PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA

MODELO MICROSCÓPICO DE TRÁFICO EN DOS DIMENSIONES BASADO EN FUERZAS SOCIALES

RAFAEL DELPIANO COSTABAL

Tesis presentada a la Dirección de Investigación y Postgrado
como parte de los requisitos para optar al grado de
Doctor en Ciencias de la Ingeniería

Profesores Supervisores:
JUAN ENRIQUE COEYMANS AVARIA
JUAN CARLOS HERRERA MALDONADO

Santiago de Chile, Enero 2015

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA

MODELO MICROSCÓPICO DE TRÁFICO EN DOS DIMENSIONES BASADO EN FUERZAS SOCIALES

RAFAEL DELPIANO COSTABAL

Miembros del Comité:
JUAN ENRIQUE COEYMANS AVARIA
JUAN CARLOS HERRERA MALDONADO
JUAN CARLOS MUÑOZ ABOGABIR
MARCELO ARENAS SAAVEDRA
RODRIGO FERNÁNDEZ AGUILERA
JORGE ANDRÉS LAVAL ALLENDE
JORGE VÁSQUEZ PINILLOS

Tesis presentada a la Dirección de Investigación y Postgrado
como parte de los requisitos para optar al grado de
Doctor en Ciencias de la Ingeniería

Santiago de Chile, Enero 2015

Iosepho Aloisio patri meo

(R.I.P.)

uxorique meae Pillae.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, a Conicyt, por el apoyo económico durante cuatro años. A la PUC por la formación entregada. A Fulbright, Georgia Tech y al profesor Jorge Laval por la oportunidad de investigar en EE.UU. y complementar mi formación.

A todos los alumnos y profesores del Departamento de Ingeniería de Transporte y Logística de la Escuela de Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica de Chile. En especial, a aquellos que contribuyeron con sus puntos de vista, ideas y amistad durante el camino recorrido.

A mis compañeros de oficina: César Henao, Jorge Leottau, Felipe González, Lake Sagaris. *And also my office mates at Georgia Tech, Cho* Hyun-*Woong, Bhargava* Rama *Chilukuri and Zhou Yi* ("Joy").

A las secretarias, Cyndi, Kathy, Lore, Debbie y Danisa por su paciencia y apoyo. A la Gianina, la Ceci y a Juve por su inestimable labor.

A Alfredo Cox, por animarme a emprender este desafío. *Et una cum eo omnibus laicis ac presbiteris qui ad Deum diligiendum atque ad sanctitatem curandam his annis mihi exhortaverunt.*

A Juanca Herrera, por su constante vela por contribuir a mi formación académica, y al prof. Juan Enrique Coeymans, *advisor* y mentor.

Deo, ex quo omnia bona veniunt, Matrique eius Sancta María Semper Virgine per quem ad nos et venuit Bonum Summum, quæ pro nobis orat Filio suo.

Santiago de Chile, 8 de diciembre de 2014.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA

MODELO MICROSCÓPICO DE TRÁFICO EN DOS DIMENSIONES BASADO EN FUERZAS SOCIALES

Tesis enviada a la Dirección de Investigación y Postgrado en cumplimiento parcial de los requisitos para el grado de Doctor en Ciencias de la Ingeniería.

RAFAEL DELPIANO COSTABAL

RESUMEN

Los modelos de tráfico fueron introducidos en la década de 1950. En sesenta años su fidelidad para reproducir la realidad ha ido en constante aumento. Sin embargo, todavía les queda un camino importante por recorrer.

Entre los modelos de tráfico se distingue a los microscópicos. En estos, se lleva cuenta de las variables cinemáticas de cada vehículo individualmente (en contraposición a tratar el flujo como un todo).

Existen fenómenos de tráfico documentados pero insuficientemente comprendidos. Algunos de ellos han sido modelados con éxito mediante reglas *ad hoc* (i.e., concebidas explícitamente para producir de manera directa el efecto buscado). Está pendiente, por tanto, un modelo con reglas que los produzcan indirectamente. Entre dichos fenómenos destacan la *caída de capacidad* y la fricción lateral.

El primero se refiere a la concurrencia de dos síntomas en un cuello de botella físico: por un lado, el menor flujo no se produce en el lugar del cuello de botella

sino aguas abajo; por otro, luego de unos minutos la capacidad (cantidad máxima de vehículos por unidad de tiempo) del sistema cae de manera perceptible.

El segundo dice relación con la velocidad de una pista que se ve disminuida por factores externos: ya sean vehículos más lentos u objetos físicos en la pista adyacente.

El objetivo de esta tesis es aportar al cumplimiento de esas tareas pendientes, así como contribuir a la explicación de los fenómenos mencionados mediante su reproducción indirecta. De ese modo, se arrojará una luz que contribuya a entender su causa y génesis.

Se propone un modelo microscópico de tráfico en dos dimensiones. El modelo propuesto contribuye significativamente a responder los problemas planteados. Su formulación sigue el paradigma de fuerzas sociales o generalizadas. Incluye y demuestra la posición lateral y el ancho de los vehículos como factores incidentes en el tráfico.

Todo lo anterior se busca lograr de manera simple y con asiento en datos empíricos existentes. Sólo se estudiará tráfico ininterrumpido. Se privilegiará la simplicidad del modelo: la fidelidad a la realidad a nivel de detalle quedará para trabajo futuro.

Palabras Claves: modelos de tráfico, fricción lateral, fenómeno de relajación, caída de capacidad, fuerzas sociales, modelos de tráfico en dos dimensiones.

Miembros del Comité:
JUAN ENRIQUE COEYMANS AVARIA
JUAN CARLOS HERRERA MALDONADO
JUAN CARLOS MUÑOZ ABOGABIR
MARCELO ARENAS SAAVEDRA
RODRIGO FERNÁNDEZ AGUILERA
JORGE ANDRÉS LAVAL ALLENDE
JORGE VÁSQUEZ PINILLOS
Santiago, enero de 2015

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA

TWO-DIMENSIONAL, SOCIAL-FORCE BASED MICROSCOPIC TRAFFIC MODEL

Thesis submitted to the Office of Research and Graduate Studies in partial fulfillment of the requirements for the Degree of Doctor in Engineering Sciences by:

RAFAEL DELPIANO

ABSTRACT

Traffic models were introduced during the 1950s. In sixty years, they have experienced a constant growth in their fidelity to replicate actual traffic. However, they still have a long way to go.

There is a distinction between macroscopic, mesoscopic and microscopic traffic models. The later keep account of every vehicle's kinematic variables individually. In the rest, traffic flow is treated as a whole, in a more aggregate level.

There are still some pending tasks to traffic modeling. This thesis aims to be a contribution towards the fulfillment of some of those tasks.

Current models force engineers to make a choice: On the one hand, there are simple models that allow for detailed analytical treatment. On the other hand, there are more realistic models that can only be solved numerically.

There are some well-documented traffic phenomena that are yet to be fully understood. Some of them have been successfully modeled through *ad-hoc* rules (i.e., rules introduced with the aim of directly reproducing the pursued effect). A model

causing them indirectly is still pending. Such a model would shed light over the cause and genesis of these phenomena, which include *capacity drop* and lateral friction.

The former refers to the simultaneous occurrence of two symptoms on a physical bottleneck: On the one hand, the lowest flow doesn't take place at the physical bottleneck, but downstream. On the other hand, after a few minutes, the capacity (i.e., the maximum number of vehicles per time unit that the segment can serve) of the system drops significantly.

The later refers to the speed of a lane being reduced by external factors, such as slower vehicles or fixed objects on adjacent lanes.

This thesis proposes a two-dimensional microscopic traffic model. It significantly contributes to tackle the above mentioned tasks. Its formulation follows the *social* or *generalized* forces paradigm. It includes lateral position and width and shows them as determining factors in these phenomena and in traffic in general.

Keywords: traffic models, lateral friction, relaxation phenomenon, capacity drop, social forces, two-dimensional traffic models.

Members of the Doctoral Thesis Comitee:
JUAN ENRIQUE COEYMANS AVARIA
JUAN CARLOS HERRERA MALDONADO
JUAN CARLOS MUÑOZ ABOGABIR
MARCELO ARENAS SAAVEDRA
RODRIGO FERNÁNDEZ AGUILERA
JORGE ANDRÉS LAVAL ALLENDE
JORGE VÁSQUEZ PINILLOS
Santiago, January, 2015

PONTIFICIA UNIVERSITAS CATHOLICA CHILENSIS
ESCUELA DE INGENIERÍA

DUABUS DIMENSIÓNIBUS, A SOCIÁLIBUS VIRTUTIBUS MOTUS MICROSCÓPICUM SIMULATIONIS FREQUENTIÆ VIÆ EXEMPLUM

Thesis ad Sedes Studiorum et *Postgraduum* partim necessitates adimplens gradus Machinationis Scientiarum Doctoris missa a:

RAPHAËL DELPIANO

PRÆMIO

Simulationis mathematicæ exempla frequentiæ viarum inventi sunt in decennio MCML. Sexaginta tamen annis fidelitas eorum constanter crevit. Grandis autem restat eis via.

Frequentiæ viarum exempla secundum pertractationem in tres partiuntur, macroscopici, mesoscopici, ac microscopici. Microscopici autem de singulis autocinetibus eorumque motionis (velocitas atque positio) tractant. In alteriis vero frequentia viæ ut unitas tractatur.

Nonnulis sunt frequentiæ viarum exemplorum studiis agenda. Thesis ista partim illa adimplere spectat. Hodiernibus enim exemplis, viarum machinatores duæ habent optiones: sive exempla simplissima, analitice tractabilia, sive exempla complexiora exactioraque nec tamen analitice solubilia.

Aliquæ tamen sunt res vel phænomena in scientifica literatura nota, parum autem intellecta. Inter quæ et aliquæ simulati sunt cum *ad hoc* regulis (i.e., speciatim ad effectum simulandum appositæ). Abest, igitur, exemplum ipsissimos oblique simulans.

Sic tamen perfectius intellegendi sunt et ea et eorum causæ. Inter quas res præstant *capacitatis casus* ac *frictio lateralis*.

Capacitatis casus de duobus signis simul in cervices ampullæ sive viæ contractionibus advenientes tractat: imprimis, locus minimæ capacitatis viæ secundo flumine contractionis situs est; et rursus post brevis spatium temporis capacitas (i.e., maxima quantitas autocinetorum per unitate temporis) viæ manifesto cadit.

Lateralis frictio de velocitate curriculi a vicinis remissa, sive ab autocinetis in curriculis proximis, sive a rebus vel signis fixis iuxta viam, tractat.

Thesis ista duabus dimensionibus microscopicum simulationis exemplum proponit. Propositum autem exemplum significanter intellectionem dictarum quæstionum accrescit. Cuius descriptio specimen socialum virtutum sequitur. Et latitudo et locus transversus comprehensi sunt in exemplo. Probatum est autem ipsi frequentiam viæ attingere.

IOANNES HENRICUS COEYMANS
IOANNES CAROLUS HERRERA
IOANNES CAROLUS MUÑOZ
MARCELLUS ARENAS
RODERICUS FERNÁNDEZ
GEORGIUS ANDREAS LAVAL
GEORGIUS VÁSQUEZ
Sanctiacobi, mense Ianuarii MMXV

1. INTRODUCCIÓN

La modelación es una herramienta poderosa. Permite aproximar soluciones a problemas complejos mediante la solución de problemas más simples. Los modelos permiten distintos tipos de análisis, uno de los cuales es la simulación. Una importante limitación práctica a la simulación en general, es la capacidad computacional. Afortunadamente, su disponibilidad ha crecido exponencialmente en el tiempo. Junto con esa mayor capacidad, crece también la posibilidad de simular fenómenos cada día más complejos.

Los modelos de tráfico no son la excepción, si se emplean adecuadamente. Un proyecto de infraestructura muy oneroso puede ser evaluado a un costo insignificante. Así, se abre espacio para evaluar muchas alternativas de diseño y escoger la mejor.

En los modelos de tráfico se representa vehículos y su comportamiento en el flujo vehicular. Se distingue entre modelos micro, meso y macroscópicos. En los modelos macroscópicos se trata el flujo vehicular como una unidad. En los microscópicos se mantiene registro de cada vehículo (y sus variables de movimiento) en forma independiente. En los mesoscópicos se disitngue tipos o grupos de vehículos, flujo por pistas u otros. Vale decir, los últimos toman elementos de los dos anteriores.

Los modelos microscópicos de tráfico (MmT) se originaron en la década de 1950. Sin embargo, no hubo computadores capaces de usarlos en la práctica sino hasta fines de los '80. Desde entonces, su mayor foco ha estado en el movimiento longitudinal de los vehículos (vale decir, en la dirección en que aquellos avanzan). Incluso los cambios de pista han sido modelados como "saltos"discretos de una pista a otra. Sólo en la última década la dimensión lateral ha comenzado a cobrar relevancia. Gunay (2007) fue el primero en introducir un MmT en dos dimensiones (MmT2D).

Todo MmT incluye al menos un submodelo de seguimiento vehicular (MSV). El MSV determina las decisiones de aceleración de un vehículo en función de sus circunstancias. Así, al aproximarse a un vehículo antecedente, tenderá a moderar

su velocidad. Análogamente, al no tenerlo, acelerará libremente hasta una velocidad *deseada*.

Algunos modelos son conocidos como "basados en pistas". Estos permiten distinguir dos o más carriles en una vía. Suelen incluir un submodelo de *cambio de pistas* (MCP). Éste último se hace cargo de las condiciones que hacen deseable cambiar de carril. Generalmente, un modelo de cambio de pistas implica un modelo de *aceptación de gap* (o *aceptación de intervalos entre vehículos*). Éste determina las condiciones que hacen factible que esa decisión se lleve a cabo.

Se han propuesto diversos enfoques para abordar el problema de la modelación vehicular (para más detalles v. capítulo 2). Uno de esos enfoques es el de fuerzas 'sociales' o 'generalizadas'. Ese enfoque es el seguido por el modelo propuesto en este trabajo. En él, las tendencias de los conductores son modeladas como fuerzas físicas. Los vehículos, consecuentemente, son modelados como cuerpos afectos a esas fuerzas. Se les llama fuerzas generalizadas por no representar algo propiamente físico; se les llama *sociales* porque representan tendencias humanas.

Por otra parte, existen fenómenos de tráfico real que escapan a los modelos tradicionales. Escogimos tres de ellos por su relevancia y aparente relación con la posición lateral. Estos fenómenos son: I) la fricción lateral , II) la 'caída de capacidad' en cuellos de botella, y III) la influencia de la concentración de vehículos pesados en el tráfico.

De lo anterior se desprende el principal problema abordado por esta tesis: el limitado realismo de los modelos de tráfico. Dicha limitación impide probar nuevas hipótesis sobre causas de fenómenos conocidos de tráfico. Entre los fenómenos —ya mencionados— destaca el de caída de capacidad. Por 15 años ha sido el gran problema del área de teoría de tráfico. A la fecha, no ha sido explicado de manera satisfactoria.

En la siguiente sección se detallan los objetivos del presente trabajo a la luz de lo expuesto.

1.1. Objetivos

Nuestra hipótesis principal es que:

> "La inclusión de nuevos factores (la dimensión lateral de vehículos y pistas, y la generación de gap[1]) en la modelación permitirá reproducir mejor ciertos fenómenos de tráfico (I) la fricción lateral, II) la caída de capacidad, y III) la influencia de la concentración de vehículos pesados en el tráfico)".

El objetivo principal de este trabajo es, por lo tanto:

> Crear un MmT2D basado en pistas que incorpore estos factores (la dimensión lateral de vehículos y pistas, y la generación de gap), reproduciendo los fenómenos mencionados (I) la fricción lateral, II) la caída de capacidad, y III) la influencia de la concentración de vehículos pesados en el tráfico) como consecuencia indirecta de su formulación.

Agregar una regla *ad-hoc* para reproducir *directamente* un fenómeno no permitiría dar luces sobre su causa. Contribuir a esa explicación es, por tanto, uno de nuestros objetivos secundarios.

Son también objetivos específicos de esta investigación:

E1) Formular un MmT unidimensional y estudiarlo según los cánones establecidos, incluyendo: I) estudio de su comportamiento macroscópico, II) análisis lineal

[1] Podría mencionarse también la visibilidad. Ésta será brevemente considerada al hablar de influencia de vehículos pesados.

de estabilidad, III) búsqueda de soluciones exactas IV) obtención del diagrama fundamental.

E2) Que el MmT2D sea una generalización del modelo unidimensional.

E3) Verificar el concepto de generación de gap: que los vehículos modelados generen activamente un gap en lugar de esperarlo y aceptarlo.

E4) Incluir y analizar la visibilidad y el ancho (de pistas y vehículos) como factores incidentes en el comportamiento de los conductores.

E5) Mantener el costo computacional lineal ($O(n)$) en el número de vehículos y tiempo simulados.

E6) Minimizar el costo de calibración: puede haber más parámetros (que en los modelos tradicionales), siempre que conlleve un incremento proporcionado de realismo al modelo.

E7) Identificar y documentar un nuevo fenómeno relativo a la posición lateral de los vehículos.

E8) Cuantificar dicho fenómeno basándose en trayectorias reales.

E9) Reproducir exitosamente el fenómeno identificado con el modelo propuesto.

1.2. Alcances

Este trabajo no persigue llegar a la causa última de los fenómenos mencionados. Sólo busca contribuir a acercarse a ella. Tampoco agota los conceptos introducidos. Por ello, no pretende dar por cerrada la formulación de posibles modelos que los exploren.

En este trabajo se busca como fin la simplicidad del modelo, a costa de una posible precisión mayor; lo anterior no obstante el objetivo de mejorar la capacidad explicativa de los modelos existentes. Es posible que alguno de los fenómenos menos importantes se reproduzca sólo cualitativamente.

Para la calibración y validación se utilizarán las bases de datos disponibles. Esta tesis no contempla en principio la recopilación de nuevos datos. Así las validaciones se

harán sobre resultados y mediciones de otros trabajos. Por ejemplo, algunas validaciones se basarán en las trayectorias del programa NGSIM (datos empíricos publicados por la Federal Highway Administration de EE. UU.).

En este proyecto sólo se estudiará flujo ininterrumpido (autopistas). No nos detendremos en el de redes viales con intersecciones (semaforizadas o prioritarias).

Esta tesis no entrará a criticar los modelos de cambio de pistas. Sólo se discutirá los conceptos de aceptación y generación de gap. No se profundizará en cambios de pista forzados por la elección de ruta.

1.3. Contenido

El resto de este documento está organizado de la siguiente manera:

El capítulo 2 resume el estado del arte en las áreas de interés de esta tesis. Se incluye en él un breve recorrido histórico, con acento en los modelos lineales. También se incluye a los modelos LWR y de fuerzas sociales, de particular interés para esta tesis. Se complementa con la mención de algunos fenómenos de reciente caracterización. Finalmente, se completa con el estado del arte en materia de modelos bidimensionales.

El capítulo 3 presenta el modelo en detalle. Se enuncian sus principales componentes, tanto en el eje lateral como en el longitudinal.

El capítulo 4 analiza las principales características del modelo. Concretamente, perfila el comportamiento del modelo 1D desde la perspectiva matemática. Señala el número de parámetros del modelo y sus variantes alternativas. Se obtienen trayectorias exactas y diagramas fundamentales para situaciones seleccionadas. Asimismo, se efectúa un análisis de la estabilidad lineal del mismo. Se establecen rangos para los parámetros del modelo 2D y se analiza su escalabilidad (entendida ésta computacionalmente como la factibilidad de simular muchos vehículos a la vez). Concluye el capítulo con un comentario sobre la *generación* de gap (activa, en contraposición a la mera aceptación pasiva).

En los capítulos 5 y 6 se detallan los experimentos realizados. El primero ahonda en la identificación y reproducción de un nuevo fenómeno. Este fenómeno se relaciona con la posición lateral y ha sido denominado *anomalía colateral*. El segundo, se aboca a la reproducción de fenómenos documentados en la literatura. Entre ellos, hay uno que se relaciona con el eje longitudinal y tres laterales (o bidimensionales).

Finalmente, el capítulo 7 detalla las conclusiones y perspectivas de este trabajo.

2. ESTADO DEL ARTE

El presente capítulo se puede dividir en dos partes. La primera de ellas se aboca a los modelos de seguimiento vehicular (componente principal de los modelos microscópicos de tráfico). La segunda, a algunos fenómenos de tráfico documentados en la literatura. Estos últimos revisten interés por no haber sido recogidos completamente por los modelos actuales.

2.1. Modelos de Seguimiento Vehicular (MSV)

Brackstone y McDonald (1999) clasifican los modelos a la fecha de su trabajo en cinco categorías: I) los MSV no lineales basados en el de Gazis et al. (1961), II) los modelos de *distancia de seguridad* o *prevención de colisión*, III) los MSV lineales o de Helly (1959), IV) los modelos *psico-físicos*, V) los modelos de lógica difusa. A algunas de ellas se hará referencia a modo de recorrido histórico (sección 2.1.1). Mención aparte requieren los modelos lineales, por su importancia central en esta tesis (sección 2.1.2).

A estas categorías, habría que agregar algunos hallazgos posteriores (y contemporáneos): En primer lugar, cobran importancia los modelos de fuerzas sociales (sección 2.1.3). Acto seguido, también se incluye una breve revisión sobre los modelos *bidimensionales* (sección 2.1.4).

2.1.1. Recorrido Histórico

Los primeros rudimentos de modelos de seguimiento vehicular se remontan a Pipes (1953). Sin embargo, su uso no se generalizó sino hasta más tarde. Sólo la disponibilidad de computadores suficientemente poderosos permitió aprovecharlos.

Dignos de mención son los modelos de Wiedemann (1974) y Gipps (1981, 1986). Estos, con pocas modificaciones, siguen vigentes hasta el día de hoy. Son respectivamente los principales ejemplos de modelos psico-físicos y de prevención de choque. En

los primeros, se plantea la aceleración como reacción a un estímulo (distancia o velocidad de aproximación). En los segundos, se define una distancia (*ideal*) de seguimiento a la que los vehículos se deben adaptar (mediante su aceleración).

El aumento exponencial de la capacidad computacional ha acompañado el desarrollo de los modelos. En los años 90 este desarrollo siguió dos líneas principales: la variabilidad de los conductores simulados y el aumento de la complejidad (y el número de parámetros) de los modelos. Para una completa revisión del desarrollo de los MmT hasta fines del s. XX, véase Brackstone y McDonald (1999).

Otro modelo digno de mención es el *Intelligent Driver Model* (abreviado *IDM*, Treiber et al., 2000). En él, la aceleración se define como función de dos cocientes: 1) entre la velocidad y una función de velocidad óptima, y 2) entre el espaciamiento y un espaciamiento óptimo. Cada uno de estos óptimos, es, a su vez, función de otras variables cinemáticas.

Una evolución importante de los MmT en la última década fue la aparición de los MmT2D. Uno de los primeros MmT2D es el de Gunay (2007). Para comprenderlos en mayor detalle, v. sección 2.1.4.

Modelo LWR y Derivados

Lighthill y Whitham (1955), e independientemente Richards (1956) propusieron el "modelo cinemático de ondas"(también conocido como modelo "LWR"por las iniciales de sus creadores). No es un modelo necesariamente microscópico, pero sí lo es uno de sus derivados.

En el modelo LWR, se definen estados de tráfico en que el flujo es función de la concentración: $Q = Q(K)$. Esta función determina el diagrama fundamental del tráfico modelado. La transición de un estado de tráfico a otro se produce mediante "ondas"*de choque*. Estas ondas se propagan a una *velocidad de onda*, w:

$$w_{1,2} = \frac{Q(K_2) - Q(K_1)}{K_2 - K_1}$$

Newell (1993, 2002) propuso un modelo LWR con diagrama fundamental *triangular*. Éste se define por tres parámetros, según muestra la figura 2.1: velocidad de flujo libre, V, velocidad de onda, w, y flujo máximo, Q_{max}.

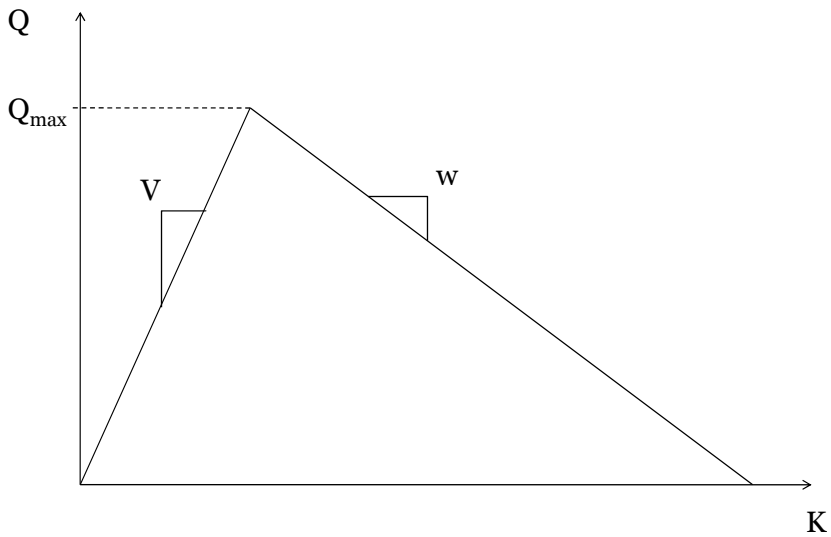

FIGURA 2.1. Diagrama fundamental de Newell. Fuente: Elaboración Propia

En su simplicidad, este modelo ofrece gran versatilidad. Permite descender a nivel microscópico, obteniendo trayectorias exactas. Su gran limitación está en la aceleración y desaceleración infinita de los vehículos. Esto acota su realismo y aplicabilidad.

2.1.2. Modelos Lineales y Modelo de Tampère

Helly (1959) propuso una familia de modelos definidos por una ecuación diferencial lineal:

$$a_n(t) = C_1 \Delta v_n(t-T) + C_2(\Delta x_n(t-T) - D_n(t)), \tag{2.1}$$
$$D_n(t) = \alpha + \beta v_n(t-T) + \gamma a_n(t-T),$$

donde:

- $a_n(t)$ es la aceleración del vehículo n en función del tiempo,
- T es un tiempo de reacción, también parámetro del modelo,
- $\Delta x_n(t)$ representa la distancia del vehículo respecto a su líder; $\Delta v_n(t)$, la diferencia de velocidad entre ambos,
- D_n denota el espaciamiento deseado por un conductor respecto a su líder,
- C_1, C_2, α, β y γ son parámetros del modelo.
- $v_n(t)$ es la velocidad del vehículo n en un instante t, y

En rigor, se trata de una familia de modelos de seguimiento vehicular. No trata adecuadamente el flujo libre, y sólo resulta de interés para el caso de congestión.

45 años más tarde, Tampère (2004) propuso agregar una cota superior a la aceleración. Definió un MmT de acuerdo a la ecuación[1]:

$$a_n(v_n, \Delta v_n, \Delta x_n) = \text{mín}\left\{\frac{w_n - v_n}{\tau_w}, \frac{\Delta x_n - D_n(v_n)}{\tau_s} + \frac{\Delta v_n}{\tau_v}\right\}, \tag{2.2}$$

$$D_n(v_n) = s_0^d + s_1^d v_n + s_2^d v_n^2,$$

donde:

- s_0^d, s_1^d, s_2^d, w_n, τ_w, τ_s y τ_v son parámetros,
- s_0^d representa el espaciamiento de taco,
- s_1^d representa un factor por el que el espaciamiento crece en proporción a la velocidad.,
- s_2^d hace otro tanto para la aceleración,
- w_n representa la velocidad máxima deseada por el vehículo n,
- τ_w, es un tiempo que describe la convergencia hacia la velocidad máxima,
- τ_s y τ_v la describen para el espaciamiento y la velocidad, respectivamente.

[1]Por motivos legibilidad y espacio, hemos omitido los argumentos de tiempo (t) y $(t - T)$.

Si $s_2^d = 0$, el lado derecho del mínimo equivale a un modelo tipo Helly. Los parámetros de uno y en función del otro se derivan como sigue: $C_1 \equiv \frac{1}{\tau_v}$, $C_2 \equiv \frac{1}{\tau_s}$, $\alpha \equiv s_0^d$, $\beta \equiv s_1^d$ y $\gamma = 0$.

2.1.3. Modelos de Fuerzas Sociales

Existen muchos enfoques para comenzar a plantear un MmT. Uno de ellos, de gran relevancia para este trabajo, es el de fuerzas *sociales* (también conocidas como fuerzas *generalizadas*, Helbing y Molnár, 1995). En él, las tendencias de los conductores son modeladas como fuerzas que afectan a los vehículos. Se les llama fuerzas generalizadas por no tratarse de fuerzas físicas; se les llama fuerzas sociales porque reflejan comportamiento más que verdaderas fuerzas.

La primera utilización de fuerzas sociales en modelación fue para peatones (Helbing y Molnár, 1995). Esta línea de investigación ha visto gran desarrollo hasta nuestros días. Para peatones, el enfoque de fuerzas sociales goza de gran prestigio.

El mismo propuso, poco más tarde, el uso de fuerzas sociales para modelar vehículos (Helbing y Tilch, 1998). Del modelo original se ha derivado un número de modelos unidimensionales (cf. Li y Sun, 2012, para una revisión exhaustiva). Recientemente se ha propuesto un modelo de fuerzas en 2D (Fellendorf et al., 2012; Schönauer et al., 2012). Este último, sin embargo, es complejo y está pensado para espacios acotados y velocidades bajas.

El modelo presentado en esta tesis sigue el paradigma de fuerzas sociales.

2.1.4. Modelos 2D

El primer MmT2D fue el propuesto por Gunay (2007). En él, se permite el adelantamiento dentro de una misma pista. La velocidad de dicho adelantamiento está restringida por la separación lateral de los vehículos.

Durante la última década, el interés por los MmT2D ha sido creciente. Dignos de mención son los trabajos de Jin et al. (2010, 2011) y Song et al. (2011). Otro enfoque

ofrece Maurya (2011), que se ocupa del ángulo del sistema de dirección del vehículo. Cabe aquí mencionar nuevamente el modelo de Fellendorf et al. (2012), basado en fuerzas sociales.

El gran tema pendiente de estos modelos es su calidad de *non-lane-based* (no basados en pistas). Ésta reduce su aplicabilidad práctica drásticamente. Sólo son viables en situaciones como las siguientes: I) vias de una pista, II) lugares con escasa o nula disciplina de pistas, III) lugares con alta concentración de vehículos angostos (bicicletas, motos, carros manuales), IV) lugares con pobre o nula división de pistas que impida que sean respetadas.

2.2. Algunos Fenómenos Observados

Existen diversos fenómenos (en el estudio del tráfico) documentados en la literatura e inadecuadamente modelados a la fecha. Escogimos algunos de ellos por su significancia y por juzgarlos relacionados a la dimensión lateral. Estos son: I) la fricción lateral , II) la 'caída de capacidad' en cuellos de botella, III) el 'seguimiento vehicular escalonado' (*staggered car-following*) y IV) la influencia de la concentración de vehículos pesados en el tráfico. En las siguientes subsecciones, se procederá a detallarlos.

2.2.1. Fricción Lateral

La fricción lateral involucra la relación de un vehículo con objetos fuera del límite de su pista. Su ocurrencia fue documentada por Case et al. (1953) y ha sido estudiado por más de 60 años. Aun recientemente, sigue siendo objeto de atención.

El tráfico en una pista se ve afectada, en efecto, por su ancho (Case et al., 1953; Bartel et al., 1997; Chitturi y Benekohal, 2005), y por los objetos circundantes: tanto vehículos en pistas vecinas (May, 1959; Martin et al., 2002; Kwon y Varaiya, 2008) como señales y otros en la berma (Taragin, 1955).

A la fecha, sólo se modela imponiendo un máximo a la diferencia de velocidades entre pistas. Es lo que hace, por ejemplo, el microsimulador Aimsun, de alta participación de mercado (TSS, 2010).

2.2.2. Caída de Capacidad

La caída de capacidad dice relación con cuellos de botella fijos (p. ej. entradas de autopistas). Se llama capacidad al número de vehículos por unidad de tiempo que pueden pasar por un punto. Se ha verificado que el punto de menor capacidad (Cassidy y Bertini, 1999; Cassidy y Rudjanakanoknad, 2005) no coincide con el cuello de botella físico. En efecto, tiende a ubicarse decenas de metros aguas abajo de aquél. Una vez *activado* dicho cuello de botella, se produce un fenómeno adicional: que la capacidad total de la vía disminuye entre un 5 y un 20 % (las vías estudiadas siempre tienen 4 o más pistas).

Los MmT tradicionales resultan ineficaces para reproducir este fenómeno. El problema pareciera tener relación la modelación de los cambios de pista (CP). Los MmT suelen incluir un modelo de *aceptación de gap* (MAG) para decidir si un CP es viable. Requieren que haya un espacio *aceptable* en la pista vecina.

Sin embargo, la situación cambia en circunstancias de congestión como la de un cuello de botella: los vehículos reales se comportan distinto a lo que los modelos predicen. De hecho, Daamen et al. (2010) comprobaron que en estas situaciones se aceptan gaps mucho menores. Asimismo, Laval y Leclercq (2008) modelaron con éxito la caída de capacidad al permitir cambios de pista "conflictivos" (i.e. donde los vehículos modelados quedan superpuestos luego del cambio de pista, compartiendo una región longitudinal dentro de la misma pista). Algunos investigadores han criticado esta solución por permitir este aparente conflicto.

A modo de ejemplo, se sintetiza aquí lo observado por Cassidy y Rudjanakanoknad (2005). La figura 2.2 es un esquema del área estudiada. Lo más relevante de ella

(para efectos de este trabajo) es la rampa de entrada (punto x_1), y los dos puntos de aguas abajo (puntos x_2 y x_3). Sus resultados se resumen en la figura 2.3.

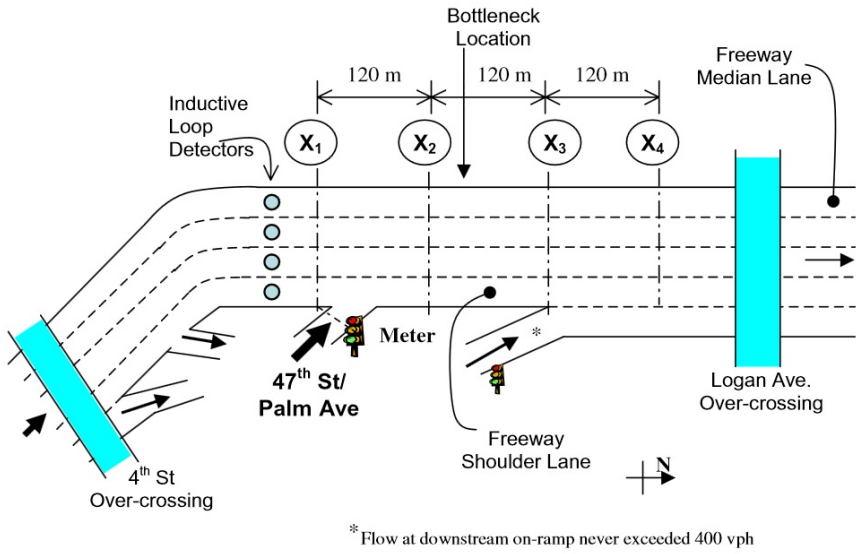

FIGURA 2.2. Fenómeno de Relajación, esquema de la autopista 805 en San Diego, California, EE.UU., donde fue medido. Fuente: Cassidy y Rudjanakanoknad (2005, figura 2)

Se muestran curvas acumuladas de conteos en cada punto y en coordenadas *oblicuas* (i.e., restando de aquellos una recta —o flujo constante— para resaltar los cambios de flujo). Las curvas han sido desplazadas para mejorar la visibilidad del fenómeno: de manera de hacer coincidir en el gráfico el paso de un mismo vehículo por los distintos puntos (cuando la vía opera a flujo libre). De este modo se aprecian mejor los cambios de densidad.

Se aprecian los dos efectos principales: de una parte, la caída de capacidad en t=6:23:30 (desde 10.250 a 9.240 vehículos por hora); de otra, la formación de una cola (es decir, un aumento de densidad) entre x_2 y x_3 en los minutos previos.

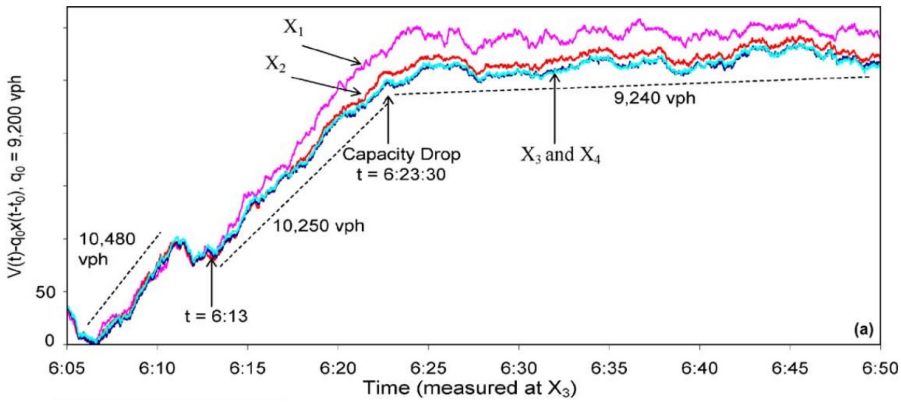

FIGURA 2.3. Fenómeno de Relajación, medido en la autopista 805 en San Diego, California, EE.UU. Fuente: Cassidy y Rudjanakanoknad (2005, figura 3a)

2.2.3. Seguimiento Vehicular Escalonado

El seguimiento vehicular escalonado (Gunay, 2007) se relaciona con la distancia de un vehículo a su antecesor. Se verifica que ésta es menor si existe un desplazamiento lateral entre aquellos. Fue documentado y reproducido por el mismo autor. Sin embargo, su modelo se denomina 'no basado en pistas' (non-lane based): No incorpora la existencia de pistas distintas en una vía. Se enfoca, más bien, en el tráfico en culturas sin un adecuado comportamiento de pista. Como el de dicho autor, los MmT en dos dimensiones (MmT2D) propuestos a la fecha evitan basarse en pistas.

2.2.4. Influencia de Vehículos Pesados

La capacidad de una vía (entendida como el flujo máximo de que es capaz, medido en vehículos por unidad de tiempo) depende de la composición del tráfico que la transita. Es un hecho que el número de vehículos por unidad de tiempo será mayor si sólo circulan autos. A mayor porcentaje de vehículos pesados, menor la capacidad en términos numéricos. Esto se debe a factores como su menor aceleración y velocidad, y el mayor espacio utilizado.

Para asumir esta realidad, una alternativa es medir el flujo en *autos equivalentes*. A fin de llegar a un valor constante para la capacidad, el flujo contabilizado se *pondera*.

Se clasifica los vehículos según su tipo y se multiplica por un factor para cada tipo. De esta forma, se internaliza la influencia de cada tipo de vehículo. Se define la capacidad equivalente o corregida de la vía como:

$$Q_{corregido} = \sum f_i Q_i, \tag{2.3}$$

donde Q_i es el flujo medido de vehículos de la clase i. El valor f_i se conoce como el *factor de equivalencia* de la clase i. Típicamente, f_{auto} se considera igual a 1.

Para el caso sencillo de dos clases de vehículos, autos y vehículos pesados (p. ej. buses):

$$Q_{corregido} = Q_{auto} + f_{bus} Q_{bus} \tag{2.4}$$

Bartel et al. (1997), sin embargo, determinaron que f_{auto} no era constante e igual a 1. En cambio, propusieron que este factor era función de otras variables de tráfico. Específicamente: I) el porcentaje de vehículos pesados, y II) el tipo de pista (izquierda, central o derecha)[2]. En concreto, definieron:

$$f_{auto}(pista, r) = 1 + \frac{\frac{0{,}216}{1+34e^{-20{,}609r}} - 0{,}0062}{1{,}676 + f_{pista} + 0{,}0062}, \tag{2.5}$$

donde:

$$r = \text{porcentaje de vehículos pesados}$$

$$f_{pista} = \begin{cases} 0{,}181 & \text{pista derecha} \\ -0{,}111 & \text{pista central} \\ 0{,}126 & \text{pista izquierda} \end{cases}$$

[2]Los autores también consideraron el período (punta mañana, fuera de punta o punta tarde) como variable de tráfico. En esta tesis, sin embargo, no será considerado y por simplicidad no nos detendremos en él.

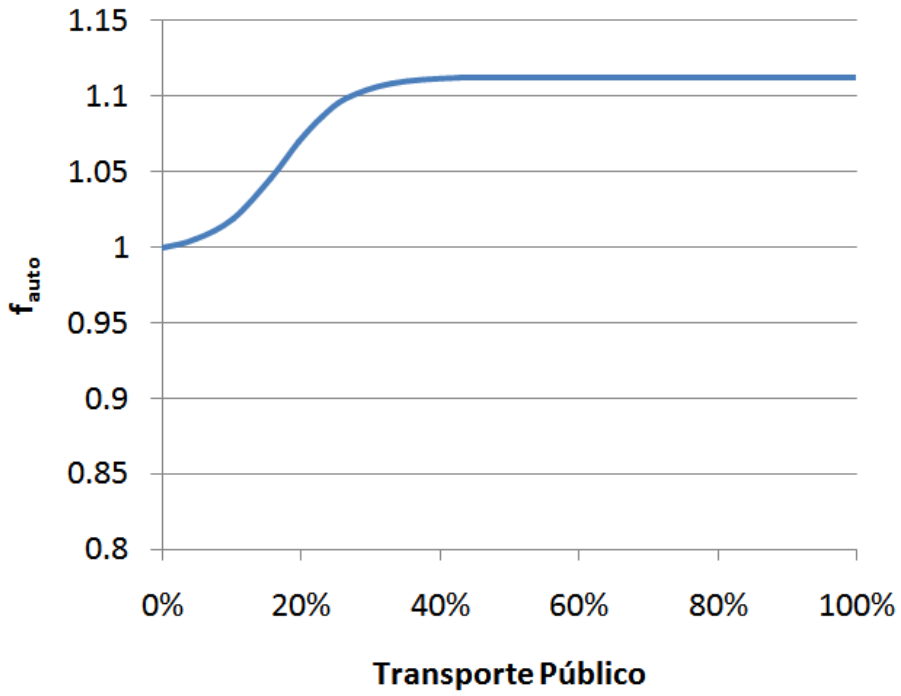

FIGURA 2.4. Factor de equivalencia del *auto directo medio* según Bartel et al. (1997). Fuente: Elaboración Propia, basado en sus fórmulas

La figura 2.4 grafica f_{auto} en función del porcentaje de vehículos pesados. Se aprecia claramente la forma de sigmoide propuesta por los autores.

De esto se sigue que el *headway* promedio (o característico, $\bar{h} = \frac{1}{Q}$) del flujo no sea función lineal de r.

Nada de esto, ni de los mecanismos que lo causan, ha sido incorporado a los modelos de tráfico.

En el siguiente capítulo, se procederá a detallar la formulación del modelo propuesto. Éste busca subsanar las limitaciones hasta aquí mencionadas.

3. FORMULACIÓN DEL MODELO

A continuación, se procederá a describir el modelo propuesto. En la sección 3.1 se describe la componente longitudinal del modelo. En la sección 3.2, por su parte, se generaliza el modelo a dos dimensiones. Finalmente, en la sección 3.3 se detalla el modelo de cambio de pistas correspondiente.

3.1. Componente Longitudinal

En el enfoque tradicional, los vehículos circulan perfectamente centrados en sus pistas. Es por ello que sólo se modela la dimensión longitudinal de su movimiento. En esta sección, se definirá el modelo *en una dimensión* (1D): la dimensión longitudinal.

Para esta formulación, se ha seguido la propuesta de Helbing y Tilch (1998). En ella, se define la variación de velocidad del vehículo i ($\dot{v}_i$) como la suma de dos fuerzas: de avance o aceleración (f_i^a), que lleva a los vehículos hacia su velocidad deseada; y de repulsión o interacción (f_i^r) entre los vehículos, que les evita chocar entre sí:

$$\dot{v}_i(t) = f_i^a(t) + f_i^r(t) \tag{3.1}$$

Nótese que, al no tratarse de fuerzas físicas, la masa pierde su significado. Por simplicidad, y sin pérdida de generalidad, se puede considerar la masa como unitaria.

3.1.1. Fuerza de Avance

La Fuerza de Avance se define, de la manera más simple posible, como:

$$f_i^a(t) = (V - v_i(t))c_1, \tag{3.2}$$

donde $v_i(t)$ es la velocidad actual del vehículo y V y c_1 son parámetros del modelo (V corresponde a la velocidad deseada o máxima). El segundo parámetro (c_1) se mide en unidades de [tiempo^{-1}]. Esta formulación coincide con la de otros modelos,

particularmente con la de Helbing y Tilch (1998). También es la que subyace en Laval y Daganzo (2006).

3.1.2. Fuerza de Repulsión

La fuerza de repulsión, por su parte, se define en función de las siguientes variables:

- $v_{i-1}(t)$ e $y_{i-1}(t)$, respectivamente la velocidad y la posición del vehículo antecedente (o líder);
- c_2 y c_3, parámetros en unidades de tiempo^{-1} y tiempo^{-2} respectivamente.
- $\bar{s}(v_i(t)) = s_r + \tau_r v_i(t)$, un umbral de distancia o espaciamiento de equilibrio teórico en ausencia de fuerza de aceleración. Aquí, τ_r y s_r son parámetros en unidades de tiempo y distancia respectivamente. El primero (τ_r) da cuenta de la influencia de la velocidad en dicho espaciamiento teórico. El segundo (s_r), es su valor a velocidad cero[1]. Nótese que aun en equilibrio el espaciamiento real puede diferir respecto a $\bar{s}$ (debido a la fuerza de avance).

En este contexto, la fuerza de repulsión, f_i^r, se define como:

$$f_i^r(t) = \{(v_{i-1}(t) - v_i(t))c_2 + [y_{i-1}(t) - y_i(t) - \bar{s}(v_i(t))]c_3\}^- , \tag{3.3}$$

donde $\{\,\cdot\,\}^-$ equivale a $\text{mín}\{\,\cdot\,, 0\}$. Es decir, el valor se hace cero si el líder está muy lejos o no se acerca suficientemente rápido. Si diera lugar a un valor positivo, ya no sería repulsión, sino atracción. Diremos que $f_i^r(t)$ está activa cuando cobra un valor distinto de cero (i. e., negativo).

3.1.3. Formulación Completa

En virtud de lo anterior, (3.1) se puede reescribir como:

[1]Se ha usado un subíndice para señalar que no se trata de τ y s_j en su sentido convencional (de tiempo de viaje de onda o *wave travel time*, y de espaciamiento de taco, respectivamente). Se ha escogido el subíndice r para recordar su relación con la fuerza de repulsión.

$$\boxed{\dot{v}_i = (V - v_i)c_1 + \{(v_{i-1} - v_i)c_2 + (y_{i-1} - y_i - \tau_r v_i - s_r)c_3\}^- \qquad (3.4)}$$

Nótese que 3.4 se podría reescribir, a la manera tradicional, como un mínimo. Sin embargo, esta reescritura oscurece la naturaleza de las fuerzas sociales que anima el modelo:

$$\begin{aligned}
\dot{v}_i &= (V - v_i)c_1 + \text{mín}\,\{0, (v_{i-1} - v_i)c_2 + (y_{i-1} - y_i - \tau_r v_i - s_r)c_3\} \\
&= \text{mín}\,\{(V - v_i)c_1, (V - v_i)c_1 + (v_{i-1} - v_i)c_2 + (y_{i-1} - y_i - \tau_r v_i - s_r)c_3\} \\
&= \text{mín}\,\{(V - v_i)c_1, Vc_1 - v_i c_1 + (v_{i-1} - v_i)c_2 + (y_{i-1} - y_i - \tau_r v_i - s_r)c_3\} \\
&= \text{mín}\left\{(V - v_i)c_1, c_3 V\frac{c_1}{c_3} - c_3 v_i \frac{c_1}{c_3} + (v_{i-1} - v_i)c_2 + (y_{i-1} - y_i - \tau_r v_i - s_r)c_3\right\} \\
&= \text{mín}\left\{(V - v_i)c_1, (v_{i-1} - v_i)c_2 + (y_{i-1} - y_i - \tau_r v_i - v_i\frac{c_1}{c_3} - s_r + V\frac{c_1}{c_3})c_3\right\},
\end{aligned}$$

si definimos $\tau_m := \tau_r + \frac{c_1}{c_3}$ y $s_m := s_r - V\frac{c_1}{c_3}$:

$$= \text{mín}\,\{(V - v_i)c_1, (v_{i-1} - v_i)c_2 + (y_{i-1} - y_i - \tau_m v_i - s_m)c_3\} \qquad (3.5)$$

Si se mira detenidamente, esta formulación se parece a la de Tampère (ecuación 2.2). De hecho, si en ésta se hace $T = 0$ y $s_2^d = 0$, resultan equivalentes teniendo en cuenta que: $V \equiv w$, $c_1 \equiv \frac{1}{\tau_w}$, $c_2 \equiv \frac{1}{\tau_v}$, $c_3 \equiv \frac{1}{\tau_s}$, $s_m \equiv s_0^d$ y $\tau_m \equiv s_1^d$.

Por lo mismo, mientras haya repulsión, los vehículos obedecen a un modelo tipo Helly.

3.2. Agregando la Componente Lateral

Para generalizar el modelo a dos dimensiones (2D), cabe hacer las siguientes observaciones:

- Parte de la hipótesis de este trabajo es la influencia de la dimensión lateral. Esa hipótesis se refleja en la formulación bidimensional de la fuerza de repulsión.
- La presencia de fuerzas laterales puede descentrar a los vehículos en sus pistas. Esto hace necesaria una tercera fuerza que tienda a preservar dicho orden. Esta tercera fuerza será llamada en adelante "fuerza de pista", f_i^p.

A continuación se procederá a explicar la formulación de cada una de estas dos fuerzas.

3.2.1. Fuerza de Repulsión Bidimensional

Antes de abordar la formulación de esta fuerza, es necesario detenerse en tres consideraciones:

3.2.1.1. Consideraciones Previas

La primera es que en dos dimensiones el concepto de líder se difumina: un vehículo en otra pista también puede generar repulsión sobre i. Es por ello que en adelante se hará referencia al vehículo k en vez de $i-1$. La ecuación 3.1 se transforma así en:

$$\dot{v}_i(t) = f_i^a(t) + \sum_{k \in N_i(t)} f_{i,k}^r(t), \tag{3.6}$$

donde $N_i(t)$ es el conjunto de vehículos que inducen repulsión sobre i en el instante t. Siguiendo la lógica de otros modelos el requisito para pertenecer a N es simple: que la posición longitudinal del vehículo k sea mayor a la de i. Sin prejuicio de ello, la distancia no debe ser tanta que $f_{i,k}^r$ se desactive.

Por otro lado, tratar con dos dimensiones requiere el uso de vectores. En lo subsecuente, se utilizará vectores de dos dimensiones y matrices de 2×2. Por convención, entiéndase la primera coordenada como lateral y la *segunda* como longitudinal.

En tercer lugar, resulta evidente que un cambio de posición de un vehículo en un metro de distancia longitudinal no afecta igual que uno de distancia lateral. Llámese

región de influencia a aquella dentro de la cual los vehículos produzcan repulsión (fuera de ella, dicha fuerza se hace cero). Dicha región dependerá evidentemente de las velocidades involucradas. Supóngase (por simplicidad) que la frontera de esa región, a igual velocidad de los vehículos, es una semielipse (como se muestra en la figura 3.1). En ella, el semieje mayor se dispone en dirección longitudinal, y el menor en la lateral.

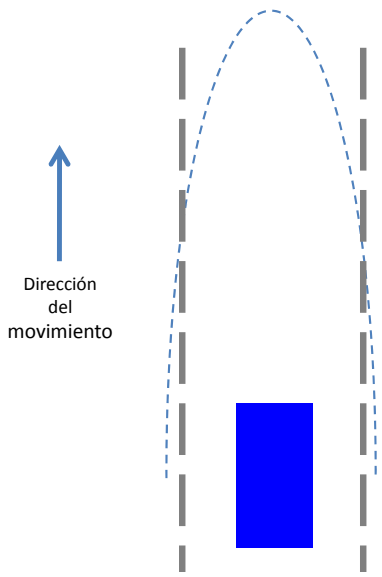

FIGURA 3.1. Semielipse de repulsión cero para vehículos a igual velocidad que el *sujeto*. El semieje mayor coincide con la dirección longitudinal; el menor, con la lateral. Fuente: Elaboración Propia

Dado el supuesto anterior, resulta conveniente *escalar* la coordenada longitudinal. Por este medio, la elipse se convierte en una circunferencia. Esto permite tratar ambas coordenadas por igual, y las distancias como euclidianas.

Llámese q a la razón entre el semieje mayor y el menor de la elipse (o, equivalentemente, a la razón entre la distancia de seguridad longitudinal y la lateral). Dicha razón q será la que se utilizará para escalar la dimensión longitudinal. Luego se hará un estudio más detallado de q, su magnitud, y dependencia de otras variables. Por ahora, baste reconocer su existencia y función, y decir que su valor es > 1.

Defínanse:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}, \ \therefore \mathbf{Q^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{q} \end{bmatrix},$$

y $\vec{x}_i$ como el vector posición del vehículo i. Podemos definir la distancia vectorial *escalada* entre los vehículos k e i, $\vec{r^*}_{i,k}$ como:

$$\vec{r}^*_{i,k} = \mathbf{Q^{-1}}(\vec{x}_k - \vec{x}_i) = \begin{bmatrix} x_k - x_i \\ \frac{y_k - y_i}{q} \end{bmatrix}, \text{ y el vector dirección (unitario) } \hat{r}^*_{i,k} = \frac{\vec{r}^*_{i,k}}{\|\vec{r}^*_{i,k}\|}$$

3.2.1.2. Formulación

La fuerza de repulsión de k sobre i, se define vectorialmente como:

$$\vec{f}^r_{i,k} = \mathbf{Q}\hat{r}^*_{i,k} \left\{ \mathbf{Q^{-1}}(\vec{v}_k - \vec{v}_i) \cdot \hat{r}^*_{i,k} c_2 + \left(\|\vec{r}^*\| - \frac{1}{q}\bar{s}(v_i^y) \right) c_3 \right\}^- \tag{3.7}$$

Nótese que esto no es más que los mismos dos sumandos de (3.3) generalizados a 2D: se considera la componente radial de la velocidad relativa y la norma de la distancia vectorial (con las debidas correcciones de escala para hacer comparables ambas dimensiones).

Con algo de álgebra, se observa que si la distancia lateral es 0, (3.7) equivale a (3.3). En efecto, en este caso $\hat{r^*}_{i,k} = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$, y (3.7) queda:

$$\begin{aligned} \vec{f}^r_{i,k} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{q} \end{bmatrix} (\vec{v}_k - \vec{v}_i) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} c_2 + \right. \\ &\qquad \left. + \left(\left\| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y_k - y_i \end{bmatrix} \right\| - \frac{1}{q}\bar{s}(v_i^y) \right) c_3 \right\}^- \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ q \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_k^x - v_i^x \\ v_k^y - v_i^y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} c_2 + \left(\left\| \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{y_k - y_i}{q} \end{bmatrix} \right\| - \frac{1}{q}\bar{s}(v_i^y) \right) c_3 \right\}^- \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 0 \\ q \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} v_k^x - v_i^x \\ \frac{v_k^y - v_i^y}{q} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} c_2 + \left(\frac{y_k - y_i}{q} - \frac{\bar{s}(v_i^y)}{q} \right) c_3 \right\}^- \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ q \end{bmatrix} \left\{ \frac{v_k^y - v_i^y}{q} c_2 + \frac{y_k - y_i - \bar{s}(v_i^y)}{q} c_3 \right\}^- \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ q \end{bmatrix} \frac{1}{q} \left\{ (v_k^y - v_i^y) c_2 + (y_k - y_i - \bar{s}(v_i^y)) c_3 \right\}^- \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ f_{i,k}^r \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Se considerará tres alternativas para q:

- q constante, en que q se convierte en parámetro del modelo.
- $q = q(v_i) = \dfrac{\bar{s}(v_i)}{x^*}$, donde $x^* > 0$ es parámetro del modelo. Éste puede verse como el ancho máximo de $f_{i,k}^r$ en ausencia de velocidad relativa lateral.
- $q = q(v_i) = \tau_q v_i + s_q$ una generalización que incluye a las dos anteriores. Esta última requeriría dos parámetros: τ_q, en unidades de tiempo, y s_q en unidades de distancia.

3.2.2. Fuerza de Pista

La fuerza de pista tiene valor sólo en la dimensión lateral. En ella, la definimos de la manera más simple posible, con la ecuación diferencial:

$$
f_i^p(t) = -k_1 v_i^x - k_2(x_i - x_p) \tag{3.8}
$$

Donde k_1 y k_2 son parámetros del modelo, v_i^x es la velocidad lateral del vehículo i y x_i su posición lateral, y x_p es el centro de la pista p.

Esta fuerza se aplica tanto si el vehículo está manteniéndose en su pista como si cambia. En este último caso, lo que cambia es el valor de x_p por el de la pista de destino.

Nuevamente, cabe señalar el caso especial del amortiguamiento crítico. En él, k_1 y k_2 son mutuamente dependientes. Se volverá sobre ello al analizar el modelo.

3.2.3. Formulación Completa

El modelo en 2D queda así:

$$\begin{aligned}\dot{v}_i(t) = &\left(-k_1 v_i^x - k_2(x_i - x_p)\right)\hat{\imath} + (V - v_i(t))c_1\hat{\jmath} + \\ &+ \sum_{k\in N_i(t)} \mathbf{Q}\hat{r}^*_{i,k}\left\{\mathbf{Q^{-1}}(\vec{v}_k - \vec{v}_i)\cdot\hat{r}^*_{i,k}c_2 + \left(\|\vec{r}^*\| - \frac{1}{q}\bar{s}(v_i^y)\right)c_3\right\}^-,\end{aligned} \tag{3.9}$$

donde $\hat{\imath}$ representa la dirección lateral y $\hat{\jmath}$ la longitudinal.

Según la alternativa que se elija (para $q(v)$), el modelo en 2D puede tener de nueve o diez parámetros. Más adelante se mencionará la manera de prescindir de dos de ellos y bajar hasta siete.

3.3. Cambio de Pistas

El submodelo de cambio de pistas (MCP) es independiente al resto del modelo. En esta sección presentamos uno manteniendo la máxima simplicidad. Sin embargo, el modelo descrito hasta aquí es compatible con otros MCP. Ejemplos de estos son los de Gipps (1986) y Laval y Daganzo (2006).

El modelo de Gipps sigue el esquema de decisión y aceptación de gap (explicado en el capítulo 1). Para la decisión distingue entre cambios de pista necesarios y *deseables*. Un cambio de pista se hace necesario en la proximidad de un giro o rampa de salida de destino. En cambio, en la zona previa (ni muy cerca ni muy lejos) es deseable. También es deseable un cambio si mejorará las condiciones de tráfico: ya sea que

aumente la velocidad o que ofrezca un largo de cola menor, superando un umbral. Este umbral constituye un parámetro del modelo.

Su criterio de aceptación de gap es sencillo y se puede resumir de la siguiente manera: el tiempo entre vehículos (potencial vehículo antecedente y su consecuente) en la pista de destino debe ser superior a un umbral. Este umbral suele calibrarse en 1,5 a 2 segundos. Adicionalmente, se requiere que haya espacio suficiente para que el cambio de pista pueda tener lugar (p. ej. si la velocidad es baja, o hay un vehículo lado a lado con el que intenta cambiarse).

Laval y Daganzo (2006); Laval y Leclercq (2008) definen la probabilidad de que un vehículo se cambie de pista como Φ. Ésta es función de las concentraciones (vehículos por unidad de distancia) de las potenciales pistas de origen y destino. Los vehículos se cambian de pista según un proceso de Bernoulli con probabilidad Φ. Esto sin importar si hay o no un gap adecuado.

Los autores fueron los primeros en proponer un MCP sin aceptación de gap. Para ello simplemente permitieron que los vehículos modelados se superpongan: está permitido que dos vehículos estén al mismo tiempo en el mismo lugar. Algunos investigadores han mirado con recelo la eliminación de esta restricción. Sin embargo, a través de ello se logró reproducir el fenómeno de relajación.

3.3.1. Modelo de (decisión de) Cambio de Pistas

El modelo de cambio de pistas puede resumirse así:

> Para verificarse, un cambio de pista debe ser a la vez deseable y factible. Será deseable si permite percibir menos repulsión. Será factible si al ejecutarse no impone desaceleraciones mayores a la máxima.

Aunque esta formulación resulta simple, presenta algunas aristas a tener en cuenta.

En primer lugar, ¿con qué comparar para decidir si se percibe menor repulsión? Se mide la repulsión percibida por un vehículo hipotético, ya cambiado de pista. Para mantener la simplicidad, se ha escogido comparar con criterio *ceteris paribus*: sólo se cambia la posición lateral del vehículo por la del centro de la pista de destino. Tanto la posición longitudinal como la velocidad se mantienen.

En segundo lugar, respecto a la factibilidad, cabe señalar que el cambio de pista no es instantáneo. En rigor, para saber si un cambio de pista es factible, no basta mirar el instante presente: es necesario conocer la aceleración impuesta durante todo el lapso de dicho cambio. Para mantener la simplicidad esta verificación se hace para un cambio de pista instantáneo. En la práctica, como se ve en los siguientes capítulos, este criterio ha funcionado bien.

3.3.2. Generación versus Aceptación de Gap

Obsérvese que este modelo de cambio de pistas no usa de un modelo de aceptación de gap. Se trata más bien de un modelo en que los vehículos *generan* el gap cuando no lo tienen. La hipótesis que subyace es que los conductores reales también lo hacen. Naturalmente, de ser así, esto sucederá con mayor frecuencia a congestiones altas (p. ej. en cuellos de botella). Esto, a su vez, explicaría los bajos gaps medidos por Daamen et al. (2010) en rampas de entrada.

Un vehículo que cambia de pista sin congestión a lo sumo se acomoda a un gap existente. En cambio, en congestión dicho gap es menos frecuente. Como consecuencia, los vehículos cambian de pista con gap menores.

En el próximo capítulo se hará un análisis teórico extensivo del modelo. En los capítulos subsecuentes (5 y 6), será puesto a prueba en experimentos de simulación.

4. ANÁLISIS DEL MODELO

El modelo 1D (sólo longitudinal) tiene algunas características que lo hacen interesante por sí mismo: los parámetros, reducibles a cinco, son un mínimo teórico; se puede conocer las condiciones para que la fuerza de repulsión se mantenga activa (lo que simplifica el análisis); los parámetros son función de magnitudes medibles del tráfico; y se puede obtener trayectorias exactas para los vehículos (lo que permite varios otros análisis técnicos). En la primera parte de este capítulo nos detendremos en estas características.

En la segunda parte, en tanto, se estudiará el modelo en dos dimensiones: rangos para sus parámetros, escalabilidad computacional y su capacidad de generar *gaps*.

4.1. Ventajas y Características del Modelo en 1D

La mayor parte de esta sección y los experimentos relacionados al modelo 1D están recogidos en Delpiano et al., 2015

El modelo en 1D se describe mediante la ecuación (3.4). Se trata de una ecuación diferencial ordinaria (EDO) lineal por partes (dependiendo de si f_i^r está o no activa). Cada una de las dos partes que la constituyen permite un estudio analítico relativamente simple. Interesa, por tanto, saber bajo qué circunstancias los vehículos no cambian de *parte* (i. e., de rama dentro de la ecuación lineal por partes).

En el siguiente apartado, se analiza la posibilidad de prescindir del parámetro c_2. Luego, se estudiará las circunstancias en que f_i^r se mantiene activa. Luego de ello, se profundizará el análisis con aquel resultado en mente.

4.1.1. Prescindencia de c_2

Cuando f_i^r está activa, (3.4) representa un oscilador armónico amortiguado. Para evitar velocidades negativas, resulta deseable que dicho amortiguamiento no sea subcrítico. De la solución de este problema clásico de ecuaciones diferenciales se obtiene:

$$\begin{cases} c_2 = 2\sqrt{c_3} - c_3\tau_r - c_1 & \text{amortiguamiento crítico} \\ c_2 > 2\sqrt{c_3} - c_3\tau_r - c_1 & \text{amortiguamiento supercrítico.} \end{cases} \tag{4.1}$$

Nótese que esta es una aproximación, pues la fórmula exacta también dependerá de v_{i-1}.

Esto identifica dos casos especiales del modelo: *crítico* y *supercrítico*. En el primero, c_2 es función de los demás parámetros y se puede prescindir de él. En ese caso, se puede afirmar que estamos en presencia de un MmT que requiere cinco parámetros.

4.1.2. Activación de la Fuerza de Repulsión

En adelante, utilizaremos el análisis dimensional de Buckingham (1914). En él, se reduce la dimensionalidad de los problemas definiendo variables auxiliares. Dichas variables auxiliares, π_i, carecen de unidades y son función de las originales. Concretamente, en adelante utilizaremos las siguientes variables:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{c_1 + c_3\tau_r}{c_2} \\ \pi_2 &= \frac{c_2^2}{c_3}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Nótese que π_1 y π_2 son necesariamente positivos y que las unidades de tiempo se cancelan.

A la luz de esta definición, (4.1) puede reescribirse como:

$$\pi_2 \geqq \frac{4}{(1+\pi_1)^2} \tag{4.3}$$

Respecto a la activación de la fuerza de repulsión, se puede afirmar lo siguiente:

Teorema 4.1. *Si un vehículo viaja tras un líder a velocidad constante $v < V$: el vehículo se acercará al líder hasta percibir una repulsión. Seguirá percibiendo dicha*

repulsión hasta alcanzar el equilibrio. En equilibrio, $v_i(t) = v$, $s(v) = s_r - V(\frac{c_1}{c_3}) + (\tau_r + \frac{c_1}{c_3})v$.

La prueba de este teorema se puede encontrar en el Apéndice A.

Por otra parte,

Teorema 4.2. *Si de dos vehículos en reposo y equilibrio el líder comienza a acelerar libremente (i. e., sin repulsión activa): el segundo vehículo percibirá siempre la repulsión del líder si se cumple que:*

$$\begin{cases} \pi_1 > 1 & \text{caso crítico} \\ \pi_1 \geq 1 \vee \pi_1\pi_2 \geq 1 & \text{caso supercrítico} \end{cases} \tag{4.4}$$

La prueba de este teorema se encuentra en el Apéndice B.

Si se cumple cualquiera de estas condiciones, la fuerza de repulsión permanecerá activa. Por lo tanto, los vehículos obedecerán a un modelo tipo Helly (bajo dichas condiciones y por lo expresado al final de 3.1.3). Lo que se diga en lo sucesivo sobre la congestión, se puede afirmar también de aquellos.

4.1.3. Cálculo de los Parámetros

Las principales características macroscópicas (flujo máximo, velocidad de flujo libre, etc.) del modelo pueden ser obtenidas analíticamente. Inversamente, los parámetros del modelo pueden ser calculados a partir de dichas características. En esta sección, se seguirá ese mismo razonamiento: primero, se obtendrá las variables macroscópicas del modelo en función de sus parámetros; posteriormente, se discutirá de manera sucinta la operación inversa.

La *velocidad de flujo libre* se corresponde con el parámetro V del modelo. Esto se desprende tanto de su formulación como de la solución del mismo a flujo libre. Sea

v la velocidad inicial:

$$\ddot{y}(t) = (V - \dot{y}(t))c_1$$
$$\dot{y}(0) = v < V,$$

que tiene por solución:

$$\dot{y}(t) = V - (V - v)e^{-c_1 t} < V,$$

que a su vez, en el límite:

$$\lim_{t\to\infty} \dot{y}(t) = V$$

Del mismo sistema se obtiene que la máxima aceleración tiene lugar cuando $t = 0$ y $v = 0$. En efecto:

$$\ddot{y} = c_1(V - v)e^{-c_1 t},$$

es estrictamente decreciente, y será mayor cuanto menor sea v. Si evaluamos en dichos casos límite, la aceleración máxima queda:

$$a_{max} = Vc_1$$

El anexo C detalla los cálculos para obtener la *desaceleración máxima* (d_{max}). Baste aquí mencionar algunos detalles: Tendrá lugar cuando un vehículo viaja a flujo libre y debe detenerse completamente. Si ponemos el origen en un obstáculo $y_0(t) = 0$, cuando comienza a ser percibido por su sucesor:

$$\dot{y_1}(0) = V, \quad \ddot{y_1}(0) = (V - \dot{y}_1)c_1 - \dot{y}_1 c_2 - (y_i + \tau_r \dot{y}_1 + s_r)c_3,$$

podemos conocer la trayectoria exacta, y por lo tanto, el instante y valor de d_{max}. Es necesario distinguir entre los dos casos mencionados en la ecuación (4.1). La tabla 4.1

muestra los valores para el instante de tiempo en que se logra d_{max} y el valor de ésta última en cada caso.

TABLA 4.1. Desaceleración máxima por casos.

Caso[1]	t	d_{max}
crítico	$\frac{1}{\sqrt{c_3}}$	$-\frac{V\sqrt{c_3}}{e}$
supercrítico	$t = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{c_3} - \frac{a\sqrt{a^2-4c_3}}{c_3} - 2\right)\right)}{\sqrt{a^2-4c_3}}$	$V2^{-\frac{a}{2\sqrt{a^2-4c_3}}-\frac{3}{2}}\left(\sqrt{a^2-4c_3}+a\right)\cdot$ $\cdot\left(\frac{-a\sqrt{a^2-4c_3}+a^2-2c_2}{c_3}\right)^{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2-4c_3}}+1\right)}$

Fuente: Elaboración Propia

El *espaciamiento en equilibrio* se puede obtener igualando la aceleración a cero. Si se considera que la diferencia de velocidad en equilibrio es cero, (3.4) queda:

$$0 = (V - v_i)c_1 + \left\{(y_k - y_i - \tau_r v_i - s_r)c_3\right\}^- ,$$

si se tiene en cuenta el caso en congestión, $v_i \leq V$:

$$0 = (V - v_i)c_1 + (y_k - y_i - \tau_r v_i - s_r)c_3,$$

dividiendo por c_3 y despejando $y_k - y_i$:

$$\begin{aligned} y_k - y_i &= s_r + \tau_r v_i + (v_i - V)\frac{c_1}{c_3} \\ &= s_r + \tau_r v_i + v_i\frac{c_1}{c_3} - V\frac{c_1}{c_3} \\ s(v_i) &= s_r - V\frac{c_1}{c_3} + (\tau_r + \frac{c_1}{c_3})v_i \end{aligned} \tag{4.5}$$

[1]Se definió $a = -c_1 - c_2 - c_3\tau_r$ para facilitar la legibilidad.

Esto significa que el espaciamiento en equilibrio es lineal en función de la velocidad. Esto implica que el modelo en equilibrio converge al modelo de Newell (1993, 2002).

De lo anterior también se sigue que el espaciamiento crítico (i.e., el espaciamiento al cual se logra la capacidad máxima, $s(V)$) es:

$$\begin{aligned} s(V) &= s_r - V\frac{c_1}{c_3} + (\tau_r + \frac{c_1}{c_3})V \\ &= s_r - V\frac{c_1}{c_3} + \tau_r V + \frac{c_1}{c_3}V \\ &= s_r + \tau_r V \end{aligned} \tag{4.6}$$

y por lo tanto, la *capacidad* (o *flujo máximo*) es:

$$Q_{max} = \frac{V}{s_r + V\tau_r} \tag{4.7}$$

y el espaciamiento de taco[2]:

$$s_{jam} = s(0) = s_r - V\frac{c_1}{c_3}. \tag{4.8}$$

La *velocidad de onda promedio*, en consecuencia, se puede expresar como:

[2]Espaciamiento que adquieren los vehículos a velocidad cero, en unidades de distancia.

$$
\begin{aligned}
w &= \frac{Vs(0)}{s(V)-s(0)} \\
&= \frac{V\left(s_r - V\frac{c_1}{c_3}\right)}{s_r + \tau_r V - s_r + V\frac{c_1}{c_3}} \\
&= \frac{s_r - V\frac{c_1}{c_3}}{\tau_r + \frac{c_1}{c_3}} \\
&= \frac{s_r c_3 - V c_1}{c_1 + c_3\tau_r}
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

La tabla 4.2 resume las fórmulas expresadas hasta aquí.

TABLA 4.2. Variables macroscópicas de tráfico en función de los parámetros

Variable	Valor	Comentario
Velocidad de Flujo Libre	V	parámetro del modelo
Aceleración Máxima	Vc_1	
Desaceleración Máxima	$-\frac{V\sqrt{c3}}{e}$	sólo caso crítico
Espaciamiento de Equilibrio	$s_r - V\frac{c_1}{c_3} + (\tau_r + \frac{c_1}{c_3})v_i$	
Espaciamiento Crítico	$s_r + V\tau_r$	
Espaciamiento de Taco	$s_r - V\frac{c_1}{c_3}$	
Capacidad	$\frac{V}{s_r+V\tau_r}$	
Velocidad de Onda	$\frac{s_r c_3 - V c_1}{c_1+c_3\tau}$	

Fuente: Elaboración Propia

Estos resultados conducen a una consecuencia interesante para el caso crítico. Si se tiene los valores de estas variables, se puede determinar los parámetros sin necesidad de calibrar. La tabla 4.3 muestra a modo de ejemplo los parámetros en función de:

- la aceleración máxima, a_m,

- la velocidad máxima o velocidad de flujo libre, v_m,
- la desaceleración máxima, d_m,
- el espaciamiento de taco, s_j y
- la velocidad de onda, w.

Se puede lograr el mismo efecto con otras combinaciones de variables macroscópicas. Basta a_m y d_m, y otras tres que individualicen el diagrama fundamental (entendido éste como el diagrama triangular de Newell en equilibrio).

Tabla 4.3. Parámetros en función de variables macroscópicas

Parámetro[3]	Fórmula
c_1	$\frac{a_m}{v_m}$
c_3	$\left(\frac{e \cdot d_m}{v_m}\right)^2$
V	v_m
τ_r	$\frac{s_j}{w} + \frac{a_m v_m}{(e \cdot d_m)^2}$
s_r	$s_j + a_m \left(\frac{v_m}{e \cdot d_m}\right)^2$

Fuente: Elaboración Propia

4.1.4. Trayectorias Exactas

El movimiento de los vehículos queda definido por una ecuación diferencial ordinaria (EDO). Esta EDO (ecuación 3.4) es lineal y de primer orden. Esto permite para muchos casos obtener soluciones exactas para las trayectorias.

Los modelos actualmente en uso (como los de Gipps, Wiedemann, o el IDM) no ofrecen esta posibilidad. Para simular, es necesario discretizar la ecuación diferencial que los define. Este paso induce un error numérico que es proporcional al paso de tiempo elegido. Tener soluciones analíticas disminuye o incluso elimina tal error numérico: si la solución es exacta, lo elimina; si es con coeficientes inexactos, lo disminuye varios órdenes de magnitud.

[3]Se omite c_2 que en el caso crítico ya es función de otros parámetros.

La obtención de trayectorias exactas abre un mundo de posibilidades de análisis. El modelo de Newell debe parte de su éxito y aportes a sus trayectorias exactas. Esta misma razón es un acicate para profundizar en el estudio del presente modelo.

A continuación se detallan algunos casos en los que es posible obtener trayectorias exactas.

Supóngase conocida la trayectoria de un vehículo, $y_0(t)$. Supóngase también las condiciones iniciales del sucesor, $y_1(t_0) = y$ e $\dot{y}_1(t_0) = v_0$. La trayectoria del sucesor, $y_1(t)$ puede conocerse resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned}
&\ddot{y}_1(t) = (V - \dot{y}_1(t))c_1 + \{(\dot{y}_1(t) - \dot{y}_0(t))c_2 + (y_0(t) - y_1(t) - \dot{y}_1(t)\tau_r - s_r)c_3\}^- \\
&y_1(0) = y \\
&\dot{y}_1(0) = v_0
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Siguiendo la misma lógica, se puede obtener recursivamente la trayectoria de todo sucesor.

El sistema (4.10) tiene solución para diversos valores de $y_0(t)$, y y v_0. Sólo hay que tener cuidado en los instantes de tiempo en que f_i^r se activa y desactiva (v. sección 4.1.2).

Para f_i^r inactiva, la trayectoria de un vehículo sólo depende de V y c_1. Mayor atención merece el caso de f_i^r activa. En ese caso, el sistema se puede ver como un oscilador armónico actuado (*driven harmonic oscillator*). La solución de este problema es conocida. En efecto, si se define:

$$f(t) = c_2\dot{y}_0(t) + c_3 y_0(t) - c_3 s_j, \tag{4.11}$$

$$s_j = s_r - V\frac{c_1}{c_3}, \text{ ya definido,}$$

y se conoce su transformada de Fourier, $\tilde{f}(\omega)$, entonces:

$$y_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}(\omega)}{c_3 - \omega^2 + (c_1 + c_2 + c_3\tau)\omega i} e^{i\omega t} d\omega \tag{4.12}$$

es solución particular del sistema (siempre que f_i^r no se desactive en el intertanto). Esto implica que una gran familia de trayectorias son fáciles de "seguir" analíticamente. Y esta familia incluye a funciones periódicas, sinusoidales, exponenciales, etc.

Un caso de particular interés es el siguiente: supóngase que se tienen n vehículos (numerados 1 a n) viajando a flujo máximo[4]. Supóngase además que en un instante de tiempo el líder debe frenar hasta detenerse. Sin perder generalidad se puede asumir el obstáculo en $y = 0$ y el instante en $t = 0$. El sistema queda totalmente definido por las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
&y_0(t) = 0, \text{ el obstáculo} \\
&\ddot{y}_k(t) = (V - \dot{y}_k)c_1 + \{(\dot{y}_{k-1}(t) - \dot{y}_k(t))c_2 + (y_{k-1}(t) - y_k(t) - \dot{y}_k(t)\tau_r - s_r)c_3\}^- \\
&\ddot{y}_k(0) = 0 \\
&\dot{y}_k(0) = V, \forall k \in \{1, n\},
\end{aligned} \tag{4.13}$$

entonces el sistema tiene solución conocida para todo k:

$$\begin{aligned}
y_k(t) = -k\left(s_r - V\frac{c_1}{c_3}\right) - Ve^{-\sqrt{c_3}t}\Bigg\{\frac{1}{c_3}\sum_{i=0}^{2k-1}\frac{t^i}{i!}\Bigg[(2k-i)\sqrt{c_3}^{i+1} - (k-1)c_2\sqrt{c_3}^{i} + \\
\sum_{j=0}^{i-k-2}(-1)^j\binom{k-1}{i-k-2}\binom{2k-1+j-i}{j}c_3^{i-k-\frac{j}{2}}c_2^{2k+1-i+j}\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

[4]Se entiende el flujo *estable* máximo posible, vale decir, en equilibrio. Por lo dicho anteriormente, éste ocurrirá a velocidad V y espaciamiento crítico.

4.1.5. Diagrama Concentración v/s Flujo

Son numerosas las ventajas que ofrece la obtención de trayectorias exactas. Una de ellas es la construcción de diagramas fundamentales (concentración v/s flujo) exactos.

A modo de ejemplo, se ilustra aquí el diagrama fundamental (DF) a partir de dos vehículos: I) acelerando libremente desde taco y II) frenando desde flujo máximo hasta detenerse.

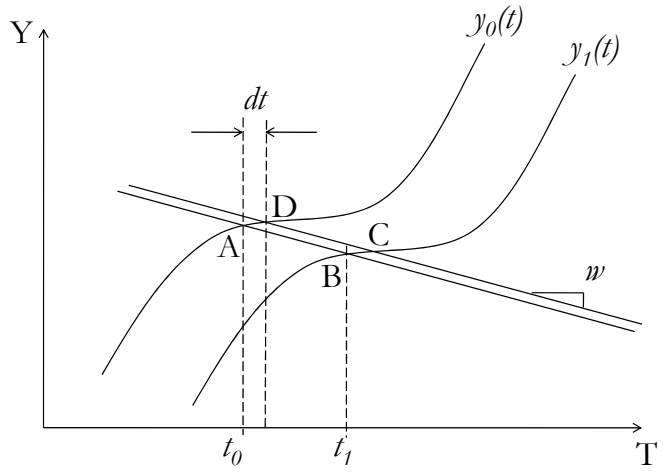

FIGURA 4.1. Área mínima para las definiciones generalizadas de Edie (1963). Siguiendo a Laval (2011), se calcula en base al área del trapecio ABCD. Fuente: Elaboración Propia

Los diagramas son calculados mediante las definiciones generalizadas de Edie (1963). Estas definen la concentración (K, en vehículos por unidad de distancia) y el flujo (Q, en vehículos por unidad de tiempo) en función de un área en el plano espacio-tiempo[5]. Siguiendo a Laval (2011), se reduce al mínimo el área considerada. Para ello, se calcula el espaciamiento *a lo largo de la onda*. En lugar de un rectángulo

[5]Dicha área corresponde (en el caso más simple) al segmento a considerar, durante el período de interés. Se forma así un rectángulo en el plano x v/s t.

paralelo a los ejes (distancia-tiempo), se calcula el área de un trapecio (v. figura 4.1). Dos de sus lados tienen como pendiente la velocidad de onda, w, y son, por tanto, paralelos[6]. Esto tiene por finalidad maximizar la probabilidad de medir condiciones estacionarias. Los lados restantes se obtienen de linealizar las trayectorias de dos vehículos consecutivos (tomando el límite cuando el tiempo tiende a cero).

Sea t_1 el tiempo en que una onda originada en $y_0(t_0)$ llega a $y_1(t)$. Si se corta el trapecio por las líneas $t = t_0 + dt$ y $t = t_1$, es fácil calcular el área. Basta calcular la suma de las áreas de los dos triángulos y el romboide que se forman:

$$\begin{aligned}
\acute{A} &= \triangle_1 + \Diamond + \triangle_2 \\
&= dt(\dot{y}_0(t_0) + w)\left[\frac{dt}{2} + (t_1 - t_0 - dt) + \frac{\dot{y}_0(t_0) + w}{\dot{y}_1(t_1) + w}\frac{dt}{2}\right] \\
&= dt(\dot{y}_0(t_0) + w)(t_1 - t_0 + O(dt)),
\end{aligned} \tag{4.15}$$

con $O(dt)$ un factor del orden de dt. De allí, siguiendo con Edie,

$$\begin{aligned}
k &= \frac{t_i}{\acute{A}} = \frac{dt}{dt(\dot{y}_0(t_0) + w)(t_1 - t_0 + O(dt))} \approx \frac{1}{(\dot{y}_0(t_0) + w)(t_1 - t_0)} \\
q &= \frac{x_i}{\acute{A}} = \frac{dt\dot{y}_0(t_0)}{dt(\dot{y}_0(t_0) + w)(t_1 - t_0 + O(dt))} \approx \frac{\dot{y}_0(t_0)}{(\dot{y}_0(t_0) + w)(t_1 - t_0)}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Distintas configuraciones de parámetros dan lugar a distintos resultados. Las figuras 4.2 y 4.3 muestran los DFs para dos parametrizaciones. Para cada una, se muestran las dos situaciones antes mencionadas (parada desde flujo libre y aceleración libre desde taco). Los resultados de la figura 4.3 concuerdan con la literatura en lo siguiente: que la curva del caso de aceleración va por debajo de la de frenado (Yeo y Skabardonis, 2011).

[6] w promedio calculada de acuerdo a (4.9)

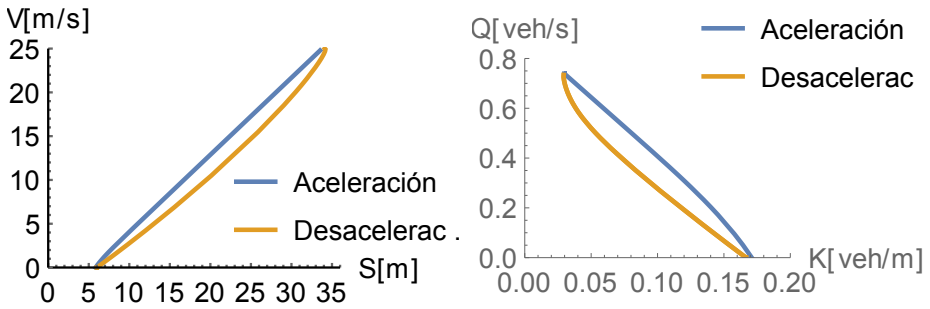

FIGURA 4.2. Diagrama fundamental para los parámetros: $c_1 = \frac{1}{25}$, $c_2 = \frac{9}{10}$, $c_3 = \frac{9}{25}$, $V = 25$, $\tau_r = 1$, $s_r = \frac{79}{9}$. Nótese que la aceleración va por sobre la desaceleración. Fuente: Elaboración Propia

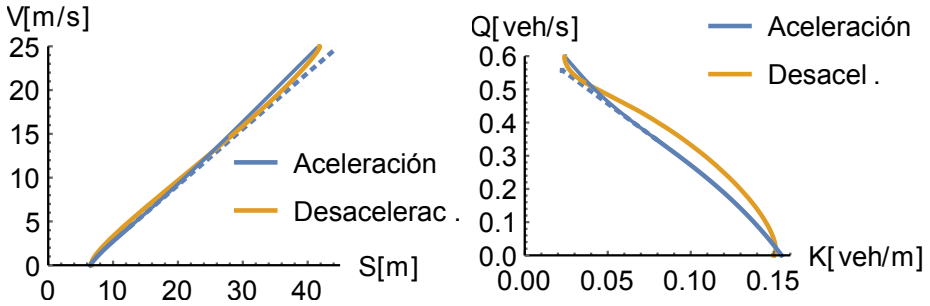

FIGURA 4.3. Diagrama fundamental para los parámetros: $c_1 = \frac{1}{25}$, $c_2 = \frac{3}{5}$, $c_3 = \frac{1}{10}$, $V = 25$, $\tau_r = 1$, $s_r = \frac{50}{3}$. La línea punteada representa la zona en que f_i^r se desactiva. La línea delgada muestra el comportamiento del modelo de Helly puro. (i.e. un sistema que permite repulsión con valores positivos). Fuente: Elaboración Propia

4.1.6. Análisis de Estabilidad

Antes de hablar de estabilidad, es necesario hablar del tráfico oscilatorio (SGT o *stop-and-go traffic*, en su forma más extremo). El SGT consiste en sucesivas detenciones y aceleraciones de un flujo de vehículos. Las oscilaciones se propagan aguas arriba en el tiempo: (un vehículo frena, luego su seguidor inmediato, luego el siguiente, etc.). No obedecen necesariamente a cuellos de botella (aunque estos son una de sus causas posibles), sino a la sobrerreacción de los conductores. Incluso una pequeña perturbación (aceleración o desaceleración) puede amplificarse (vehículo tras vehículo, fruto de la sobrerreacción de los sucesivos seguidores) hasta convertirse (varios vehículos más

atrás) en SGT. El SGT es un fenómeno real, y por lo tanto, deseable de reproducir (Treiber y Kesting, 2011).

Se llama perturbación a cualquier comportamiento fuera de lo previsible en un vehículo. Por último, se llama *inestable* al tráfico que amplifica las perturbaciones. El SGT es el caso de perturbaciones que se amplifican hasta el extremo de lo posible. Por su naturaleza, es frecuente estudiar las perturbaciones según su longitud de onda.

Para que un modelo reproduzca el SGT, es suficiente que cumpla una de dos condiciones: I) ser inestable (en términos algebráicos) para longitudes de onda largas II) ser heterogéneo (i.e., compuesto por distintos tipos de conductores, Laval y Leclercq, 2010)

Se analiza aquí la estabilidad del modelo derivado hasta el momento.

En condiciones de flujo libre, la fuerza de repulsión está inactiva. Por tanto, el comportamiento de un conductor no se ve afectado por el de los demás. En consecuencia, las perturbaciones no se propagan.

El caso de mayor interés es el de la estabilidad en congestión. Se hace aquí un análisis de estabilidad lineal basado en el trabajo de Wilson (2008). En él, el autor establece condiciones de estabilidad para una familia de modelos. La condición para pertenecer a esta familia es que exista una función $V(s)$ tal que:

$$\frac{ds}{dt} = 0 \iff \ddot{y} = 0, \tag{4.17}$$

donde s es el espaciamiento, y $V(s)$ se conoce como función de *velocidad óptima*. Equivalentemente, se pide que si el espaciamiento es constante, la aceleración sea cero (y la velocidad, única). En este modelo, dicha función existe y se define como:

$$V(s) = \begin{cases} \dfrac{sc_3 + Vc_1 - s_r c_3}{c_1 + c_3\tau_r} & s \leq \tau_r V + s_r, \text{ i.e. congestión} \\ V & \text{flujo libre} \end{cases} \tag{4.18}$$

En efecto, reescribiendo (3.4) según s y reemplazando $\dot{y}$ por $V(s)$:

$$\dot{v} = (V - V(s))c_1 + \dot{s}c_2 + (s - \tau_r V(s) - s_r)c_3,$$

lo que, reemplazando $V(s)$ por la primera parte de (4.18) es igual a cero. Por lo tanto, se aplican las condiciones de estabilidad de Wilson. Se puede afirmar que:

I) el modelo no propaga perturbaciones de onda corta (i.e. de alta frecuencia).

II) para ondas largas, se tiene la siguiente condición de estabilidad (Wilson, 2008, op. cit., ecuación 3.8)

$$\frac{1}{2}(c_1 + c_3\tau_r)^2 - c_3 + c_2(c_1 + c_3\tau_r) < 0 \tag{4.19}$$

Se puede demostrar que esta condición corresponde a la de Tampère (2004, ecuación 5.26), cuando el multiplicador de la velocidad cuadrática es cero. Si se reescribe en función de π_1 y π_2 definidos en (4.2), y se despeja:

$$\pi_2 < \frac{2}{\pi_1^2 + 2\pi_1} \tag{4.20}$$

Esta condición, junto a (4.3) dividen el espacio paramétrico en regiones (de acuerdo al cumplimiento de cada condición): *I*) inestable, sobreamortiguada, *II*) estable, sobreamortiguada, *III*) inestable, subamortiguada, *IV*) estable, subamortiguada,donde la línea que separa las regiones I y II de III y IV corresponde al amortiguamiento crítico. La figura 4.4 ilustra las cuatro regiones en el plano $\pi_1 - \pi_2$.

4.2. Características del Modelo en 2D

Las ecuaciones que definen la modelo en 2D no permiten el mismo nivel de estudio analítico. Sin embargo, se puede decir algunas cosas sobre su comportamiento que no son poco importantes.

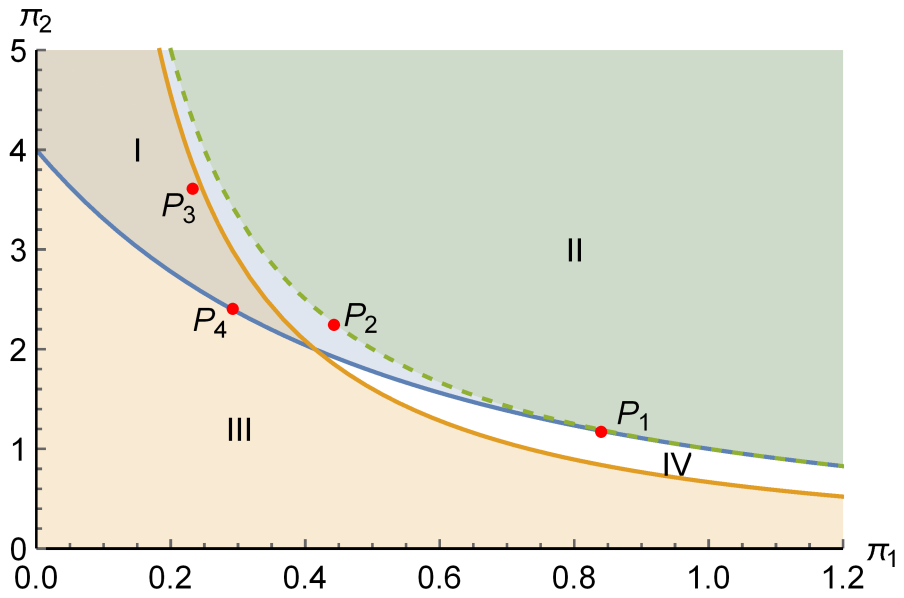

FIGURA 4.4. Plano $\pi_1 - \pi_2$. Quedan en evidencia las cuatro regiones y sus fronteras. La línea punteada es la definida por (B.4), que bisecta la región II. Los puntos 1 a 3 corresponden a las figuras C.1, 4.2 y 4.3 respectivamente. El punto 4 corresponde al set de parámetros definido en la ecuación (6.1). Fuente: Elaboración Propia

A continuación se detalla algunas características del modelo bidimensional (i.e., tanto longitudinal como lateral): 1) se pone rangos de valor a los parámetros, 2) se analiza la escalabilidad computacional del modelo, y 3) se estudia la capacidad del modelo para la *generación de gap*.

4.2.1. Aproximación de los Parámetros

En apartados anteriores de este mismo capítulo, se calculó los parámetros unidimensionales: c_1, c_3, V, τ_r y s_r. Sobre c_2 se dijo que se puede hacer función de los demás. Resta, pues, hablar sobre $q(v_i)$ (definido en la sección 3.2.1)y los parámetros de la fuerza de pista, k_1 y k_2 (definidos en la sección 3.2.2). En esta sección se buscará ponerles cotas razonables sin ahondar en valores exactos.

En el apartado 3.2.1 fueron enumeradas tres alternativas para $q(v_i)$. Cada una de ellas da lugar a parámetros distintos:

- q, para la alternativa de q constante.
- x^*, para la de *ancho* constante.
- τ_q y s_q, para la alternativa lineal.

Tómese primero el caso más simple, del *ancho* constante. El parámetro aquí es x^*, en unidades de distancia. Su valor no debe ser tan grande que afecte la capacidad a velocidades bajas entre autos (aunque podría hacerlo para autos con buses). Considérese estas restricciones para estimar una cota superior para x^*. Un ancho de pista de 3,6 m y de los autos de 1,7 m, significa $x^* < 1,9$ m (de distancia neta, vale decir, descontando el ancho de los vehículos). Supóngase que los buses afectan la capacidad de las pistas vecinas. En ese caso, se puede inferir una posible cota inferior. En efecto, un ancho de buses de 2,5 m la pondría en 1,1 m.

Para el caso de q constante, es necesario primero observar el espaciamiento de equilibrio. A flujo máximo y velocidad de flujo libre (y, por lo tanto, espaciamiento crítico), valores típicos del espaciamiento van de 54 a 67 m. (considerando capacidades de 1800 a 2200 veh/h y velocidades de 120 km/h≈33,3 m/s). Supóngase que a esa velocidad sí se afecta la capacidad en pistas aledañas entre autos. Nuevamente, si suponemos anchos de pista de 3,6 m y de autos de 1,7 m, se puede calcular:

$$q < \frac{54}{3,6 - 1,7} \approx 28,7 \tag{4.21}$$

Para la cota inferior se puede seguir una lógica similar, a velocidad cero. Sólo se invierte el supuesto: los autos en esta situación no debieran afectar la capacidad de las pistas vecinas. Suponiendo una concentración de taco alta, de 0,2 veh/m (lo que implicaría un espaciamiento de 5 m):

$$q > \frac{5}{3,6 - 1,7} \approx 2,6 \tag{4.22}$$

Nótese que el parámetro q, y en los otros casos, la función $q(v)$, es adimensional.

Para el caso lineal, se puede seguir criterios similares para obtener las cotas:

El valor de s_q no puede ser tan grande como para que a velocidad 0 afecte la capacidad. Con los anchos anteriormente descritos:

$$s_q < 1,9, \tag{4.23}$$

y que evite colisiones laterales a cualquier velocidad: $s_q > 0$.

De τ_q se espera que sí afecte la capacidad de la pista vecina para velocidades altas. Siguiendo con el mismo ejemplo:

$$s_q + V\tau_q > 1,9, \tag{4.24}$$

pero no dos pistas más allá:

$$s_q + V\tau_q < 5{,}5, \tag{4.25}$$

lo que, para valores típicos de los parámetros implica:

$$0 < \tau_q < \frac{3{,}6}{25} = 0{,}144, \tag{4.26}$$

Un caso particular de esta formulación es aquel en que τ_q y s_q derivan de τ_m y s_m.

Para refinar más allá estos valores, hará falta esperar hasta los experimentos. La tabla 4.4 resume los intervalos declarados hasta este punto.

Fuerza de Pista

Respecto a las constantes de pista, conviene hacer algunas consideraciones previas.

En dirección longitudinal, se ha dicho que el modelo debiera evitar ciertas oscilaciones. En dirección lateral, en cambio, nada hay evidente que las haga desaconsejables (mientras las trayectorias sigan siendo razonables).

Tabla 4.4. Cotas sugeridas para los parámetros de $q(v)$

formulación	parámetro	cotas sugeridas inferior	cotas sugeridas superior
q fijo	q	2,6	28,7
ancho fijo	x^*	1,1 [m]	1,9 [m]
lineal	τ_q	0 [s]	0,144 [s]
	s_q	0 [m]	1,9 [m]

Fuente: Elaboración Propia

Moridpour et al. (2010) concluyeron que un cambio de pista (CP) tardaba en promedio 4,9 segundos (4,8 para autos[7] y 8 para vehículos pesados, ponderados por su concentración). Lo hicieron a partir de datos obtenidos en autopistas estadounidenses, entre 2003 y 2004. Una hipótesis de trabajo de la presente tesis es que la fuerza de pista es una sola (tanto para mantención como cambio de pista, según se dijo en la sec. 3.2.2).

La fuerza de pista se define en función de una ecuación diferencial. En virtud de ello, se puede decir que un CP será asintótico. Hablando en términos algebráicos, nunca concluye. Por razones prácticas, consideraremos el siguiente supuesto:

> Un cambio de pista se considera exitoso si sólo resta una fracción r del mismo.

Nótese que r no es un parámetro del modelo y sólo existe para efectos de análisis. Un posible r se deriva del instante en que el vehículo toca la mediana de la pista de destino (v. figura 4.5). Para un ancho de pista de 3,6 m y uno de vehículo de 1,7 m, $r \approx 23,6\,\%$. Para un ancho de vehículo de 1,8 m, $r = \frac{1}{4}$.

[7] 4,8 s promedio, con una desv. est. de 2,1, un mínimo de 1,1 y un máximo de 8,9.

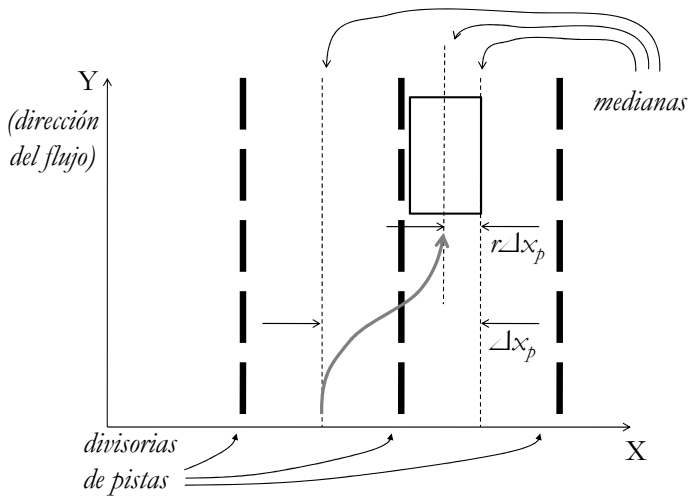

FIGURA 4.5. Diagrama de un cambio de pista. Δx_p representa el ancho de la pista. r es la fracción de medio ancho de vehículo promedio sobre aquél. Se considera exitoso el cambio de pista cuando sólo resta la fracción r. Fuente: Elaboración Propia

Más adelante se incluirá este r en los cálculos. Primeramente, hace falta volver sobre el proceso de un CP en sí. Éste se define aplicando las condiciones iniciales pertinentes a (3.8):

$$\ddot{x}(t) = -k_1\dot{x}(t) - k_2 x(t); x(0) = \Delta x_p; \dot{x}(0) = 0, \tag{4.27}$$

que representa un oscilador armónico amortiguado. Las condiciones iniciales se pueden leer como: Δx_p es el ancho de pista y la velocidad lateral inicial es cero. Tanto k_1 como k_2 deben ser positivos para que la fuerza modele una reducción de $x(t)$.

De la misma definición se desprende que la aceleración en $t = 0$ es $-k_2\Delta x_p$. Esto permite acotar k_2 en función de la máxima aceleración lateral, a^x_{max}:

$$0 < k_2 < \frac{a^x_{max}}{\Delta x_p}, \tag{4.28}$$

de donde cualquier valor razonable para k_2 será menor que 1 $\left[\frac{1}{s^2}\right]$ (toda vez que una aceleración lateral mayor a 3,6 $\left[\frac{m}{s^2}\right]$ resulta inverosímil).

Ahora bien, la solución de (4.27) es:

$$x(t) = \Delta x_p e^{-\frac{k_1}{2}t}\left(\frac{k_1}{\sqrt{k_1^2-4k_2}}\sinh\left(\frac{\sqrt{k_1^2-4k_2}}{2}t\right)+\cosh\left(\frac{\sqrt{k_1^2-4k_2}}{2}t\right)\right). \quad (4.29)$$

De modo análogo a la fuerza de repulsión, se pueden distinguir tres casos:

I) $k_1^2 - 4k_2 < 0$, amortiguamiento subcrítico. La ecuación (4.29) se puede reescribir como:

$$x(t) = \Delta x_p \frac{2\sqrt{k_2}}{\sqrt{4k_2-k_1^2}} e^{-\frac{k_1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2}t + \arg\left(\sqrt{4k_2-k_1^2}+ik_1\right)\right), \quad (4.30)$$

en que la primera parte del lado derecho es la *envolvente* del seno que multiplica.

II) $k_1^2 - 4k_2 = 0$, amortiguamiento crítico. Nuevamente, (4.29) se traduce en:

$$x(t) = \Delta x_p e^{-\sqrt{k_2}t}\left(1+\sqrt{k_2}t\right) \quad (4.31)$$

III) $k_1^2 - 4k_2 > 0$, amortiguamiento supercrítico.

En los tres casos, conocidos k_1 y k_2 se puede obtener el tiempo que toma un CP:

$$t \mid x(t) = rx(0) = r\Delta x_p$$

Esto último, permite obtener una región para ambos parámetros en el plano $k_1 - k_2$. La figura 4.6 ilustra dicho plano. Las cotas indican el tiempo de CP para $r = \frac{1}{4}$ en función de k_1 y k_2.

En los casos crítico y subcrítico, incluso se puede obtener expresiones para $t(k_1, k_2)$:

$$t = \frac{2}{k_1}\left(\log\frac{2}{r} + \frac{1}{2}\log\frac{k_2}{k_1^2} - \frac{1}{2}\log\left(4\frac{k_2}{k_1^2}-1\right)\right), \quad (4.32)$$

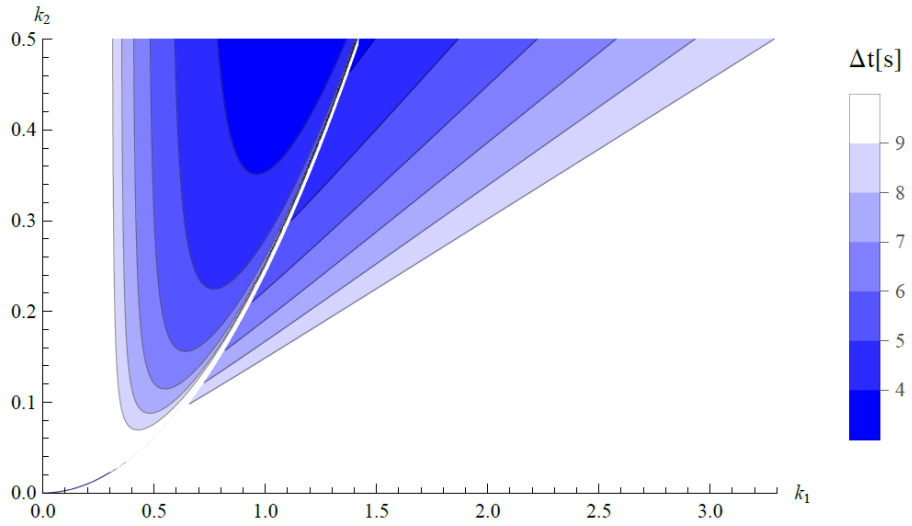

FIGURA 4.6. Plano $k_1 - k_2$ de la fuerza de pista. Las cotas de nivel representan el tiempo para concretar un cambio de pista (r=25 %). Se distingue la semiparábola $k_2 = \frac{k_1^2}{4}$ de amortiguamiento crítico. A la derecha, amortiguamiento supercrítico. A la izquierda, subcrítico (se consideró la envolvente para calcular el tiempo). Fuente: Elaboración Propia

para el caso subcrítico (resolviendo para la envolvente), y:

$$t = \frac{-W_{-1}\left(-\frac{r}{e}\right) - 1}{\sqrt{k_2}}, \tag{4.33}$$

para el crítico, donde $W_{-1}(x)$ es la rama inferior de la relación de Lambert $x = We^W$.

Una observación importante es que si se busca minimizar el número de parámetros, se puede reducir a siete. Para ello, basta escoger los casos críticos para c_2 y k_2, y uno de los $q(v)$ más simples (i.e. los que sólo toman un parámetro: de ancho o razón fijos).

4.2.2. Escalabilidad Computacional

En dos dimensiones interesa la interacción ya no sólo con el líder, sino con todo un entorno. Una interacción entre pares de agentes implica una cantidad cuadrática de operaciones. En virtud de ello, puede pensarse que la complejidad del modelo fuera $O(n^2)$. Sin embargo, la repulsión sólo puede tener lugar entre vehículos dentro de una distancia. En efecto:

$$
\begin{aligned}
f_i^r &< 0 \\
(\dot{y}_k - \dot{y}_i)c_2 + (y_k - y_i - \tau_r \dot{y}_i - s_r)c3 &< 0 \\
(\dot{y}_k - \dot{y}_i)\frac{c_2}{c_3} + y_k - y_i - \tau_r \dot{y}_i - s_r &< 0 \\
y_k - y_i &< -\dot{y}_k \frac{c_2}{c_3} + \dot{y}_i(\tau_r + \frac{c_2}{c_3}) + s_r,
\end{aligned}
$$

en el peor caso (veh. k detenido), $\dot{y}_k = 0$:

$$
y_k - y_i < \dot{y}_i(\tau_r + \frac{c_2}{c_3}) + s_r, \tag{4.34}
$$

valor que está acotado, cualesquiera que sean los valores de los parámetros.

Tabla 4.5. Distancia máxima de repulsión para algunas parametrizaciones

Parametrización	Distancia máxima	Espaciamiento de taco
figura 4.2	96,28 m	6,00 m
figura 4.3	191,67 m	6,67 m
figura C.1	74,04 m	3,33 m
figura 6.1	184,44 m	6,67 m

Fuente: Elaboración Propia

La tabla 4.5 enumera este valor calculado para ejemplos de otras secciones. En la práctica, raramente será necesario verificar más de 10 vehículos por pista.

Asimismo, el número de pistas es acotado, porque el ancho de la fuerza de repulsión es acotado ($\frac{s_r + V\tau_r}{q(V)}$).

Por todo lo anterior se puede afirmar que:

La complejidad computacional es lineal en la cantidad de vehículos simulados, $O(n)$.

4.2.3. Generación de Gap

Tal como está definido, el modelo no contempla forma alguna de aceptación de gap. Por lo tanto, se apoyará exclusivamente en la generación de gap como mecanismo de adecuación. En efecto, sólo la repulsión evitará colisiones en la pista de destino. Esta fuerza (permitida en dirección oblicua respecto a los ejes lateral y longitudinal), será la que cree las distancias de seguridad entre vehículos. Está afirmación deberá ser verificada experimentalmente.

5. IDENTIFICACIÓN Y REPRODUCCIÓN DE UN NUEVO FENÓMENO RELACIONADO A LA POSICIÓN LATERAL

Los contenidos de este capítulo y otras secciones relacionadas con la AC están recogidos en Delpiano et al. (2013, 2014)

En este capítulo, se busca lograr lo propuesto en los objetivos (sección 1.1): "Identificar y documentar un nuevo fenómeno relativo a la posición lateral de los vehículos".

Como medida de seguridad, los conductores tienden a guardar distancia con sus vecinos. Este comportamiento se encuentra implícito en los modelos tradicionales en dirección longitudinal. Sin embargo, en dirección lateral no lo está. Esto parece tener consecuencias importantes en la práctica.

Particularmente, se propone lo siguiente: los vehículos se comportan distinto cuando están acompañados lado a lado por otro vehículo. Por obvio que pueda sonar el fenómeno, nunca ha sido medido. En efecto, no existen a la fecha análisis o mediciones empíricas que lo caractericen. Por simplicidad, defínanse los siguientes términos:

Definición 5.1. *Posición colateral: la de dos vehículos lado a lado. Específicamente, se dirá que dos vehículos* están en posición colateral *si:* I*) están en pistas contiguas y* II*) su posición longitudinal difiere en 5 m o menos.*

Definición 5.2. *Anomalía colateral (AC): el comportamiento anómalo o distinto de un vehículo cuando está acompañado de otro en posición colateral.*

Se intentará en primer lugar encontrar características cuantificables de la AC (sección 5.1). Esto debe hacerse en base a datos de trayectorias reales de vehículos. La hipótesis es que los vehículos escogerán posiciones laterales más lejanas cuando tengan un vecino en posición colateral. Esto último, en desmedro de posiciones cercanas que pudieran significar un riesgo. Asimismo, las decisiones de movimiento (tanto longitudinal como lateral) se ven modificadas al tener compañía en posición colateral.

En segundo lugar se tomará como base estos resultados para intentar reproducir el fenómeno mediante el modelo propuesto (sección 5.2).

5.1. Identificación y Cuantificación de la Anomalía Colateral (AC)

La presente sección se divide en dos apartados: el primero de ellos detalla la metodología conducente a cuantificar la llamada anomalía colateral; el segundo, detalla los resultados de dichos experimentos.

5.1.1. Experimentos

Se busca verificar la existencia y cuantificar la Anomalía Colateral. Para ello es necesario efectuar mediciones objetivas y repetibles. Las mediciones deben dar luz sobre las elecciones de posición lateral de los conductores. En concreto, se busca saber cómo influye un vehículo en su pista vecina. Se realizarán las siguientes mediciones, a partir de un vehículo utilizado como referencia:

- Reconstrucción de la distribución, $P(x, y)$, de vehículos en la pista adyacente. Se entiende ésta como la densidad de probabilidad de encontrar un vecino en la posición (x, y) (relativa al vehículo de referencia).
- Dos test estadísticos que comparen $P(x \mid y)$ para valores de y cercanos y lejanos.

Las mediciones se llevarán a cabo sobre datos reales de trayectorias de vehículos. Las trayectorias a analizar son las obtenidas en el contexto del proyecto NGSIM (de la Federal Highway Administration del Departamento de Estado de EE.UU.). Los conjuntos de datos (*datasets*) utilizados son *Prototype* (FHWA, 2004), I-80 (FHWA, 2006) y US-101 (FHWA, 2007).

Los dos primeros corresponden a una sección de la autopista Interestatal 80 (en California, EE.UU.). La sección incluye una zona de *weaving* con 6 pistas. La pista 1 es para vehículos de alta ocupación (HOV). La pista 6 es la pista de (des)aceleración de las rampas de entrada y salida. La separación entre ambas rampas es de 489 metros. Las pistas tienen aproximadamente 3,66 mts. de ancho (12 pies).

El primer conjunto de datos fue recolectado en diciembre de 2003. Comprende media hora de tráfico fuera de punta (2:35 a 3:05 P.M.) a intervalos de 1/15 de

segundo. El segundo fue recolectado en abril de 2005. Comprende 45 minutos de tráfico en hora punta vespertina a intervalos de 0,1 segundos.

El tercer conjunto de datos corresponde a una sección de la autopista US-101 (también conocida como "Hollywood Highway"). La sección tiene 640 metros de longitud e incluye una zona de *weaving* de 210 mettros. Tiene cinco pistas y fue recolectada en punta matutina en junio de 2005. Caracteriza 45 minutos de tráfico a intervalos de 0,1 segundos.

En adelante, se hará referencia a los conjuntos de datos como Prototype, I-80 y US-101.

Muestras

Para cada conjunto de datos, se toman muestras cada 1000 intervalos. En cada muestra se forman todos los posibles pares de vehículos dentro de una distancia dada. Para cada par de vehículos, se miden la posición, velocidad y aceleración relativas. Se utiliza coordenadas cartesianas, con ejes en las direcciones lateral y longitudinal (i.e., transversal, respecto de la vía). La velocidad y aceleración son calculadas mediante diferencias finitas.

La elección de mil intervalos como período de muestreo obedece a una razón práctica. Dada la longitud de los segmentos, permite una cierta independencia temporal de las muestras. Cada muestra puede ser entendida como una fotografía aérea de muchos vehículos. Es entre estos que se forma parejas y se mide las variables de movimiento relativo. Contando los tres conjuntos de datos, se obtuvo un total de 81 de dichas muestras.

La figura 5.1 muestra cómo se calcula la distancia para cada par de vehículos. Primero se escoge como *referencia* un vehículo en las pistas 1 a 5. Se usa su esquina anterior derecha como origen de un sistema de coordenadas. Luego se mide la distancia (i.e., posición relativa) a la esquina anterior izquierda de los vehículos *referidos*. Estos son todos los vehículos cercanos en la pista adyacente a la derecha. Se considera cercano a todo vehículo a 40 metros de distancia longitudinal o menos (v. figura 5.2).

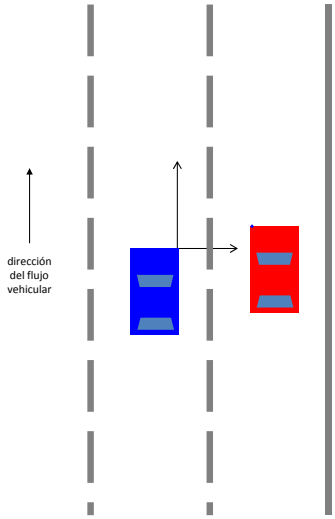

FIGURA 5.1. Todos los vehículos en las pistas 1 a 5 son usados como referencia. Se usa la esquina anterior derecha como origen de un sistema de coordenadas cartesianas. Luego se escoge un vehículo distinto como *referido*. Se mide la distancia entre ambos vehículos, usando la esquina anterior izquierda del referido. De esta manera, se mide distancia neta en dirección lateral. Junto con la distancia, se calcula velocidad y aceleración relativas en ambos ejes. En la figura, el tráfico avanza hacia arriba. Fuente: Elaboración Propia

Una simple inspección visual permite comprobar que más allá no se perciben efectos notorios (en términos de elección de posición lateral de los vehículos). La tabla 5.1 muestra el total de pares de vehículos aportados por cada conjuntos de datos.

TABLA 5.1. Pares de vehículos considerados

Conjunto de Datos	No. de pares de vehículos considerados
I-80	18.243
US-101	12.620
Prototype	4.290

Fuente: Elaboración Propia

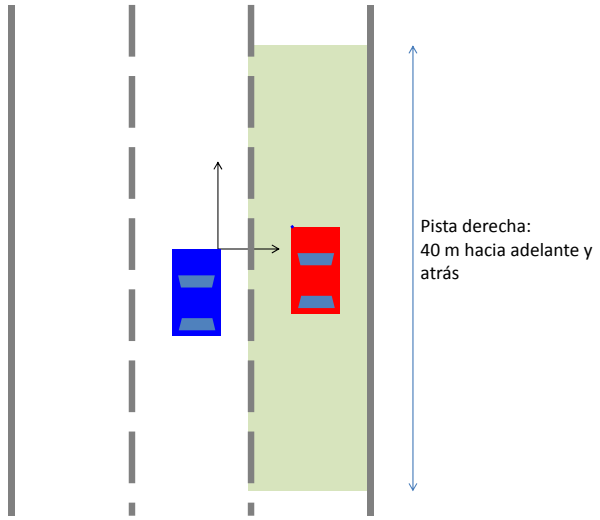

FIGURA 5.2. Región de la que se toman los vehículos *referidos* a partir de una referencia. Se considera sólo la pista inmediatamente a la derecha para evitar repetir pares. Fuente: Elaboración Propia

5.1.1.1. Reconstrucción de la Función de Densidad de Probabilidad

El primer experimento consiste en reconstruir $P(x \mid y)$ (i.e. la probabilidad de elegir una determinada distancia lateral, x, dada una longitudinal, y). Conocer dicha función permitirá visualizar de manera directa la anomalía colateral. Para conseguirlo se toma el conjunto de puntos obtenidos y se procesa de la siguiente manera:

1) se aplica un filtro gaussiano para aproximar la densidad de probabilidad no condicional.
2) se integra en dirección lateral (x), y
3) se escala la función resultante para obtener acumuladas para cada valor de y.
4) Finalmente, se agregan las cotas o curvas de nivel $P(X < x|Y) = \alpha_i$, para comparar. Para una visión general, se toma $\alpha_i \in \{1\,\%, 3\,\%, 5\,\%, 25\,\%, 50\,\%, 75\,\%\}$.

Llamaremos *gráfico colateral* al diagrama resultante. La anomalía colateral debiera implicar una curvatura de las cotas para y cercano a 0.

5.1.1.2. Test de Kolmogorov-Smirnov y Test de Diferencias de Medias

Se define que dos vehículos tienen posición colateral si están cerca uno del otro. Concretamente, si están en pistas adyacentes y a una distancia longitudinal (entre parachoques frontales) menor a 5 metros. Si están más lejos, se dice que están en posición mutua no-colateral.

Como una segunda medición, más cuantitativa, se harán dos *tests* estadísticos. Ambos buscan comparar la distribución de distancias laterales entre pares de vehículos: de una parte la de los que están en posición colateral y de otra los que no. Los tests son los siguientes: I) el cálculo de un intervalo de confianza al 95 % para la diferencia de medias, y II) un test de Kolmogorov-Smirnov (K-S) para dos muestras. El primero será calculado a nivel de conjunto completo de datos; el segundo, que no necesita muestras tan grandes, a distintos niveles de agregación: por pista, por grupos de dos pistas y a nivel de conjunto completo. Adicionalmente, se buscó un subconjunto de datos con un número bajo de cambios de pista. Esto último con el fin de conjeturar algo sobre la relación entre la AC y los cambios de pista. El subconjunto elegido fue US-101 antes de la rampa de entrada.

Un test K-S para dos muestras sirve para dirimir si (las muestras) provienen o no de la misma distribución. Si el valor-P es menor que un α, las muestras vienen de distribuciones diferentes. Esto último, con un nivel de confianza de $(1 - \alpha)$. En otras palabras, a menor valor-P, más probable es que las muestras vengan de distribuciones distintas.

Tasa de cambio de pistas

Queda abierta la pregunta sobre la correlación entre anomalía colateral y cambios de pista (CCPP). Se busca saber si la AC puede o no ser explicada únicamente por CCPP. Para ello, se debe caracterizar cada subconjunto por la cantidad de CCPP ejecutados en él. Pero los segmentos y períodos de tiempo varían en longitud para cada conjunto de datos. Por eso, se necesita una medida que sea al mismo tiempo independiente del tiempo y la distancia.

Sean, para el segmento, período y conjunto de pistas observado:

- C el número total de cambios de pista observados,
- Q el flujo, y
- T la duración del intervalo de tiempo considerado.

El promedio de cambios de pista por vehículo se puede calcular como:

$$\frac{C}{QT} \tag{5.1}$$

Sean L y s el largo del segmento y la velocidad media espacial, respectivamente. En promedio, cada vehículo permanece L/s unidades de tiempo en el segmento. Por simplicidad se asume que este tiempo es igual para quienes cambian de pista y para los que no.

Sea t el tiempo que toma un vehículo en promedio en un cambio de pista. Un vehículo que cambia de pista exactamente una vez pasará una fracción de tiempo igual a:

$$\frac{t}{\frac{L}{s}} = \frac{ts}{L}, \tag{5.2}$$

en el proceso de cambio de pista.

Se puede estimar la probabilidad de que un vehículo cualquiera esté cambiando de pista (en un instante de tiempo arbitrario). En efecto, dicha estimación se obtiene de multiplicar (5.1) por (5.2):

$$r = \frac{tsC}{QTL} \tag{5.3}$$

Moridpour et al. (2010) midieron t para una muestra tomada de US-101 e I-80. Encontraron que era igual a 4,8 segundos para autos y 8 para vehículos pesados. Esos valores, ponderados por la composición del flujo, arrojan como promedio $t \approx 4,9$ s. Por simplicidad, se asumirá que este valor es el mismo para todos los subconjuntos

de datos. En adelante nos referiremos a la tasa de cambio de pistas r, de un conjunto dado. Esta tasa se calcula como:

$$r = 4{,}9\frac{sC}{QTL} \tag{5.4}$$

Nótese que esta cantidad es adimensional y está corregida por la distancia o el tiempo. Es, por ende, aplicable a subconjuntos de datos, sin importar el criterio usado para dividirlos (i.e., sea sólo una pista, un sub-segmento o un sub-período de tiempo). Afortunadamente, los valores de todas las variables involucradas son conocidos. C, Q, T, L y s son conocidos a nivel de conjunto de datos y pista. Para I-80 y US-101 son, además, conocidos por segmentos de 100 ft (30,84 mts.) y períodos de 15 minutos.

A la luz de la definición de r, se puede hacer una precisión: Ya se dijo que se quiere usar como referencia un subconjunto de datos con pocos CCPP. En otras palabras, se busca un subconjunto con un r bajo. Entre los tres conjuntos de datos, US-101 es el mejor en este sentido. Si además se deja fuera la zona entre las rampas de entrada y salida (donde se produce el mayor número de cambios de pista), r disminuye aún más. De hecho, el sub-segmento anterior a la rampa de entrada de US-101 tiene un $r \approx 1{,}31\,\%$. Éste valor es el más bajo para un subconjunto de datos de un tamaño razonable.

5.1.2. Resultados

Las figuras 5.3 a 5.5 muestran las distribuciones resultantes. Incluyen también las curvas de nivel y líneas de tendencia para los tres conjuntos de datos. Nótese que las distancias laterales son *netas*, (i.e. sin contar el ancho de los vehículos). Distancias laterales negativas implican que los vehículos se yuxtaponen al mirarlos de frente.

Algunas curvas se desvían más de medio metro hacia la derecha cerca del cero longitudinal. Este resultado confirma que los conductores prefieren guardar distancia en presencia de un vehículo en posición colateral. La desviación es evidente en los tres conjuntos de datos, incluso para la curva de nivel del 50 %.

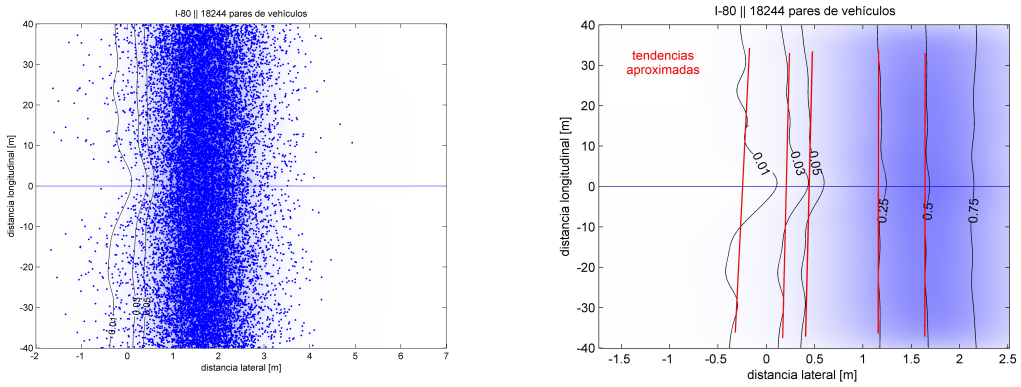

FIGURA 5.3. Gráfico colateral: Posición relativa de los vehículos, dado un vehículo en la pista izquierda. Se muestra la distribución reconstruida y las curvas de nivel para el conjunto de datos I-80. Cada punto, representa la posición relativa de un vehículo respecto a uno en $(0, 0)$. El gráfico de la derecha elimina los puntos y agrega líneas aproximadas de tendencia (con una escala lateral ligeramente aumentada). Fuente: Elaboración Propia

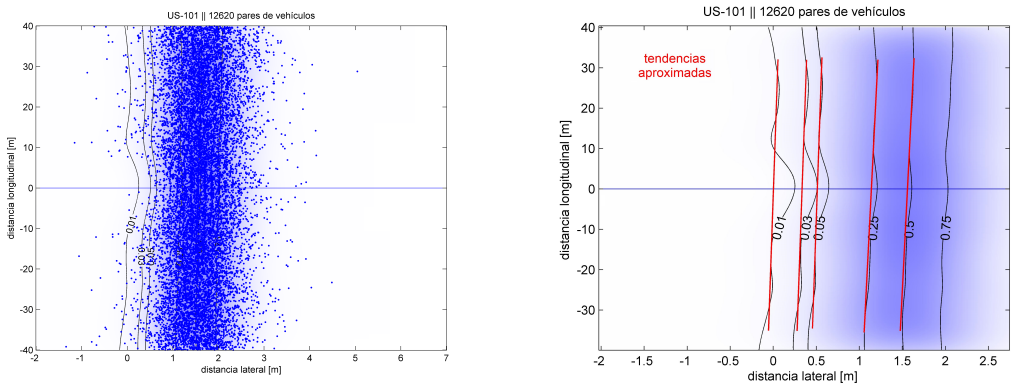

FIGURA 5.4. Gráfico colateral del conjunto de datos US-101. Fuente: Elaboración Propia

Se muestra la comparación de las distribuciones: a nivel de pista en la tabla 5.2; a nivel de subconjuntos o subsets en la tabla 5.3, y a nivel de conjuntos de datos completos en la tabla 5.4. Ésta última también muestra la diferencia de medias con su estimador e intervalos de confianza. En cada caso se cuantifican los conjuntos de pares cuyas distribuciones se comparan: *cercanos* y *lejanos* (entendidos como los que están en posición colateral y los que no, respectivamente).

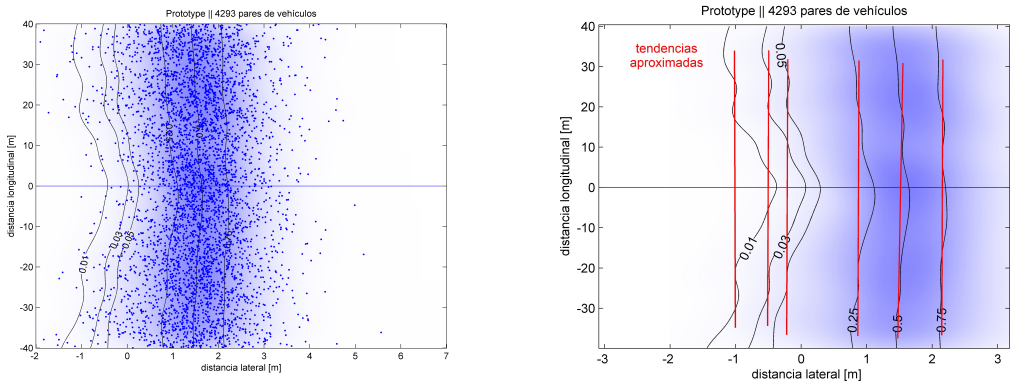

FIGURA 5.5. Gráfico colateral del conjunto de datos *Prototype*. Fuente: Elaboración Propia

Los tests no son exitosos a nivel de pista en todos los casos. Sin embargo, se puede argumentar que ello obedece principalmente al tamaño muestral. De hecho, a mayores niveles de agregación, más claramente se verifica la anomalía. Estos aparentes fracasos no pueden ser vistos como evidencia *contraria* a la AC.

Con un $r = 3{,}74\,\%$, aprox. 40 mm de la diferencia de medias puede atribuirse a cambios de pista. En algunos casos, este valor queda fuera del intervalo de confianza determinado (para la diferencia de medias). El ejemplo más notorio se da en la pista 6 de I-80: con $r = 3{,}12\,\%$ tiene un intervalo de confianza que va de 302 a 701 mm.

Obsérvese también lo que sucede con los conjuntos y subconjuntos de datos que pasaron el test de medias. En un 94 % de ellos la mediana del intervalo (i. e., el estimador de máxima verosimilitud para la diferencia de medias) resulta mayor a la atribuible a cambios de pista.

I-80 es el conjunto que muestra la menor diferencia de medias. Este resultado se condice con el hecho de que es el que presenta la mayor congestión (y consiguientemente la menor velocidad). En tanto, la mayor diferencia de medias se da en *Prototype*, en horario fuera de punta. De hecho, es el que tiene las velocidades más altas entre los tres. Se puede argumentar que la mayor velocidad impone un cuidado mayor a

Tabla 5.2. Resultados de los tests de Kolmogorov-Smirnov a nivel de pista

		Número de pares			
Conjunto de Datos	Pista	Lejanos	Cercanos	Valor-P de K-S	Tasa r
I-80	1	1649	243	43,12 %	2,01 %
	2	3174	463	14,29 %	2,21 %
	3	3421	508	35,83 %	3,16 %
	4	3682	533	13,20 %	3,42 %
	5	3164	486	6,66 %	4,07 %
	6	832	89	0,01 %	3,12 %
US-101	1	2980	426	57,08 %	2,32 %
	2	2850	416	6,91 %	2,06 %
	3	2682	374	1,03 %	3,18 %
	4	2384	354	0,34 %	3,73 %
	5	135	19	74,56 %	3,52 %
Prototype	1	730	128	1,03 %	5,54 %
	2	893	117	70,54 %	8,25 %
	3	762	115	2,36 %	13,55 %
	4	763	126	17,28 %	13,90 %
	5	506	54	12,43 %	16,08 %
	6	16	—	—	4,93 %

Fuente: Elaboración Propia

los conductores. A consecuencia de ello, tenderían a guardar distancias mayores al adelantar por una pista vecina.

Los gráficos muestran que la distribución de probabilidad de la posición lateral cambia: los vehículos con compañía en posición colateral se comportan distinto a

Tabla 5.3. Resultados de los tests de Kolmogorov-Smirnov a nivel de subconjuntos

Conjunto de Datos	Subconjunto	Número de pares		Valor-P de K-S	Tasa r
		Lejanos	Cercanos		
I-80	Pistas 1-2	4823	706	18,91 %	2,13 %
	Pistas 2-3	6595	971	5,44 %	2,67 %
	Pistas 3-4	7103	1041	7,39 %	3,30 %
	Pistas 4-5	6846	1019	1,70 %	3,76 %
	Pistas 5-6	3996	575	0,02 %	3,56 %
US-101	Pistas 1-2	5830	842	4,77 %	2,19 %
	Pistas 2-3	5532	790	0,11 %	2,61 %
	Pistas 3-4	5066	728	0,08 %	3,46 %
	Pistas 4-5	2519	373	0,31 %	3,63 %
	Antes de la rampa	3256	482	0,47 %	1,31 %
Prototype	Pistas 1-2	1682	250	1,99 %	7,02 %
	Pistas 2-3	1655	232	4,49 %	10,62 %
	Pistas 3-4	1525	241	0,49 %	13,73 %
	Pistas 4-5	1269	180	3,50 %	14,98 %
	Pistas 5-6	541	54	9,47 %	10,56 %

Fuente: Elaboración Propia

quienes no la tienen. Con un nivel de agregación de dos pistas, ello se puede afirmar con al menos un 93 % de confianza. Sólo hay dos excepciones: las pistas 1-2 de I-80 y las pistas 5-6 de *Prototype*. El segundo, es por mucho el con el menor tamaño muestral. El primero, incluye una pista HOV (*High Occupancy Vehicles*) que viaja

Tabla 5.4. Kolmogorov-Smirnov a nivel de conjuntos de datos completos

	Número de pares				Diferencia de medias [mm] (intervalo de confianza al 95 %)		
Conjunto	Lejanos	Cercanos	Valor-P de K-S	Tasa r	lím. inferior	media	lím. superior
I-80	15922	2321	$< 0{,}01\,\%$	3,10 %	22,8	48,4	74,1
US-101	11031	1589	$< 0{,}01\,\%$	2,94 %	28,3	55,0	81,7
Prototype	3748	542	$< 0{,}01\,\%$	10,35 %	64,4	133,3	202,2

Fuente: Elaboración Propia

88 % más rápido que su vecina (11,1 vs 5,9 m/s de velocidad media espacial). Resulta razonable pensar que la gran diferencia de velocidades disminuya el efecto.

Los resultados (tablas 5.3 y 5.4) muestran la preferencia de posiciones colaterales *anómala*. Se ven más claramente en US-101 y *Prototype* que en el I-80. En éste, la AC pierde fuerza al analizar a nivel de pista. Sin embargo, se hace evidente al aumentar el nivel de agregación y el tamaño muestral.

Queda abierta la pregunta sobre qué otras variables influyen en la anomalía colateral (aparte de las ya mencionadas: velocidad absoluta y relativa, tasa de cambios de pista y tamaño muestral).

Estos resultados son consistentes con la idea de una repulsión en dos dimensiones. Del mismo modo lo son otros resultados documentados: la fricción lateral (Case et al., 1953) y el seguimiento vehicular escalonado (Gunay, 2007).

5.2. Reproducción

Ya medida empíricamente la AC, se procederá a reproducirla con el modelo.

5.2.1. Experimentos

Las mismas métricas presentadas en 5.1.1 deberán usarse para los experimentos de simulación. En particular, parece oportuno estudiar cómo se comporta la AC para

distintos q. Deberá tener en cuenta lo dicho sobre las cotas y distintas formas de calcular $q(v_i)$ (v. tabla 4.4).

Adicionalmente, interesa conocer la varianza de la distancia lateral para compararla con la realidad. La tabla 5.5 lista los experimentos a ejecutar en este punto. Estos fueron dispuestos abarcando el espacio de parámetros, con acento en ciertas regiones. Específicamente, las regiones *reforzadas* son aquellas de mayor interés.

Tabla 5.5. Experimentos con $q(v)$ para reproducir la Anomalía Colateral

experimento	formulación	parámetro	valor
1)	q fijo	q	5
2)			15
3)			20
4)			27
5)			30
6)	*ancho* fijo	x^*	1,1 m
7)			1,9 m
8)			2 m
9)			2,1 m
10)			2,2 m
11)			2,3 m
12)	lineal	τ_q — s_q	0,100 s — 0,01 m
13)			0,076 s — 0,05 m
14)			0,066 s — 0,33 m
15)			0,060 s — 0,33 m
16)			0,050 s — 0,40 m
17)			0,033 s — 0,50 m

Fuente: Elaboración Propia

Los parámetros para el modelo 1D son los mismos que en la figura 4.3. Los parámetros de pista son $k_1 = 1$ y $k_2 = \frac{1}{4}$. Estos valores imponen un tiempo de cambio de pista $t \approx 5{,}39$ s.

Se ejecutará simulaciones de 45 minutos de duración. La vía simulada tiene 1 km de longitud, con un cuello de botella en $y = 500$ mts. En ese punto, el segmento se reduce de seis a cinco pistas.

Con estos datos, se puede calcular la tasa de cambios de pista para los experimentos. En efecto, reemplazando con lo dicho en (5.3):

$$r = \frac{tsC}{QTL} = \frac{5{,}39sC}{Q \times 2700 \times 1000} \tag{5.5}$$

5.2.2. Resultados

La tabla 5.6 muestra la desviación estándar muestral (s) de las distancias laterales. Se observa que en los tres conjuntos de datos dicho valor está entre los 50 y 90 cm. Asimismo, el valor s de los pares en posición colateral es sistemáticamente menor a la del resto. La diferencia, sin embargo, va de un 10 a un 15 % solamente.

Tabla 5.6. Desviación estándar (muestral) de la distancia lateral

	s [m]	
Conjunto	Cercano	Lejano
US-101	0,502	0,545
I-80	0,580	0,646
Prototype	0,757	0,832

Fuente: Elaboración Propia

La tabla 5.7 resume los resultados de los tests de K-S para los distintos experimentos. En no pocos de ellos se observan flujos desmedidamente bajos. Especialmente en el experimento no. 1, pero también en 2 y 3, y 9 al 16.

Tabla 5.7. Test de Kolmogorov-Smirnov sobre resultados de simulación

	Número de pares			
Experimento	Lejanos	Cercanos	Valor-P de K-S	Tasa r
1)(v. tabla 5.5)	0	0	–	21,51 %
2)	345	5	0,020 %	24,25 %
3)	455	20	0,000 %	18,24 %
4)	12290	1750	0,041 %	6,34 %
5)	12030	1655	0,275 %	5,95 %
6)	12020	1620	0,503 %	5,49 %
7)	12665	1715	0,000 %	7,12 %
8)	10265	1360	0,000 %	7,71 %
9)	5035	665	0,000 %	9,75 %
10)	3810	460	0,000 %	10,70 %
11)	3305	410	0,000 %	11,86 %
12)	295	15	0,000 %	24,78 %
13)	1780	225	6,633 %	9,52 %
14)	605	20	0,053 %	17,82 %
15)	2925	290	0,324 %	11,24 %
16)	3310	480	5,287 %	6,52 %
17)	12585	1785	0,001 %	5,84 %

Fuente: Elaboración Propia

La tabla 5.8, por su parte, resume el test de diferencia de medias de las simulaciones. Se incluyen los límites y el centro del intervalo de confianza al 95 %. Se agrega también la desviación estándar muestral, para comparación con la realidad. Tienden a repetirse los resultados inverosímiles en los mismos experimentos.

Tabla 5.8. Test de Diferencia de Medias sobre resultados de simulación

	Diferencia de medias (I.C. al 95 %, en [mm])			s [m]	
Experimento	mín	media	máx	Cercano	Lejano
1)	–	–	–	–	–
2)	1251,6	1369,3	1487,0	0,000	1,115
3)	553,2	856,5	1159,7	0,674	0,744
4)	42,0	56,5	71,0	0,271	0,399
5)	45,7	64,1	82,5	0,347	0,427
6)	50,1	66,9	83,8	0,311	0,411
7)	103,8	121,7	139,6	0,326	0,521
8)	89,6	108,6	127,7	0,311	0,489
9)	157,0	191,5	226,0	0,389	0,640
10)	164,9	205,4	246,0	0,386	0,630
11)	177,5	213,4	249,2	0,295	0,636
12)	1338,9	1521,1	1703,3	0,226	1,243
13)	−36,7	16,0	68,7	0,364	0,488
14)	176,8	400,3	623,7	0,488	0,807
15)	5,5	53,5	101,4	0,368	0,619
16)	18,1	43,6	69,2	0,244	0,390
17)	43,2	56,6	70,1	0,255	0,368

Fuente: Elaboración Propia

En todos los experimentos (excepto el 3 y el 14, ya descartados por otras razones) se verifican desviaciones estándar muy bajas. En varios de ellos se produce otro

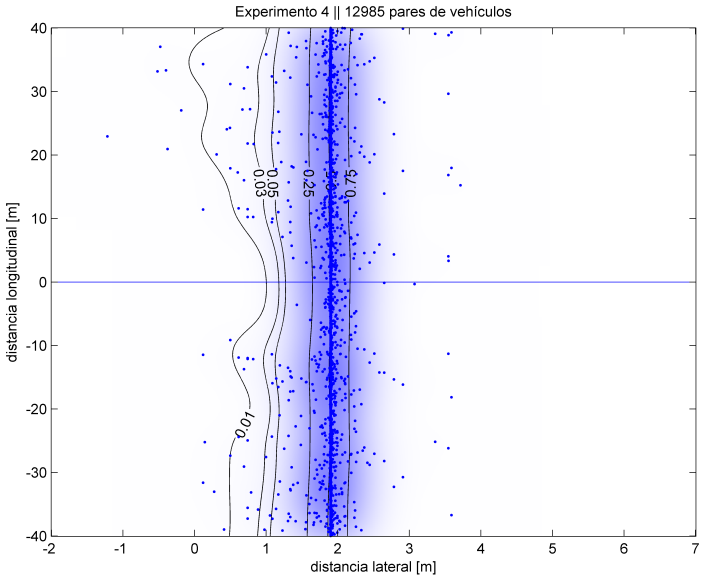

FIGURA 5.6. Gráfico colateral del experimento 4. Fuente: Elaboración Propia

problema: la diferencia de este valor entre los pares en posición colateral y el resto es muy alta.

Teniendo en cuenta todos los resultados tabulados, cabe hacer algunas observaciones. Sólo los experimentos 4 al 8 y el 17 presentan resultados cualitativamente aceptables. Cuantitativamente hablando, ninguno de ellos muestra una desviación estándar aceptable. Este resultado pareciera sugerir la exploración de una formulación de mayor orden. Por ejemplo, una fuerza de pista cuadrática podría resultar menos estricta cerca del centro de pista. Esto, a su vez, redundaría en una desviación estándar mayor en la distancia lateral.

Antes de mirar los gráficos, el experimento 5 es el que parece retratar mejor la realidad. Lo sigue, aparentemente, el 6. El 7 también es digno de mención

Llegado este punto, sólo interesan los gráficos colaterales de algunos experimentos. En particular, los de los experimentos 4 a 8 y el 17. Las figuras 5.6 a 5.11 muestran dichos gráficos.

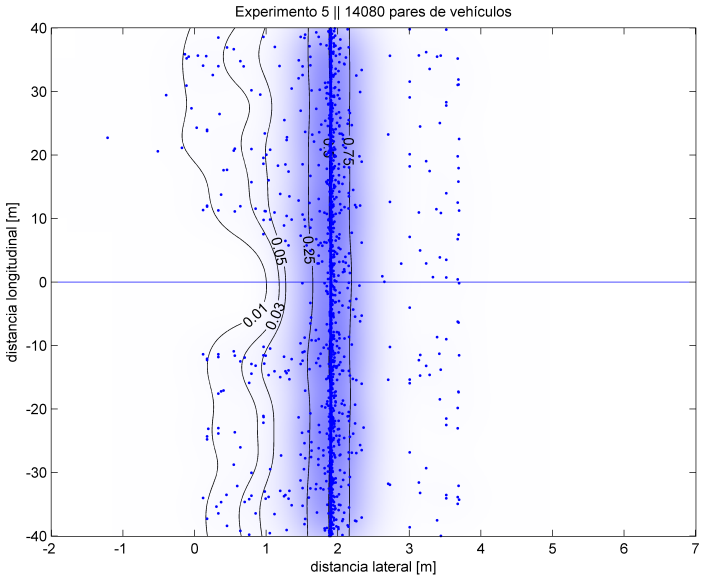

FIGURA 5.7. Gráfico colateral del experimento 5. Fuente: Elaboración Propia

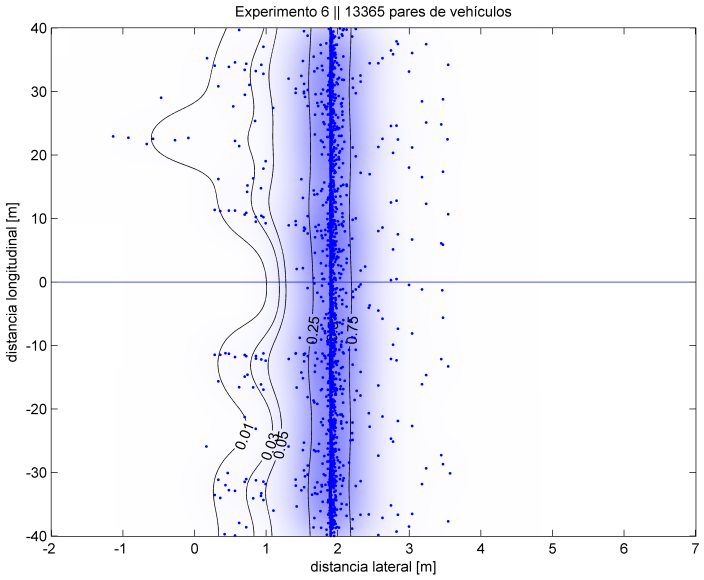

FIGURA 5.8. Gráfico colateral del experimento 6. Fuente: Elaboración Propia

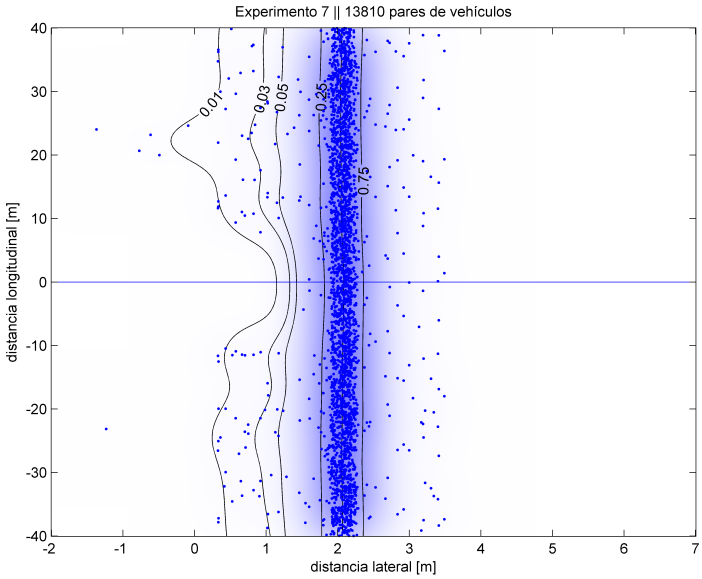

FIGURA 5.9. Gráfico colateral del experimento 7. Fuente: Elaboración Propia

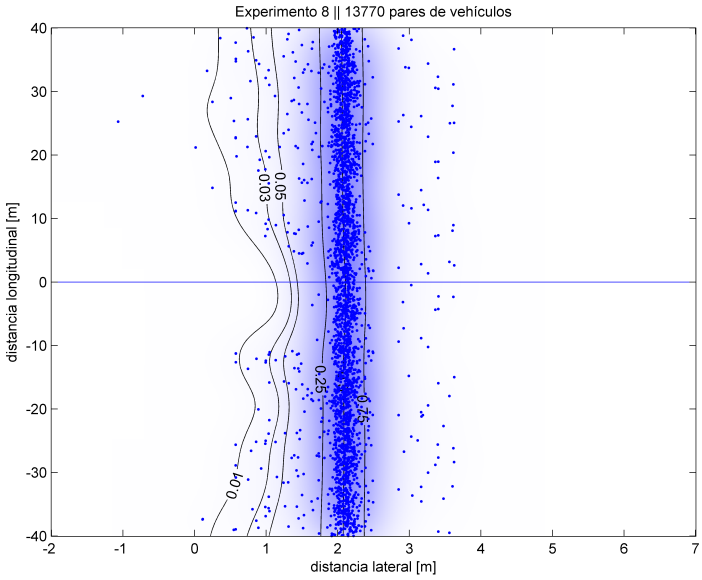

FIGURA 5.10. Gráfico colateral del experimento 8. Fuente: Elaboración Propia

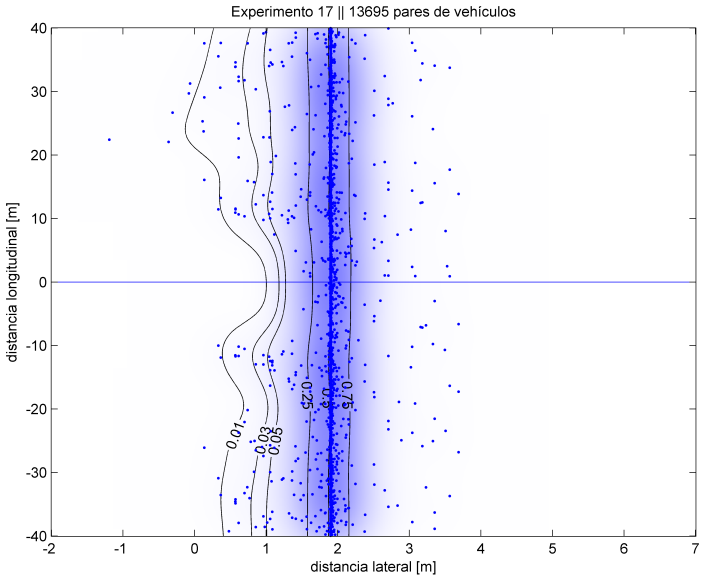

FIGURA 5.11. Gráfico colateral del experimento 17. Fuente: Elaboración Propia

Se observa un problema interesante, difícil de observar en las tablas de resultados: a saber, que en varios de los experimentos se dibuja una clara linea en $x = 1{,}9$. Esta línea corresponde a un exceso de vehículos perfectamente centrados en su pista (lo que redunda en pares de vehículos a $3{,}6 - 1{,}7 = 1{,}9$ mts. de distancia). Nuevamente, este resultado hace pensar en una fuerza de pista demasiado estricta.

Sin embargo, para los experimentos 7 y 8 puede decirse que esta tendencia se rompe. Cabe recordar que los experimentos 6 al 11 corresponden a la fuerza de repulsión de ancho fijo. Por otra parte, los vehículos simulados tienen un ancho constante igual a 1,7 mts. En particular, el experimento 7 corresponde a $x^* = 1{,}9$ mts. y el 8 a $x^* = 2$ mts. (v. tabla 5.5). Vale decir, los casos límite entre que los autos afecten a la pista vecina y no lo hagan. Consistentemente, la capacidad disminuye entre los experimentos 8 y 11 (v. tabla 5.7).

6. APLICACIÓN A FENÓMENOS EXISTENTES Y EXPERIMENTOS

En este capítulo se detalla el resto de los experimentos que ponen a prueba el modelo. Se apunta a reproducir cuatro fenómenos:

- El primero de ellos es el tráfico oscilatorio (sección 6.1). Éste relaciona, según parece, sólo con la dimensión longitudinal y los cambios de pista. Aunque ha sido reproducido por algunos modelos, resulta de interés por su actualidad (Treiber y Kesting, 2011; Laval et al., 2014; Tian et al., 2015).

  Las tres secciones restantes de ocupan de fenómenos relacionados con la dimensión lateral:
- El segundo fenómeno es la fricción lateral (sección 6.2).
- El tercero es el fenómeno de relajación (sección 6.3).
- El cuarto es la influencia de los vehículos pesados en el tráfico circundante (sección 6.4).

Las cuatro secciones están estructuradas de la misma manera en dos apartados: el primero detalla los experimentos a realizar; el segundo, sus respectivos resultados.

6.1. Reproducción y Amplificación de Oscilaciones

Se busca probar la capacidad del modelo de reproducir tráfico altamente inestable. En particular, su capacidad de generar tráfico oscilatorio. Un modelo las reproducirá si es *inestable*, según se discutió en la sección 4.1.6.

6.1.1. Experimentos

En la presente sección, se busca dar una muestra del modelo generando oscilaciones. Para ello, se agrega una componente aleatoria al flujo libre, siguiendo lo propuesto por Laval et al. (2014). En su trabajo, agregan ruido blanco a la aceleración para modelar variabilidad. Lo hacen en un contexto específico: buscan modelar la variabilidad de reacciones de conductores a una pendiente en la vía. La amplitud del ruido blanco depende de los parámetros del modelo, más uno adicional. Dicho

parámetro se denomina $\tilde{\sigma}$ y mide la desviación estándar (adimensional) del ruido blanco.

Se usó la siguiente configuración de parámetros para el modelo:

$$c_1 = \frac{3}{40}, c_2 = \frac{93}{160}, c_3 = \frac{9}{64}, V = \frac{100}{3}, \tau_r = \frac{2}{3}, s_r = \frac{220}{9}, \tag{6.1}$$

para obtener la siguiente configuración de variables macroscópicas de tráfico (consideradas dentro de lo empíricamente razonable[1]):

$$v_m = \frac{100}{3}\left[\frac{m}{s}\right], a_m = 2{,}5\left[\frac{m}{s^2}\right], d_m \approx 4{,}6\left[\frac{m}{s^2}\right], w \approx 5{,}56\left[\frac{m}{s}\right], s_j \approx 6{,}67[m],$$

y se usó un valor de $\tilde{\sigma} = 0{,}16$, dentro del rango de lo propuesto por Laval et al. (2014).

El escenario simulado es el siguiente: una vía de sólo una pista, de 500 mts. de longitud, con una pendiente de 3 % entre $y = 300$ y 400. La simulación consistió de 900 segundos (15 minutos) de flujo ininterrumpido.

6.1.2. Resultados

La figura 6.1 muestra el mapa de velocidad (espacio-tiempo) resultante. En él, se pueden ver claramente las oleadas formadas y propagadas.

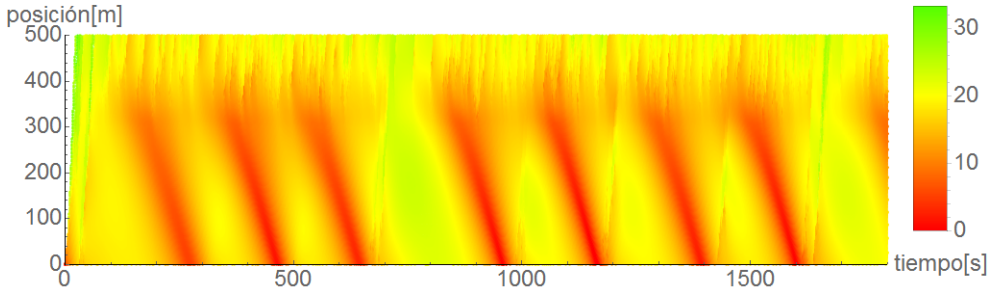

FIGURA 6.1. Diagrama espacio tiempo resultante. Se aprecian las oscilaciones cada 2 minutos aproximadamente. La escala de velocidad está en metros por segundo. Fuente: Elaboración Propia

[1]Respecto a la desaceleración, no se debe olvidar que dicho valor representa el caso extremo. Vale decir, para un vehículo que va a velocidad máxima y encuentra un líder totalmente detenido.

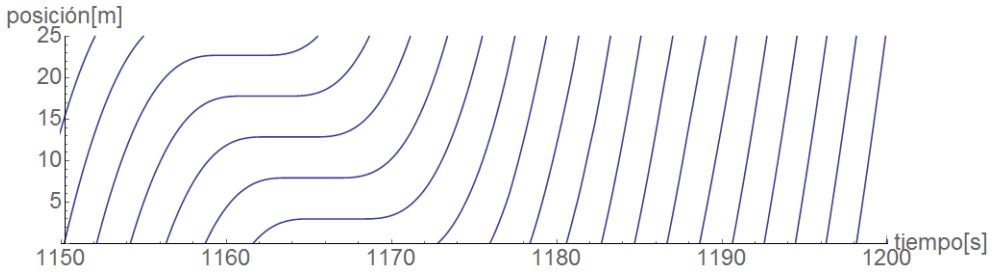

FIGURA 6.2. Detalle de las trayectorias de la figura 6.1. La escala de velocidad ha sido omitida intencionalmente. Fuente: Elaboración Propia

Se quiso también validar cualitativamente la capacidad del modelo de reproducir tráfico real. Para ello se comparó trayectorias reales con las bandas de probabilidad al 90 % del mismo modelo. En concreto, se comparó la trayectoria y la banda del 5º seguidor.

Las bandas fueron construidas mediante la ejecución de 10.000 corridas del modelo. Posteriormente, se obtuvo los cuantiles 5 % y 95 % en cada paso de simulación del resultado.

Los datos utilizados son los mismos descritos en Laval et al. (2014). La situación para $\tilde{\sigma} = 0{,}16$ y 0,18 se muestra en la figura 6.3. Para 0,16, el perfil de velocidad se sale por poco; para 0,18, queda totalmente contenido.

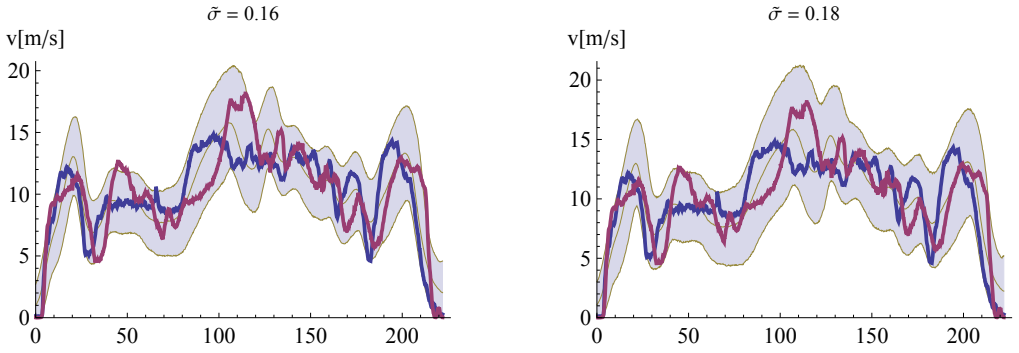

FIGURA 6.3. Perfiles de velocidades real y bandas de probabilidad modeladas, para $\tilde{\sigma} = 0{,}16$ y 0,18. Fuente: Elaboración Propia

6.2. Fricción Lateral

La descripción del fenómeno de fricción lateral se encuentra detallada en la sección 2.2.1, pág. 12. de la presente tesis. En este subcapítulo se describen los experimentos y sus resultados.

6.2.1. Experimentos

Para verificar la reproducción de la fricción lateral, se conducirá el siguiente experimento. En un segmento de dos pistas y 700 m. de longitud, se prohíben los cambios de pista. En una de las pistas, los vehículos circulan libremente (con $V = 35[\frac{m}{s}]$). Se controla el flujo de manera que los vehículos que entran no sientan la repulsión de su líder. En la otra pista —en adelante, la pista lenta—, se les impone un valor menor al parámetro V. Concretamente, se probará velocidades a intervalos de 5 m/s. Los experimentos de simulación tendrán una duración de 30 minutos de tiempo simulado.

Se espera que la velocidad de los vehículos en la pista lenta afecte a la de la pista rápida. Se medirá, por tanto, la velocidad real del flujo (media espacial) en la pista rápida. Ésta debiera ser menor mientras menor sea la velocidad de la pista lenta. La prohibición de cambios de pista busca descartar que la velocidad se vea influida por ellos.

Dicho de otra manera, la variable independiente es el parámetro V de la pista lenta. Para la pista rápida, en tanto, V es constante, igual a 35. Respecto a los demás parámetros, se determinó lo siguiente:

- La formulación de $q(v)$ es de ancho fijo e igual a 1,9 metros (parámetro x^*).
- Las constantes de pista serán $k_1 = 1$ y $k_2 = \frac{1}{4}$.
- Los parámetros del modelo unidimensional serán: $c_1 = \frac{3}{40}$, $c_2 = \frac{33}{64}$ (crítico), $c_3 = \frac{9}{64}$, $\tau_r = \frac{34}{30}$ y $s = \frac{220}{9}$.

Serán variables dependientes las velocidades medias espaciales de las dos pistas. Se espera que la velocidad de ambas pistas se vea afectada por el cambio de V de la pista lenta.

6.2.2. Resultados

La tabla 6.1 resume los resultados de los experimentos de fricción lateral. La columna $V(p_2)$ indica el valor del parámetro V de la pista 2 en el experimento (V de la pista 1 se mantuvo constante e igual a 35 $\left[\frac{m}{s}\right]$). Las otras dos columnas indican la velocidad media espacial resultante en cada pista. La figura 6.4 muestra cómo la velocidad de una pista limita la de la adyacente.

Tabla 6.1. Resultados Fricción Lateral

$V(p_2)$	$v_s(p_1)$	$v_s(p_2)$
35	34,61	34,59
30	34,25	29,62
25	32,53	24,70
20	29,96	19,81
15	26,18	14,87
10	21,51	9,93
5	16,62	4,98
0	12,27	0,00

Fuente: Elaboración Propia

Se comprueba que la simple adición del concepto de repulsión (postulada en esta tesis) provoca fricción lateral entre pistas. La provoca, cabe repetir, como consecuencia no inmediata de la formulación. Queda abierta la puerta, por tanto, a una comprensión más profunda del fenómeno. Asimismo, se abre el camino para una simulación más fidedigna del tráfico real.

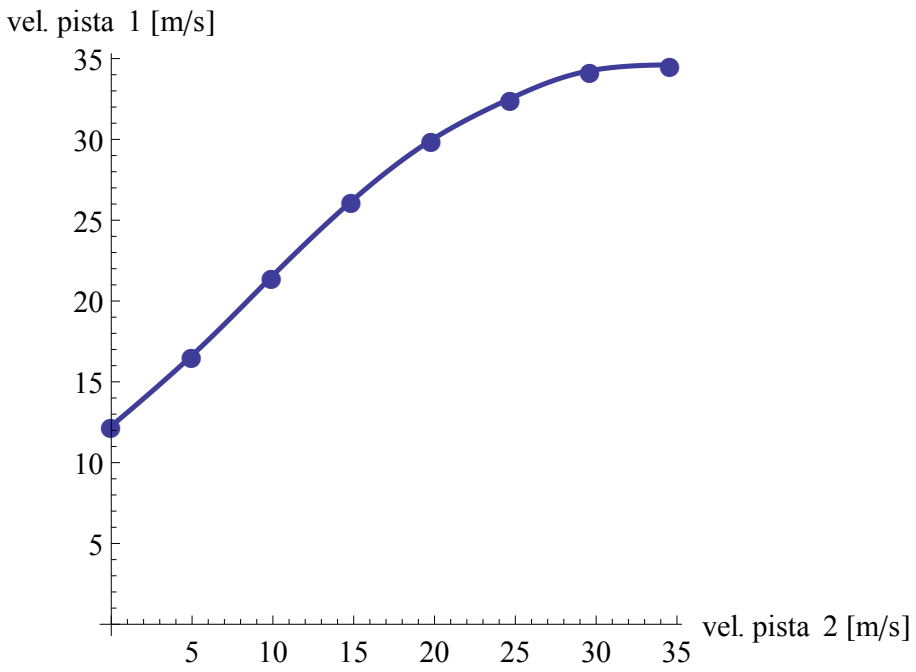

FIGURA 6.4. Velocidades Resultantes de la Fricción. Fuente: Elaboración Propia

6.3. Caída de Capacidad

La descripción del fenómeno de caída de capacidad se encuentra detallada en la sección 2.2.2, pág. 13 de la presente tesis. En esta sección se describen los experimentos conducentes a reproducirlo, y sus resultados.

6.3.1. Experimentos

En orden a reproducir la caída de capacidad, se efectuará el siguiente experimento:

Se necesita un cuello de botella físico (pista de aceleración, *on ramp* o *merge*) con cambios de pista forzados. Concretamente, se simulará un segmento de autopista que se reduzca de tres pistas a dos. Para la modelación, se seguirá el principio de parsimonia de Ockham. En concreto, los cambios de pista forzados se implementarán de la forma más simple posible: la mediana de la pista de aceleración (en torno a la que se calculan la distancia lateral y la fuerza de pista) forma una línea poligonal abierta de tres segmentos. El primero, antes del cuello de botella, es paralelo a la vía,

al modo de una tercera pista (v. figura 6.5). El tercero, después de aquél, se identifica con el de la *segunda* pista. El segundo corresponde propiamente a la *rampa*, y une a los otros dos en diagonal. Para los experimentos, se utilizó un largo de rampa de 100 mts. La rampa comienza 100 mts. después del inicio del segmento estudiado.

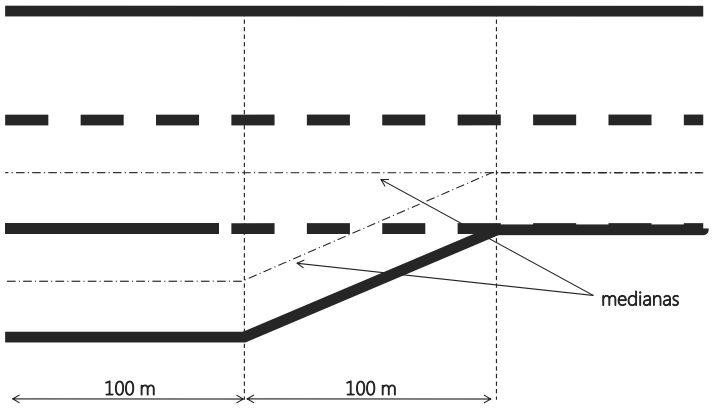

FIGURA 6.5. Modelación de cambios de pista forzados para la caída de capacidad. La mediana de la pista se modela como una línea poligonal de tres segmentos. Fuente: Elaboración Propia

La tabla 6.3 resume los valores de los parámetros para los experimentos a realizar. Estos fueron calculados a partir de las variables macroscópicas de diseño (expuestas en la tabla 6.2). En todos ellos se escogió el valor de amortiguamiento crítico para c_2. Se comienza con un experimento base con los mismos parámetros que (6.1), y luego e agregan variaciones de distintas variables macroscópicas *de diseño* (en base a las que se calculan los parámetros). Éstas exploran la sensibilidad del fenómeno (modelado) a cambios en cada uno de esos valores.

Nótese que los parámetros del experimento 1 conllevan una capacidad nominal de 2571 veh/h por pista. Aunque este valor resulte muy alto, en la práctica se ve

Tabla 6.2. Experimentos para la Caída de Capacidad. Variables macroscópicas *de diseño*

N° Exp.	Aceleración máxima $\left[\frac{m}{s^2}\right]$	Desaceleración máxima $\left[\frac{m}{s^2}\right]$	Velocidad máxima $\left[\frac{m}{s}\right]$	*Spacing* de taco $[m]$	Velocidad de onda $\left[\frac{m}{s}\right]$
1)	2,5	4,6	$33{,}3\bar{3}$	$6{,}6\bar{6}$	$5{,}5\bar{5}$
2)	1,5	4,6	$33{,}3\bar{3}$	$6{,}6\bar{6}$	$5{,}5\bar{5}$
3)	2,5	3,31	$33{,}3\bar{3}$	$6{,}6\bar{6}$	$5{,}5\bar{5}$
4)	2,5	4,6	25	$6{,}6\bar{6}$	$5{,}5\bar{5}$
5)	2,5	4,6	$33{,}3\bar{3}$	8	$5{,}5\bar{5}$
6)	2,5	4,6	$33{,}3\bar{3}$	$6{,}6\bar{6}$	4

Fuente: Elaboración Propia

reducido a valores razonables. Ésta obedece a fenómenos como los cambios de pista y la fricción lateral. Asimismo, la aleatoriedad en la generación de los vehículos contribuye a dicha reducción. Respecto a la desaceleración máxima cabe añadir dos cosas: I) que ésta corresponde a un caso extremo y rara vez se verifica en la simulación, y II) que los valores exactos escogidos son números irracionales conducentes a parámetros racionales.

Son comunes a todos los experimentos: I) la formulación de la razón lateral-longitudinal q, $q(v) \to$ ancho fijo, $x^* = 1{,}3$ y II) los de la fuerza de pista $k_1 = 1$, $k_2 = 0{,}25$.

En cada experimento se inducirá un flujo ligeramente por sobre la capacidad del cuello de botella. Se contabiliza los vehículos que pasan al inicio y al final de la rampa, y aguas abajo: a 300 y 600 metros del cuello de botella físico. Se miden los flujos. Para visibilizar el efecto, se obtienen curvas acumuladas en coordenadas oblicuas (tal como se hizo en la sección 2.2.2). Las curvas se trasladan en el tiempo para que coincida el paso del flujo por cada lugar.

Tabla 6.3. Experimentos para la Caída de Capacidad. Valores de los parámetros

N° Exp.	c_1	c_2	c_3	V	τ_r	s_r
1)	$\frac{3}{40}$	$\frac{93}{160}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{100}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{220}{9}$
2)	$\frac{9}{200}$	$\frac{93}{160}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{100}{3}$	$\frac{22}{25}$	$\frac{52}{3}$
3)	$\frac{3}{40}$	$\frac{11313}{25000}$	$\frac{729}{10000}$	$\frac{100}{3}$	$\frac{208}{1215}$	$\frac{29860}{729}$
4)	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{4}$	25	$\frac{4}{5}$	$\frac{50}{3}$
5)	$\frac{3}{40}$	$\frac{219}{400}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{100}{3}$	$\frac{212}{300}$	$\frac{232}{9}$
6)	$\frac{3}{40}$	$\frac{33}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{100}{3}$	$\frac{34}{30}$	$\frac{220}{9}$

Fuente: Elaboración Propia

Se espera observar una menor capacidad en los conteos aguas abajo del fin de la rampa. Esto se traducirá en la formación de una cola entre los respectivos lugares. La cola debiera traducirse en una separación de las curvas acumuladas que hasta entonces estuvieran unidas. Se espera también que una vez activa la cola, disminuya la capacidad total de la vía.

6.3.2. Resultados

La tabla 6.4 resume los resultados de los experimentos de Caída de Capacidad (enunciados en las tablas 6.2 y 6.3). Las figuras 6.6 a 6.11 muestran las curvas acumuladas oblicuas obtenidas. Se aprecia en todos ellos la formación de una cola durante 60 a 120 segundos. Luego de ello, la capacidad cae y se mantiene relativamente estable en torno a su nuevo valor.

Tabla 6.4. Resultados de Experimentos de Caída de Capacidad

	Capacidad [veh/h]		
N° Exp.	Antes de Caída	Después de Caída	Caída (%)
1)	3500	2980	14,9
2)	3600	2900	19,4
3)	3500	2530	27,7
4)	4100	3660	10,7
5)	3350	2880	14,0
6)	3000	2840	5,3

Fuente: Elaboración Propia

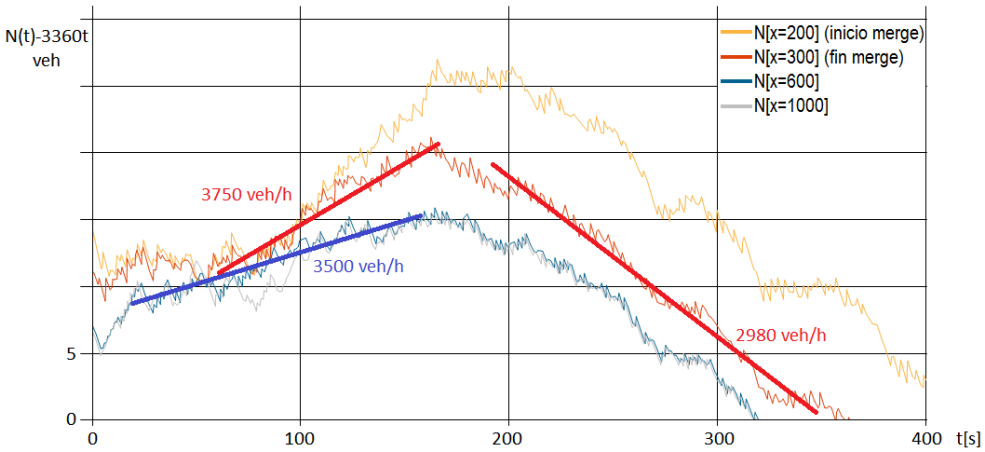

Figura 6.6. Curvas acumuladas oblicuas para experimento 1. Fuente: Elaboración Propia

Estos resultados hablan por sí solos. Se reproduce exitosamente el fenómeno de caída de capacidad mediante el modelo. Los cambios de pista forzados y la generación de gap parecen jugar un papel importante. La caída tiende a ser mayor a la empírica por involucrar menos pistas. La caída parece ser más drástica cuanto más se adentren los parámetros en la región inestable (v. figura 4.4). De hecho, el experimento 3 tiene

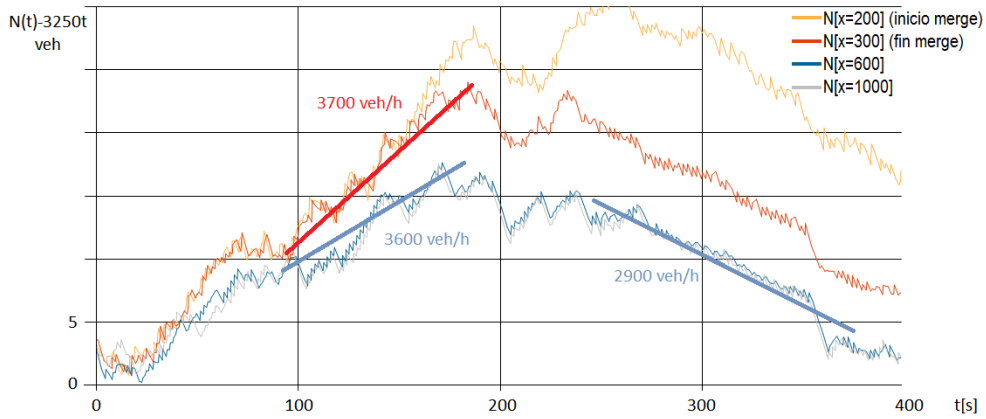

FIGURA 6.7. Curvas acumuladas oblicuas para experimento 2. Fuente: Elaboración Propia

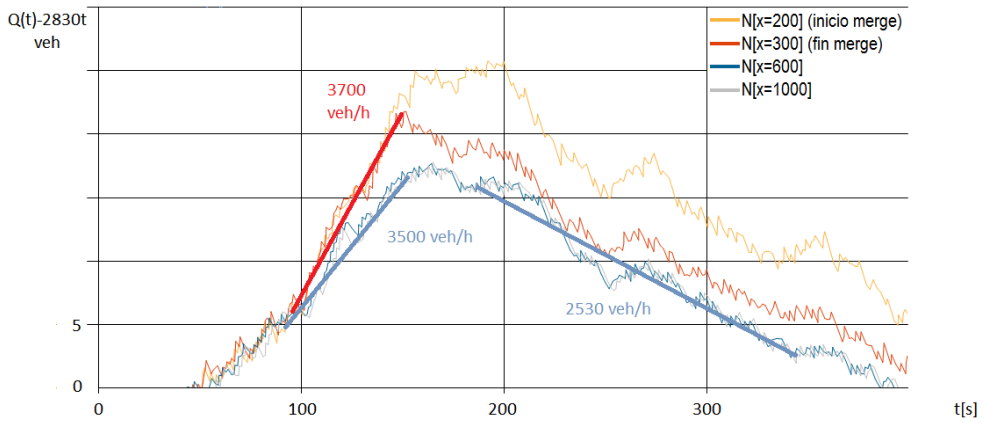

FIGURA 6.8. Curvas acumuladas oblicuas para experimento 3. Fuente: Elaboración Propia

un valor de $\pi_1 \approx 0{,}19$. Por su parte, en el experimento 4 este valor es de $\approx 0{,}43$ y en el 6, de 0,45.

Otro resultado importante es el de modelar alternativamente el cuello de botella. En particular, si se lo modela como el fin abrupto de la pista (sin la mediana oblicua descrita, sino mediante un repulsor que simplemente impide continuar), no hay caída de capacidad. Lo que sucede es que no hay generación activa de gap, y la capacidad nunca *aumenta* (ni tampoco se forma cola en la pista central).

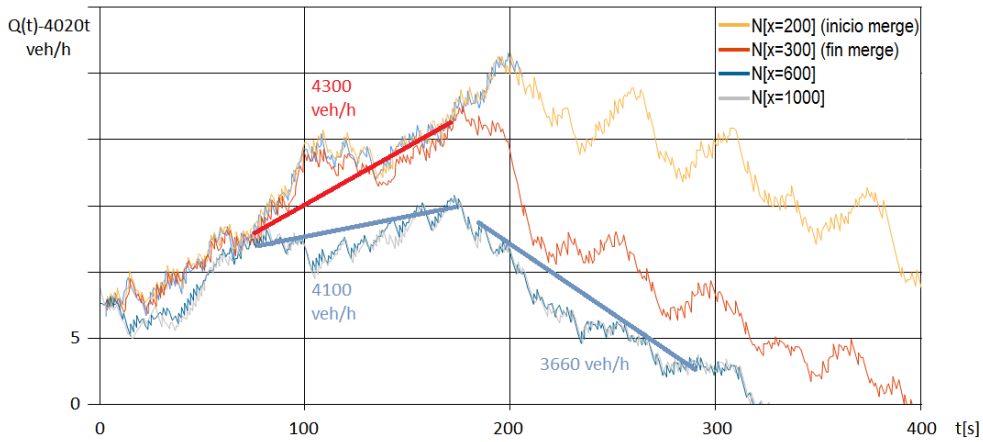

FIGURA 6.9. Curvas acumuladas oblicuas para experimento 4. Fuente: Elaboración Propia

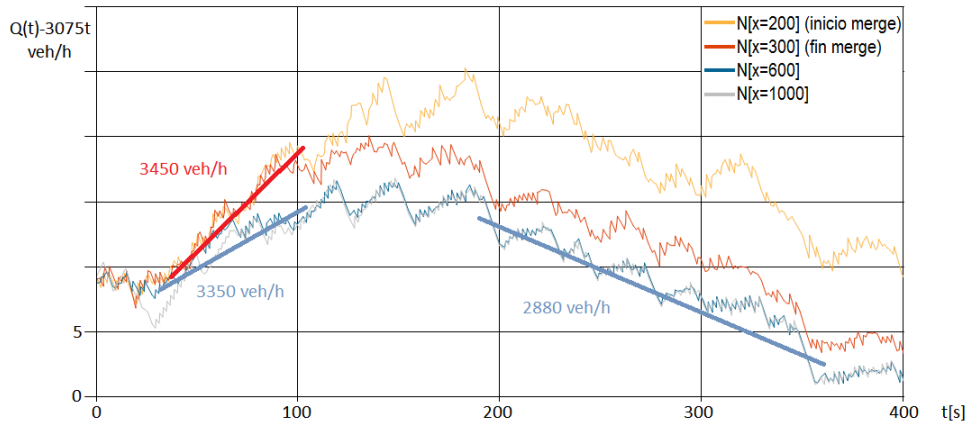

FIGURA 6.10. Curvas acumuladas oblicuas para experimento 5. Fuente: Elaboración Propia

6.4. Influencia de Vehículos Pesados

La descripción de la influencia de los vehículos pesados se encuentra detallada en la sección 2.2.4, pág. 15 de la presente tesis. En esta sección se describen los experimentos conducentes a reproducirla, y sus resultados.

6.4.1. Experimentos

Se plantea la hipótesis de que los vehículos pesados (i.e. buses o camiones) afectan de manera distinta al tráfico que los rodea. Este efecto podría tener relación con

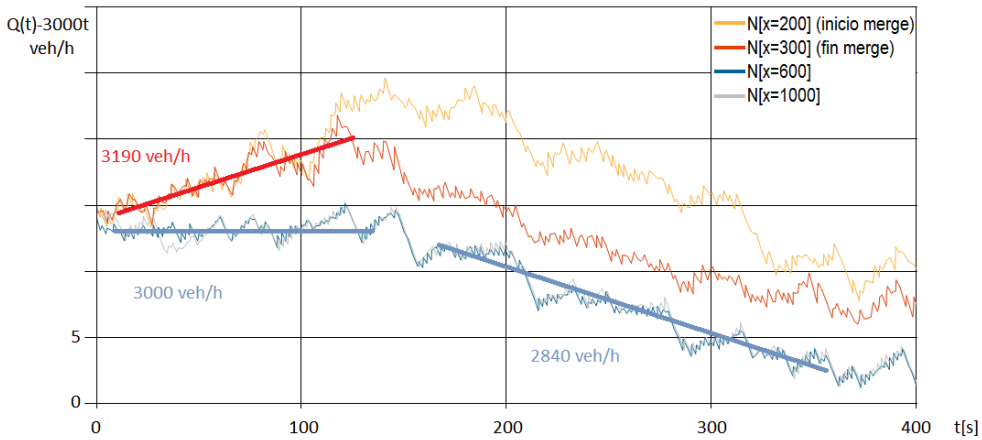

FIGURA 6.11. Curvas acumuladas oblicuas para experimento 6. Fuente: Elaboración Propia

la visibilidad: la hipótesis es que por esta u otra razón, producen mayor repulsión. Para ponerla a prueba, se agregará un parámetro adicional que multiplique la fuerza repulsiva. Por analogía con la repulsión electromagnética, se llamará «carga» a este parámetro.

El siguiente será el experimento para reproducir la no-linealidad reportada por Bartel et al. (1997):

En una vía de un km de largo y tres pistas se dispone un obstáculo en $y = 500$ mts a todo el ancho de la vía. A consecuencia del obstáculo —que podría verse como un semáforo en rojo— se forma una cola de vehículos. Luego de dos minutos la cola se acerca a los 500 mts. de longitud. En ese punto, el obstáculo es removido, iniciando la descarga. Como consecuencia, la cola comienza a disolverse. Se registran los *headways* entre vehículos durante los siguientes dos minutos. Finalmente, se calcula el promedio y se multiplica por el número de pistas.

El experimento se repite *ceteris paribus* 300 veces para distintas proporciones de buses en el flujo: entre 0 y 30 %. Finalmente, se aplica una regresión para aproximar una curva polinomial a los resultados.

Para aislar el experimento del efecto de los cambios de pista, estos se prohíben por diseño.

Todos los autos tienen las mismas dimensiones y obedecen al modelo con iguales parámetros. Los valores por defecto de los parámetros se detallan en la tabla 6.5. Los parámetros k_1 y k_2 dan lugar a un tiempo de cambio de pista de aprox. 4,02 segundos. Los vehículos pesados (buses) son más anchos y largos y su velocidad máxima es menor. En los experimentos, algunas variables son modificadas para estudiar su efecto en el tráfico: en cada uno, se modificó un parámetro respecto al caso base. En concreto, los experimentos son los que se listan en la tabla 6.6. Esto, buscando analizar el efecto de los distintos parámetros en el resultado final.

El resultado esperado de estos experimentos es reproducir cualitativamente el fenómeno. Vale decir, que el *headway* característico (o de saturación) aumente de manera no lineal en función de la proporción de buses en el flujo total. Esta no-linealidad debe ser significativa.

6.4.2. Resultados

La tabla 6.7 sintetiza los resultados de los experimentos de este punto. En la mayoría de los casos se observa una mejora sustancial al subir el grado de la regresión. Sólo los experimentos 3 y 4 —los que aumentaban la aceleración máxima de los buses— revierten esta tendencia (v. tabla 6.6)

El resultado esperado se verifica sin necesidad de un parámetro adicional (la carga). Se reproduce cualitativamente la no-linealidad señalada. Resulta razonable pensar que esto obedece al alcance de la influencia de los vehículos pesados: esta no se reduce sólo al seguidor (o *follower*), sino que abarca todo un entorno. En cambio, no es posible concluir algo tangible sobre la visibilidad.

A modo de muestra, la figura 6.12 da cuenta de la situación para el experimento base. Se efectuó 300 simulaciones con distintas proporciones de vehículos pesados. Resulta fácil reconocer la no-linealidad de los resultados.

Se omiten aquí los gráficos correspondientes a los experimentos 2, 5 y 6 por resultar redundantes.

Tabla 6.5. Parámetros del modelo y Características de los Vehículos

Parámetros 1D	
c_1	0,1
c_2	0,8
c_3	0,25
τ_r	1,2
s_r	16,65
Parámetros 2D	
k_1 (pista)	1,5
k_2 (pista)	0,5
x^*	1,3
Autos	
largo	4,65 m
ancho	1,7 m
V	$90\left[\frac{km}{h}\right] = 25\left[\frac{m}{s}\right]$
Vehículos Pesados	
largo	11 m
ancho	2,5 m
V	$50\left[\frac{km}{h}\right] \approx 13{,}8\bar{8}\left[\frac{m}{s}\right]$
carga	3,0

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 6.6. Experimentos con Vehículos Pesados

Experimento	Cambios
1) Base	—
2) Sin carga	$carga = 1$
3) Buses más agresivos	$V_{bus} = 33{,}3\bar{3}$
4) Buses agresivos, sin carga	$V_{bus} = 33{,}3\bar{3}, carga = 1$
5) Variabilidad de conductores	$V_{auto} \sim \mathcal{N}(25; 1), V_{bus} \sim \mathcal{N}(13{,}8\bar{8}; 1)$
6) Mayor ancho	$x^* = 1{,}6$

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 6.7. R^2 de distintos grados de regresión

	R^2 de la regresión		
N° Exp.	lineal	cuadrática	cúbica
1)	0,827	0,913	0,930
2)	0,835	0,918	0,938
3)	0,841	0,844	0,845
4)	0,606	0,610	0,611
5)	0,776	0,876	0,887
6)	0,831	0,871	0,887

Fuente: Elaboración Propia

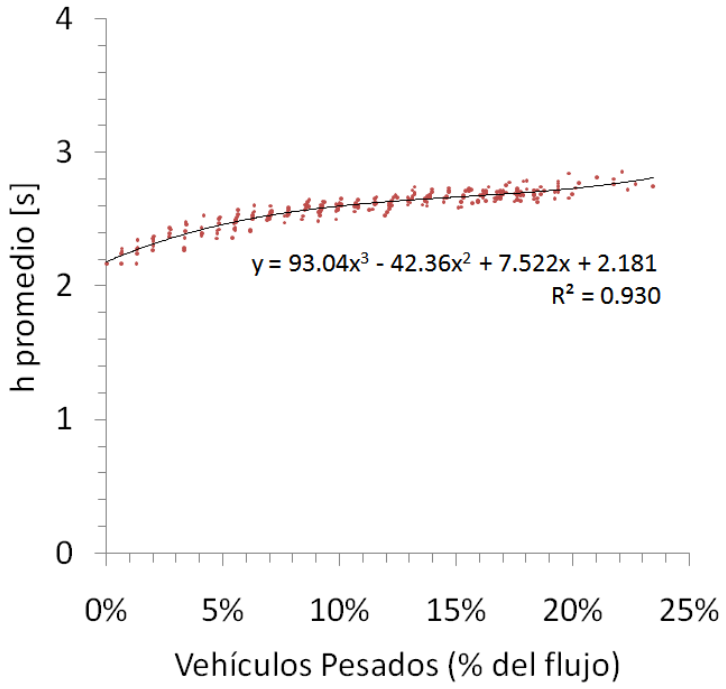

FIGURA 6.12. Headway promedio y regresión cúbica para el experimento base. Fuente: Elaboración Propia

7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES DE INVESTIGACIÓN FUTURA

7.1. Conclusiones

Las principales conclusiones de este trabajo son las siguientes:

C1) Se ha presentado un Modelo Microscópico de Tráfico bidimensional (MmT2D) basado en fuerzas sociales.

C2) El modelo ha sido desarrollado y estudiado en profundidad. Asimismo, ha sido puesto a prueba en experimentos de simulación para verificar su realismo. El modelo refleja con éxito características clave del tráfico real.

C3) El MmT2D presentado reproduce cualitativamente los fenómenos enunciados (caída de capacidad, fricción lateral, anomalía colateral y la incidencia de la concentración de vehículos pesados). Este resultado se logra como consecuencia indirecta de la formulación.

C4) La versión unidimensional (lineal o 1D) del modelo:

   a) Constituye una formulación alternativa del modelo de Tampère. En particular, formulado en términos de fuerzas sociales, con tiempo de reacción igual a cero.

   b) Queda demostrado que es posible obtener trayectorias exactas. También se ha obtenido trayectorias generales para problemas de particular interés.

   c) Se ha caracterizado en profundidad su comportamiento macroscópico. Se ha verificado que cumple con los requisitos básicos de un modelo en este ámbito

   d) Se ha analizado su estabilidad tanto en la teoría como en la práctica. Se ha verificado la capacidad del modelo de reproducir inestabilidades bien documentadas (particularmente el tráfico oscilatorio).

   e) Se ha obtenido su diagrama fundamental. El método utilizado para ello se aplica y es factible en cualquier situación de interés.

C5) El MmT2D es una generalización del Modelo Lineal presentado.

C6) El modelo propuesto implementa el concepto de generación de gap. La literatura ha mostrado que la aceptación de gap no es suficiente. Este problema se nota especialmente en pistas de aceleración. La generación de gap mitiga el problema. Además, la idea de la necesidad de generar gap a alta congestión se condice con la experiencia.

C7) La posición y distancia laterales tienen una incidencia importante en el flujo vehicular. El hecho de incluirlas en el modelo permitió reproducir los fenómenos enunciados.

C8) La visibilidad y el ancho (de vehículos y pistas) han sido puestos a prueba. Se ha verificado la influencia de este último en los fenómenos reproducidos.

C9) El costo computacional del modelo es lineal en función de los vehículos y el tiempo. Esto garantiza su escalabilidad computacional.

C10) El modelo 1D en el caso crítico requiere cinco parámetros. Éste es el mínimo teórico para un modelo con aceleración y desaceleración asimétricas. Todos ellos pueden obtenerse como función de magnitudes medibles del tráfico.

C11) Sólo c_2 en el caso supercrítico puede necesitar calibración. Su variación, en efecto, altera la forma de la curva de desaceleración v/s tiempo. Por lo mismo, su valor influye en la magnitud de la desaceleración máxima.

C12) El modelo 2D necesita de un total de al menos siete parámetros (con un máximo de diez). Se ha procurado minimizar este número en la formulación del modelo. Algunos de los parámetros requieren calibración. Sin embargo, el costo de ésta no crece sustancialmente en relación a otros modelos.

C13) Todo apunta a que siete es el mínimo teórico de parámetros que un MmT2D requiere. Esto en virtud de dos consideraciones: I) que cinco es el mínimo en una dimensión cuando hay aceleraciones asimétricas, y II) que el tiempo de cambio de pista y la razón lateral-longitudinal parecen ser necesarios (para incluir la dimensión lateral).

C14) Se ha introducido y cuantificado un nuevo fenómeno derivado de la dimensión lateral del tráfico. Dicho fenómeno ha sido bautizado como *anomalía colateral* (AC).

   a) La AC no depende exclusivamente de los cambios de pista. Se verifica que existe una tendencia a evitar la proximidad lateral entre vehículos.

   b) La AC parece aumentar con la velocidad y disminuir con la congestión. Una gran diferencia de velocidades entre pistas podría haber aminorado el efecto. Sin embargo, hacen falta más datos para hacer más categóricas estas afirmaciones (y cuantificar su alcance).

   c) La medición de la AC requiere una gran cantidad de datos. La disponibilidad de datos cada vez mayor permitirá ahondar su comprensión.

Para ver la correspondencia de los objetivos con las conclusiones, v. tabla D.1 (anexo D).

7.2. Recomendaciones de Investigación Futura

Entre las posibles líneas de investigación que la presente tesis deja abiertas, se encuentran:

- Referentes a la fuerza de pistas, hay caminos que podrían permitir mayor precisión. Esto último al costo de un mayor número de parámetros para el modelo:
  - Formular la fuerza con una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de mayor orden. P. ej. podría ser cuadrática en función de la distancia al centro de pista. De ese modo, se permitiría una menor disciplina sin afectar el tiempo de cambio de pista.
  - Otro posible camino para los mismos efectos puede ser separar la fuerza en dos: una para cambio y otra de mantención de pista.
- Otro problema interesante dice relación con lo que Helbing y Tilch (1998) llaman "fuerza fluctuante"(lit. *fluctuating force*). Suponer conductores variables

ha mostrado ser muy realista. De hecho, es una explicación complementaria para la inestabilidad de tráfico (Laval y Leclercq, 2010; Laval et al., 2014). Surgen dos alternativas naturales para la formulación de esta fuerza: I) ruido blanco —como hiciera Laval et al. (2014)— en dos dimensiones, o II) cadenas de Markov con espacio de estados continuo (Li, 2010).

- Queda abierta la cuestión sobre la capacidad en curvas. Es razonable pensar que pueda modelarse mediante una fuerza centrífuga. Esta fuerza estaría relacionada a la velocidad y el radio de giro (distintos para cada vehículo y pista). Afectaría, evidentemente a la disciplina de pistas de los conductores en la curva. Aproximar la mediana de una pista por curvas de Bézier puede facilitar los cálculos.
- La visibilidad es otro punto cuya exploración sólo comienza con esta tesis. Aún quedan por probarse muchas formulaciones distintas que podrían mejorar los resultados.

REFERENCIAS

Bartel, G. A., Coeymans, J. E., y Gibson, J. J. (1997). Reformulación del método de regresión sincrónico para la estimación de parámetros de capacidad de una intersección semaforizada bajo condiciones de tráfico mixto. En *IX congreso chileno de ingeniería de transporte* (pp. 371–382). Santiago de Chile.

Brackstone, M., y McDonald, M. (1999, diciembre). Car-following: a historical review. *Transportation Research Part F: Traffic Psychology and Behaviour*, *2*(4), 181–196. Descargado de http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S136984780000005X doi: doi:10.1016/S1369-8478(00)00005-X

Buckingham, E. (1914). On physically similar systems; illustrations of the use of dimensional equations. *Physical Review*, *4*(4), 345-376. (cited By (since 1996)674)

Case, H. W., Hulbert, S. F., Mount, G. E., y Brenner, R. (1953). Effect of a roadside structure on the lateral placement of motor vehicles. *Highway Research Board Proceedings*. Descargado 2011-12-19, de http://trid.trb.org/view.aspx?id=116452

Cassidy, M., y Bertini, R. (1999). Some traffic features at freeway bottlenecks. *Transportation Research Part B: Methodological*, *33B*(1), 25–42. Descargado 2011-07-07, de http://www.scopus.com/inward/record.url?eid=2-s2.0-0032599748&partnerID=40&md5=7734bd7e9b7e2ecfb4f724aeea9e210f

Cassidy, M., y Rudjanakanoknad, J. (2005). Increasing the capacity of an isolated merge by metering its on-ramp. *Transportation Research Part B: Methodological*, *39*(10), 896 - 913. Descargado de http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0191261505000044 doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.trb.2004.12.001

Chitturi, M., y Benekohal, R. (2005, enero). Effect of lane width on speeds of cars and heavy vehicles in work zones. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, *1920*(-1), 41–48. Descargado 2012-07-05, de

http://dx.doi.org/10.3141/1920-05 doi: 10.3141/1920-05

Daamen, W., Loot, M., y Hoogendoorn, S. P. (2010, diciembre). Empirical analysis of merging behavior at freeway on-ramp. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, *2188*, 108–118. Descargado 2011-10-21, de http://trb.metapress.com/openurl.asp?genre=article&id=doi:10.3141/2188-12 doi: 10.3141/2188-12

Delpiano, R., Herrera, J. C., y Coeymans, J. E. (2013). Empirical evidence on the existence of collateral anomaly..

Delpiano, R., Herrera, J. C., y Coeymans, J. E. (2014). Measuring collateral anomaly. *Submitted for publication*.

Delpiano, R., Laval, J. A., Coeymans, J. E., y Herrera, J. C. (2015). The kinematic wave model with finite decelerations: A social force car-following model approximation. *Transportation Research Part B: Methodological*. doi: 10.1016/j.trb.2014.10.005

Edie, L. C. (1963). *Discussion of traffic stream measurements and definitions*. Port of New York Authority.

Fellendorf, M., Schönauer, R., y Huang, W. (2012). Social force based vehicle model for two-dimensional spaces. En *Transportation research board 91st annual meeting*.

FHWA, F. (2004). *Prototype dataset*. Descargado 2013-05-09, de http://ngsim-community.org/index.php?option=com_docman&task=cat_view&gid=33&Itemid=34

FHWA, F. H. A. (2006, diciembre). *Interstate 80 freeway dataset, FHWA-HRT-06-137*. Descargado 2013-05-09, de http://www.fhwa.dot.gov/publications/research/operations/06137/index.cfm

FHWA, F. H. A. (2007, enero). *US highway 101 dataset, FHWA-HRT-07-030*. Descargado 2013-05-09, de http://www.fhwa.dot.gov/publications/research/operations/07030/index.cfm

Gazis, D. C., Herman, R., y Rothery, R. W. (1961, agosto). Nonlinear follow-the-leader models of traffic flow. *Operations Research*, *9*(4), 545–567. Descargado 2014-11-25, de http://pubsonline.informs.org.prx.library.gatech.edu/doi/abs/10.1287/opre.9.4.545 doi: 10.1287/opre.9.4.545

Gipps, P. (1981, abril). A behavioural car-following model for computer simulation. *Transportation Research Part B: Methodological*, *15*(2), 105–111. Descargado de http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0191261581900370 doi: doi:10.1016/0191-2615(81)90037-0

Gipps, P. (1986, octubre). A model for the structure of lane-changing decisions. *Transportation Research Part B: Methodological*, *20*(5), 403–414. Descargado 2011-07-07, de http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0191261586900123 doi: 16/0191-2615(86)90012-3

Gunay, B. (2007, agosto). Car following theory with lateral discomfort. *Transportation Research Part B: Methodological*, *41*(7), 722–735.

Helbing, D., y Molnár, P. (1995, mayo). Social force model for pedestrian dynamics. *Physical Review E*, *51*(5), 4282–4286.

Helbing, D., y Tilch, B. (1998). Generalized force model of traffic dynamics. *Physical Review E*, *58*, 133-138.

Helly, W. (1959). Simulation of bottlenecks in single-lane traffic flow. En *Proceedings of the syposium on theory of traffic flow* (p. 207-238).

Jin, S., Wang, D., Tao, P., y Li, P. (2010, noviembre). Non-lane-based full velocity difference car following model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, *389*(21), 4654–4662.

Jin, S., Wang, D.-H., y Yang, X.-R. (2011, diciembre). Non-lane-based car-following model with visual angle information. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, *2249*(-1), 7–14.

Kwon, J., y Varaiya, P. (2008, febrero). Effectiveness of california's high occupancy vehicle (HOV) system. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, *16*(1), 98–115. Descargado 2012-07-10, de http://robotics.eecs.berkeley

.edu/~varaiya/papers_ps.dir/HOV_summitv6.pdf doi: 10.1016/j.trc.2007.06.008

Laval, J. A. (2011, febrero). Hysteresis in traffic flow revisited: An improved measurement method. *Transportation Research Part B: Methodological*, *45*(2), 385–391. Descargado 2014-09-04, de http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0191261510001013 doi: 10.1016/j.trb.2010.07.006

Laval, J. A., y Daganzo, C. F. (2006, marzo). Lane-changing in traffic streams. *Transportation Research Part B: Methodological*, *40*(3), 251–264. Descargado 2014-01-30, de http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S019126150500055X doi: 10.1016/j.trb.2005.04.003

Laval, J. A., y Leclercq, L. (2008, julio). Microscopic modeling of the relaxation phenomenon using a macroscopic lane-changing model. *Transportation Research Part B: Methodological*, *42*(6), 511–522. Descargado 2011-07-07, de http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0191261507001312 doi: 16/j.trb.2007.10.004

Laval, J. A., y Leclercq, L. (2010, octubre). A mechanism to describe the formation and propagation of stop-and-go waves in congested freeway traffic. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, *368*(1928), 4519–4541. (PMID: 20819820)

Laval, J. A., Toth, C. S., y Zhou, Y. (2014, diciembre). A parsimonious model for the formation of oscillations in car-following models. *Transportation Research Part B: Methodological*, *70*, 228–238. Descargado 2014-11-03, de http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0191261514001581 doi: 10.1016/j.trb.2014.09.004

Li, Q. (2010, enero). Markov chains on continuous state space. En *Constructive computation in stochastic models with applications* (pp. 216–287). Springer Berlin Heidelberg. Descargado 2014-12-04, de http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-11492-2_5

Li, Y., y Sun, D. (2012). Microscopic car-following model for the traffic flow: the

state of the art. *Journal of Control Theory and Applications*, *10*(2), 133–143.

Lighthill, M. J., y Whitham, G. B. (1955, mayo). On kinematic waves. II. a theory of traffic flow on long crowded roads. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, *229*(1178), 317–345. Descargado 2014-07-25, de http://www.jstor.org/stable/99769

Martin, P. T., of Transportation. Research Division, U. D., y of Utah. Dept. of Civil and Environmental Engineering, U. (2002). *Evaluate effectiveness of high occupancy vehicle (HOV) lanes*. Salt Lake City, Utah: Research Division, Utah Dept. of Transportation. Descargado 2012-07-10, de http://www.udot.utah.gov/expresslanes/dld/U%20of%20U%20Effectiveness%20of%20Carpool%20Lanes%20Dec%202002.pdf

Maurya, A. (2011). Comprehensive approach for modeling of traffic streams with no lane discipline..

May, A. D. (1959). Friction concept of traffic flow. *Highway Research Board Proceedings*. Descargado 2012-07-05, de http://trid.trb.org/view.aspx?id=117080

Moridpour, S., Sarvi, M., y Rose, G. (2010, diciembre). Modeling the lane-changing execution of multiclass vehicles under heavy traffic conditions. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, *2161*(-1), 11–19. Descargado 2012-03-22, de http://trb.metapress.com/openurl.asp?genre=article&id=doi:10.3141/2161-02 doi: 10.3141/2161-02

Newell, G. F. (1993, agosto). A simplified theory of kinematic waves in highway traffic, part II: Queueing at freeway bottlenecks. *Transportation Research Part B: Methodological*, *27*(4), 289–303. Descargado 2014-07-25, de http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0191261593900039D doi: 10.1016/0191-2615(93)90039-D

Newell, G. F. (2002). A simplified car-following theory: a lower order model. *Transportation Research Part B: Methodological*, *36*(3), 195 - 205.

Pipes, L. A. (1953, marzo). An operational analysis of traffic dynamics. *Journal of Applied Physics*, *24*(3), 274–281. Descargado 2014-05-29, de http://scitation

.aip.org/content/aip/journal/jap/24/3/10.1063/1.1721265 doi: 10.1063/1.1721265

Richards, P. (1956). Shock waves on the highway, operations research. *The Journal of the Operations Research Society of America*, *4*, 42–51.

Schönauer, R., Stubenschrott, M., Huang, W., Rudloff, C., y Fellendorf, M. (2012, diciembre). Modeling concepts for mixed traffic. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, *2316*(-1), 114–121.

Song, X.-M., Jin, S., Wang, D.-H., y Cao, J.-H. (2011). Vehicle-following model considering lateral offset. *Jilin Daxue Xuebao (Gongxueban)/Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition)*, *41*(2), 333–337. Descargado 2011-07-07, de http://www.scopus.com/inward/record.url?eid=2-s2.0-79953765890&partnerID=40&md5=81accc71d67dafbf97fcac8f8ec98df6

Tampère, C. M. J. (2004). *Human-kinetic multiclass traffic flow theory and modelling: with application to advanced driver assistance systems in congestion* (Tesis Doctoral no publicada). Netherlands TRAIL Research School, Delft, the Netherlands.

Taragin, A. (1955). Driver behavior as affected by objects on highway shoulders. *Highway Research Board Proceedings*. Descargado 2012-07-05, de http://trid.trb.org/view.aspx?id=116458

Tian, J., Treiber, M., Ma, S., Jia, B., y Zhang, W. (2015, enero). Microscopic driving theory with oscillatory congested states: Model and empirical verification. *Transportation Research Part B: Methodological*, *71*, 138–157. Descargado 2014-12-03, de http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0191261514001921 doi: 10.1016/j.trb.2014.11.003

Treiber, M., Hennecke, A., y Helbing, D. (2000, agosto). Congested traffic states in empirical observations and microscopic simulations. *Physical Review E*, *62*(2), 1805–1824. Descargado 2013-01-23, de http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.62.1805 doi: 10.1103/PhysRevE.62.1805

Treiber, M., y Kesting, A. (2011, noviembre). Evidence of convective instability in

congested traffic flow: A systematic empirical and theoretical investigation. *Transportation Research Part B: Methodological*, *45*(9), 1362–1377.

TSS, T. S. S. (2010). *Microsimulator and mesosimulator aimsun 6.1 user's manual*. TSS-Transport Simulation Systems.

Wiedemann, R. (1974). Simulation des strassenverkehrsflusses. En *Schriftenreihe des instituts für verkehrswesen* (Vol. Heft 8). Germany: University of Karlsruhe.

Wilson, R. E. (2008, junio). Mechanisms for spatio-temporal pattern formation in highway traffic models. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, *366*(1872), 2017–2032.

Yeo, H., y Skabardonis, A. (2011, octubre). Microscopic fundamental relationships between vehicle speed and spacing in view of asymmetric traffic theory. En *2011 14th international IEEE conference on intelligent transportation systems (ITSC)* (pp. 1410–1414). doi: 10.1109/ITSC.2011.6082878

ANEXO A. PRUEBA DEL TEOREMA 4.1

Se probará aquí el teorema 4.1. En efecto, la repulsión permanece activa cuando se entra en congestión, hasta el equilibrio.

Numérese los vehículos como 0 (el líder) y 1. Supóngase que el vehículo 1 sigue una trayectoria dada por (3.4), y que $V \geq v_1(t) > v$.

Sea $f_1^r(0) = 0$, e $y_0(0) = 0$. No hay pérdida de generalidad, ya que esto se puede conseguir con un cambio de coordenadas.

El movimiento de v_1 quedará descrito por:

$$\ddot{y}(t) = (V - \dot{y}(t))c_1 + (v - \dot{y}(t))c_2 + (vt - y(t) - \tau_r \dot{y}(t) - s_r)c_3 \tag{A.1}$$

mientras f_r siga siendo ≤ 0. La solución exacta para (A.1) se puede obtener analiticamente, y es:

$$y(t) = k_1 e^{\frac{1}{2}t(a-\Delta)} + k_2 e^{\frac{1}{2}t(a+\Delta)} + vt - v(\tau_r + \frac{c_1}{c_3}) + V\frac{c_1}{c_3} - s_r \tag{A.2a}$$

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{2}\left(k_1(a-\Delta)e^{\frac{1}{2}t(a-\Delta)} + k_2(a+\Delta)e^{\frac{1}{2}t(a+\Delta)}\right) + v \tag{A.2b}$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{1}{4}\left(k_1(a-\Delta)^2 e^{\frac{1}{2}t(a-\Delta)} + k_2(a+\Delta)^2 e^{\frac{1}{2}t(a+\Delta)}\right), \tag{A.2c}$$

donde $a = (-c_1 - c_2 - c_3\tau_r)$ y $\Delta = \sqrt{a^2 - 4c_3}$. Cabe mencionar que $a - \Delta < a + \Delta < 0$ a consecuencia de las restricciones ya mencionadas.

Llámese v_1 a $\dot{y}(0)$. Si se evalua $f_r(0) = 0$ se obtiene:

$$
\begin{aligned}
0 &= (v - v_1)c_2 + (0 - y(0) - \tau_r v_1 - s_r)c_3 \\
0 &= c_2 v - c_2 v_1 - c_3 y(0) - c_3 \tau_r v_1 - c_3 s_r \\
c_3 y(0) &= c_2 v - c_2 v_1 - c_3 \tau_r v_1 - c_3 s_r \\
\therefore y(0) &= \frac{c_2}{c_3} v - v_1 (\frac{c_2}{c_3} + \tau_r) - s_r
\end{aligned} \tag{A.3}
$$

Al evaluar $y(0)$ en (A.2a) e igualar a (A.3):

$$
\begin{aligned}
\frac{c_2}{c_3} v - v_1 (\frac{c_2}{c_3} + \tau_r) - s_r &= k_1 + k_2 - v(\tau_r + \frac{c_1}{c_3}) + V \frac{c_1}{c_3} - s_r \\
k_1 + k_2 &= v(\tau_r + \frac{c_1}{c_3}) - V \frac{c_1}{c_3} + \frac{c_2}{c_3} v - v_1 (\frac{c_2}{c_3} + \tau_r) \\
\therefore c_3(k_1 + k_2) &= v(c_2 + c_3 \tau_r + c_1) - v_1 (c_2 + c_3 \tau_r) - V c_1
\end{aligned} \tag{A.4}
$$

Pero por hipótesis $V > v_1 > v$, por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
k_1 + k_2 &< v(\frac{c_2}{c_3} + \tau_r + \frac{c_1}{c_3}) - v_1 (\frac{c_2}{c_3} + \tau_r) - v_1 \frac{c_1}{c_3} \\
&< (v - v_1)(\frac{c_2}{c_3} + \tau_r + \frac{c_1}{c_3}) \\
&< 0
\end{aligned} \tag{A.5}
$$

Y, por lo mismo, al evaluar $\dot{y}(0)$ en (A.2b), se concluye que:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \frac{1}{2} \left[k_1 (a - \Delta) + k_2 (a + \Delta) \right] + v \\
v_1 - v &= \frac{1}{2} \left[k_1 (a - \Delta) + k_2 (a + \Delta) \right] > 0
\end{aligned} \tag{A.6}
$$

Lo que, multiplicado por $-2(a - \Delta)$ da:

$$-k_1(a-\Delta)^2 - k_2(a+\Delta)(a-\Delta) > 0 \tag{A.7}$$

Por otro lado, se sabe por hipótesis que:

$$\ddot{y}(0) = f_{a,i}(0) = (V - v_1)c_1 \geq 0,$$

así, de (A.2c):

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\left(k_1(a-\Delta)^2 + k_2(a+\Delta)^2\right) \geq& 0\\ k_1(a-\Delta)^2 + k_2(a+\Delta)^2 \geq& 0,\end{aligned}$$

lo que, sumado a (A.7) da:

$$\begin{aligned}k_2(a+\Delta)(a+\Delta-a+\Delta) &> 0\\ 2\Delta k_2(a+\Delta) &> 0\\ k_2(a+\Delta) &> 0\\ k_2 &< 0 \end{aligned} \tag{A.8}$$

Ahora bien, volviendo a (A.2). Se puede afirmar a la luz de (A.5), (A.6) y (A.8) que, $\forall t > 0$:

$$\begin{aligned}y(t) &= k_1 e^{\frac{1}{2}t(a-\Delta)} + k_2 e^{\frac{1}{2}t(a+\Delta)} + vt - v(\tau_r + \frac{c_1}{c_3}) + V\frac{c_1}{c_3} - s_r\\ &> k_1 e^{\frac{1}{2}t(a-\Delta)} + k_2 e^{\frac{1}{2}t(a-\Delta)} + vt - v(\tau_r + \frac{c_1}{c_3}) + V\frac{c_1}{c_3} - s_r\\ &= (k_1+k_2)e^{\frac{1}{2}t(a-\Delta)} + vt - v(\tau_r + \frac{c_1}{c_3}) + V\frac{c_1}{c_3} - s_r,\end{aligned} \tag{A.9}$$

y también que:

$$
\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= \frac{1}{2}(k_1(a-\Delta)e^{\frac{1}{2}t(a-\Delta)} + k_2(a+\Delta)e^{\frac{1}{2}t(a+\Delta)}) + v \\
&> \frac{1}{2}(k_1(a-\Delta)e^{\frac{1}{2}t(a-\Delta)} + k_2(a+\Delta)e^{\frac{1}{2}t(a-\Delta)}) + v \\
&= \frac{1}{2}\left[k_1(a-\Delta) + k_2(a+\Delta)\right] e^{\frac{1}{2}t(a-\Delta)} + v
\end{aligned} \tag{A.10}
$$

Aplicando (A.9) y (A.10) a $f_r(t > 0)$, y reagrupando:

$$
\begin{aligned}
f_r(t) =& (v - \dot{y}(t))c_2 + (vt - y(t) - \tau_r\dot{y}(t) - s_r)c_3 \\
=& c_2v - c_2\dot{y}(t) + c_3vt - c_3y(t) - c_3\tau_r\dot{y}(t) - c_3s_r \\
=& c_2v + c_3vt - c_3s_r - \dot{y}(t)(c_2 + c_3\tau_r) - c_3y(t) \\
<& c_2v + c_3vt - c_3s_r \\
& - \left(\frac{1}{2}\left[k_1(a-\Delta) + k_2(a+\Delta)\right] e^{\frac{1}{2}t(a-\Delta)} + v\right)(c_2 + c_3\tau_r) \\
& - c_3\left((k_1+k_2)e^{\frac{1}{2}t(a-\Delta)} + vt - v(\tau_r + \frac{c_1}{c_3}) + V\frac{c_1}{c_3} - s_r\right) \\
=& c_2v + c_3vt - c_3s_r - c_2v - c_3\tau_r v \\
& - \frac{1}{2}\left(k_1(a-\Delta) + k_2(a+\Delta)\right) e^{\frac{1}{2}t(a-\Delta)}(c_2 + c_3\tau_r) \\
& - c_3(k_1+k_2)e^{\frac{1}{2}t(a-\Delta)} - c_3vt + c_1v + c_3\tau_r v - Vc_1 + c_3s_r \\
=& -\frac{1}{2}\left(k_1(a-\Delta) + k_2(a+\Delta)\right) e^{\frac{1}{2}t(a-\Delta)}(c_2 + c_3\tau_r) \\
& - c_3(k_1+k_2)e^{\frac{1}{2}t(a-\Delta)} + c_1(v - V) \\
=& -e^{\frac{1}{2}t(a-\Delta)}\left(\frac{1}{2}\left[k_1(a-\Delta) + k_2(a+\Delta)\right](c_2 + c_3\tau_r) + c_3(k_1+k_2)\right) + c_1(v - V),
\end{aligned}
$$

reemplazando (A.6) y (A.4) en la expresión entre paréntesis, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
&= - e^{\frac{1}{2}t(a-\Delta)}\left[(v_1 - v)(c_2 + c_3\tau_r) + v(c_2 + c_3\tau_r + c_1) - v_1(c_2 + c_3\tau_r) - Vc_1\right] \\
&\quad + c_1(v - V) \\
&= - e^{\frac{1}{2}t(a-\Delta)}\left[v_1(c_2 + c_3\tau_r) - v(c_2 + c_3\tau_r) + v(c_2 + c_3\tau_r) + vc_1 - v_1(c_2 + c_3\tau_r) - Vc_1\right] \\
&\quad + c_1(v - V) \\
&= - e^{\frac{1}{2}t(a-\Delta)}\left[vc_1 - Vc_1\right] + c_1(v - V) \\
&= c_1(v - V)(1 - e^{\frac{1}{2}t(a-\Delta)})
\end{aligned} \tag{A.11}
$$

De los tres factores, tanto el primero como el tercero son positivos. Del segundo, en tanto, se puede decir que es negativo por hipótesis. Por lo tanto, $f_r(t) < 0, \forall t > 0$.

Así, en las condiciones mencionadas, de (A.2), se obtiene que el equilibrio:

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} y(t) &= vt - v(\tau_r + \frac{c_1}{c_3}) + V\frac{c_1}{c_3} - s_r \\
\lim_{t\to\infty} \dot{y}(t) &= v
\end{aligned}
$$

y el espaciamiento es:

$$
vt - y(t) = v(\tau_r + \frac{c_1}{c_3}) - V\frac{c_1}{c_3} + s_r \tag{A.12}
$$

evaluando en $v = 0$, se obtiene el espaciamiento de taco:

$$
s_j = s_r - V\frac{c_1}{c_3} \tag{A.13}
$$

QED.

Nótese que esto crea una restricción adicional al modelo para ser físicamente consistente:

$$s_j > 0$$

$$\therefore s_r c_3 > V c_1 \tag{A.14}$$

ANEXO B. PRUEBA DEL TEOREMA 4.2

En este anexo, se estudiará las condiciones para que f^r esé siempre activa al acelerar. En particular, observaremos un flujo de vehículos que acelera desde taco a velocidad máxima.

Supongamos nuevamente dos vehículos, 0 y 1. Ambos están detenidos en $t = 0$, tras un obstáculo fijo. El líder está en posición $y = 0$ y el otro vehículo a espaciamiento de taco tras él. En $t = 0^+$, el obstáculo es removido y el líder comienza a acelerar por f_0^a (3.2). El segundo vehículo, por su parte, obedece a (3.4) (nótese que en este punto f_1^r debe estar activa para haberse mantenido detenido). Por lo tanto, tenemos las conidiciones iniciales:

$$y_0(0) = 0, \dot{y}_0(0) = 0, \dot{y}_1(0) = 0, \ddot{y}_1(0) = 0$$

mientras f_1^r esté activa. Esto se puede comprobar con la ayuda de $y_0(t)$ e $y_1(t)$, mediante (3.3). Se puede demostrar que:

$$f_1^r(t) = -Vc_1e^{-\sqrt{c_3}t}(1 + \sqrt{c_3}t - c_2t), \tag{B.1}$$

en el caso crítico, y:

$$f_1^r(t) = -\frac{c_1V}{\Delta}e^{\frac{at}{2}}\left(\Delta\cosh\left(\frac{\Delta}{2}t\right) - (a + 2c_2)\sinh\left(\frac{\Delta}{2}t\right)\right), \tag{B.2}$$

en el supercrítico, donde $\Delta = \sqrt{a^2 - 4c_3}$. Nótese que $\Delta > 0$, pues a debe ser mayor que $-2\sqrt{c_3}$ de acuerdo a (4.1).

Respecto a las condiciones para que $f_1^r \leq 0, \forall t > 0$ (i. e., condiciones para que f_1^r esté siempre activa):

Para el caso crítico: Hace falta que la expresión entre paréntiesis de (B.1) sea siempre positiva. En otras palabras, que $1 + (\sqrt{c_3} - c_2)t > 0$, lo que deriva en la condición adimensional:

$$\pi_2 < 1 \tag{B.3}$$

para que f_i^r esté activa siempre, mientras el líder acelera libremente, en el caso crítico.

Para el caso supercrítico, se aplica el mismo principio a (B.2). De este modo se llega a la restricción:

$$\pi_1 \geq 1 \vee \pi_1\pi_2 \geq 1, \tag{B.4}$$

para que f_i^r esté activa siempre, en el caso supercrítico. Nótese que $\pi_1 \geq 1$ hace que $a + 2c_2 \leq 0$. Lo anterior, combinado con $t > 0$ hace siempre positiva la expresión entre paréntesis de (B.2). Entretanto, si $a + 2c_2 > 0$, el lado $\pi_1\pi_2 \geq 1$ asegura que $\Delta \geq a + 2c_2$. Esto, a su vez, hace que también se cumpla la condición.

ANEXO C. DESACELERACIÓN MÁXIMA

La desaceleración máxima puede ocurrir entre la velocidad máxima y una detención completa. P. ej., cuando un vehículo viajando a flujo libre detecta un obstáculo (o un líder detenido). A cierta distancia, f_i^r se activa y hace que el vehículo frene hasta quedar en reposo. A consecuencia del teorema 4.1, se puede afirmar que f_i^r estará activa siempre.

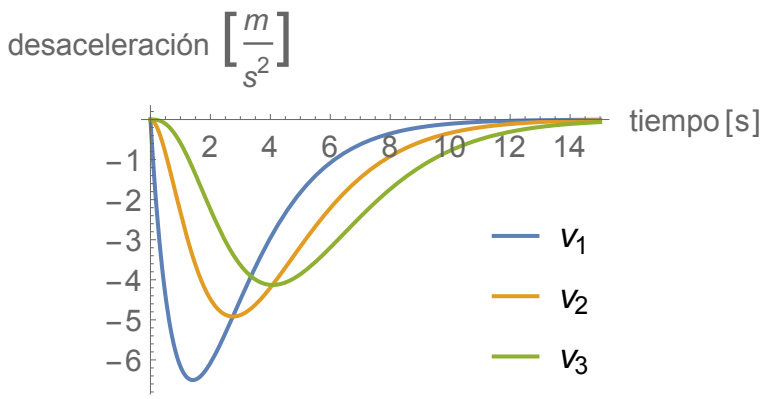

FIGURA C.1. Desaceleración de tres vehículos desde flujo libre a reposo. Parámetros: $c_1 = 0{,}1[\frac{1}{s}]$, $c_2 = \sqrt{2} - \frac{13}{20}[\frac{1}{s}]$, $c_3 = \frac{1}{2}[\frac{1}{s^2}]$, $V = 25[\frac{m}{s}]$, $\tau_r = 1{,}1[s]$, $s_r = \frac{100}{12}[m]$. Cada vehículo comienza a un gap crítico de distancia de su líder. Nótese el valor absoluto decreciente de la desaceleración máxima. Fuente: Elaboración Propia

Sin perder generalidad, se pone el origen en el líder detenido, cuando se activan las f_i^r. La trayectoria del segundo vehículo queda dada por:

$$\ddot{y} = (V - \dot{y})c_1 - \dot{y}c_2 - (y + \dot{y}\tau_r + s_r)c_3$$

$$\ddot{y}(0) = 0, \dot{y}(0) = V$$

La solución de esta EDO indica que el instante de la máxima desaceleración es:

$$t = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{c_3} - \frac{a\sqrt{a^2-4c_3}}{c_3} - 2\right)\right)}{\sqrt{a^2 - 4c_3}},$$

donde $a = -c_1 - c_2 - \tau_r c_3$, o simplemente:

$$t = \frac{1}{\sqrt{c_3}},$$

para el caso crítico. En este caso, la aceleración es:

$$-\frac{V\sqrt{c_3}}{e} \tag{C.1}$$

El el caso supercrítico la expresión es más complicada:

$$V 2^{-\frac{a}{2\sqrt{a^2-4c_3}}-\frac{3}{2}} \left(\sqrt{a^2-4c_3}+a\right) \left(\frac{-a\sqrt{a^2-4c_3}+a^2-2c_2}{c_3}\right)^{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2-4c_3}}+1\right)} \tag{C.2}$$

ANEXO D. CORRESPONDENCIA DE OBJETIVOS Y CONCLUSIONES

La tabla D.1 detalla la correspondencia entre los objetivos y las conclusiones. La numeración y contenido de los objetivos son los definidos en la sección 1.1. La numeración y contenido de las conclusiones pueden verse en la sección 7.1.

Tabla D.1. Correspondencia de Objetivos y Conclusiones

	Principal	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9
Conclusión C1	X									
C2	X									
C3	X									X
C4a		X								
C4b		X								
C4c		X								
C4d		X								
C4e		X								
C5			X							
C6				X						
C7					X					
C8					X					
C9						X				
C10							X			
C11							X			
C12							X			
C13							X			
C14								X	X	
C14a									X	
C14b									X	
C14c									X	

Fuente: Elaboración Propia