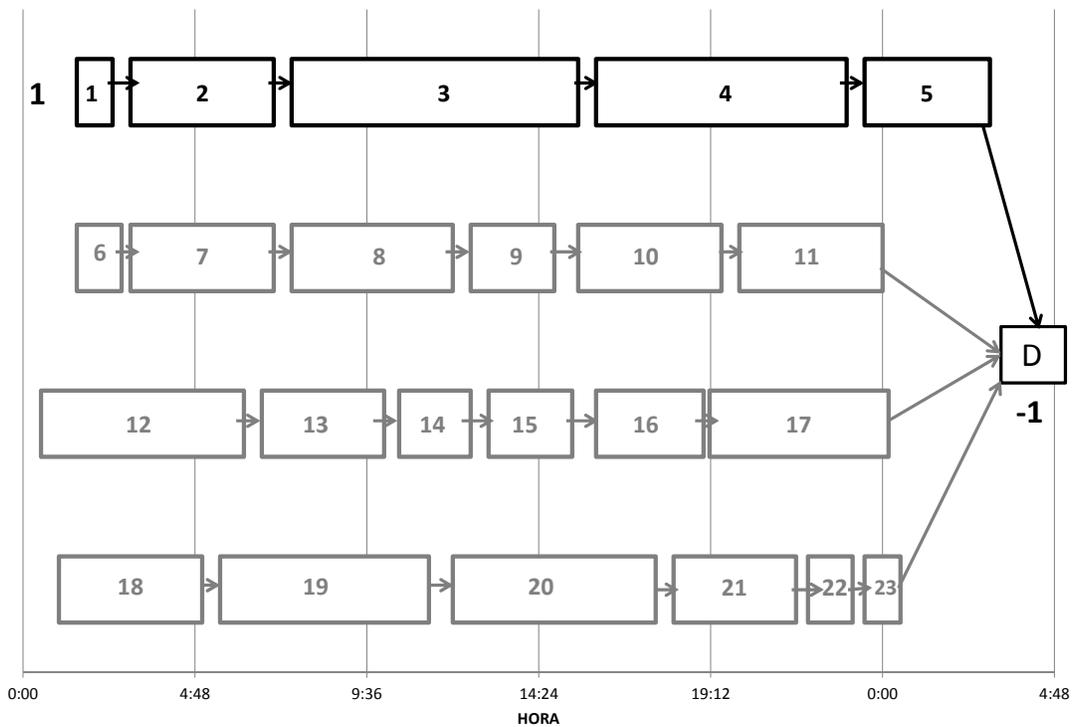


FIGURA 8.1. Grafo extendido para el caso de varios modelos de aviones

Este gráfico es similar al mostrado en la figura 4.7, con la diferencia que el nodo 1 es un nodo con oferta igual a 1 y el nodo “D” es la que recibe una demanda similar. De los cuatro itinerarios que considera este ejemplo, uno de ellos, precisamente los que tienen oferta y demanda de 1 los marcamos, mientras que los restantes 3 quedan ajenos de este problema y los sacamos de este por ahora.

El itinerario que destacamos con negro es la que corresponde a uno operado por un avión en particular, en un enfoque similar a un problema de *Multicommodity Flow*. Si bien, pueden haber cruces de itinerarios, como en el problema anterior, dichos costos de cruce

pueden no ser los mismos, sabiendo que trabajamos con aviones distintos en capacidad de pasajeros y tiempos de autonomía.

Las siguientes secciones muestran los cambios que haremos en el modelo del capítulo 4 y el ejemplo con el que calcularemos las respectivas soluciones.

## 8.1 Cambios en las Variables

La única modificación que vamos a hacer es para las variables de asignación. Para ello añadiremos a los conjuntos definidos antes, el conjunto  $A$  correspondiente al de los aviones de la flota, con lo cual la variable queda de la siguiente manera:

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{Asignar al vuelo } j \text{ como próximo al vuelo } i \text{ para el avión } k \\ 0 & \text{No hacer esa asignación} \end{cases} \quad (8.1)$$

## 8.2 Modificación de las Restricciones

Las restricciones que se modifican son aquellas en las que está participando las nuevas variables  $x_{ij}^k$  de asignación:

### 8.2.1 Conservación de Flujo

$$\sum_{r \in N} x_{ir}^k - \sum_{t \in N} x_{ti}^k = s_i^k \quad \forall i \in N \quad \forall k \in K \quad (8.2)$$

Siendo  $s_i^k$  el siguiente valor:

$$s_i^k = \begin{cases} 1 & i \in O \\ 0 & i \in P \quad \forall i \in F \quad k \in A \\ -1 & i \in D \end{cases}$$

Representando un origen y destino para cada avión, haciendo que el problema equivalga en parte a uno de *Multicommodity Flow*.

### 8.2.2 Una Sola Asignación por Vuelo

$$\sum_{j \in F} \sum_{k \in A} x_{ij}^k \leq 1 \quad \forall i \in F \quad (8.3)$$

Esta restricción asegura que solo un avión y no otro, independiente del modelo, operará el próximo vuelo programado.

### 8.2.3 Programación de Hora de Salida por Vuelo

La restricción de programación de hora de salida de vuelos la mostraremos en su versión modificada, con el fin de hacer el proceso de inclusión de restricciones agregadas y para hacer el proceso de protección frente la incertidumbre del problema.

$$TD_j \geq TD_i + (TF_i + TRD_{ij}^k) x_{ij}^k - M \cdot (1 - x_{ij}^k) \quad \forall i \in F, j \in P, k \in A \quad (8.4)$$

Siendo  $TRD_{ij}^k$  el tiempo de *turnaround* para cada avión según su modelo y que juega el mismo papel que el la permanencia en tierra de cualquier otro vuelo en que los tiempos son similares por ser del mismo modelo.

## 8.3 Función Objetivo

La función objetivo nuevamente involucra costos por decisiones de asignación y programación de salida de vuelos.

$$\min \sum_{k \in A} \sum_{i \in F} \sum_{j \in P} a_{ij}^k x_{ij}^k + \sum_{i \in F} cd_i \quad (8.5)$$

El modelo obtenido tiene un mayor grado de dificultad que el anterior, en el sentido que tenemos un nuevo subíndice relacionado con el modelo de avión. Cuando agreguemos la protección para la restricción 8.4 la restricción va a tener más dificultad.

## 8.4 Problema Robusto

La búsqueda de soluciones robustas de este problema de optimización, en la que vamos a agregar una función de protección, no tiene tantas variantes como el problema general. Además de la definición del parámetro  $T_{ij}^k = TF_i + TRD_{ij}^k$ , definimos las siguientes variables duales y auxiliares del siguiente modo:

$z_{ij}^k$ : Variable Dual

$p_{ij}^k$ : Variable Dual

$y_{ij}^k$ : Variable Auxiliar

Definimos nuevamente los parámetros  $\Gamma$  que ajustan el nivel de protección.

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_i \cdot \Gamma_k \quad (8.6)$$

Con  $\Gamma_i \in [0, 1]$  y  $\Gamma_k \in [0, 1]$  Dicho esto mostramos la versión del modelo para este caso:

$$TD_i - TD_j + \hat{T}_{ij}^k x_{ij}^k + z_{ij}^k \Gamma_i \cdot \Gamma_k + p_{ij}^k \leq M (1 - x_{ij}^k) \quad (8.7)$$

$$z_{ij}^k + p_{ij}^k \geq \hat{T}_{ij}^k y_{ij}^k \quad (8.8)$$

$$x_{ij}^k \leq y_{ij}^k \quad (8.9)$$

Hacemos más simple el problema protegiendo por vuelos operado y por operar. No por avión considerado, que en este caso usa los mismos tipos de aviones.

## 8.5 Aplicación del Modelo General a Vuelos Internacionales

El propósito de esta sección es proveer una aplicación del modelo a casos de itinerarios de vuelos en la que abarcaremos los aeropuertos de toda América. Los aviones que usaremos

van a ser de dos series: la primera es el Airbus A320 que hemos usado antes y el otro es el Boeing B767, cuyo tiempo de autonomía es de más de 10 horas. Este avión es ideal para vuelos transhemisféricos, debido a su mayor tiempo de autonomía comparado con el A320.

En primer lugar, presentamos los aeropuertos a considerar en este caso. Además de los aeropuertos importantes ubicados dentro de Sudamérica, vamos a incorporar 3 aeropuertos de Estados Unidos. Todas estas escalas los mostramos en la figura 8.2.



FIGURA 8.2. Aeropuertos Americanos a Considerar para el Problema Extendido

Los aeropuertos estadounidenses incluidos en este ejemplo los describimos en la tabla 8.1.

TABLA 8.1. Descripción de Aeropuertos de Estados Unidos

CIUDAD	AEROPUERTO	CÓDIGO IATA
New York	John F. Kennedy	JFK
Los Ángeles	Internacional de Los Ángeles	LAX
Miami	Internacional de Miami	MIA

Además, los tiempos de vuelos desde y hacia Santiago, conocido que la estructura de las operaciones es con punto de conexión con esta ciudad y que usamos el Boeing B767, son los siguientes.

TABLA 8.2. Tiempo estimado en horas de vuelos desde SCL hacia aeropuertos de Estados Unidos

Escala	Desde SCL	Hacia SCL
JFK	4	4
LAX	2,3	2
MIA	3,8	4,3

Una duda que surge es cuando pasa lo un cruce de itinerarios entre aviones de modelos diferentes ¿cómo afecta el tiempo de vuelo para *flight-legs* con mismo origen-destino? Lo normal sería que los tiempos de vuelo se ajustan de acuerdo al tipo de avión que lo opera. En esta ocasión, vamos a suponer excepcionalmente que los tiempos de vuelos son similares independiente del modelo de avión que opera. Esto es razonable, pues se espera un cumplimiento de los planes de vuelos originalmente programados en los tiempos esperados, lo cual no generará molestias en los clientes, viéndolo desde el punto de vista de estos.

### 8.5.1 Itinerarios Operados por el Boeing B767

En esta ocasión, vamos a describir los planes de vuelos para que sean operados por 8 aviones, 4 Boeing B767 y 4 Airbus A320. Los Boeing van a operar el siguiente plan de vuelos:

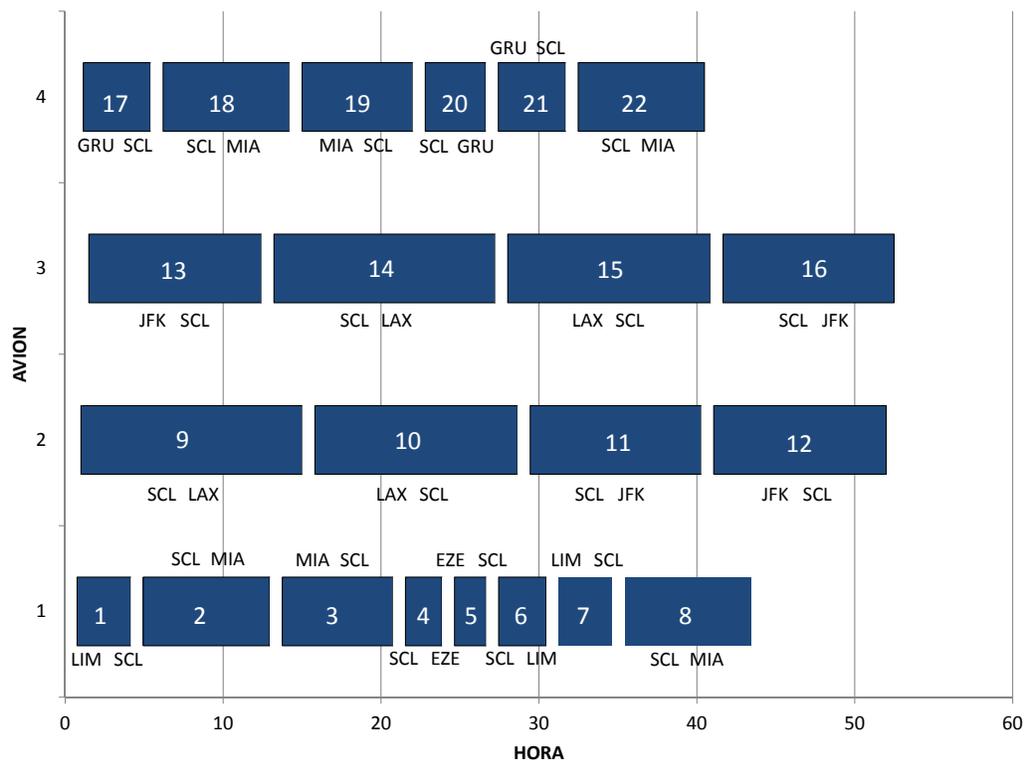


FIGURA 8.3. Vuelos Operados por Boeing B767 para Caso General

Como se ve en la figura, la idea es que este modelo de avión trabaje vuelos de mayor alcance como los que van desde Santiago a Estados Unidos, sumados a unos pocos vuelos internacionales dentro de la región.

a) Primer Itinerario

En este itinerario mostramos vuelos que operan hacia las ciudades de Lima (LIM), Miami (MIA) y Ezeiza (EZE).

TABLA 8.3. Detalle del primer itinerario general

AVIÓN	VUELO	ORIGEN	DESTINO	HR. SALIDA	HR. LLEGADA	T. VUELO
B763	1	LIM	SCL	0,75	4,15	3,4
	2	SCL	MIA	4,95	12,95	8
	3	MIA	SCL	13,75	20,75	7
	4	SCL	EZE	21,55	23,85	2,3
	5	EZE	SCL	24,65	26,65	2
	6	SCL	LIM	27,45	30,45	3
	7	LIM	SCL	31,25	34,65	3,4
	8	SCL	MIA	35,45	43,45	8

b) Segundo y Tercer Itinerarios

Estos planes de vuelos comprenden las ciudades de Estados Unidos, que son New York (JFK), Los Ángeles (LAX) y Miami (MIA).

TABLA 8.4. Detalle del segundo itinerario general

AVIÓN	VUELO	ORIGEN	DESTINO	HR. SALIDA	HR. LLEGADA	T. VUELO
B763	9	SCL	LAX	1	15,01	14,01
	10	LAX	SCL	15,81	28,64	12,83
	11	SCL	JFK	29,44	40,27	10,83
	12	JFK	SCL	41,07	51,99	10,92

TABLA 8.5. Detalle del tercer itinerario general

AVIÓN	VUELO	ORIGEN	DESTINO	HR. SALIDA	HR. LLEGADA	T. VUELO
B763	13	JFK	SCL	1,5	12,42	10,92
	14	SCL	LAX	13,22	27,23	14,01
	15	LAX	SCL	28,03	40,86	12,83
	16	SCL	JFK	41,66	52,49	10,83

c) Cuarto Itinerario

Mostramos las operaciones hacia la ciudades de São Paulo (GRU) y Miami (MIA).

TABLA 8.6. Detalle del cuarto itinerario general

AVIÓN	VUELO	ORIGEN	DESTINO	HR. SALIDA	HR. LLEGADA	T. VUELO
B763	17	GRU	SCL	1,15	5,4	4,25
	18	SCL	MIA	6,2	14,2	8
	19	MIA	SCL	15	22	7
	20	SCL	GRU	22,8	26,63	3,83
	21	GRU	SCL	27,43	31,68	4,25
	22	SCL	MIA	32,48	40,48	8

### 8.5.2 Itinerarios Operados por Airbus A320

Tal como en los capítulos anteriores, este avión sobrevuela dentro de Sudamérica. La figura siguiente contiene los aeropuertos que vamos a considerar en nuestro ejemplo.

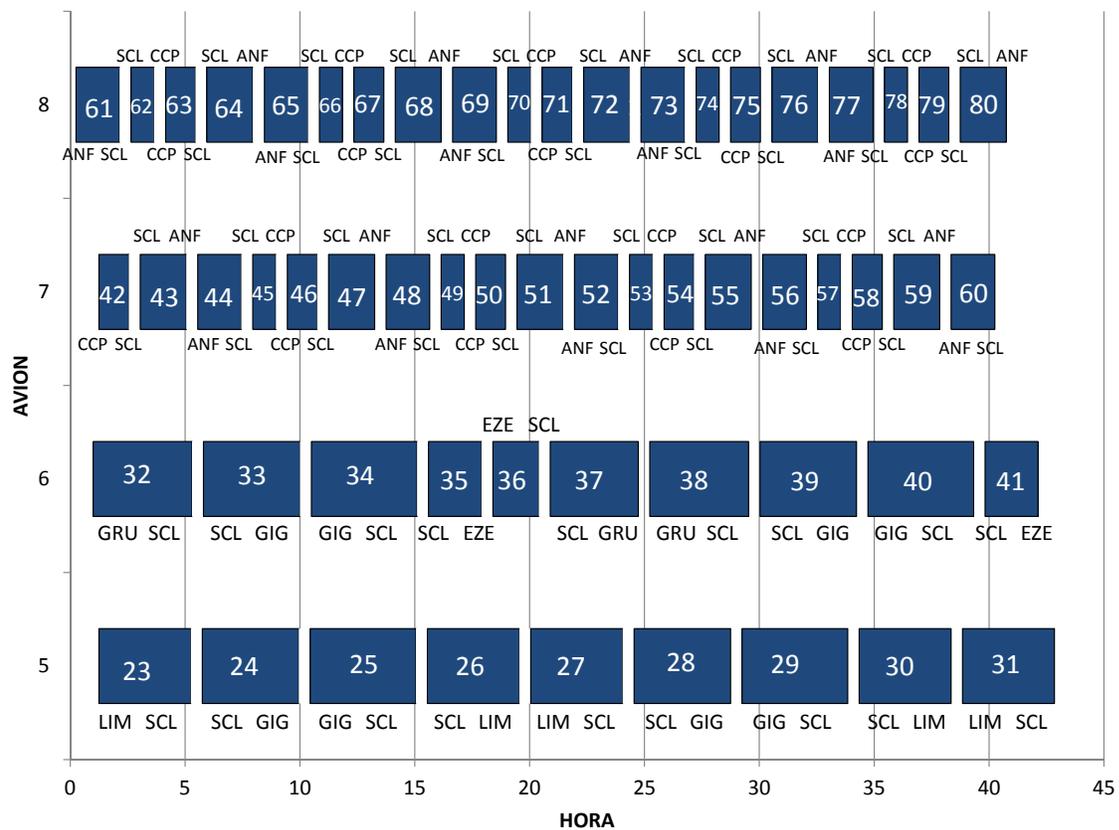


FIGURA 8.4. Vuelos Operados por Airbus A320 para Caso General

a) Quinto Itinerario

Consisten en vuelos que van hacia los aeropuertos de Lima (LIM) y Río de Janeiro (GIG).

TABLA 8.7. Detalle del quinto itinerario general

AVIÓN	VUELO	ORIGEN	DESTINO	HR. SALIDA	HR. LLEGADA	T. VUELO
A32s	23	LIM	SCL	1,25	5,25	4
	24	SCL	GIG	5,75	9,95	4,2
	25	GIG	SCL	10,45	15,05	4,6
	26	SCL	LIM	15,55	19,55	4
	27	LIM	SCL	20,05	24,05	4
	28	SCL	GIG	24,55	28,75	4,2
	29	GIG	SCL	29,25	33,85	4,6
	30	SCL	LIM	34,35	38,35	4
	31	LIM	SCL	38,85	42,85	4

b) Sexto Itinerario

Consisten en vuelos que van hacia los aeropuertos de Río de Janeiro (GIG) y Buenos Aires (EZE).

TABLA 8.8. Detalle del sexto itinerario general

AVIÓN	VUELO	ORIGEN	DESTINO	HR. SALIDA	HR. LLEGADA	T. VUELO
A32s	32	GRU	SCL	1	5,3	4,3
	33	SCL	GIG	5,8	10	4,2
	34	GIG	SCL	10,5	15,1	4,6
	35	SCL	EZE	15,6	17,9	2,3
	36	EZE	SCL	18,4	20,4	2
	37	SCL	GRU	20,9	24,73	3,83
	38	GRU	SCL	25,23	29,53	4,3
	39	SCL	GIG	30,03	34,23	4,2
	40	GIG	SCL	34,73	39,33	4,6
	41	SCL	EZE	39,83	42,13	2,3

c) Séptimo y Octavo Itinerario

Ambos consisten en vuelos nacionales desde Santiago a Concepción (CCP) y Antofagasta (ANF).

TABLA 8.9. Detalle del séptimo itinerario general

AVIÓN	VUELO	ORIGEN	DESTINO	HR. SALIDA	HR. LLEGADA	T. VUELO
A32s	42	CCP	SCL	1,25	2,55	1,3
	43	SCL	ANF	3,05	5,05	2
	44	ANF	SCL	5,55	7,45	1,9
	45	SCL	CCP	7,95	8,95	1
	46	CCP	SCL	9,45	10,75	1,3
	47	SCL	ANF	11,25	13,25	2
	48	ANF	SCL	13,75	15,65	1,9
	49	SCL	CCP	16,15	17,15	1
	50	CCP	SCL	17,65	18,95	1,3
	51	SCL	ANF	19,45	21,45	2
	52	ANF	SCL	21,95	23,85	1,9
	53	SCL	CCP	24,35	25,35	1
	54	CCP	SCL	25,85	27,15	1,3
	55	SCL	ANF	27,65	29,65	2
	56	ANF	SCL	30,15	32,05	1,9
	57	SCL	CCP	32,55	33,55	1
	58	CCP	SCL	34,05	35,35	1,3
	59	SCL	ANF	35,85	37,85	2
	60	ANF	SCL	38,35	40,25	1,9

## 8.6 Resultados de Computación

Al igual que en el caso de un mismo modelo de avión, calculamos las soluciones robustas para distintos niveles de protección frente a la incertidumbre para distintos casos de variabilidad de los tiempos de vuelos. Recordamos nuevamente que los cálculos fueron hechos en un procesador de 4 núcleos de 2,66 Ghz cada uno.

En este caso, dado que el nivel de protección  $\Gamma_{ik} = \Gamma_i \Gamma_k$  depende de dos múltiplos y con subíndices distintos, vamos a tomar dos ejemplos: uno con  $\Gamma_k = 0,5$  y otro con  $\Gamma_k = 1$  y variamos como siempre el  $\Gamma_i$  entre 0 y 1.

TABLA 8.10. Detalle del octavo itinerario general

AVIÓN	VUELO	ORIGEN	DESTINO	HR. SALIDA	HR. LLEGADA	T. VUELO
A32s	61	ANF	SCL	0,25	2,15	1,9
	62	SCL	CCP	2,65	3,65	1
	63	CCP	SCL	4,15	5,45	1,3
	64	SCL	ANF	5,95	7,95	2
	65	ANF	SCL	8,45	10,35	1,9
	66	SCL	CCP	10,85	11,85	1
	67	CCP	SCL	12,35	13,65	1,3
	68	SCL	ANF	14,15	16,15	2
	69	ANF	SCL	16,65	18,55	1,9
	70	SCL	CCP	19,05	20,05	1
	71	CCP	SCL	20,55	21,85	1,3
	72	SCL	ANF	22,35	24,35	2
	73	ANF	SCL	24,85	26,75	1,9
	74	SCL	CCP	27,25	28,25	1
	75	CCP	SCL	28,75	30,05	1,3
	76	SCL	ANF	30,55	32,55	2
	77	ANF	SCL	33,05	34,95	1,9
	78	SCL	CCP	35,45	36,45	1
	79	CCP	SCL	36,95	38,25	1,3
	80	SCL	ANF	38,75	40,75	2

### 8.6.1 Resultado para $\Gamma_k = 0,5$

Lo siguiente es el resultado para cuando consideramos  $\Gamma_k = 0,5$ , disminuyendo el nivel de protección total hacia la mitad. El siguiente gráfico es de costos totales en función del nivel de protección para los vuelos  $\Gamma_i$ :

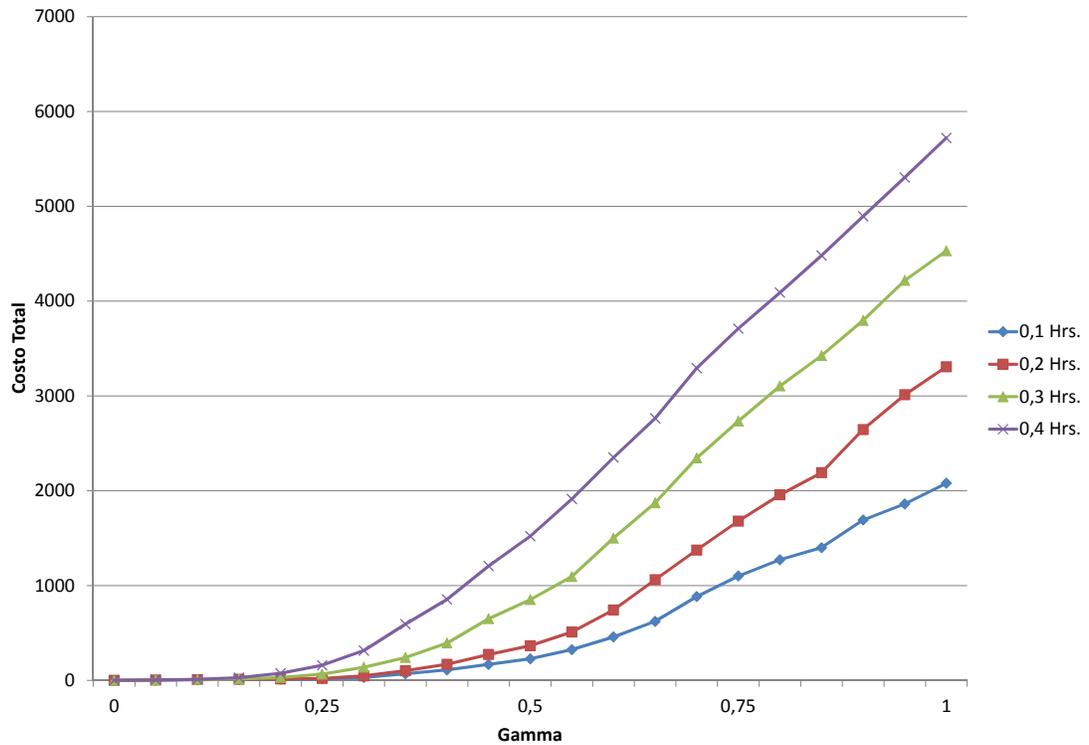


FIGURA 8.5. Costo de protección para el caso general, con  $\Gamma_k = 0,5$

La forma es bastante similar a lo mostrado en los resultados anteriores, por lo que no hay discusión y el resultado es consecuente con lo planteado por Bertsimas y Sim. Por otro lado, el costo de asignación que hemos mostrado en el caso particular, en este ejemplo se muestra en el gráfico que sigue:

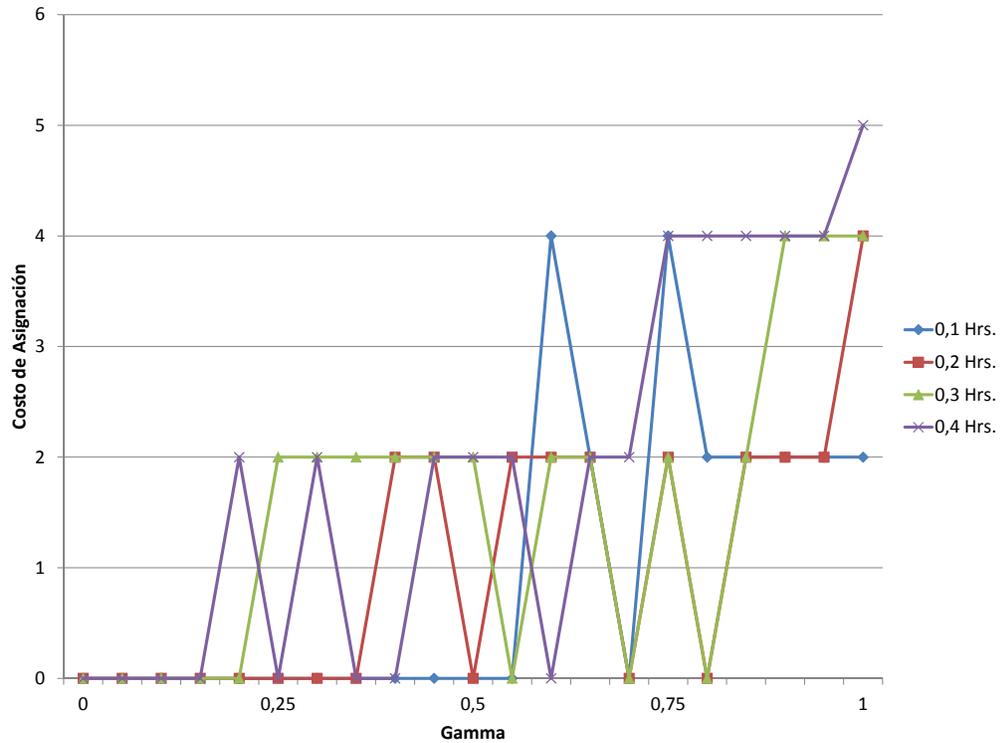


FIGURA 8.6. Costo de asignación para el caso general, con  $\Gamma_k = 0,5$

Por lo general, el costo por una nueva asignación no pasa más allá de cierto valor, salvo para ciertos valores grandes de protección para determinados niveles de incertidumbre. Al ponderar la protección por vuelo  $\Gamma_i$ , por un valor bajo de protección  $\Gamma_k$ , que es el valor por avión, tenemos que la protección total es baja por lo que los costos de asignación no son mayores. El caso sería semejante si hacemos un gráfico en función de  $\Gamma_k$  para un valor bajo de  $\Gamma_i$ .

El índice de puntualidad que también definimos en el caso anterior se calculó de modo similar al de antes, considerando 72 vuelos operar para los 8 itinerarios de este ejemplo. Para este primer caso de operaciones en general se logró el gráfico siguiente:

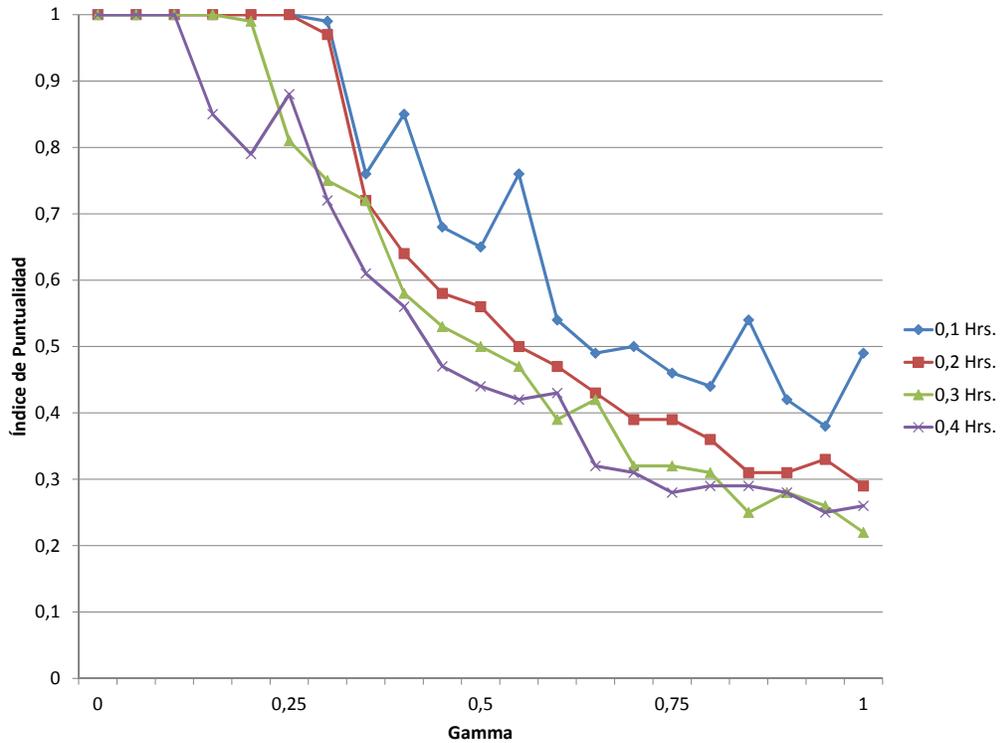


FIGURA 8.7. Índice de puntualidad para el caso general, con  $\Gamma_k = 0,5$

Nuevamente, la forma es de una curva comenzando en 1 para niveles bajos de protección para luego comenzar a caer desde un cierto valor, dependiendo de la situación de incertidumbre llegando a niveles superiores al 20% bajo la máxima protección.

### 8.6.2 Resultado para $\Gamma_k = 1,0$

Al hacer  $\Gamma_k = 1,0$ , a medida que aumentamos el valor de  $\Gamma_i$  para todo  $i$  nos acercamos al máximo nivel de protección de nuestro modelo extendido. Dicho esto, el costo de la protección cuando variamos  $\Gamma_i$  es el siguiente:

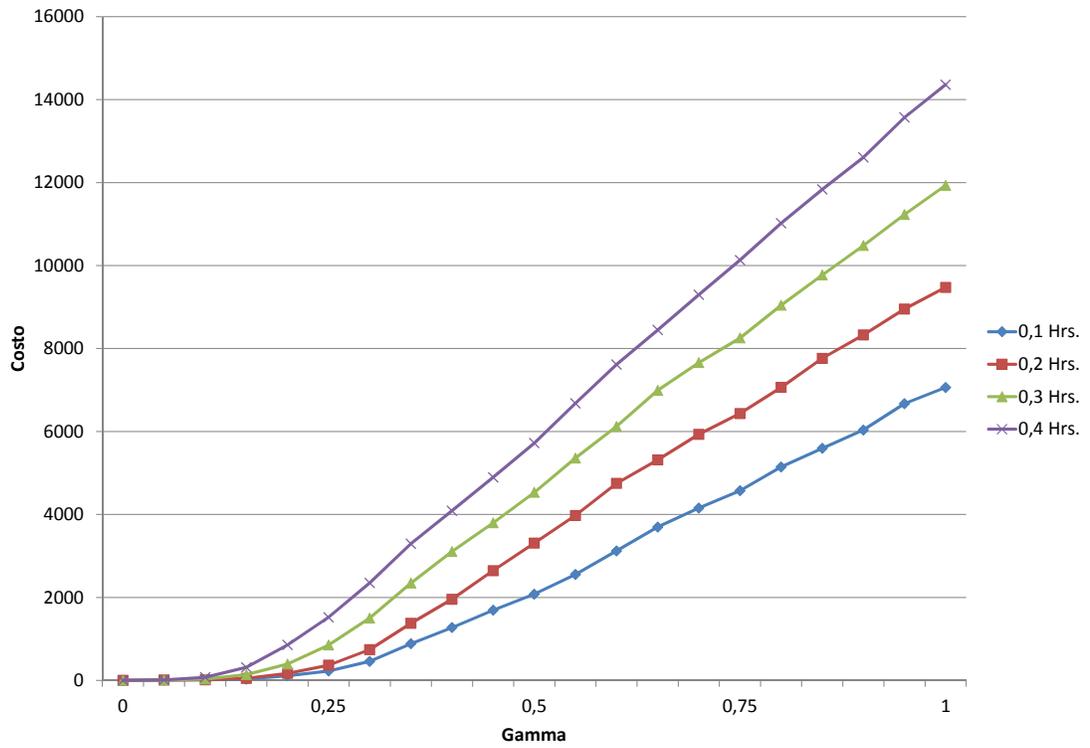


FIGURA 8.8. Costo de protección para el caso general, con  $\Gamma_k = 1, 0$

Mientras que el costo de asignación, a medida que aumenta la protección, lo mostramos en la figura 8.9.

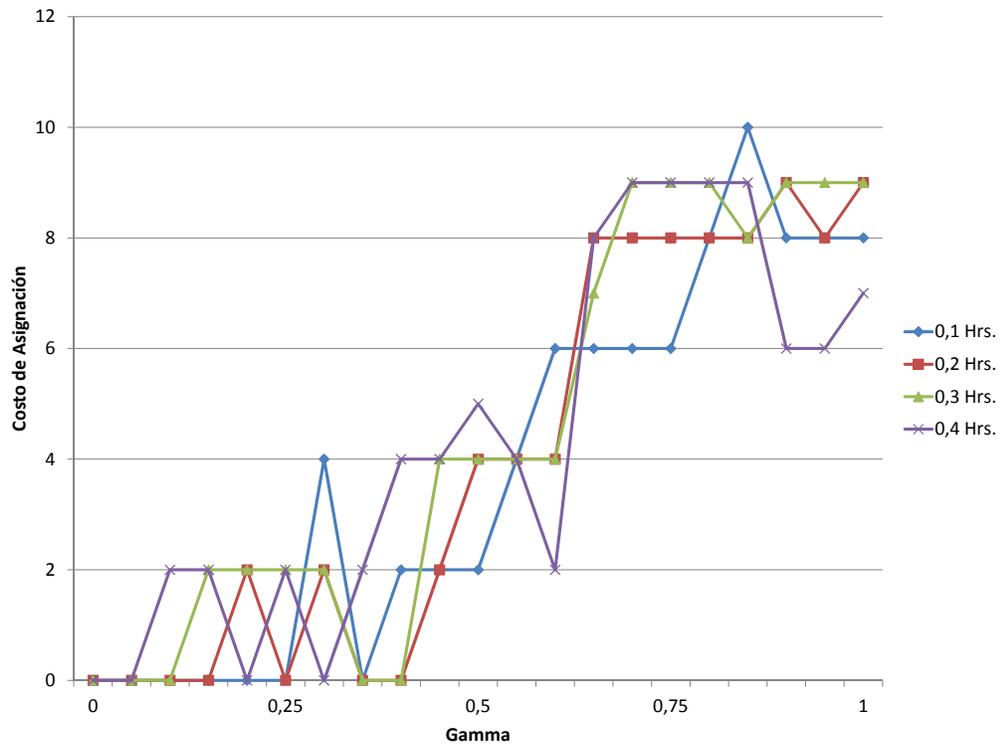


FIGURA 8.9. Costo de asignación para el caso general, con  $\Gamma_k = 1, 0$

A diferencia de la figura 8.6, hay una tendencia al alza en el costo de asignación, el cual se manifiesta aproximadamente a partir de  $\Gamma_i = 0, 25$ , llegando hasta un costo de 10 cuando la protección es máxima.

Finalmente, el índice de puntualidad para este ejemplo lo mostramos en la figura 8.10:

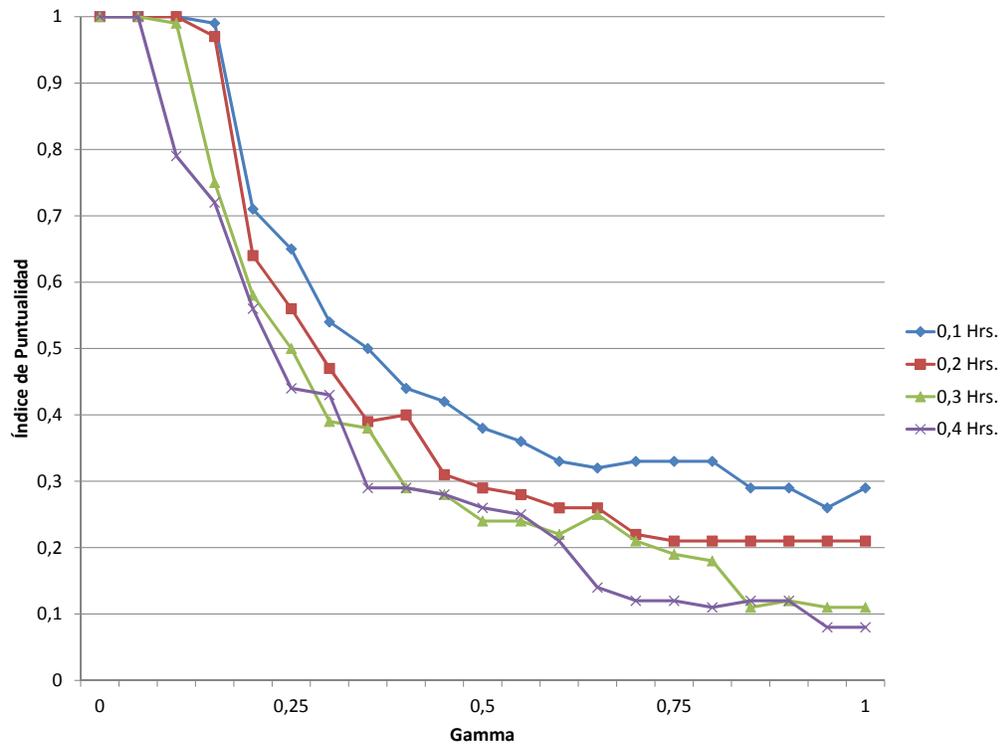


FIGURA 8.10. Índice de puntualidad para el caso general, con  $\Gamma_k = 1, 0$

La caída en la puntualidad comienza un poco antes que de lo que se muestra en la figura 8.7. En el caso de máxima protección, el nivel de puntualidad alcanza por lo menos un 10% aproximadamente.

## 9. SIMULACIÓN DE SITUACIONES DE INFECTIBILIDAD EN RESTRICCIONES PROTEGIDAS DE LA INCERTIDUMBRE

Hasta ahora hemos mostrado diversos resultados, en la que cada solución es una que está inmune de la incertidumbre por medio de una función de protección que depende de un parámetro que variamos desde un nivel en que tenemos la solución nominal hasta la máxima protección, cuya solución es la más conservadora posible.

A pesar de todos estos resultados, tenemos que considerar que para cada solución protegida existe la probabilidad de que estas aún terminen violando ciertas restricciones, causando que estas sean infectibles. Esto se debe claramente a que la naturaleza aleatoria de los datos, para ciertos valores de estos provoque la infectibilidad.

Sabemos que la incertidumbre de los tiempos de vuelos puede causar complicaciones con la restricción:

$$TD_i - TD_j + T_{ij} x_{ij} \leq M \cdot (1 - x_{ij}) \quad \forall i \in F, j \in P \quad (9.1)$$

Por esto hemos incluido una protección para esta restricción, la cual volvemos a recordar:

$$TD_i - TD_j + T_{ij} x_{ij} + z_{ij} \Gamma_i + p_{ij} \leq M (1 - x_{ij}) \quad (9.2)$$

Dependiendo del nivel de protección  $\Gamma_i$ , dada la solución del problema robusto, necesitamos estimar:

$$\mathbb{P}(TD_i - TD_j + T_{ij} x_{ij} > M (1 - x_{ij})) \quad (9.3)$$

El cual corresponde a la probabilidad de violación de la restricción 9.2 protegida antes. Lo que se espera es que esta probabilidad tienda a cero a medida que la protección asciende al máximo posible, es decir si la protección es máxima factibilidad es un evento casi seguro.

Y si llega a ocurrir la infectibilidad de al menos una restricción, es posible calcular la magnitud de esa violación, con el fin de determinar si el margen de violación de las restricciones es despreciable desde el punto de vista del usuario de este modelo.

En las siguientes secciones mostraremos la metodología empleada para estimar la probabilidad de infactibilidad de restricciones para una solución robusta, en la cual desarrollaremos una Simulación de Montecarlo que determina si ante un escenario de valores generados de tiempos de vuelos existe la violación de al menos una restricción, por lo que definimos una situación de infactibilidad.

## 9.1 Estimación de Probabilidades de Soluciones Infactibles

Programamos una Simulación de Montecarlo que permita generar 1000 escenarios diferentes. Cada escenario calcula para cada tiempo de operación  $T_{ij}$  un valor aleatorio  $\tilde{T}_{ij}$  tal que:

$$T_{ij} - \hat{T}_{ij} \leq \tilde{T}_{ij} \leq T_{ij} + \hat{T}_{ij}$$

Siendo  $\hat{T}_{ij}$  el valor de la variabilidad máxima para el parámetro  $T_{ij}$ . Ya sabemos que la naturaleza de estas variables aleatorias no las conocemos, aunque en este ejercicio podemos fijar la distribución de probabilidades a nuestra elección, generando los valores mencionados tal que:

- $\tilde{T}_{ij}$  distribuye uniformemente entre  $[T_{ij} - \hat{T}_{ij}, T_{ij} + \hat{T}_{ij}]$
- $\tilde{T}_{ij}$  distribuye Normal con un 95% de cobertura del intervalo señalado, similar a decir que la distribución es Normal con desviación igual a  $1,96\sigma$ , siendo  $\sigma$  la desviación estándar de la distribución Normal.
- $\tilde{T}_{ij}$  distribuye Normal con un 99,99966% de cobertura del intervalo. Esto es equivalente a que trabajamos con un proceso 6-Sigma.

Estudiamos la ecuación 9.2 para cada valor  $i, j \in F$  y si existe al menos una restricción en la que:

$$TD_i - TD_j + T_{ij} x_{ij} > M (1 - x_{ij})$$

Para la solución protegida antes, estamos en una situación de infactibilidad y queda contabilizados por la simulación programada. Aplicaremos esta simulación para el caso de vuelos nacionales en la que variamos los tiempos de todas las operaciones consideradas desde 0,1 a 0,4 horas.

## 9.2 Resultados de la Simulación

Asumiendo, en primer lugar, que los tiempos distribuyen uniforme sobre sus intervalos de incertidumbre, mostramos el siguiente gráfico de la probabilidad de violación de restricción:

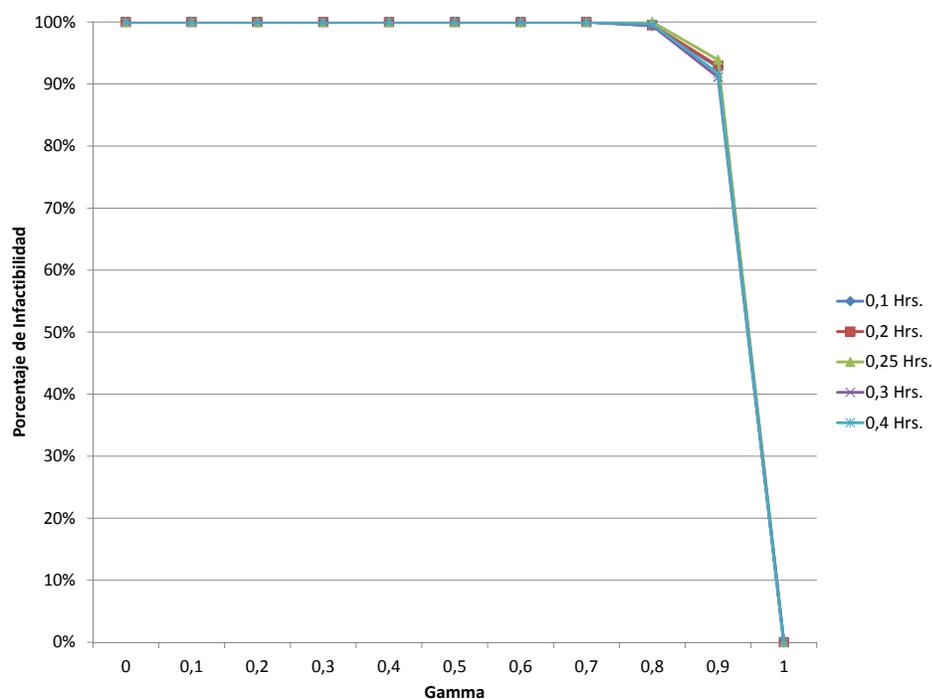


FIGURA 9.1. Porcentaje de infactibilidad para tiempos con distribución Uniforme

El resultado es razonable en el sentido que para el máximo nivel de protección, la probabilidad de infactibilidad de restricciones expresado en el porcentaje de realizaciones

de la simulación, es cero mientras que para una gran cantidad de valores de protección. Debido a que existen las mismas probabilidades de que escojan cualquier valor de Tiempo de Vuelo en sus respectivos intervalos, está la probabilidad que se escojan valores que causen la violación de al menos una restricción, por lo que para todos los casos de simulación existe una violación.

Si suponemos que simulamos una distribución Normal, cuya cobertura en los límites del intervalo de variación corresponde al 95% de la distribución:

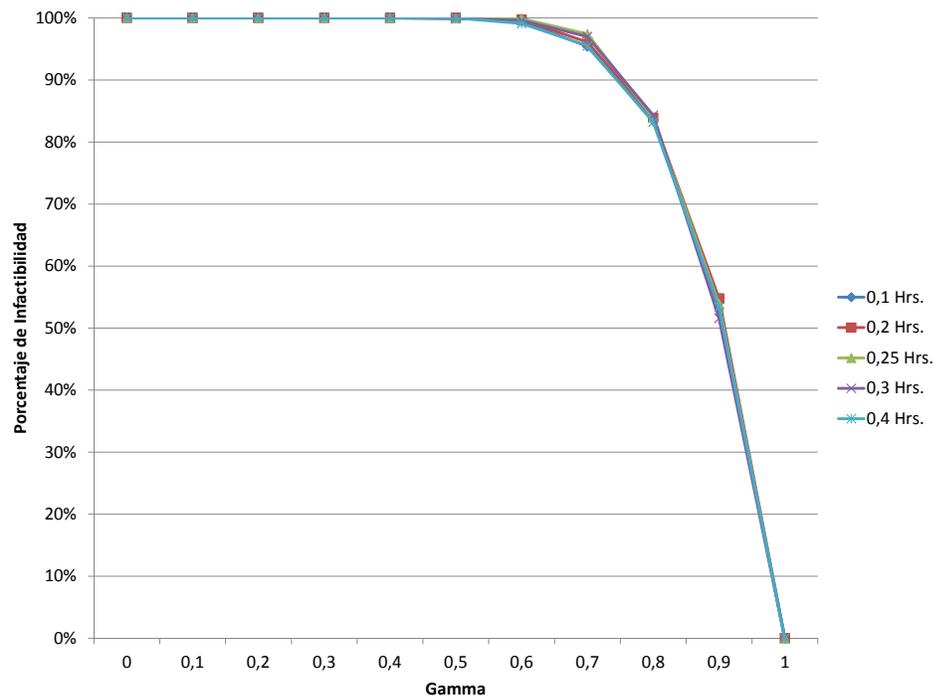


FIGURA 9.2. Porcentaje de infactibilidad para tiempos con distribución Normal al 95% de cobertura

Vemos que si bien se mantiene la alta probabilidad de infactibilidad, su caída comienza un poco antes que el caso Uniforme, debido a que la distribución se mantiene un poco más

concentrado en su centro, para las respectivas variaciones consideradas en cada restricción del modelo.

Por último, vamos a asumir que trabajamos con la distribución Normal conducente a un proceso 6-sigma.

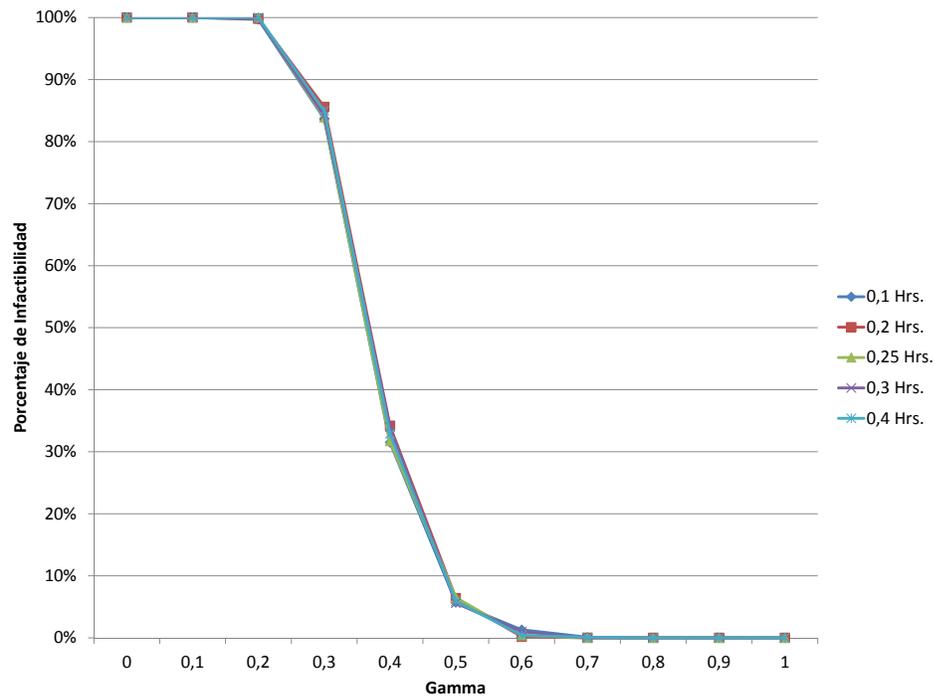


FIGURA 9.3. Porcentaje de infactibilidad para tiempos bajo un proceso 6-Sigma

La caída es mucho más temprana que en los casos anteriores. Esto se debe a que existe una mucho mayor concentración de la densidad de la distribución en el centro, por lo que los tiempos escogidos en la simulación no terminan generando posibles casos de infactibilidad.

Notamos que la forma de los gráficos de estos porcentajes de infactibilidad son similares independiente de la variabilidad que los tiempos de vuelos pueden experimentar. Una

posible conjetura que podemos hacer es respecto a la forma desagregada que tienen todas las restricciones disjuntivas. Cuando existe un nivel de protección definido, la protección es proporcional a ese nivel, sin importar cuánto sea la incertidumbre. Es decir, bajo cualquier incertidumbre y a mayor nivel de  $\Gamma$ , la función de protección va a ser un número grande, por lo que la probabilidad de violación va a ser parecida en todos los casos.

En general, aunque existan casos de infactibilidad de al menos una restricción, no disponemos aún de una información respecto del nivel de violación de las restricciones. En las siguientes secciones describiremos dos formas de medir estas violaciones, a partir de la simulación propuesta. Los gráficos que mostraremos corresponden al nivel máximo de los índices obtenidos por medio de la Simulación de Montecarlo, como forma de entender el orden máximo que podrían tener cada uno de los indicadores que vamos a proponer.

### 9.3 Infactibilidad Acumulada

Esta medida corresponde a la suma de los tiempos sobrantes y causantes de la infactibilidad de las restricciones 9.1, es decir, si llamamos  $I_{ij}$  al nivel de violación, si es que se viola, de la restricción asociada al par  $(i, j)$ , entonces la infactibilidad acumulada, es igual a la suma:

$$IA = \sum_{(i,j) \in If} I_{ij} = \sum_{(i,j) \in If} TD_i + \tilde{T}_{ij} - TD_j$$

Siendo  $If$  el conjunto de itinerarios en donde suceden situaciones de infactibilidad. Como dijimos antes, de todos los casos de la simulación, extraemos el valor máximo como una forma de entender el orden al que puede llegar los valores de este indicador.

Haciendo esto, para el caso que los tiempos distribuye Uniforme sobre el intervalo, mostramos este resultado:

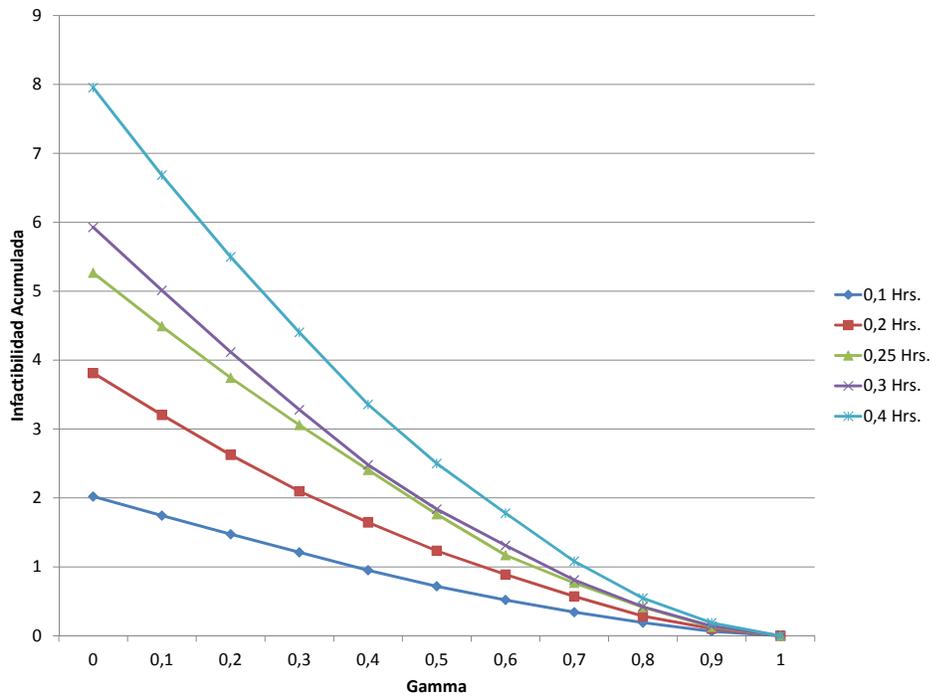


FIGURA 9.4. Infactibilidad Acumulada en Horas para el caso de distribución Uniforme

Tenemos una forma consecuente con el aumento del nivel de protección, ya que tenemos que la infactibilidad acumulada tiende a cero. Si tenemos una distribución normal, además de tener una aparente menor diferencia que el caso uniforme el descenso es un poco más pronunciado en el caso de esta distribución, precisamente por la concentración de la densidad, causando que el orden de la violación sea mucho menor que en el caso anterior. Esto lo vemos en la figura 9.5:

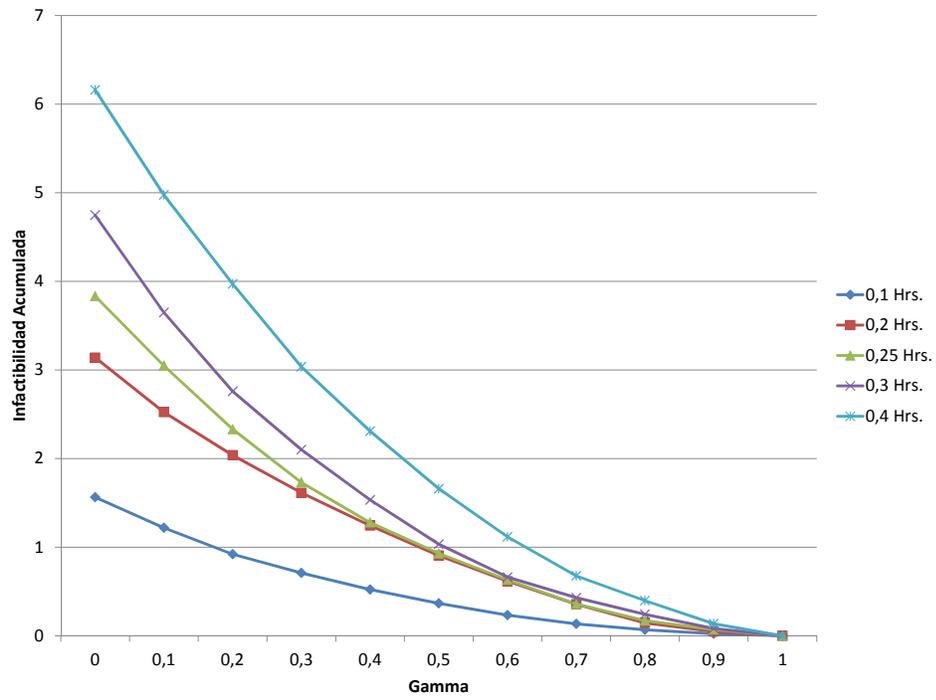


FIGURA 9.5. Infactibilidad Acumulada en Horas para el caso de distribución Normal al 95% de cobertura

Aplicando un proceso 6-sigma a nuestro caso, vamos a obtener que el orden de esta medida es mucho menor que los casos anteriores, como se muestra en la figura 9.6.

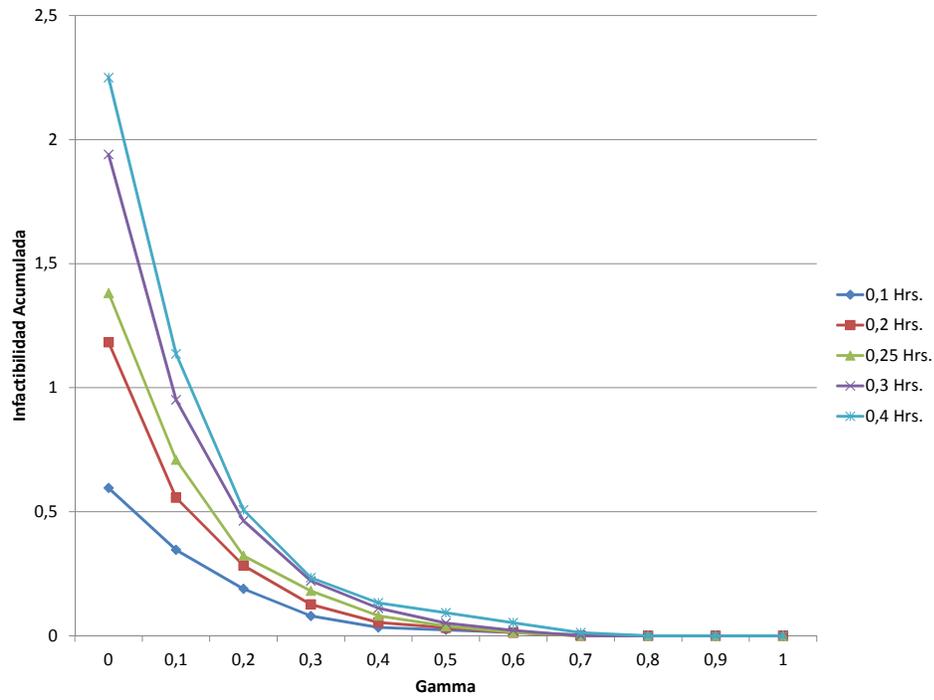


FIGURA 9.6. Infactibilidad Acumulada en Horas para el caso del proceso 6-Sigma

Nuevamente, ocurre que debido a la bajísima concentración de la función de densidad acumulada en los extremos de los respectivos intervalos que ya hemos mencionado, la acumulación de las magnitudes de la violación no es tan grande si es que se comparan con los casos anteriores. El descenso es mucho mayor, cayendo a mayor velocidad hacia cero.

#### 9.4 Infactibilidad Acumulada Porcentual

Otra medida de interés para medir la infactibilidad es la que definiremos como “Infactibilidad Acumulada Porcentual”, la cual corresponde a la relación entre la cantidad acumulada de horas infactibles dividido por la suma de los tiempo de vuelo correspondientes a las de las restricciones violadas.

Es decir:

$$IP = \frac{\sum_{(i,j) \in If} TD_i + \tilde{T}_{ij} - TD_j}{\sum_{(i,j) \in I} T_{ij}}$$

Siendo  $If$  el conjunto de pares  $(i, j)$  tales que la ecuación 9.1 es infactible, mientras que  $I$  son los itinerarios calculados para el nivel de protección  $\Gamma$ . Mostramos este resultado asumiendo que la distribución de los tiempos es Uniforme:

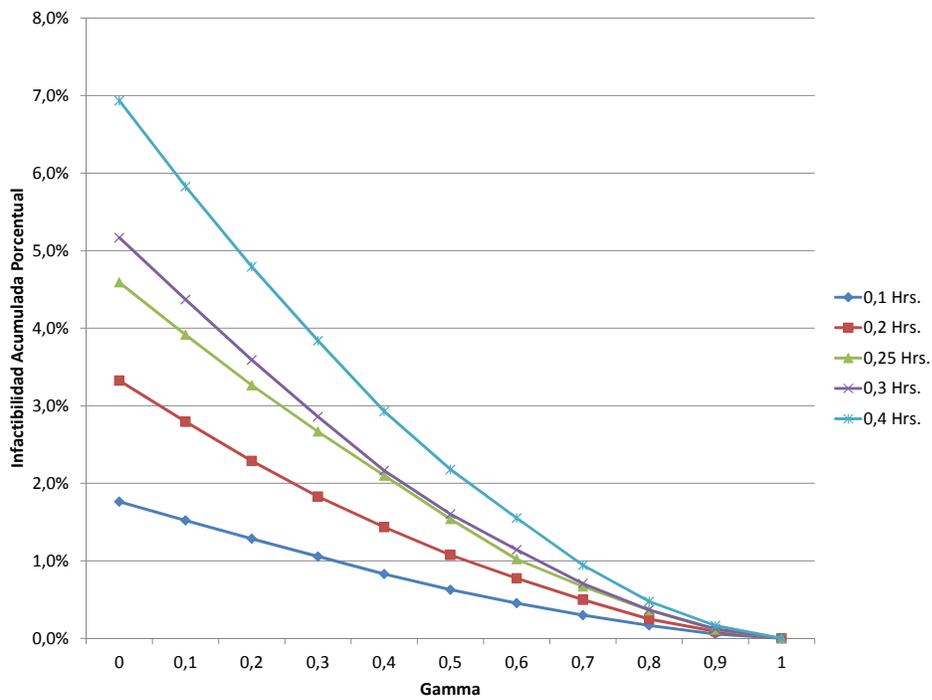


FIGURA 9.7. Infactibilidad Acumulada Porcentual para la distribución Uniforme

El siguiente gráfico muestra el mismo resultado, asumiendo una distribución Normal al 95% de cobertura.

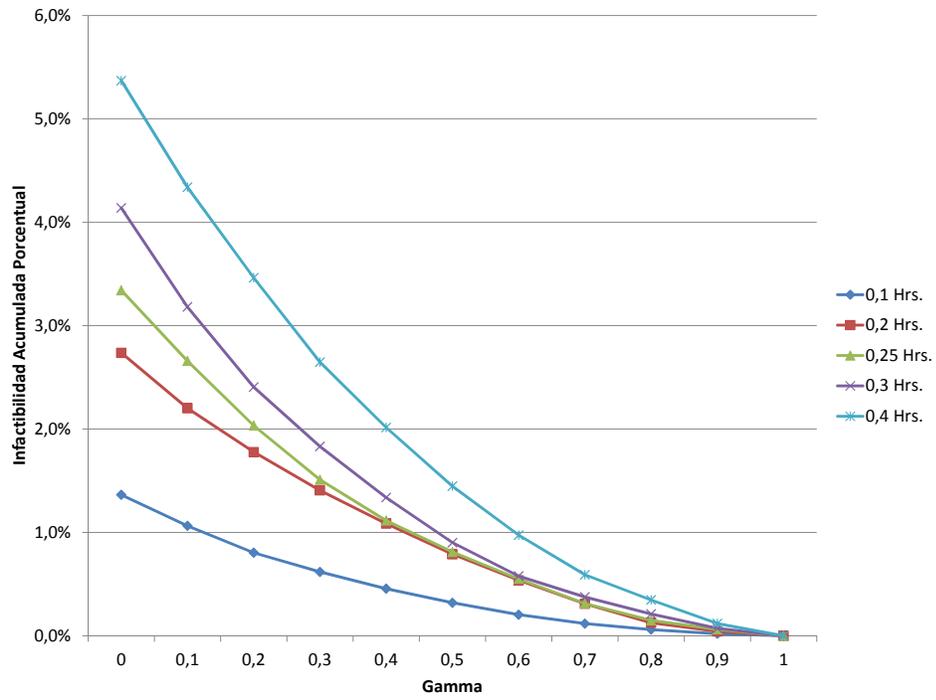


FIGURA 9.8. Infactibilidad Acumulada Porcentual para la distribución Normal al 95%

Por último, si tenemos el mencionado caso de un proceso 6-sigma, la curva de la acumulada porcentual lo mostramos en la gráfica de abajo.

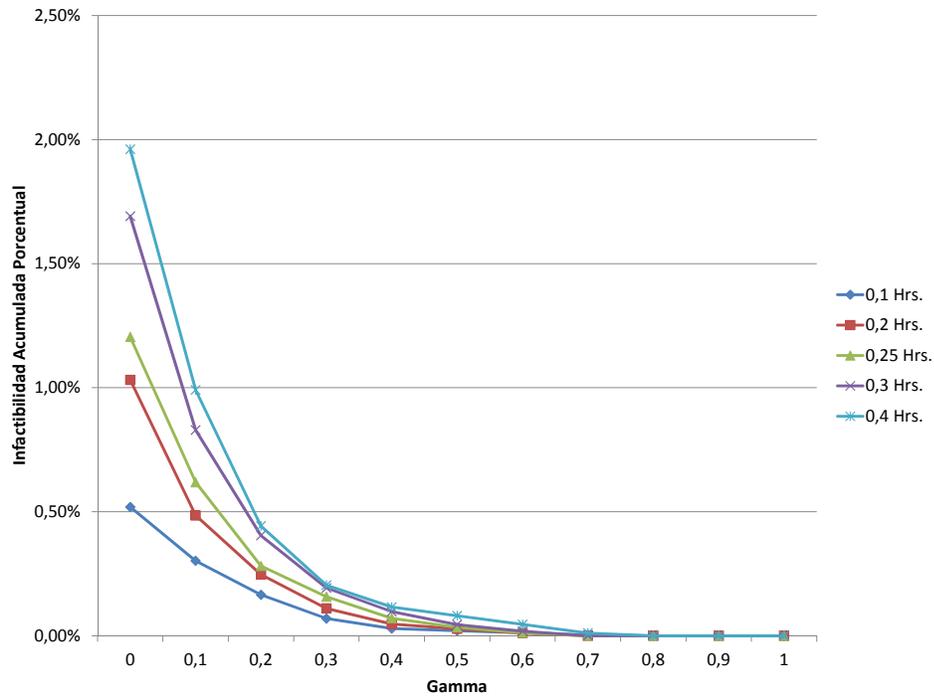


FIGURA 9.9. Infactibilidad Acumulada Porcentual para el proceso 6-Sigma

La forma de los gráficos son similares a lo que vimos para el resultado del indicador de infactibilidad acumulada, sólo que esta vez lo mostramos dividido por todos los tiempos de los itinerarios, mostrando interesantes conclusiones respecto de la equivalencia en porcentaje de estos montos. Para el caso Uniforme, su cota máxima sin estar protegidos no supera el 7% en el caso de 0,4 horas de variación, porcentaje que cae si la variabilidad es menor. Para los casos en los que operan la distribución Normal (95% y 99,99966% de cobertura respectivamente), tenemos casos dispares, ya que mientras en el primer caso la infactibilidad puede llegar al 7%, en el segundo esta llega al 2%. Esto nos hace concluir que en cualquiera de los casos los porcentajes son bajos y se esperaba una mayor magnitud de infactibilidad.

Lo que nos podemos preguntar es acerca de los factores que son determinantes en la alta presencia de situaciones de infactibilidad. Dentro del desarrollo de nuestra investigación está la aplicación de la formulación robusta asumiendo que los parámetros aleatorios no están correlacionados. Para el caso de datos correlacionados existe una formulación robusta que considera en sus restricciones la correlación entre dos parámetros. En el caso de nuestro problema, puede darse que dos o más tiempos de operación estén correlacionados bajo un nivel debido a factores meteorológicos presentes en una región específica. Por ejemplo, en vuelos nacionales se puede ver esto cuando los vuelos van al sur del país en la que hay una mayor inestabilidad meteorológica comparado con el norte de Chile.

Si asumimos un supuesto de correlación entre datos, la pregunta es cómo afecta al modelo, es decir si la correlación es lo suficientemente grande para que afecten nuestros resultados. Eso no lo sabemos a primera vista, por lo que como una tarea a seguir es estudiar las posibles correlaciones en los tiempos de operación y ver si afectan nuestro modelo.

## 10. HEURÍSTICA BASADA EN BÚSQUEDA TABÚ APLICADA

Uno de los problemas de las formulaciones propuestas en los capítulos anteriores es su complejidad, debido posiblemente a las restricciones que hacen que este problema se parezca bastante a uno de *Job Shop Scheduling* (Garey et al., 1976). En experimentos previos, se usó una gran cantidad de datos, consistentes en muchos itinerarios que fueron resueltos en el modelo propuesto. Resultó que el modelo fue bastante lento y con una ramificación que consumía una gran cantidad de memoria, haciendo que la resolución terminase imprevistamente porque la memoria del computador queda colapsada.

A diferencia de los casos que mostramos en esta tesis, las líneas aéreas más grandes del mundo manejan una flota de a lo menos 150 aviones, los cuales están en constante funcionamiento. Si deseamos aplicar nuestro modelo a una de estas compañías, requieren de un tiempo y una memoria considerable para obtener una solución exacta. Esto puede ser fatal, si es que las empresas desean soluciones en el menor tiempo posible.

La necesidad de enfrentar problemas de planificación de vuelos, tras la búsqueda de soluciones robustas y con una gran cantidad de datos nos obliga a desarrollar procedimientos más económicos que nos ayuden a buscar soluciones sin importar si son óptimas, cosa que a priori no sabemos.

Es por esto que para estos casos necesitamos de lo que llamamos “Heurísticas”, las cuales son algoritmos computacionales que generan soluciones más rápidas y con menos consumo de memoria y que pueden ser iguales al óptimo obtenido por el método exacto. Lo ideal es que si el error porcentual entre la heurística y el método exacto es pequeño, vamos a obtener un buen *benchmark*, por lo que aplicando este procedimiento al problema que hemos propuesto, deberíamos obtener buenas soluciones, importante cuando tenemos que tomar decisiones a nivel táctico-operacional, que es el enfoque que se espera de aplicar el modelo en una compañía aérea.

En este capítulo, vamos a proponer un procedimiento heurístico que nos lleve a la búsqueda de soluciones que nos hagan llegar a aquellas que se deberían acercar bastante al

valor exacto del problema. Esta heurística se basa en el uso de búsqueda tabú, desarrollado por Fred Glover a fines de los años 70.

Aunque se conoce aplicaciones exitosas de este método para problemas combinatoriales, este no es un impedimento para aplicarlo en problemas mixtos como el que nosotros estamos trabajando. La aplicación de la heurística va a ser a medias, en el sentido que vamos a movernos sólo en las variables de asignación  $x_{ij}$ , en el caso de un solo tipo de aviones, fijando estas variables en uno cuando correspondan y resolviendo el problema completo dados estos valores fijos. Con esto logramos una versión del problema más rápido de resolver.

Mostraremos los fundamentos sobre los que se basa la heurística tabú, la versión de la heurística que emplearemos en nuestro problema, para finalmente aplicarlo en los casos mostrados en los capítulos 6 y 8.

Los resultados que mostraremos en la sección 10.3, son referentes al error relativo que alcanza la solución lograda por la heurística cuando la comparamos con la solución exacta del problema para todos los niveles de protección definidos. Posteriormente en la sección 10.4, compararemos los tiempos de computación de ambos métodos, heurística y exacto, dando conclusiones sobre qué algoritmo es más preferible usar.

## **10.1 Fundamentos de Búsqueda Tabú**

Esta metaheurística forma parte del grupo de procedimientos de búsqueda de soluciones locales, junto con otras heurísticas como *Simulated Annealing*. Este algoritmo se aplicó con mucho éxito en problemas de carácter combinatorial como por ejemplo el “Problema del Vendedor Viajero”.

El trabajo seminal sobre Búsqueda Tabú es atribuido a Glover (1977), quien fue el pionero y uno de los autores que más ha contribuido en este campo. Este autor logra formalizar la heurística en sus trabajos de 1989 y 1990a. Mientras que el trabajo de 1989 muestra una comprensiva explicación de la heurística de búsqueda tabú, el trabajo de

1990a extiende este algoritmo incorporando algunos mecanismos adicionales que mejoran el modelo.

Una explicación entendible sobre los pasos a seguir de cara a la implementación computacional de la heurística Tabú puede verse en Glover (1990b).

## **10.2 Detalle de la Explicación de la Heurística en el Problema**

El siguiente pseudocódigo adapta la Búsqueda Tabú al problema de la nueva programación de salida de vuelos. Este procedimiento realiza una exploración solo para las variables de asignación, que como sabemos son binarias. A partir de esto, mostraremos la visión general de este algoritmo, la forma de construir la vecindad para la búsqueda de soluciones locales y la forma de evaluar cada una de las soluciones locales en la función objetivo.

**Algoritmo 1:** Heurística Búsqueda Tabú**Data:**  $N \in \mathbb{N}$ **Result:** Solución de un Problema Combinatorial

Inicialización:

Sea  $x \leftarrow x_0$  solución inicial,  $n \leftarrow 1$ ,  $L = \emptyset$ ;**while**  $n \leq N$  **do**    Definir  $V(x)$ ;    **forall**  $y \in V(x)$  **do**        **if**  $y \in L$  **then**            | Evaluar Problema de Optimización  $F(y)$  para  $y$  fijo;        **else**            | Rechazar evaluar el problema  $F(y)$ ;        **end**    **end**    **if** Existe  $y \in V(x)$  tal que  $F(y) \leq F(x)$  **then**        | Asignar  $x \leftarrow y$ ;    **else**        | Aceptar  $y \in V(x)$  tal que  $F(y) > F(x)$ ;        | Hacer  $x \leftarrow y$ ;        | Hacer  $L \leftarrow L \cup \{y\}$     **end**     $n \leftarrow n + 1$ **end**

Este pseudocódigo hace una exploración de soluciones dentro de la vecindad  $V(x)$  que definiremos más adelante. Cada solución de cada vecindad es evaluada en el problema completo de optimización, correspondiente a la función  $F(x)$ . Como nos movemos sólo en vecindades para la variable de asignación  $x_{ij}$ , resolveremos una instancia del problema con estas variables dadas por la exploración. Para ello fijaremos las variables binarias en

uno, ya sea añadiendo a nuestro modelo una restricción que las fuerce o bien incorporando instrucciones a AMPL para que sea esta la que defina las variables en uno.

Si encuentra una solución mejor que la actual, esta reemplaza a la anterior como mejor solución y hacemos una nueva búsqueda para una nueva vecindad centrada en esta nueva solución. En el caso contrario, aceptamos alguna solución peor que la anterior y hacemos una nueva búsqueda en una vecindad centrada en esa mala solución.

Para evitar que en algún futuro momento de la heurística toquemos nuevamente esa solución, la incorporaremos en la lista tabú, que también definiremos más adelante.

### 10.2.1 Definición de la Vecindad

Esta parte es importante, ya que vamos a definir la vecindad con la que exploraremos el espacio factible de puntos contenidos dentro de ella.

Consideremos dos itinerarios operados por dos aviones distintos como se ve en la figura:

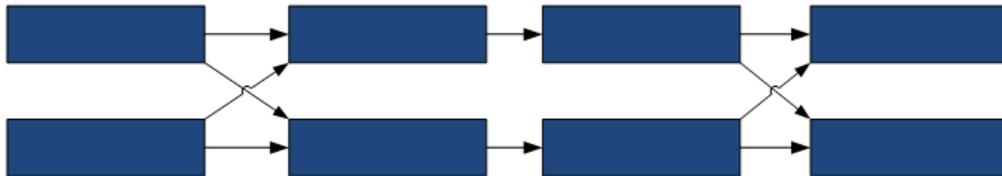


FIGURA 10.1. Dos itinerarios con asignaciones posibles para definir vecindad para la Búsqueda Tabú

Ya sabemos que tenemos disponible todas las asignaciones posibles considerando que tienen escalas en común y que el tiempo entre la llegada de un avión que llega y el siguiente se encuentran dentro de ciertos intervalos de tiempo, que nosotros fijamos con anticipación. Los posibles cruces para dos itinerarios dados genera una buena cantidad de combinaciones para las respectivas variables  $x_{ij}$ , por lo que una parte de nuestra vecindad es movernos en esos cruces, activando y desactivando las mencionadas variables binarias.

Si consideramos todos los pares de itinerarios de nuestro plan de vuelos, la cosa se enriquece ya que como tenemos más de un par a estudiar, las posibles asignaciones aumentan, teniendo más posibilidades para evaluar en nuestra función objetivo.

Por este motivo, es que definimos los posibles cruces de itinerarios como vecindad, aunque nos falta definir qué lista de soluciones posibles en esta vecindad no vamos a evaluar, es decir nuestra lista tabú. Ya que cada solución corresponde a un cruce de itinerarios, volver a evaluar este cruce es una opción descartada, ya que está dentro de nuestra lista tabú.

### **10.2.2 Cálculo de la Función Objetivo para la Heurística**

Dado que fijamos una combinación de variables de asignación en 1, lo que hacemos es resolver esta instancia directamente con AMPL/CPLEX mediante la fijación de las variables binarias como lo describimos en la secciones anteriores.

En experimentos previos, esta fijación de variables hace que el tiempo de cálculo de un problema particular sea bastante menor comparado con buscar la solución exacta del problema. Esto se debe a que estamos trabajando con una menor cantidad de variables que agregan dificultad. Es posible mejorar la heurística, si eliminamos los factores que debido al *overhead* propio de las computadoras, generen algunos aumentos en los tiempos de cálculo, para grandes instancias de datos.

### **10.2.3 Definición de la Lista Tabú**

Esta lista toma en cuenta las conexiones hechas a lo largo de los pasos que exploran la vecindad. Consideramos también una memoria, la cual almacena transitoriamente las conexiones que no se exploraran en cada intento, en un número determinado de pasos, tras lo cual se liberan y quedan a disposición nuevamente como parte de las vecindades que se construyan.

Estas estrategias de encerrar transitoriamente determinadas soluciones es algo que fue propuesto por Fred Glover en sus trabajos. Michalewicz y Fogel (2000) cita estas estrategias como parte de la implementación de la heurística para problemas de vendedor

viajero. Esta lista es una matriz cuyas entradas, indexadas por los arcos que recorren el grafo completo, representan el número de pasos faltantes para que el arco vuelva a ser considerado como parte de las soluciones posibles.

La lista tiene lo que denominaremos como memoria. Esto significa que si una conexión entra a la lista, esta debe esperar el tamaño de la memoria en pasos de la heurística para que salga.

### **10.3 Resultados de la Aplicación de la Heurística**

En esta sección vamos a mostrar los resultados que se obtienen de aplicar la heurística para los problemas de un mismo modelo y su extensión de más de un tipo de avión.

La programación de la heurística fue hecha mediante el lenguaje de computación MATLAB©, mientras que el cálculo de la solución particular del problema fue hecho por medio de AMPL/CPLEX 12.3 en los mismos computadores mencionados en los capítulos anteriores.

#### **10.3.1 Resultados para el Problema Particular de un Mismo Tipo de Avión**

Para este caso, mostramos el error relativo a la solución lograda en la sección 7.2, cuando variamos todos los tiempos de vuelos, sin importar si es un caso real. Recordemos que este caso consiste en vuelos operados dentro del espacio aéreo de Chile, cuyo costo de retraso es igual a 1 para todos los vuelos y sus resultados fueron mostrados en las páginas 73 a 77.

Los siguientes gráficos muestran el error relativo cuando hacemos 2, 5 y 10 pasos o *tries*.

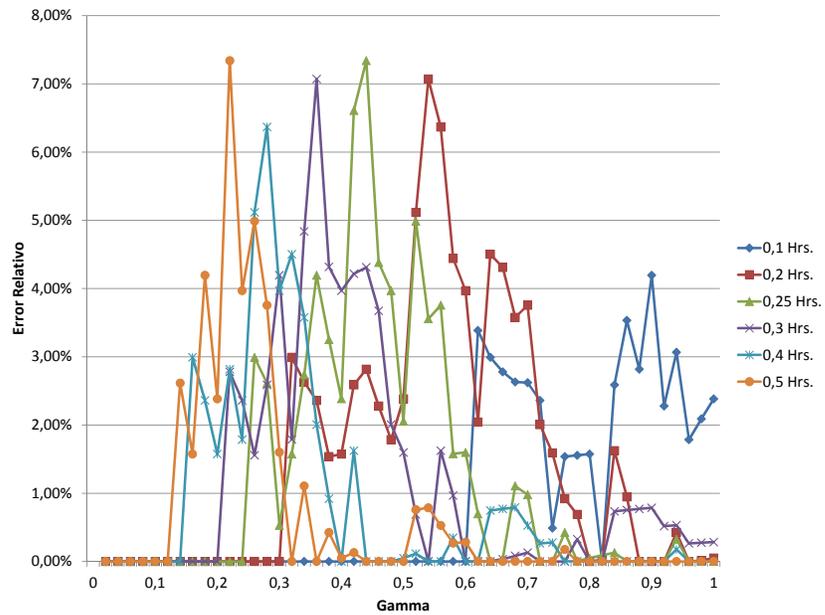


FIGURA 10.2. Error Relativo de la Heurística Tabú para caso particular tras 2 Iteraciones

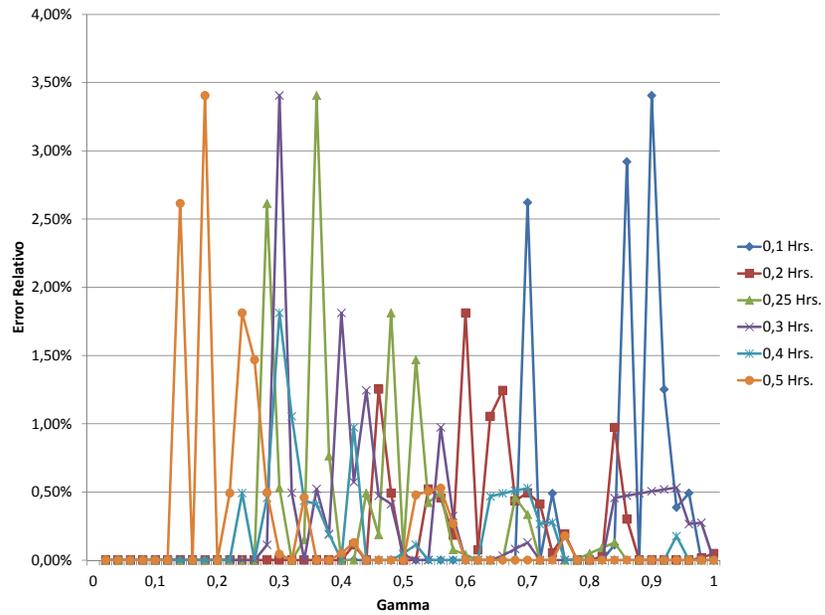


FIGURA 10.3. Error Relativo de la Heurística Tabú para caso particular tras 5 Iteraciones

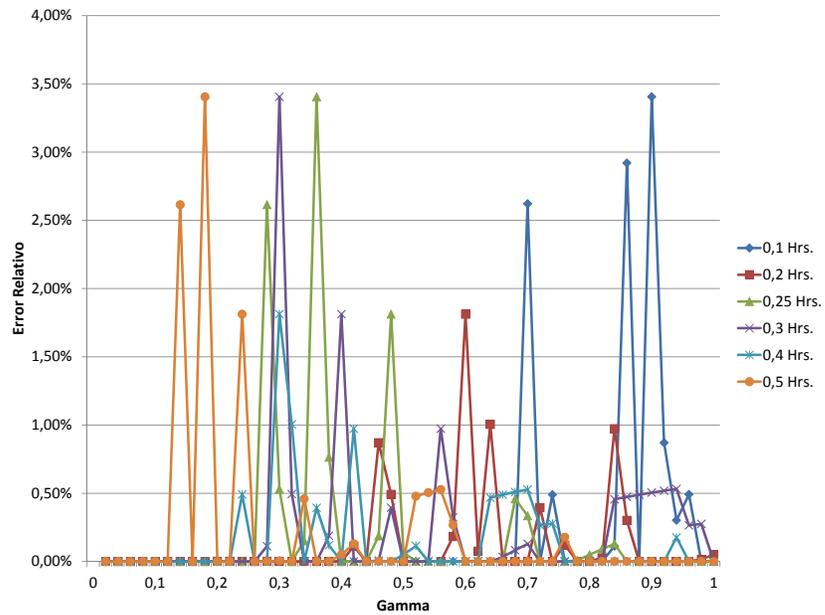


FIGURA 10.4. Error Relativo de la Heurística Tabú para caso particular tras 10 Iteraciones

Notamos que a medida que aumentamos las iteraciones los errores relativos respecto a las soluciones exactas para cada uno de los casos de incertidumbre son cada vez menores. Es posible que a partir de 5 iteraciones no haya un mejoramiento en la solución obtenida por la búsqueda tabú, ya que para 10 iteraciones no se aprecian mejoras significativas. Podemos decir que para este problema el algoritmo ofrece buenas soluciones, los cuales tienen un error relativo de hasta un 3,5% como se muestra en la figura 10.4.

### 10.3.2 Resultados para el Problema General de Varios Tipo de Avión

El algoritmo tiene las consideraciones definidas para el problema mostrado en el capítulo 8, en el que hay costos de asignación distintos entre aviones de diferentes modelos.

La forma de mostrar los resultados de este problema es similar a la sección anterior, considerando 1,2,5 y 10 *tries* de la iteración.

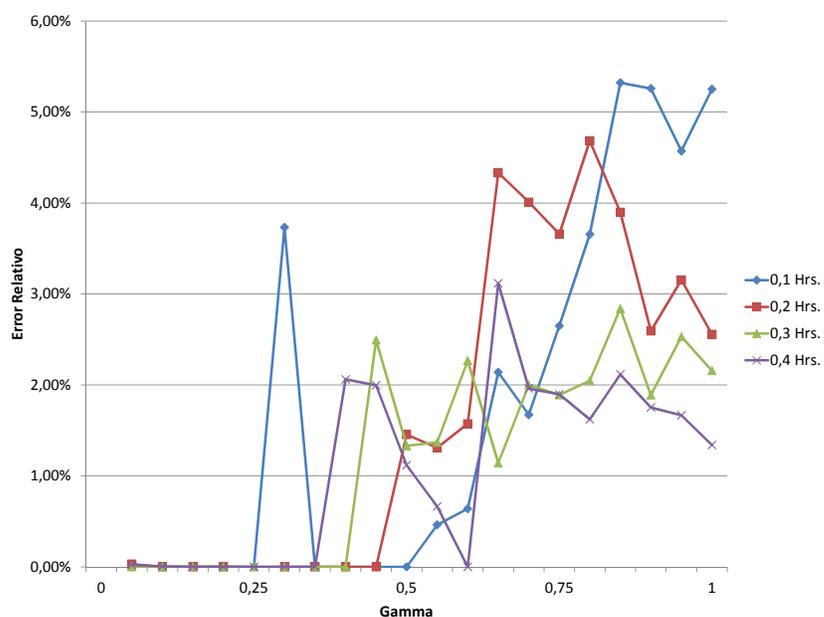


FIGURA 10.5. Error Relativo de la Búsqueda Tabú para caso General después de 1 Iteración

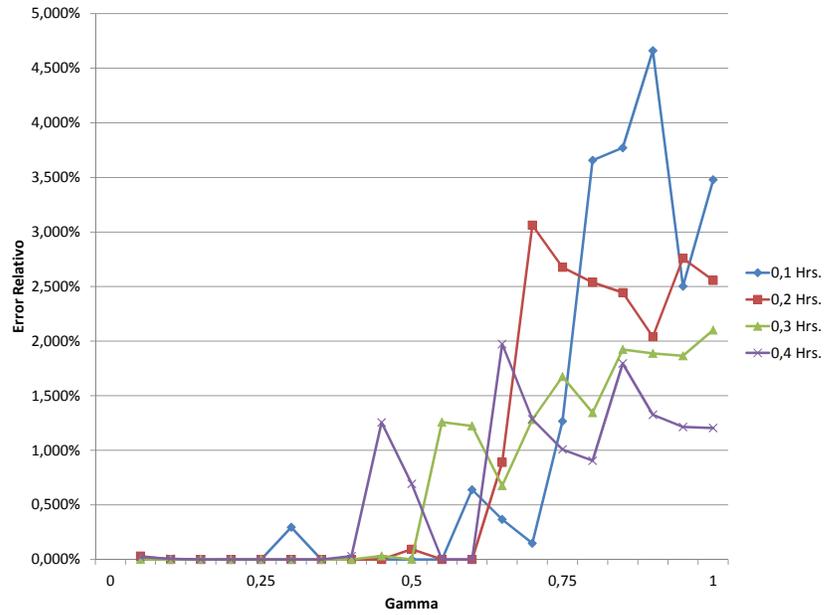


FIGURA 10.6. Error Relativo de la Búsqueda Tabú para caso General después de 2 Iteraciones

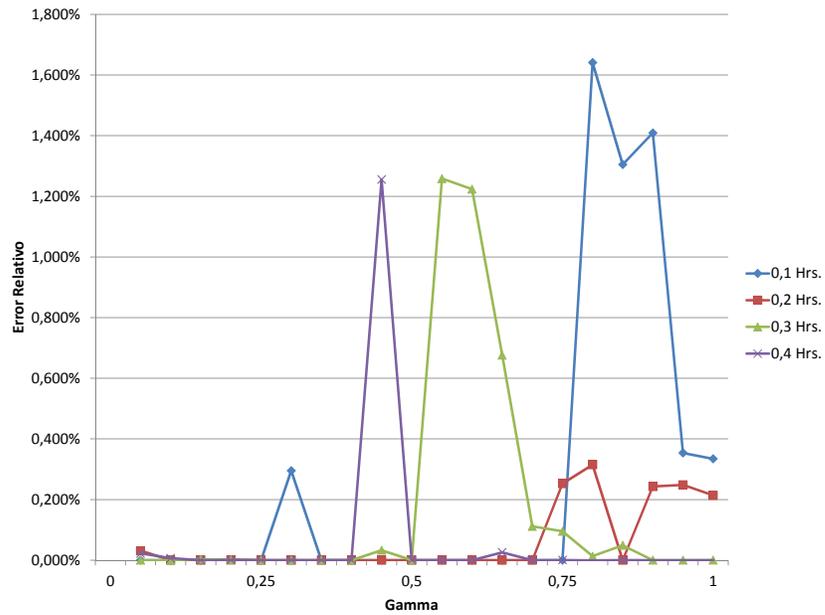


FIGURA 10.7. Error Relativo de la Búsqueda Tabú para caso General después de 5 Iteraciones

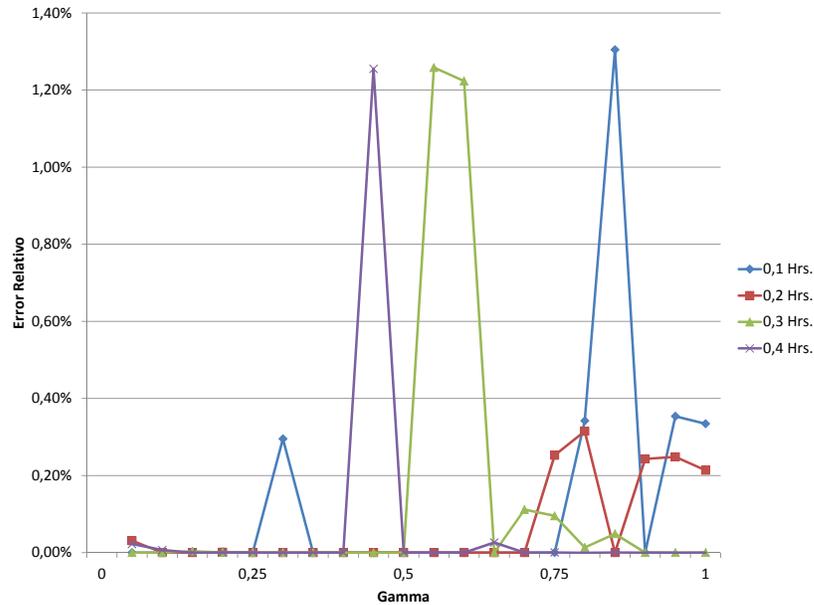


FIGURA 10.8. Error Relativo de la Búsqueda Tabú para caso General tras 10 Iteraciones

Al parecer el error relativo es creciente cuando nos acercamos a niveles muy conservadores de protección. De todas formas, cuando tras cada paso de iteración, el error relativo se mantiene a la baja, logrando muy buenas soluciones en este problema extendido. En la figura 10.8 vemos que el error relativo llega a un 1,3% aproximadamente, para el caso de 0,1 horas de incertidumbre.

En general el caso de 0,1 horas es el que experimenta cambios significativos a medida que transcurre el algoritmo, pudiendo cambiar aún más después de las 10 iteraciones consideradas. De cualquier modo, este caso no dista de los restantes, ya que la convergencia a la solución exacta según su nivel de protección es buena.

## 10.4 Comparación de los Tiempos de Cálculo de las Soluciones Exactas con el Empleo por la Heurística

Otra de las preguntas que nos hacemos respecto de los resultados obtenidos de la heurística propuesta es sobre su tiempo de cálculo. Esta interrogante es importante, ya que si el tiempo empleado en aplicar el procedimiento heurístico para un nivel de protección dado es más económico que resolver el problema de Optimización de forma exacta, aun cuando existan errores relativos superiores a cero, sería más preferible utilizar la heurística por sobre el método exacto.

La primera tabla mostrará el tiempo en segundos empleado en resolver el problema para vuelos nacionales y que resolvimos con nuestra heurística, los cuales están en función del nivel de protección:

Por otro lado, el caso para dos tipos de aviones ocupó los tiempos de computación, nuevamente en segundos, que mostramos en la tabla de abajo:

TABLA 10.1. Tiempo en Segundos Empleados para la Solución Exacta del Problema Particular para Vuelos Nacionales

$\Gamma$	0,1 Hrs.	0,2 Hrs.	0,25 Hrs.	0,3 Hrs.	0,4 Hrs.	0,5 Hrs.
0	0,109	0,422	0,078	0,078	0,5	0,093
0,1	0,203	0,266	0,734	3,406	6,14	27,312
0,2	0,25	25,391	25,672	99,828	1260,05	2603,08
0,3	6,25	241,86	449,156	715,109	319,078	781,922
0,4	5,89	1777,31	618,719	765,125	161,781	1005,58
0,5	65,485	554,312	658,39	754,219	991,36	11847,5
0,6	102,875	841,093	731,547	488,672	5339,17	5704,56
0,7	2083,25	641,579	328,844	985,235	6196	7741,5
0,8	2657,53	619,11	950,719	5352,89	5696,81	5844,97
0,9	2231,45	735,156	2160,75	3483,34	11993,2	7280,95
1	18,328	82,625	120,672	179,765	379,063	692,485

Mientras que el tiempo en segundos usados para la ejecución de la heurística en este problema, después de 10 iteraciones, los mostramos en la tabla siguiente.

TABLA 10.2. Tiempo en Segundos Empleados para la Heurística Aplicada al Problema Particular para Vuelos Nacionales

$\Gamma$	0,1 Hrs.	0,2 Hrs.	0,25 Hrs.	0,3 Hrs.	0,4 Hrs.	0,5 Hrs.
0,1	51,78	62,10	71,60	78,09	84,56	97,93
0,2	69,96	104,74	108,80	125,62	85,03	103,61
0,3	97,65	140,69	148,32	98,34	97,25	91,00
0,4	122,57	142,71	151,57	138,84	79,28	88,39
0,5	126,98	158,01	159,83	79,28	72,42	70,19
0,6	147,07	166,55	107,54	101,33	60,28	70,25
0,7	151,78	147,74	105,90	91,21	61,77	71,56
0,8	141,33	95,65	86,99	75,90	55,38	70,89
0,9	127,49	109,77	83,51	67,16	54,60	60,35
1	39,16	31,41	36,59	33,24	31,29	42,21

Por otro lado, si construimos una tabla similar para el tiempo usado tanto para calcular la solución exacta como para la solución lograda por la heurística después de 10 iteraciones obtenemos el siguiente par.

TABLA 10.3. Tiempo en Segundos Empleados para Resolver Óptimamente el Problema General en Vuelos Internacionales

$\Gamma_i$	0,1 Hrs.	0,2 Hrs.	0,3 Hrs.	0,4 Hrs.
0	0,53	0,39	0,5	0,53
0,1	1,84	2	2,95	6,34
0,2	7,58	6,34	12,48	30,95
0,3	29,31	36,53	35,08	194,11
0,4	86,58	497,16	379,12	178,84
0,5	401,33	604,31	380,61	3929,75
0,6	283,56	389,17	421,38	605,08
0,7	738,25	325,38	5656,73	387,03
0,8	2582,73	5579,33	4938,56	1900,36
0,9	1319,74	4018,27	1589,86	5550,36
1	66,17	74,91	199,45	173,61

TABLA 10.4. Tiempo en Segundos Empleados para la Heurística Aplicada al Problema General en Vuelos Internacionales

$\Gamma_i$	0,1 Hrs.	0,2 Hrs.	0,3 Hrs.	0,4 Hrs.
0,1	102,39	102,75	103,12	103,92
0,2	121,37	125,52	126,90	127,17
0,3	116,34	131,62	127,31	126,11
0,4	137,15	143,04	136,12	121,42
0,5	123,10	124,42	117,66	114,31
0,6	124,96	129,13	116,83	116,94
0,7	125,02	118,68	114,55	113,44
0,8	126,26	118,70	117,50	114,37
0,9	116,20	114,87	113,58	112,68
1	82,99	81,52	78,06	78,62

En los dos problemas que estudiamos, se muestra que la heurística puede ser de mayor utilidad a medida que aumentamos tanto la protección como los valores máximos de dispersión. Cuando la protección es menor y para bajas variaciones ocurre que la heurística se demora más comparada con resolver exactamente esas instancias, situación bastante opuesta cuando aumentamos en variabilidad y nivel de robustez.

Una posible conclusión es que la heurística puede ser de mucha utilidad en las situaciones descritas, aunque no hemos visto casos realmente grandes en que el método exacto puede fallar debido a que posiblemente la memoria del computador se ve sobrepasada. La heurística tabú puede tardar un poco más en calcular soluciones, pero es más económica en memoria que si lo resolvemos óptimamente, lo cual es un crédito a favor de esta metodología propuesta.

Además, tenemos que mencionar la posibilidad de que este procedimiento puede ser optimizado aún más en términos de programación y ejecución, los cuales constituyen trabajos futuros en este tema. Relacionados con la ejecución computacional están, usar un buen lenguaje y un sistema operativo alternativo al más usado por todos nosotros, propuestas que pueden disminuir los tiempos de compilación y ocioso antes que el algoritmo comience, concepto computacional conocido como *Overhead*. Con estas propuestas, los

tiempos que mostramos en las tablas 10.2 y 10.4 pueden ser aún menores, potenciando más su uso como alternativa a la solución exacta.

## 11. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

En este trabajo, tratamos con una dificultad frecuente en la industria aérea como los son los efectos provocados por la variabilidad, causando que los vuelos programados tengan que partir más atrasado de lo esperado.

Por estas razones, fue que propusimos un modelo de optimización que crea un itinerario de vuelos para una serie de aviones correspondiente de la flota de una línea aérea que opera desde Chile hacia el mundo. La formulación propuesta es de carácter mixto, en el que variables binarias representan asignaciones de vuelos para un avión determinado pagando un costo, mientras que las otras variables son de programación de la hora de salida de cada vuelo, la cual es continua y que paga un costo por retrasar. Además de estas variables, para enriquecer el modelo agregamos otras variables binarias que indican si es conveniente retrasar más allá de ciertos valores límites, con un aumento por un factor de los costos de retrasar. Las restricciones de este problema son similares a problemas de *Minimum Cost Flow* y *Job-Shop Scheduling*.

Como ya lo detallamos antes, si no existiese variabilidad de los tiempos de vuelos, según nuestros supuestos, la programación de vuelos original se va a mantener sin tener que actualizar las asignaciones de vuelos a los aviones ni retrasar la hora de salida de esto. En cambio, cuando la incertidumbre apremia, necesitamos protegernos de sus efectos por medio de una función lineal de protección cuyo parámetro  $\Gamma$  es representa un grado de optimismo-pesimismo de parte del usuario del modelo, el cual podemos variar de forma adecuada. Esta función propuesta por Bertsimas y Sim lo aplicamos a este modelo.

Creamos dos casos de aplicación para el primer modelo, usando datos abiertos y disponibles en el sitio web de la más importante línea aérea nacional, para vuelos que operan dentro de Chile y en la región sudamericana.

Los resultados experimentales demostraron un incremento en los costos operacionales en búsqueda de mayor protección, lo que quiere decir que el “Precio de la Robustez” aumenta cuando se busca una mayor protección. Esto es razonable, ya que soluciones

más protegidas de posibles incertidumbres son cada vez más malas a medida que la protección aumenta. La decisión de asignar vuelos a otros aviones es considerada cuando se busca mayor protección, ya que al estudiar los costos de retraso y asignación por separado, estos últimos muestran variaciones sin dejar de lado la decisión de posponer la hora de salida de estos. Al exponer estos costos en un gráfico muestran que son esperados con los propuestos por las últimas investigaciones en Optimización Robusta.

Extendimos este modelo para considerar aviones que son de distintas marcas y que se diferencian en costos de asignación y en tiempos de *turnaround*. Modificamos algunas variables y restricciones que dejan nuestro problema como uno de *Multicommodity Flow Problem*, lo cual sumado a las restricciones anteriores definen un problema más complicado de resolver. El caso extendido lo probamos con datos de operaciones en todo el continente americano, mostrando resultados similares al modelo particular consecuente con la teoría expuesta.

Para los problemas de optimización protegidos desarrollamos y ejecutamos una Simulación de Montecarlo con el fin de estimar el porcentaje de violaciones de al menos una restricción protegida con lo que se cae en una situación de infactibilidad. Asumiendo 3 posibles distribuciones de probabilidad en los tiempos de operación, mostramos que existen altos porcentajes de infactibilidad, cuya caída a cero, cuando ejercemos la máxima protección, depende de la concentración de sus funciones de densidad de probabilidad en los intervalos donde movemos cada uno de los parámetros inciertos. Las formas de las curvas de infactibilidad resultantes son similares para todos los casos de distribuciones de probabilidad de la simulación y escenarios de incertidumbre en los tiempos de operación, debido posiblemente a que los valores de protección en restricciones que son desagregados son proporcionales para todos los casos de robustez y variabilidad, lo cual causaría un comportamiento parecido en la posibilidad de violación de estas. Pese a todo, existe cumplimiento con lo que pide las propuestas de la literatura. Causada por esta situación, estudiamos el orden de la magnitud de las violaciones de la restricciones en las que suceden infactibilidad, encontrando que sus estos valores tanto absolutos como porcentuales no son representan altos niveles en la violación.

Es un desafío por delante estudiar posibles correlaciones entre los tiempos de operación considerando que comparten espacios aéreos en común en donde factores meteorológicos pueden desencadenar que existan altos niveles de infactibilidad. Si bien se podemos encontrar un efecto en nuestros resultados, no podemos concluir que sean significativos cuando queremos hacer este estudio.

Además, debido a que el modelo propuesto es difícil de resolver, propusimos un procedimiento heurístico basado en Búsqueda Tabú la que se hace una búsqueda local de soluciones sólo para las variables binarias de asignación, cuyas soluciones candidatos son fijadas en el modelo de optimización para luego resolverlo con estas variables fijas en muy poco tiempos. El algoritmo propuesto se mostró bastante bien en la obtención de soluciones, los cuales (para un nivel de protección dado) tienen un error relativo el cual no supera el 3,5% en el caso del problema particular para aviones del mismo modelo y de un 1,4% si trabajamos con el caso general de vuelos nacionales. Su tiempo comparado con la solución óptima, puede ser mejor si es que tratamos con problemas cada vez más protegidos para niveles mayores de variabilidad en los tiempos operativos.

Dentro de las posibles extensiones, que son propuestas de trabajos futuros a seguir partiendo de los resultados obtenidos en esta investigación, algunas de estas guardan relación con relajar algunas de los supuestos del modelo mostrados en 4.1, aunque vamos a agregar otras posibles extensiones.

De las únicas que podemos relajar, el tiempo de *turnaround* lo fijamos como algo fijo, por lo que si asumimos que experimentan algunas variaciones, podemos sumarlas a la incertidumbre de los tiempos de vuelos, creando una mirada más general sobre el efecto de la incertidumbre temporal en el cumplimiento a tiempo del plan original.

Otro supuesto es considerar las operaciones continuas, en las que no hay mantenimientos programados por especificaciones de la fábrica. En este caso, la forma de modelar las revisiones es como si fuera una tarea más además de las restantes operaciones, equivalente a un “vuelo virtual” con origen y destino en el mismo aeropuerto (en este caso la base de la línea aérea considerada). Al considerarlo como una tarea, comparte las mismas

características de los restantes vuelos, llámese tiempo de salida, origen-destino, duración y variabilidad, la cual podemos especificar de forma separada de las otras tareas.

Una pregunta razonable que nos podemos hacer es qué pasa si los costos de asignación fuesen mucho más grandes que las de retrasar y viceversa. En este caso estamos hablando de una especie de análisis de sensibilidad para los costos considerados en la función objetivo. Para ello, podemos ponderar cada uno de los costos por respectivos factores positivos y variamos estos valores, resolviendo el problema para cada instancia particular, para un determinado nivel de protección y ante una determinado escenario de incertidumbre de tiempos de operación. Debido a que tenemos muchos casos de protección, variación y costos ponderados, el análisis puede ser demasiado extenso.

La necesidad de poder contar con datos reales tanto de costos adicionales operativos como datos estadísticos de tiempos efectivos de vuelos, obedecen a al deseo de probar este modelo como un efectivo sistema de apoyo a la toma de decisiones bajo las mismas condiciones que deben enfrentar los *Controllers* ante diversas situaciones, para los cuales se tiene que hacer una nueva programación, ya sea de una parte como de todo el plan de vuelos. Las líneas aéreas de todas formas no cuentan con estimadores exactas de costos por asignar y por retrasar la salida de los vuelos. Los valores que aplicamos en nuestra investigación son valores arbitrarios que pueden o no pueden tener relación con la verdadera situación de una línea aérea. Los costos reales nos pueden dar mejores perspectivas de las operaciones aéreas, como por ejemplo qué determinados vuelos no pueden ser retrasados, ya que sus costos son más grandes comparados con otros.

Si bien la heurística de búsqueda tabú planteada resuelve bien para un conjunto pequeño de datos, para grandes cantidades el tiempo que toma en sólo una iteración aumenta de forma considerable, mas no superior a la solución exacta. Ejecutar la heurística en un tiempo razonable depende del tipo de problema, ya sea operativo en que se requieren soluciones inmediatas y tácticas en que podemos resolver el problema con un poco más tiempo. Una de las formas de mitigar este problema es por medio de la programación eficiente de esta heurística en procesadores de tal forma que los tiempos de *overhead*

sean los más pequeños posible. El *overhead* es un problema común cuando programas computacionales se ejecutan en los sistemas operativos usados con frecuencia por los usuarios, causando demoras innecesarias de tiempo en los que el computador se prepara para ejecutar los programas que resuelven los cálculos pedidos.

Se espera que el modelo propuesto y robustecido sea el inicio de un sistema de apoyo a la toma de decisiones para complementar las acciones de un Centro de Control de Operaciones (CCO) de una línea aérea cualquiera, tanto en tiempo real como para crear políticas al mediano plazo en caso de posibles retrasos de aviones por factores externos.

En el caso del sistema en tiempo real, esta guarda relación con las condiciones estáticas del problema como lo resolvimos, ya que si recordamos las formulaciones robustas que propusimos las aplicamos con ejemplos operativos contenidos en un intervalo de tiempo fijo, una condición bastante estática. Por esto, necesitamos que las condiciones del problema sean más dinámicas, en el sentido que el tiempo tiene que avanzar para considerar tanto los vuelos siguientes como nuevas condiciones de costos y variaciones en los tiempos, obteniendo nuevos problemas que nuestro modelo resuelve. Esto sumado a una buena heurística obtendremos soluciones rápidas y con menos consumo de memoria.

Como apoyo a las decisiones con una mirada táctica o a mediano plazo, esta lo podemos hacer de forma más pausada, en el sentido que podemos analizar diversas situaciones, dependiendo de la estación del año. Con este estudio, podemos definir políticas orientadas a saber qué hacer frente a determinados escenarios, de mucha utilidad para los *Controllers* de líneas aéreas.

## BIBLIOGRAFÍA

- Abara, J. (1989). «Applying integer linear programming to the fleet assignment problem». *Interfaces*, **19**, pp. 20–28.
- Agustín, A.; Alonso-Ayuso, A.; Escudero, L.F. y Pizarro, C. (2012a). «On Air Traffic Flow Management with Rerouting. Part I: Deterministic case». *European Journal of Operational Research*, **219**, pp. 156–166.
- Agustín, A.; Alonso-Ayuso, A.; Escudero, L.F. y Pizarro, C. (2012b). «On Air Traffic Flow Management with Rerouting. Part II: Stochastic Case». *European Journal of Operational Research*, **219**, pp. 167–177.
- Ahuja, R. K.; Magnanti, T. L. y Orlin, J. B. (1993). *Network flows: theory, algorithms, and applications*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA. ISBN 0-13-617549-X.
- Andreatta, G.; Brunetta, L. y Guastalla, G. (2000). «From Ground Holding to Free Flight: An Exact Approach». *Transportation Science*, **34**, pp. 394–401.
- Argüello, M. y Bard, J. (1997). «A GRASP for Aircraft Routing in Response to Groundings and Delays». *Journal of Combinatorial Optimization*, **5**, pp. 211–228.
- Argüello, M.; Bard, J. y Yu, G. (1998). «Models and methods for managing airline irregular operations». En: G. Yu (Ed.), *Operations research in the airline industry*, pp. 1–45. Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, USA.
- Argüello, M. F. (1997). *Framework for exact solutions and heuristics for approximate solutions to airlines' irregular operations control aircraft routing problem*. Tesis doctoral, Department of Mechanical Engineering, University of Texas, Austin, TX.
- Averbakh, L. (2001). «On the complexity of a class of combinatorial optimization problem with uncertainty». *Mathematical Programming*, **88**, pp. 263–272.
- Bard, J.; Yu, G. y Argüello, M. (2001). «Optimizing aircraft routing in response to grounding and delays». *IIE Transactions*, **33**, pp. 931–947.
- Barnhart, C.; Kniker, T. y Lohatepanont, M. (2002). «Itinerary-Based Airline Fleet Assignment». *Transportation Science*, **36**, pp. 199–217.

- Ben-Tal, A.; El Ghaoui, L. y Nemirovski, A. (2009). *Robust Optimization*. Princeton Series in Applied Mathematics.
- Ben-Tal, A. y Nemirovski, A. (1998). «Robust convex optimization». *Mathematical Operations Research*, **23**, pp. 769–805.
- Ben-Tal, A. y Nemirovski, A. (1999). «Robust solutions to uncertain programs». *Operations Research Letters*, **25**, pp. 1–13.
- Ben-Tal, A. y Nemirovski, A. (2000). «Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data». *Mathematical Programming*, **88**, pp. 411–424.
- Bertsimas, D.; Lulli, G. y Odoni, A. (2008). «The air traffic flow management problem: an integer optimization approach». En: *Proceedings of the 13th international conference on Integer programming and combinatorial optimization*, IPCO'08, pp. 34–46. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Bertsimas, D.; Lulli, G. y Odoni, A. (2011). «An Integer Optimization Approach to Large-Scale Air Traffic Flow Management». *Operations Research*, **59**, pp. 211–227.
- Bertsimas, D. y Sim, M. (2003). «Robust discrete optimization and network flows». *Mathematical Programming*, **98**, pp. 49–71.
- Bertsimas, D. y Sim, M. (2004). «The Price of Robustness». *Operations Research*, **52**, pp. 35–53.
- Bertsimas, D. y Stock Patterson, S. (1998). «The air traffic flow management problem with enroute capacities». *Operations Research*, **46**, pp. 406–422.
- Bertsimas, D. y Stock Patterson, S. (2000). «The Traffic Flow Management Rerouting Problem in Air Traffic Control: A Dynamic Network Flow Approach». *Transportation Science*, **34**, pp. 239–255.
- Bertsimas, D. y Thiele, A. (2006). «Robust and Data-Driven Optimization: Modern Decision-Making Under Uncertainty». En: *Tutorials on Operations Research, INFORMS*, .
- Bohle, C.; Maturana, S. y Vera, J. (2010). «A Robust optimization to wine grape scheduling». *European Journal of Operational Research*, **200**, pp. 245–252.

- Cao, J. y Kanafani, A. (1997a). «Real-Time Decision Support for Integration of Airline Flight Cancellations and Delays Part I: Mathematical Formulation». *Transportation Planning and Technology*, **20**, pp. 183–199.
- Cao, J. y Kanafani, A. (1997b). «Real-Time Decision Support for Integration of Airline Flight Cancellations and Delays Part II: Algorithm and Computational Experiments». *Transportation Planning and Technology*, **20**, pp. 201–217.
- Chang, K.; Howard, K.; Oiesen, R.; Shisler, L.; Tanino, M. y Wambganss, M. C. (2001). «Enhancements to the FAA Ground-Delay Program Under Collaborative Decision Making». *Interfaces*, **31**, pp. 57–76.
- Clausen, J.; Larsen, A.; Larsen, J. y Rezanova, N. J. (2010). «Disruption management in the airline industry: Concepts, models and methods». *Computers and Operations Research*, **37**, pp. 809–821.
- Collect-Gfk (2010). «Encuesta para Evaluar el Servicio de Transporte Aéreo en Chile». *Informe técnico*.
- Daskin, M. S. y Panayotopoulos, N. D. (1989). «A Lagrangian Relaxation to Approach Assigning Aircraft to Routes in Hub and Spokes Networks». *Transportation Science*, **23**, pp. 91–99.
- Desaulniers, G.; Desrosiers, J.; Dumas, Y.; Solomon, M. y Soumis, F. (1997). «Daily Aircraft Routing and Scheduling». *Management Science*, **43**, pp. 841–855.
- El Ghaoui, L. y Lebret, H. (1997). «Robust Solutions to Least-Square problems with uncertain data». *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **18**, pp. 1035–1064.
- El Ghaoui, L.; Oustry, F. y Lebret, H. (1998). «Robust Solutions to Uncertain Semidefinite Programs». *SIAM Journal on Optimization*, **9**, pp. 33–52.
- Garey, M. R.; Johnson, D. S. y Sethi, R. (1976). «The Complexity of Flowshop and Jobshop Scheduling». *Mathematics of Operations Research*, **1**, pp. 117–129.
- Gershkoff, I. (1987). «Aircraft Shortage Evaluator». ORSA/TIMS Joint National Meeting, St. Louis, MO.
- Glover, F. (1977). «Heuristics for Integer Programming Using Surrogate Constraints». *Decision Sciences*, **8**, pp. 156–166.

- Glover, F. (1989). «Tabu Search - Part I». *ORSA Journal on Computing*, **1**, pp. 190–206.
- Glover, F. (1990a). «Tabu Search - Part II». *ORSA Journal on Computing*, **2**, pp. 4–32.
- Glover, F. (1990b). «Tabu Search: A Tutorial». *Interfaces*, **20**, pp. 74–94.
- Hane, C. A.; Barnhart, C.; Johnson, E. L.; Marsten, R. E.; Nemhauser, G. L. y Sigismondi, G. (1995). «The fleet assignment problem: solving a large-scale integer program». *Mathematical Programming*, **70**, pp. 211–232.
- Helme, M.P. (1992). «Reducing air traffic delay in a space-time network». En: *Systems, Man and Cybernetics, 1992., IEEE International Conference on*, pp. 236 –242 vol.1. doi: 10.1109/ICSMC.1992.271770.
- JAC-Chile (2012). «Website de la Junta de Aeronáutica de Chile». <http://www.jac-chile.cl>
- Jarrah, A. I. Z. y Yu, G. (1993). «A Decision Support Framework for Airline Flight Cancellations and Delays». *Transportation Science*, **27**, pp. 266–280.
- Kacem, I.; Hammadi, S. y Borne, P. (2002). «Pareto-optimality approach for flexible job-shop scheduling problems: hybridization of evolutionary algorithms and fuzzy logic». *Mathematics and Computers in Simulation*, **60(3-5)**, pp. 245–276.
- Kouvelis, P. (1997). *Robust discrete optimization and its applications*. Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA.
- Lan, S.; Clarke, J.-P. y Barnhart, C. (2006). «Planning for Robust Airline Operations: Optimizing Aircraft Routing and Flight Departure Times to Minimize Passenger Disruptions». *Transportation Science*, **40**, pp. 15–28.
- Letovsky, L. (1997). *Airline Operations Recovery: An Optimization Approach*. Tesis doctoral, Georgia Institute of Technology, Austin, TX.
- Levin, A. (1971). «Scheduling and fleet routing models for transportation system». *Transportation Science*, **5**, pp. 232–255.
- Lindsay, K. S.; Boyd, E. A. y Burlingame, R. (1993). «Traffic Flow Management Modeling with the Time Assignment Model». *Air Traffic Control Quarterly*, **1**, pp. 255–276.

- Lohatepanont, M. y Barnhart, C. (2004). «Airline Schedule Planning: Integrated Models and Algorithms for Schedule Design and Fleet Assignment». *Transportation Science*, **38**, pp. 19–32.
- Lulli, G. y Odoni, A. (2007). «The European air traffic flow problem». *Transportation Science*, **41**, pp. 431–443.
- Michalewicz, Z. y Fogel, D. (2000). *How to Solve It: Modern Heuristics*. Springer-Verlag, Berlin, Alemania. ISBN 3-540-66061-5.
- Mulvey, J. M.; Vanderbei, R. J. y Zenios, S. A. (1995). «Robust Optimization of Large-Scale Systems». *Operations Research*, **43**, pp. 264–281.
- Odoni, A. (1987). «The Flow Management Problem in Air Traffic Control». En: A. R. Odoni y G. Szego (Eds.), *Flow Control of Congested Networks*, pp. 269–288. Springer-Verlag, Berlin.
- Rexing, B.; Barnhart, C.; Kniker, T.; Jarrah, A. y Krishnamurthy, N. (2000). «Airline Fleet Assignment with Time Windows». *Transportation Science*, **34**, pp. 1–20.
- Richetta, O. y Odoni, A. R. (1993). «Solving Optimally the Static Ground-Holding Policy Problem in Air Traffic Control». *Transportation Science*, **27**, pp. 228–238.
- Richetta, O. y Odoni, A. R. (1994). «Dynamic Solution to the Ground-Holding Policy Problem in Air Traffic Control». *Transportation Science*, **28a**, pp. 167–185.
- Rosenberger, J. M.; Johnson, E. L. y Nemhauser, G. L. (2003). «Rerouting Aircraft for Airline Recovery». *Transportation Science*, **37**, pp. 408–421.
- Rosenberger, J. M.; Johnson, E. L. y Nemhauser, G. L. (2004). «A Robust Fleet-Assignment Model with Hub Isolation and Short Cycles». *Transportation Science*, **34**, pp. 357–368.
- Ruszczynski, A. y Shapiro, A. (2003). «Stochastic Programming Models». En: A. Ruszczyński y A. Shapiro (Eds.), *Stochastic Programming*, volumen 10 de *Handbooks in Operations Research and Management Science*, pp. 1–64. Elsevier.
- Shafia, M. A.; Pourseyed, M. y Jamili, A. (2011). «A new mathematical model for the job shop scheduling problem with uncertain processing times». *International Journal of Industrial Engineering Computations*, **2**, pp. 295–306.

- Shapiro, A.; Dentcheva, D. y Ruszczyński, A. (2009). *Lectures on Stochastic Programming: Modeling and Theory*. MPS-SIAM Series on Optimization. Society for Industrial and Applied Mathematics - Mathematical Programming Society, Philadelphia, PA, USA. ISBN 978-0-898716-87-0.
- Soyster, A. L. (1973). «Convex Programming with Set-Inclusive Constrains and Applications to Inexact Linear Programming». *Operations Research*, **21**, pp. 1154–1157.
- Stojković, G.; Soumis, F.; Desrosiers, J. y Solomon, M. (2002). «An optimization model for a real-time flight scheduling problem». *Transportation Research*, **36**, pp. 779–788.
- Teodorović, D. y Guberinić, S. (1984). «Optimal Dispatching Strategy on a Airline Network After a Schedule Perturbation». *European Journal of Operational Research*, **15**, pp. 178–182.
- Teodorović, D. y Stojković, G. (1990). «Model of Operational Daily Airline Scheduling». *Transport Planning and Technology*, **14**, pp. 273–285.
- Teodorović, D. y Stojković, G. (1995). «Model to Reduce Airline Schedule Disturbance». *Journal of Transportation Engineering*, **121**, pp. 324–331.
- Terrab, M. y Odoni, A. R. (1991). «Strategic Flow Control on an Air Traffic Network». *Operations Research*, **41**, pp. 138–152.
- Terrab, M. y Paulose, S. (1993). «Dynamic Strategic and Tactical Air Traffic Flow Control». *Informe técnico*, Rensselaer Polytechnic Institute.
- Vranas, P.; Bertsimas, D. y Odoni, A. R. (1994a). «The Multi-Airport Ground-Holding Problem in Air Traffic Control». *Operations Research*, **42**, pp. 249–261.
- Vranas, P.; Bertsimas, D. y Odoni, A. R. (1994b). «Dynamic Ground-Holding Policies for a Network of Airports». *Transportation Science*, **28**, pp. 275–291.
- Weber, M.; Evans, J.; Wolfson, M.; DeLaura, R.; Moser, B.; Martin, B.; Welch, J.; Andrews, J. y Bertsimas, D. (2005). «Improving Air Traffic Management During Thunderstorms». 24th AIAA/IEEE Digital Avionics Systems Conference (DASC), Washington DC..
- Wolsey, L. A. (1998). *Integer Programming*. Wiley Intersciences. ISBN 0-471-28366-5.

Yan, S. y Lin, C. (1997). «Airline scheduling for the temporary closure of airports». *Transportation Science*, **31**, pp. 72–82.

Yan, S. y Tu, Y. (1997). «Multifleet routing and Multistop Fleet Scheduling for Schedule Perturbation». *European Journal of Operational Research*, **103**, pp. 155–169.

Yan, S. y Yang, D. (1996). «A Decision Support Framework for Handling Schedule Perturbation». *Transportation Research*, **30**, pp. 405–419.

## **A N E X O S**

## A. GLOSARIO

El siguiente apéndice es un glosario con los términos que hemos usado a lo largo de este trabajo. Estos términos que vamos a definir son todos aquellos técnicos usados en la industria aérea y en el mundo de la Optimización en la que incluiremos todos los problemas enunciados.

***Aircraft Scheduling Recovery Problem:*** Problema definido como la de programar nuevamente el plan de vuelos ante inconvenientes externos a una compañía como fallas mecánicas

***Aircraft Traffic Flow Problem:*** Problema que gestiona el tráfico de vuelos de una aerolínea cuando ocurren variaciones en las capacidades de aeropuertos y espacio aéreo.

***Federal Airspace Administration:*** Institución que administra el espacio aéreo estado-unidense. Se le atribuye la implementación de políticas para disminuir los retrasos de ciertos vuelos.

***Flight Leg:*** Se define como una operación ejecutada por un avión que es un vuelo con Origen y un Destino, siendo parte de su itinerario programado de vuelos.

***Greedy Randomized Adaptive Search Procedure:*** Procedimiento heurístico que se usa en ciertos problemas en la que se van escogiendo soluciones aleatorias y se quedan con la mejor obtenida hasta el momento.

***Ground Delay Problem:*** Programa implementado por la FAA que asigna eficiente-mente la asignación del intervalos de tiempo o *time-slots* para las compañías aéreas que tienen operaciones dentro de los Estados Unidos, dependiendo de las condiciones externas de los aeropuertos, priorizando a que ciertos vuelos tengan que despegar y otros que se mantengan en tierra hasta que les toque su turno.

***Ground Holding Problem:*** Caso particular del problema de *Air traffic Flow Management* aplicado a aeropuertos en las que las condiciones meteorológicas de estos lugares pueden afectar sus capacidades para lo cual se tiene que gestionar los vuelos que llegan y los que se mantienen en tierra antes de despegar.

***Job Shop Scheduling Problem:*** Problema de programación de ciertos procesos, los cuales deben ser operados por una sola máquina. Constituye uno de los más difíciles problemas dentro del conjunto de problemas NP-Completo.

**Price of Robustness:** Concepto propuesto en las teorías recientes de Optimización Robusta, definido como el *trade-off* entre la probabilidad de violación de restricciones y el efecto sobre la función objetivo nominal. El parámetro nivel de protección  $\Gamma$  controla el *trade-off* señalado.

**Rerouting:** Decisión dentro de gestión de flotas de líneas aéreas dentro de la cual se desvía un avión de su programación previa pudiendo ir a una escala distinta en pleno vuelo, o ser asignado a un vuelo distinto cuando este se encuentra en su aeropuerto.

**Robust Stochastic Programming:** Forma de atacar problemas de optimización dentro bajo condiciones de incertidumbre en la que se busca soluciones inmunes a estas, aunque con el conocimiento previo de la información probabilística de los parámetros.

**Tabu Search:** Heurística de búsqueda local en las se revisan vecindades locales del espacio factible y se van listando soluciones malas u óptimos locales, en una lista tabú, de modo que no se vuelvan a esas soluciones.

**Time-Slots:** Intervalos de tiempo asignados por organismos reguladores como la FAA en Estados Unidos que se asignan entre las compañías que tienen vuelos que van a aeropuertos dentro del espacio aéreo que administran para que aterricen y se preparen para su vuelo próximo. Suele ser útil en aeropuertos con alta congestión de aviones para dosificar los posibles atochamientos que generen retrasos innecesarios.

**Turnaround:** Proceso que experimenta un avión desde que aterriza de su vuelo y se prepara para el siguiente de su itinerario.

## **B. ALGORITMOS COMPUTACIONALES APLICADOS**

A lo largo de esta Tesis hemos descrito los criterios para la creación de las posibles asignaciones de vuelos para los vuelos de modo de poder construir soluciones posibles para el problema cuando la variabilidad y el nivel de protección frente ella crece. También describimos las posibles formas de asignar costos para estas asignaciones previamente armadas.

Lo siguiente es una descripción en forma de pseudocódigo de los programas armados para poder trabajar el problema de optimización hecho para los datos propuestos.

### **B.1 Generación de las Asignaciones Posibles**

Este procedimiento nos da las posibles asignaciones para todos los vuelos, según el criterio de escalas en común, tiempo de salida de un vuelo posterior al de llegada de otro y que esta diferencia sea menor que una cierta tolerancia. Este es el pseudocódigo.

---

**Algoritmo 2:** Generación de Posibles Conexiones para Todos lo Itinerarios

---

**Data:** Itinerario Original Programado

**Result:** Conjunto de Arcos que Conectan Vuelos entre sí

Inicialización:

$n \leftarrow 1, A \leftarrow \emptyset,$

$K$ : Itinerarios,  $N$  Grande;

**forall**  $k \in K$  **do**

    Sea  $i \in O$ , vuelo operado actualmente en ese itinerario;

**forall**  $j \in P$  **do**

**if**  $D_i == O_j$  and  $TAO_i < TDO_i$  and  $|TAO_i - TDO_j| \leq Tol$  **then**

            Hacer  $L \leftarrow L \cup (i, j)$ ;

**end**

**end**

**while**  $n \leq N$  **do**

**forall**  $i \in P$  **do**

**if**  $\exists j \in F(j, i) \in L$  **then**

**forall**  $j \in P$  **do**

**if**  $D_i == O_j$  and  $TAO_i < TDO_i$  and  $|TAO_i - TDO_j| \leq Tol$  **then**

                        Hacer  $L \leftarrow L \cup (i, j)$

**end**

**end**

**end**

**end**

**end**

**end**

---

Lo que hace este algoritmo es construir iterativamente la red con las posibles asignaciones partiendo del vuelo actualmente operando de un avión determinado, con la que construimos las primeras conexiones. Para todos los próximos vuelos a operar, en un número finito de

pasos se consulta si existe una conexión que llega a esta. Si esto ocurre se construye los arcos posibles de asignación.

Para el caso de más de un tipo de aviones, se puede hacer una extensión de este procedimiento, incorporando únicamente consideraciones cuando los tiempos de vuelos superan el tiempo máximo de autonomía de cada modelo de avión, descartando la conexión si el tiempo de autonomía es menor al tiempo de vuelo esperado.

## **B.2 Costos de Asignación**

Este algoritmo, dependiendo de las características de los vuelos, se asignan los costos de cada arco que conecta un vuelo con otro para un itinerario.

---

**Algoritmo 3:** Asignación de Costos para Arcos entre Vuelos

---

**Data:** Itinerario Original Programado y Conjunto de Arcos

**Result:** Vector de Costos para Arcos

Inicialización:

$n \leftarrow 1$ ,  $L$  Arcos Definidos en Algoritmo 2,

**forall**  $(i, j) \in L : i, j \in F$  **do**

**if**  $j == i + 1$  **then**

$a_{ij} \leftarrow 0$ ;

**else**

**if**  $|TAO_i - TDO_j| \leq 1$  y  $j == i + 1$  **then**

$a_{ij} \leftarrow 1$

**else if**  $|TAO_i - TDO_j| \leq 1$  **then**

$a_{ij} \leftarrow$  Aleatorio entre 1000 y 2000;

**else if**  $|TAO_i - TDO_j| > 1$  y  $|TAO_i - TDO_j| \leq 5$  **then**

$a_{ij} \leftarrow$  Aleatorio entre 3100 y 3200;

**else**

$a_{ij} \leftarrow$  Aleatorio entre 4000 y 4200;

**end**

**end**

**forall**  $(i, j) \in L : j == D$  **do**

$a_{ij} \leftarrow 100000$

**end**

---

Este algoritmo valoriza dependiendo si ciertos vuelos que llegan y salen, tienen su hora dentro de un cierto intervalo. Si son del mismo itinerario se asigna costo cero, pero si son de itinerarios distintos, tiene costo uno, un número pequeño para que en el caso nominal su solución sea la programación de vuelos esperada y prevenir que haya soluciones múltiples.

El caso que cuando hay cancelaciones al nodo  $D$  de nuestra red, lo hacemos de modo que los costos sean lo suficientemente grandes, para que no ocurran.

En el caso general, en que disponemos de varios tipos de aviones, podemos extender el algoritmo anterior, cuya única modificación es respecto a comparar modelos de avión cuando tenemos conexiones en vuelos que llegan a sus destinos en horarios cercanos.

### B.3 Costos de Retraso

El costo de retraso depende del aeropuerto de destino del vuelo considerado.

---

**Algoritmo 4:** Asignación de Costos para Arcos entre Vuelos

---

**Data:** Itinerario Original Programado y Conjunto de Arcos

**Result:** Vector de Costos para Arcos

Inicialización:

$n \leftarrow 1$ ,  $F$ : Vuelos,  $E$ : Escalas de Vuelos.

**forall**  $i \in F$ ,  $e \in E$  **do**

**if**  $i == e$  **then**

$d_i = C_e$

**end**

**end**

---

Siendo  $C_e$ , el valor de retraso asociado al aeropuerto de destino  $e \in E$ .

## C. SOLUCIONES COMPUTACIONALES

### C.1 Primer Caso de Vuelos Nacionales

Tabla C.1: Costo total del primer caso de vuelos nacionales

$\Gamma_i$	0,1 Hrs	0,2 Hrs.	0,25 Hrs	0,3 Hrs	0,4 Hrs	0,5 Hrs
0	0	0	0	0	0	0
0,02	0,564	1,128	1,41	1,692	2,256	2,82
0,04	1,128	2,256	2,82	3,384	4,512	5,64
0,06	1,692	3,384	4,23	5,076	14,112	37,19
0,08	2,256	4,512	5,64	14,112	47,33	75
0,1	2,82	5,64	14,7	37,19	75	154,05
0,12	3,384	14,112	37,19	66,926	148,244	361,56
0,14	3,948	35,024	51,2	91,1	300,736	581,3
0,16	4,512	47,33	75	148,244	461,28	800,395
0,18	5,076	66,928	118,125	248,204	657,751	1090,13
0,2	5,64	74,999	154,05	361,56	800,4	1245,8
0,22	8,58	97,431	252,43	495,22	1068,028	1485,09
0,24	14,112	148,244	361,56	657,76	1206,936	1733,2
0,26	24,648	239,752	468,05	781,34	1377,181	2026,35
0,28	35,024	300,733	581,3	976,736	1523,768	2220,892
0,3	37,189	361,557	710,495	1090,125	1733,198	2441,65
0,32	47,33	461,28	800,396	1206,91	1986,4	2670,4
0,34	49,91	550,36	986,44	1355,981	2162,743	2936,46
0,36	66,928	657,756	1090,125	1461,812	2336,68	3142,3
0,38	71,25	762,28	1178,42	1597,57	2515,16	3384,05
0,4	75	800,4	1245,795	1733,2	2670,4	3591,2
0,42	91,101	976,736	1389,045	1947,87	2887,384	3767,88

Continued on next page

**Tabla C.1 – continued from previous page**

$\Gamma_i$	<b>0,1 Hrs</b>	<b>0,2 Hrs.</b>	<b>0,25 Hrs</b>	<b>0,3 Hrs</b>	<b>0,4 Hrs</b>	<b>0,5 Hrs</b>
0,44	97,432	1068,028	1485,09	2072,137	3072,96	3952,495
0,46	142,438	1126,351	1610,074	2191,677	3232,44	4132,25
0,48	148,244	1206,936	1733,2	2336,671	3449,2	4328
0,5	154,05	1245,8	1835,625	2441,75	3591,2	4508,75
0,52	239,752	1377,184	2026,35	2586,5	3732,544	4846,4
0,54	248,198	1461,812	2133,31	2703,43	3880,6	5031,8
0,56	300,736	1523,768	2220,9	2887,384	4024,4	5232
0,58	330,785	1637,78	2362,421	3009,152	4168,92	5433,2
0,6	361,56	1733,2	2441,75	3142,3	4328	5620
0,62	395,612	1821,82	2569,858	3267,51	4472,6	5824
0,64	461,28	1986,4	2670,4	3449,2	4772,24	6012,4
0,66	495,216	2072,14	2782,175	3555,864	4920,56	6200,6
0,68	550,36	2162,743	2936,46	3661,872	5068,88	6388,8
0,7	581,261	2220,9	3026	3767,88	5232	6577
0,72	657,757	2336,663	3142,3	3880,6	5395,84	6765,2
0,74	701,784	2410,015	3249,975	3988,45	5545,28	6953,4
0,76	762,28	2515,154	3384,05	4096,3	5711,2	7204,8
0,78	781,34	2586,5	3502,86	4205,83	5861,6	7407,8
0,8	800,4	2670,393	3591,2	4328	6012,4	7598
0,82	864,415	2750,86	3679,54	4436,45	6162,96	7788,2
0,84	976,736	2887,384	3767,88	4698,08	6313,52	7978,4
0,86	1003,978	2975,456	3862,625	4809,32	6464,08	8168,6
0,88	1068,028	3072,96	3952,5	4920,56	6614,64	8358,8
0,9	1090,13	3142,3	4042,375	5031,8	6765,2	8549
0,92	1126,356	3232,44	4132,25	5157,6	6915,76	8739,2
0,94	1169,124	3348,46	4223,825	5269,2	7128,96	8929,4
Continued on next page						

**Tabla C.1 – continued from previous page**

$\Gamma_i$	<b>0,1 Hrs</b>	<b>0,2 Hrs.</b>	<b>0,25 Hrs</b>	<b>0,3 Hrs</b>	<b>0,4 Hrs</b>	<b>0,5 Hrs</b>
0,96	1206,936	3449,2	4328	5395,84	7293,68	9119,6
0,98	1226,368	3520,528	4418,375	5507,92	7445,84	9404,9
1	1245,8	3591,2	4508,75	5620	7598	9500

Tabla C.2: Costo de asignación para el primer caso de vuelos nacionales

$\Gamma_i$	<b>0,1 Hrs</b>	<b>0,2 Hrs.</b>	<b>0,25 Hrs</b>	<b>0,3 Hrs</b>	<b>0,4 Hrs</b>	<b>0,5 Hrs</b>
0	0	0	0	0	0	0
0,02	0	0	0	0	0	0
0,04	0	0	0	0	0	0
0,06	0	0	0	0	0	0
0,08	0	0	0	0	2	2
0,1	0	2	0	2	0	0
0,12	0	2	2	2	2	2
0,14	0	2	2	2	4	4
0,16	0	0	0	2	6	6
0,18	0	2	0	4	6	6
0,2	0	2	2	4	6	12
0,22	0	4	4	6	7	10
0,24	0	4	4	6	10	10
0,26	0	4	6	6	10	9
0,28	2	6	6	8	10	11
0,3	2	6	5	12	9	12
Continued on next page						

**Tabla C.2 – continued from previous page**

$\Gamma_i$	0,1 Hrs	0,2 Hrs.	0,25 Hrs	0,3 Hrs	0,4 Hrs	0,5 Hrs
0,32	2	6	6	10	10	8
0,34	2	6	8	10	12	4
0,36	2	6	12	10	10	12
0,38	0	8	8	9	10	4
0,4	0	7	10	9	4	5
0,42	2	8	9	10	12	6
0,44	2	10	10	9	4	6
0,46	2	10	9	12	4	4
0,48	2	10	9	10	4	4
0,5	2	10	9	8	6	4
0,52	4	10	11	6	6	4
0,54	4	9	12	4	4	8
0,56	4	9	12	12	4	8
0,58	4	9	8	8	6	6
0,6	4	10	8	4	4	6
0,62	6	9	6	4	4	6
0,64	6	12	4	4	8	6
0,66	6	12	5	6	8	4
0,68	6	10	12	6	8	4
0,7	6	8	8	6	6	4
0,72	6	10	4	4	6	4
0,74	5	6	4	4	6	4
0,76	6	4	5	4	6	4
0,78	6	6	6	5	6	6
0,8	6	12	6	4	4	4
0,82	4	8	6	4	4	4
Continued on next page						

**Tabla C.2 – continued from previous page**

$\Gamma_i$	0,1 Hrs	0,2 Hrs.	0,25 Hrs	0,3 Hrs	0,4 Hrs	0,5 Hrs
0,84	8	4	6	8	4	4
0,86	8	4	4	8	4	4
0,88	7	4	4	8	4	4
0,9	12	5	4	8	4	4
0,92	8	4	4	6	4	4
0,94	8	6	5	6	6	4
0,96	10	6	4	6	4	4
0,98	10	4	6	4	4	4
1	10	4	6	4	4	4

Tabla C.3: Índice de Puntualidad para el primer caso de vuelos nacionales

$\Gamma_i$	0,1 Hrs	0,2 Hrs.	0,25 Hrs	0,3 Hrs	0,4 Hrs	0,5 Hrs
0	1	1	1	1	1	1
0,02	1	1	1	1	1	1
0,04	1	1	1	1	1	1
0,06	1	1	1	1	0,94	0,82
0,08	1	1	1	0,94	0,76	0,6
0,1	1	1	0,94	0,82	0,6	0,48
0,12	1	0,94	0,82	0,62	0,48	0,38
0,14	1	0,82	0,76	0,5	0,38	0,3
0,16	1	0,76	0,6	0,48	0,3	0,3
0,18	1	0,62	0,5	0,38	0,3	0,32
Continued on next page						

**Tabla C.3 – continued from previous page**

$\Gamma_i$	0,1 Hrs	0,2 Hrs.	0,25 Hrs	0,3 Hrs	0,4 Hrs	0,5 Hrs
0,2	1	0,6	0,48	0,38	0,3	0,24
0,22	0,98	0,48	0,38	0,3	0,22	0,22
0,24	0,94	0,48	0,38	0,3	0,24	0,2
0,26	0,86	0,38	0,3	0,3	0,24	0,1
0,28	0,82	0,38	0,3	0,26	0,22	0,1
0,3	0,82	0,38	0,32	0,32	0,2	0,1
0,32	0,76	0,3	0,3	0,24	0,1	0,1
0,34	0,76	0,3	0,24	0,24	0,1	0,12
0,36	0,62	0,3	0,32	0,22	0,1	0,1
0,38	0,6	0,3	0,24	0,2	0,1	0,1
0,4	0,6	0,3	0,24	0,2	0,1	0,12
0,42	0,5	0,24	0,22	0,1	0,12	0,12
0,44	0,48	0,22	0,22	0,1	0,1	0,1
0,46	0,48	0,26	0,2	0,1	0,1	0,1
0,48	0,48	0,24	0,2	0,1	0,1	0,1
0,5	0,48	0,24	0,2	0,1	0,12	0,1
0,52	0,38	0,24	0,1	0,1	0,12	0
0,54	0,38	0,22	0,1	0,1	0,1	0
0,56	0,38	0,22	0,1	0,12	0,1	0
0,58	0,38	0,2	0,1	0,12	0,1	0
0,6	0,38	0,2	0,1	0,1	0,1	0
0,62	0,38	0,2	0,1	0,1	0,1	0
0,64	0,3	0,1	0,1	0,1	0	0
0,66	0,3	0,1	0,1	0,12	0	0
0,68	0,3	0,1	0,12	0,12	0	0
0,7	0,3	0,1	0,12	0,12	0	0
Continued on next page						

**Tabla C.3 – continued from previous page**

$\Gamma_i$	<b>0,1 Hrs</b>	<b>0,2 Hrs.</b>	<b>0,25 Hrs</b>	<b>0,3 Hrs</b>	<b>0,4 Hrs</b>	<b>0,5 Hrs</b>
0,72	0,3	0,1	0,1	0,1	0	0
0,74	0,32	0,1	0,1	0,1	0	0
0,76	0,3	0,1	0,1	0,1	0	0
0,78	0,3	0,1	0,12	0,1	0	0
0,8	0,3	0,1	0,12	0,1	0	0
0,82	0,3	0,1	0,12	0,1	0	0
0,84	0,24	0,12	0,12	0	0	0
0,86	0,28	0,12	0,1	0	0	0
0,88	0,22	0,1	0,1	0	0	0
0,9	0,32	0,1	0,1	0	0	0
0,92	0,26	0,1	0,1	0	0	0
0,94	0,24	0,1	0,1	0	0	0
0,96	0,24	0,1	0,1	0	0	0
0,98	0,24	0,12	0,1	0	0	0
1	0,24	0,12	0,1	0	0	0

## **C.2 Segundo Caso y Real de Vuelos Nacionales**

Tabla C.4: Índice de Puntualidad para el primer caso de vuelos nacionales

$\Gamma_i$	<b>0,1 Hrs</b>	<b>0,2 Hrs.</b>	<b>0,25 Hrs</b>	<b>0,3 Hrs</b>
0	0	0	0	0
0,02	0,544	0,906	1,087	1,268

Continued on next page

**Tabla C.4 – continued from previous page**

$\Gamma_i$	<b>0,1 Hrs</b>	<b>0,2 Hrs.</b>	<b>0,25 Hrs</b>	<b>0,3 Hrs</b>
0,04	1,088	1,812	2,174	2,536
0,06	1,631	2,717	3,26	3,803
0,08	2,175	3,623	4,347	5,071
0,1	2,719	4,529	5,434	10,983
0,12	3,263	5,435	11,23	23,062
0,14	3,807	6,341	25,246	41,722
0,16	4,35	21,804	40,35	57,317
0,18	4,894	31,401	55,319	71,917
0,2	5,438	42,664	68,647	135,552
0,22	8,239	61,008	82,521	219,212
0,24	11,256	68,866	138,986	265,406
0,26	19,214	81,484	229,382	379,536
0,28	25,48	90,171	284,987	431,966
0,3	35,967	169,716	375,009	572,664
0,32	38,053	234,085	418,102	615,922
0,34	48,312	288,374	471,699	753,407
0,36	53,982	332,272	593,079	817,626
0,38	66,249	414,801	671,323	941,961
0,4	72,112	456,48	777,66	1056,694
0,42	75,717	494,02	816,996	1158,481
0,44	92,181	619,409	914,956	1276,198
0,46	115,828	701,434	1037,544	1387,049
0,48	141,024	780,155	1107,391	1511,293
0,5	149,035	810,12	1202,393	1599,315
0,52	204,086	911,912	1313,296	1698,461
0,54	240,909	975,331	1434,491	1772,734
Continued on next page				

**Tabla C.4 – continued from previous page**

$\Gamma_i$	<b>0,1 Hrs</b>	<b>0,2 Hrs.</b>	<b>0,25 Hrs</b>	<b>0,3 Hrs</b>
0,56	249,088	1040,824	1509,31	1936,855
0,58	302,069	1152,686	1593,479	2042,196
0,6	331,854	1224,638	1683,786	2178,642
0,62	363,954	1271,206	1735,395	2262,914
0,64	397,226	1387,87	1830,397	2334,189
0,66	460,59	1470,624	1894,71	2486,155
0,68	494,019	1532,017	2065,32	2580,551
0,7	528,204	1588,664	2154,599	2685,983
0,72	577,869	1650,978	2249,314	2782,185
0,74	647,022	1726,744	2354,275	2894,619
0,76	683,606	1768,061	2456,348	2987,755
0,78	720,784	1880,435	2535,41	3066,258
0,8	753,392	1968,336	2614,912	3158,392
0,82	812,177	2034,905	2715,22	3252,89
0,84	849,342	2142,115	2781,128	3420,836
0,86	884,872	2211,734	2882,723	3501,117
0,88	983,187	2335,431	2949,647	3611,719
0,9	1025,723	2407,271	3044,911	3708,861
0,92	1052,82	2474,071	3112,887	3790,547
0,94	1095,755	2560,655	3196,039	3887,613
0,96	1133,914	2630,166	3264,411	3984,878
0,98	1169,723	2700,166	3347,898	4086,872
1	1206,93	2770,39	3416,39	4170,49

Tabla C.5: Índice de Puntualidad para el primer caso de vuelos nacionales

$\Gamma_i$	0,1 Hrs	0,2 Hrs.	0,25 Hrs	0,3 Hrs
0	0	0	0	0
0,02	0	0	0	0
0,04	0	0	0	0
0,06	0	0	0	0
0,08	0	0	0	0
0,1	0	0	0	0
0,12	0	0	0	0
0,14	0	0	0	0
0,16	0	0	2	0
0,18	0	2	0	0
0,2	0	0	0	0
0,22	0	0	0	0
0,24	0	0	0	0
0,26	0	0	2	2
0,28	0	0	0	4
0,3	2	0	2	6
0,32	2	2	4	6
0,34	2	0	0	4
0,36	0	2	7	4
0,38	0	4	6	4
0,4	0	0	11	7
0,42	0	4	4	9
0,44	2	7	6	9
0,46	0	4	7	7

Continued on next page

**Tabla C.5 – continued from previous page**

$\Gamma_i$	0,1 Hrs	0,2 Hrs.	0,25 Hrs	0,3 Hrs
0,48	0	4	6	7
0,5	2	4	9	8
0,52	4	5	7	9
0,54	4	4	10	8
0,56	4	6	9	6
0,58	4	7	8	7
0,6	4	6	9	6
0,62	6	6	9	6
0,64	6	10	9	7
0,66	6	9	7	7
0,68	6	9	7	7
0,7	6	9	8	7
0,72	6	9	8	7
0,74	8	9	8	7
0,76	8	9	8	7
0,78	6	9	8	7
0,8	6	7	7	5
0,82	6	7	7	5
0,84	6	7	7	9
0,86	6	8	7	9
0,88	7	9	7	9
0,9	6	9	5	9
0,92	12	10	5	9
0,94	10	8	5	9
0,96	12	8	5	9
0,98	8	8	5	9

Continued on next page

**Tabla C.5 – continued from previous page**

$\Gamma_i$	<b>0,1 Hrs</b>	<b>0,2 Hrs.</b>	<b>0,25 Hrs</b>	<b>0,3 Hrs</b>
1	10	8	5	7

Tabla C.6: Índice de Puntualidad para el primer caso de vuelos nacionales

$\Gamma_i$	<b>0,1 Hrs</b>	<b>0,2 Hrs.</b>	<b>0,25 Hrs</b>	<b>0,3 Hrs</b>
0	1	1	1	1
0,02	1	1	1	1
0,04	1	1	1	1
0,06	1	1	1	1
0,08	1	1	1	1
0,1	1	1	1	0,96
0,12	1	1	0,96	0,88
0,14	1	1	0,86	0,76
0,16	1	0,88	0,8	0,68
0,18	1	0,86	0,68	0,62
0,2	1	0,76	0,62	0,5
0,22	0,98	0,64	0,56	0,42
0,24	0,96	0,62	0,5	0,38
0,26	0,9	0,56	0,42	0,36
0,28	0,86	0,54	0,38	0,32
0,3	0,82	0,46	0,36	0,3
0,32	0,82	0,42	0,38	0,3
0,34	0,76	0,38	0,28	0,26
Continued on next page				

**Tabla C.6 – continued from previous page**

$\Gamma_i$	<b>0,1 Hrs</b>	<b>0,2 Hrs.</b>	<b>0,25 Hrs</b>	<b>0,3 Hrs</b>
0,36	0,7	0,38	0,3	0,24
0,38	0,6	0,38	0,26	0,22
0,4	0,6	0,34	0,32	0,24
0,42	0,6	0,28	0,24	0,16
0,44	0,5	0,26	0,24	0,16
0,46	0,5	0,24	0,24	0,16
0,48	0,5	0,24	0,24	0,18
0,5	0,48	0,24	0,22	0,18
0,52	0,46	0,22	0,16	0,18
0,54	0,38	0,22	0,2	0,14
0,56	0,38	0,24	0,18	0,14
0,58	0,38	0,24	0,18	0,14
0,6	0,38	0,24	0,16	0,14
0,62	0,38	0,22	0,14	0,14
0,64	0,36	0,2	0,14	0,14
0,66	0,3	0,16	0,14	0,1
0,68	0,3	0,16	0,14	0,1
0,7	0,3	0,16	0,14	0,1
0,72	0,3	0,14	0,14	0,1
0,74	0,3	0,14	0,1	0,1
0,76	0,3	0,14	0,1	0,1
0,78	0,3	0,14	0,1	0,1
0,8	0,3	0,14	0,1	0,1
0,82	0,3	0,14	0,1	0,1
0,84	0,24	0,14	0,1	0,02
0,86	0,24	0,14	0,1	0,02
Continued on next page				

**Tabla C.6 – continued from previous page**

$\Gamma_i$	<b>0,1 Hrs</b>	<b>0,2 Hrs.</b>	<b>0,25 Hrs</b>	<b>0,3 Hrs</b>
0,88	0,24	0,1	0,1	0,02
0,9	0,2	0,1	0,1	0,02
0,92	0,26	0,1	0,1	0,02
0,94	0,26	0,1	0,1	0,02
0,96	0,28	0,1	0,1	0,02
0,98	0,24	0,1	0,1	0,02
1	0,24	0,1	0,1	0,02

### **C.3 Caso de Vuelos Regionales**

Tabla C.7: Índice de Puntualidad para el primer caso de vuelos nacionales

$\Gamma_i$	<b>0,1 Hrs</b>	<b>0,2 Hrs.</b>	<b>0,25 Hrs</b>	<b>0,3 Hrs</b>	<b>0,4 Hrs</b>	<b>0,5 Hrs</b>
0	0	0	0	0	0	0
0,02	2,161	2,977	3,385	3,793	4,609	5,425
0,04	4,321	5,953	6,769	7,585	29,701	70,417
0,06	6,482	8,93	23,255	51,404	129,038	235,504
0,08	13,418	39,65	82,85	137,642	290,534	464,799
0,1	28,128	99,228	169,968	264,213	479,551	705,406
0,12	60,214	185,482	297,538	425,729	697,155	1008,007
0,14	108,943	299,104	447,589	600,09	952,875	1329,315
0,16	174,977	435,013	605,868	792,941	1224,987	1659,096
0,18	249,62	574,698	776,369	1010,372	1510,28	1995,425

Continued on next page

**Tabla C.7 – continued from previous page**

$\Gamma_i$	<b>0,1 Hrs</b>	<b>0,2 Hrs.</b>	<b>0,25 Hrs</b>	<b>0,3 Hrs</b>	<b>0,4 Hrs</b>	<b>0,5 Hrs</b>
0,2	328,956	719,034	962,084	1234,894	1784,9	2330,002
0,22	434,374	892,859	1181,919	1490,844	2082,574	2721,134
0,24	529,446	1061,521	1383,081	1712,385	2365,746	3104,561
0,26	633,461	1237,701	1594,291	1942,973	2690,093	3524,068
0,28	741,11	1413,51	1796,618	2176,957	2996,283	3933,552
0,3	852,541	1585,965	2001,679	2412,439	3337,961	4299,84
0,32	965,355	1774,834	2207,408	2647,552	3680,871	4666,853
0,34	1081,049	1957,608	2428,097	2925,013	4003,55	5070,424
0,36	1199,502	2146,509	2638,827	3186,7	4359,328	5456,948
0,38	1317,016	2325,227	2846,968	3467,145	4659,493	5868,281
0,4	1441,278	2518,481	3099,436	3732,37	4975,662	6229,262
0,42	1566,752	2708,695	3331,425	4008,599	5324,355	6623,252
0,44	1695,431	2904,104	3585,513	4255,792	5661,534	6992,142
0,46	1834,255	3096,611	3834,92	4592,976	5979,815	7383,512
0,48	1964,934	3320,917	4058,976	4838,341	6318,008	7786,755
0,5	2097,325	3514,64	4281,905	5076,04	6626,915	8142,13
0,52	2235,192	3716,463	4560,976	5356,633	6958,868	8536,79
0,54	2371,081	3939,496	4838,137	5638,229	7246,045	8948,584
0,56	2535,87	4187,254	5055,883	5926,991	7615,099	9324,013
0,58	2675,653	4381,299	5263,783	6154,926	7931,494	9649,498
0,6	2810,501	4575,344	5478,714	6399,36	8262,86	10013,372
0,62	2958,075	4756,585	5718,275	6646,66	8573,295	10355,25
0,64	3092,318	5003,179	5955,373	6928,701	8967,563	10739,526
0,66	3226,263	5182,698	6206,321	7179,236	9276,269	11094,735
0,68	3362,593	5386,347	6441,226	7490,162	9628,95	11460,605
0,7	3524,85	5594,765	6686,164	7814,072	9956,596	11820,089
Continued on next page						

**Tabla C.7 – continued from previous page**

$\Gamma_i$	<b>0,1 Hrs</b>	<b>0,2 Hrs.</b>	<b>0,25 Hrs</b>	<b>0,3 Hrs</b>	<b>0,4 Hrs</b>	<b>0,5 Hrs</b>
0,72	3680,148	5787,837	6939,314	8066,481	10294,25	12181,87
0,74	3816,402	5982,8	7162,465	8318,89	10593,954	12543,72
0,76	3952,848	6210,34	7417,615	8601,3	10879,491	13030,627
0,78	4089,294	6465,879	7640,766	8881,058	11215,531	13439,175
0,8	4278,186	6661,418	7866,292	9135,496	11542,538	13801,416
0,82	4421,243	6887,373	8159,125	9390,318	11849,069	14229,047
0,84	4551,298	7108,074	8398,132	9750,886	12212,867	14642,341
0,86	4709,441	7303,694	8652,379	10005,396	12504,78	15011,963
0,88	4838,375	7501,659	8887,924	10263,686	12802,036	15390,45
0,9	4967,639	7697,384	9143,176	10550,765	13113,328	15757,572
0,92	5126,903	7893,109	9369,902	10819,467	13467,146	16123,49
0,94	5285,949	8176,394	9643,697	11128,073	13827,854	16487,971
0,96	5445,326	8404,48	9889,362	11403,746	14181,604	16900,41
0,98	5623,721	8645,066	10154,044	11683,78	14495,89	17264,018
1	5764,499	8855,14	10386,6	11941,31	14810,56	17630,35

Tabla C.8: Índice de Puntualidad para el primer caso de vuelos nacionales

$\Gamma_i$	<b>0,1 Hrs</b>	<b>0,2 Hrs.</b>	<b>0,25 Hrs</b>	<b>0,3 Hrs</b>	<b>0,4 Hrs</b>	<b>0,5 Hrs</b>
0	0	0	0	0	0	0
0,02	0	0	0	0	0	0
0,04	0	0	0	0	0	0
0,06	0	0	0	0	0	0
Continued on next page						

**Tabla C.8 – continued from previous page**

$\Gamma_i$	0,1 Hrs	0,2 Hrs.	0,25 Hrs	0,3 Hrs	0,4 Hrs	0,5 Hrs
0,08	0	0	0	0	0	6
0,1	2	2	2	2	6	6
0,12	2	2	2	4	4	6
0,14	2	2	4	4	6	6
0,16	2	4	4	4	6	4
0,18	2	4	4	4	4	4
0,2	2	4	4	4	4	4
0,22	2	4	4	2	4	4
0,24	2	4	2	2	4	4
0,26	2	2	2	4	4	8
0,28	2	2	2	2	4	9
0,3	2	6	2	2	2	6
0,32	5	4	4	4	9	9
0,34	6	6	4	5	10	9
0,36	6	4	4	4	9	7
0,38	6	4	4	4	9	9
0,4	4	6	6	2	9	9
0,42	4	6	2	9	9	11
0,44	6	8	4	9	7	9
0,46	4	6	4	9	6	10
0,48	6	8	4	11	13	7
0,5	6	7	4	11	13	7
0,52	7	4	9	9	9	11
0,54	7	4	11	9	9	8
0,56	6	4	10	9	9	10
0,58	11	4	11	9	9	10
Continued on next page						

**Tabla C.8 – continued from previous page**

$\Gamma_i$	<b>0,1 Hrs</b>	<b>0,2 Hrs.</b>	<b>0,25 Hrs</b>	<b>0,3 Hrs</b>	<b>0,4 Hrs</b>	<b>0,5 Hrs</b>
0,6	11	4	11	9	10	10
0,62	10	10	11	9	8	9
0,64	9	12	11	11	11	9
0,66	9	10	9	11	11	9
0,68	9	8	9	9	11	9
0,7	8	8	9	8	10	9
0,72	8	8	9	8	10	9
0,74	8	8	9	8	9	9
0,76	8	10	11	8	9	10
0,78	8	10	11	9	9	9
0,8	8	10	11	9	9	9
0,82	11	8	8	9	10	10
0,84	11	8	8	9	10	10
0,86	11	8	8	9	10	10
0,88	11	8	9	13	10	10
0,9	11	8	9	9	10	12
0,92	11	8	9	7	13	13
0,94	11	11	11	11	13	13
0,96	11	12	11	11	13	13
0,98	10	12	10	10	13	13
1	10	11	7	10	13	13

Tabla C.9: Índice de Puntualidad para el primer caso de vuelos nacionales

$\Gamma_i$	0,1 Hrs	0,2 Hrs.	0,25 Hrs	0,3 Hrs	0,4 Hrs	0,5 Hrs
0	1	1	1	1	1	1
0,02	1	1	1	1	1	1
0,04	1	1	1	1	1	1
0,06	1	1	1	1	1	1
0,08	1	1	1	1	1	0,906
0,1	0,984	0,984	0,984	0,984	0,906	0,859
0,12	0,984	0,984	0,984	0,953	0,859	0,812
0,14	0,984	0,984	0,969	0,875	0,828	0,781
0,16	0,984	0,969	0,922	0,859	0,781	0,734
0,18	0,984	0,953	0,859	0,828	0,766	0,688
0,2	0,984	0,906	0,859	0,812	0,734	0,656
0,22	0,984	0,859	0,812	0,766	0,672	0,641
0,24	0,969	0,844	0,797	0,734	0,641	0,578
0,26	0,938	0,766	0,719	0,688	0,656	0,531
0,28	0,891	0,719	0,656	0,578	0,547	0,484
0,3	0,875	0,75	0,641	0,578	0,578	0,562
0,32	0,859	0,641	0,625	0,562	0,469	0,438
0,34	0,797	0,656	0,578	0,562	0,5	0,438
0,36	0,766	0,625	0,547	0,469	0,438	0,406
0,38	0,734	0,594	0,531	0,531	0,391	0,391
0,4	0,703	0,547	0,484	0,438	0,359	0,359
0,42	0,656	0,484	0,438	0,391	0,344	0,406
0,44	0,625	0,484	0,469	0,375	0,344	0,359
0,46	0,625	0,453	0,453	0,359	0,391	0,344

Continued on next page

**Tabla C.9 – continued from previous page**

$\Gamma_i$	<b>0,1 Hrs</b>	<b>0,2 Hrs.</b>	<b>0,25 Hrs</b>	<b>0,3 Hrs</b>	<b>0,4 Hrs</b>	<b>0,5 Hrs</b>
0,48	0,562	0,422	0,406	0,438	0,375	0,328
0,5	0,562	0,406	0,391	0,438	0,344	0,328
0,52	0,547	0,375	0,328	0,297	0,422	0,234
0,54	0,516	0,375	0,422	0,297	0,422	0,266
0,56	0,453	0,312	0,484	0,422	0,391	0,219
0,58	0,5	0,312	0,453	0,422	0,391	0,219
0,6	0,484	0,312	0,453	0,422	0,375	0,219
0,62	0,469	0,516	0,406	0,406	0,375	0,219
0,64	0,406	0,453	0,375	0,375	0,312	0,219
0,66	0,391	0,422	0,375	0,359	0,312	0,219
0,68	0,375	0,406	0,359	0,344	0,266	0,219
0,7	0,344	0,328	0,328	0,266	0,266	0,188
0,72	0,344	0,328	0,312	0,266	0,234	0,172
0,74	0,344	0,328	0,281	0,234	0,188	0,172
0,76	0,344	0,297	0,281	0,234	0,188	0,172
0,78	0,344	0,297	0,281	0,281	0,188	0,172
0,8	0,328	0,297	0,266	0,266	0,188	0,172
0,82	0,453	0,266	0,25	0,266	0,188	0,172
0,84	0,375	0,266	0,25	0,156	0,188	0,172
0,86	0,375	0,266	0,234	0,156	0,188	0,156
0,88	0,375	0,25	0,25	0,172	0,172	0,156
0,9	0,375	0,25	0,25	0,172	0,156	0,188
0,92	0,375	0,25	0,25	0,156	0,203	0,188
0,94	0,312	0,203	0,188	0,125	0,156	0,156
0,96	0,312	0,203	0,188	0,125	0,156	0,156
0,98	0,312	0,203	0,188	0,125	0,156	0,156
Continued on next page						

**Tabla C.9 – continued from previous page**

$\Gamma_i$	<b>0,1 Hrs</b>	<b>0,2 Hrs.</b>	<b>0,25 Hrs</b>	<b>0,3 Hrs</b>	<b>0,4 Hrs</b>	<b>0,5 Hrs</b>
1	0,312	0,203	0,188	0,125	0,156	0,141

## **C.4 Caso Extendido a Muchos Tipos de Aviones**

### **C.4.1 Ejemplo con $\Gamma_k = 0,5$**

Tabla C.10: Costos totales para caso general, con  $\Gamma_k = 0,5$

$\Gamma_i$	<b>0,1 Hrs</b>	<b>0,2 Hrs.</b>	<b>0,3 Hrs</b>	<b>0,4 Hrs</b>
0	0	0	0	0
0,05	3,22	4,01	4,79	5,57
0,1	6,45	8,01	9,58	11,14
0,15	9,67	12,02	14,37	28,86
0,2	12,9	16,03	31,31	74,51
0,25	16,12	20,03	66,32	158,81
0,3	30,89	47,73	139,01	314,43
0,35	69,77	102,02	240,66	592,63
0,4	111,17	169,66	393,15	853,87
0,45	167,81	273,59	650,58	1206,85
0,5	227,15	365,93	851,1	1520,78
0,55	324,37	510,46	1094,38	1912,18
0,6	458,51	742,32	1500,16	2350,72
0,65	622,32	1061,19	1871,54	2763,36
0,7	884,02	1374,63	2344,85	3292,58
Continued on next page				

**Tabla C.10 – continued from previous page**

$\Gamma_i$	<b>0,1 Hrs</b>	<b>0,2 Hrs.</b>	<b>0,3 Hrs</b>	<b>0,4 Hrs</b>
0,75	1101,17	1680,12	2734,45	3710,6
0,8	1272,65	1956,86	3104,54	4090,08
0,85	1399,65	2190,64	3425,31	4480,54
0,9	1691,15	2645,32	3796,83	4893,93
0,95	1861,52	3012,91	4217,57	5304,82
1	2079,24	3308,17	4531,22	5721,47

Tabla C.11: Costos de asignación para caso general, con

$\Gamma_k = 0,5$

$\Gamma_i$	<b>0,1 Hrs</b>	<b>0,2 Hrs.</b>	<b>0,3 Hrs</b>	<b>0,4 Hrs</b>
0	0	0	0	0
0,05	0	0	0	0
0,1	0	0	0	0
0,15	0	0	0	0
0,2	0	0	0	2
0,25	0	0	2	0
0,3	0	0	2	2
0,35	0	0	2	0
0,4	0	2	2	0
0,45	0	2	2	2
0,5	0	0	2	2
0,55	0	2	0	2
0,6	4	2	2	0

Continued on next page

**Tabla C.11 – continued from previous page**

$\Gamma_i$	0,1 Hrs	0,2 Hrs.	0,3 Hrs	0,4 Hrs
0,65	2	2	2	2
0,7	0	0	0	2
0,75	4	2	2	4
0,8	2	0	0	4
0,85	2	2	2	4
0,9	2	2	4	4
0,95	2	2	4	4
1	2	4	4	5

Tabla C.12: Índice de puntualidad para caso general, con  $\Gamma_k = 0,5$

$\Gamma_i$	0,1 Hrs	0,2 Hrs.	0,3 Hrs	0,4 Hrs
0	1	1	1	1
0,05	1	1	1	1
0,1	1	1	1	1
0,15	1	1	1	0,85
0,2	1	1	0,99	0,79
0,25	1	1	0,81	0,88
0,3	0,99	0,97	0,75	0,72
0,35	0,76	0,72	0,72	0,61
0,4	0,85	0,64	0,58	0,56
0,45	0,68	0,58	0,53	0,47
0,5	0,65	0,56	0,5	0,44
Continued on next page				

**Tabla C.12 – continued from previous page**

$\Gamma_i$	<b>0,1 Hrs</b>	<b>0,2 Hrs.</b>	<b>0,3 Hrs</b>	<b>0,4 Hrs</b>
0,55	0,76	0,5	0,47	0,42
0,6	0,54	0,47	0,39	0,43
0,65	0,49	0,43	0,42	0,32
0,7	0,5	0,39	0,32	0,31
0,75	0,46	0,39	0,32	0,28
0,8	0,44	0,36	0,31	0,29
0,85	0,54	0,31	0,25	0,29
0,9	0,42	0,31	0,28	0,28
0,95	0,38	0,33	0,26	0,25
1	0,49	0,29	0,22	0,26

**C.4.2 Ejemplo con  $\Gamma_k = 1, 0$**

Tabla C.13: Costos totales para caso general, con  $\Gamma_k = 1, 0$

$\Gamma_i$	<b>0,1 Hrs</b>	<b>0,2 Hrs.</b>	<b>0,3 Hrs</b>	<b>0,4 Hrs</b>
0	0	0	0	0
0,05	6,45	8,01	9,58	11,14
0,1	12,9	16,03	31,31	74,51
0,15	30,89	47,73	139,01	314,43
0,2	111,17	169,66	393,15	853,87
0,25	227,15	365,93	851,1	1520,78
0,3	458,51	742,32	1500,16	2350,72
0,35	884,02	1374,63	2344,85	3292,58
Continued on next page				

**Tabla C.13 – continued from previous page**

$\Gamma_i$	<b>0,1 Hrs</b>	<b>0,2 Hrs.</b>	<b>0,3 Hrs</b>	<b>0,4 Hrs</b>
0,4	1272,65	1956,86	3104,54	4090,08
0,45	1691,15	2645,32	3796,83	4893,93
0,5	2079,24	3308,17	4531,21	5721,47
0,55	2552,53	3975,38	5357,86	6677,66
0,6	3122,01	4749,35	6121,35	7614,68
0,65	3695,52	5315,5	6991,18	8445,47
0,7	4155,13	5932,37	7657,22	9298,32
0,75	4572,12	6433,18	8252,83	10129,85
0,8	5143,73	7063,58	9042,44	11021,24
0,85	5594,82	7762,17	9771,19	11835,47
0,9	6034,52	8327,36	10481,79	12607,42
0,95	6671,45	8953,05	11229,59	13570,43
1	7060,13	9473,53	11932,45	14361,01

Tabla C.14: Costos de asignación para caso general, con  $\Gamma_k = 1,0$

$\Gamma_i$	<b>0,1 Hrs</b>	<b>0,2 Hrs.</b>	<b>0,3 Hrs</b>	<b>0,4 Hrs</b>
0	0	0	0	0
0,05	0	0	0	0
0,1	0	0	0	2
0,15	0	0	2	2
0,2	0	2	2	0
0,25	0	0	2	2
Continued on next page				

**Tabla C.14 – continued from previous page**

$\Gamma_i$	<b>0,1 Hrs</b>	<b>0,2 Hrs.</b>	<b>0,3 Hrs</b>	<b>0,4 Hrs</b>
0,3	4	2	2	0
0,35	0	0	0	2
0,4	2	0	0	4
0,45	2	2	4	4
0,5	2	4	4	5
0,55	4	4	4	4
0,6	6	4	4	2
0,65	6	8	7	8
0,7	6	8	9	9
0,75	6	8	9	9
0,8	8	8	9	9
0,85	10	8	8	9
0,9	8	9	9	6
0,95	8	8	9	6
1	8	9	9	7

Tabla C.15: Índice de puntualidad para caso general, con  $\Gamma_k = 1,0$

$\Gamma_i$	<b>0,1 Hrs</b>	<b>0,2 Hrs.</b>	<b>0,3 Hrs</b>	<b>0,4 Hrs</b>
0	1	1	1	1
0,05	1	1	1	1
0,1	1	1	0,99	0,79
0,15	0,99	0,97	0,75	0,72
Continued on next page				

**Tabla C.15 – continued from previous page**

$\Gamma_i$	<b>0,1 Hrs</b>	<b>0,2 Hrs.</b>	<b>0,3 Hrs</b>	<b>0,4 Hrs</b>
0,2	0,71	0,64	0,58	0,56
0,25	0,65	0,56	0,5	0,44
0,3	0,54	0,47	0,39	0,43
0,35	0,5	0,39	0,38	0,29
0,4	0,44	0,4	0,29	0,29
0,45	0,42	0,31	0,28	0,28
0,5	0,38	0,29	0,24	0,26
0,55	0,36	0,28	0,24	0,25
0,6	0,33	0,26	0,22	0,21
0,65	0,32	0,26	0,25	0,14
0,7	0,33	0,22	0,21	0,12
0,75	0,33	0,21	0,19	0,12
0,8	0,33	0,21	0,18	0,11
0,85	0,29	0,21	0,11	0,12
0,9	0,29	0,21	0,12	0,12
0,95	0,26	0,21	0,11	0,08
1	0,29	0,21	0,11	0,08

## C.5 Infactibilidad Acumulada

La infactibilidad Acumulada es el resultado en horas calculado como la suma de las magnitudes de todas las restricciones infactibles.

TABLA C.16. Infactibilidad Acumulada en Horas para Distribución Uniforme

$\Gamma$	0,1 Hrs.	0,2 Hrs.	0,25 Hrs.	0,3 Hrs.	0,4 Hrs.
0	2,02187	3,81275	5,26508	5,92692	7,95379
0,1	1,74411	3,20497	4,48971	5,01249	6,68316
0,2	1,47411	2,62451	3,74365	4,11733	5,49746
0,3	1,21155	2,09729	3,0572	3,27917	4,40272
0,4	0,951554	1,64555	2,4072	2,48088	3,35771
0,5	0,718883	1,23359	1,76287	1,83663	2,49878
0,6	0,520356	0,888191	1,17013	1,30986	1,77878
0,7	0,343171	0,57144	0,766889	0,80945	1,08156
0,8	0,191353	0,285149	0,413808	0,422233	0,544991
0,9	0,0643789	0,104053	0,128386	0,139756	0,18787
1	0	0	0	0	0

TABLA C.17. Infactibilidad Acumulada (Hrs.) para Distribución Normal al 95% de Cobertura

$\Gamma$	0,1 Hrs.	0,2 Hrs.	0,25 Hrs.	0,3 Hrs.	0,4 Hrs.
0	1,56393	3,13974	3,83313	4,74756	6,15979
0,1	1,21961	2,5247	3,0484	3,649	4,97609
0,2	0,921707	2,0379	2,33151	2,75903	3,97138
0,3	0,709103	1,6137	1,73133	2,10084	3,03586
0,4	0,523193	1,24483	1,27858	1,53458	2,31034
0,5	0,366799	0,904831	0,929708	1,03365	1,65988
0,6	0,233881	0,615395	0,630284	0,661929	1,11679
0,7	0,135224	0,355385	0,358339	0,43076	0,677313
0,8	0,0687737	0,145416	0,170806	0,242525	0,397313
0,9	0,0237155	0,0492278	0,0708065	0,0831687	0,136547
1	0	0	0	0	0

TABLA C.18. Infactibilidad Acumulada en Horas para Proceso 6-Sigma

$\Gamma$	0,1 Hrs.	0,2 Hrs.	0,25 Hrs.	0,3 Hrs.	0,4 Hrs.
0	0,595629	1,18314	1,38144	1,93954	2,24963
0,1	0,346419	0,556594	0,709596	0,95105	1,13628
0,2	0,189357	0,283259	0,322769	0,463492	0,507756
0,3	0,0800195	0,126578	0,180818	0,221092	0,234171
0,4	0,0337471	0,0541343	0,0810448	0,11146	0,132727
0,5	0,0237471	0,0326528	0,038874	0,0514758	0,0927269
0,6	0,0137471	0,0126528	0,013874	0,0214758	0,0527269
0,7	0,00374709	0	0	0	0,0127269
0,8	0	0	0	0	0
0,9	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0

## C.6 Infactibilidad Acumulada Porcentual

Los siguientes resultados no se muestran como porcentajes sino como valores reales.

TABLA C.19. Infactibilidad Acumulada Porcentual para Distribución Uniforme

$\Gamma$	0,1 Hrs.	0,2 Hrs.	0,25 Hrs.	0,3 Hrs.	0,4 Hrs.
0	0,0176274	0,0332411	0,045903	0,0516732	0,0693443
0,1	0,0152058	0,0279422	0,0391431	0,0437008	0,0582664
0,2	0,0128519	0,0228816	0,0326386	0,0358965	0,047929
0,3	0,0105628	0,018285	0,0266539	0,0285891	0,0383847
0,4	0,00829602	0,0143466	0,0209869	0,0216293	0,0292739
0,5	0,0062675	0,0107549	0,0153694	0,0160124	0,0217854
0,6	0,00453667	0,0077436	0,0102017	0,0114199	0,0155081
0,7	0,0029919	0,00498204	0,00668604	0,00705711	0,00942943
0,8	0,00166829	0,00248605	0,00360774	0,0036812	0,00475145
0,9	0,000561281	0,000907173	0,00111932	0,00121845	0,00163793
1	0	0	0	0	0

TABLA C.20. Infactibilidad Acumulada Porcentual para Distribución Normal al 95% de Cobertura

$\Gamma$	0,1 Hrs.	0,2 Hrs.	0,25 Hrs.	0,3 Hrs.	0,4 Hrs.
0	0,013635	0,0273735	0,0334188	0,0413911	0,0537035
0,1	0,010633	0,0220113	0,0265771	0,0318134	0,0433836
0,2	0,00803581	0,0177672	0,0203271	0,0240543	0,0346241
0,3	0,00618224	0,0140689	0,0150944	0,0183159	0,0264678
0,4	0,0045614	0,0108529	0,0111472	0,0133791	0,0201425
0,5	0,0031979	0,00788867	0,00810556	0,00901181	0,0144715
0,6	0,00203907	0,00536526	0,00549507	0,00577095	0,00973665
0,7	0,00117894	0,00309839	0,00312414	0,00375554	0,00590509
0,8	0,000599596	0,0012678	0,00148916	0,00211443	0,00346394
0,9	0,000206761	0,000429188	0,000617319	0,000725097	0,00119047
1	0	0	0	0	0

TABLA C.21. Infactibilidad Acumulada Porcentual para Proceso 6-Sigma

$\Gamma$	0,1 Hrs.	0,2 Hrs.	0,25 Hrs.	0,3 Hrs.	0,4 Hrs.
0	0,00519293	0,0103151	0,012044	0,0169097	0,0196131
0,1	0,00302022	0,00485261	0,00618654	0,00829163	0,00990657
0,2	0,00165089	0,00246956	0,00281402	0,00404091	0,00442682
0,3	0,000697642	0,00110356	0,00157645	0,00192756	0,0020416
0,4	0,000294221	0,000471964	0,00070658	0,000971755	0,00115717
0,5	0,000207037	0,00028468	0,000338919	0,000448786	0,00080843
0,6	0,000119853	0,000110312	0,000120959	0,000187234	0,000459694
0,7	3,26686E-05	0	0	0	0,000110958
0,8	0	0	0	0	0
0,9	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0