



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

METODOLOGÍA BASADA EN LA CALIBRACIÓN POR MÍNIMA ENTROPÍA PARA LA ESTIMACIÓN DE CURVAS DE TASAS EN MERCADOS DE ALTA COMPLEJIDAD

ANDRÉS IGNACIO AYALA ARMANET

Tesis para optar al grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Profesor Supervisor:
GONZALO CORTAZAR

Santiago de Chile, Marzo 2008

© MMVIII, ANDRÉS IGNACIO AYALA ARMANET



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

METODOLOGÍA BASADA EN LA CALIBRACIÓN POR MÍNIMA ENTROPÍA PARA LA ESTIMACIÓN DE CURVAS DE TASAS EN MERCADOS DE ALTA COMPLEJIDAD

ANDRÉS IGNACIO AYALA ARMANET

Tesis presentada a la Comisión integrada por los profesores:

GONZALO CORTAZAR

JAIME CASASSUS

EDUARDO S. SCHWARTZ

LORENZO NARANJO

JUAN DE DIOS RIVERA

Para completar las exigencias del grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Santiago de Chile, Marzo 2008

A Arturo y Leonor...

AGRADECIMIENTOS

A mis padres por los cuantiosos recursos materiales y espirituales que invirtieron en mi formación personal y profesional, y que hoy se ven cosechados en este trabajo.

No puedo dejar de mencionar también a mis hermanos Cristián y Javier, y agradecerles el apoyo incondicional que me brindaron. Importante también fue la comprensión de María Loreto, a quien le dedico de forma especial esta tesis.

A mi profesor guía Gonzalo Cortazar por el tiempo y apoyo proporcionado. Sus sabios consejos y recomendaciones fueron fundamentales para el progreso de la investigación.

A Lorenzo Naranjo por su ayuda en la elección del tema y en el posterior desarrollo de la tesis.

Finalmente, quisiera agradecer en forma especial a todos los integrantes del Laboratorio de Finanzas FinlabUC por su ayuda y comprensión. Este trabajo no habría sido posible sin sus incontables colaboraciones.

INDICE GENERAL

DEDICATORIA	ii
AGRADECIMIENTOS	iii
INDICE DE FIGURAS	viii
INDICE DE TABLAS	xii
RESUMEN	xvii
ABSTRACT	xix
1. INTRODUCCIÓN	1
2. MODELOS DE TASAS DE INTERÉS	7
2.1. Modelos estáticos de tasas de interés	7
2.2. Modelos dinámicos de tasas de interés	9
2.2.1. Modelos de un factor	11
2.2.2. Modelos multi-factoriales	14
2.2.3. Modelos de dimensionalidad infinita	17
2.3. Fortalezas y debilidades de los modelos de tasas de interés	18
2.4. Modelo para mercados con pocas transacciones	20
2.4.1. Calibración por filtro de Kalman	22
3. CALIBRACIÓN POR MÍNIMA ENTROPÍA	24
3.1. Calibración por mínima entropía y simulación de Monte-Carlo	26
3.2. Modificación del algoritmo para relajar las restricciones de valorización	28
3.3. Simulación de Monte-Carlo de un modelo dinámico de tasas	29
3.4. Implementación del algoritmo de calibración por mínima entropía	32
4. METODOLOGÍA PROPUESTA PARA LA ESTIMACIÓN DE CURVAS EN MERCADOS DE ALTA COMPLEJIDAD	34

4.1.	Motivación	34
4.2.	Calibración de mínima entropía con márgenes de tolerancia	36
4.2.1.	Desarrollo teórico del algoritmo propuesto	36
4.2.2.	Discusión y análisis comparativo de las alternativas de calibración	38
4.3.	Presentación de la metodología propuesta	41
4.4.	Selección de modelo dinámico base	42
4.5.	Determinación empírica de los márgenes de tolerancia	44
4.5.1.	Medidas e índices de liquidez	44
4.5.2.	Volatilidad <i>intraday</i>	46
4.5.3.	Estimación de los costos de transacción	47
4.6.	Panel de datos y agrupación de transacciones	49
4.7.	Implementación del algoritmo de calibración por mínima entropía	53
4.8.	Muestreo y reconstrucción de la estructura de tasas de interés	54
4.9.	Control de calidad del modelo dinámico ajustado	54
4.9.1.	Análisis de error y sesgo	55
4.9.2.	Cálculo de la estructura de volatilidad	56
4.9.3.	Examen de las curvas <i>forward</i> implícitas	57
5.	IMPLEMENTACIÓN DE LA METODOLOGÍA EN EL MERCADO CHILENO DE RENTA FIJA	59
5.1.	Descripción del mercado chileno de renta fija	59
5.1.1.	Revisión de la literatura sobre los modelos de tasas de interés aplicados en el mercado chileno	61
5.2.	Análisis empírico del mercado chileno de renta fija	62
5.3.	Elección de modelo y simulación de Monte-Carlo	66
6.	RESULTADOS Y ANÁLISIS EMPÍRICO	71
6.1.	Presentación y análisis de los datos utilizados	71
6.2.	Análisis de convergencia y validación del modelo base	73
6.3.	Análisis de desempeño de la calibración con restricciones en igualdad	74

6.4.	Cálculo de medidas para los rangos de tolerancia	77
6.4.1.	Volatilidad <i>intraday</i>	78
6.4.2.	Índices de liquidez	79
6.4.3.	Estimación costos de transacción	84
6.5.	Análisis de desempeño de la metodología en el mercado chileno	84
6.5.1.	Ejemplo 1 de la aplicación de la metodología	85
6.5.2.	Ejemplo 2 de la aplicación de la metodología	92
6.5.3.	Ejemplo 3 de la aplicación de la metodología	97
7.	CONCLUSIONES	105
	BIBLIOGRAFÍA	108
	ANEXOS	114
	ANEXO A. MÉTODOS DE ESTIMACIÓN UTILIZADOS POR LOS BANCOS CENTRALES	115
	ANEXO B. DEFINICIONES Y NOTACIONES BÁSICAS DE LAS TASAS DE INTERÉS	116
	ANEXO C. CÁLCULO PREMIO POR RIESGO A TRAVÉS DE ARGUMENTOS DE NO ARBITRAJE	117
	ANEXO D. RECUPERACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADES AJUSTADA POR RIESGO A PARTIR DE LOS PRECIOS DE OPCIONES . . .	119
	ANEXO E. OBTENCIÓN DEL VECTOR DE PROBABILIDADES QUE MINIMIZA ENTROPÍA RELATIVA	122
	ANEXO F. GRADIENTE Y HESSIANO ANALÍTICO DEL PROBLEMA DE MINIMIZACIÓN DE ENTROPÍA RELATIVA	124
	ANEXO G. TRANSFORMACIÓN DE LOS RANGOS DE TOLERANCIA: DE PUNTOS BASE A PRECIO	126

ANEXO H. ASIGNACIÓN ÓPTIMA DE RECURSOS BAJO ESQUEMA DE EULER	127
ANEXO I. PROPIEDADES DE LOS INSTRUMENTOS EMITIDOS POR EL GOBIERNO DE CHILE	128
ANEXO J. EJEMPLO 2: GRÁFICOS DE LAS ESTRUCTURAS DE RENDIMIENTO DE PAPELES BCU/BTU	130
ANEXO K. EFECTOS EN TÉRMINOS DE ERROR DE LA AGRUPACIÓN DE TRANSACCIONES	133
ANEXO L. ANÁLISIS DEL EFECTO DEL ALGORITMO SOBRE OBSERVACIONES FUERA DE MUESTRA	137
ANEXO M. COMPARACIÓN DE LA IMPLEMENTACIÓN DEL ALGORITMO CON DISTINTAS TOLERANCIAS	141
ANEXO N. EJEMPLO DE LA IMPLEMENTACIÓN DEL ALGORITMO CON PESOS	147
ANEXO O. MATRIZ DE CORRELACIÓN DE LOS ÍNDICES DE LIQUIDEZ .	151

INDICE DE FIGURAS

1.1	Comparación de las estructuras de tasas generadas por modelos estáticos y dinámicos para el día 17/03/2006 en el mercado chileno. Instrumentos BCU/BTU.	3
1.2	Comparación de las estructuras de tasas generadas por modelos estáticos y dinámicos para el día 20/03/2006 en el mercado chileno. Instrumentos BCU/BTU.	4
1.3	Comparación del movimiento de las curvas estáticas y dinámicas entre los días 17/03/2006 y 20/03/2006. Instrumentos BCU/BTU.	5
2.1	Comparación de las estructuras de tasas generadas por distintos modelos estáticos para el día 04/04/2007. Instrumentos BCU/BTU. Nelson & Siegel, Svensson y Spline cúbico.	10
4.1	Ejemplo de aplicación del algoritmo de <i>trade-off</i> para el día 02/03/2007 en el mercado chileno. Instrumentos BCU/BTU.	40
4.2	Diagrama de flujo de la metodología MDA.	43
4.3	Ejemplo de aplicación del algoritmo con restricciones en igualdad para el día 23/05/2003 en el mercado chileno. Instrumentos BCU/BTU.	50
4.4	Ejemplo de aplicación del algoritmo con restricciones en igualdad para el día 26/05/2003 en el mercado chileno. Instrumentos BCU/BTU.	51
5.1	Ejemplo gráfico de la simulación de Monte-Carlo para el día 02/01/2006. Instrumentos BCU/BTU.	70
6.1	Estructura de rendimiento papeles PRC el día 25/11/2005.	75
6.2	Estructura de volatilidad de los papeles BCU/BTU. Tolerancia de 0, 5 y 10 puntos bases. Periodo 2003-2007.	76

6.3	Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU y curva cero <i>forward</i> para el día 31/01/2007. Tolerancia de 0 puntos bases.	77
6.4	Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU y curva cero <i>forward</i> para el día 31/01/2007. Tolerancia de 5 puntos bases.	78
6.5	Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU y curva cero <i>forward</i> para el día 31/01/2007. Tolerancia de 10 puntos bases.	79
6.6	Evolución en el tiempo de los índices de liquidez por montos transados. Instrumentos BCU/BTU (3, 4 y 5 años plazo). Periodo 2003-2007.	81
6.7	Evolución en el tiempo de los índices de liquidez por montos transados. Instrumentos PRC (7, 8 y 9 años plazo). Periodo 2003-2007.	83
6.8	Ejemplo 1: Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU para el día 08/10/2004.	87
6.9	Ejemplo 1: Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU para el día 15/03/2005.	88
6.10	Ejemplo 1: Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU para el día 08/06/2006.	90
6.11	Ejemplo 1: Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU para el día 03/09/2007.	91
6.12	Ejemplo 1: Estructura de volatilidad diaria de los papeles BCU/BTU. Periodo 2003-2007.	92
6.13	Ejemplo 1: Estructura de volatilidad diaria de los papeles BCU/BTU. Periodo 2006-2007.	93
6.14	Ejemplo 1: Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU y curva cero <i>forward</i> para el día 31/01/2007.	94
6.15	Ejemplo 2: Estructura de volatilidad diaria de los papeles BCU/BTU. Periodo 2006-2007.	96
6.16	Ejemplo 2: Estructura de volatilidad diaria de los papeles BCU/BTU. Periodo 2006-2007.	97

6.17	Ejemplo 2: Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU y curva cero <i>forward</i> para el día 06/09/2007.	98
6.18	Ejemplo 3: Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU para el día 12/04/2005.	99
6.19	Ejemplo 3: Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU para el día 13/03/2006.	100
6.20	Ejemplo 3: Estructura de volatilidad diaria de los papeles BCU/BTU. Periodo 2003-2007.	102
6.21	Ejemplo 3: Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU y curva cero <i>forward</i> para el día 13/01/2005.	103
I.1	Estructura de pago de un bono <i>bullet</i>	128
I.2	Estructura de pago de un bono amortizable.	129
J.1	Ejemplo 2: Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU para el día 08/10/2004.	130
J.2	Ejemplo 2: Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU para el día 15/03/2005.	131
J.3	Ejemplo 2: Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU para el día 08/06/2006.	131
J.4	Ejemplo 2: Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU para el día 03/09/2007.	132
L.1	Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU para el día 01/02/2007. Metodología MDA aplicada sólo a papeles BCU-4 y BCU-5. Tolerancia 0 puntos bases.	138
L.2	Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU para el día 24/09/2007. Metodología MDA aplicada sólo a papeles BCU-18, BCU-19 y BCU-20. Tolerancia 0 puntos bases.	140

M.1	Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU para el día 15/03/2005.	
	Tolerancia de 0 puntos bases.	143
M.2	Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU para el día 15/03/2005.	
	Tolerancia de 5 puntos bases.	144
M.3	Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU para el día 15/03/2005.	
	Tolerancia de 10 puntos bases.	144
M.4	Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU para el día 02/02/2007.	
	Tolerancia de 0 puntos bases.	145
M.5	Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU para el día 02/02/2007.	
	Tolerancia de 5 puntos bases.	145
M.6	Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU para el día 02/02/2007.	
	Tolerancia de 10 puntos bases.	146
N.1	Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU para el día 31/01/2007.	
	Distintos pesos w_j	149
N.2	Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU para el día 09/03/2007.	
	Distintos pesos w_j	150

INDICE DE TABLAS

5.1	Papeles de punta del mercado chileno de renta fija: reales y nominales.	61
5.2	Porcentaje de días con transacciones agrupando por plazo remanente. Instrumentos BCU/BTU.	62
5.3	Porcentaje de días con transacciones observadas en los distintos intervalos de plazo remanente. Instrumentos PRC. Periodo 2003-2007.	63
5.4	Porcentaje de días con transacciones observadas en los distintos intervalos de plazo remanente. Instrumentos BCP/BTP. Periodo 2003-2007.	63
5.5	Análisis de liquidez del mercado agrupando los papeles por plazo remanente. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2003-2007.	64
5.6	Análisis de liquidez del mercado agrupando los papeles por plazo remanente. Instrumentos PRC. Periodo 2003-2007.	65
5.7	Error absoluto medio y sesgo de las observaciones agrupadas por plazo remanente con respecto al modelo dinámico. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2003-2007	66
5.8	Error absoluto medio y sesgo de las observaciones agrupadas por plazo remanente con respecto al modelo dinámico. Instrumentos PRC. Periodo 2003-2007	67
5.9	Análisis de sensibilidad de los parámetros de la simulación de Monte-Carlo . Periodo 2006-2007.	69
6.1	Número promedio de transacciones al día agrupadas por plazo remanente. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2003-2007.	72
6.2	Número promedio de transacciones al día agrupadas por plazo remanente. Instrumentos PRC. Periodo 2003-2007.	72
6.3	Estudio de convergencia del algoritmo de mínima entropía relativa. Periodo 2003 - 2007.	73

6.4	Estudio de convergencia del algoritmo de mínima entropía relativa. Periodo 2006 - 2007.	73
6.5	Índice de oscilación promedio de la estructura de tasas de interés para distintas aplicaciones de la metodología. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2003-2007.	76
6.6	Estimación de la volatilidad <i>intraday</i> en papeles BCU/BTU.	80
6.7	Estimación de la volatilidad <i>intraday</i> en papeles PRC.	81
6.8	Valor promedio anual del índice de liquidez para las distintas agrupaciones de plazo remanente. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2003-2007	82
6.9	Valor promedio anual del índice de liquidez para las distintas agrupaciones de plazo remanente. Instrumentos PRC. Periodo 2003-2007	83
6.10	Estimación de costos de transacción de papeles BCU/BTU. Periodo 2006-2007.	85
6.11	Estimación de costos de transacción de papeles PRC. Periodo 2003-2007	86
6.12	Ejemplo 1: Márgenes de tolerancia utilizados.	86
6.13	Ejemplo 1: Error absoluto medio y sesgo de las observaciones agrupadas con respecto a metodología y modelo dinámico. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2003-2007.	89
6.14	Ejemplo 1: Error absoluto medio y sesgo de las observaciones agrupadas con respecto a metodología y modelo dinámico. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2006-2007.	89
6.15	Índice de oscilación promedio de la estructura de tasas de interés para distintas aplicaciones de la metodología. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2003-2007.	91
6.16	Ejemplo 2: Error absoluto medio y sesgo de las observaciones agrupadas con respecto a metodología y modelo dinámico. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2003-2007.	94
6.17	Ejemplo 2: Error absoluto medio y sesgo de las observaciones agrupadas con respecto a metodología y modelo dinámico. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2006-2007.	95
6.18	Índice de oscilación promedio de la estructura de tasas de interés para distintas aplicaciones de la metodología. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2003-2007.	96

6.19	Ejemplo 3: Márgenes de tolerancia utilizados.	99
6.20	Ejemplo 3: Error absoluto medio y sesgo de las observaciones agrupadas con respecto a metodología y modelo dinámico. Transacciones reales. Periodo 2003-2007.	101
6.21	Ejemplo 3: Error absoluto medio y sesgo de las observaciones agrupadas con respecto a metodología y modelo dinámico. Transacciones reales. Periodo 2006-2007.	101
6.22	Índice de oscilación promedio de la estructura de tasas de interés para distintas aplicaciones de la metodología. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2003-2007.	102
A.1	Métodos de estimación de tasas de interés utilizados por los bancos centrales más importantes del mundo.	115
I.1	Características derivadas del nemotécnico en bonos PRC.	129
K.1	Ejemplo 1: Error absoluto medio y sesgo de las observaciones con respecto a metodología y modelo dinámico. Sin agrupación de transacciones. Periodo 2003-2007.	133
K.2	Ejemplo 1: Error absoluto medio y sesgo de las observaciones con respecto a metodología y modelo dinámico. Sin agrupación de transacciones. Periodo 2006-2007.	134
K.3	Ejemplo 2: Error absoluto medio y sesgo de las observaciones con respecto a metodología y modelo dinámico. Sin agrupación de transacciones. Periodo 2003-2007.	134
K.4	Ejemplo 2: Error absoluto medio y sesgo de las observaciones con respecto a metodología y modelo dinámico. Sin agrupación de transacciones. Periodo 2006-2007.	135
K.5	Ejemplo 3: Error absoluto medio y sesgo de las observaciones con respecto a metodología y modelo dinámico. Sin agrupación de transacciones. Periodo 2003-2007.	135

K.6	Ejemplo 3: Error absoluto medio y sesgo de las observaciones con respecto a metodología y modelo dinámico. Sin agrupación de transacciones. Periodo 2006-2007.	136
L.1	Efecto sobre el error y sesgo de las transacciones fuera de muestra. Calibración perfecta para plazos 4 y 5 años. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2006-2007.	137
L.2	Efecto sobre el error y sesgo de las transacciones fuera de muestra. Calibración perfecta para plazo 18, 19 y 20 años. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2006-2007.	139
M.1	Error absoluto medio y sesgo de las observaciones con respecto a metodología y modelo dinámico. Tolerancia de 0 puntos bases. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2003-2007.	141
M.2	Error absoluto medio y sesgo de las observaciones con respecto a metodología y modelo dinámico. Tolerancia de 5 puntos bases. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2003-2007.	142
M.3	Error absoluto medio y sesgo de las observaciones con respecto a metodología y modelo dinámico. Tolerancia de 10 puntos bases. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2003-2007.	142
M.4	Máximo error de valorización de la metodología y el modelo dinámico. Tolerancia de 5 puntos bases. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2003-2007.	146
N.1	Error absoluto medio y sesgo de las observaciones con respecto a metodología y modelo dinámico. Algoritmo con peso $w = 0,01$. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2006-2007.	147
N.2	Error absoluto medio y sesgo de las observaciones con respecto a metodología y modelo dinámico. Algoritmo con peso $w = 0,005$. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2006-2007.	148
N.3	Error absoluto medio y sesgo de las observaciones con respecto a metodología y modelo dinámico. Algoritmo con peso $w = 0,001$. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2006-2007.	148

N.4	Error absoluto medio y sesgo de las observaciones con respecto a metodología y modelo dinámico. Algoritmo con peso $w = 0,0001$. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2006-2007.	149
O.1	Matriz de correlación de los índices de liquidez. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2003-2007	152
O.2	Matriz de correlación de los índices de liquidez. Instrumentos PRC. Periodo 2003-2007	153

RESUMEN

En mercados de baja densidad de transacciones los modelos estáticos no entregan estructuras de tasas de interés que sean simultáneamente consistentes con los precios observados en el día y con el comportamiento en serie de tiempo de las tasas. Cortazar, Schwartz, y Naranjo (2007) demuestra la inconveniencia de usar este tipo de modelos y recomienda el uso de modelos dinámicos. Si el mercado es de alta complejidad, es decir, se transan instrumentos con *spreads* asociados a distintos factores de riesgo, es necesario la utilización de modelos dinámicos más sofisticados (con un mayor número de factores), lo que aumenta la dificultad de su estimación y calibración. Sin embargo, a pesar de todo el esfuerzo de modelación, muchas veces los modelos dinámicos no entregan una estructura consistente con los precios observados en el mercado.

En esta investigación se desarrolla una metodología para la estimación de curvas de tasas de interés en mercados de alta complejidad. Su objetivo es generar estructuras que sean compatibles con las transacciones del día sin tener que aumentar considerablemente la complejidad del modelo utilizado. Usando el concepto de mínima entropía la metodología modifica una distribución inicial de probabilidades generada por un modelo dinámico, de manera de mejorar la valorización de algunos instrumentos seleccionados. La búsqueda de la nueva distribución se realiza minimizando la distancia de **Kullback-Leibler**, lo que asegura que se mantenga una estructura de volatilidad compatible con la evidencia empírica.

El algoritmo es aplicado diariamente al mercado chileno de bonos reales. Se puede concluir que la metodología es capaz de mejorar la valorización de los instrumentos sin que esto repercuta en un aumento de la volatilidad. También fue posible una disminución en el sesgo promedio, lo que se explica por la capacidad del algoritmo por incorporar la información de *spreads* presente en los precios observados en el día.

Palabras Claves: modelo de tasas de interés, calibración por mínima entropía, simulación de **Monte-Carlo**, mercados de alta complejidad

ABSTRACT

In markets with infrequent trading, static term-structure estimation methods do not generate yield curves that are simultaneously consistent with observed daily prices and the stochastic behavior of interest rates. Cortazar et al. (2007) demonstrates the inconvenience of using static models and recommends instead the use of dynamic factor models. If the market is highly complex, that is when bonds are traded with spreads that are associated with different risk factors, it is necessary to use a higher dimensional dynamic model, which increases the difficulty of its estimation and calibration. Nevertheless, dynamic factor models do not generate in general a term structure consistent with observed prices.

In this investigation I develop a methodology for the estimation of term structures in highly complex markets. Its objective is to generate term structures that are consistent with observed prices without having to increase considerably the complexity of the model. Using the concept of minimum-entropy calibration, the methodology modifies the prior risk-neutral probability distribution generated by a dynamic model in order to reduce the pricing error of a selected group of bonds. The new probability distribution minimizes the **Kullback-Leibler** distance from the prior, so it preserves the good behavior of the time-series volatility of the dynamic model.

The algorithm is applied daily to the Chilean inflation-adjusted government bond market. I find that the proposed methodology improves the valuation of bonds without increasing the model-implied volatility of bond yields I also find that the average pricing error bias decreases, which can be explained by the ability of the algorithm to incorporate the spread information present in observed prices.

Keywords: term-structure models, minimum-entropy calibration, Monte-Carlo simulation, high complexity markets

1. INTRODUCCIÓN

La modelación de la estructura de tasas de interés ha sido siempre en la literatura financiera uno de los temas más relevantes e investigados. Esto se explica por la necesidad de valorizar activos que no siempre son transados en el mercado, debiéndose interpolar o extrapolar las tasas de interés observadas. La primera vertiente de investigación se centró en los llamados modelos estáticos. En ellos se buscan formas funcionales paramétricas que tengan un comportamiento financiero correcto y que sean capaces de ajustarse a los precios observados de los bonos (Nelson y Siegel, 1987; Svensson, 1995). Otros autores (Waggoner, 1997; Fisher, Nychka, y Zervos, 1995; McCulloch, 1971) utilizan métodos no-paramétricos como los *splines*, que corresponden a curvas definidas a intervalos mediante polinomios. La estructura de tasas se separa entonces en distintos segmentos y se le ajusta a cada uno de ellos un polinomio. Se cautela que las uniones entre las funciones sea suave.

El explosivo aumento de activos derivados de las tasas de interés (futuros, opciones, *swaps*, *caps*, *floors*, etc.) hizo necesaria la creación de modelos que no sólo utilizaran las observaciones del día, sino que también tomaran en cuenta la historia y la dinámica de las tasas. Este enfoque utiliza modelos dinámicos de naturaleza estocástica. Consiste en hacer supuestos sobre la evolución de las variables de estado observables o no observables que definen las tasas de interés, utilizando argumentos de no arbitraje (Vasicek, 1977; Brennan y Schwartz, 1979; Langetieg, 1980; Duffie y Kan, 1996) o de equilibrio general o parcial (Cox, Ingersoll Jr, y Ross, 1985). Modelos más actuales y de mayor dimensionalidad utilizan la estructura actual de tasas de interés como entrada y definen el movimiento estocástico de la curva completa (Ho y Lee, 1986; Heath, Jarrow, y Morton, 1992).

En la literatura se utilizan principalmente dos métricas para cuantificar el ajuste de los modelos de tasas de interés. La primera mide los errores de valorización en que incurre el modelo con respecto a las observaciones (corte transversal). La segunda compara la estructura de volatilidad implícita del comportamiento en el tiempo de la curva y la volatilidad empírica de las transacciones (serie de tiempo). Los modelos estáticos, al

tomar en cuenta sólo las observaciones del día, obtienen excelentes resultados en términos de error. Su comportamiento en términos de volatilidad depende exclusivamente de la disponibilidad de observaciones. Por el contrario, los modelos dinámicos al intentar racionalizar el comportamiento en serie de tiempo de la estructura de tasas para la valorización de activos derivados, sacrifican en parte la flexibilidad para valorizar las observaciones del día.

En mercados desarrollados, donde existe un panel completo de datos, esto es, se transan todos los días instrumentos para todos los plazos relevantes, y no hay incertidumbre sobre la calidad de las observaciones, se utilizan modelos estáticos para describir las estructuras de tasas de interés. Los modelos dinámicos sólo se utilizan para valorizar activos derivados que no sólo dependen de la información del día sino también del pasado. Sin embargo en mercados de mayor complejidad, es decir, de pocas transacciones, precios asincrónicos, con importantes diferencias de liquidez entre los papeles y segmentación de mercado, la aplicación directa de estas metodologías genera errores de valorización significativos.

Algunas investigaciones (Molinare, 2002; Cortazar et al., 2007) postulan la inconveniencia de utilizar modelos estáticos en mercados de pocas transacciones, ya que generan estructuras de volatilidad que son incompatibles con la evidencia empírica. Se utiliza entonces un modelo dinámico de tres factores de riesgo calibrado mediante el filtro de **Kalman** (Cortazar et al., 2007). La estructura de tasas así generada tiene la gran ventaja de ser estable en el tiempo, ya que la curva del día depende también de las transacciones pasadas. Sin embargo, esta mayor estabilidad tiene que ser a costa de un menor ajuste en términos de error a las observaciones del día.

Por otro lado, el modelo antes descrito no hace distinciones entre las características de los papeles utilizados, por lo que los *spreads* por diferencias de liquidez u otros factores propios de los instrumentos no pueden ser explicados. La única manera de que los modelos dinámicos puedan competir en términos de error con los estáticos, es incrementando el

número de factores de riesgo, lo que aumentaría considerablemente la complejidad de la valorización.

A modo de ejemplo se utiliza un modelo estático (Svensson, 1995) y uno dinámico (Cortazar et al., 2007) para determinar la estructura de rendimiento de bonos emitidos por el Gobierno de Chile para dos días consecutivos (17/03/2006 y 20/03/2006). En ambas figuras, 1.1 y 1.2, se observa que el ajuste de la curva del modelo estático es superior al modelo dinámico. Sin embargo, el hecho de que no exista un panel completo de datos genera una volatilidad excesiva en el largo plazo.

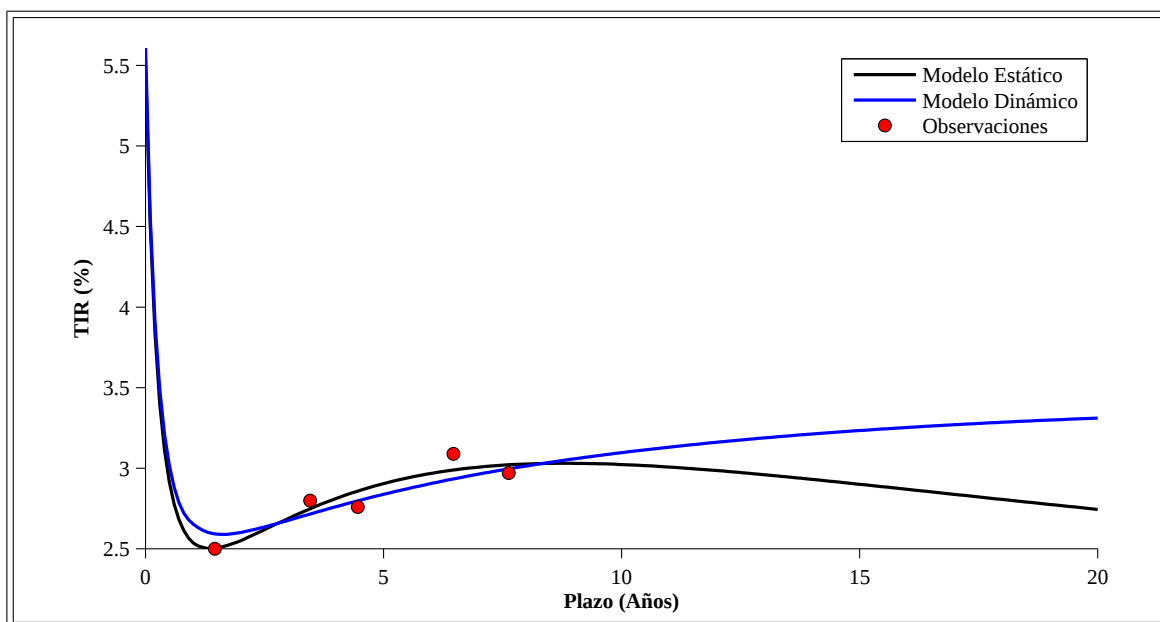


FIGURA 1.1. Comparación de las estructuras de tasas generadas por modelos estáticos y dinámicos para el día 17/03/2006 en el mercado chileno. Instrumentos BCU/BTU.

En la figura 1.3 se grafican simultáneamente las estructuras de ambos días generadas por el modelo estático y el modelo dinámico. Es evidente que la volatilidad del primero es mucho mayor que la del segundo. Como en el primer día no hay transacciones en el largo plazo, el modelo estático no es capaz de realizar una extrapolación consistente de la tasa. La diferencia en las estructuras a 20 años plazo llega a ser aproximadamente de 80 puntos

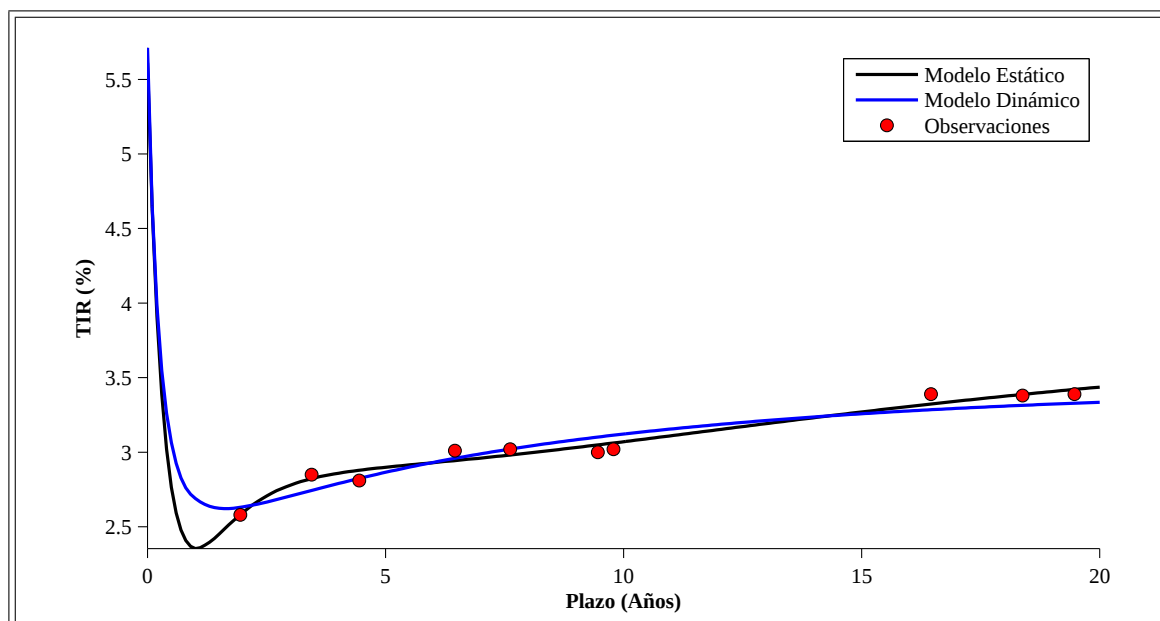


FIGURA 1.2. Comparación de las estructuras de tasas generadas por modelos estáticos y dinámicos para el día 20/03/2006 en el mercado chileno. Instrumentos BCU/BTU.

bases¹. Por el contrario, el modelo dinámico utiliza información pasada para efectuar una estimación coherente de la estructura en el largo plazo.

Esta investigación busca adaptar el concepto de calibración por mínima entropía para desarrollar una metodología que permita combinar las ventajas de los modelos estáticos y dinámicos, y así valorizar correctamente los activos en mercados de alta complejidad². En la literatura (Avellaneda, 1998; Avellaneda et al., 2001) esta herramienta surge como una alternativa para una calibración más simple y rápida de los modelos financieros, que se han vuelto cada vez más exóticos y complejos en la búsqueda de una mejor representación de la realidad. Utilizando conceptos estadísticos y de la teoría de la información, la calibración por mínima entropía evita la búsqueda de una solución óptima en el espacio de parámetros, ya que permite calibrar el modelo a las observaciones a partir de parámetros aproximados.

¹Un punto base equivale a un centésimo de punto de la tasa porcentual: 1 p.b. = 0,01%

²El término *mercado de alta complejidad* se utiliza en esta investigación para denominar un mercado que además de presentar una baja densidad de transacciones, está constituido por instrumentos de características heterogéneas y que por tanto se transan con *spreads* particulares de liquidez, riesgo de crédito, etc.

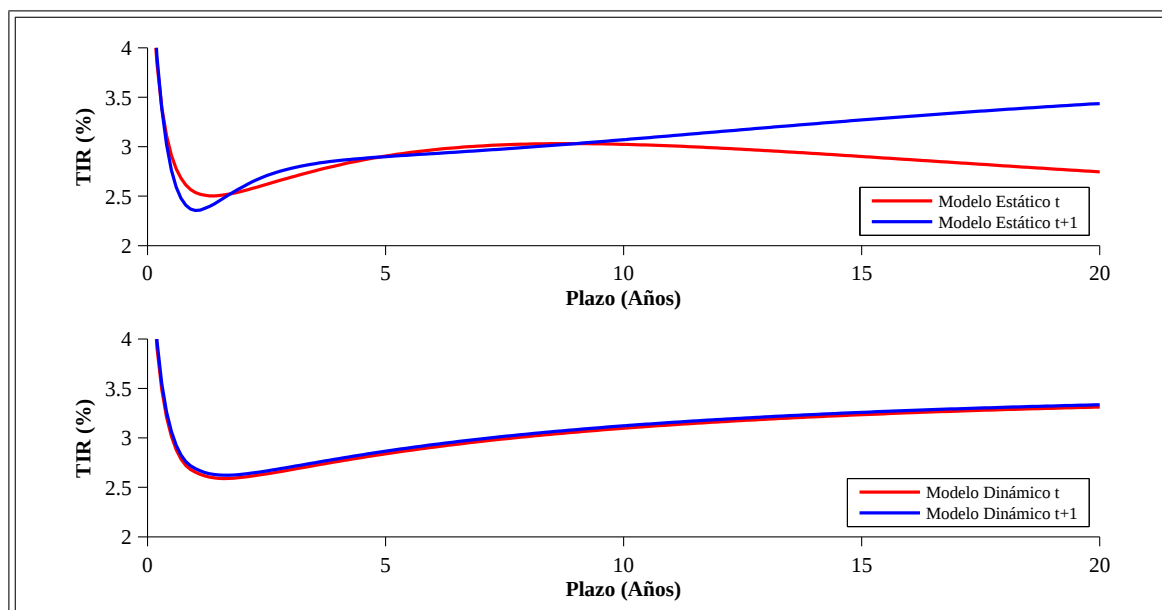


FIGURA 1.3. Comparación del movimiento de las curvas estáticas y dinámicas entre los días 17/03/2006 y 20/03/2006. Instrumentos BCU/BTU.

Este trabajo, en cambio, busca modificar la distribución de probabilidades de un modelo dinámico base, que puede ser una versión simplificada de la realidad, de manera de poder ajustarse a las complejidades de un mercado subdesarrollado. La propuesta de esta investigación es entonces el desarrollo de un modelo dinámico ajustado (MDA) que sea capaz de valorizar correctamente instrumentos heterogéneos sin aumentar la complejidad del modelo inicial.

Basándose en una estructura inicial, generada por un modelo dinámico, el algoritmo de calibración adapta la distribución de probabilidades, de manera de ajustarse a los instrumentos seleccionados. A partir de esta metodología, se espera obtener una valorización con menor error promedio (característica de los modelos estáticos) sin descuidar la estabilidad en el tiempo de la estructura de tasas de interés (ventaja de los modelos dinámicos) en mercados de alta complejidad. Este resultado sólo sería obtenible por los modelos tradicionales con un alto número de factores de riesgo.

La metodología propuesta es un mecanismo que permite ponderar la información pasada de la estructura de tasas incorporada en el modelo dinámico con las transacciones

del día. Lo novedoso es que el algoritmo permite incorporar información que no es captada por el modelo como los *spreads* particulares de los activos. Además es un proceso flexible, ya que es posible regular individualmente para cada transacción el grado de relevancia de la nueva observación.

La estructura de este trabajo es la siguiente. En primer lugar, se realiza una breve descripción de la literatura de modelos de tasas de interés. Luego se analiza y desarrolla el algoritmo de mínima entropía relativa. A continuación se define la metodología propuesta en esta investigación y se detallan los pasos a seguir para su implementación. Posteriormente se realiza un estudio del mercado chileno de renta fija y se analizan los resultados de la aplicación de la metodología. Por último, se extrae en las conclusiones las posibles ventajas y desventajas del algoritmo.

2. MODELOS DE TASAS DE INTERÉS

En esta sección se realiza una breve descripción de los modelos más importantes de tasas de interés. Se analizan tanto los modelos estáticos como los dinámicos y se efectúa un análisis comparativo para determinar sus ventajas y desventajas. Esta exposición es importante no sólo por ser una revisión de la literatura que identifica los modelos que pueden servir como *benchmarks*, sino que también porque examina modelos dinámicos que pueden ser luego utilizados en la metodología propuesta en esta investigación

La necesidad de valorizar instrumentos de renta fija para distintos plazos y, en especial, el aumento explosivo de los activos derivados han llevado al desarrollo de distintos modelos de tasas de interés. En una primera etapa, cuando sólo interesaba conocer la estructura de tasas de interés para determinar el precio de bonos, se desarrollaron modelos estáticos como los ya célebres Nelson y Siegel (1987) y Svensson (1995). En ellos se realiza una parametrización de la curva y mediante las observaciones del día, se calibran los parámetros que la describen.

Sin embargo, la necesidad de valorizar activos derivados más sofisticados como futuros, opciones, *swaps*, *floors*, *caps*, etc. sobre tasas de interés hizo necesario el desarrollo de modelos dinámicos. Esto debido a que para la valorización de estos instrumentos no sólo es necesaria la información del día, sino que también es importante la historia y el comportamiento en serie de tiempo de las tasas de interés. Dentro de esta categoría se pueden distinguir dos grupos: modelos de equilibrio y modelos de arbitraje. Los primeros tratan de obtener un proceso estocástico para las tasas, a partir de un análisis de los fundamentos de la economía y el planteamiento de un equilibrio de mercado. Los segundos utilizan variables de estado típicamente no observables y sólo se preocupan de que el proceso no permita la existencia de oportunidades de arbitraje.

2.1. Modelos estáticos de tasas de interés

La estructura de tasas de interés no es observable sino que debe ser inferida a partir de precios de mercado. Los modelos estáticos definen una estructura funcional para ajustar

la curva de rendimiento y la estiman tomando un cuenta un número limitado de precios de instrumentos de renta fija. Se pueden dividir en dos grandes grupos: los métodos paramétricos y los no paramétricos. Los primeros definen la curva de tasas de interés a través de una expresión funcional parsimoniosa, esto es, con un número limitado de parámetros. Los segundos utilizan polinomios por intervalos, lo que permite un mejor ajuste a las observaciones aumentando los grados de libertad de la estructura. Sin embargo, algunas restricciones son necesarias de aplicar para restringir las infinitas curvas que pueden ajustar los precios, muchas de las cuales no tienen sentido económico. Esto se hace en base a criterios empíricos, es decir, a partir de algunos hechos que se observan diariamente en el mercado. Por ejemplo la curva *forward* derivada a partir del modelo estático no debe presentar oscilaciones importantes, ya que contraviene la realidad y puede generar oportunidades de arbitraje. Por este motivo se limita la flexibilidad de las curvas.

En Nelson y Siegel (1987) se modela directamente la curva *forward* de manera de asegurar su suavidad. La expresión utilizada es la siguiente:

$$f(m) = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right) + \beta_2 \frac{m}{\tau_1} \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right) \quad (2.1)$$

Integrando se puede demostrar que la forma funcional para la estructura de tasas de interés es:

$$r(m) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \cdot \frac{[1 - \exp(-m/\tau)]}{m/\tau} - \beta_2 \cdot \exp(-m/\tau) \quad (2.2)$$

De esta forma, utilizando las observaciones del día se calibran los parámetros $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau$ de manera de minimizar el error cuadrático medio. Basándose en este trabajo, (Svensson, 1995) agregó un término más a la expresión que modela la curva *forward* para aumentar la flexibilidad de la estructura:

$$f(m) = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right) + \beta_2 \frac{m}{\tau_1} \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right) + \beta_3 \frac{m}{\tau_2} \exp\left(-\frac{m}{\tau_2}\right) \quad (2.3)$$

Obteniendo la siguiente expresión para la curva de tasas de interés:

$$r(m) = \beta_0 + \beta_1 \frac{1 - \exp(-m/\tau_1)}{m/\tau_1} + \beta_2 \left(\frac{1 - \exp(-m/\tau_1)}{m/\tau_1} - \exp(-m/\tau_1) \right) + \quad (2.4)$$

$$+ \beta_3 \left(\frac{1 - \exp(-m/\tau_2)}{m/\tau_2} - \exp(-m/\tau_2) \right)$$

Otra posibilidad para representar la estructura de tasas a partir de un conjunto de precios de bonos es utilizar métodos no-paramétricos. El más utilizado en la literatura financiera recibe el nombre de *spline* y corresponde a una curva definida a intervalos mediante polinomios de cierto orden. Los nodos son los puntos que definen los intervalos y por lo tanto, el lugar donde se cambia de una función a la otra. Para que el *spline* cumpla con condiciones de continuidad y suavidad se establecen restricciones a los polinomios que lo conforman. McCulloch (1971) es el primer trabajo donde se utiliza este método para modelar las estructura de tasas de interés. Para aumentar la estabilidad de las curvas generadas, Waggoner (1997) y Fisher et al. (1995) utilizan los llamados *smoothing splines*, que corresponden a *splines* cúbicos que incorporan una función de penalización por oscilaciones.

Los modelos estáticos realizan un buen trabajo en mercados desarrollados, donde día a día se observan precios para todos los plazos relevantes. Son utilizados habitualmente por los distintos agentes de mercado para la valorización de bonos y la creación de curvas de referencia (ver anexo A).

En la figura 2.1 se muestra el resultado de implementar los modelos estáticos mencionados. El *spline* cúbico posee cuatro nodos en los plazos 0, 1, 5 y 10 y se utiliza el método desarrollado por McCulloch (1971) para extraer la curva cero a partir de instrumentos con características distintas. Como es de esperar, se puede observar que los modelos que poseen una mayor flexibilidad pasan más cerca de las transacciones.

2.2. Modelos dinámicos de tasas de interés

La dinámica de la estructura de tasas de interés determina en gran medida el precio y los portafolios de cobertura de muchos activos derivados. Debido al explosivo aumento

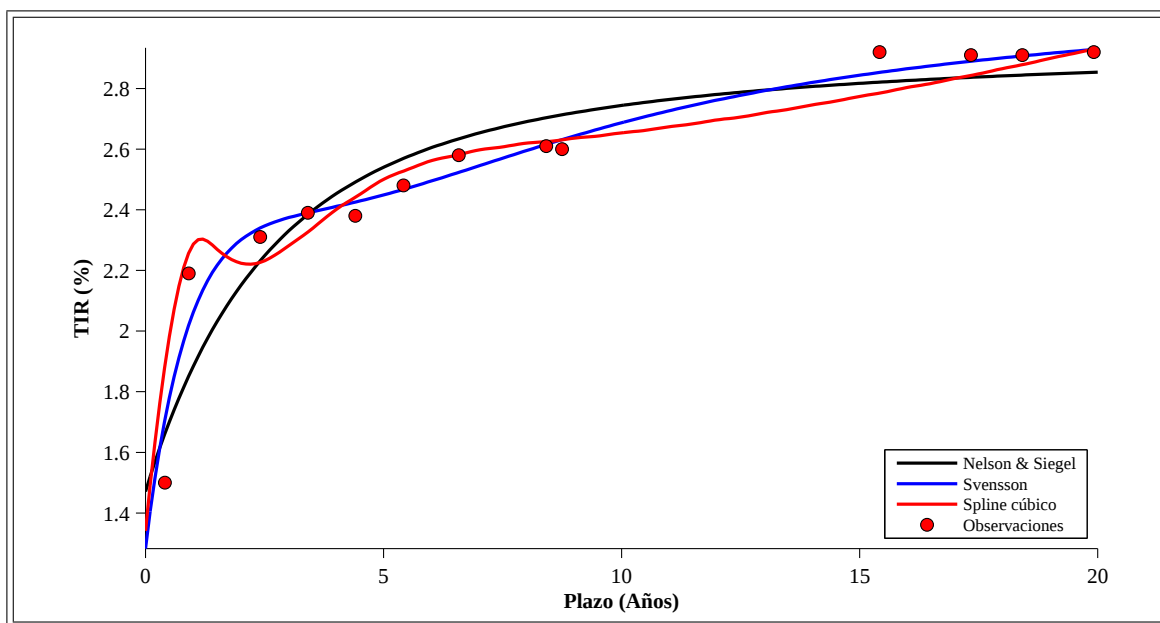


FIGURA 2.1. Comparación de las estructuras de tasas generadas por distintos modelos estáticos para el día 04/04/2007. Instrumentos BCU/BTU. Nelson & Siegel, Svensson y Spline cúbico.

de su uso en los mercados mundiales, ha surgido la necesidad de desarrollar modelos que sean capaces de valorizarlos. En los últimos 30 años se han hecho importantes avances gracias a la adopción de herramientas matemáticas derivadas de la física.

Existen muchas categorías de modelos dinámicos de tasas de interés. En primer lugar, se pueden distinguir entre aquellos que están formulados en tiempo continuo o en tiempo discreto. También se pueden diferenciar de acuerdo a los argumentos y condiciones que utilizan para llegar a las fórmulas de valorización: arbitraje y equilibrio general o parcial. Para un repaso de las definiciones básicas de tasas de interés, el lector puede ir al anexo B.

Los modelos de no arbitraje se construyen a partir de premisas y suposiciones sobre el comportamiento estocástico de las tasas de interés y del precio de mercado del riesgo para derivar expresiones matemáticas del precio de los activos contingentes, asumiendo que no existen posibilidades de arbitraje en el mercado. Dicho de otra forma, no debe existir una estrategia libre de riesgo y sin costo, que obtenga con certeza un retorno positivo en el futuro.

Por otra parte, los modelos de equilibrio parten de una descripción de la economía que incluye la función de utilidad de un agente representativo y derivan la estructura de tasas de interés, el premio por riesgo y los precios de los activos contingentes de manera endógena, asumiendo que el mercado está en equilibrio.

2.2.1. Modelos de un factor

Los modelos de un factor son populares por su simplicidad estructural. La evidencia empírica muestra que aproximadamente un 90% de la variación en los cambios de la curva de tasas es atribuible a un primer factor de riesgo, que económicamente corresponde al nivel de las tasas de interés (Litterman y Scheinkman, 1991; Knez, Litterman, y Scheinkman, 1994). Se asume que toda la información de la estructura de tasas está contenida en este factor de riesgo. Como estos modelos se asocian al nivel de la estructura de tasas, cualquier punto o tasa puede ser utilizado como referencia. Sin embargo, la gran mayoría utiliza la tasa instantánea de corto plazo $r(t)$. Es por este motivo que también son conocidos como *short-rate models*.

La dinámica de la tasa de corto plazo es descrita por la siguiente ecuación diferencial estocástica.

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW(t) \quad (2.5)$$

Esta ecuación significa que el cambio en la tasa de corto plazo puede separarse en una componente determinística también conocida como *drift* $\mu(t, r(t))$ y una perturbación estocástica representada por el movimiento **Browniano** $dW(t)$, con volatilidad instantánea $\sigma(t, r(t))$. En el caso específico en que tanto el *drift* como la volatilidad no dependen del tiempo, el modelo es homogéneo.

Como la tasa de interés no se transa directamente en el mercado, interesa valorizar los activos contingentes que dependen de esta variable. Sea $V(t, T, r(t))$ un activo cualquiera que depende de la tasa de corto y de su plazo al vencimiento. Aplicando el lema de **Ito**, se puede demostrar que el proceso estocástico que sigue este activo está dado por:

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = \mu_V(t, T, r(t))dt + \sigma_V(t, T, r(t))dW(t) \quad (2.6)$$

Al aplicar condiciones de no arbitraje a un portafolio de activos contingentes (ver anexo C), se puede demostrar que se debe cumplir la siguiente condición:

$$\frac{\mu_V(t, T, r(t)) - r(t)}{\sigma_V(t, T, r(t))} = \lambda(r(t), t) \quad (2.7)$$

donde $\lambda(r(t), t)$ es el precio de mercado del riesgo. Este premio por riesgo es la compensación requerida por los agentes para soportar una unidad de riesgo adicional, medida como la volatilidad del retorno $\sigma_V(t, T, r(t))$. No depende del plazo del instrumento y debe ser igual para todos los activos contingentes que se transan en el mercado.

Una vez determinado el premio por riesgo, el proceso de la tasa de corto plazo puede expresarse bajo la medida neutral al riesgo Q como:

$$dr(t) = (\mu(t, r(t)) - \lambda(r(t), t)\sigma(t, r(t)))dt + \sigma(t, r(t))dW(t) \quad (2.8)$$

De esta manera, los modelos de un factor son construidos especificando las formas funcionales de los parámetros y del premio por riesgo. Luego, los precios de los activos contingentes pueden obtenerse, en el mundo ajustado por riesgo, simplemente como el valor esperado de los flujos descontados.

$$V(t, T, r(t)) = E_t^Q \left[\exp^{-\int_t^T r(s)ds} V(T) \right] \quad (2.9)$$

A continuación se revisan brevemente algunos de los modelos de un factor más importantes de la literatura.

2.2.1.1. Modelo de Merton (1973)

Merton (1973) fue el primero en proponer un proceso estocástico como modelo de la tasa instantánea. Bajo la medida real P , el proceso fue definido como:

$$dr(t) = \mu_r dt + \sigma_r dW(t) \quad (2.10)$$

donde tanto μ_r como σ_r son constantes. Para pasar a la medida neutral al riesgo, Merton (1973) definió un premio por riesgo λ también constante. Sin embargo, el modelo sólo sentó las bases para modificaciones posteriores, ya que presenta problemas de estabilidad. La tasa puede tender al infinito y hacerse negativa, por lo que no es aplicable a mercados de tasas nominales.

2.2.1.2. Modelo de Vasicek (1977)

Vasicek (1977) utiliza un proceso **Ornstein-Uhlenbeck** para modelar la tasa de corto plazo.

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma dW(t) \quad (2.11)$$

donde κ , θ y σ son constantes de valores positivos. El proceso posee características interesantes: la tasa revierte a una media θ con una intensidad dada por el factor de reversión κ . Cuando $r(t)$ toma valores por sobre (bajo) θ , la variación esperada del proceso se torna negativa (positiva). Al igual que en el caso anterior, el paso a la medida neutral al riesgo se realiza mediante una constante λ .

2.2.1.3. Modelo de Cox, Ingersoll Jr, y Ross (1985)

Cox et al. (1985) desarrollaron un modelo de equilibrio general, en el cual la tasa de interés se determina por la oferta y demanda de individuos que poseen funciones de utilidad logarítmicas. El proceso estocástico que sigue la tasa de corto plazo es:

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t) \quad (2.12)$$

donde κ , θ y σ son constantes positivas. El proceso tiene la particularidad de que la volatilidad es proporcional al nivel de tasas y por lo que $r(t)$ siempre es positivo. El precio de mercado del riesgo también depende de la tasa $\lambda(r(t)) = \lambda_0\sqrt{r(t)}/\sigma$. Dada

sus características, este proceso se utiliza para modelar la estructura de tasas de interés en mercados de instrumentos nominales.

2.2.1.4. Modelo de Hull y White (1990)

Una de las desventajas de los modelos mencionados hasta el momento, es que la estructura de tasas de interés se determina endógenamente, por lo que no siempre coincide con las observaciones. Además, no son capaces de ajustar la estructura inicial de tasas y al mismo tiempo el comportamiento futuro de la volatilidad. Para solucionar estos problemas, Hull y White (1990) desarrollaron un modelo con parámetros variables en el tiempo:

$$dr(t) = (\theta(t) - \kappa(t)r(t))dt + \sigma(t)r^\beta(t)dW(t) \quad (2.13)$$

con premio por riesgo determinado exógenamente como

$$\lambda(r(t), t) = \lambda r(t)^\gamma \quad (2.14)$$

donde $\lambda, \gamma \geq 0$. Las funciones $\theta(t), \kappa(t), \sigma(t)$ dan la flexibilidad para calibrar el modelo de forma exacta a los precios observados. Sin embargo, la mayor complejidad del modelo imposibilita obtener expresiones analíticas para los precios de bonos, opciones, etc.

2.2.2. Modelos multi-factoriales

Los modelos multi-factoriales postulan que la evolución de la estructura de tasas es explicada por más de un factor de riesgo. Estos factores pueden relacionarse a variables macroeconómicas o al nivel, pendiente y convexidad de la estructura de tasas (Litterman y Scheinkman, 1991).

2.2.2.1. Modelo de Brennan y Schwartz (1979)

Los autores desarrollaron un modelo de dos factores, los cuales representan la tasa de corto plazo $r(t)$ y la tasa de largo plazo $l(t)$ respectivamente. Las dinámicas de ambos factores están gobernadas por:

$$dr(t) = \mu_r(r, l, t)dt + \sigma_r(r, l, t)dW_r(t) \quad (2.15)$$

$$dl(t) = \mu_l(r, l, t)dt + \sigma_l(r, l, t)dW_l(t) \quad (2.16)$$

donde μ_r, μ_l son los términos de pendiente y σ_r, σ_l los de volatilidad. W_r y W_l corresponden a movimientos **Brownianos** correlacionados. Cabe destacar que la diferencia entre la tasa de largo y corto plazo se puede interpretar como la pendiente de la estructura, por lo que este modelo considera los efectos de nivel y pendiente de la curva de tasas. Especificando los precios de riesgo de mercado para ambos factores, se puede determinar los precios de los activos contingentes. Sin embargo no siempre es posible llegar a una expresión analítica para ellos.

2.2.2.2. Modelo de Longstaff y Schwartz (1992)

Longstaff y Schwartz (1992) desarrollan un modelo de equilibrio de la economía, a partir del cual derivan un modelo de dos factores para la estructura de tasas de interés. Consiste en un inversionista representativo que tiene que decidir entre invertir o consumir un activo que tiene por precio $P(t)$ y que sigue el siguiente proceso estocástico.

$$\frac{dP(t)}{P(t)} = (\mu X(t) + \theta Y(t))dt + \sigma \sqrt{Y(t)}dW_1(t) \quad (2.17)$$

donde $X(t)$ y $Y(t)$ son factores de riesgo de la economía. Éstos a su vez tienen una dinámica dada por:

$$dX(t) = (a - bX(t))dt + c\sqrt{X(t)}dW_2(t) \quad (2.18)$$

$$dY(t) = (d - eY(t))dt + f\sqrt{Y(t)}dW_2(t) \quad (2.19)$$

Estos supuestos generan un modelo en que los factores se pueden identificar indirectamente como la tasa de corto plazo $r(t)$ y la varianza de los cambios de ésta $v(t)$.

2.2.2.3. Modelos *affine*

Duffie y Kan (1996) introducen la clase de modelos *affine*, los que se caracterizan por especificar las tasa de interés como una función lineal de las variables de estado. Muchos de los modelos anteriormente desarrollados, tienen una expresión *affine* equivalente.

Sean $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ N factores que evolucionan en el tiempo siguiendo el siguiente proceso estocástico multidimensional:

$$d\mathbf{X}(t) = \mu(\mathbf{X}(t))dt + \sigma(\mathbf{X}(t))d\mathbf{W}(t) \quad (2.20)$$

donde $\mu(\mathbf{X}(t))$ es vector de dimensión N y $\sigma(\mathbf{X}(t))$ es una matriz $N \times N$ y $\mathbf{W}(t)$ es un vector de N movimientos **Brownianos** independientes.

En un modelo *affine*, la tasa instantánea de corto plazo es una combinación lineal de los factores $\mathbf{X}$:

$$r(t) = \delta_0 + \sum_{i=1}^N \delta_i X_i(t) \quad (2.21)$$

La pendiente y la matriz de varianza-covarianza, que definen los procesos estocásticos, también son funciones lineales en las variables de estado. Generalmente se especifican como:

$$\mu(\mathbf{X}(t)) = \kappa [\theta - \mathbf{X}(t)] \quad (2.22)$$

$$\sigma(\mathbf{X}(t)) = \Sigma \sqrt{\mathbf{S}(t)} \quad (2.23)$$

donde θ es un vector de constantes que representa la media de largo plazo de las variables de estado y κ es la matriz de factores de reversión. $\mathbf{S}(t)$ es una matriz diagonal y su elemento ii está dado por:

$$S(t)_{ii} = \alpha_i + \beta_i' \mathbf{X}(t) \quad (2.24)$$

Definiendo los premios por riesgo como $\Lambda(\mathbf{X}(t)) = \lambda \sqrt{\mathbf{S}(t)}$, el proceso ajustado por riesgo también es *affine*. Se puede demostrar que el precio de un bono de descuento con vencimiento τ está dado por:

$$P(t, \tau) = \exp \{A(\tau) - \mathbf{B}(\tau) \mathbf{X}(t)\} \quad (2.25)$$

donde $A(\tau)$ y $\mathbf{B}(\tau)$ satisfacen un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Dai y Singleton (2000) define un marco general a través del cual se pueden clasificar todos los modelos *affine*. Para una revisión a fondo de este tipo de modelos, el lector puede consultar Piazzesi (2003).

2.2.3. Modelos de dimensionalidad infinita

A pesar del desarrollo de modelos multi-factoriales, muchas veces no es posible ajustar los precios observados, ya que no hay suficientes grados de libertad. Además éstos deben ser calibrados frecuentemente para mantener su buen comportamiento. Por este motivo surgió en la literatura un enfoque completamente distinto. En vez de utilizar un número finito de variables de estado se utiliza un modelo de dimensionalidad infinita, en el cual se analiza el comportamiento de la estructura de tasas completa.

En ellos se modela el proceso que siguen las tasas *forwards* $\{F(t, T)\}_{0 < t < T}$. El primer trabajo en esta línea corresponde a Ho y Lee (1986), el cual utiliza un modelo discreto binomial para modelar la curva de tasas completa. Exógenamente fijan una estructura inicial y derivan sus posibles movimientos en el tiempo, de forma de mantener las condiciones de no arbitraje.

2.2.3.1. Modelo de Heath, Jarrow, y Morton (1992)

En el modelo de Heath et al. (1992) se especifican exógenamente las tasas *forwards* instantáneas y se derivan, utilizando una medida martingala equivalente, los precios de activos contingentes. Este enfoque es equivalente a tomar la dinámica de los precios de bonos como dada y valorizar los activos derivados suponiendo ausencia de posibilidades de arbitraje.

Las dinámicas de las tasas *forwards* instantáneas se definen como:

$$df(t, T) = \mu_f(t, T)dt + \sigma_f(t, T)dW(t) \quad (2.26)$$

donde $f(t, T)$ es la tasa *forward* instantánea que se acuerda en t para el plazo T . Los términos $\mu_f(t, T)$ y $\sigma_f(t, T)$ son procesos adaptados para todo T y deben cumplir con condiciones de regularidad.

Para que el modelo logre un ajuste perfecto de la estructura de tasas observada, se utiliza como condición inicial la curva *forward* observada $f^*(0, T)$ para todo T ,

Para una revisión más exhaustiva de los distintos modelos de tasas de interés el lector puede remitirse a Gibson, Lhabitant, y Talay (1998), Yan (2001) y Jabbour y Mansi (2002).

2.3. Fortalezas y debilidades de los modelos de tasas de interés

En esta sección se analizan las ventajas y desventajas que presentan los modelos estáticos y dinámicos en la valorización de bonos.

Tal como ya fue mencionado anteriormente, existen dos indicadores que son comúnmente utilizados en la literatura para medir el desempeño de los modelos de tasas

de interés. El primero se relaciona con el ajuste de la curva a las transacciones y se calcula como el error absoluto (cuadrático) medio entre la valorización teórica (modelo) y la tasa observada en el mercado. Matemáticamente esto se expresa como:

$$MAE = \sum_{n=1}^N \frac{1}{N} |R(t, \tau) - TIR_{obs}(\tau)| \quad (2.27)$$

donde N es el número total de observaciones. Claramente en esta aspecto, los modelos estáticos poseen una ventaja sobre los dinámicos. Basta con que se defina una forma funcional que posea tantos grados de libertad como transacciones, para que se obtenga una valorización perfecta.

Sin embargo, también es relevante el comportamiento en serie de tiempo de la estructura de tasas de interés. Particularmente, si se estudia el movimiento de la tasa a un plazo τ , es deseable que sus cambios diarios sean compatibles con la evidencia empírica. Esta característica es especialmente importante si el modelo va a ser utilizado en la valorización diaria de carteras de inversión o el calculo de *Value-at-Risk*. Si las estructuras cambian excesivamente con respecto al día anterior, entonces es probable que la valorización de portafolios sea muy volátil en el tiempo y se sobredimensionen los riesgos a los que se está expuesto.

Una forma de calcular la volatilidad empírica de las observaciones es agruparlas de acuerdo a su plazo remanente y calcular para cada uno de estos grupos, la volatilidad del cambio porcentual diario. Esto se puede expresar como:

$$V(\tau) = \sigma [\ln(P(t+1, \tau)) - \ln(P(t, \tau))] \quad (2.28)$$

donde τ corresponde al plazo remanente estudiado. Si es que no se cuenta con un panel de datos completo, entonces se deben hacer algunas suposiciones. Para no sobrestimar la volatilidad verdadera, se realiza un cálculo conservador al considerar que el movimiento entre la última transacción observada en t_1 y la siguiente en t_2 es lineal. Esto

equivale a suponer que la volatilidad de la transacción durante ese periodo es la mínima posible.

Esta estimación de la volatilidad empírica de las observaciones es comparada con la volatilidad del modelo. En el caso de algunos modelos dinámicos es posible encontrar una expresión analítica que entrega la volatilidad en función del plazo. Sin embargo, para los que poseen especificaciones más complejas y para los modelos estáticos, se debe utilizar el mismo procedimiento anteriormente mencionado.

Es esperable que los modelos dinámicos tengan un mejor comportamiento bajo esta medida, ya que precisamente intentan racionalizar los movimientos en serie de tiempo de las tasas de interés y utilizan, para ello, no sólo la información del día sino que también del pasado. En el caso de los modelos estáticos, su comportamiento en el tiempo dependerá exclusivamente de la disponibilidad y calidad de las observaciones. Si no existe un panel completo de datos o las transacciones son ruidosas, es probable que la volatilidad del modelo sea mucho mayor a la empírica.

2.4. Modelo para mercados con pocas transacciones

En mercados de baja liquidez, tal como fue demostrado en Cortazar et al. (2007), no es conveniente utilizar modelos estáticos, ya que la falta de información de precios para distintos plazos tiene como consecuencia que la estructura de volatilidad generada por las curvas no sea consistente con la evidencia empírica. La solución planteada por los autores es la utilización de modelos dinámicos, ya que ellos también utilizan las transacciones pasadas como fuente de información.

El modelo dinámico utilizado por Cortazar et al. (2007) corresponde a un **Vasicek** generalizado, el que utiliza un número limitado de factores no observables para resumir el comportamiento estocástico de la curva de tasas de interés. Esta formulación es utilizada por Langetieg (1980) y también es analizada por Babbs y Nowman (1999). Considera N factores estocásticos con reversión a la media representados por el vector $\mathbf{x}_t$. Se asume que la tasa de interés es una función lineal de las variables de estado y está dada por:

$$r_t = \mathbf{1}' \mathbf{x}_t + \delta \quad (2.29)$$

Por su parte el vector de variables de estado es gobernado por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$d\mathbf{x}_t = -\kappa \mathbf{x}_t dt + \Sigma d\mathbf{W}_t \quad (2.30)$$

donde κ es matriz diagonal y corresponde a la matriz de reversión y $d\mathbf{W}_t$ es un vector de diferenciales de movimientos **Brownianos** correlacionados ¹.

Bajo esta especificación el modelo posee variables de estado que distribuyen bajo una distribución normal multivariada.

En (2.30) se muestra el proceso real que siguen las variables de estado. Sin embargo, para efectos de valorización interesa el proceso ajustado por riesgo. Asumiendo precios de mercado del riesgo λ constantes, el proceso estocástico queda:

$$dx_t = -(\lambda + Kx_t)dt + \Sigma dW_t^Q \quad (2.31)$$

Aplicando el lema de **Ito**, identificando las condiciones de borde del problema ² y utilizando argumentos de no arbitraje se puede encontrar una solución analítica de la ecuación diferencial estocástica. De esta forma, el valor de un bono de descuento está dado por:

$$P(\mathbf{x}_t, \tau) = e^{\mathbf{U}'(\tau)\mathbf{x}_t + v(\tau)} \quad (2.32)$$

¹Por lo tanto, $(d\mathbf{W}_t)'(d\mathbf{W}_t) = \mathbf{\Omega}dt$ donde $\mathbf{\Omega}$ corresponde a la matriz de correlación instantánea de las variables de estado.

²Considerar que el valor de un bono en su vencimiento es igual a: $P(\mathbf{x}_t, 0) = 1$

donde

$$u_i(\tau) = -\frac{1 - e^{-\kappa_i \tau}}{\kappa_i} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} v(\tau) = & \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{\kappa_i} \left(\tau - \frac{1 - e^{-\kappa_i \tau}}{\kappa_i} \right) - \delta \tau \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\sigma_i \sigma_j \rho_{ij}}{\kappa_i \kappa_j} \left(\tau - \frac{1 - e^{-\kappa_i \tau}}{\kappa_i} - \frac{1 - e^{-\kappa_j \tau}}{\kappa_j} + \frac{1 - e^{-(\kappa_i + \kappa_j) \tau}}{\kappa_i + \kappa_j} \right) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Sabiendo el valor de un bono de descuento, se puede valorizar cualquier instrumento que sea una combinación lineal de ellos (como los son los bonos *bullet* y amortizables). Por otro lado, la tasa anualizada que se deriva de (2.32) es:

$$R(\mathbf{x}_t, \tau) = -\frac{1}{\tau} \ln(P(\mathbf{x}_t, \tau)) = -\frac{1}{\tau} (\mathbf{U}'(\tau) \mathbf{x}_t + v(\tau)) \quad (2.35)$$

2.4.1. Calibración por filtro de Kalman

El filtro de **Kalman** es una metodología que calcula recursivamente estimadores óptimos de variables de estado no observables. Para ello hace uso de toda la información disponible en el tiempo hasta el instante en que se realiza la estimación. El método se basa en las ecuaciones de medida y de transición. La primera (2.36) relaciona el vector de variables observables $\mathbf{z}_t$ con el vector de variables de estado $\mathbf{x}_t$.

$$\mathbf{Z}_t = \mathbf{H}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{d}_t + v_t \quad v_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R}_t) \quad (2.36)$$

La segunda (2.37) describe la dinámica que gobierna las variables de estado. Cuando ellas no siguen un proceso lineal, se puede utilizar el filtro de **Kalman** extendido que consiste en la linealización de la función en cada instante de tiempo.

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}_t \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{c}_t + \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_t) \quad (2.37)$$

Sea $\mathbf{P}_t$ la matriz de covarianza de los errores de estimación:

$$\mathbf{P}_t = E[(\mathbf{x}_t - \tilde{\mathbf{x}}_t)(\mathbf{x}_t - \tilde{\mathbf{x}}_t)'] \quad (2.38)$$

Dado el vector de variables de estado en $t - 1$ ($\tilde{\mathbf{x}}_{t-1}$) y $\mathbf{P}_t$, el estimador para $\mathbf{x}_t$ y la matriz de covarianza en el instante t están dadas por (paso de predicción del filtro):

$$\tilde{\mathbf{x}}_{t|t-1} = \mathbf{A}_t \tilde{\mathbf{x}}_{t-1} + \mathbf{c}_t \quad (2.39)$$

$$\mathbf{P}_{t|t-1} = \mathbf{A}_t \mathbf{P}_{t-1} \mathbf{A}_t' + \mathbf{Q}_t \quad (2.40)$$

Cuando llega nueva información al sistema, representado por $\mathbf{z}_t$, se utiliza para obtener un estimador óptimo de las variables de estado y la matriz $\mathbf{P}_t$. Esto se conoce como el paso de actualización y sus ecuaciones son:

$$\tilde{\mathbf{x}}_t = \tilde{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{H}_t' \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{v}_t \quad (2.41)$$

$$\mathbf{P}_t = \mathbf{P}_{t|t-1} - \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{G}_t' \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{H}_t \mathbf{P}_{t|t-1} \quad (2.42)$$

En definitiva, desarrollando las expresiones se puede calcular el *likelihood* de un *set* de parámetros Ψ como:

$$\ln L(\Psi) = -\frac{1}{2} \sum_t \ln |\mathbf{F}_t| - \frac{1}{2} \sum_t \mathbf{v}_t' \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{v}_t \quad (2.43)$$

De esta manera, maximizando esta expresión se llega a los parámetros que mejor se ajustan a las observaciones.

El modelo fue aplicado en Cortazar et al. (2007) en el mercado chileno, específicamente a los instrumentos emitidos por el gobierno de Chile. Se utilizan los datos de los remates de bonos de la Bolsa Comercio de Santiago. Los resultados muestran una mejora sustantiva en términos de volatilidad de la estructura de tasas, manteniendo un aceptable nivel de error.

3. CALIBRACIÓN POR MÍNIMA ENTROPÍA

El objetivo planteado en este trabajo de desarrollar una metodología que permita mejorar la estimación de estructuras de tasas de interés en mercados de alta complejidad, se basa fundamentalmente en una herramienta conocida en la literatura como la calibración por mínima entropía. En este capítulo se realiza una breve descripción de la literatura y se analiza en detalle tanto la teoría del algoritmo como su desarrollo matemático. La familiaridad con estos conceptos es de vital importancia para la posterior comprensión de la metodología propuesta.

El desarrollo técnico y la adopción de herramientas matemáticas utilizadas en otras disciplinas científicas, han permitido modelar con mayor precisión los fenómenos económicos. Sin embargo, esto ha llevado a un aumento progresivo de la complejidad de los modelos. Un mayor número de factores de riesgo o variables de estado y especificaciones más sofisticadas, dificultan la calibración al aumentar la dimensionalidad del problema.

Los métodos tradicionales de optimización recorren el espacio de parámetros de manera de buscar el *set* que mejor se adapte, bajo distintas medidas, a las observaciones. Para ello se necesitan importantes recursos computacionales y además, no es posible asegurar *a priori* que el algoritmo de optimización llegará a la solución óptima. La calibración por mínima entropía surge en la literatura como respuesta a estas dificultades, ya que facilita enormemente la búsqueda de parámetros.

El concepto de entropía está presente en distintas áreas científicas. Desde el punto de vista macroscópico, la entropía se relaciona a la segunda ley de la termodinámica. Es una variable de estado y se interpreta como una medida de la uniformidad de la energía dentro de un sistema térmico. La definición microscópica de entropía, que se utiliza en la termodinámica estadística, corresponde al número de configuraciones microscópicas que resultan de la descripción macroscópica de un sistema termodinámico.

Para efectos de este trabajo, el concepto de entropía que interesa es el asociado a la teoría de la información (Gray, 1990). Se relaciona con el grado de incertidumbre que existe sobre un conjunto de datos aleatorios, y en su formulación discreta se define como:

$$H(X) = E(I(X)) = \sum_i^n p(x_i) \log_2 \left(\frac{1}{p(x_i)} \right) \quad (3.1)$$

Cabe notar que la función $H(X)$ tiene su máximo cuando las probabilidades $p(x_i)$ son iguales.

La divergencia de **Kullback-Leibler** o entropía relativa mide la diferencia que existe entre dos distribuciones de probabilidad. Generalmente, se utiliza para contrastar la distribución de probabilidad verdadera P (obtenida a partir de los datos) de una arbitraria Q (que representa un modelo). Matemáticamente se define, en su formulación discreta, como:

$$D(P|Q) = \sum_i p(i) \ln \left(\frac{p(i)}{q(i)} \right) \quad (3.2)$$

La idea de utilizar un algoritmo que utilice el concepto de entropía relativa para encontrar una distribución de probabilidades que cumpla con ciertas restricciones, a partir de una distribución inicial, fue desarrollada y aplicada en el mundo estadístico por Jaynes (2003) y Cover y Thomas (2006).

En el mundo de las finanzas, los trabajos de Buchen y Kelly (1996), Gulko (1998), Gulko (1999) y Gulko (2002) utilizan la minimización de la entropía para calibrar modelos de valorización de activos de un periodo. Avellaneda, Friedman, Holmes, y Samperi (1997), por su parte, hacen uso de la metodología para calibrar superficies de volatilidad.

En el anexo D se realiza una pequeña revisión bibliográfica que tiene por objetivo narrar el contexto de la introducción y utilización de la calibración por mínima entropía en la recuperación de la distribución de probabilidades neutral al riesgo implícita en los precios de opciones.

Avellaneda (1998) utiliza esta medida para simplificar la calibración de los modelos de tiempo continuo. La idea es obtener, a partir de una distribución inicial Q que sea una representación aproximada de la realidad, una distribución P que sea lo más parecida a la anterior (minimice la divergencia de **Kullback-Leibler**) pero que a la vez cumpla con ciertas restricciones. En particular, se restringe P para que valore correctamente algunos activos *benchmarks*. La distribución inicial se obtiene del modelo que se quiere calibrar, utilizando parámetros no necesariamente óptimos, como por ejemplo valores históricos u otros. De esta manera se evita tener que recorrer el espacio de parámetros en busca de la solución.

Este algoritmo permite conciliar la información pasada (econométrica, histórica, etc.) o conocimiento *a priori* que posea el modelador, con la información actual que se expresa a través de los precios de los activos.

En el artículo se muestran varias características y propiedades del algoritmo que son interesantes. En primer lugar, se destaca que el problema a minimizar es convexo y por lo tanto, la solución es estable y posee una dependencia suave de los precios de entrada. Se estudia también la sensibilidad en la valorización de activos contingentes que no son considerados en la calibración, ante variaciones de precio de los *benchmarks*. Estas sensibilidades pueden ser interpretadas, bajo la medida neutral al riesgo, como los coeficientes de la regresión entre los flujos de los activos contingentes y los flujos de los activos *benchmarks*. Finalmente se demuestra que la minimización de la entropía relativa es un caso especial de algoritmos de calibración basados en control estocástico y optimización convexa.

3.1. Calibración por mínima entropía y simulación de Monte-Carlo

Avellaneda et al. (2001) combina el poder de la simulaciones de **Monte-Carlo** con el concepto de entropía relativa. En este caso, el algoritmo consiste en modificar la distribución de probabilidades generada por la simulación de ν *paths* del modelo teórico. Cada realización generada por la simulación de **Monte-Carlo** tiene la misma probabilidad

de ocurrencia $q_i = 1/\nu$, por lo tanto la entropía relativa de P con respecto a Q se puede expresar como:

$$D(P|Q) = \sum_i p(i) \ln \left(\frac{p(i)}{1/\nu} \right) = \ln(\nu) + \sum_i p(i) \ln(p(i)) \quad (3.3)$$

Sea C_j el valor de mercado del activo $j = 1 \dots N$ y $g_{i,j}$ (o $g_j(w_i)$) el valor presente del activo j en el *path* (realización de la naturaleza) $i = 1 \dots \nu$. El problema se plantea de la siguiente manera. Se desea minimizar la entropía relativa sujeto a restricciones de valorización, esto es, que el valor esperado bajo la nueva distribución de probabilidad sea igual al precio de mercado de los activos seleccionados.

$$\begin{aligned} \min_p \quad & D(P|Q) = \ln(\nu) + \sum_{i=1}^{\nu} p_i \ln(p_i) \\ \text{s.a.} \quad & E^p[g_j] = \sum_{i=1}^{\nu} p_i g_{i,j} = C_j \quad \forall j = 1 \dots N \end{aligned} \quad (3.4)$$

Utilizando multiplicadores de **Lagrange** ($\lambda_1 \dots \lambda_N$) el problema puede replantearse en su forma dual como:

$$\min_{\lambda} \max_p \left[-D(P|Q) + \sum_{j=1}^N \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{\nu} p_i g_{i,j} - C_j \right) \right] \quad (3.5)$$

Se puede demostrar (ver anexo E) que las probabilidades p_i que maximizan la expresión anterior para todo λ , tienen la forma de **Boltzmann-Gibbs** y están dadas por:

$$p_i = \frac{1}{Z(\lambda)} \exp \left\{ \sum_{j=1}^N \lambda_j g_{i,j} \right\} \quad (3.6)$$

Donde λ corresponde al multiplicador de **Lagrange**. $Z(\lambda)$ es un factor de normalización que asegura que las probabilidades sumen uno. Su expresión matemática es:

$$Z(\lambda) = \sum_{i=1}^{\nu} \exp \left\{ \sum_{j=1}^N \lambda_j g_{ij} \right\} \quad (3.7)$$

Reemplazando la expresión (3.6) en (3.5) el problema planteado queda sólo en términos de λ .

$$\min_{\lambda} W(\lambda) = \ln(Z(\lambda)) - \sum_{j=1}^N \lambda_j C_j \quad (3.8)$$

De esta forma, encontrando el vector de λ^* óptimo y utilizando (3.6), se pueden calcular las nuevas probabilidades asociadas a los ν *paths* simulados. Obteniendo el valor esperado de un bono de descuento con madurez t (con $t = 0 \dots T$) bajo la nueva distribución, se puede construir la estructura de tasas de interés del día¹.

Es importante destacar que la divergencia de **Kullback-Leibler** no es la única función que puede utilizarse como objetivo del problema de minimización, sino que también pueden emplearse otras formas funcionales como la divergencia cuadrática, absoluta, etc. En el anexo D se muestran las distintas alternativas que se utilizan en la literatura y se analizan los efectos de la función objetivo seleccionada sobre la distribución de probabilidades generada. Sin embargo, la función de entropía posee la ventaja de ser atractiva en términos teóricos, ya que permite el desarrollo de expresiones analíticas más limpias.

3.2. Modificación del algoritmo para relajar las restricciones de valorización

No siempre es posible o deseable generar una estructura de tasas que pase exactamente por todos los papeles seleccionados. Si, por ejemplo, hay transacciones que generan oportunidades de arbitraje, ya sea porque fueron realizadas a distinta hora en un mismo día u otro motivo, el algoritmo no será capaz de encontrar una medida ajustada por riesgo.

¹Es importante destacar que la nueva distribución de probabilidades no corresponde a un cambio de medida a la **Girsanov**, ya que la volatilidad del proceso también se ve afectada.

Por otro lado, la curva cero resultante puede presentar oscilaciones importantes que no son aceptables.

Se hace necesaria entonces la modificación del algoritmo. En Avellaneda et al. (2001) se plantea cambiar la función objetivo y transformar el problema a uno sin restricciones. En este caso, se incluye la suma de los errores al cuadrado de la valorización de los *benchmarks*, de forma que se haga un *trade-off* entre minimizar la entropía relativa o mejorar el ajuste de la curva a los datos. El problema queda planteado de la siguiente manera:

$$\min_p D(P | Q) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{\gamma}{w_j} (E^p[g_j] - C_j)^2 \quad (3.9)$$

donde w_j es el peso o importancia que se le da a la minimización del error para el activo j .

Aplicando las mismas técnicas de optimización anteriores, se puede demostrar que el problema queda reducido a:

$$\min_{\lambda} W(\lambda) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N w_j \lambda_j^2 \quad (3.10)$$

Se puede observar que la expresión es similar a (3.8) pero incluye un término que depende del peso w_j y del error de valorización.

Una debilidad de este enfoque es que no se sabe a ciencia cierta cuál será el error (en puntos bases) de la curva con respecto a la transacción de mercado. El algoritmo se torna demasiado dependiente del parámetro de *trade-off* w_j seleccionado.

3.3. Simulación de Monte-Carlo de un modelo dinámico de tasas

Es de vital importancia para el correcto funcionamiento del algoritmo que la distribución inicial utilizada provenga de un buen modelo del mercado. Esto se debe a que la calibración por mínima entropía sólo modifica las probabilidades de los *paths* generados

por el modelo original. Si la mayoría de las simulaciones generan valorizaciones que son inconsistentes con los precios observados en el mercado, será imposible modificar las probabilidades para cumplir con las restricciones especificadas.

A continuación se detallan los pasos necesarios para realizar una simulación de **Monte-Carlo** a partir de un proceso estocástico. A modo de ejemplo se utiliza un modelo *affine*, ya que su generalidad incluye a modelos más particulares.

Sean $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ N variables de estado que siguen el siguiente proceso ajustado por riesgo:

$$d\mathbf{X}(t) = \mu(\mathbf{X}(t))dt + \sigma(\mathbf{X}(t))d\mathbf{W}(t) \quad (3.11)$$

Se debe utilizar el modelo bajo la medida ajustada por riesgo Q , ya que interesa la distribución asociada a la valorización de los instrumentos de renta fija, y no el proceso real que sigue la tasa de interés.

Dado que el proceso está definido en tiempo continuo, hay que realizar una discretización del mismo. Para ello existen diversos métodos que se diferencian en la precisión y complejidad de su implementación. La manera más sencilla es utilizar la llamada ecuación de Euler. Definiendo Δt como el paso de discretización, se puede demostrar que la ecuación estocástica en tiempo discreto es:

$$X_{k+1} - X_k = \mu(\mathbf{X}(t))\Delta t + \sigma(\mathbf{X}(t))\sqrt{\Delta t}\xi_{k+1}^Q \quad (3.12)$$

donde $\xi_{k+1} \sim N(0, 1)$ y $E^Q[\xi_{k+1}^i \xi_{k+1}^j] = \rho_{ij}$.

De esta forma, la tasa instantánea en el instante t está dada por:

$$r(t) = \delta_0 + \sum_{i=1}^N \delta_i X_i(t) \quad \forall t \quad (3.13)$$

El valor de un bono cero cupón asociado a la trayectoria i se puede expresar como:

$$P_t^i(T) = \exp \left\{ - \sum_{j=t}^T r_j^i \Delta t \right\} \quad (3.14)$$

De esta manera, el precio aproximado de un bono de descuento se puede calcular tomando el valor esperado de éste con respecto a todas las simulaciones (3.15). Asimismo, la estructura de tasas puede ser calculada usando la expresión anterior para cada plazo relevante.

$$P_t(T) = E [P_t^i(T)] \quad (3.15)$$

Existen dos tipos de errores que pueden generar una discrepancia en la valorización, al comparar la expresión analítica del modelo (si es que la hay) y la obtenida a partir de una simulación de **Monte-Carlo**. El primero, corresponde al ruido estadístico, que está asociado al número de simulaciones (ν) que se realizan. En toda simulación de **Monte-Carlo** mientras mayor sea ésta cantidad, mayor será la convergencia hacia el valor verdadero.

El segundo, es el error de discretización y, tal como su nombre lo indica, depende del paso Δt utilizado en la discretización. Mientras menor sea éste, menor es el error que se produce al hacer la aproximación de la integral en la fórmula (3.14):

$$P_t(T) = \exp \left\{ - \int_t^T r(t) dt \right\} \approx \exp \left\{ - \sum_{j=t}^T r_j^i \Delta t \right\} \quad (3.16)$$

Como los recursos computacionales no son ilimitados, es importante seleccionar ν y Δt de forma óptima. En el anexo H se demuestra que, bajo el esquema de **Euler**, es recomendable seguir el siguiente criterio. Sea $\hat{P}_0(T)$ el precio estimado inicial de un bono de descuento que se obtiene al utilizar los parámetros ν_0 y Δt_0 . Si se desea estimar un nuevo valor $\hat{P}_1(T)$ utilizando $\Delta t_1 = \Delta t_0/2$, entonces se sugiere definir $\nu_1 = 4\nu_0$.

Una manera de disminuir el número de simulaciones es utilizar técnicas de reducción de varianza. En este caso particular, se hace uso de variables antitéticas. Sea ξ^+ la

secuencia de números aleatorios independientes $N(0, 1)$ que son utilizados para generar un *path* de las variables de estado. Se define $P_t^+(T)$ como el valor del bono de descuento asociado a esta trayectoria. Se utiliza entonces $\xi^+ = -\xi^-$ para generar otro precio $P_t^-(T)$. El estimador antitético es:

$$P_t(T) = \frac{P_t^+(T) + P_t^-(T)}{2} \quad (3.17)$$

Esto permite disminuir significativamente la varianza de la estimación. La magnitud de este decremento depende de la covarianza $Cov(P_t^+(T), P_t^-(T))$.

Otra alternativa es utilizar números *cuasi-aleatorios* que corresponden a secuencias de baja discrepancia, cuya principal característica es que cubren más inteligentemente el espacio de integración (Joy, Boyle, y Tan, 1996).

3.4. Implementación del algoritmo de calibración por mínima entropía

Luego de haber desarrollado y analizado la parte teórica y analítica del algoritmo de calibración por mínima entropía, se detallan a continuación los pasos que son necesarios en su implementación.

Tal como fue mencionado anteriormente, en la literatura se utiliza esta herramienta para la calibración de modelos dinámicos a partir de parámetros aproximados. El primer paso entonces es determinar el proceso estocástico asociado al modelo dinámico seleccionado y encontrar valores históricos para el *set* de parámetros que lo define. Luego se llevan a cabo los siguientes procesos:

- (i) Se crea una distribución inicial de probabilidades mediante la simulación de **Monte-Carlo** del modelo dinámico de tasas de interés que se desea calibrar con un *set* de parámetros históricos.
- (ii) Se seleccionan los activos *benchmarks* a los que se desea calibrar el modelo dinámico $j = 1 \dots N$. Se obtienen sus precios de mercado C_j

- (iii) Cada activo *benchmark* es valorizado bajo los distintos estados de la naturaleza (simulaciones), generándose una matriz de precios G . El elemento g_{ij} representa el valor presente del activo j utilizando las tasas derivadas de la simulación i .
- (iv) Se minimiza la expresión (3.8) o (3.10) y se obtiene un vector λ^* que ajusta las probabilidades de ocurrencia de las simulaciones para cumplir las restricciones de valorización. Esto se hace minimizando la entropía relativa, esto es, cambiando lo menos posible la distribución inicial de probabilidades.
- (v) A través del vector de λ^* óptimo, se utiliza la expresión (3.6) para calcular las nuevas probabilidades asociadas a la simulación $i = 1 \dots \nu$.
- (vi) Se calcula la estructura de tasas de interés como la TIR del valor esperado bajo la nueva distribución del precio de un bono cero cupón a un plazo $t = 1 \dots T$.

Un aspecto clave en la implementación de la metodología de mínima entropía es la elección del algoritmo de optimización. Este debe ser capaz de encontrar la solución óptima de un problema de gran escala, ya que las variables dependen del número de activos considerados. El resultado y el rendimiento de la curva generada depende considerablemente de la calidad de la solución.

Al igual que en Avellaneda et al. (2001), en este trabajo se utiliza el algoritmo de optimización **L-BFGS-B** desarrollado en Byrd, Lu, Nocedal, y Zhu (1995) y Zhu, Byrd, y Nocedal (1997). Corresponde a un método de **Newton** de memoria limitada especialmente diseñado para problemas de gran escala. Puede ser utilizado tanto en problemas sin restricciones como con restricciones lineales.

4. METODOLOGÍA PROPUESTA PARA LA ESTIMACIÓN DE CURVAS EN MERCADOS DE ALTA COMPLEJIDAD

A continuación se presenta y desarrolla la metodología propuesta en este trabajo para la estimación de curvas de tasas de interés en mercados de alta complejidad. Para su comprensión es conveniente haber examinado las secciones anteriores, ya que el desarrollo del modelo dinámico ajustado (MDA) se basa tanto en un modelo dinámico inicial como en la calibración por mínima entropía.

La sección comienza con una motivación que investiga los beneficios potenciales de la metodología MDA. Luego se postula la modificación del algoritmo de calibración por mínima entropía para adaptarlo a un mercado de alta complejidad. Este nuevo enfoque tiene la ventaja de ser una forma más natural de ajustar la estructura de tasas a las transacciones observadas y de presentar mejores resultados en mercados subdesarrollados. Se examina en detalle las diferencias entre este nuevo algoritmo y el planteado en la literatura. Finalmente se presenta la metodología MDA y se especifican los pasos necesarios para su implementación.

4.1. Motivación

El concepto de mínima entropía es utilizado en la literatura financiera para simplificar el proceso de calibración del modelo. En todos los trabajos existentes es aplicado a mercados desarrollados, los que tienen como principal característica una gran profundidad de transacciones y liquidez. Una de las ideas más importantes de esta tesis es cambiar este enfoque y aplicar la calibración por mínima entropía a mercados con pocas transacciones. Esto bajo la premisa de que este método permite realizar mejoras sustanciales a los modelos actualmente utilizados en mercados subdesarrollados.

Es importante precisar lo que se entiende en este trabajo por un mercado de alta complejidad. Corresponde a uno donde no sólo existe un panel incompleto de datos, sino que los instrumentos poseen características heterogéneas de liquidez y riesgo. Esto se traduce en diferencias significativas de *spread* entre los papeles de punta (*benchmarks*)

y el resto. Por otro lado la baja densidad de transacciones genera muchas veces que la información revelada por los precios sea asincrónica. Todas estas características ocasionan sin duda un problema para la aplicación directa de modelos de tasas de interés diseñados para mercados desarrollados.

El objetivo de este trabajo es desarrollar una metodología que sea capaz de modificar una estructura base generada por un modelo dinámico de manera de lograr un ajuste, en términos de error, similar a los modelos estáticos o a un modelo dinámico mucho más complejo. El hecho de que la distribución inicial provenga de un modelo estable en el tiempo asegura además que el MDA posea un comportamiento aceptable en términos de volatilidad.

La metodología busca abordar y solucionar algunos de los obstáculos presentes en los mercados de alta complejidad. Esto puede repercutir en mejoras potenciales en términos de error y volatilidad en comparación a los métodos estáticos o dinámicos actualmente utilizados. Alguno de estos temas se detallan a continuación.

- Mejorar la valorización de instrumentos con *spreads* significativos por características propias. Para que un modelo dinámico logre capturar tanto los factores de riesgo sistemáticos como los particulares de los activos se debe aumentar el número de variables de estado, lo que aumenta su complejidad y la dificultad del proceso de estimación.
- Diferenciar la importancia de las transacciones, generando una estructura que valore mejor los papeles más representativos del mercado (*benchmarks*). Ninguno de los modelos planteados para mercados subdesarrollados permiten diferenciar los activos de acuerdo a criterios de liquidez, etc.
- Control preciso de los errores máximos de valorización. Mediante la definición de márgenes de tolerancia, la metodología acota la desviación máxima entre la transacción y la estructura generada. Los modelos dinámicos, al depender también de las observaciones pasadas, no permiten conocer *a priori* su rango de error.

La metodología es lo suficientemente flexible como para adaptarse a distintos tipos de enfoques. Siempre existe un *trade-off* entre minimización de error de valorización y estabilidad de la curva. En el caso de la metodología propuesta ésta no es la excepción. Dependiendo de los parámetros y datos utilizados, el algoritmo entrega curvas que van desde el extremo de la valorización perfecta de todos los instrumentos seleccionados a la recuperación del modelo dinámico inicial.

4.2. Calibración de mínima entropía con márgenes de tolerancia

En el capítulo anterior se presentó el algoritmo de calibración por mínima entropía desarrollado por Avellaneda et al. (2001). Los autores ofrecen dos alternativas para ajustar un modelo dinámico inicial a las observaciones del día: restricciones de valorización en igualdad y *trade-off* entre entropía y error de valorización al incluir la suma de desviaciones en la función objetivo.

En esta investigación se propone un nuevo enfoque que permite controlar de forma más natural y precisa los errores de valorización. La nueva forma de plantear las restricciones de valorización facilita la generación de modelos dinámicos ajustados que tomen en cuenta las características de los mercados de alta complejidad para originar estructuras de volatilidad consistentes con la realidad empírica y curvas suaves de tasas *forward*.

A continuación se desarrolla teórica y matemáticamente el algoritmo propuesto. Luego se discuten las diferencias entre el nuevo enfoque y la calibración original.

4.2.1. Desarrollo teórico del algoritmo propuesto

En este trabajo se propone definir rangos de tolerancia, es decir, restringir el valor presente calculado a partir de la nueva distribución de probabilidad para mantenerlo al interior de un intervalo definido por la transacción y los respectivos márgenes ($C_j \pm \varsigma_j$). Lo interesante de este enfoque es que el error máximo de valorización para todos los

activos está siempre acotado por $(\max \varsigma_j)$. Además se pueden asignar distintas holguras a cada uno de los activos seleccionados.

Definiendo A_j y B_j como los rangos de tolerancia superior e inferior para el activo j , el problema planteado está definido por:

$$\begin{aligned} \min_p \quad & D(P | Q) = \ln(\nu) + \sum_{i=1}^{\nu} p_i \ln\left(\frac{p_i}{q_i}\right) \\ \text{s.a.} \quad & -B_j \leq E^p[g_j] - C_j \leq A_j \quad \forall j = 1 \dots N \end{aligned} \quad (4.1)$$

Utilizando los multiplicadores de **Lagrange** $(\alpha_1 \dots \alpha_N)$ para las restricciones de cota superior y $(\beta_1 \dots \beta_N)$ para las de cota inferior, el problema se puede expresar de forma análoga a (3.5) en su formulación dual. De esta forma, resolviendo el mismo problema del anexo E se puede demostrar que el vector de probabilidades está dado en este caso por:

$$p_{\alpha, \beta}(i) = \frac{1}{Z} \exp \left\{ \sum_j^N (-\alpha_j + \beta_j) g_{i,j} \right\} \quad (4.2)$$

Con factor de normalización

$$Z(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{\nu} \exp \left\{ \sum_{j=1}^N (-\alpha_j + \beta_j) g_{i,j} \right\} \quad (4.3)$$

Al reemplazar estas ecuaciones y desarrollar las expresiones, se obtiene que el problema a minimizar está dado por (4.4). En este caso, aumentan las incógnitas a $2N$ y se agrega una restricción de no negatividad para ambos multiplicadores.

$$\begin{aligned} \min_{\alpha, \beta} \quad & \zeta(\alpha, \beta) = \ln(Z) + \sum_j^N (\alpha_j - \beta_j) C_j + \sum_j^N \alpha_j A_j + \sum_j^N \beta_j B_j \\ \text{s.a.} \quad & \alpha, \beta \geq 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Como las restricciones iniciales son de desigualdad, se deben cumplir las condiciones necesarias y suficientes de **Karush-Kuhn-Tucker (KKT)** para que la solución encontrada sea óptima. En este caso, éstas están dadas por:

$$\begin{aligned}\alpha_j \cdot (E^p[g_j] - C_j - A_j) &= 0 \quad \forall j = 1 \dots N \\ \beta_j \cdot (-E^p[g_j] + C_j - B_j) &= 0 \quad \forall j = 1 \dots N\end{aligned}\tag{4.5}$$

De las condiciones de (4.5) se puede desprender lo siguiente. Para que se cumpla la igualdad, ya sea α_j o $(E^p[g_j] - C_j - A_j)$ deben ser iguales a cero. En el caso que $(E^p[g_j] - C_j - A_j) = 0$ entonces la restricción para el activo j está activa, y por lo tanto el valor presente derivado del modelo para ese instrumento es igual a la cota superior del rango de tolerancia. En caso contrario, $\alpha_j = 0$ y entonces la valorización está al interior del intervalo definido. El análisis de las condiciones de **KKT** para β es análogo.

4.2.2. Discusión y análisis comparativo de las alternativas de calibración

En esta sección se analiza y compara el enfoque desarrollado por Avellaneda et al. (2001) con el propuesto en este trabajo. Las distintas alternativas se resumen a continuación.

- Calibración sin error: en este caso la estructura de salida valorizará de forma perfecta a los activos seleccionados. Este requerimiento puede tener como consecuencia, si los datos son muy ruidosos, desalineados o poseen *spreads* considerables, que la curva generada presente importantes oscilaciones.
- Calibración ponderada por error: esta opción permite realizar un *trade-off* entre minimización de error y estabilidad de la curva (medida como entropía relativa a la curva base). Su mayor desventaja es que el algoritmo se vuelve muy dependiente del peso w_j seleccionado, el cual no tiene interpretación económica.

- Calibración con márgenes de tolerancia: este enfoque tiene la gran ventaja de que se conoce *a priori* el error máximo de valorización en que incurre la estructura de tasas. Mientras menores sean los rangos de tolerancia, entonces menor será el error promedio y mayor la volatilidad de la curva. En el caso extremo de tolerancia nula, este proceso es idéntico al de calibración sin error. Por otro lado, si los márgenes son demasiado grandes entonces el algoritmo no realizará ninguna deformación de la curva.

La calibración sin error es un caso particular de los otros enfoques, por lo que sólo se analizan estas dos alternativas.

Avellaneda et al. (2001) incluye las restricciones en la función objetivo, de manera de realizar un *trade-off* entre la minimización de la entropía relativa y los errores de valorización. Se especifican los parámetros w_j que son justamente los que definen la importancia relativa de estas medidas. Mientras menor es el valor del peso para el activo j , mayor es la tendencia a su valorización perfecta.

Existen dos casos extremos. Cuando el vector de pesos $\mathbf{w} \rightarrow 0$ el término asociado al error de valorización predomina, por lo que este enfoque se torna análogo a la minimización de la entropía con restricciones en igualdad. Por el contrario, cuando $\mathbf{w} \rightarrow \infty$ los errores de valorización son irrelevantes, por lo que se recupera la estructura del modelo dinámico.

En el caso del enfoque propuesto en esta investigación, las restricciones son de desigualdad lo que permite definir un rango superior A_j e inferior B_j de tolerancia. Si ambos parámetros son nulos para todos los activos j ($\mathbf{A} = \mathbf{B} = 0$), entonces se recupera el caso base de la minimización con restricciones en igualdad. En cambio, si $\mathbf{A} = \mathbf{B} \rightarrow \infty$ se recupera la curva inicial del modelo dinámico.

Es interesante poder analizar las diferencias de ambos enfoques. El funcionamiento del primero recae casi exclusivamente en el peso w_j , el cual no tiene a primera vista una interpretación económica. No se sabe cuál será el error de valorización que cometerá el algoritmo para los distintos activos *benchmarks*. Los resultados dependen además de

parámetros como el número de simulaciones, por lo que los pesos w_j deben escalarse para mantener el mismo nivel de ajuste. Por otro lado, el error asociado al activo j no es independiente de los otros instrumentos seleccionados y sus respectivos pesos. También es importante mencionar que como la medición del error se hace en términos de precio, para un mismo peso w_j , un activo de largo plazo tendrá una estimación en tasa mucho más cercana que un activo de corto plazo. Estas características se pueden apreciar en el ejemplo de la figura 4.1, donde se muestra que el modelo se ajusta proporcionalmente más fielmente a las transacciones de largo plazo.

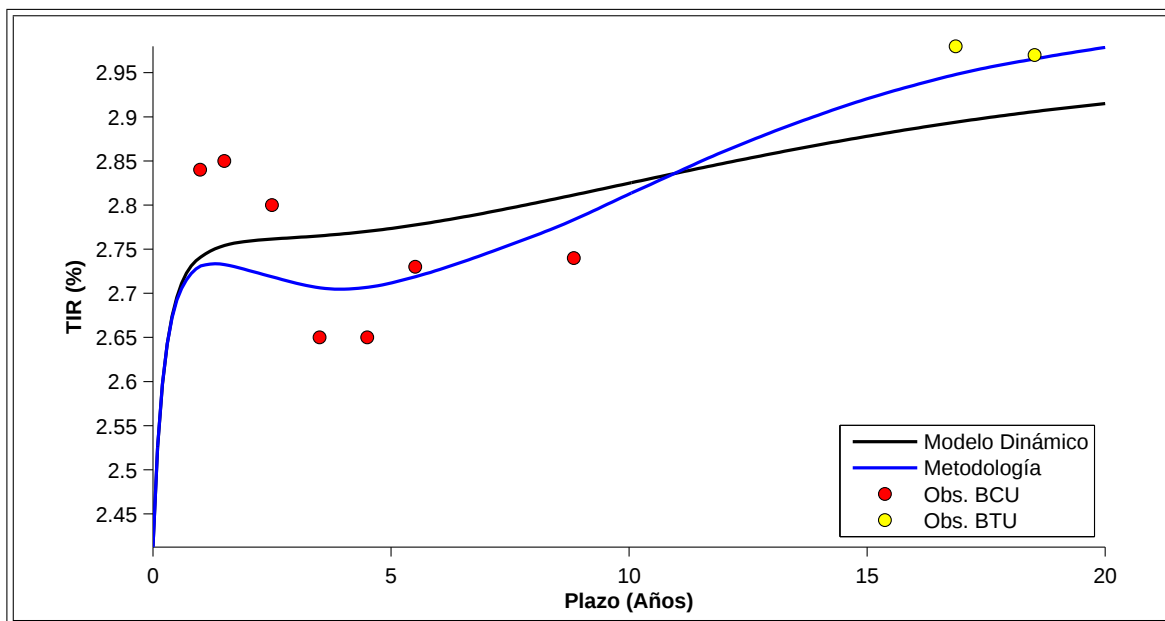


FIGURA 4.1. Ejemplo de aplicación del algoritmo de *trade-off* para el día 02/03/2007 en el mercado chileno. Instrumentos BCU/BTU.

El nuevo enfoque permite definir áreas de conformidad. La curva inicial no será deformada a menos que no pase por alguno de los rangos especificados. En el planteamiento original del algoritmo de calibración siempre es óptimo modificar la distribución inicial, en un grado de deformación que depende del peso w_j seleccionado. Por otro lado, el error asociado al activo j está acotado a todo evento por los márgenes A_j y B_j . Por consiguiente, esta forma de plantear el problema es mucho más intuitiva y valiosa para ser aplicada en mercados de tasas de interés.

4.3. Presentación de la metodología propuesta

A continuación se describe la metodología propuesta en esta investigación para la estimación de estructuras de tasas de interés en mercados de alta complejidad. Se mencionan además las distintas alternativas que existen en cada uno de los pasos, las que determinan en buena forma la curva final del modelo dinámico ajustado (MDA). En páginas posteriores se analiza en forma detallada estas opciones y se estudia los correspondientes efectos sobre el resultado de la calibración.

(i) Seleccionar modelo dinámico base.

- Corresponde al modelo generador de la distribución inicial de probabilidades (*prior*).
- Realizar un análisis de convergencia del algoritmo para determinar la idoneidad del modelo seleccionado.

(ii) Definir los errores máximos tolerables por instrumento individual o agrupación.

Calcular los márgenes de tolerancia asociados a las observaciones (cota superior e inferior).

(iii) Escoger el panel de datos de entrada para el algoritmo (*input*). Decidir entre distintas alternativas:

- Utilizar transacciones individuales o realizar algún tipo de agrupación.
- Rellenar el panel de datos utilizando un modelo de *spread* o usar sólo transacciones reales.

(iv) Aplicar el algoritmo de calibración.

- Simulación del proceso estocástico inicial.
- Ajuste de la estructura mediante la calibración por mínima entropía con márgenes de tolerancia.

(v) Realizar una reconstrucción de la curva para poder interpolar la estructura discretizada.

- Muestreo de la estructura discretizada.

- Ajuste de un polinomio a las muestras.
- (vi) **Controlar la calidad de la solución.**
- Análisis de error absoluto medio y sesgo del MDA con respecto a las observaciones.
 - Estudio de las curvas *forward* derivadas del MDA.
 - Comparación entre estructura de volatilidad del MDA y volatilidad empírica de las transacciones.

Si no se cumple alguno de los criterios de control, se debe retornar al punto (ii) y relajar las tolerancias especificadas.

La metodología es de naturaleza recursiva, ya que en la última etapa se realiza una supervisión del resultado obtenido. Para ello se definen distintos indicadores que permiten medir la calidad de la curva MDA generada. Si el resultado no es aceptable y no se cumplen los requerimientos mínimos, se debe volver al punto inicial y relajar los márgenes de tolerancia

En la figura 4.2 se representa gráficamente mediante un diagrama de flujo la metodología propuesta.

A continuación se examina en detalle cada uno de los pasos de la metodología MDA.

4.4. Selección de modelo dinámico base

La metodología está especialmente diseñada para mercados de alta complejidad, es decir, con baja densidad de transacciones, diferencias de liquidez, segmentación de mercado, etc. A pesar de que también puede ser aplicada a mercados desarrollados, no habrá mejoras con respecto a los modelos estáticos.

Se debe seleccionar un modelo dinámico base que provea una aproximación razonable de la estructura de tasas de interés. Es importante que el modelo sea estable en el tiempo y que posea una estructura de volatilidad compatible con la volatilidad empírica de las transacciones. No es necesario que el modelo logre capturar los *spreads* asociados a componentes propios de los instrumentos. Justamente una de las ventajas de la

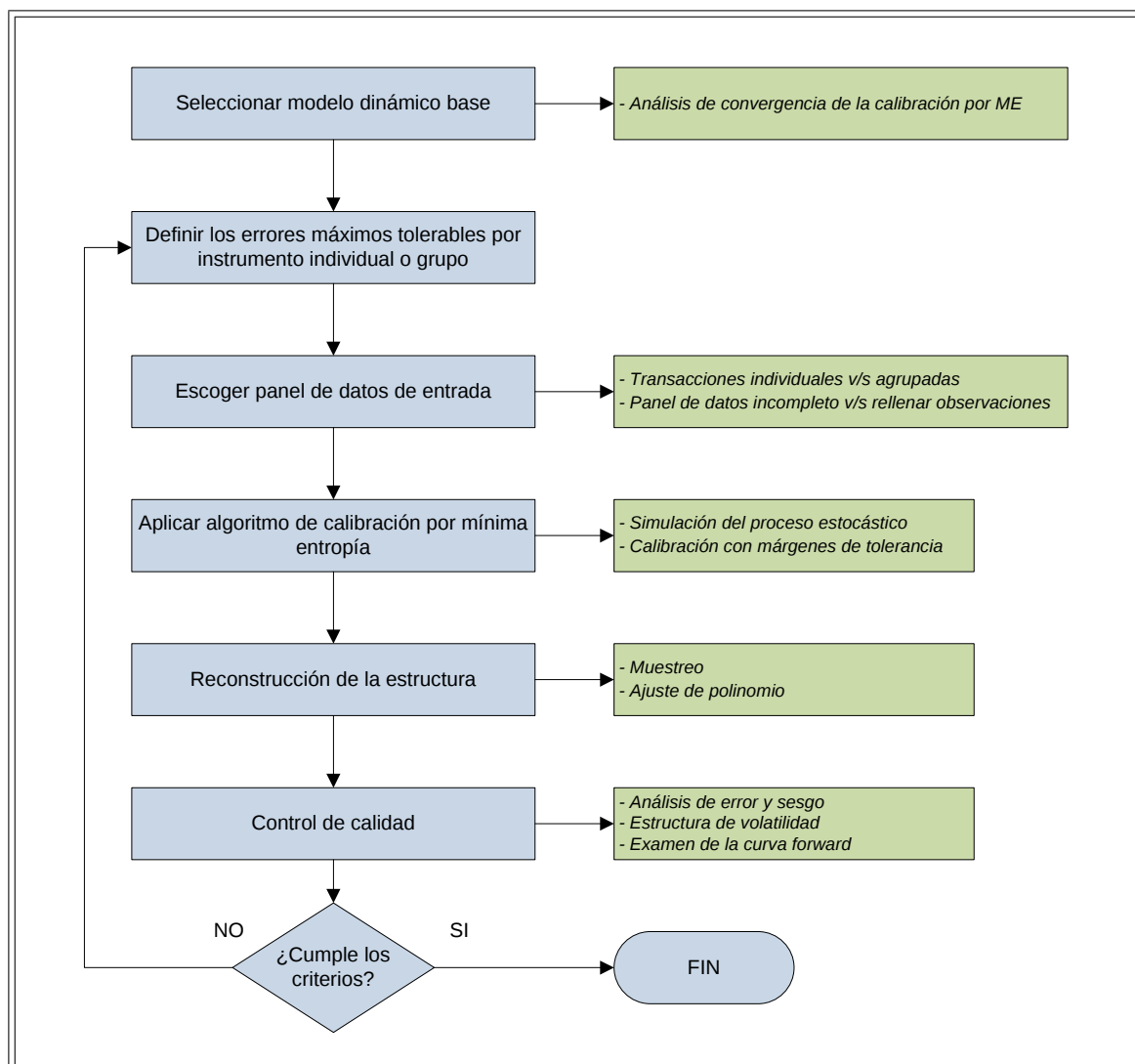


FIGURA 4.2. Diagrama de flujo de la metodología MDA.

metodología es que logra un ajuste razonable partiendo de un modelo simple, en un mercado con papeles heterogéneos.

La elección del modelo es trascendental, ya que los resultados obtenidos dependen de la calidad de la estructura inicial. Si ésta es una mala representación de la situación del mercado, el algoritmo no será capaz de converger a una buena solución.

No hay restricciones sobre la distribución asociada al proceso estocástico, por lo que se pueden considerar modelos no *gaussianos*. Tampoco es necesario que existan

expresiones analíticas para los precios de los instrumentos. Sin embargo, la idea es mantener el modelo dinámico lo más simple posible y dejar que el algoritmo de calibración por mínima entropía se haga cargo de las complejidades del mercado.

4.5. Determinación empírica de los márgenes de tolerancia

La metodología permite especificar el error máximo que se está dispuesto a tolerar en la valorización de los instrumentos. Se define para cada una de las transacciones ingresadas al algoritmo, un margen superior e inferior de desviación expresado en puntos base. Mientras menor sea el rango especificado, menor será el error de valorización. Sin embargo, esto puede repercutir en un aumento de la volatilidad de la curva.

En mercados subdesarrollados y con pocas transacciones, los datos pueden ser ruidosos y asíncronos. La tolerancia puede pensarse teóricamente como el rango de incertidumbre que hay sobre el precio de la transacción, ya sea por credibilidad o por el tiempo que ha transcurrido desde la última observación. Es razonable entonces relacionar esta variable con medidas propias del instrumento como la liquidez, profundidad, etc.

En este trabajo se presentan algunas medidas que pueden ayudar a determinar los márgenes de tolerancia. La idea y uno de los objetivos de esta investigación es dar un sustento empírico a los valores utilizados.

4.5.1. Medidas e índices de liquidez

Los márgenes de tolerancia pueden representar el grado de incertidumbre o error que se tiene de la transacción observada. Una forma de medir esta característica es determinar el grado de liquidez de la observación y por lo tanto relacionar el tamaño de los márgenes ingresados al algoritmo con un índice de liquidez. La idea es que mientras mayor es la frecuencia con que se transa el bono, mayor es la certeza que se tiene de que el precio observado es representativo del mercado e incluye información más reciente.

En la literatura (Fleming, 2001; Chacko, Mahanti, Mallik, y Subrahmanyam, 2007), se pueden encontrar diversas medidas de liquidez, las que difieren en su sustento teórico,

rendimiento empírico y requerimiento de datos. A continuación se muestran algunas de las medidas más importantes y se analizan sus ventajas y desventajas.

- *Bid-ask spread*: diferencia entre punta vendedora y compradora.
 - ↑ Representa en forma directa el costo de ejecutar una transacción.
 - ↓ Requiere datos de alta frecuencia.
- *Trading volume*: volumen transado del instrumento.
 - ↑ Medida fácil de calcular y con buena disponibilidad de datos.
 - ↓ Se asocia también a periodos de alta volatilidad.
- *Trading frequency*: número de días con transacciones.
 - ↑ Medida fácil de calcular y con buena disponibilidad de datos.
 - ↓ Se asocia también a periodos de alta volatilidad.
- *Quote sizes*: tamaño de las *quotes* del instrumento.
 - ↓ Se subestima el monto real que los agentes están dispuestos a comprar/vender.
- *Latent liquidity: turnover* promedio de los tenedores del instrumento.
 - ↑ Medida idónea para activos con baja densidad de transacciones.
 - ↓ Se debe conocer la composición de las carteras de las instituciones financieras.
- Características propias instrumento: plazo del papel, vejez de la emisión.
 - ↓ Se sustentan en argumentos exógenos.

El *spread* entre las puntas de oferta y demanda es considerada la medida más directa y exacta de liquidez, ya que entrega el costo asociado a iniciar la venta o compra del instrumento. Mientras mayor es la liquidez del activo, menor es el *spread* entre el *bid* y el *ask*. Sin embargo en mercados subdesarrollados esta información de alta frecuencia no está disponible, y por lo tanto se deben utilizar otras medidas.

Una forma sencilla es utilizar la información sobre montos transados y frecuencia de transacciones, datos que están fácilmente disponibles en los mercados. Se define una ventana móvil de largo T y, para cada papel o conjunto de instrumentos, se calcula la proporción en dinero que representan sus transacciones con respecto al total del mercado.

También es posible utilizar el porcentaje de días en que hubo observaciones durante el periodo definido por la ventana móvil. Matemáticamente esto se puede escribir como:

$$Iliq_j = \frac{\sum_{t=1}^T monto_j(t)}{\sum_{t=1}^T monto(t)} \quad (4.6)$$

$$Iliq_j = \frac{\sum_{t=1}^T 1_j(t)}{T} \quad (4.7)$$

donde 1_j es una función indicatriz que vale uno cuando existe una transacción del instrumento j y cero en caso contrario.

Una vez calculados los índices de liquidez, se debe relacionar esta medida con los márgenes de tolerancia. Esto se puede realizar mediante una función $f(Iliq_j)$. A mayor liquidez menor debe ser el rango asociado, por lo que la función debe ser decreciente. Concretamente, la relación puede definirse como:

$$tol_j = \alpha \times f(Iliq_j) \quad (4.8)$$

donde α es una constante que se calibra de tal forma que la máxima liquidez se asocie a un margen de tolerancia dado.

4.5.2. Volatilidad *intraday*

Las transacciones que se observan en un día determinado pueden no ser contemporáneas. Sin lugar a dudas, esta asincronía puede traer problemas si es que se asume que todas las transacciones son iguales. Los datos observados en la tarde pueden obedecer a condiciones de mercado muy distintas a las de la mañana. Es por esto que se hace necesario realizar un estudio de la volatilidad que se observa en las tasas de los bonos para los distintos plazos. Esta medida entrega una estimación del movimiento o dispersión promedio que se observa en las tasas de las transacciones diarias.

Si se ingresa al algoritmo el promedio de las observaciones del día, es probable que los grupos estén influenciados por transacciones que se realizaron en distinto tiempo. Al

forzar que la estructura pase por todas las observaciones se puede estar induciendo un error y una volatilidad innecesaria. Es razonable entonces relajar las restricciones y relacionar el margen de tolerancia con la volatilidad *intraday*¹. Matemáticamente ésta se calcula mediante la siguiente expresión:

$$\sigma_j^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (TIR_{i,j} - \overline{TIR_j})^2 \quad (4.9)$$

donde $\overline{TIR_j}$ es el promedio de las transacciones del día para el activo o grupo de instrumentos j .

Dependiendo de los requerimientos, los rangos de tolerancia pueden definirse como $\pm\sigma$ ($\pm 2\sigma$). Si se asume que las transacciones diarias de un activo o grupo de papeles siguen una distribución normal, entonces estos márgenes nos aseguran de que el 68% (95%) de las observaciones están dentro de este intervalo.

4.5.3. Estimación de los costos de transacción

En la mayoría de los mercados de economías subdesarrolladas no es posible encontrar información diaria sobre las puntas de oferta y demanda de los instrumentos financieros. Por lo tanto si se quiere obtener una medida del costo de transacción, se debe calcular de forma indirecta. El trabajo de Lesmond, Ogden, y Trzcinka (1999) plantea una novedosa manera de obtener estimaciones de los costos de transacción, a partir sólo de las series de tiempo de los retornos diarios de los instrumentos financieros. Para ello utilizan un modelo de variable dependiente limitada. La innovación está en utilizar los días sin transacciones (retornos iguales a cero) como importante fuente de información. La metodología es aplicada al mercado accionario norteamericano, pero también ha sido extendida a otros instrumentos como bonos corporativos (Chen, Lesmond, y Wei, 2007) y papeles de economías emergentes (Hund y Lesmond, 2006).

Este procedimiento consiste en asumir un modelo de mercado como el verdadero generador de los retornos de los instrumentos, pero que se encuentra restringido por la

¹volatilidad observada durante un día de transacciones

presencia de costos de transacción. Por lo tanto, el inversionista informado marginal sólo comprará o venderá el instrumento si el valor de la nueva información supera los costos. El retorno observado no revela el verdadero retorno del inversionista hasta que los costos de transacción son excedidos. El modelo sugiere que las transacciones observadas sólo reflejan parcialmente el valor de la información ya que el inversionista debe ser compensado por los costos de transacción. A medida que el retorno del modelo se aleja de cero, se acerca a lo que se define como el umbral de costos y hay una mayor probabilidad de que el retorno observado sea distinto de cero. En ese caso, el retorno medido coincide con el retorno verdadero neto de costos de transacción.

El retorno verdadero $R_{j,t}^*$ se calcula mediante un modelo de un factor, en donde la variable explicativa es el retorno de mercado $R_{m,t}$ ².

$$R_{j,t}^* = \beta_j \text{duracion}_{j,t} R_{m,t} + \epsilon_{j,t} \quad (4.10)$$

La relación entre el retorno medido $R_{j,t}$ y el retorno verdadero $R_{j,t}^*$ es

$$R_{j,t} = R_{j,t}^* - \alpha_{1,j} \quad \text{si} \quad R_{j,t}^* < \alpha_{1,j}$$

$$R_{j,t} = 0 \quad \text{si} \quad \alpha_{1,j} < R_{j,t}^* < \alpha_{2,j}$$

$$R_{j,t} = R_{j,t}^* - \alpha_{2,j} \quad \text{si} \quad R_{j,t}^* > \alpha_{2,j}$$

$\alpha_{1,j}$ corresponde al umbral de costos cuando hay información que afecta negativamente el precio del activo j , mientras que $\alpha_{2,j}$ es el umbral cuando hay información positiva. En el caso particular que el instrumento tenga la misma estructura de costos ante buenas y malas noticias se puede asumir que $-\alpha_{1,j} = \alpha_{2,j}$. Si $\alpha_{1,j} < \beta_j R_{m,t} + \epsilon_{j,t} < \alpha_{2,j}$ el retorno observado debe ser cero ya que no fue superado ninguno de los dos umbrales.

Los parámetros $\alpha_{1,j}$, $\alpha_{2,j}$ y β_j se estiman mediante la maximización de la función de verosimilitud. Esta expresión esta constituida por tres términos, cada uno de las cuales está

²se utiliza un instrumento de mediano plazo que sea representativo del mercado de renta fija.

asociado a los posibles movimientos de los retornos observados: positivos (2), negativos (1) e iguales a cero (0).

$$\begin{aligned}
 L(\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}, \beta_j, \sigma_j | R_{j,t}, R_{m,t}) &= \prod_1 \frac{1}{\sigma_j} \phi\left[\frac{R_{j,t} + \alpha_{1,j} - \beta_j R_{m,t}}{\sigma_j}\right] \\
 &\times \prod_0 \left[\Phi_2\left(\frac{\alpha_{2,j} - \beta_j R_{m,t}}{\sigma_j}\right) - \Phi_1\left(\frac{\alpha_{1,j} - \beta_j R_{m,t}}{\sigma_j}\right)\right] \\
 &\times \prod_2 \frac{1}{\sigma_j} \phi\left[\frac{R_{j,t} + \alpha_{2,j} - \beta_j R_{m,t}}{\sigma_j}\right]
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Una vez obtenidos los parámetros óptimos, los márgenes de tolerancia se pueden obtener directamente de $\alpha_{1,j}$ y $\alpha_{2,j}$.

Sin embargo, en este caso los rangos tienen un significado teórico distinto a los anteriores. Sólo se observa una nueva transacción si es que el retorno con respecto al día anterior es superior a los costos estimados. De esta forma, esta metodología permite incorporar observaciones de días anteriores, ya que entrega márgenes de tolerancia que toman en cuenta el hecho de que no hubo transacción. Esto puede ser especialmente importante en mercados de pocas transacciones, porque le puede dar otra dimensión intertemporal al algoritmo (que se suma al aporte del modelo dinámico base).

4.6. Panel de datos y agrupación de transacciones

Se deben definir y determinar las observaciones de entrada al algoritmo. Este paso es muy importante ya que los resultados dependen enormemente de los criterios utilizados en la selección y agrupación de las transacciones.

Lo ideal sería contar con un panel de datos completo. Esto permite valorizar correctamente los instrumentos, manteniendo una estructura de volatilidad similar a la empírica.

El problema de contar con pocas transacciones en un mercado de alta complejidad es que el modelo base, al no tomar en cuenta los *spreads* asociados a las características

propias de los distintos instrumentos, puede conducir a que la metodología MDA genere un aumento en la volatilidad de la estructura. Por ejemplo, si en un día se cuenta con transacciones para todos los plazos, el algoritmo será capaz de mejorar la valorización de los activos al incorporar la información propia de las transacciones. Sin embargo, si al otro día no hay observaciones, la metodología entregará simplemente la curva base inicial.

Este fenómeno se puede apreciar en las figuras 4.3 y 4.4. En el primer día existe una transacción en el largo plazo que el modelo dinámico no es capaz de valorizar correctamente. Por este motivo el algoritmo entrega una estructura de tasas muy distinta a la inicial, para así poder ajustarse mejor a la transacción. Sin embargo, al día siguiente no hay observaciones en el largo plazo, por lo que la curva generada adquiere en ese sector la forma de la estructura del modelo dinámico inicial. Esto causa que la volatilidad en serie de tiempo de la curva entregada por el algoritmo aumente peligrosamente, siendo incompatible con la evidencia empírica.

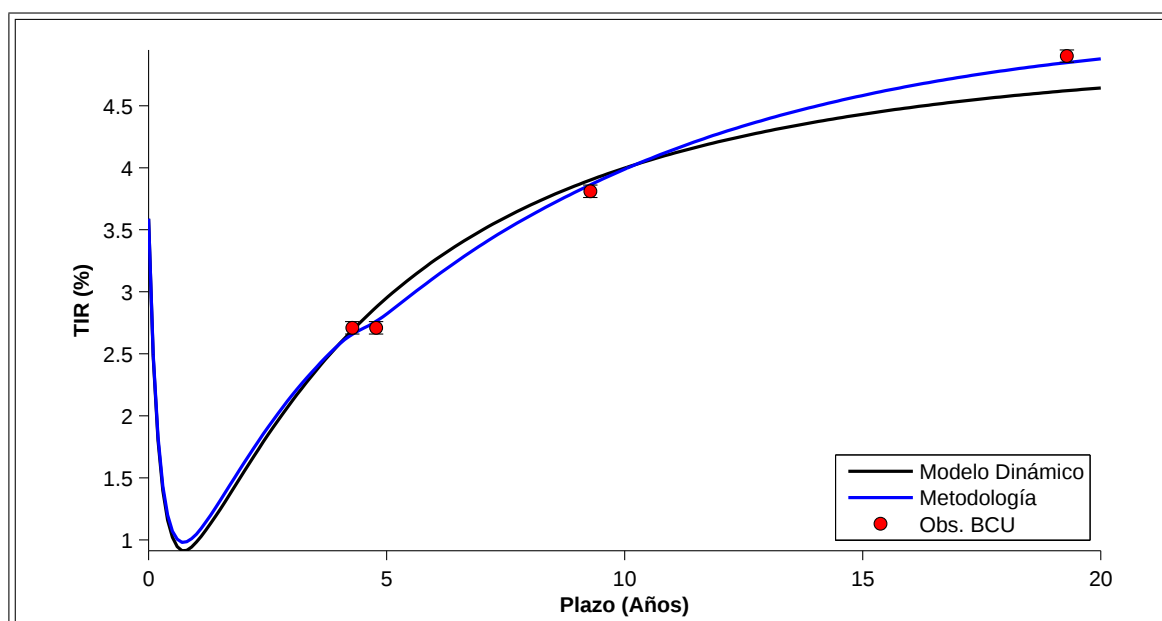


FIGURA 4.3. Ejemplo de aplicación del algoritmo con restricciones en igualdad para el día 23/05/2003 en el mercado chileno. Instrumentos BCU/BTU.

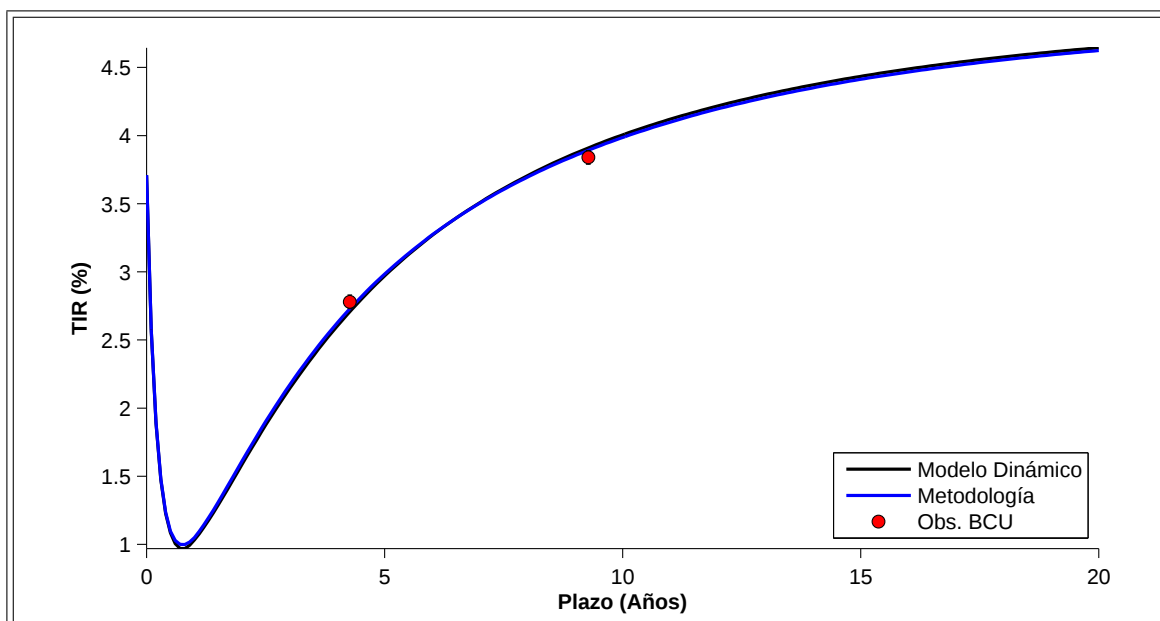


FIGURA 4.4. Ejemplo de aplicación del algoritmo con restricciones en igualdad para el día 26/05/2003 en el mercado chileno. Instrumentos BCU/BTU.

Una forma de disminuir la volatilidad es aumentar el rango de tolerancia de las transacciones. En ese caso se aumenta el error de valorización en pos de un mejor comportamiento en serie de tiempo.

El nivel tolerable de error y volatilidad en las estructuras de tasas de interés depende en gran medida de los objetivos del agente financiero. La política de selección y agrupación de transacciones debe tomar en cuenta estas necesidades. Se pueden distinguir dos casos:

- Prioridad por la minimización el error de las transacciones: si se está interesado en la valorización de activos, sólo se utilizan las transacciones observadas en el día. Si existe un panel completo de datos, entonces el algoritmo se comportará de buena forma tanto en término de error como de volatilidad. Por el contrario, si existe una baja densidad de observaciones, habrá un aumento de la volatilidad, pero la estructura inicial derivada del modelo dinámico asegura que ella se mantenga en rangos razonables.
- Prioridad por la estabilidad de la estructura: para la gestión del riesgo o para la valorización diaria de carteras de inversión, es importante que la curva sea

estable en el tiempo. Si el panel de datos es incompleto, la metodología entrega curvas que tienen una estructura de volatilidad un tanto mayor que la empírica. Para solucionar esta situación existen dos alternativas. La primera es considerar sólo los instrumentos que cuentan con un nivel mínimo de densidad de transacciones. La segunda consiste en realizar un paso previo para rellenar el vector de datos. De esta manera para todos los días y para todos los instrumentos seleccionados, se cuenta ya sea con el valor real de la transacción o con una estimación razonable. Para ello se puede utilizar el modelo dinámico inicial, que nos entrega una estimación de la tasa promedio, y un modelo simple de *spreads* que permite predecir los premios por riesgo asociados a las características propias de los instrumentos.

Una vez seleccionados los datos, se realiza un proceso optativo de agrupación. El problema de minimización asociado al algoritmo de mínima entropía, utiliza dos variables independientes por cada activo considerado. De esta forma, a pesar de que es posible considerar una gran cantidad de instrumentos, puede ser recomendable agrupar la transacciones de características similares y así disminuir la complejidad del problema. Sólo se deben unir observaciones que posean características propias como la liquidez, tasa de emisión, *spread*, etc. similares, de manera de no inducir errores en la valorización.

Una vez definidos los grupos, se calcula la tasa y el plazo promedio de la transacción equivalente.

$$TIR_j^* = \frac{\sum_{i=1}^N k_i TIR_i}{\sum_{i=1}^N k_i} \quad (4.12)$$

$$Plazo_j^* = \frac{\sum_{i=1}^N k_i Plazo_i}{\sum_{i=1}^N k_i} \quad (4.13)$$

Las observaciones pueden ser ponderadas por algún parámetro k_i que represente la credibilidad o peso de la transacción (monto transado, cantidad de transacciones, etc.).

Si se desea incluir instrumentos con distintas estructuras de pago, es posible simplificar la implementación del algoritmo utilizando la duración en vez del plazo. En este caso, la agrupación se realiza de acuerdo a esta variable y se calcula la duración promedio de la transacción equivalente.

4.7. Implementación del algoritmo de calibración por mínima entropía

Una vez definidos los datos de entrada se procede a generar la información requerida por el algoritmo de minimización.

En primer lugar se crea una distribución inicial de probabilidades mediante la simulación de ν trayectorias de las variables de estado del modelo estocástico. Para ello se debe discretizar el proceso utilizando la ecuación (3.12). Cada uno de estos *paths* tiene inicialmente una probabilidad de ocurrencia igual a $1/\nu$, por lo que si se calcula el valor esperado de un bono bajo esta distribución, se obtiene el precio del modelo dinámico.

Los activos *benchmark* seleccionados son valorizados bajo los distintos estados de la naturaleza (simulaciones), generándose una matriz de precios G . El elemento g_{ij} representa el valor presente del activo j utilizando las tasas derivadas de la simulación i . El cálculo de la matriz se lleva a cabo mediante la ecuación (3.14), que nos entrega el valor del bono de descuento con plazo T asociado a la simulación i . Si uno de los activos seleccionados posee cupones, el precio puede ser obtenido como la suma de los valores presente de sus flujos.

Una vez calculados todos los parámetros del algoritmo, se procede a minimizar la expresión (4.4), y se obtiene el vector de multiplicadores de **Lagrange** λ^* óptimo. Conocidos estos valores, a través de la ecuación (3.6) se obtienen las nuevas probabilidades para cada simulación i . Esta nueva distribución se caracteriza por cumplir las restricciones de valorización y tener la menor entropía relativa, esto es, se obtuvo modificando lo menos posible las probabilidades iniciales.

Conocida la nueva distribución P , es posible calcular el precio de cualquier bono con plazo T a través de la relación (3.15). Utilizando esta ecuación se define la estructura

de tasas de interés del modelo dinámico ajustado calculando la TIR para cada punto de discretización ($\Delta t \dots m\Delta t$).

Antes de pasar al siguiente paso es muy importante comprobar que la solución encontrada por el algoritmo de minimización cumpla con las condiciones de optimalidad de **KKT**. En caso de no satisfacerlas se puede identificar la restricción que no ha sido respetada de manera de relajar el margen de tolerancia respectivo.

4.8. Muestreo y reconstrucción de la estructura de tasas de interés

El algoritmo de calibración entrega la curva del modelo MDA discretizada en intervalos de tiempo Δt . Dado que la simulación de **Monte-Carlo** necesita un número importante de puntos para minimizar el error de discretización, es necesario realizar un muestreo de manera de disminuir la cantidad de información que debe ser almacenada para cada día. Se realiza un muestreo no uniforme de la estructura de tasas, utilizando una mayor resolución en el corto plazo debido a que ese sector generalmente presenta una mayor pendiente y convexidad.

Para reconstruir la curva y así poder contar con una estructura continua de tasas de interés que permita interpolar entre las muestras, se utiliza un modelo estático de tasas de interés. Sin embargo, hay que tener especial cuidado de utilizar una forma funcional que posea la suficiente flexibilidad como para adaptarse perfectamente a las observaciones. De otro modo el ajuste realizado por el proceso de calibración puede verse afectado. Se recomienda utilizar un *spline* cúbico o un *smoothing spline* con más de tres nodos.

4.9. Control de calidad del modelo dinámico ajustado

El paso final de la metodología contempla una revisión de las estructuras generadas por el modelo dinámico ajustado (MDA) de manera de asegurar su buen comportamiento tanto en serie de tiempo como en el corte transversal.

Es importante distinguir entre el análisis de la estructura de tasas de interés para un día en particular (corte transversal) y el estudio del comportamiento histórico del modelo

MDA para un *set* de márgenes de tolerancia dado (serie de tiempo). El control de calidad entonces se puede dividir en:

- Análisis diario de la estructura de tasas:
 - Cálculo de error y sesgo de la curva con respecto a las transacciones del día.
 - Examen de la curva *forward* implícita.
- Análisis histórico del comportamiento del modelo MDA:
 - Error y sesgo promedio.
 - Estudio de la estructura de volatilidad de la curva generada.
 - Cálculo de índices de oscilación.

A continuación se discuten los distintos *tests* y medidas utilizados para el aseguramiento de la calidad de la solución.

4.9.1. Análisis de error y sesgo

El algoritmo de calibración con márgenes de tolerancia acota la desviación máxima observada entre la estructura del modelo MDA y las transacciones. La estructura inicial sólo es modificada si no se cumple algunas de las restricciones de valorización. Este hecho permite inferir algunos lineamientos generales del comportamiento del error generado por la metodología MDA.

- El error máximo de valorización para cada activo j debe ser siempre igual o menor a los rangos A_j y B_j especificados. Por consecuencia el error promedio de j también es siempre menor o igual $\max \{A_j, B_j\}$.
- El error absoluto y el sesgo promedio del modelo MDA es siempre menor o igual al generado por el modelo dinámico inicial para algún subgrupo del panel de datos, en particular, para las observaciones que poseen rangos de tolerancia más estrechos.
- Si se estudia cualquier día en particular, el error incurrido por el modelo MDA nunca puede ser mayor que el caso base para todo el panel de datos. Esta

solución nunca es óptima, ya que en ese caso es preferible mantener la estructura inicial.

- El *MAE* y el sesgo total generado por el modelo ajustado puede ser mayor que el cometido por el modelo inicial. Este caso especial se produce si se define una tolerancia estrecha para una observación particular (sobre todo del corto plazo) y holguras generosas para el resto del panel de datos.

Para el cálculo del error absoluto promedio se emplea la ecuación (2.27), comparando la estructura del modelo MDA con las transacciones reales del panel de datos de entrada. Se recomienda que la curva generada por la metodología satisfaga con dos requerimientos.

- Cumpla con los márgenes de tolerancia para todos los activos.
- Mejore la valorización promedio del modelo dinámico inicial.

Si la primera condición no se cumple el algoritmo de optimización tiene problemas de convergencia, por lo que se debe incrementar los márgenes de tolerancia. Si la valorización histórica promedio del modelo MDA es mayor que la del modelo dinámico base, es recomendable homogeneizar los rangos de los instrumentos.

4.9.2. Cálculo de la estructura de volatilidad

La obtención de la estructura de volatilidad del modelo MDA permite determinar su comportamiento en serie de tiempo para distintos plazos T . El cambio en la distribución de probabilidad de las variables de estado del modelo dinámico inicial inducido por el proceso de calibración imposibilita la obtención analítica de la estructura de volatilidad. Por lo tanto ella debe ser estimada de forma implícita mediante la aplicación de la ecuación (2.28) al conjunto de curvas diarias.

Es probable que la volatilidad del modelo MDA sea mayor que la del modelo dinámico inicial. Este incremento depende en forma importante de la densidad de transacciones de los activos del mercado. Se pueden distinguir dos casos:

- Instrumentos de alta liquidez: la información proporcionada por las transacciones permiten al modelo MDA ajustarse diariamente a estas observaciones. De esta manera, la curva generada es capaz de seguir fielmente el comportamiento en serie de tiempo de este grupo de activos. Por lo tanto es de esperar que la volatilidad de la curva sea para estos plazos muy similar a la volatilidad empírica de las transacciones.
- Instrumentos de baja liquidez: la metodología se ajusta a la observación los días en que hay transacciones de este grupo de activos, pero mantiene la forma de la estructura inicial los días en que no las hay. Esto puede generar un aumento artificial de la volatilidad.

Para contrarrestar un incremento en la volatilidad de las estructuras de tasas generadas por el modelo MDA hay dos alternativas. La primera es aumentar los rangos de tolerancia de los activos de baja liquidez de forma de disminuir la influencia de las transacciones esporádicas. La segunda es realizar el relleno del panel de datos para prolongar en el tiempo la información de *spread* proporcionada por las transacciones.

4.9.3. Examen de las curvas *forward* implícitas

Es deseable que las estructuras de tasas de interés tengan una curva *forward* implícita suave. Oscilaciones o cambios bruscos en las tasas *forward* no se observan normalmente en el mercado y pueden producir oportunidades de arbitraje. Esto explica el hecho de que muchos modelos estáticos son limitados en su flexibilidad y grados de libertad, a pesar de que esto signifique un aumento en su error de valorización.

En la literatura se utilizan distintas medidas para cuantificar estas oscilaciones. En el caso de los *smoothing splines*, se utiliza una medida para penalizar la excesiva convexidad de la curva *forward*. Específicamente se usa la siguiente expresión matemática:

$$osc = \int_0^T \frac{\partial^2 R_t(\tau)}{\partial \tau^2} d\tau \quad (4.14)$$

donde $R_t(\tau)$ es la tasa al plazo τ . Mientras mayor es el valor de este indicador, mayor son las oscilaciones implícitas en la estructura de tasas de interés del día.

Es importante que la metodología propuesta discrimine de algún modo aquellas estructuras de tasas que posean una alta presencia de oscilaciones. Para ello se plantea realizar dos tipos de controles:

- Inspección gráfica de la curva *forward* implícita en la estructura de tasas obtenida.
- Cálculo diario del índice de oscilación.

El primer control corresponde simplemente a una inspección gráfica de la curva *forward* implícita del día. Utilizando conocimiento experto se determina si la estructura generada cumple con estándares mínimos de oscilación y por lo tanto puede ser aceptada. Claramente esta condición depende exclusivamente de los requerimientos y criterios del agente financiero.

El segundo requerimiento es un intento de sistematizar el control de la oscilación. Para ello se calcula diariamente el índice definido en (4.14) y se analiza tanto su comportamiento en serie de tiempo como su valor con respecto al modelo dinámico inicial. El valor diario del índice de oscilación del modelo base sirve como marco de referencia, por lo que el aumento o disminución de las oscilaciones pueden obtenerse como porcentajes de dicha cantidad.

De esta forma si la estructura de tasas generada por el modelo MDA no cumple con alguno de estos dos controles, se deben relajar los márgenes de tolerancia especificados y aplicar nuevamente la metodología.

5. IMPLEMENTACIÓN DE LA METODOLOGÍA EN EL MERCADO CHILENO DE RENTA FIJA

Como una forma de poner a prueba y ejemplificar la metodología desarrollada en este trabajo para la estimación de estructuras de tasas de interés, se escoge el mercado chileno de renta fija. Este ejercicio permite observar y cuantificar las posibles mejoras ofrecidas por la metodología.

Para este propósito es necesario previamente realizar un estudio de las características del mercado chileno, analizando las posibles complejidades que presenta y examinando la validez de la implementación del método propuesto.

5.1. Descripción del mercado chileno de renta fija

Los papeles que determinan la estructura de referencia de tasas de interés en el mercado chileno, son los instrumentos emitidos por el Banco Central de Chile y la Tesorería General de la República. Éstos se pueden dividir de acuerdo a la moneda en que son emitidos: nominales (en pesos) o reales (en UF¹). Son considerados libre de riesgo, ya que están respaldados por el gobierno.

Desde el año 1985 la política monetaria era manejada en términos reales, esto es, el Banco Central fijaba la tasa interbancaria en UF. A partir de agosto de 2001, se realizó uno de los procesos considerados más relevantes en la historia financiera del país, que consistió en la nominalización de la política monetaria. De esta forma, y hasta la fecha, el Banco Central fija la Tasa de Política Monetaria (TPM) en términos nominales. Este acontecimiento hace que ambos periodos de la historia no sean analizables de forma conjunta, ya que la volatilidad generada por la inflación pasó de afectar la curva nominal a la real (Fernández, 2004).

El mercado chileno de instrumentos de renta fija se puede dividir en dos: un mercado primario y otro secundario. El primario consiste en las licitaciones y remates efectuados

¹La Unidad de Fomento (UF) es una moneda indexada a la variación de la inflación. Su valor se reajusta diariamente de acuerdo al IPC y se calcula a principio de cada mes para el periodo comprendido entre el 10 de dicho mes y el día 9 del mes siguiente.

directamente por el Banco Central y en el que participan sólo instituciones bancarias y financieras.

Por su parte, el mercado secundario consiste en todas las transacciones entre privados que se efectúan a través de la Bolsa de Comercio de Santiago, la Bolsa Electrónica y el mercado *Over-the-Counter*.

En la Bolsa de Comercio de Santiago, existen dos sistemas de transacción. El principal es el "Remate Electrónico" que es un mecanismo de subasta periódica. Cada día se realizan diez remates (nueve en la mañana y uno en la tarde) de diez minutos de duración. La otra plataforma es la "Telerenta", la cual es un sistema común de postura de órdenes a través de un libro de subasta continua.

A continuación se hace un breve resumen de los características de los instrumentos y bonos emitidos por el Banco Gobierno de Chile.

- Papeles nominales emitidos por el Gobierno:

Los instrumentos expresados en pesos más importantes corresponden a los Bonos del Banco Central (BCP) y los Bonos de la Tesorería General de la República (BTP). Estos últimos comenzaron a ser emitidos el año 2007 y se diferencian de los primeros por su mayor duración. Ambos son bonos tipo *bullet*, esto es, instrumentos que amortizan el total de la deuda al vencimiento y que van pagando semestralmente los intereses a través de cupones.

- Papeles reales emitidos por el Gobierno:

En el caso de los instrumentos expresados en UF existen tres tipos de bonos. En primer lugar, se encuentran los Bonos del Banco Central (BCU) y los Bonos de la Tesorería de la República (BTU) que tienen características similares a los nominales. Existen, además, los Pagaré Reajustables con Cupones (PRC) que son bonos amortizables que pagan interés y capital a través de cupones semestrales iguales.

En todos los mercados de renta fija existen algunos instrumentos que son considerados *benchmarks* o de punta, ya que proveen a los inversionistas una medida del estado de las transacciones y son importantes fuentes de información. En el mercado chileno, los papeles de punta están asociados a su plazo remanente. En la siguiente tabla se muestran los instrumentos más importantes.

TABLA 5.1. Papeles de punta del mercado chileno de renta fija: reales y nominales.

Mercado	Instrumentos
Real	PRC-8 BCU-4 BCU-5 BCU-10 BTU-20
Nominal	BCP-4 BCP-5 BCP-10

El número a continuación del nemotécnico corresponde al plazo remanente del instrumento. Es importante considerar que, dada la estructura de pago de los distintos bonos, el PRC de ocho años plazo tiene una duración similar al BCU de cinco años.

5.1.1. Revisión de la literatura sobre los modelos de tasas de interés aplicados en el mercado chileno

Las primeras investigaciones de la estructura de tasas de interés en el mercado chileno se centran en la implementación de modelos estáticos (Herrera y Magendzo, 1997; Zuñiga y Soria, 1998; Lefort y Walker, 2000). En particular, se utiliza principalmente el modelo parsimonioso de Nelson y Siegel (1987).

Debido al explosivo desarrollo de los modelos dinámicos, surge literatura que comienza a implementarlos en el mercado nacional. En una primera etapa, se investigan modelos de un factor y su habilidad para explicar las tasas reales y nominales de corto plazo (Parisi, 1998; Parisi, 1999; Zuñiga, 1999). Luego los estudios de Zuñiga (1999) y el ya mencionado Cortazar et al. (2007) recurren a modelos multifactoriales para explicar la estructura de tasas de interés. En este último se recomienda la implementación de

modelos dinámicos, ya que presentan una estructura de volatilidad concordante con la realidad empírica.

Fernández (2001) utiliza un modelo no-paramétrico de un factor para estudiar la dinámica de la tasa de interés nominal de corto plazo.

5.2. Análisis empírico del mercado chileno de renta fija

Una de las características de los mercados subdesarrollados como el chileno es que, día a día, sólo se transa una pequeña fracción de la cantidad total de instrumentos financieros disponibles. A pesar de que se ha visto una mejora sostenida en los últimos años gracias al desarrollo del mercado, a la globalización y la mayor liquidez mundial, el porcentaje de *turnover* sigue siendo bajo. Esto se puede apreciar en las tablas 5.2, 5.3 y 5.4². En ellas se detalla el porcentaje de días en que se realiza una transacción para los distintos plazos y familias de papeles.

TABLA 5.2. Porcentaje de días con transacciones agrupando por plazo remanente. Instrumentos BCU/BTU.

Plazo	2003-2007	2007
0	6,4%	41,1%
1	21,5%	82,2%
2	27,1%	69,7%
3	38,8%	62,2%
4	80,7%	93,0%
5	43,9%	89,2%
6	14,6%	46,5%
7	25,7%	34,1%
8	42,7%	71,9%
9	56,2%	65,9%
10	23,5%	38,4%
15	4,9%	31,4%
16	13,7%	57,3%
17	25,4%	89,2%
18	34,8%	80,0%
19	39,8%	24,9%
20	27,4%	33,5%

Si se estudian las transacciones del mercado de bonos de gobierno es posible detectar diferencias importantes en los precios de los instrumentos. Para un mismo día, dos

²Para efectos de este trabajo, el año 2007 siempre corresponde al periodo entre el 01/01/2007 y el 30/09/2007

TABLA 5.3. Porcentaje de días con transacciones observadas en los distintos intervalos de plazo remanente. Instrumentos PRC. Periodo 2003-2007.

Plazo	2003-2007	2007
0	10,6%	28,6%
1	30,1%	70,8%
2	50,2%	80,5%
3	48,1%	64,3%
4	61,9%	48,1%
5	42,5%	38,4%
6	57,8%	52,4%
7	59,6%	28,1%
8	74,6%	43,8%
9	42,0%	27,6%
10	24,1%	38,9%
11	14,4%	8,1%
12	16,7%	7,6%
13	15,8%	9,7%
14	18,3%	29,2%
15	30,7%	47,0%
16	32,4%	1,1%
17	28,2%	0%
18	24,3%	0%
19	13,1%	0%
20	1,3%	0%

TABLA 5.4. Porcentaje de días con transacciones observadas en los distintos intervalos de plazo remanente. Instrumentos BCP/BTP. Periodo 2003-2007.

Plazo	2003-2007	2007
0	39,8%	50,3%
1	78,9%	85,4%
2	66,3%	68,1%
3	48,8%	60,5%
4	71,4%	73,0%
5	25,7%	20,0%
7	13,9%	81,1%
8	26,5%	74,6%
9	32,5%	7,6%
10	16,5%	34,6%

papeles con plazo remanente similar, pueden ser transados a tasas de retorno que, a primera vista, sugeriría la existencia de oportunidades de arbitraje. Dado que todos los papeles analizados son emitidos por el Banco Central de Chile o la Tesorería General de la República, emisores considerados libre de riesgo, la diferencia no puede ser explicada por la existencia de premios por riesgo crediticio. Este fenómeno más bien se debe a

la diferencia de liquidez que se observa en el mercado para los distintos papeles. Los instrumentos que poseen una menor frecuencia de transacciones, son castigados ya que los inversionistas temen no poder liquidar sus posiciones cuando lo necesiten.

Al analizar los datos se pueden encontrar varios hechos que confirman esta situación. En las tablas 5.5 y 5.6 se muestra la proporción de montos en pesos transados para distintos plazos a través de los años. Se utiliza información tanto de la Bolsa de Santiago como también de las transacciones privadas *Over the Counter* (OTC) obtenidas del Depósito Central de Valores. Se puede observar que para los BCU/BTU los papeles más transados corresponden a aquellos con plazo 4 y 5 años, justamente los que son considerados de punta. En el caso de los PRC, se puede observar que las transacciones se concentran en los instrumentos con plazo 8 años. Es importante destacar que el mercado de los PRC se ha ido secando, ya que desde el año 2000 se han dejado de emitir este tipo de papeles. Otro hecho importante es que a medida que han pasado los años y el mercado se ha desarrollado, los papeles punta han dejado de concentrar la mayor parte de las transacciones. Esto hecho podría llevar a una disminución de los premios por liquidez que se observan en el mercado.

TABLA 5.5. Análisis de liquidez del mercado agrupando los papeles por plazo remanente. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2003-2007.

Plazo	OTC + Bolsa de Comercio					Bolsa de Comercio				
	2003	2004	2005	2006	2007	2003	2004	2005	2006	2007
0	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	4,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	5,5%
1	0,0%	0,0%	0,0%	3,8%	10,2%	0,0%	0,0%	0,0%	8,8%	14,3%
2	0,0%	0,0%	10,4%	3,1%	4,5%	0,0%	0,0%	4,1%	4,3%	3,5%
3	0,0%	8,1%	12,7%	2,3%	5,9%	0,0%	12,2%	8,7%	3,6%	7,4%
4	22,0%	40,0%	25,7%	15,1%	14,3%	27,7%	36,5%	26,5%	17,8%	11,8%
5	27,6%	6,6%	7,7%	5,5%	12,1%	19,2%	4,1%	4,5%	3,3%	9,2%
6	0,0%	0,0%	0,0%	2,6%	2,4%	0,0%	0,0%	0,0%	3,8%	2,4%
7	0,0%	0,0%	4,5%	10,5%	2,6%	0,0%	0,0%	9,5%	11,3%	2,6%
8	0,0%	16,3%	16,3%	24,4%	12,7%	0,0%	20,2%	21,7%	17,2%	9,3%
9	42,5%	12,7%	4,7%	8,5%	8,6%	46,0%	12,1%	5,1%	9,8%	8,4%
10	1,6%	2,7%	7,0%	9,0%	7,5%	1,9%	1,7%	4,9%	4,3%	3,8%
15	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,7%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	1,2%
16	0,0%	0,0%	0,0%	1,5%	2,6%	0,0%	0,0%	0,0%	1,8%	3,0%
17	0,0%	0,0%	2,9%	4,3%	6,2%	0,0%	0,0%	1,8%	3,3%	7,8%
18	0,0%	4,1%	1,8%	5,3%	4,3%	0,0%	1,8%	1,7%	4,6%	6,7%
19	5,5%	5,3%	5,0%	1,9%	0,7%	3,9%	5,1%	7,1%	3,3%	1,6%
20	0,8%	4,1%	1,3%	2,1%	0,8%	1,3%	6,3%	4,4%	2,8%	1,6%

TABLA 5.6. Análisis de liquidez del mercado agrupando los papeles por plazo remanente. Instrumentos PRC. Periodo 2003-2007.

Plazo	OTC + Bolsa de Comercio					Bolsa de Comercio				
	2003	2004	2005	2006	2007	2003	2004	2005	2006	2007
0	0,0%	0,0%	0,0%	0,1%	0,4%	0,1%	0,1%	0,1%	0,1%	1,1%
1	0,0%	0,1%	0,5%	1,4%	4,3%	0,2%	0,3%	0,9%	1,8%	12,3%
2	0,6%	0,6%	2,6%	4,0%	10,2%	3,2%	2,2%	6,4%	13,8%	23,6%
3	0,5%	0,9%	2,2%	2,2%	4,4%	2,6%	2,3%	4,7%	8,7%	13,4%
4	3,2%	5,4%	6,5%	1,5%	1,3%	9,1%	14,1%	11,8%	6,0%	5,8%
5	1,2%	2,1%	1,2%	2,1%	1,1%	5,4%	5,9%	3,3%	6,6%	3,0%
6	2,6%	3,4%	2,4%	3,2%	4,5%	11,8%	9,7%	7,7%	7,3%	6,1%
7	2,1%	3,3%	3,4%	4,3%	0,9%	6,4%	8,3%	9,6%	7,0%	1,9%
8	40,8%	21,0%	39,3%	14,2%	8,1%	27,2%	18,2%	21,4%	7,4%	5,1%
9	2,9%	16,2%	3,6%	17,3%	4,2%	1,9%	9,5%	3,0%	8,1%	1,9%
10	0,2%	0,2%	0,7%	2,0%	7,4%	0,9%	1,0%	1,8%	1,8%	4,4%
11	0,1%	0,3%	0,3%	1,2%	1,3%	0,2%	0,6%	1,0%	1,6%	0,5%
12	0,3%	0,4%	0,7%	1,4%	1,5%	0,9%	0,7%	2,1%	0,8%	0,5%
13	0,2%	0,6%	0,2%	1,7%	3,8%	0,4%	1,5%	0,6%	1,6%	0,8%
14	0,2%	0,2%	0,3%	2,6%	20,4%	0,6%	0,6%	0,6%	1,9%	5,2%
15	0,2%	0,3%	3,0%	17,4%	25,9%	0,7%	0,9%	2,2%	10,5%	14,4%
16	0,2%	1,5%	13,4%	22,2%	0,3%	0,8%	1,7%	10,1%	14,7%	0,1%
17	0,4%	18,4%	19,1%	1,2%	0,0%	1,1%	11,7%	12,5%	0,2%	0,0%
18	3,4%	24,6%	0,4%	0,0%	0,0%	6,8%	10,7%	0,1%	0,0%	0,0%
19	40,2%	0,5%	0,0%	0,0%	0,0%	19,2%	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%
20	0,5%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,6%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%

Para determinar si estas diferencias en montos transados se traducen en *spreads* por riesgo de liquidez, se implementó la curva desarrollada en Cortazar et al. (2007) y se comparó su estructura con las transacciones observadas. Al no hacer distinciones, esta metodología nos entrega una curva de liquidez media, es decir, nos entrega la tasa a la que debería valorizarse un bono que tuviera la liquidez promedio del mercado.

En las tablas 5.7 y 5.8 se detallan el error absoluto medio y el sesgo promedio de la curva con respecto a las observaciones. Se puede observar claramente que en los plazos de mayor liquidez (cuatro años BCU y ocho años PRC) la curva está sesgada negativamente, esto es, las tasas a las que se transan estos bonos son consistentemente menores a lo que dice el modelo. Lo opuesto ocurre para los plazos más ilíquidos.

Esto hace pensar que el modelo dinámico implementado no es capaz de representar la complejidad del mercado debido a que existen múltiples factores de riesgo. Su principal característica es que entrega una estructura que es estable en el tiempo, por lo que

TABLA 5.7. Error absoluto medio y sesgo de las observaciones agrupadas por plazo remanente con respecto al modelo dinámico. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2003-2007

Plazo	2003-2007		2006-	
	Sesgo	MAE	Sesgo	MAE
1	5,57	11,73	5,57	11,73
2	-0,85	8,02	0,64	7,50
3	10,24	12,47	3,29	6,07
4	6,01	11,48	-3,61	6,83
5	-2,95	8,88	-7,74	8,44
6	2,87	5,86	2,87	5,86
7	7,39	9,16	1,99	4,76
8	7,59	9,57	1,89	5,22
9	6,83	8,93	-0,98	3,16
10	0,83	5,01	-1,62	3,39
15	10,53	10,53	10,53	10,53
16	8,49	8,52	8,49	8,52
17	10,69	10,83	7,93	8,05
18	12,41	12,75	5,38	5,77
19	20,02	21,30	2,02	5,30
20	21,07	22,22	4,20	6,00
Total	7,70	11,39	1,59	6,56

se justifica la implementación de una metodología que pudiera aprovecharse de este beneficio, para valorizar más correctamente los instrumentos financieros.

Se ha demostrado empíricamente que el mercado chileno es un mercado de alta complejidad, en cuanto posee una baja densidad de transacciones, tiene importante diferencias de liquidez entre sus papeles y por consiguiente existen *spreads* que dependen de las características particulares de los activos. Se puede concluir que este mercado cumple con los requisitos de la metodología y puede ser por tanto utilizado para estudiar las características del algoritmo.

5.3. Elección de modelo y simulación de Monte-Carlo

Para efectos de este estudio se utiliza el modelo de Cortazar et al. (2007). Esta decisión se basa en varios elementos. En primer lugar es un modelo dinámico especialmente diseñado para mercados con pocas transacciones. Su principal característica es que la estructura de volatilidad derivada es consistente con la volatilidad empírica de las transacciones.

TABLA 5.8. Error absoluto medio y sesgo de las observaciones agrupadas por plazo remanente con respecto al modelo dinámico. Instrumentos PRC. Periodo 2003-2007

Plazo	2003-2007		2006-	
	Sesgo	MAE	Sesgo	MAE
0	70,17	127,04	-3,15	78,35
1	29,39	51,76	6,24	31,89
2	13,49	23,31	3,84	13,41
3	3,78	10,11	1,16	7,77
4	-5,64	9,65	2,39	6,24
5	-3,60	10,16	2,88	6,09
6	2,88	7,80	2,83	5,06
7	2,35	5,95	1,87	4,83
8	-9,17	10,15	-4,84	6,03
9	-14,51	15,64	-7,10	7,83
10	-1,09	10,42	-8,24	9,57
11	5,51	8,18	0,35	3,55
12	6,92	9,51	-0,17	4,18
13	7,58	10,89	-2,49	5,64
14	3,47	9,80	-4,68	7,57
15	-0,38	4,40	-2,95	3,50
16	-0,92	4,43	-3,01	3,24
17	-3,48	5,26	-7,88	7,88
18	-4,16	5,06	-	-
19	-4,87	5,58	-	-
20	-9,35	9,35	-	-
Total	1,45	13,34	-0,17	10,46

Es importante mencionar que para el proceso de calibración del modelo se utilizan todas las transacciones del mercado, sin importar las estructuras de los papeles. Por ejemplo para modelar la estructura de tasas reales, se procesan tanto las observaciones de papeles PRC como las de BCU/BTU. Esto permite que la distribución inicial considere la última información de mercado disponible, sin importar la posible ausencia de transacciones para una de las familia de instrumentos.

Es necesario determinar las expresiones que siguen las variables de estado del proceso ajustado por riesgo, para así poder generar las simulaciones de **Monte-Carlo**. Se utiliza el modelo bajo la medida Q , ya que interesa la distribución asociada a la valorización de los instrumentos de renta fija y no el proceso real que sigue la tasa de interés. Se discretiza a través de la ecuación de Euler.

$$X_{k+1} - X_k = -(\lambda + KX_k)\Delta T + \Sigma\sqrt{\Delta T}\xi_{k+1}^Q \quad (5.1)$$

donde $\xi_{k+1} \sim N(0, 1)$ y $E^Q[\xi_{k+1}^i \xi_{k+1}^j] = \rho_{ij}$.

Sin embargo, se puede aprovechar el hecho de que se conoce la distribución analítica que siguen las variables de estado para realizar una discretización con un menor error asociado. Se puede demostrar que las variables de estado pueden modelarse como:

$$x_t^*(T) = E_t^Q[x_t(T)] + R_t(T) \quad (5.2)$$

donde

$$R_t(T) \sim N(0, \sigma_{T-t}) \quad (5.3)$$

$$E_t^Q[x_t(T)] = e^{-\kappa_i(T-t)}x_i(t) - \frac{1 - e^{-\kappa_i(T-t)}}{\kappa_i}\lambda_i \quad (5.4)$$

$$Cov_t^Q[x_i(T), x_j(T)] = \sigma_i\sigma_j\rho_{ij} \cdot \frac{1 - e^{-(\kappa_i+\kappa_j)(T-t)}}{\kappa_i + \kappa_j} \quad (5.5)$$

De esta forma, la tasa instantánea en el instante t está dada por:

$$r_t = \sum_{i=1}^{nf} X_t^i + \delta_0 \quad \forall t \quad (5.6)$$

Y el valor de un bono con cupones c_i se puede expresar como:

$$P_t(T) = \sum_{i=1}^{nc} c_i \exp \left\{ \sum_{j=t}^{t_i} r_j \right\} \quad (5.7)$$

Mediante la simulación de varias trayectorias de las variables de estado, es posible determinar la estructura de tasas, calculando el valor esperado del valor de un bono de descuento para cada plazo.

Se debe determinar el número de simulaciones y el paso de discretización que se utiliza en la implementación de la metodología. Un buen criterio para encontrar dichos valores, es realizar un estudio que compare la valorización teórica de instrumentos a distintos plazos entre la fórmula analítica y el resultado de la simulación de **Monte-Carlo**. Se deben ajustar dichos valores hasta llegar a un nivel de error aceptable.

El criterio de búsqueda fue encontrar parámetros que limitaran el error máximo a menos de un punto base, para todos los días analizados. Este hecho se logra con $\nu = 20000$ y $\Delta t = 0,01$ (lo que equivale a $m = 2000$ pasos si se simula hasta los 20 años).

Es interesante determinar la sensibilidad de la simulación de **Monte-Carlo** para distintos *set* de parámetros, comparando la estructura generada por esta y la fórmula analítica derivada del modelo dinámico. Este ejercicio se realiza para el periodo comprendido entre enero de 2006 y finales de septiembre de 2007.

En la tabla 5.9, se detalla el error absoluto promedio para los distintos casos. Se separa por componentes de corto y largo plazo para realizar un análisis más exhaustivo.

TABLA 5.9. Análisis de sensibilidad de los parámetros de la simulación de **Monte-Carlo**. Periodo 2006-2007.

Tipo	Corto Plazo	Largo Plazo	Total
Intervalo	0 a 8 años	8 a 20 años	0 a 20 años
$\nu = 20k, m = 2k$	0,042	0,251	0,134
$\nu = 20k, m = 1,5k$	2,886	0,473	1,824
$\nu = 15k, m = 2k$	0,068	0,280	0,161
$\nu = 15k, m = 1,5k$	2,894	0,599	1,884

Se efectúa una disminución de un 25% de tanto el número de simulaciones ν como del número de pasos m . Se puede observar que el efecto de disminuir m es mucho más importante, ya que el *MAE* aumenta significativamente. El efecto es mayor en el corto plazo, ya que normalmente en ese sector la estructura de tasas posee una mayor pendiente y curvatura. La utilización de técnicas de disminución de varianza, permiten que el algoritmo no se vea tan afectado ante disminuciones en el número de simulaciones.

En la figura 5.1 se muestra gráficamente el resultado de una simulación de **Monte-Carlo** del modelo dinámico para un día específico. En negro, se aprecia la curva esperada, que se obtiene como el promedio de las $\nu = 20000$ simulaciones generadas.

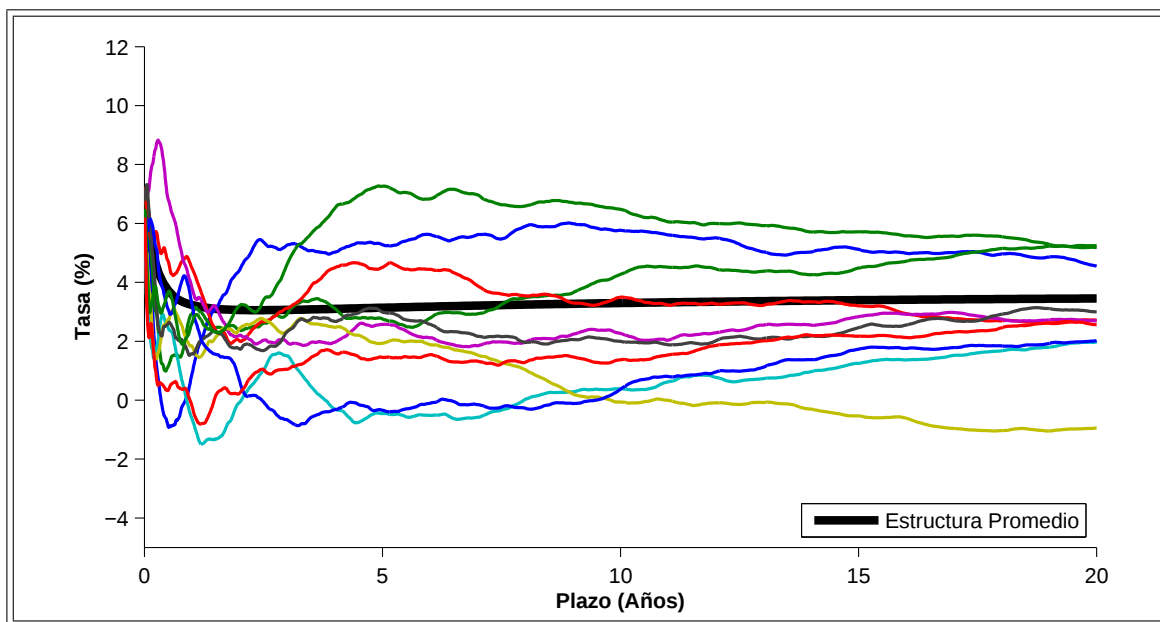


FIGURA 5.1. Ejemplo gráfico de la simulación de **Monte-Carlo** para el día 02/01/2006. Instrumentos BCU/BTU.

6. RESULTADOS Y ANÁLISIS EMPÍRICO

A continuación se analizan los resultados obtenidos al aplicar la metodología en el mercado chileno de renta fija.

6.1. Presentación y análisis de los datos utilizados

El periodo de estudio abarca desde enero de 2003 hasta septiembre de 2007. Se utilizan las transacciones de papeles reales emitidos por el Banco Central de Chile registradas en la Bolsa de Comercio de Santiago. La información incluye la tasa interna de retorno a la que se realizó la compraventa, el monto en pesos de la transacción y el plazo al vencimiento. Es importante destacar que todos los datos recopilados corresponden a la época posterior de la nominalización de la política monetaria, evitando así posibles incongruencias.

Siguiendo los pasos de Cortazar et al. (2007) no se utilizan las transacciones individuales para la estimación del modelo, sino que se agrupan los datos de acuerdo a su plazo remanente y tasa de emisión. De esta forma, por ejemplo, todas las transacciones del día en el intervalo $[5, 5 \dots 6, 5)$ son representadas como una observación con TIR y plazo calculadas como el promedio ponderado por monto de ellas. Este recurso se utiliza por dos motivos: para simplificar el proceso de calibración y para evitar excesivas oscilaciones en la curva generada por el algoritmo. Hay que tener en cuenta que algunas transacciones son asíncronas por lo que generalmente no se encuentran alineadas.

En las tablas 6.1 y 6.2 se muestra el número promedio de transacciones que se observan diariamente para las distintas familias de papeles y plazos. Se puede concluir que en promedio se observan más transacciones diarias para la familia PRC que para el resto. Este hecho se explica porque existe una mayor diversidad de nemotécnicos en los instrumentos PRC que en los BCU/BTU. En consecuencia, los posibles efectos de agrupar las transacciones debieran afectar más a los primeros.

A pesar de que no hay restricciones en la estructura de pago de los instrumentos que se ingresan al algoritmo, la metodología se aplica de forma separada a las distintas familias

TABLA 6.1. Número promedio de transacciones al día agrupadas por plazo remanente. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2003-2007.

Plazo	2003-2007	2007
0	0,06	0,41
1	0,29	1,18
2	0,30	0,70
3	0,44	0,62
4	0,90	0,93
5	0,47	1,11
6	0,15	0,46
7	0,26	0,34
8	0,46	0,96
9	0,62	0,79
10	0,24	0,38
15	0,05	0,31
16	0,14	0,57
17	0,28	1,05
18	0,35	0,80
19	0,40	0,25
20	0,27	0,34

TABLA 6.2. Número promedio de transacciones al día agrupadas por plazo remanente. Instrumentos PRC. Periodo 2003-2007.

Plazo	2003-2007	2007
0	0,25	0,82
1	0,90	2,86
2	2,23	4,26
3	1,50	2,50
4	2,36	1,16
5	1,16	0,85
6	1,73	1,42
7	2,00	0,66
8	3,43	1,25
9	1,09	0,58
10	0,49	1,08
11	0,30	0,17
12	0,33	0,11
13	0,30	0,14
14	0,31	0,44
15	0,63	1,04
16	0,69	0,01
17	0,72	-
18	0,53	-
19	0,40	-
20	0,01	-

de instrumentos. Esta decisión se basa en el hecho de que muchas veces las tasas que se observan en los distintos mercados no son consistentes. Por ejemplo, instrumentos de las familias BCU y PRC con duración similar se pueden transar a tasas que permiten oportunidades de arbitraje.

En este trabajo la implementación de la metodología se realiza para el mercado de bonos reales emitidos por el banco central (BCU y PRC). Sin embargo, la extensión a otros mercados se puede realizar de forma directa siguiendo los puntos delineados anteriormente.

6.2. Análisis de convergencia y validación del modelo base

Una buena manera de determinar las propiedades de convergencia de la metodología es analizar los resultados obtenidos por la aplicación directa del algoritmo con restricciones en igualdad. Este es el caso más exigente, por lo que ofrece una buena medida de las propiedades generales de estabilidad.

Indirectamente también se pone a prueba la elección del modelo dinámico de Cortazar et al. (2007) como distribución inicial de probabilidades. Si el modelo es una mala representación del mercado, es esperable que se obtengan dificultades en la convergencia del algoritmo de optimización.

TABLA 6.3. Estudio de convergencia del algoritmo de mínima entropía relativa. Periodo 2003 - 2007.

¿Convergió?	BCU		PRC	
Si	1186	99,9%	877	73,9%
No	1	0,1%	310	26,1%
Total	1187	100%	1187	100%

TABLA 6.4. Estudio de convergencia del algoritmo de mínima entropía relativa. Periodo 2006 - 2007.

¿Convergió?	PRC	
Si	375	86,4%
No	59	13,6%
Total	434	100%

Los resultados del análisis de convergencia se detallan en las tablas 6.3 y 6.4. Se observa que la convergencia de la metodología es razonablemente buena (sobre el 99% para BCU/BTU y 73% para PRC), por lo que se ratifica y avala la elección del modelo dinámico base. Estos porcentajes aumentan además rápidamente al disminuir las exigencias de valorización.

Es evidente que los mayores problemas se dan en el mercado de los PRC, lo que se puede explicar por dos motivos. En primer lugar, dada la estructura de los papeles (amortizables) es mucho más probable que existan oportunidades de arbitraje frente a un desalineamiento de las transacciones. Por este motivo es más difícil poder valorizar en forma exacta las observaciones que son de naturaleza asíncronas. Por otra parte, dada la volatilidad de la inflación en el mercado chileno, el modelo dinámico de Cortazar et al. (2007) no tiene la flexibilidad para generar una estructura que tome en cuenta todos los factores en el corto plazo. En consecuencia el algoritmo no será capaz, en algunas ocasiones, de cumplir con las restricciones impuestas.

Un ejemplo de este fenómeno se aprecia en la figura 6.1 donde un cambio brusco de la inflación provoca que la estructura de tasas generada por el modelo dinámico tenga problemas en el corto plazo.

6.3. Análisis de desempeño de la calibración con restricciones en igualdad

En capítulos anteriores se mencionó la inconveniencia de aplicar directamente el algoritmo de calibración por mínima entropía en un mercado de alta complejidad. Se desarrolló por tanto una modificación de este al incorporar restricciones en desigualdad (márgenes de tolerancia). En esta sección se justifica esta afirmación al analizar empíricamente los resultados de ambos enfoques. Se estudia la calibración con restricciones en igualdad y se compara con la metodología modificada con márgenes de cinco y diez puntos bases.

Es de especial interés examinar la estructura de volatilidad y el comportamiento diario de la curva *forward* implícita, ya que justamente estos temas motivaron la modificación

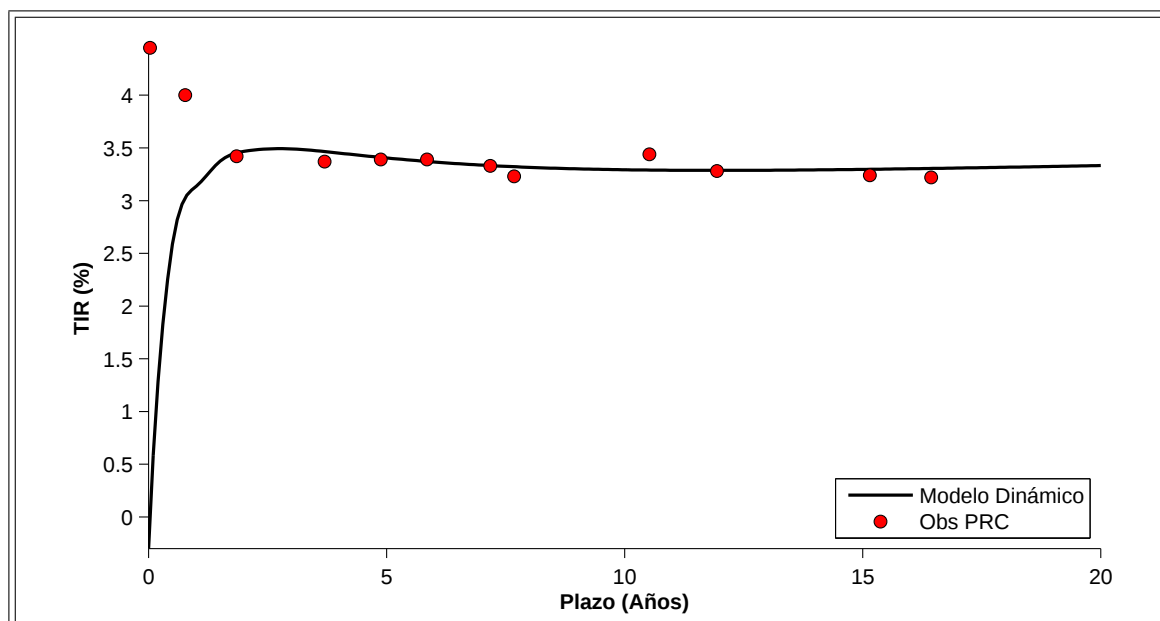


FIGURA 6.1. Estructura de rendimiento papeles PRC el día 25/11/2005.

del algoritmo original. Para un análisis del error y sesgo de ambos enfoques el lector puede consultar el anexo M.

En primer lugar se calculan las estructuras de volatilidad (figura 6.2) generadas por el enfoque original y el nuevo algoritmo para tolerancias de 5 y 10 puntos bases (constante para todos los instrumentos).

Como es de esperar, a medida que se relajan las restricciones de valorización la volatilidad disminuye y converge a la del modelo dinámico inicial. Es evidente la inconveniencia de la aplicación directa de la metodología propuesta por Avellaneda et al. (2001) en mercados de alta complejidad.

En las figuras 6.3, 6.4 y 6.5 se grafican las curvas *forward* implícitas para el 31/01/2007.

Se observa que la exigencia de pasar perfectamente por las transacciones, genera una curva *forward* extremadamente oscilatoria. Al relajar las restricciones, en cambio, esta vuelve a tener un comportamiento aceptable.

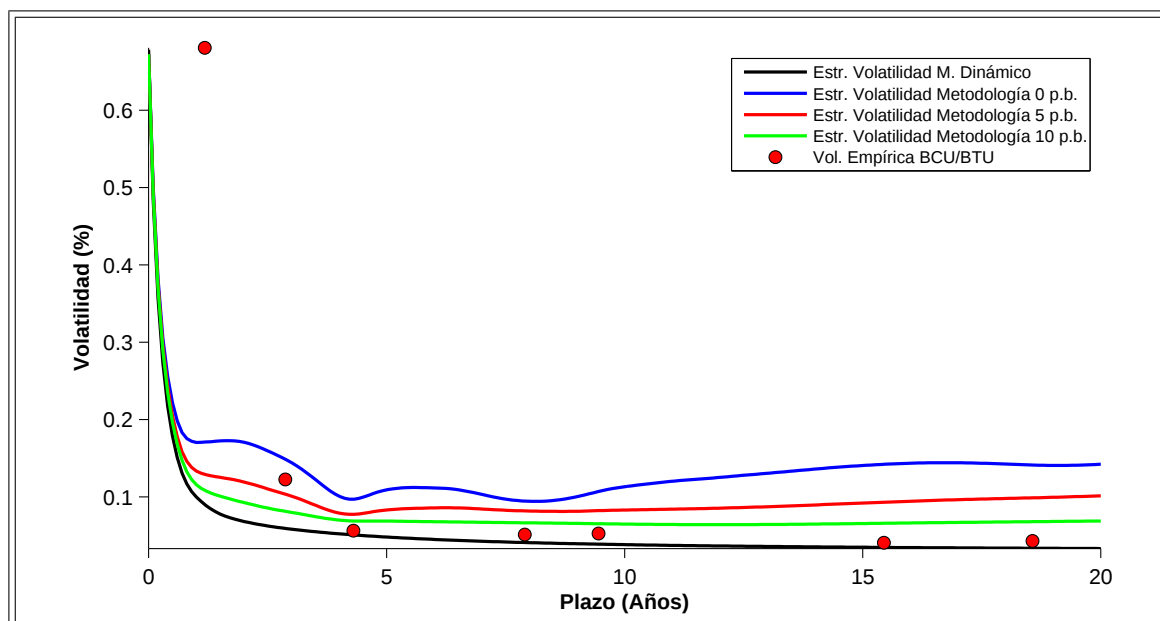


FIGURA 6.2. Estructura de volatilidad de los papeles BCU/BTU. Tolerancia de 0, 5 y 10 puntos bases. Periodo 2003-2007.

A continuación en la tabla 6.5 se muestra el valor promedio de los índices diarios de oscilación durante el periodo 2003-2007 para las distintas alternativas. Se calcula también este valor para el modelo dinámico inicial y así se obtiene el porcentaje de aumento promedio del índice.

TABLA 6.5. Índice de oscilación promedio de la estructura de tasas de interés para distintas aplicaciones de la metodología. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2003-2007.

Metodología	I. Oscilación	Aumento
M.D.	1,12E-02	-
Tol. 10 p.b.	1,14E-02	1,7%
Tol. 5 p.b.	1,22E-02	8,8%
Tol. 0 p.b.	1,57E-02	40,2%

Se puede observar que hay un aumento en la oscilación de las estructuras. Este comportamiento es esperable, ya que en un mercado de alta complejidad los *spreads* que afectan a los activos por sus características particulares no son homogéneos. De esta forma, al mejorar la valorización de instrumentos que tienen características distintas, necesariamente se aumenta la oscilación en la curva.

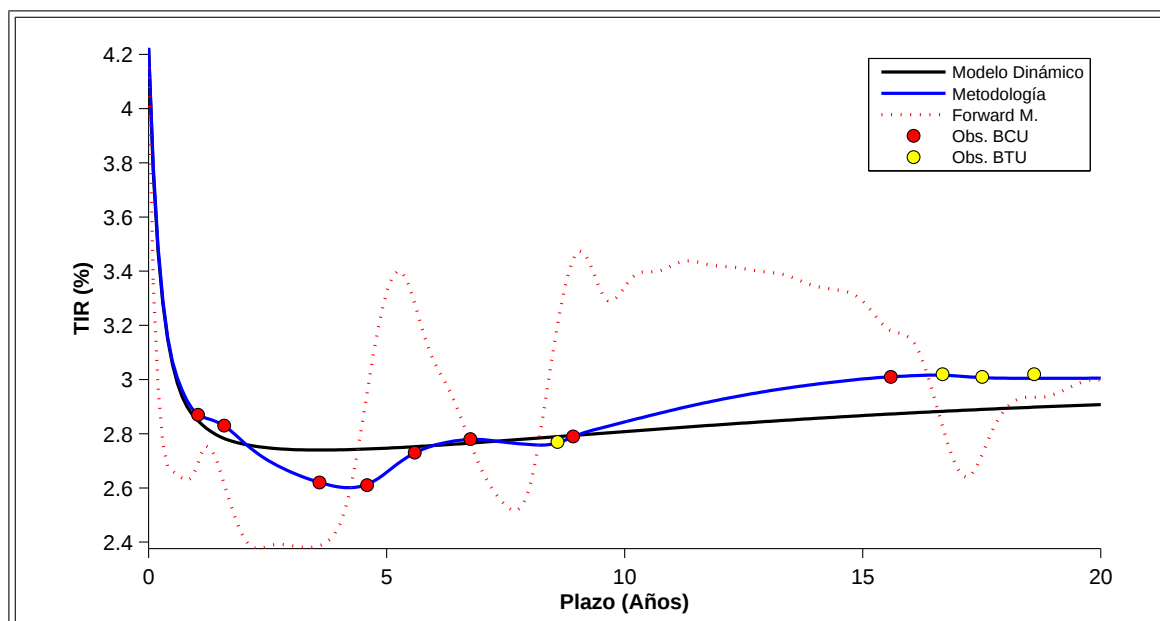


FIGURA 6.3. Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU y curva cero *forward* para el día 31/01/2007. Tolerancia de 0 puntos bases.

Sin embargo, el hecho de que la distribución inicial provenga de un modelo dinámico estable y que la calibración sea de mínima entropía, asegura indirectamente que la estructura es modificada minimizando las oscilaciones potenciales.

Ahora cuando se fuerza una valorización perfecta de los activos *benchmarks*, el valor del índice de oscilación aumenta significativamente. Se puede concluir, por tanto, que no es recomendable implementar la metodología con restricciones en igualdad en un mercado de alta complejidad.

6.4. Cálculo de medidas para los rangos de tolerancia

Un aspecto fundamental para la correcta implementación del algoritmo es poseer alguna información o conocimiento del grado de volatilidad, liquidez y premios por riesgo que existen en el mercado. Los márgenes de tolerancia definen en gran medida la calidad de la estructura generada. Si el mercado posee gran volatilidad y diferencias importantes de valorización por liquidez, entonces irremediablemente la curva presentará importantes

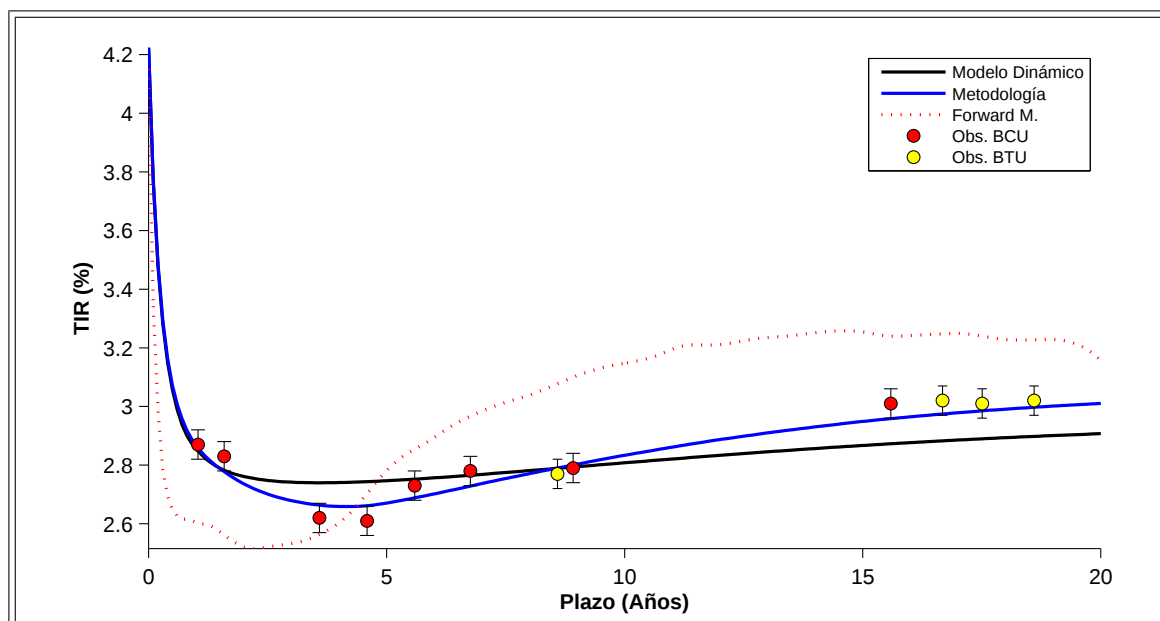


FIGURA 6.4. Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU y curva cero *forward* para el día 31/01/2007. Tolerancia de 5 puntos bases.

oscilaciones si los rangos son demasiado pequeños. Nuevamente estará presente el *trade-off* entre minimización de error y estructura de volatilidad.

De esta forma, para conocer en mayor detalle las características del mercado, y así poder obtener una estimación empírica del orden de magnitud que deben tener los márgenes de tolerancia, se aplicaron las distintas metodologías propuestas anteriormente.

6.4.1. Volatilidad *intraday*

La Bolsa de Santiago entrega un resumen de todas las transacciones de papeles de renta fija que se realizan durante el día. Recopilando esta información es posible calcular la dispersión promedio diaria que se observa en la tasa de los distintos activos. Es de esperar que mientras mayor sea la incertidumbre del verdadero valor de un instrumento, mayor sea la volatilidad observada.

Para poder calcular la volatilidad *intraday* de la tasas observadas en el día es necesario contar con dos o más observaciones. Como el mercado chileno se caracteriza por una baja densidad de transacciones, es necesario reunir las observaciones contiguas empleando los

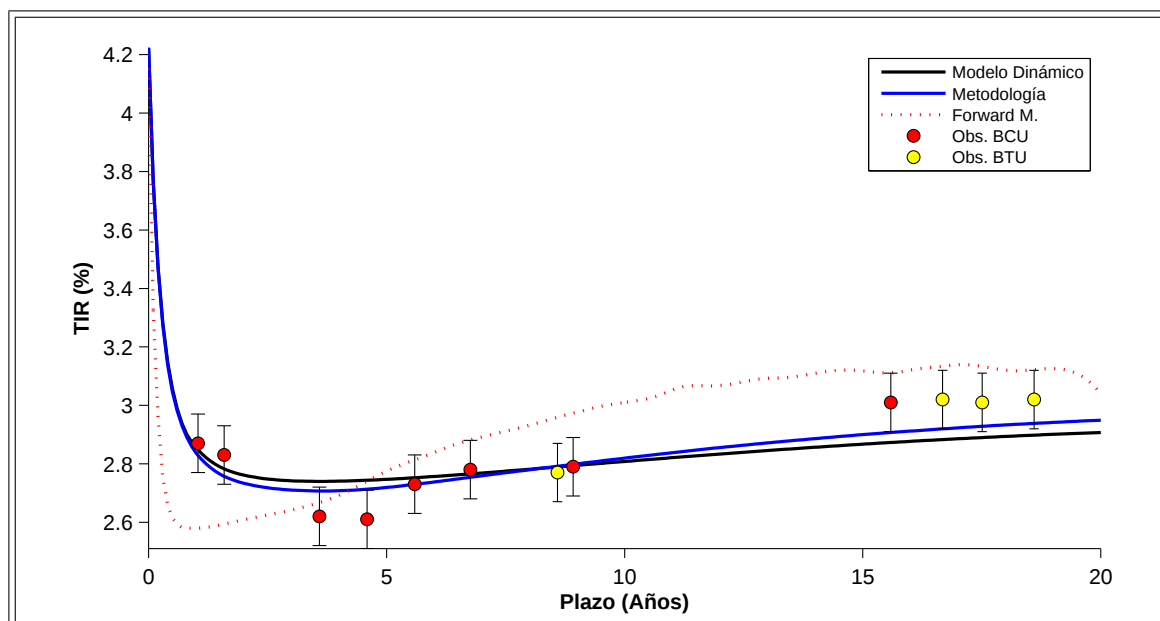


FIGURA 6.5. Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU y curva cero *forward* para el día 31/01/2007. Tolerancia de 10 puntos bases.

mismos intervalos por plazo anteriores. Esto permite aumentar el número de transacciones por día y de esta forma aumentar la precisión de la estimación.

Las tablas 6.6 y 6.7 muestran la volatilidad dentro del día para los distintos instrumentos agrupados por plazo. Se puede observar que mientras mayor es el plazo, menor es la volatilidad. Esto es comprensible ya que a mayor duración del bono de mayor es la sensibilidad del precio ante cambios de la tasa de retorno. Por otro lado, al examinar los resultados se puede apreciar que la volatilidad *intraday* de los papeles de punta es levemente inferior a la de los plazos adyacentes. Esto puede interpretarse como una menor incertidumbre sobre el valor real de estos instrumentos.

6.4.2. Índices de liquidez

Para la construcción de índices de liquidez en el mercado chileno de bonos de gobierno, es necesario contar con información diaria de los montos transados por instrumento. Estos datos son recopilados de la Bolsa de Comercio de Santiago.

TABLA 6.6. Estimación de la volatilidad *intraday* en papeles BCU/BTU.

Plazo	σ p.b. 2003-2007	σ p.b. 2006-2007
0	5,52	5,52
1	13,03	13,03
2	3,59	2,54
3	5,96	2,13
4	3,46	1,37
5	1,59	1,58
6	1,3	1,3
7	1,28	1,29
8	1,99	1,49
9	1,6	1,31
10	1,65	1,17
15	1,77	1,77
16	1,29	1,29
17	1,18	1,16
18	1,78	1,14
19	1,79	0,94
20	3,05	0,99

Se calcula diariamente la proporción del monto transado en pesos por un activo específico (o grupos de activos) en relación al total del mercado en un periodo determinado. Al igual que en los casos anteriores, se agrupan las transacciones de acuerdo a su plazo remanente. De esta forma, no se calculan índices de instrumentos individuales, sino que indicadores que están asociados a las características de los bonos. Esto tiene por consecuencia que los activos se asocian a distintos índices de liquidez a medida que cambian sus plazos remanentes.

Se utiliza una ventana móvil de 100 días, de manera que el índice no sea ni muy volátil ni tenga un tiempo de respuesta demasiado elevado. Se calculan los indicadores de forma separada para los mercados de papeles BCU/BTU y PRC.

En la figura 6.6 se muestra el comportamiento en el tiempo de los índices de liquidez de papeles BCU/BTU para algunos de los plazos más importantes. Se puede observar que los papeles con 4 años de plazo concentran buena parte de las transacciones.

En la tabla 6.8, se precisa el valor promedio anual de los distintos índices de liquidez de los papeles BCU/BTU. En color se destacan los valores máximos para cada año. Se observa que los plazos 4 y 8 poseen los índices promedios más altos.

TABLA 6.7. Estimación de la volatilidad *intraday* en papeles PRC.

Plazo	σ p.b. 2003-2007	σ p.b. 2006-2007
0	49,57	61,95
1	26,28	28,2
2	6,67	5,3
3	6,56	5,07
4	5,24	2,84
5	7,5	2,68
6	5,99	2
7	3,31	1,41
8	2,57	4,29
9	2,82	1,15
10	3,65	1,1
11	2,88	1,59
12	3,03	0,66
13	3,21	0,78
14	2,49	0,97
15	1,26	0,99
16	1,33	0,88
17	2,28	1,84
18	1,58	-
19	2,11	-
20	3,11	-

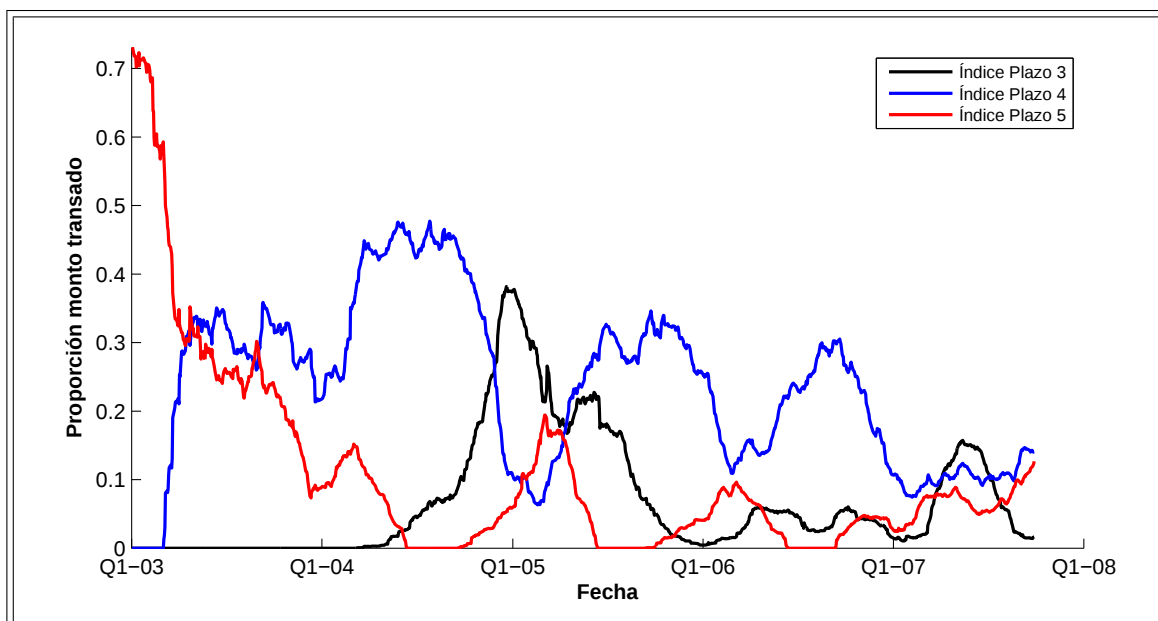


FIGURA 6.6. Evolución en el tiempo de los índices de liquidez por montos transados. Instrumentos BCU/BTU (3, 4 y 5 años plazo). Periodo 2003-2007.

TABLA 6.8. Valor promedio anual del índice de liquidez para las distintas agrupaciones de plazo remanente. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2003-2007

Plazo	2003	2004	2005	2006	2007
0	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	2,6%
1	0,0%	0,0%	0,0%	5,6%	16,2%
2	0,0%	0,0%	3,1%	4,9%	2,6%
3	0,0%	8,3%	15,4%	3,6%	7,0%
4	23,5%	37,1%	23,5%	20,4%	10,4%
5	32,3%	5,0%	5,7%	3,8%	6,7%
6	0,0%	0,0%	0,0%	3,2%	3,7%
7	0,0%	0,0%	9,2%	9,8%	6,1%
8	0,0%	17,0%	18,6%	18,8%	6,6%
9	30,1%	18,7%	8,3%	8,7%	11,5%
10	8,1%	1,7%	1,8%	6,3%	2,3%
15	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,9%
16	0,0%	0,0%	0,0%	1,3%	3,3%
17	0,0%	0,0%	0,8%	3,3%	9,1%
18	0,0%	1,6%	1,6%	3,2%	8,0%
19	2,2%	5,8%	6,4%	3,7%	1,7%
20	3,8%	4,9%	5,6%	3,6%	1,3%

El mismo ejercicio se realiza ahora para los instrumentos PRC. En la figura 6.7 se muestra el comportamiento del índice para los papeles con plazo remanente 7, 8 y 9. Se puede observar que hay una considerable disminución en el tiempo del valor de esta medida para estos grupos. Esto significa que los papeles considerados de punta han perdido importancia en términos de transacciones, con respecto a los demás instrumentos.

En la tabla 6.9, se muestra el valor promedio anual para los papeles PRC. Los resultados revelan un cambio en las características de los papeles más transados. En los años 2003 y 2004 los instrumentos con plazo 8 concentran gran parte de las transacciones. Luego en el 2005 y 2006 los montos transados son mucho más homogéneos en los distintos grupos. Para el año 2007, en cambio, los bonos con plazo 2 años son los favoritos de los inversionistas.

En el anexo O se puede revisar la matriz de correlación de los índices de liquidez.

Para un análisis detallado de los *spreads* por liquidez así como también su estimación en un mercado con pocas transacciones, el lector puede consultar el trabajo de Moral (2006).

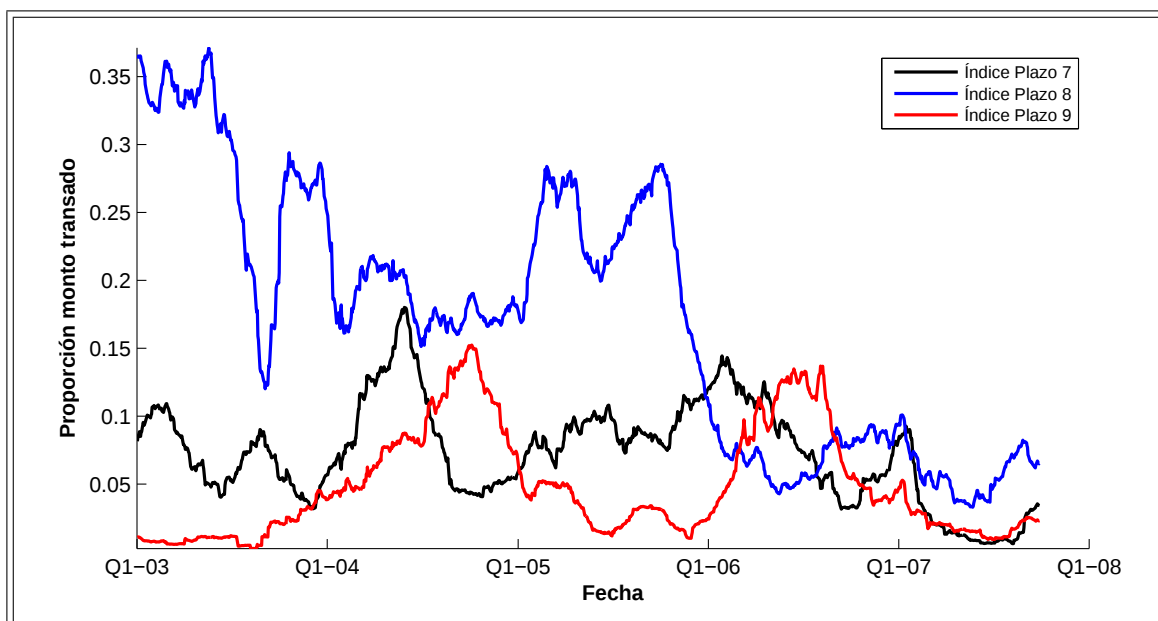


FIGURA 6.7. Evolución en el tiempo de los índices de liquidez por montos transados. Instrumentos PRC (7, 8 y 9 años plazo). Periodo 2003-2007.

TABLA 6.9. Valor promedio anual del índice de liquidez para las distintas agrupaciones de plazo remanente. Instrumentos PRC. Periodo 2003-2007

Plazo	2003	2004	2005	2006	2007
0	0,1%	0,1%	0,0%	0,1%	0,6%
1	0,1%	0,3%	0,7%	1,9%	10,9%
2	2,7%	2,2%	4,8%	13,6%	21,5%
3	2,2%	2,9%	3,9%	8,5%	12,4%
4	7,9%	14,0%	13,5%	5,8%	5,9%
5	5,7%	6,7%	3,2%	6,4%	3,5%
6	10,2%	10,3%	7,3%	8,3%	7,6%
7	6,8%	8,9%	8,9%	8,3%	2,5%
8	28,7%	18,3%	22,9%	7,2%	5,8%
9	1,4%	8,9%	3,1%	8,0%	2,1%
10	1,0%	0,5%	1,9%	1,7%	3,8%
11	0,2%	0,5%	0,9%	1,6%	0,9%
12	1,0%	0,6%	1,9%	1,1%	0,9%
13	0,5%	1,2%	0,8%	1,3%	1,2%
14	0,7%	0,7%	0,5%	1,8%	5,0%
15	0,9%	0,5%	2,2%	8,8%	15,0%
16	0,9%	1,4%	9,3%	14,4%	0,6%
17	1,1%	9,0%	13,5%	1,3%	0,0%
18	5,8%	12,2%	0,6%	0,0%	0,0%
19	20,3%	0,6%	0,0%	0,0%	0,0%
20	1,9%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%

6.4.3. Estimación costos de transacción

Para la estimación de los costos de transacción a través del modelo de variable dependiente limitada, se hace necesaria la especificación de un activo (o un portafolio) que represente al mercado. Como se debe contar con un panel completo de datos para éste instrumento, su elección en el mercado chileno se hace difícil. Para efectos de este estudio se calibró el modelo de tasas de Cortazar et al. (2007) y se utilizó el precio teórico de un bono cero cupón de 4 años de plazo como el instrumento *benchmark* o representativo del mercado.

Para simplificar el trabajo sólo se calculan los costos de transacción por instrumento para la familia de papeles BCU/BTU que es de un número reducido de bonos. Los instrumentos PRC en cambio se agrupan por plazo utilizando el mismo criterio anteriormente especificado. Esto se basa en el hecho de que el plazo remanente es la principal característica que explica la diferencia observada de *spreads*. De esta forma, se busca determinar el efecto de la madurez en el *spread* exigido por los inversionistas.

En las tablas 6.10 y 6.11 se muestran los resultados para los papeles BCU/BTU y PRC respectivamente. Se especifican los costos de transacción en puntos bases ante variaciones negativas (−) y positivas del mercado (+).

Como era de esperar se observa que los papeles de punta de ambos mercados son los que presentan menores costos de transacción.

6.5. Análisis de desempeño de la metodología en el mercado chileno

A continuación se realiza un análisis detallado de los resultados de la metodología propuesta con el fin de mostrar sus fortalezas y debilidades. Para ello se seleccionan tres ejemplos que son representativos de los usos potenciales del algoritmo. Las estructuras generadas son examinadas utilizando las herramientas definidas anteriormente para efectos de controlar la calidad de los resultados. Se utiliza como *benchmark* el modelo de Cortazar et al. (2007).

TABLA 6.10. Estimación de costos de transacción de papeles BCU/BTU. Periodo 2006-2007.

Plazo	Nemotécnico	p.b. (-)	p.b. (+)
0	BCU0500907	-51,88	52,54
1	BCU0500308	-37,82	39,75
1	BCU0500908	-25,80	20,42
2	BCU0500909	-13,31	12,28
3	BCU0500910	-10,70	9,45
4	BCU0500911	-1,65	0,10
5	BCU0300412	-0,66	1,70
5	BCU0500912	-6,13	7,86
6	BCU0501113	-4,13	5,63
8	BCU0500116	-1,18	0,87
8	BTU0210915	-1,08	0,73
10	BCU0300517	-0,71	1,33
15	BCU0500922	-4,29	3,91
16	BTU0451023	-1,94	1,95
17	BTU0450824	-0,61	0,65
18	BTU0260925	-0,97	0,92
20	BTU0300327	-2,05	3,00

6.5.1. Ejemplo 1 de la aplicación de la metodología

Características:

- (i) Modelo dinámico base (Cortazar et al., 2007) calibrado a instrumentos BCU/BTU y PRC.
- (ii) Márgenes de tolerancia de acuerdo a plazo remanente (ver tabla 6.12).
- (iii) Transacciones agrupadas por plazo remanente. Panel de datos incompleto con sólo las transacciones del día.
- (iv) Calibración de mínima entropía con márgenes de tolerancia.
- (v) Muestreo no uniforme y reconstrucción mediante *spline* cúbico.

En el primer ejemplo, se utilizan sólo las transacciones observadas en la Bolsa de Comercio de Santiago de papeles BCU/BTU. Sin embargo, el modelo dinámico es calibrado con ambas familias de papeles: PRC y BCU/BTU. De esta manera, se obtiene una distribución inicial que incorpora la mayor cantidad de información posible del mercado de bonos reales de gobierno. Los márgenes de tolerancia son definidos arbitrariamente y se dimensionan de acuerdo a la liquidez y credibilidad de las datos

TABLA 6.11. Estimación de costos de transacción de papeles PRC. Periodo 2003-2007

Plazo	p.b. (-)	p.b. (+)
1	-26,91	29,13
2	-9,01	9,03
3	-7,66	7,87
4	-3,62	3,86
5	-9,23	9,46
6	-10,92	10,82
7	-2,52	2,94
8	-1,04	1,24
9	-4,66	5,15
10	-5,14	5,55
11	-8,72	9,44
12	-5,73	6,04
13	-6,14	6,46
14	-4,50	5,05
15	-3,76	4,00
16	-3,94	4,14
17	-3,92	4,27
18	-4,28	4,80
19	-5,11	5,26
20	-4,41	4,56

tomando en cuenta los estudios empíricos anteriormente expuestos. Éstos se detallan en la tabla 6.12.

TABLA 6.12. Ejemplo 1: Márgenes de tolerancia utilizados.

Plazo	Tol. (p.b.)
0	20
1-3	10
4-5	3
6-8	10
9-17	5
18-20	3

En las figuras 6.8, 6.9, 6.10 y 6.11 se muestra la curva generada por la metodología para distintos días. Junto con ella se grafican las transacciones, con sus respectivos márgenes de tolerancia, y la curva del modelo dinámico base.

En los gráficos 6.8 y 6.9 se observa que el algoritmo es capaz de deformar la curva base considerablemente, mejorando la valorización de los activos en el largo plazo. Es importante mencionar que la inclusión de papeles PRC en la calibración del modelo base puede explicar el error que se observa en el largo plazo.

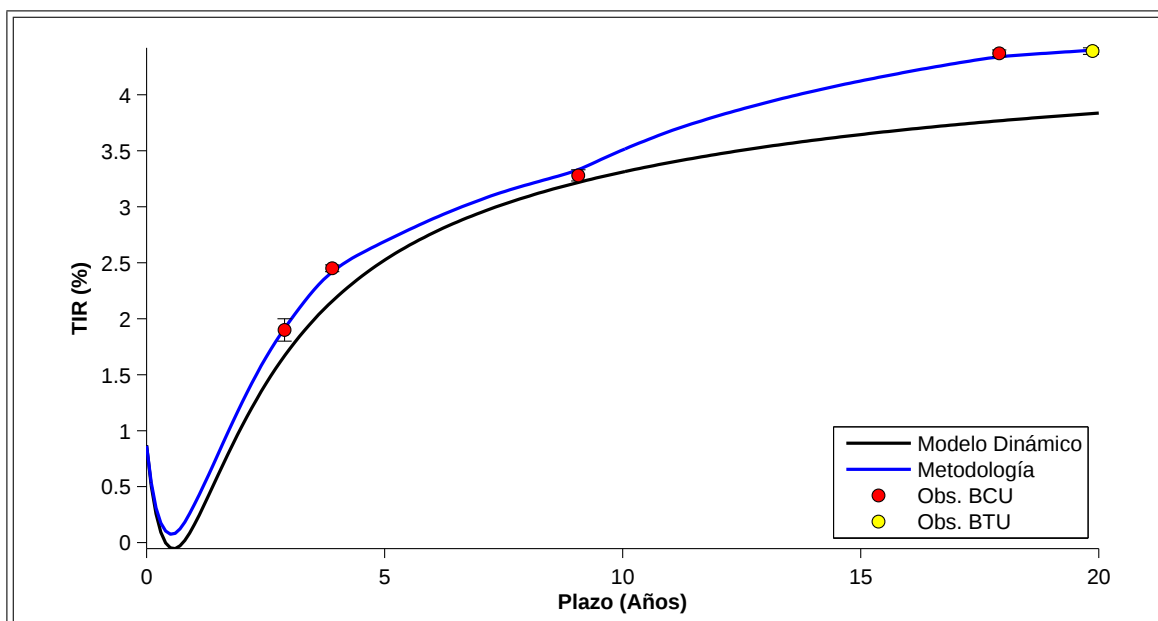


FIGURA 6.8. Ejemplo 1: Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU para el día 08/10/2004.

La figura 6.10 muestra lo que sucede cuando la estructura inicial cumple con la mayoría de los rangos de tolerancia especificados. En este caso sólo la transacción del largo plazo se encuentra fuera del intervalo definido, por lo que la metodología ajusta levemente la estructura para cumplir las restricciones.

Como se demostró anteriormente, los papeles BCU/BTU con plazo remanente entre cuatro y cinco años son los más líquidos del mercado y por lo tanto la curva del modelo dinámico está consistentemente sesgada en ese sector. En la figura 6.11 se puede observar que la nueva estructura es capaz de incorporar la información de *spreads* presente en las transacciones de estos instrumentos. Esto es posible gracias a que se definieron márgenes de tolerancia más estrechos para los plazos más líquidos.

Los ejemplos expresados en los gráficos 6.8 a 6.11 son una buena representación de lo que sucede normalmente en mercados de alta complejidad. Las observaciones ya sea por tener *spreads* asociados a características propias de los papeles o por su asincronía, se encuentran desalineados. El modelo dinámico hace una buena tarea al proveer una curva promedio, que trata de valorizar lo mejor posible dentro de su grado de flexibilidad a todos

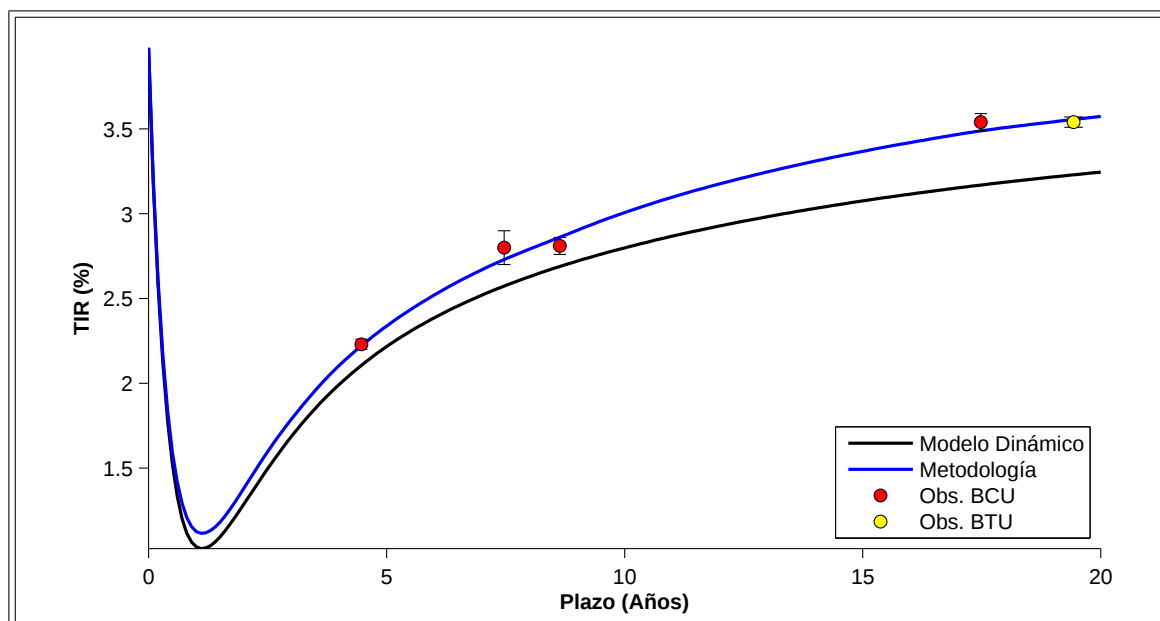


FIGURA 6.9. Ejemplo 1: Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU para el día 15/03/2005.

los instrumentos. La metodología, en cambio, genera una estructura que logra ajustarse de mejor manera a las transacciones.

A continuación se detallan en las tablas 6.13 y 6.14 el error absoluto medio y el sesgo de las transacciones con respecto a las estructuras estimadas. La primera de ellas corresponde a los resultados para el periodo que cubre toda la muestra del estudio. Se puede observar una importante disminución del *MAE* y del sesgo total.

Es interesante destacar que los errores de valorización promedio cumplen con los márgenes de tolerancia especificados en la tabla 6.12. Por ejemplo, en el caso de los papeles de punta (BCU-4, BCU-5 y BTU-20) el *MAE* promedio en todos los casos es menor a los tres puntos bases establecidos. Por otro lado, se observa una disminución importante en el sesgo de los papeles más líquidos, pudiéndose inferir que el algoritmo es capaz de incorporar la información de *spreads*.

En la tabla 6.14 se limita el periodo de la muestra para realizar una comparación más justa con el modelo dinámico, pues en los años anteriores al 2006 el modelo se ve influenciado por la gran cantidad de papeles PRC que existen en la muestra. La

TABLA 6.13. Ejemplo 1: Error absoluto medio y sesgo de las observaciones agrupadas con respecto a metodología y modelo dinámico. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2003-2007.

Plazo	MAE MDA	Sesgo MDA	MAE MD	Sesgo MD	Tolerancia
0	18,27	2,45	29,46	12,51	20
1	7,23	2,48	11,73	5,57	10
2	6,78	-0,24	8,01	-0,84	10
3	6,60	4,48	12,46	10,25	10
4	2,80	0,43	11,48	6,01	3
5	2,85	-1,82	8,87	-2,94	3
6	5,66	5,41	5,85	2,87	10
7	5,82	5,19	9,16	7,39	10
8	5,53	2,48	9,57	7,59	10
9	3,86	0,16	8,93	6,83	5
10	4,02	-3,08	5,01	0,82	5
15	5,00	5,00	10,52	10,52	5
16	4,45	4,40	8,52	8,49	5
17	3,77	3,69	10,82	10,69	5
18	2,28	1,54	12,74	12,41	3
19	2,41	0,88	21,29	20,01	3
20	2,56	-0,12	22,22	21,07	3
Total	4,30	1,32	11,60	7,76	

TABLA 6.14. Ejemplo 1: Error absoluto medio y sesgo de las observaciones agrupadas con respecto a metodología y modelo dinámico. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2006-2007.

Plazo	MAE MDA	Sesgo MDA	MAE MD	Sesgo MD	Tolerancia
0	18,27	2,45	29,46	12,51	20
1	7,23	2,48	11,73	5,57	10
2	6,48	1,29	7,49	0,66	10
3	6,29	5,02	6,07	3,30	10
4	2,55	-0,62	6,82	-3,60	3
5	2,56	-1,71	8,43	-7,73	3
6	5,66	5,41	5,85	2,87	10
7	4,79	3,84	4,76	1,99	10
8	4,33	2,01	5,22	1,89	10
9	2,86	-0,74	3,16	-0,98	5
10	3,57	-2,79	3,39	-1,62	5
15	5,00	5,00	10,52	10,52	5
16	4,45	4,40	8,52	8,49	5
17	3,51	3,48	8,04	7,93	5
18	2,06	1,02	5,76	5,37	3
19	2,08	-0,69	5,28	2,00	3
20	2,26	-1,12	6,00	4,20	3
Total	4,28	1,33	7,03	1,82	

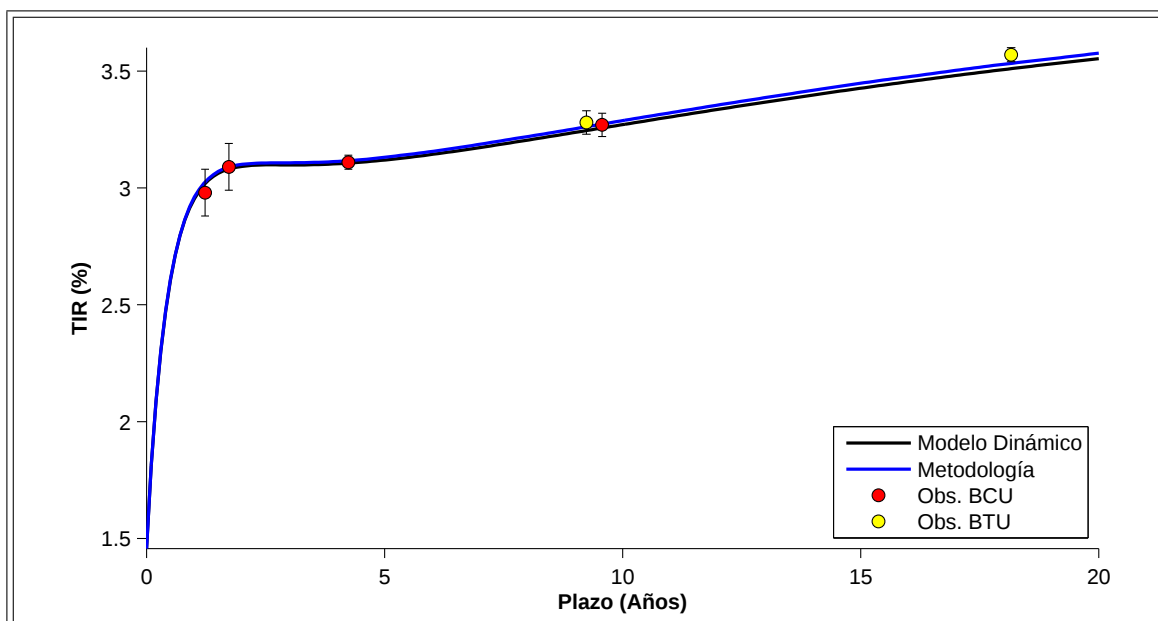


FIGURA 6.10. Ejemplo 1: Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU para el día 08/06/2006.

metodología logra, de todas formas, mejorar tanto el error absoluto promedio como el sesgo.

La disminución del error de valorización puede traer consigo un aumento en la volatilidad en serie de tiempo de la curva. En las figuras 6.12 y 6.13 se grafica la volatilidad empírica de las transacciones y las estructuras de volatilidad del modelo dinámico base y de las curvas generadas por la metodología.

En 6.12 se puede observar claramente un aumento considerable de la volatilidad en el largo plazo. Este comportamiento se explica por la utilización de un panel incompleto de datos. Cuando hay una observación, el algoritmo de mínima entropía deforma la curva para captar la información y *spread* propio del instrumento. Al día siguiente si no transa el papel, la metodología mantendrá la curva base, la que no incorpora el premio por riesgo idiosincrático. Este comportamiento generará una volatilidad que no es consistente con la realidad empírica.

La figura 6.13 refuerza la conclusión anterior. En este caso se calcula la estructura de volatilidad considerando sólo los años 2006 y 2007. Este periodo se caracteriza por contar

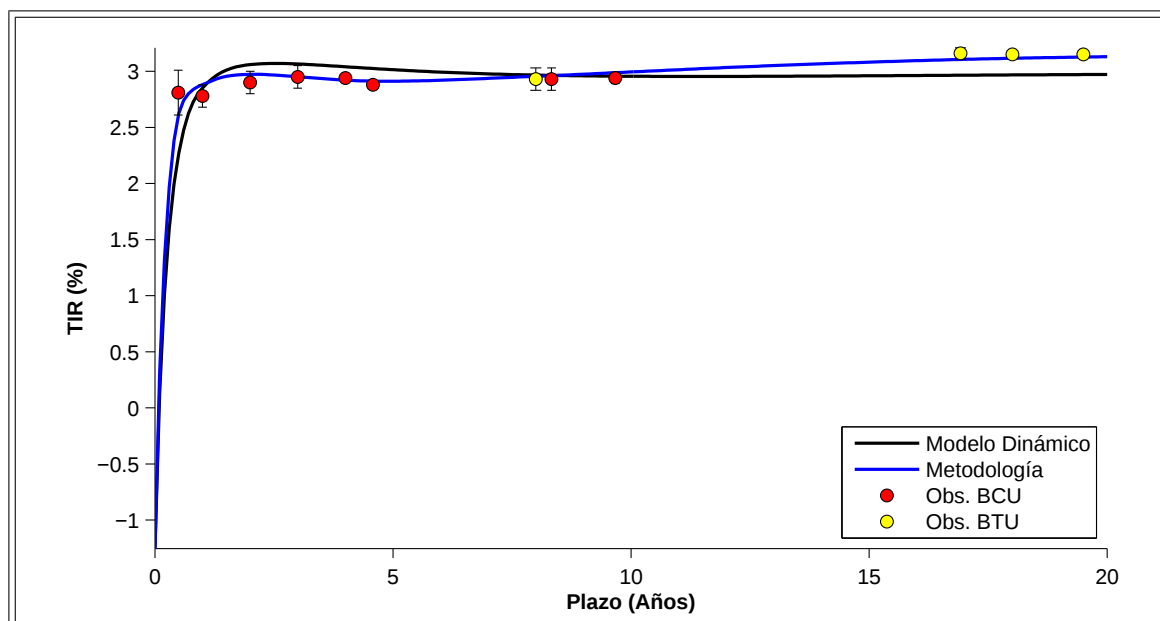


FIGURA 6.11. Ejemplo 1: Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU para el día 03/09/2007.

con un mayor número de transacciones, por lo que se ingresa al algoritmo un panel más completo de datos. Se puede observar que la estructura de volatilidad vuelve a tener un comportamiento similar al modelo base y a las transacciones.

El control de la calidad de los resultados obtenidos también contempla el análisis de la curva *forward* implícita. En la tabla 6.15 se muestra el valor del índice de oscilación promedio para el periodo 2003-2007. Se observa que hay un aumento de un 9,2% con respecto al modelo dinámico inicial.

TABLA 6.15. Índice de oscilación promedio de la estructura de tasas de interés para distintas aplicaciones de la metodología. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2003-2007.

Metodología	I. Oscilación	Aumento
M.D.	1,12E-02	
M.D.A. Ejemplo 1	1,23E-02	9,2%

En la figura 6.14 se grafica la curva *forward* implícita para el día 31/01/2007. El hecho de que se definan holguras de valorización o márgenes de tolerancia, evitando que la estructura se ajuste de forma perfecta a las transacciones, permite que la curva *forward* tenga un comportamiento suave.

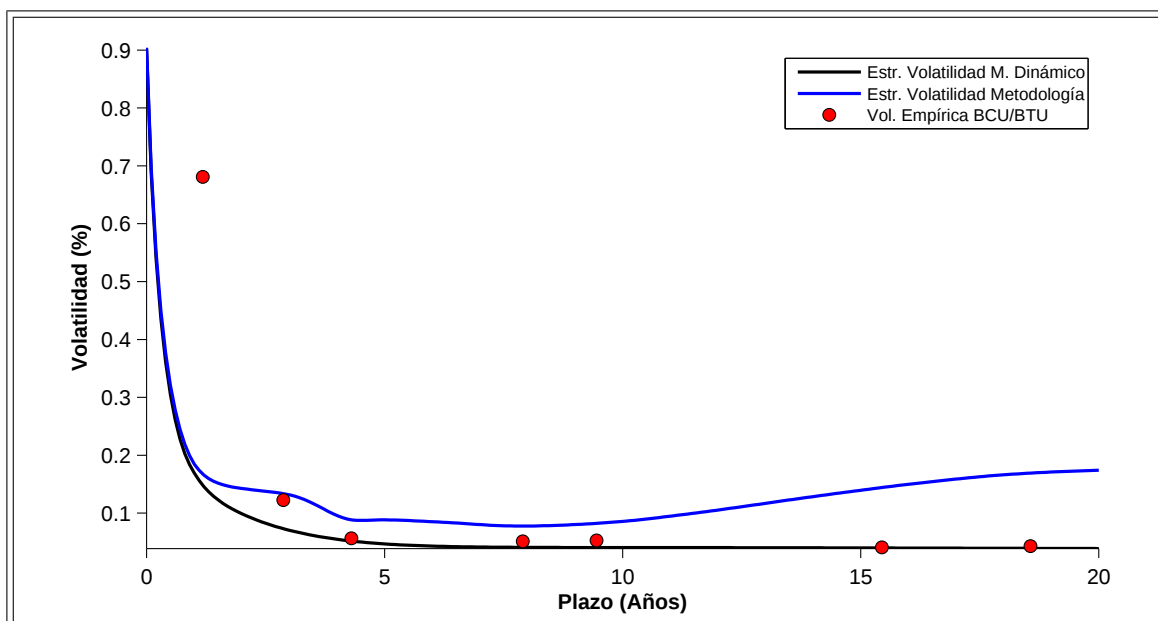


FIGURA 6.12. Ejemplo 1: Estructura de volatilidad diaria de los papeles BCU/BTU. Periodo 2003-2007.

Recopilando estos resultados se puede concluir que el modelo MDA cumple con la mayoría de los criterios de control establecidos. Hay una disminución importante del error absoluto promedio y del sesgo sin que ello implique un aumento significativo de las oscilaciones en la curva. La estructura de volatilidad para el periodo posterior al año 2006 es similar al modelo dinámico inicial y consistente con la volatilidad empírica. Sin embargo en los años anteriores, donde existe una menor densidad de transacciones, la volatilidad aumenta peligrosamente. Es por ello que en los siguientes ejemplos se exploran algunas alternativas para contrarrestar esta situación.

6.5.2. Ejemplo 2 de la aplicación de la metodología

Características:

- (i) Modelo dinámico base (Cortazar et al., 2007) calibrado sólo a instrumentos BCU/BTU.
- (ii) Márgenes de tolerancia de acuerdo a plazo remanente (ver tabla 6.12).
- (iii) Transacciones agrupadas por plazo remanente. Panel de datos incompleto con sólo las transacciones del día.

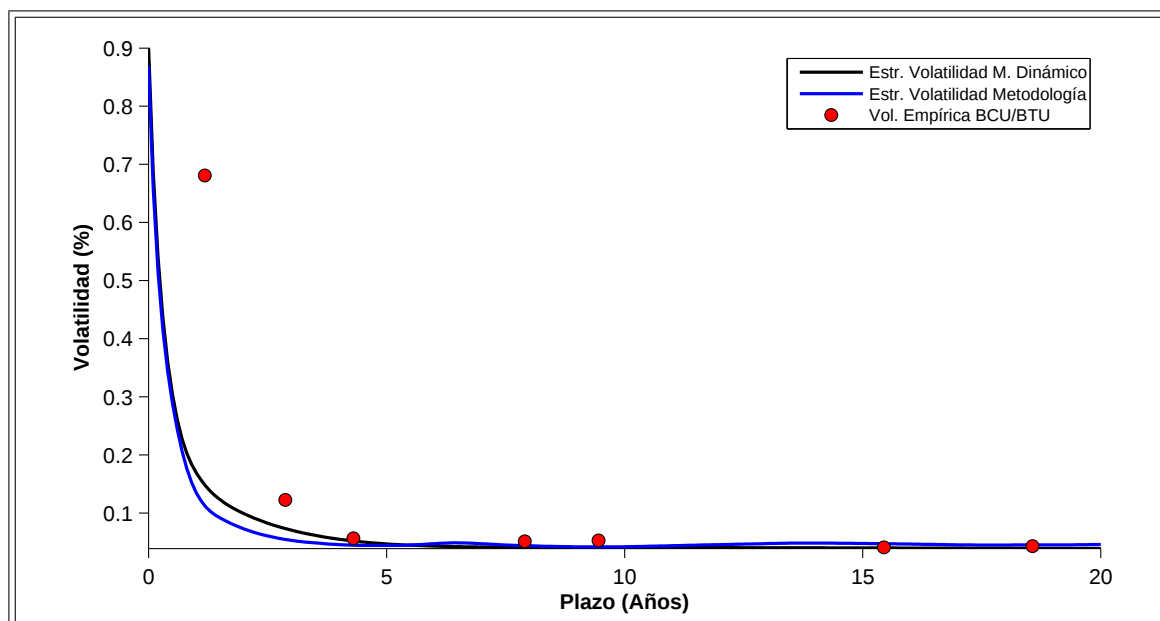


FIGURA 6.13. Ejemplo 1: Estructura de volatilidad diaria de los papeles BCU/BTU. Periodo 2006-2007.

- (iv) Calibración de mínima entropía con márgenes de tolerancia.
- (v) Muestreo no uniforme y reconstrucción mediante *spline* cúbico.

El segundo ejemplo es idéntico al caso anterior, salvo por el hecho que se utiliza un modelo dinámico calibrado exclusivamente con papeles BCU/BTU. De esta forma se busca disminuir la volatilidad de las estructuras generadas por la metodología MDA, ya que es esperable que la distribución inicial se ajuste de mejor forma a las transacciones. Se pierde, sin embargo, la posibilidad de incorporar la información contenida en los instrumentos PRC.

Los gráficos que muestran la estructura de rendimiento frente a las transacciones, para los mismos días del ejemplo anterior, se pueden encontrar en el anexo J.

En las tablas 6.16 y 6.17 se realiza el análisis de error y sesgo. Se puede observar que el error promedio de ajuste es prácticamente el mismo que en el ejemplo anterior. El modelo dinámico, en cambio, aumenta considerablemente su rendimiento en términos de ajuste.

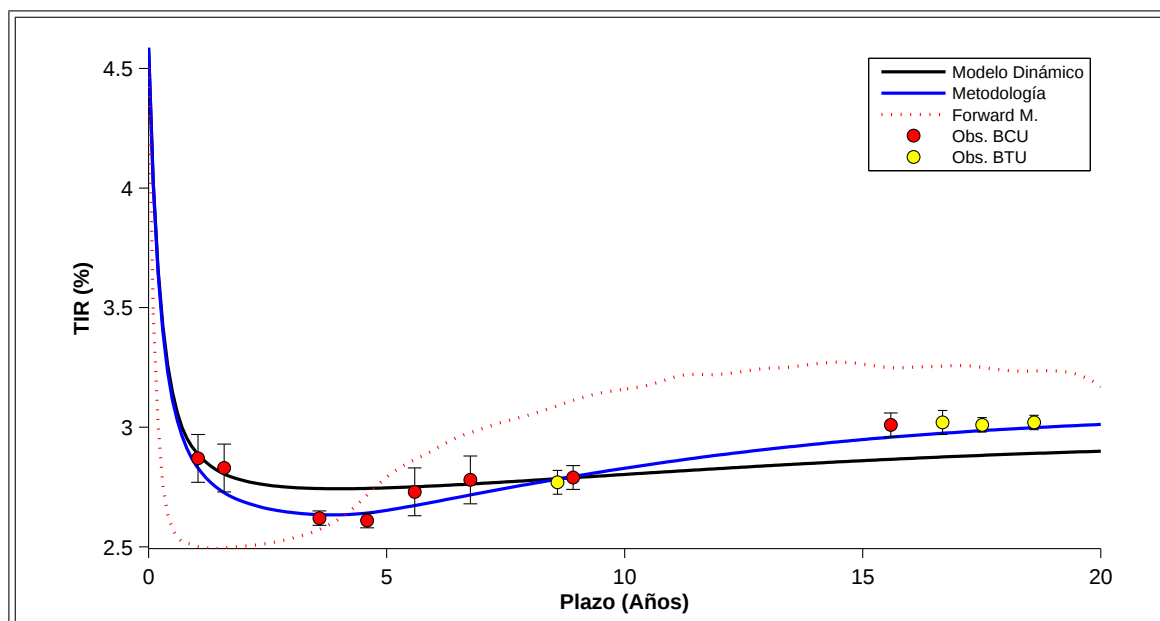


FIGURA 6.14. Ejemplo 1: Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU y curva cero *forward* para el día 31/01/2007.

TABLA 6.16. Ejemplo 2: Error absoluto medio y sesgo de las observaciones agrupadas con respecto a metodología y modelo dinámico. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2003-2007.

Plazo	MAE MDA	Sesgo MDA	MAE MD	Sesgo MD	Tolerancia
0	13,22	-2,92	17,42	0,35	20
1	7,48	3,51	11,71	6,70	10
2	6,69	2,54	7,30	2,75	10
3	6,89	4,67	6,94	5,13	10
4	2,77	0,38	6,65	-0,73	3
5	2,86	-2,28	9,55	-9,23	3
6	5,25	4,93	4,60	1,05	10
7	4,73	3,62	4,15	-0,16	10
8	5,82	1,61	5,79	-2,32	10
9	4,10	-1,72	7,12	-5,91	5
10	4,47	-4,20	8,47	-8,13	5
15	4,98	4,98	9,37	9,37	5
16	4,31	4,26	7,54	7,42	5
17	3,67	3,59	7,51	7,29	5
18	2,28	1,47	6,13	5,56	3
19	2,24	0,96	6,47	5,35	3
20	2,42	-0,14	6,61	5,20	3
Total	4,24	0,96	7,21	0,27	

TABLA 6.17. Ejemplo 2: Error absoluto medio y sesgo de las observaciones agrupadas con respecto a metodología y modelo dinámico. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2006-2007.

Plazo	MAE MDA	Sesgo MDA	MAE MD	Sesgo MD	Tolerancia
0	13,22	-2,92	17,42	0,35	20
1	7,48	3,51	11,71	6,70	10
2	6,59	3,43	7,28	2,64	10
3	6,70	5,63	5,34	2,82	10
4	2,49	-0,89	6,48	-5,52	3
5	2,57	-1,79	9,02	-8,71	3
6	5,25	4,93	4,60	1,05	10
7	3,99	2,57	3,21	-0,67	10
8	4,15	1,66	3,27	-1,65	10
9	3,38	-2,56	4,78	-4,36	5
10	4,11	-3,81	6,60	-6,42	5
15	4,98	4,98	9,37	9,37	5
16	4,31	4,26	7,54	7,42	5
17	3,46	3,44	7,04	6,92	5
18	2,11	1,11	5,14	4,78	3
19	1,70	0,05	4,05	3,09	3
20	2,07	-0,72	4,55	3,41	3
Total	4,19	1,15	6,48	0,30	

Las estructuras de volatilidad se observan en las figuras 6.15 y 6.16. Se aprecia una disminución importante de la volatilidad del modelo dinámico ajustado con respecto al primer ejemplo sobre todo en el periodo de baja densidad de transacciones. Esto se infiere del hecho de que a pesar de que la diferencia entre las estructuras de volatilidad para el periodo 2006-2007 es leve, se observa una reducción drástica al considerar toda la muestra. Queda demostrado entonces la importancia de seleccionar un buen modelo dinámico inicial.

En este caso también se observa una disminución del aumento porcentual del índice promedio de oscilación tal como se aprecia en la tabla 6.18. La explicación para dicho fenómeno tiene relación al mayor ajuste del modelo dinámico inicial. La estructura base cumple en promedio una mayor cantidad de restricciones (está más veces al interior de los rangos de tolerancia), por lo que la metodología MDA se ve en la necesidad de modificar la curva menos veces.

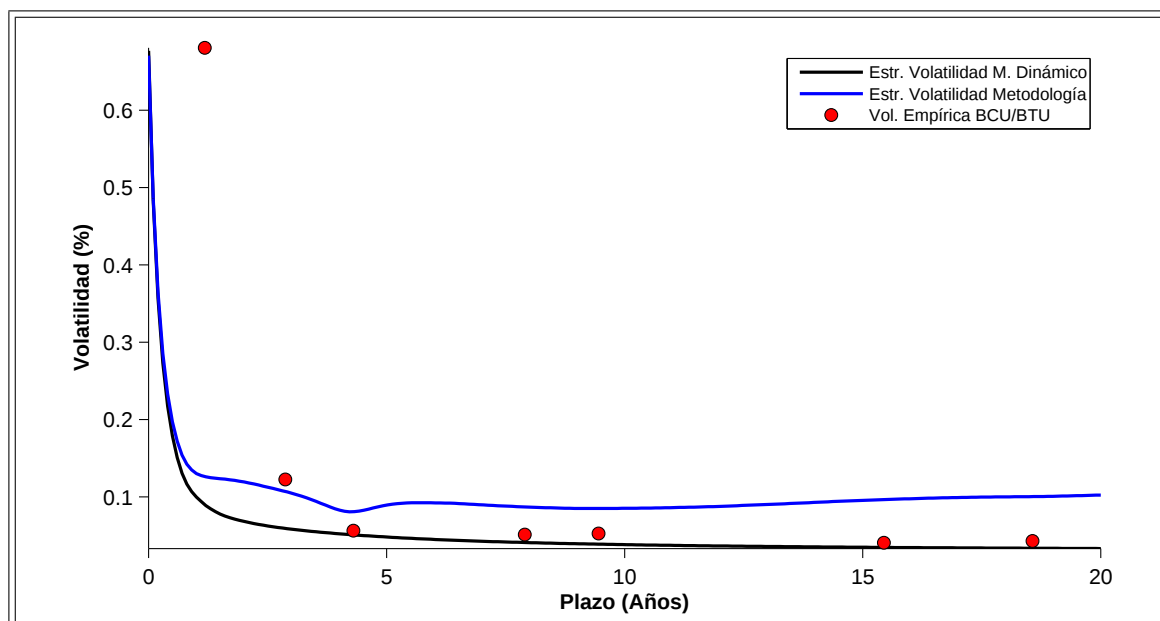


FIGURA 6.15. Ejemplo 2: Estructura de volatilidad diaria de los papeles BCU/BTU. Periodo 2006-2007.

TABLA 6.18. Índice de oscilación promedio de la estructura de tasas de interés para distintas aplicaciones de la metodología. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2003-2007.

Metodología	I. Oscilación	Aumento
M.D.	8,16E-03	
M.D.A. Ejemplo 2	8,87E-03	8,6%

En la figura 6.17 se grafica la curva *forward* implícita para el día 06/09/2007. Se observa que las transacciones en este caso se encuentran desalineadas, por lo que necesariamente la estructura es oscilatoria para cumplir con las restricciones del algoritmo.

La modificación de la distribución de probabilidad inicial al acotar los instrumentos considerados en la calibración del modelo dinámico genera en este caso importantes beneficios. Esto se explica por el mayor ajuste de la estructura de tasas inicial, lo que disminuye la volatilidad en serie de tiempo de las curvas generadas por el modelo MDA.

En este ejemplo se cumplen todos los criterios de control, ya que se disminuye el error absoluto promedio y el sesgo manteniendo una estructura de volatilidad consistente y una curva *forward* implícita sin oscilaciones importantes.

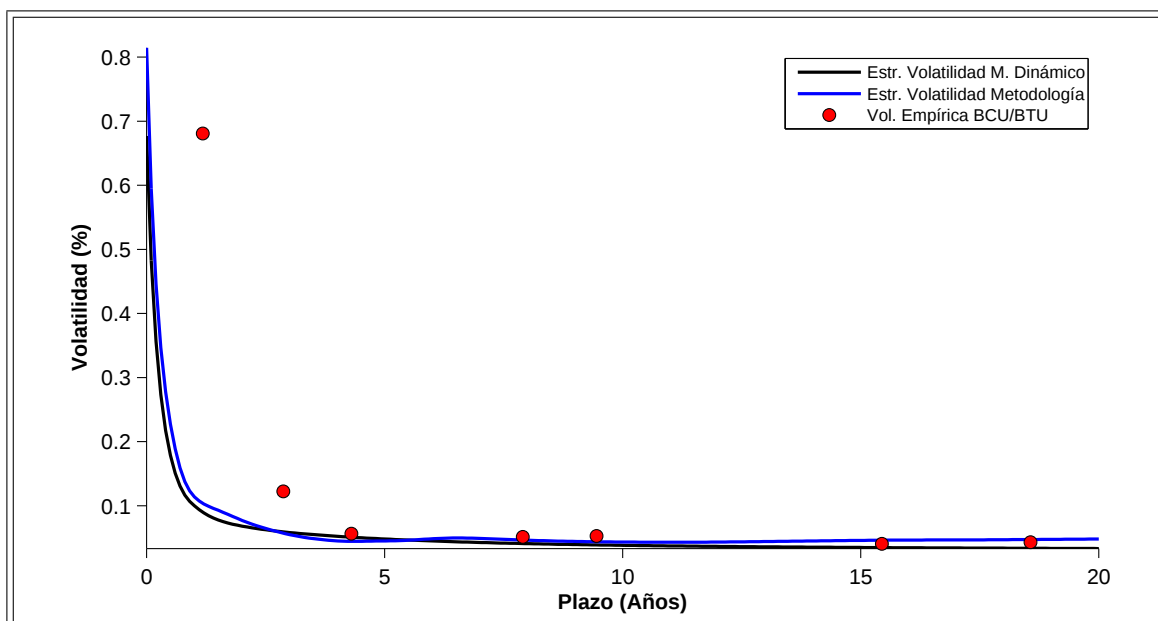


FIGURA 6.16. Ejemplo 2: Estructura de volatilidad diaria de los papeles BCU/BTU. Periodo 2006-2007.

Finalmente, en el último ejemplo, se analiza el efecto de rellenar el panel de datos mediante un modelo de *spread* antes de la aplicación del algoritmo.

6.5.3. Ejemplo 3 de la aplicación de la metodología

Características:

- (i) Modelo dinámico base (Cortazar et al., 2007) calibrado a instrumentos BCU/BTU y PRC.
- (ii) Márgenes de tolerancia de acuerdo a plazo remanente (ver tabla 6.19).
- (iii) Transacciones agrupadas por plazo remanente. Relleno de panel de datos mediante modelo simple de *spread*.
- (iv) Calibración de mínima entropía con márgenes de tolerancia.
- (v) Muestreo no uniforme y reconstrucción mediante *spline* cúbico.

En el tercer ejemplo se utiliza un modelo simple de *spreads* para completar el panel de datos, antes de la ejecución del algoritmo. Se consideran entonces dos tipos de observaciones: las transacciones reales del día y en el caso de no existir, una estimación

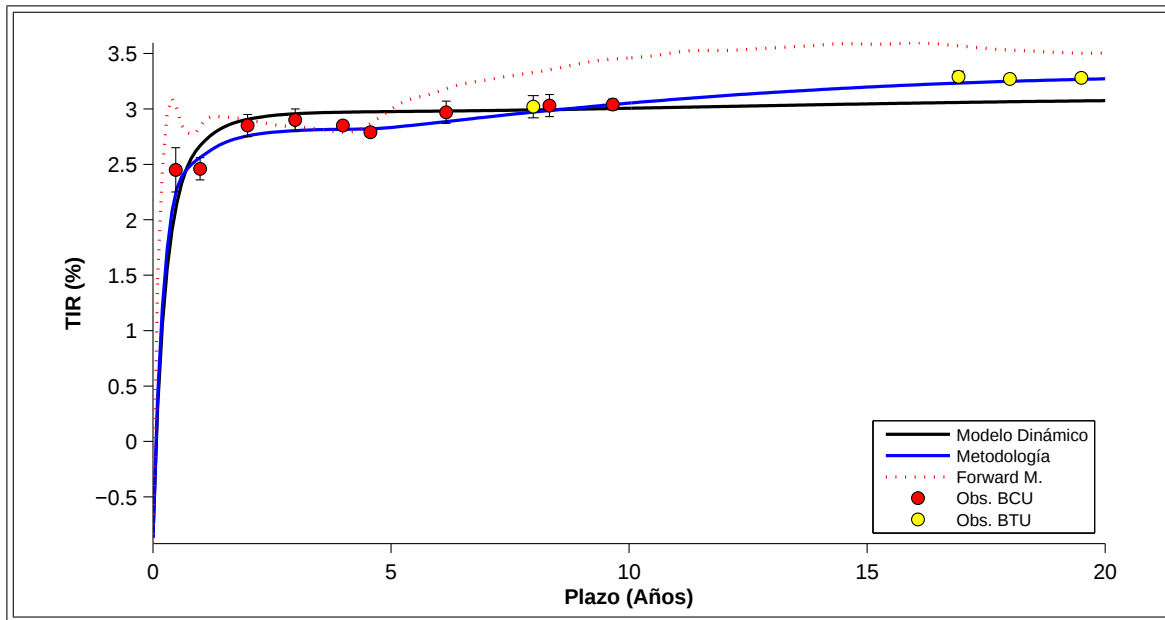


FIGURA 6.17. Ejemplo 2: Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU y curva cero *forward* para el día 06/09/2007.

de ella. Para cada grupo de papeles se lleva la información del último *spread* observado con respecto a la curva base $spread_j = TIR_j - R(T_j)$, donde TIR_j es la tasa observada y $R(T_j)$ la tasa teórica derivada del modelo dinámico. De esta forma, si no hay transacción para el grupo j , entonces la estimación tiene la siguiente forma:

$$TIR_j^* = R(T) + spread_j \quad (6.1)$$

Sólo se considera válido el *spread* si éste tiene una antigüedad menor a 20 días. Si para el grupo j no se cumple esta condición, entonces no se realiza la estimación teórica de la tasa y por tanto no se rellena la columna j del panel de datos.

Para darle una mayor influencia a las transacciones reales, los márgenes de tolerancia se especifican de acuerdo a la tabla 6.19. En este caso las observaciones que se derivan del modelo teórico se asocian a márgenes dos veces mayores que las transacciones observadas.

TABLA 6.19. Ejemplo 3: Márgenes de tolerancia utilizados.

Plazo	Tol. Obs. (p.b.)	Tol. Modelo (p.b.)
0	20	40
1-3	10	20
4-5	3	6
6-8	10	20
9-17	5	10
18-20	3	6

En la figuras 6.18 y 6.19 se muestra el resultado de la implementación de la metodología. En verde se indican las tasas teóricas calculadas a partir del modelo de *spread*.

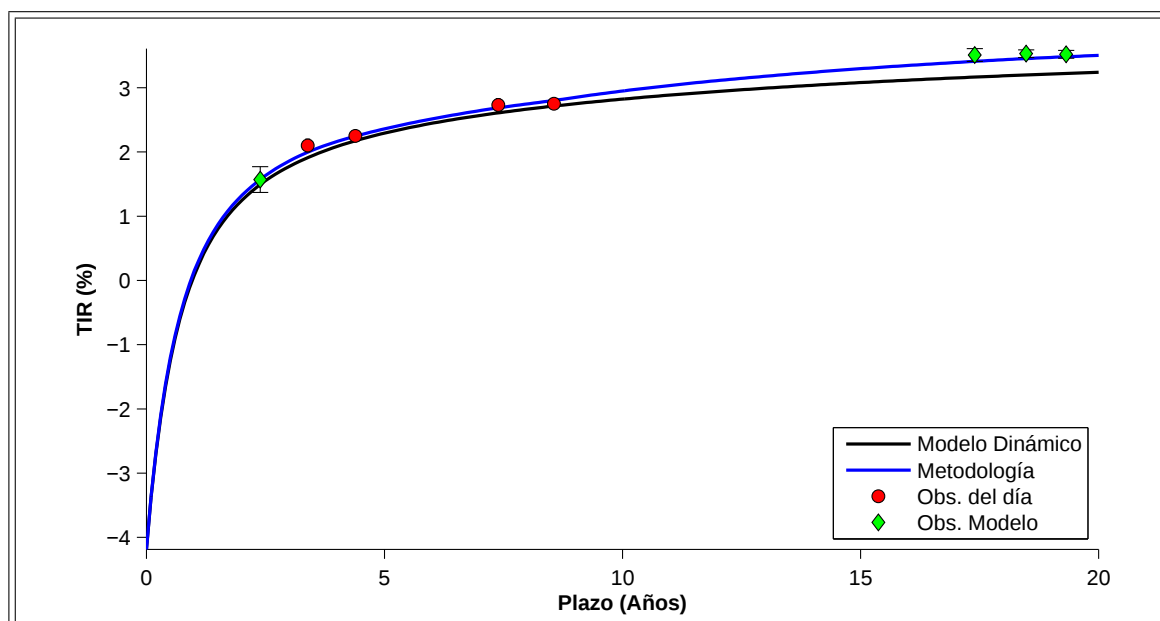


FIGURA 6.18. Ejemplo 3: Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU para el día 12/04/2005.

En 6.18 se ejemplifica el efecto de utilizar información de transacciones pasadas en la estimación de la estructura de tasas. Se observa que la curva se mantiene en el largo plazo a un nivel de tasas más alto que el modelo dinámico base.

Completar el panel de datos permite mantener una valorización más consistente en el tiempo, ya que se toman en cuenta los *spreads* propios de los activos incluso en los días en que no hay transacciones. En la figura 6.19 se muestra un ejemplo claro de la consecuencia de aumentar el número de observaciones.

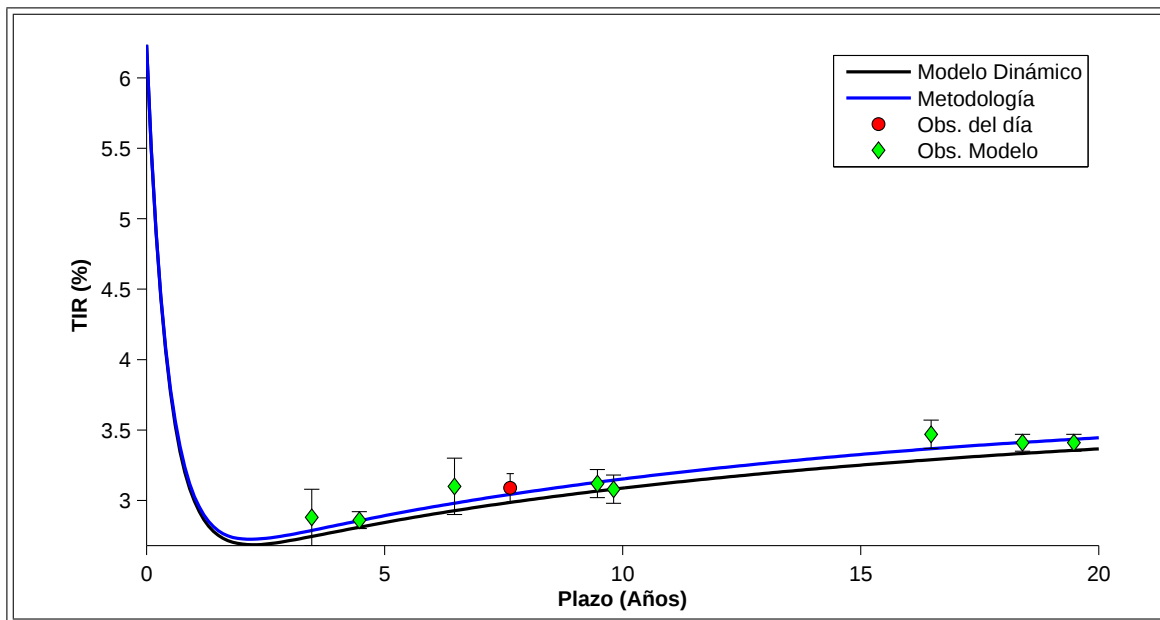


FIGURA 6.19. Ejemplo 3: Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU para el día 13/03/2006.

Las tablas 6.20 y 6.21 muestran el error y el sesgo de la curva generada por la metodología.

Se puede observar que los niveles de error son prácticamente iguales a los dos ejemplos anteriores, por lo que se puede inferir que el relleno del panel de datos no influye mayormente en la valorización de las transacciones observadas. Se cumplen también todos los márgenes de tolerancia especificados en la tabla 6.19.

Es interesante observar ahora el efecto sobre la estructura de volatilidad de este nuevo enfoque. Se calcula la volatilidad en serie de tiempo de la curva generada por la metodología durante todo el periodo de muestra.

La figura 6.20 muestra que en este caso la estructura sí posee una volatilidad similar a la empírica. De esta forma, se demuestra que el paso adicional de completar el panel de datos mejora la estructura de volatilidad de la curva, manteniendo el nivel de error en rangos similares.

El índice de oscilación promedio registra un aumento de un 16,5% (tabla 6.22). De esto se infiere que rellenar el panel de datos puede gatillar en un aumento de las

TABLA 6.20. Ejemplo 3: Error absoluto medio y sesgo de las observaciones agrupadas con respecto a metodología y modelo dinámico. Transacciones reales. Periodo 2003-2007.

Plazo	MAE MDA	Sesgo MDA	MAE MD	Sesgo MD	Tolerancia
0	13,97	-2,22	29,46	12,51	20
1	7,26	2,47	11,73	5,57	10
2	6,82	-0,39	8,01	-0,84	10
3	6,44	4,25	12,46	10,25	10
4	2,83	0,40	11,48	6,01	3
5	2,97	-2,15	8,87	-2,94	3
6	5,81	5,55	5,85	2,87	10
7	5,57	4,93	9,16	7,39	10
8	5,18	2,22	9,57	7,59	10
9	3,86	-0,33	8,93	6,83	5
10	4,07	-3,43	5,01	0,82	5
15	5,01	5,01	10,52	10,52	5
16	4,42	4,36	8,52	8,49	5
17	3,70	3,55	10,82	10,69	5
18	2,20	1,39	12,74	12,41	3
19	2,28	0,37	21,29	20,01	3
20	2,44	-1,27	22,22	21,07	3
Total	4,19	0,99	11,60	7,76	

TABLA 6.21. Ejemplo 3: Error absoluto medio y sesgo de las observaciones agrupadas con respecto a metodología y modelo dinámico. Transacciones reales. Periodo 2006-2007.

Plazo	MAE MDA	Sesgo MDA	MAE MD	Sesgo MD	Tolerancia
0	13,97	-2,22	29,46	12,51	20
1	7,26	2,47	11,73	5,57	10
2	6,51	1,17	7,49	0,66	10
3	6,12	4,98	6,07	3,30	10
4	2,53	-0,61	6,82	-3,60	3
5	2,76	-1,78	8,43	-7,73	3
6	5,81	5,55	5,85	2,87	10
7	4,78	3,85	4,76	1,99	10
8	4,00	1,89	5,22	1,89	10
9	2,88	-0,66	3,16	-0,98	5
10	3,69	-2,97	3,39	-1,62	5
15	5,01	5,01	10,52	10,52	5
16	4,42	4,36	8,52	8,49	5
17	3,50	3,44	8,04	7,93	5
18	1,98	0,98	5,76	5,37	3
19	2,12	-0,73	5,28	2,00	3
20	2,31	-1,64	6,00	4,20	3
Total	4,18	1,19	7,03	1,82	

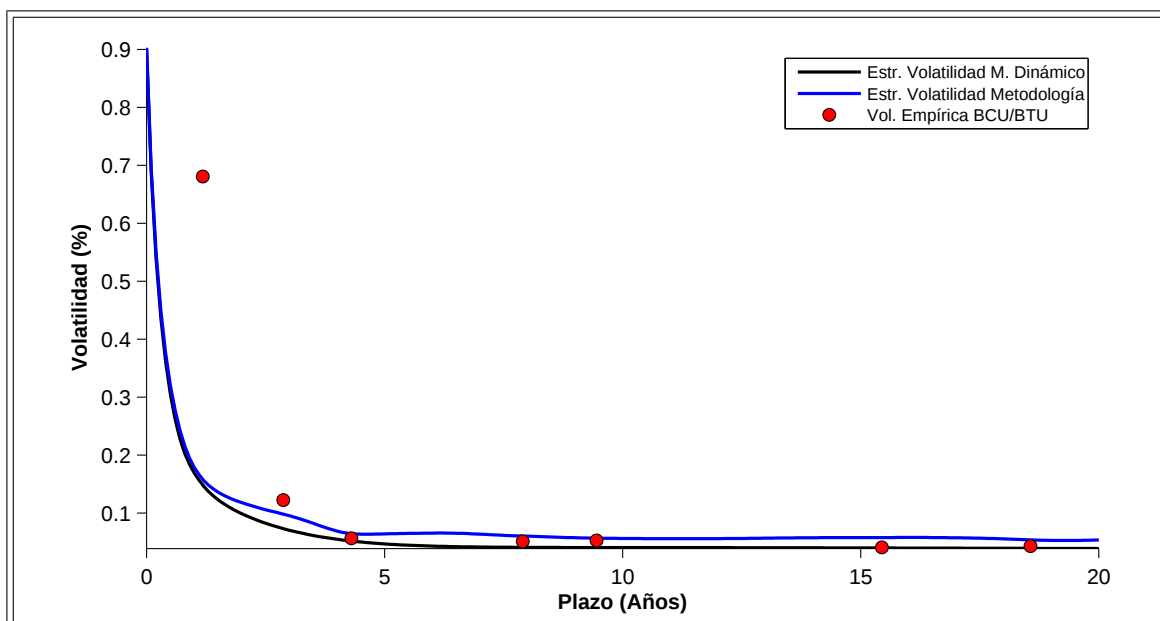


FIGURA 6.20. Ejemplo 3: Estructura de volatilidad diaria de los papeles BCU/BTU. Periodo 2003-2007.

oscilaciones de la curva *forward*. Esto es esperable ya que se aumentan las restricciones de valorización sobre la estructura de tasas generada por el modelo MDA.

TABLA 6.22. Índice de oscilación promedio de la estructura de tasas de interés para distintas aplicaciones de la metodología. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2003-2007.

Metodología	I. Oscilación	Aumento
M.D.	1,12E-02	
M.D.A. Ejemplo 3	1,31E-02	16,5%

Al igual que en los ejemplos anteriores, en la figura 6.21 se muestra el comportamiento de la estructura de rendimiento y la curva *forward* implícita para el día 13/01/2005.

En este caso los controles de calidad sobre los resultados de la metodología MDA nos muestran que el error promedio de valorización está por debajo del modelo dinámico inicial y cumple con los márgenes establecidos. La volatilidad es consistente a la observada en las transacciones y muy similar a la estructura base. El único hecho que llama la atención es el aumento de las oscilaciones en la estructura.

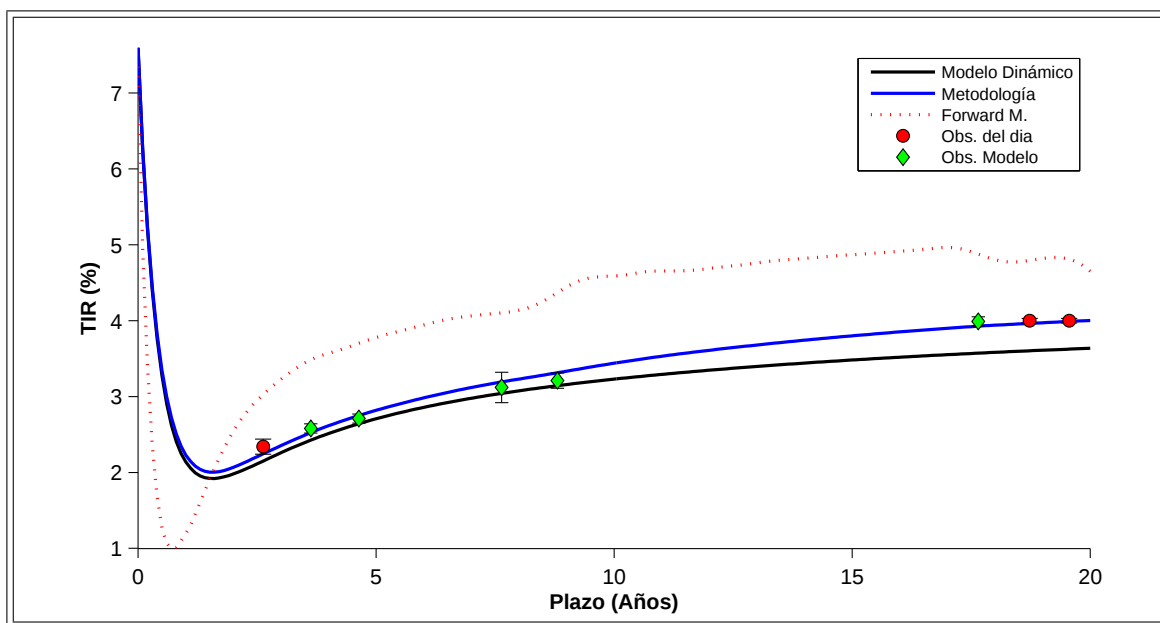


FIGURA 6.21. Ejemplo 3: Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU y curva cero *forward* para el día 13/01/2005.

Mediante estos tres ejemplos se intentó revisar algunas alternativas de implementación de la metodología MDA en el mercado chileno. Es importante destacar que en todos los casos analizados el algoritmo entrega una curva que cumple con los márgenes de tolerancia establecidos y que por tanto mejora la valorización promedio de los instrumentos. Como fue demostrado las restricciones impuestas en las distintas alternativas generan efectos secundarios que dependen de los parámetros y criterios utilizados. Es por esto que el ejercicio realizado sirve también para detectar las implicancias de las decisiones efectuadas en los pasos (i) al (iii) de la metodología sobre la estructura del modelo MDA.

La elección de los criterios que se utilizan en cada punto de la metodología deben depender de los requerimientos específicos (en serie de tiempo y corte transversal) que se le impongan a la estructura que se desea generar.

El lector puede remitirse a la sección de anexos para la discusión de temas pendientes y la ejemplificación y análisis de implementaciones alternativas del algoritmo.

- En el anexo K se estudia el efecto de la agrupación de las transacciones.

- En el anexo L se investiga el efecto del algoritmo sobre las transacciones que no son incluidas en la metodología.
- En el anexo M se examina el comportamiento del algoritmo para distintos márgenes de tolerancia.
- En el anexo N se analiza y ejemplifica la implementación del algoritmo de *trade-off* para distintos pesos w_j .

7. CONCLUSIONES

En esta investigación se introduce una metodología para la estimación de estructuras de tasa de interés en mercados de alta complejidad, la que hace uso de la calibración por mínima entropía para ajustar un modelo dinámico inicial. El aporte de este trabajo no se reduce sólo a la implementación del algoritmo de Avellaneda et al. (2001) en un mercado de baja densidad de transacciones y instrumentos con características heterogéneas, sino que también se modifica la metodología de calibración con el objetivo de hacerla más idónea e intuitiva para mercados de tasas de interés.

La metodología propuesta en esta investigación permite mejorar considerablemente los errores de valorización de los modelos dinámicos en mercados de alta complejidad, sin que esto signifique comprometer la estabilidad de las estructuras de tasas de interés. Debido a la inconveniencia de utilizar modelos estáticos en estos mercados, es una buena manera de generar curvas que sean consistentes con los precios observados en el día. El algoritmo permite en definitiva realizar una ponderación controlada de la información presente (transacciones del día) con los precios históricos (implícitos en el modelo dinámico).

El desarrollo de la calibración con márgenes de tolerancia planteado en esta investigación es un avance importante para la implementación del algoritmo en mercado de tasas de interés. Es una forma más lógica y controlada de deformar la estructura inicial, ya que permite definir áreas de conformidad. De esta forma, la estructura inicial sólo es modificada si no se cumple con alguno de los márgenes de tolerancia definidos. Por el contrario, si se satisfacen todas las restricciones la estructura del modelo dinámico no sufre modificación alguna.

El algoritmo posee además la suficiente flexibilidad para adaptarse a distintos enfoques. La definición de márgenes de tolerancia permite acotar el error máximo tolerable de valorización y, al mismo tiempo, es un parámetro que controla el *trade-off* entre minimización de errores y estabilidad de la curva. De esta forma, dependiendo de los parámetros utilizados la metodología entrega estructuras que van de la valorización

perfecta de las transacciones del día a la mantención del modelo inicial. Sin embargo, en este trabajo se intenta también dar un sustento empírico a la elección de estos parámetros, para lo cual se estudian algunas características de las transacciones como la volatilidad *intraday*, liquidez y costos de transacción.

A su vez es una manera sencilla de poder asignarle distinta importancia a las observaciones del día. En los modelos dinámicos es mucho más engorroso poder hacer distinciones en la credibilidad de las transacciones. La metodología propuesta, en cambio, permite controlar de forma precisa los errores máximos para cada activo en particular, sin que esto signifique un aumento en la complejidad del modelo o la calibración.

Los resultados en el mercado chileno de renta fija confirman la teoría. Se puede bajar el error de valorización tanto como se este dispuesto a sacrificar en estabilidad y oscilaciones en la estructura. Sin embargo, no es recomendable aplicar la calibración por mínima entropía con restricciones en igualdad, ya que esto genera curvas *forward* incompatibles con la realidad empírica.

Por otro lado, se muestra una disminución importante en el sesgo de las estructuras generadas por la metodología en comparación al modelo dinámico. Esto implica que el algoritmo es capaz de utilizar la información que proveen las transacciones para considerar los *spreads* por riesgos propios de los activos. La disminución en sesgo sólo podría ser alcanzada por un modelo dinámico de mayor complejidad.

Esta investigación puede ser extendida tanto teórica como empíricamente. En primer lugar, sería interesante examinar el comportamiento de la metodología en otros mercados de renta fija. Un paso natural es implementarla en el mercado chileno de papeles nominales. Por otro lado, también es posible incorporar instrumentos derivados de tasas de interés los que pueden ser calibrados de forma conjunta con los bonos. Asimismo es relevante analizar el efecto del algoritmo sobre la valorización diaria de carteras de inversión y sus posibles consecuencias sobre algunas medidas de riesgo como el *VAR*.

Es posible estudiar también la posibilidad de realizar nuevas modificaciones del algoritmo de calibración. En particular sería interesante analizar la factibilidad de incluir

un factor de penalización por oscilaciones en la función objetivo de manera de asegurar directamente que la estructura *forward* implícita sea suave.

BIBLIOGRAFÍA

Abken, P., Madan, D., Ramamurtie, S. (1996). *Estimation of risk-neutral and statistical densities by hermite polynomial approximation: with an application to eurodollar futures options*. Federal Reserve Bank of Atlanta.

Adams, K., Van Deventer, D. (1994). Fitting yield curves and forward rate curves with maximum smoothness. *Journal of Fixed Income*, 4, 52-62.

Ait-Sahalia, Y., Lo, A. (1998). Nonparametric estimation of state-price densities implicit in financial asset prices. *The Journal of Finance*, 53(2), 499-547.

Avellaneda, M. (1998). Minimum-relative-entropy calibration of asset pricing models. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 1(4), 447-472.

Avellaneda, M., Buff, R., Friedman, C., Grandchamp, N., Kruk, L., Newman, J. (2001). Weighted Monte Carlo: a new technique for calibrating asset-pricing models. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 4(1), 91-119.

Avellaneda, M., Friedman, C., Holmes, R., Samperi, D. (1997). Calibrating volatility surfaces via relative-entropy minimization. *Applied Mathematical Finance*, 4(1), 37-64.

Babbs, S., Nowman, K. (1999). Kalman filtering of generalized vasicek term structure models. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 34(1), 115-130.

Black, F., Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81(3), 637-654.

Bookstaber, R., McDonald, J. (1987). A general distribution for describing security price returns. *The Journal of Business*, 60(3), 401-424.

Brennan, M., Schwartz, E. (1979). A continuous time approach to the pricing of bonds. *Journal of Banking and Finance*, 3(2), 133-155.

Buchen, P., Kelly, M. (1996). The maximum entropy distribution of an asset inferred from option prices. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 31(1), 143-159.

Byrd, R., Lu, P., Nocedal, J., Zhu, C. (1995). A limited memory algorithm for bound constrained optimization. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 16(5), 1190-1208.

Chacko, G., Mahanti, S., Mallik, G., Subrahmanyam, M. (2007). Latent liquidity: a new measure of liquidity risk with an application to corporate bonds. *Journal of Financial Economics* (forthcoming).

Chen, L., Lesmond, D., Wei, J. (2007). Corporate yield spreads and bond liquidity. *The Journal of Finance*, 62(1), 119-149.

Corrado, C., Su, T. (1996). Skewness and kurtosis in S&P 500 index returns implied by option prices. *Journal of Financial Research*, 19(2), 175-192.

Cortazar, G., Schwartz, E., Naranjo, L. (2007). Term-structure estimation in markets with infrequent trading. *International Journal of Finance & Economics*, 12(4), 353-444.

Cover, T., Thomas, J. (2006). *Elements of information theory*. Wiley-Interscience New York.

Cox, J., Ingersoll Jr, J., Ross, S. (1985). An intertemporal general equilibrium model of asset prices. *Econometrica*, 53(2), 363-384.

Dai, Q., Singleton, K. (2000). Specification analysis of affine term structure models. *The Journal of Finance*, 55(5), 1943-1978.

Duffie, D., Kan, R. (1996). A yield-factor model of interest rates. *Mathematical Finance*, 6(4), 379-406.

Fernández, V. (2001). A nonparametric approach to model the term structure of interest rates: the case of Chile. *International Review of Financial Analysis*, 10(2), 99-122.

Fernández, V. (2004). Interest rate risk in an emerging economy. *Quarterly Review of Economics and Finance*, 44(5), 678-709.

Fisher, M., Nychka, D., Zervos, D. (1995). *Fitting the term structure of interest rates with smoothing splines*. Division of Research and Statistics, Division of Monetary Affairs, Federal Reserve Board.

Fleming, M. (2001). *Measuring treasury market liquidity*. Federal Reserve Bank of New York.

Gibson, R., Lhabitant, F., Talay, D. (1998). *Modeling the term structure of interest rates: A review of the literature*. Université de Lausanne, Institute of Banking and Financial Management.

Gray, R. (1990). *Entropy and information theory*. Springer-Verlag New York Inc.

Gulko, L. (1998). *The entropy pricing theory*. Unpublished doctoral dissertation, Yale University.

Gulko, L. (1999). The entropy theory of stock option pricing. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 2(3), 331-355.

Gulko, L. (2002). The entropy theory of bond option pricing. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 5(4), 355-383.

Heath, D., Jarrow, R., Morton, A. (1992). Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology for contingent claims valuation. *Econometrica*, 60(1), 77-105.

Herrera, L., Magendzo, I. (1997). Expectativas financieras y la curva de tasas forward de Chile. *Banco Central de Chile Working Papers*(23).

Ho, T., Lee, S. (1986). Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. *The Journal of Finance*, 41(5), 1011-1029.

Hull, J., White, A. (1990). Pricing interest-rate-derivative securities. *The Review of Financial Studies*, 3(4), 573-392.

Hund, J., Lesmond, D. A. (2006). Liquidity and credit risk in emerging debt markets. *Working Paper*.

Jabbour, G., Mansi, S. (2002). Yield curve smoothing models of the term structure. *Journal of Bond Trading and Management*, 1, 206-222.

Jackwerth, J., Rubinstein, M. (1996). Recovering probability distributions from option prices. *The Journal of Finance*, 51(5), 1611-1631.

Jarrow, R., Rudd, A. (1981). *Approximate option valuation for arbitrary stochastic processes*. Graduate School of Business and Public Administration, Cornell University.

Jaynes, E. (2003). *Probability theory: the logic of science*. Cambridge University Press.

Jondeau, E., Rockinger, M. (2000). Reading the smile: the message conveyed by methods which infer risk neutral densities. *Journal of International Money and Finance*, 19(6), 885-915.

Joy, C., Boyle, P., Tan, K. (1996). Quasi-Monte Carlo methods in numerical finance. *Management Science*, 42(6), 926-938.

Knez, P., Litterman, R., Scheinkman, J. (1994). Explorations into factors explaining money market returns. *The Journal of Finance*, 49(5), 1861-1882.

Langetieg, T. (1980). A multivariate model of the term structure. *The Journal of Finance*, 35(1), 71-97.

Lefort, F., Walker, E. (2000). Caracterización de la estructura de tasas de interés reales en Chile. *Economía Chilena*, 3(2), 31-52.

Lesmond, D., Ogden, J., Trzcinka, C. (1999). A new estimate of transaction costs. *Review of Financial Studies*, 12(5), 1113-1141.

Litterman, R., Scheinkman, J. (1991). Common factors affecting bond returns. *Journal of Fixed Income*, 1(1), 54-61.

Longstaff, F., Schwartz, E. (1992). Interest rate volatility and the term structure: a two-factor general equilibrium model. *The Journal of Finance*, 47(4), 1259-1282.

McCulloch, J. (1971). Measuring the term structure of interest rates. *The Journal of Business*, 44(1), 19-31.

Melick, W., Thomas, C. (1997). Recovering an asset's implied PDF from option prices: an application to crude oil during the gulf crisis. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 32(1), 91-115.

Merton, R. (1973). Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1), 141-183.

Molinare, A. (2002). Estructura y dinámica de tasas de interés reales en Chile: información contenida en los pagarés reajustables con pagos en cupones del Banco Central. *Magister en Ciencias de la Ingeniería, Pontificia Universidad Católica de Chile*.

Moral, M. (2006). Estimación de spreads por liquidez en un mercado con pocas transacciones: el caso del mercado de bonos del Banco Central de Chile. *Magister en Ciencias de la Ingeniería, Pontificia Universidad Católica de Chile*.

Nelson, C., Siegel, A. (1987). Parsimonious modeling of yield curves. *The Journal of Business*, 60(4), 473-489.

Parisi, F. (1998). Tasas de interés nominal de corto plazo en Chile: una comparación empírica de sus modelos. *Cuadernos de Economía*, 35(105), 161-182.

Parisi, F. (1999). Predicción de tasas de interés nominal de corto plazo en Chile: modelos complejos versus modelos ingenuos. *Economía Chilena*, 2(3), 27-40.

Piazzesi, M. (2003). Affine term structure models. *Handbook of Financial Econometrics*.

Rubinstein, M. (1994). Implied binomial trees. *The Journal of Finance*, 49(3), 771-818.

Svensson, L. (1995). Estimating forward interest rates with the extended Nelson & Siegel method. *Sveriges Riksbank Quarterly Review*, 3, 13-26.

Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5(2), 177-188.

Waggoner, D. (1997). Spline methods for extracting interest rate curves from coupon bond prices. *Federal Reserve Bank of Atlanta*, 1-23.

Yan, H. (2001). Dynamic models of the term structure. *Financial Analysts Journal*, 57(3), 60-76.

Zero-coupon yield curves: Technical documentation. (2005). *BIS Papers*, 25. (Bank for International Settlements)

Zhu, C., Byrd, R., Nocedal, J. (1997). L-BFGS-B: Algorithm 778: L-BFGS-B, FORTRAN routines for large scale bound constrained optimization. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 23(4), 550-560.

Zuñiga, S. (1999a). Estimando un modelo de 2 factores del tipo "exponential-affine" para la tasa de interés chilena. *Revista de Análisis Económico*, 14(2), 117-133.

Zuñiga, S. (1999b). Modelos de tasas de interés en Chile: una revisión. *Cuadernos de Economía*, 36(108), 875-893.

Zuñiga, S., Soria, K. (1998). Estimación de la estructura temporal de tasas de interés Chile. *Estudios de Administracion*, 6, 25-50.

ANEXOS

ANEXO A. MÉTODOS DE ESTIMACIÓN UTILIZADOS POR LOS BANCOS CENTRALES

En los mercados de países desarrollados se utilizan modelos estáticos para la estimación de la estructura de tasas de interés. En “Zero-coupon yield curves: Technical documentation” (2005) se muestran los distintos métodos que emplean los bancos centrales más importantes del mundo. En la tabla A.1 se detalla el modelo usado y la expresión que se utiliza para minimizar el error.

TABLA A.1. Métodos de estimación de tasas de interés utilizados por los bancos centrales más importantes del mundo.

Banco Central	Método Estimación	Error Minimizado
Bélgica	Svensson o Nelson-Siegel	Precios Ponderados
Canadá	Merril Lynch Exponential Spline	Precios Ponderados
Finlandia	Nelson-Siegel	Precios Ponderados
Francia	Svensson o Nelson-Siegel	Precios Ponderados
Alemania	Svensson	Tasas
Italia	Nelson-Siegel	Precios Ponderados
Japón	Smoothing Splines	Precios
Noruega	Svensson	Tasas
España	Svensson	Precios Ponderados
Suecia	Smoothing Splines y Svensson	Tasas
Suiza	Svensson	Tasas
Gran Bretaña	VRP ^a	Tasas
EE.UU.	Smoothing Splines (dos curvas)	Precios

^aVRP: *variable roughness penalty*

ANEXO B. DEFINICIONES Y NOTACIONES BÁSICAS DE LAS TASAS DE INTERÉS

Sea $P(t, T)$ el valor en t de un bono que paga \$1 en el tiempo T y $R(t, T)$ la tasa compuesta continua correspondiente a ese periodo. Por definición se debe cumplir la siguiente igualdad:

$$P(t, T) = \exp \{-R(t, T)(T - t)\} \quad (\text{B.1})$$

La tasa $R(t, T)$ se denomina la tasa *spot* de madurez T . En el caso particular de $R(t, T)$ con $T \rightarrow t$, la tasa se denomina tasa instantánea de corto plazo o *short-rate*.

$$r(t) = \lim_{T \rightarrow t} R(t, T) \quad (\text{B.2})$$

La tasa *forward* $f(t, T, \tau)$ es el interés que se puede acordar en t para el periodo futuro comprendido por T y $T + \tau$. Conociendo los precios en t de bonos con estos plazos, la tasa *forward* compuesta continua se puede calcular como:

$$f(t, T, \tau) = -\frac{\ln [P(t, T + \tau)] - \ln [P(t, T)]}{\tau} \quad (\text{B.3})$$

Para el caso en que $\tau \rightarrow 0$, la tasa *forward* instantánea $f(t, T)$ es:

$$f(t, T) = -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T} \quad (\text{B.4})$$

A partir de la ecuación anterior, se puede inferir que el precio del bono de descuento $P(t, T)$ está relacionado con la estructura de tasas *forwards* a través de la siguiente expresión:

$$P(t, T) = \exp \left\{ -\int_t^T f(t, s) ds \right\} \quad (\text{B.5})$$

ANEXO C. CÁLCULO PREMIO POR RIESGO A TRAVÉS DE ARGUMENTOS DE NO ARBITRAJE

Sea un modelo básico de un factor que representa la tasa de interés instantánea y que sigue el siguiente proceso estocástico general:

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW(t) \quad (C.1)$$

Para obtener el proceso que sigue un activo contingente $V(t, T, r(t))$, que depende de la tasa instantánea, se utiliza el lema de **Itô**:

$$dV(t) = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}(dr)^2 \quad (C.2)$$

Agrupando términos y dividiendo ambos lados de la ecuación por $V(t)$, se deriva el proceso que sigue el retorno instantáneo del activo contingente.

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = \frac{1}{V(t)} \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \mu_r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\sigma_r^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right] dt + \frac{1}{V(t)} \sigma_r \frac{\partial V}{\partial r} \quad (C.3)$$

Se consideran ahora dos activos derivados V_1 y V_2 con madurez T_1 y T_2 respectivamente. El proceso que describe el precio de un portafolio compuesto por x_1 unidades de $V(t, T_1, r(t))$ y x_2 de $V(t, T_2, r(t))$ esta dado por:

$$P(t) = x_1 V_1(t) + x_2 V_2(t) \quad (C.4)$$

Como fue demostrado anteriormente, cada uno de estos activos sigue un proceso de la siguiente forma:

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = \mu_V()dt + \sigma_V()dW(t) \quad (C.5)$$

Por lo tanto, las variaciones del portafolio se pueden expresar como:

$$P(t) = (x_1\mu_{V_1} + x_2\mu_{v_2}) dt + (x_1\sigma_{V_1} + x_2\sigma_{v_2}) dW(t) \quad (C.6)$$

De acuerdo a las condiciones de no arbitraje, ningún activo o portafolio que tenga una volatilidad igual a cero puede generar un retorno mayor que la tasa libre de riesgo. Si esto no se cumpliera, un inversionista podría endeudarse a la tasa libre de riesgo y comprar el activo o portafolio, realizando una ganancia sin estar sometido a ningún tipo de incertidumbre. De esta forma, si se fuerza que la volatilidad del proceso del portafolio sea nula, entonces se debe cumplir que:

$$x_1\sigma_{V_1} + x_2\sigma_{v_2} = 0 \quad (C.7)$$

$$x_1\mu_{V_1} + x_2\mu_{v_2} = r(t) \quad (C.8)$$

Lo que da como resultado que se debe satisfacer la siguiente expresión:

$$\frac{\mu_{V_1}() - r(t)}{\sigma_{V_1}} = \frac{\mu_{V_2}() - r(t)}{\sigma_{V_2}} \quad (C.9)$$

Como esta relación se cumple para cualquier par de plazos T_1 y T_2 , entonces el premio por unidad de riesgo es constante para todos los instrumentos.

$$\frac{\mu_V(t, T, r(t)) - r(t)}{\sigma_V(t, T, r(t))} = \lambda(r(t), t) \quad (C.10)$$

El término $\lambda(r(t), t)$ se denomina el premio de mercado por riesgo.

ANEXO D. RECUPERACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADES AJUSTADA POR RIESGO A PARTIR DE LOS PRECIOS DE OPCIONES

La introducción de los modelos dinámicos hicieron posible la valorización de activos derivados como las opciones. La metodología consiste, tal como fue mencionado anteriormente, en asumir un proceso estocástico que modele el movimiento del activo subyacente. Para este fin tradicionalmente se ha utilizado el movimiento **Browniano** geométrico. Luego se plantea el proceso ajustado por riesgo al definir un precio de mercado del riesgo. Finalmente los parámetros del modelo son estimados de manera de hacer consiste, bajo distintas métricas, la distribución de probabilidades generada por el proceso con las observaciones. Este enfoque llevó a la formulación de la famosa expresión de Black y Scholes (1973) para la valorización de opciones.

Estos métodos se caracterizan por ser paramétricos en cuanto se asume una forma para la distribución de probabilidades neutral al riesgo (habitualmente lognormal) y se ajustan los parámetros haciendo coincidir los momentos de la distribución con los precios observados en el mercado.

Es un hecho reconocido en la literatura financiera que luego del desplome de la bolsa norteamericana del 19 de Octubre de 1987, las volatilidades implícitas del modelo Black y Scholes (1973) para opciones sobre índices accionarios han adquirido una forma de *U* (*smile effect*). Esto hecho sólo puede ser explicado por una mayor consideración por parte de los inversionistas de estos eventos extremos, los cuales bajo el esquema lognormal tienen una probabilidad de ocurrencia extremadamente baja. Por otro lado, los precios de las opciones sugieren la presencia de asimetría y curtosis (Corrado y Su, 1996).

Los investigadores se concentraron por tanto en desarrollar nuevos modelos de valorización de opciones que sean compatibles con estas evidencias empíricas. Debido al impresionante aumento en el número de activos derivados que se comenzaron a transar en las bolsas y en los mercados *OTC*, algunos autores trataron de relacionar los precios observados de opciones con el proceso estocástico ajustado por riesgo del activo

subyacente. En estos intentos por obtener la distribución de probabilidades neutral al riesgo implícita en las opciones, se pueden distinguir dos enfoques: métodos paramétricos y no-paramétricos.

Los métodos paramétricos buscan aumentar la flexibilidad de la distribución de probabilidades al aumentar el número de parámetros que la determinan. Existen diversas formas de llevar a cabo esta tarea. En primer lugar se destacan los métodos que utilizan en su formulación distribuciones más generalizadas o que generan nuevas a partir de la combinación de distribuciones básicas (Bookstaber y McDonald, 1987; Melick y Thomas, 1997). También se pueden mencionar los llamados métodos de expansión que incluyen términos de corrección a la distribución lognormal inicial de manera de hacerla más flexible (Jarrow y Rudd, 1981; Abken, Madan, y Ramamurtie, 1996; Jondeau y Rockinger, 2000).

Muchas veces no se tiene un entendimiento cabal de la dinámica de los activos, por lo que si se asumen restricciones paramétricas en las distribuciones de probabilidad pueden cometerse graves errores de especificación. Los métodos no-paramétricos aumentan la flexibilidad de la estimación al derivar la forma completa de la distribución de probabilidades a partir de los precios de los activos subyacentes y las opciones. Dentro de esta familia se pueden distinguir principalmente dos maneras de llevar a cabo esta tarea.

La primera alternativa modifica una distribución de probabilidades inicial que puede obtenerse de un modelo dinámico clásico, de manera de que las nuevas probabilidades sean consistentes con los precios de los activos y las opciones observados en el mercado. Esta deformación de la distribución de probabilidades se realiza minimizando una función objetivo que se selecciona de acuerdo a los requerimientos y características del problema (Rubinstein, 1994; Adams y Van Deventer, 1994; Jackwerth y Rubinstein, 1996; Avellaneda et al., 1997).

Si se desea que la nueva distribución mantenga alguna de las características de la distribución inicial, se utiliza una función objetivo que mida la diferencia de probabilidad

entre ambas. Para ello se han propuesto distintas formas funcionales: suma de las diferencias cuadráticas, suma de las diferencias absolutas y la función de mínima entropía.

$$\sum_{i=1}^{\nu} (P_i - P_i^*)^2 \quad (\text{D.1})$$

$$\sum_{i=1}^{\nu} |P_i - P_i^*| \quad (\text{D.2})$$

$$-\sum_{i=1}^{\nu} P_i \log(P_i/P_i^*) \quad (\text{D.3})$$

Bajo condiciones normales las distribuciones de probabilidad obtenidas mediante las distintas funciones objetivos presentan una forma similar. Por lo tanto, la elección de alguna de ellas se debe basar más bien en criterios de convergencia numérica y manejo teórico. Es importante destacar que a mayor número de observaciones disponibles para la recuperación de la distribución de probabilidad implícita en los precios de los activos, menor es la influencia de la distribución inicial sobre el resultado del algoritmo.

Otra posibilidad es obtener la distribución de máxima suavidad (*maximum smoothness*) que cumpla con las restricciones de valorización. En este caso, no es necesaria la especificación de una distribución de probabilidades inicial. La función objetivo a minimizar se puede escribir como:

$$\sum_{i=1}^{\nu} (P_{j-1} - 2P_j + P_{j+1})^2 \quad (\text{D.4})$$

La segunda alternativa consiste en utilizar regresiones no-paramétricas (*nonparametric kernel regressions*) para estimar la función que relaciona los precios de las opciones con algunas variables explicativas. La distribución de probabilidad ajustada por riesgo puede ser obtenida luego calculando la segunda derivada de esta relación con respecto al precio de ejercicio (Ait-Sahalia y Lo, 1998).

ANEXO E. OBTENCIÓN DEL VECTOR DE PROBABILIDADES QUE MINIMIZA ENTROPÍA RELATIVA

El problema dual está dado por:

$$\min_{\lambda} \max_p \left[-D(P|Q) + \sum_{j=1}^N \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{\nu} p_i g_{i,j} - C_j \right) \right] \quad (\text{E.1})$$

Interesa buscar el vector de probabilidades p^* que maximice la expresión anterior para cualquier $\bar{\lambda}$ dado.

$$\zeta(p_i, \bar{\lambda}) = - \sum_{i=1}^{\nu} p_i \ln(p_i) + \sum_{j=1}^N \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{\nu} p_i g_{i,j} - C_j \right) \quad (\text{E.2})$$

Derivando la expresión anterior se obtiene:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial p_i} = -\ln(p_i) + 1 + \sum_j \lambda_j g_{i,j} = 0 \quad (\text{E.3})$$

Por lo tanto, la probabilidad asociada al evento i tiene la forma:

$$p_i^* = \kappa \cdot \exp \left\{ \sum_j^N \lambda_j g_{i,j} \right\} \quad (\text{E.4})$$

Ahora, una función de probabilidad bien definida debe cumplir que la integral o suma de las probabilidades en todo su espacio probabilístico debe ser igual a la unidad.

$$\sum_{i=1}^{\nu} p_i = 1 \quad (\text{E.5})$$

Para cumplir con esta condición, las probabilidades son normalizadas por el factor Z , obteniéndose finalmente.

$$p_i^* = \frac{1}{Z(\lambda)} \exp \left\{ \sum_{j=1}^N \lambda_j g_{ij} \right\} \quad (\text{E.6})$$

$$Z(\lambda) = \sum_{i=1}^{\nu} \exp \left\{ \sum_{j=1}^N \lambda_j g_{ij} \right\} \quad (\text{E.7})$$

Es importante mencionar que el vector de probabilidades obtenido, maximiza la expresión anterior para cualquier λ dado.

ANEXO F. GRADIENTE Y HESSIANO ANALÍTICO DEL PROBLEMA DE MINIMIZACIÓN DE ENTROPÍA RELATIVA

Para obtener mejores resultados en la optimización de la función objetivo es recomendable obtener analíticamente el vector de gradiente y la matriz **Hessiana**. Luego se pueden utilizar algoritmos de optimización en que estos valores son proporcionados por el usuario, aumentando la exactitud en la búsqueda de la solución óptima.

Sea ζ la función objetivo definida en el caso base (restricciones en igualdad) por:

$$\zeta(\lambda) = \ln(Z(\lambda)) - \sum_{j=1}^N \lambda_j C_j \quad (\text{F.1})$$

Al derivar esta expresión por λ_j se obtiene el componente j del vector de gradiente $\nabla = (\frac{\partial \zeta}{\partial \lambda_1} \dots \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda_N})$.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \lambda_j} = \frac{1}{Z(\lambda)} \cdot \frac{\partial Z}{\partial \lambda_j} - C_j \quad (\text{F.2})$$

Desarrollando el primer término de la expresión se obtiene:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \lambda_j} = E^P[g_j] - C_j \quad \forall j = 1 \dots N \quad (\text{F.3})$$

Para obtener el **Hessiano** se deriva la expresión anterior por λ_k .

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} = -\frac{1}{Z^2(\lambda)} \cdot \frac{\partial Z}{\partial \lambda_k} \frac{\partial Z}{\partial \lambda_j} + \frac{1}{Z(\lambda)} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} \quad \forall j, k = 1 \dots N \quad (\text{F.4})$$

Nuevamente desarrollando los términos resultantes se puede demostrar que el componente $h_{j,k}$ de la matriz Hessiana corresponde a:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} = \text{Cov}^P(g_j, g_k) \quad \forall j, k = 1 \dots N \quad (\text{F.5})$$

La obtención del gradiente y el **Hessiano** para los otros problemas planteados se calculan de forma similar. Las expresiones son las siguientes:

- Entropía relativa *trade-off* error cuadrático:

Gradiente

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \lambda_j} = E^P[g_j] - C_j + w_j \lambda_j \quad \forall j = 1 \dots N \quad (\text{F.6})$$

Hessiano

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda_j \partial \lambda_j} = \text{Cov}^P(g_j, g_j) + w_j \quad \forall j = 1 \dots N \quad (\text{F.7})$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} = \text{Cov}^P(g_j, g_k) \quad \forall j \neq k = 1 \dots N \quad (\text{F.8})$$

- Entropía relativa con restricciones de tolerancia

Gradiente

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \alpha_j} = -E^P[g_j] + C_j + A_j \quad \forall j = 1 \dots N \quad (\text{F.9})$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \beta_j} = E^P[g_j] - C_j + B_j \quad \forall j = 1 \dots N \quad (\text{F.10})$$

Hessiano

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k} = \text{Cov}^P(g_j, g_k) \quad \forall i, j = 1 \dots N \quad (\text{F.11})$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \beta_j \partial \beta_k} = \text{Cov}^P(g_j, g_k) \quad \forall i, j = 1 \dots N \quad (\text{F.12})$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \alpha_j \partial \beta_k} = -\text{Cov}^P(g_j, g_k) \quad \forall i, j = 1 \dots N \quad (\text{F.13})$$

ANEXO G. TRANSFORMACIÓN DE LOS RANGOS DE TOLERANCIA: DE PUNTOS BASE A PRECIO

En general, cuando se habla de papeles de renta fija, la diferencia de valorización se expresa en puntos bases de TIR. Sin embargo, el algoritmo desarrollado plantea las restricciones en forma lineal, por lo que los márgenes de tolerancia deben transformarse a rangos de valor presente. Para ello se utiliza la siguiente expresión:

- Cota inferior

$$B_j = \sum_k C_k \exp \{-TIR \times t_k\} - \sum_k C_k \exp \{-(TIR + tol_j) \times t_k\} \quad (G.1)$$

$$= \sum_k C_k \exp \{-TIR \times t_k\} (1 - \exp \{-tol_j \times t_k\}) \quad (G.2)$$

- Cota superior

$$A_j = \sum_k C_k \exp \{-TIR \times t_k\} (\exp \{tol_j \times t_k\} - 1) \quad (G.3)$$

Donde C_k corresponde el cupón que paga el instrumento en t_k . Como es de esperar, la transformación depende de la naturaleza del papel analizado (amortizable, *bullet* o cero cupón).

ANEXO H. ASIGNACIÓN ÓPTIMA DE RECURSOS BAJO ESQUEMA DE EULER

Sea ν el número de simulaciones de **Monte-Carlo** y Δt el paso de discretización. La cantidad de pasos m está directamente relacionada con Δt de acuerdo a $\Delta t = T/m$.

Sea el proceso estocástico $dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$. Se desea estimar $\theta = E[f(X_T)]$ utilizando el esquema de discretización de **Euler**. Se define $\hat{\theta}_\nu^{\Delta t}$ como el estimador de θ cuando se utilizan ν simulaciones y un paso de Δt . Matemáticamente esto se expresa como:

$$\hat{\theta}_\nu^{\Delta t} = \frac{f(\hat{X}_1^{\Delta t}) + \dots + f(\hat{X}_\nu^{\Delta t})}{\nu} \quad (\text{H.1})$$

donde $\hat{X}_i^{\Delta t}$ es el valor de $\hat{X}_T^{\Delta t}$ en el *path* i . Bajo algunas condiciones técnicas sobre el proceso X_t , se conoce que el esquema de **Euler** tiene una convergencia débil de orden uno:

$$|E[f(X_T)] - E[f(\hat{X}_T^{\Delta t})]| \leq \alpha \nu^{-1} \quad (\text{H.2})$$

con α una constante. Si se poseen recursos computacionales limitados iguales a C y cada paso de discretización tiene un costo c , por lo tanto, se tiene que cumplir $\nu = C/mc$. Se desea determinar el valor óptimo de m como una función de C . Para ello se minimiza el error cuadrático medio (MSE), que se deriva de H.2:

$$MSE \approx \frac{\alpha^2}{m^2} + \frac{v}{n} \quad (\text{H.3})$$

donde v es la volatilidad. Sustituyendo ν en la expresión anterior, se puede inferir que los parámetros deben fijarse óptimamente como:

$$m \propto C^{1/3} \nu \propto C^{2/3} \quad (\text{H.4})$$

ANEXO I. PROPIEDADES DE LOS INSTRUMENTOS EMITIDOS POR EL GOBIERNO DE CHILE

Los instrumentos utilizados en esta investigación para el estudio de la metodología de mínima entropía corresponden a los bonos emitidos por el Banco Central de Chile y la Tesorería General de la República. Para una mejor comprensión de los alcances del algoritmo, es importante conocer en mayor profundidad las características de los bonos. Estos se pueden clasificar de acuerdo a sus propiedades en dos tipos:

- Bonos *bullet*: dentro de esta categoría se pueden nombrar los bonos BCP, BTP, BCU y BTU. Estos instrumentos pagan los intereses en cupones semestrales y el capital nominal en la fecha de madurez. Su estructura de pagos se puede observar en la siguiente figura.

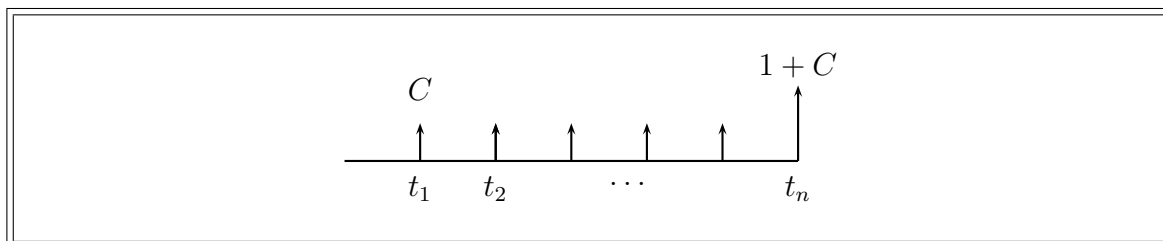


FIGURA I.1. Estructura de pago de un bono *bullet*.

La magnitud del cupón está en directa relación con la tasa de emisión del instrumento, la que es una característica propia del bono. Esta información, junto con el plazo de madurez, puede ser obtenida directamente del nemotécnico. Como ejemplo se deriva la información del bono BCU0500120.

Tasa de emisión	
BCU	050 0120
Tipo	Fecha de vencimiento

En este caso, el instrumento considerado es un BCU con tasa de emisión del 5.0% anual y con fecha de vencimiento 01/01/2020. El pago del interés semestral se realiza mediante cupones de $5.0\%/2 = 2.5\%$.

- Bonos amortizables: sólo caen dentro de esta categoría los bonos PRC. Su principal característica es que paga en cupones iguales, por lo que en cada flujo de caja, además de cancelar los intereses, se amortiza parte del capital insoluto. La forma de su estructura de pagos se aprecia en la siguiente figura.

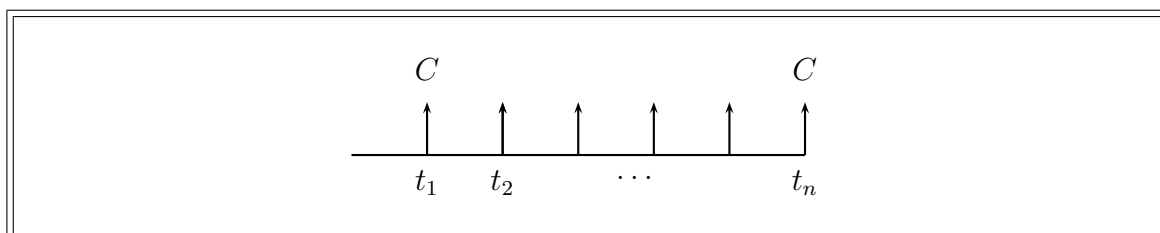


FIGURA I.2. Estructura de pago de un bono amortizable.

Al igual que en el caso anterior, el nemotécnico contiene toda las características relevantes del instrumento.

Tipo Fecha emisión
 $\underbrace{\text{PRC}}_{\text{Tipo}} - \underbrace{4}_{\text{Plazo}} \underbrace{D}_{\text{Corte}} \underbrace{0100}_{\text{Fecha emisión}}$

Para determinar la fecha de vencimiento del instrumento, se debe combinar la información de la fecha de emisión con el número de cupones, que se desprende del plazo a través de la siguiente tabla:

TABLA I.1. Características derivadas del nemotécnico en bonos PRC.

Plazo	N° cupones	Tasa emisión
1	20	6,5%
2	8	5,0%
3	12	5,0%
4	16	6,5%
5	24	6,5%
6	28	6,5%
7	40	6,5%

ANEXO J. EJEMPLO 2: GRÁFICOS DE LAS ESTRUCTURAS DE RENDIMIENTO DE PAPELES BCU/BTU

A continuación se presentan las figuras de las estructuras de tasas de interés resultantes de la metodología del ejemplo 2 para los mismo días considerados en el cuerpo del informe.

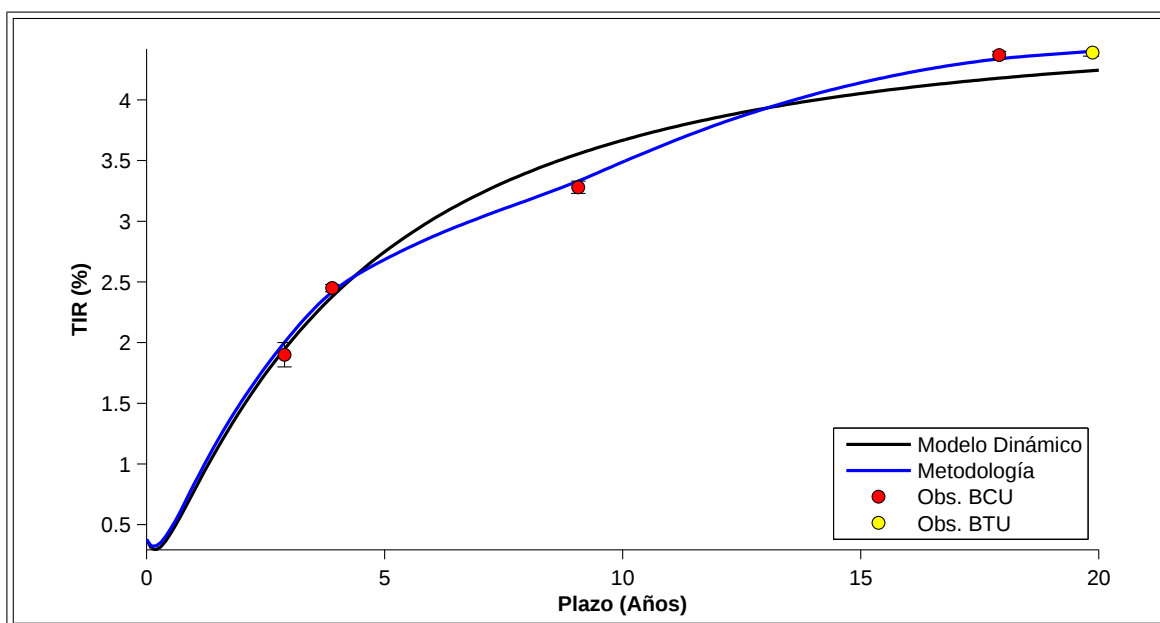


FIGURA J.1. Ejemplo 2: Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU para el día 08/10/2004.

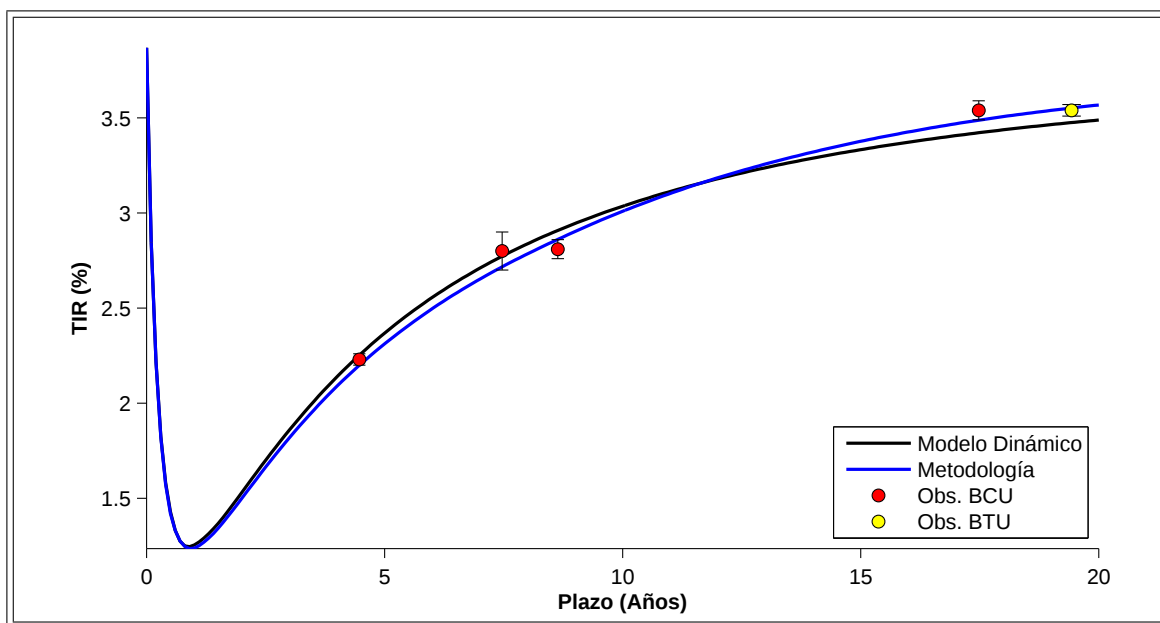


FIGURA J.2. Ejemplo 2: Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU para el día 15/03/2005.

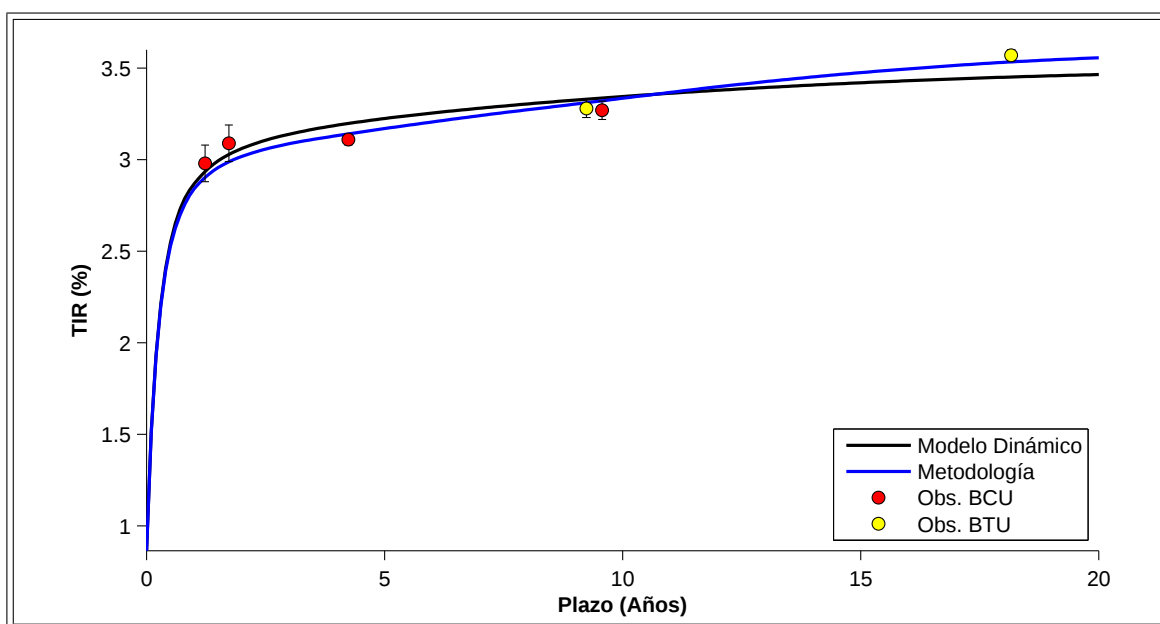


FIGURA J.3. Ejemplo 2: Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU para el día 08/06/2006.

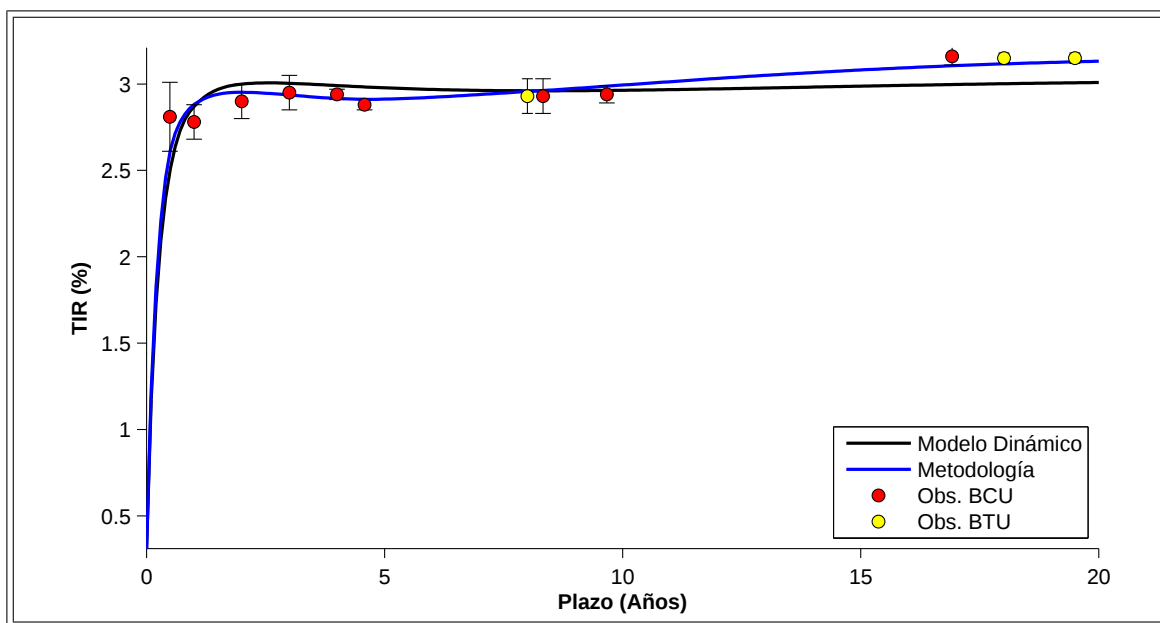


FIGURA J.4. Ejemplo 2: Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU para el día 03/09/2007.

ANEXO K. EFECTOS EN TÉRMINOS DE ERROR DE LA AGRUPACIÓN DE TRANSACCIONES

Tal como se mencionó en el cuerpo de este trabajo, uno de los pasos importantes de la metodología consiste en la agrupación de las transacciones por plazo remanente. Es interesante entonces poder cuantificar el error asociado a esta acción. Para ello se utilizan las mismas curvas generadas por el modelo MDA con observaciones agrupadas, pero luego se calculan los errores y sesgos promedios utilizando todas las transacciones disponibles. Este ejercicio se realiza para los mismos ejemplos anteriores. Luego estos valores pueden ser comparados con los nuevos resultados y así dimensionar el efecto de la agrupación.

TABLA K.1. Ejemplo 1: Error absoluto medio y sesgo de las observaciones con respecto a metodología y modelo dinámico. Sin agrupación de transacciones. Periodo 2003-2007.

Plazo	MAE MDA	Sesgo MDA	MAE MD	Sesgo MD
0	18,27	2,45	29,46	12,51
1	10,74	4,58	14,64	7,99
2	6,70	-0,62	8,01	-1,31
3	6,74	4,40	12,76	10,66
4	4,15	1,16	12,80	7,81
5	2,89	-1,87	8,87	-2,89
6	5,66	5,41	5,85	2,87
7	5,82	5,19	9,16	7,39
8	5,53	2,48	9,57	7,59
9	3,86	0,16	8,93	6,83
10	4,02	-3,08	5,01	0,82
15	5,00	5,00	10,52	10,52
16	4,45	4,40	8,52	8,49
17	3,76	3,70	10,65	10,52
18	2,31	1,58	12,73	12,41
19	2,43	0,92	21,46	20,20
20	2,56	-0,12	22,22	21,07
Total	4,75	1,54	11,98	8,12

Como era de esperar, los resultados muestran un aumento marginal (alrededor de un 10%) en el error absoluto medio para tanto la metodología MDA como para el modelo dinámico con respecto a los cálculos obtenidos con las transacciones agrupadas (tablas 6.13, 6.14, 6.16, 6.17, 6.20 y 6.21). Es importante destacar que mientras menor es el plazo remanente, mayor es el incremento del error. Esto se explica por la mayor pendiente y convexidad que existe normalmente en el corto plazo.

TABLA K.2. Ejemplo 1: Error absoluto medio y sesgo de las observaciones con respecto a metodología y modelo dinámico. Sin agrupación de transacciones. Periodo 2006-2007.

Plazo	MAE MDA	Sesgo MDA	MAE MD	Sesgo MD
0	18,27	2,45	29,46	12,51
1	10,74	4,58	14,64	7,99
2	6,40	0,80	7,34	0,25
3	6,29	5,02	6,07	3,30
4	2,55	-0,62	6,82	-3,60
5	2,56	-1,71	8,43	-7,73
6	5,66	5,41	5,85	2,87
7	4,79	3,84	4,76	1,99
8	4,33	2,01	5,22	1,89
9	2,86	-0,74	3,16	-0,98
10	3,57	-2,79	3,39	-1,62
15	5,00	5,00	10,52	10,52
16	4,45	4,40	8,52	8,49
17	3,53	3,50	8,11	8,00
18	2,11	1,10	5,94	5,56
19	2,08	-0,69	5,28	2,00
20	2,26	-1,12	6,00	4,20
Total	4,68	1,54	7,43	2,16

TABLA K.3. Ejemplo 2: Error absoluto medio y sesgo de las observaciones con respecto a metodología y modelo dinámico. Sin agrupación de transacciones. Periodo 2003-2007.

Plazo	MAE MDA	Sesgo MDA	MAE MD	Sesgo MD
0	13,22	-2,92	17,42	0,35
1	10,93	5,56	14,69	9,16
2	6,66	2,57	7,24	2,90
3	7,17	4,47	7,36	5,54
4	3,96	0,97	7,46	0,09
5	2,90	-2,32	9,55	-9,23
6	5,25	4,93	4,60	1,05
7	4,73	3,62	4,15	-0,16
8	5,82	1,61	5,79	-2,32
9	4,10	-1,72	7,12	-5,91
10	4,47	-4,20	8,47	-8,13
15	4,98	4,98	9,37	9,37
16	4,31	4,26	7,54	7,42
17	3,67	3,59	7,50	7,30
18	2,30	1,52	6,20	5,63
19	2,25	0,99	6,54	5,43
20	2,42	-0,14	6,61	5,20
Total	4,68	1,22	7,58	0,74

TABLA K.4. Ejemplo 2: Error absoluto medio y sesgo de las observaciones con respecto a metodología y modelo dinámico. Sin agrupación de transacciones. Periodo 2006-2007.

Plazo	MAE MDA	Sesgo MDA	MAE MD	Sesgo MD
0	13,22	-2,92	17,42	0,35
1	10,93	5,56	14,69	9,16
2	6,46	3,37	7,08	2,57
3	6,70	5,63	5,34	2,82
4	2,49	-0,89	6,48	-5,52
5	2,57	-1,79	9,02	-8,71
6	5,25	4,93	4,60	1,05
7	3,99	2,57	3,21	-0,67
8	4,15	1,66	3,27	-1,65
9	3,38	-2,56	4,78	-4,36
10	4,11	-3,81	6,60	-6,42
15	4,98	4,98	9,37	9,37
16	4,31	4,26	7,54	7,42
17	3,48	3,46	7,08	6,96
18	2,16	1,18	5,26	4,91
19	1,70	0,05	4,05	3,09
20	2,07	-0,72	4,55	3,41
Total	4,59	1,43	6,88	0,76

TABLA K.5. Ejemplo 3: Error absoluto medio y sesgo de las observaciones con respecto a metodología y modelo dinámico. Sin agrupación de transacciones. Periodo 2003-2007.

Plazo	MAE MDA	Sesgo MDA	MAE MD	Sesgo MD
0	15,03	-3,59	29,46	12,51
1	11,24	4,36	14,64	7,99
2	6,77	-0,79	8,01	-1,31
3	6,84	3,77	12,76	10,66
4	4,23	0,63	12,80	7,81
5	3,40	-2,58	8,87	-2,89
6	6,99	4,30	5,85	2,87
7	6,20	4,27	9,16	7,39
8	5,95	1,42	9,57	7,59
9	4,26	-0,73	8,93	6,83
10	4,07	-3,43	5,01	0,82
15	5,01	5,01	10,52	10,52
16	4,52	4,21	8,52	8,49
17	3,72	3,50	10,65	10,52
18	2,97	0,68	12,73	12,41
19	2,33	0,44	21,46	20,20
20	2,44	-1,27	22,22	21,07
Total	4,96	0,84	11,98	8,12

TABLA K.6. Ejemplo 3: Error absoluto medio y sesgo de las observaciones con respecto a metodología y modelo dinámico. Sin agrupación de transacciones. Periodo 2006-2007.

Plazo	MAE MDA	Sesgo MDA	MAE MD	Sesgo MD
0	15,03	-3,59	29,46	12,51
1	11,24	4,36	14,64	7,99
2	6,47	0,64	7,34	0,25
3	6,75	4,24	6,07	3,30
4	3,31	-1,40	6,82	-3,60
5	3,52	-2,55	8,43	-7,73
6	6,99	4,30	5,85	2,87
7	5,89	2,69	4,76	1,99
8	5,62	0,22	5,22	1,89
9	3,72	-1,51	3,16	-0,98
10	3,69	-2,97	3,39	-1,62
15	5,01	5,01	10,52	10,52
16	4,52	4,21	8,52	8,49
17	3,54	3,39	8,11	8,00
18	3,10	-0,04	5,94	5,56
19	2,18	-0,65	5,28	2,00
20	2,31	-1,64	6,00	4,20
Total	5,21	0,77	7,43	2,16

Sin embargo, los efectos positivos de la agrupación de transacciones contrarrestan esta posible desventaja. En primer lugar, esta ayuda a disminuir la complejidad de la optimización y por lo tanto, reduce los tiempos de ejecución del algoritmo. Por otro lado contribuye a disminuir las oscilaciones presentes en la estructura de tasas, sobre todo en los casos de márgenes de tolerancia estrechos.

ANEXO L. ANÁLISIS DEL EFECTO DEL ALGORITMO SOBRE OBSERVACIONES FUERA DE MUESTRA

Para realizar un análisis más detallado del comportamiento de la calibración por mínima entropía, es necesario determinar el efecto que tiene el algoritmo sobre la valorización de instrumentos que no son ingresados al proceso de calibración. Para ello, se aplica la metodología con restricciones en igualdad sólo para los papeles más líquidos del mercado BCU/BTU, los que corresponden a los plazos BCU-4 y BCU-5. Este ejercicio, sin lugar a dudas, corresponde a uno de los casos más difíciles, ya que el algoritmo en su afán por valorizar perfectamente los papeles de mediano plazo, puede incurrir en importantes errores en el largo plazo

TABLA L.1. Efecto sobre el error y sesgo de las transacciones fuera de muestra. Calibración perfecta para plazos 4 y 5 años. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2006-2007.

Plazo	MAE MDA	Sesgo MDA	MAE MD	Sesgo MD
0	16,03	1,00	17,42	0,35
1	14,12	8,76	11,71	6,70
2	10,57	5,60	7,28	2,64
3	9,04	7,77	5,34	2,82
4	0,06	0,04	6,48	-5,52
5	0,13	-0,05	9,02	-8,71
6	8,70	8,18	4,60	1,05
7	6,16	4,61	3,21	-0,67
8	10,64	7,51	3,27	-1,65
9	4,98	0,04	4,78	-4,36
10	8,37	2,92	6,60	-6,42
15	15,68	14,93	9,37	9,37
16	13,42	12,86	7,54	7,42
17	12,85	12,26	7,04	6,92
18	10,39	9,47	5,14	4,78
19	7,59	7,10	4,05	3,09
20	11,64	10,22	4,55	3,41
Total	8,18	5,80	6,48	0,30

Tal como era de esperar, la tabla L.1 muestra un importante aumento en el error absoluto medio, hecho que, porcentualmente, es mayor en el largo plazo. Se observa también que se cumplen las restricciones de valorización, ya que los instrumentos de cuatro y cinco años plazo poseen un error menor a un punto base promedio.

En la figura L.1 se muestra gráficamente los resultados para un día particular. Se puede apreciar que la estructura generada mantiene, en cierto modo, la forma de la distribución inicial. Cabe destacar que en este caso toda la información del pasado recae exclusivamente en el modelo dinámico. El hecho de que se priorice la valorización perfecta, repercute en un aumento de tanto el error fuera de muestra como de la volatilidad intertemporal de la estructura.

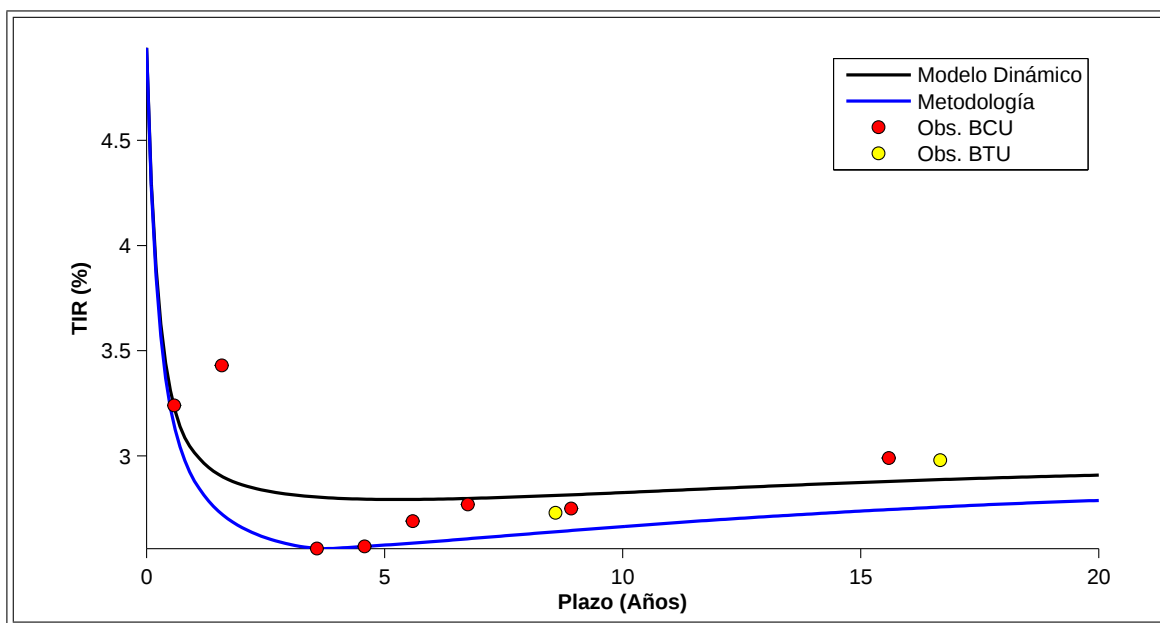


FIGURA L.1. Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU para el día 01/02/2007. Metodología MDA aplicada sólo a papeles BCU-4 y BCU-5. Tolerancia 0 puntos bases.

Se realiza el mismo ejercicio anterior, pero en este caso se aplica la metodología sólo tomando en cuenta las transacciones de largo plazo, esto es, los de plazo remanente entre 18 y 20 años (tabla L.2).

Es evidente que en este ejemplo, el error de valorización aumenta, en promedio, en una mucha menor proporción que en el caso anterior. Se observa que se cumplen las restricciones para los papeles de largo plazo. Es interesante recalcar que el mayor aumento de *MAE* se produce, justamente, en los papeles más líquidos, esto es, de plazo 4 y 5 años. Este hecho puede explicarse por la existencia de un *spread* de liquidez para estos instrumentos, que no es considerado por la metodología.

TABLA L.2. Efecto sobre el error y sesgo de las transacciones fuera de muestra. Calibración perfecta para plazo 18, 19 y 20 años. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2006-2007.

Plazo	MAE MDA	Sesgo MDA	MAE MD	Sesgo MD
0	16,88	0,49	17,42	0,35
1	11,64	5,27	11,71	6,70
2	7,90	-0,10	7,28	2,64
3	6,17	-0,76	5,34	2,82
4	10,33	-9,89	6,48	-5,52
5	12,93	-12,72	9,02	-8,71
6	7,10	-3,65	4,60	1,05
7	6,11	-5,11	3,21	-0,67
8	8,55	-7,99	3,27	-1,65
9	9,37	-9,08	4,78	-4,36
10	13,96	-13,95	6,60	-6,42
15	5,34	4,96	9,37	9,37
16	3,49	2,59	7,54	7,42
17	3,03	2,59	7,04	6,92
18	0,00	0,00	5,14	4,78
19	0,01	0,00	4,05	3,09
20	0,02	0,00	4,55	3,41
Total	7,45	-3,88	6,48	0,30

En la figura L.2, se muestra una ilustración gráfica del ejercicio anterior.

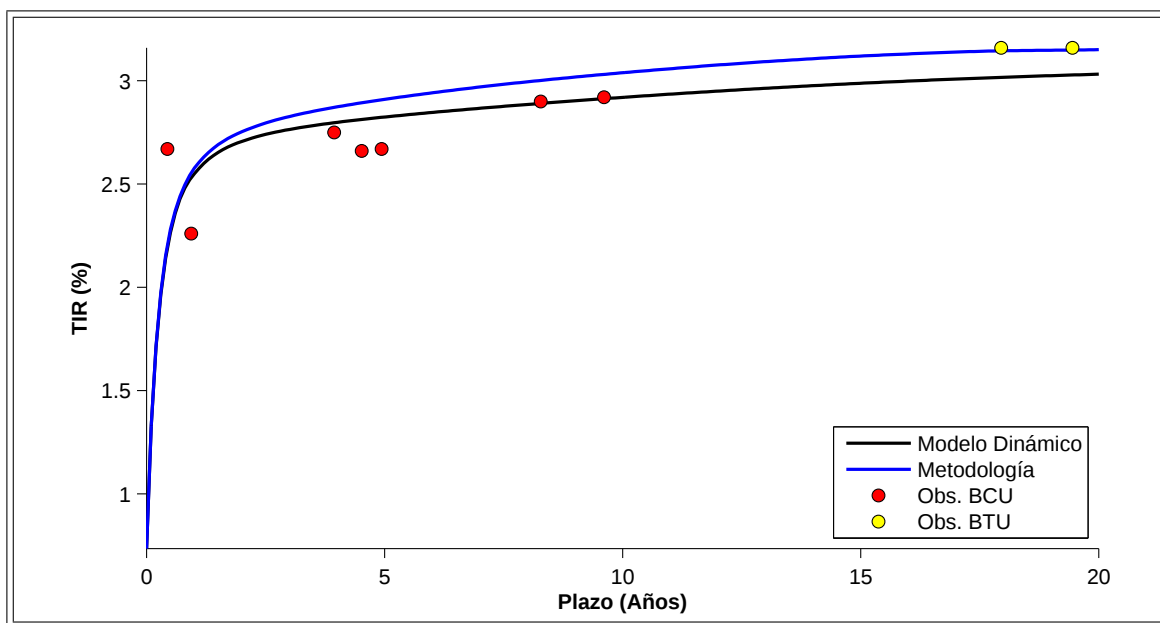


FIGURA L.2. Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU para el día 24/09/2007. Metodología MDA aplicada sólo a papeles BCU-18, BCU-19 y BCU-20. Tolerancia 0 puntos bases.

ANEXO M. COMPARACIÓN DE LA IMPLEMENTACIÓN DEL ALGORITMO CON DISTINTAS TOLERANCIAS

A continuación se muestran los resultados de aplicar la metodología con márgenes de tolerancia iguales para todos los plazos. Esto permite comparar de mejor forma el efecto de ir aumentando o disminuyendo su tamaño.

En las tablas M.1, M.2 y M.3 se detallan los errores absolutos medios y sesgo para el periodo entre el año 2003 y el 2007. En todas ellas se puede observar que el error promedio está por debajo del rango especificado.

TABLA M.1. Error absoluto medio y sesgo de las observaciones con respecto a metodología y modelo dinámico. Tolerancia de 0 puntos bases. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2003-2007.

Plazo	MAE MDA	Sesgo MDA	MAE MD	Sesgo MD
0	1,05	0,09	17,42	0,35
1	0,02	-0,01	11,71	6,70
2	0,29	-0,06	7,30	2,75
3	0,28	0,15	6,94	5,13
4	0,25	0,12	6,65	-0,73
5	0,31	-0,28	9,55	-9,23
6	0,06	0,05	4,60	1,05
7	0,09	0,09	4,15	-0,16
8	0,12	-0,01	5,79	-2,32
9	0,06	-0,01	7,12	-5,91
10	0,06	-0,04	8,47	-8,13
15	0,02	0,01	9,37	9,37
16	0,02	0,00	7,54	7,42
17	0,03	0,01	7,51	7,29
18	0,03	0,00	6,13	5,56
19	0,02	0,00	6,47	5,35
20	0,05	-0,01	6,61	5,20
Total	0,15	0,00	7,21	0,27

También es interesante poder ver gráficamente el comportamiento de la estructura de tasas a medida que se cambian los márgenes de tolerancia. En las figuras, M.1, M.2 y M.3 se muestran los resultados de aplicar la metodología el día 15/03/2005. Los rangos se muestran explícitamente en las figuras, de manera de poder observar fácilmente el cumplimiento de las restricciones.

El ejercicio se repite en las figuras M.4, M.5 y M.6 para el día 02/02/2007.

TABLA M.2. Error absoluto medio y sesgo de las observaciones con respecto a metodología y modelo dinámico. Tolerancia de 5 puntos bases. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2003-2007.

Plazo	MAE MDA	Sesgo MDA	MAE MD	Sesgo MD
0	4,98	-1,31	17,42	0,35
1	4,41	1,39	11,71	6,70
2	4,18	0,89	7,30	2,75
3	4,18	2,61	6,94	5,13
4	4,18	-0,11	6,65	-0,73
5	4,39	-3,92	9,55	-9,23
6	3,31	2,67	4,60	1,05
7	3,72	2,49	4,15	-0,16
8	3,85	0,36	5,79	-2,32
9	4,19	-2,04	7,12	-5,91
10	4,57	-4,45	8,47	-8,13
15	5,04	5,04	9,37	9,37
16	4,36	4,33	7,54	7,42
17	3,84	3,76	7,51	7,29
18	3,14	2,20	6,13	5,56
19	3,28	1,91	6,47	5,35
20	3,43	0,68	6,61	5,20
Total	3,99	0,35	7,21	0,27

TABLA M.3. Error absoluto medio y sesgo de las observaciones con respecto a metodología y modelo dinámico. Tolerancia de 10 puntos bases. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2003-2007.

Plazo	MAE MDA	Sesgo MDA	MAE MD	Sesgo MD
0	7,75	-1,82	17,42	0,35
1	7,31	3,36	11,71	6,70
2	6,37	2,05	7,30	2,75
3	6,07	4,50	6,94	5,13
4	6,40	0,01	6,65	-0,73
5	7,56	-7,21	9,55	-9,23
6	4,26	2,08	4,60	1,05
7	4,03	1,44	4,15	-0,16
8	4,93	-0,43	5,79	-2,32
9	5,85	-4,35	7,12	-5,91
10	7,00	-6,76	8,47	-8,13
15	8,04	8,04	9,37	9,37
16	7,07	6,98	7,54	7,42
17	6,62	6,48	7,51	7,29
18	5,21	4,50	6,13	5,56
19	5,32	4,23	6,47	5,35
20	5,08	3,39	6,61	5,20
Total	6,02	0,52	7,21	0,27

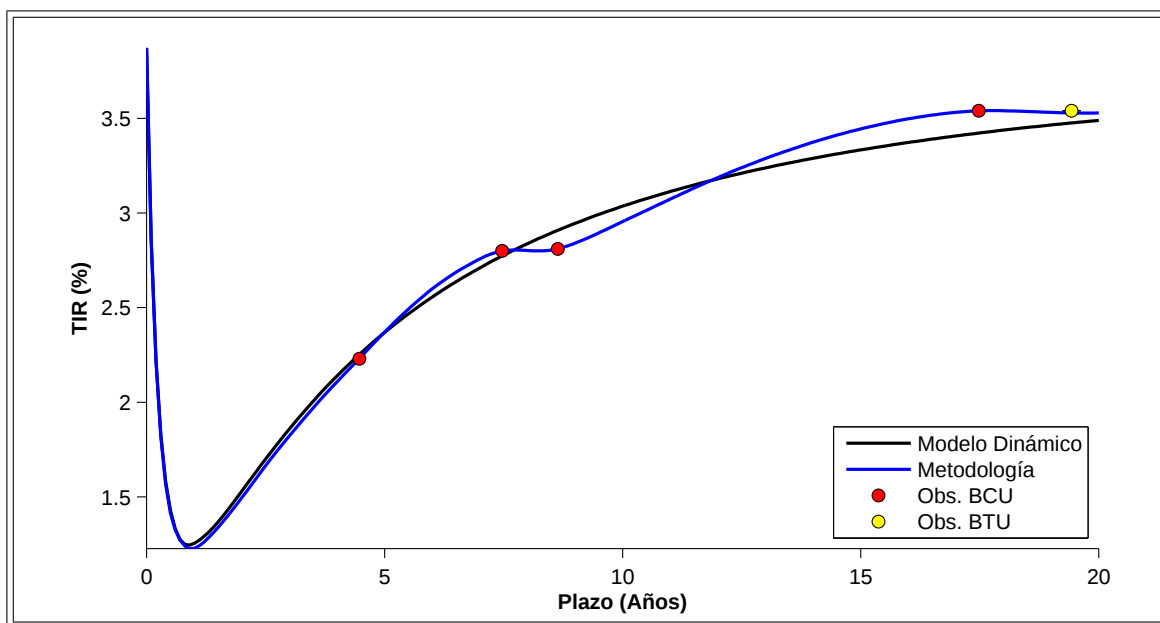


FIGURA M.1. Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU para el día 15/03/2005. Tolerancia de 0 puntos bases.

Finalmente se realiza un análisis para determinar el error máximo de valorización de la metodología. Se ejemplifica con el caso de rangos de tolerancia de cinco puntos bases. En la tabla M.4 se detallan los resultados.

Se puede observar que, en general, el error máximo en los distintos plazos es cercano al valor de los rangos especificados. Las condiciones de **Karush-Kuhn-Tucker** se cumplen en todos los días del periodo estudiado, por lo que el exceso de error por sobre los rangos está relacionado con el proceso de reconstrucción de la curva. Esta explicación se ratifica con el hecho de que las mayores diferencias se observan en el corto plazo, lugar donde la interpolación es más compleja.

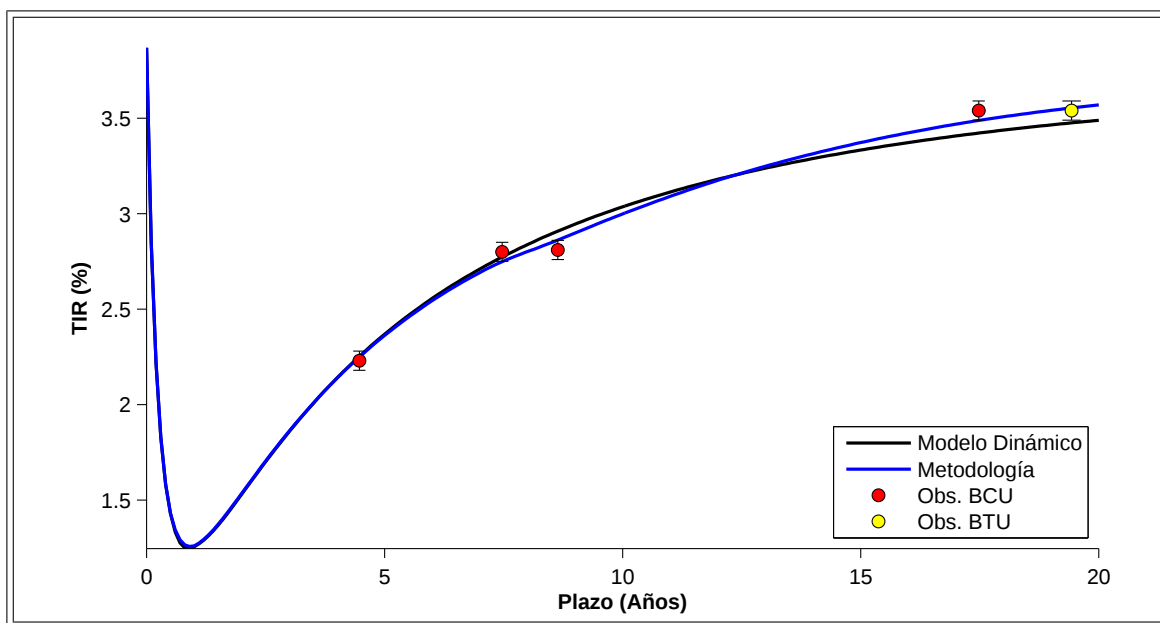


FIGURA M.2. Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU para el día 15/03/2005. Tolerancia de 5 puntos bases.

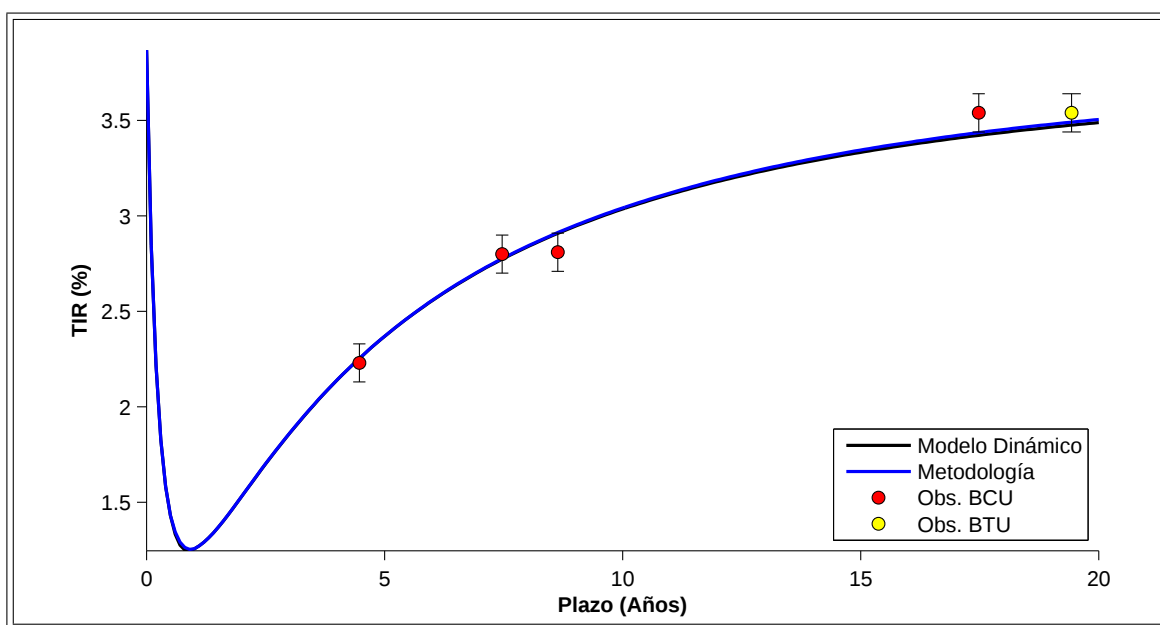


FIGURA M.3. Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU para el día 15/03/2005. Tolerancia de 10 puntos bases.

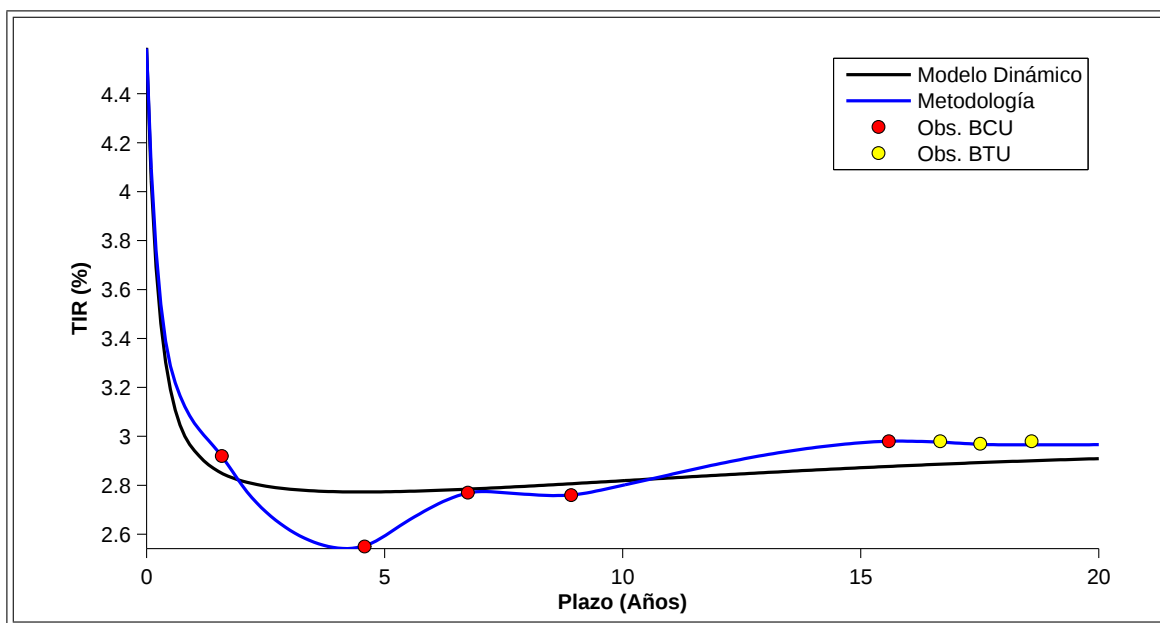


FIGURA M.4. Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU para el día 02/02/2007. Tolerancia de 0 puntos bases.

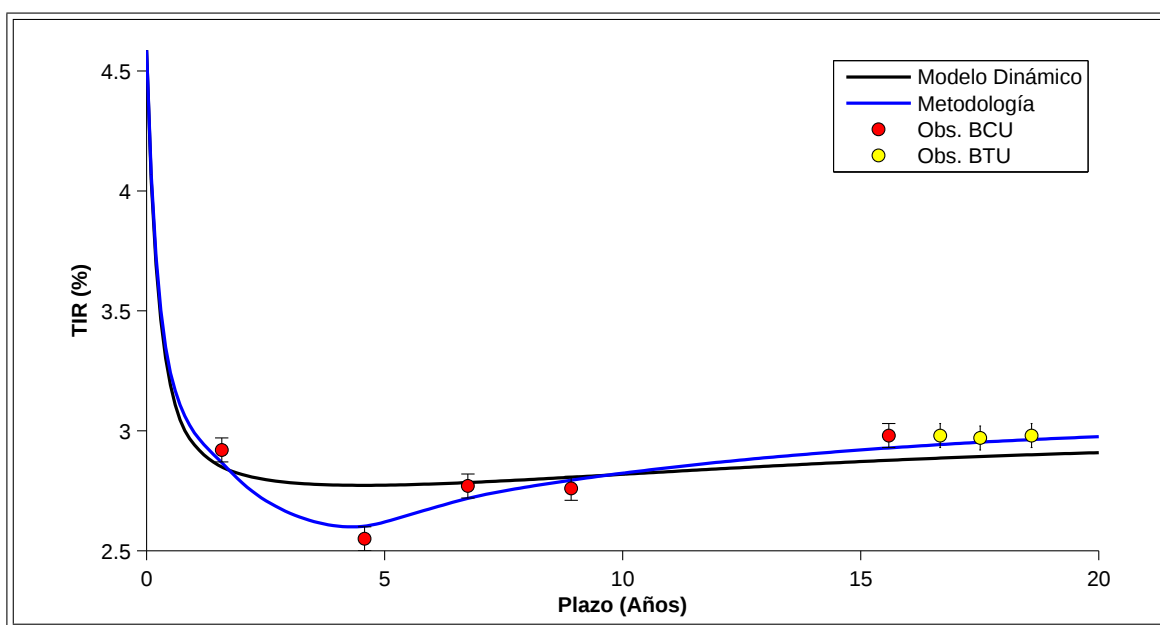


FIGURA M.5. Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU para el día 02/02/2007. Tolerancia de 5 puntos bases.

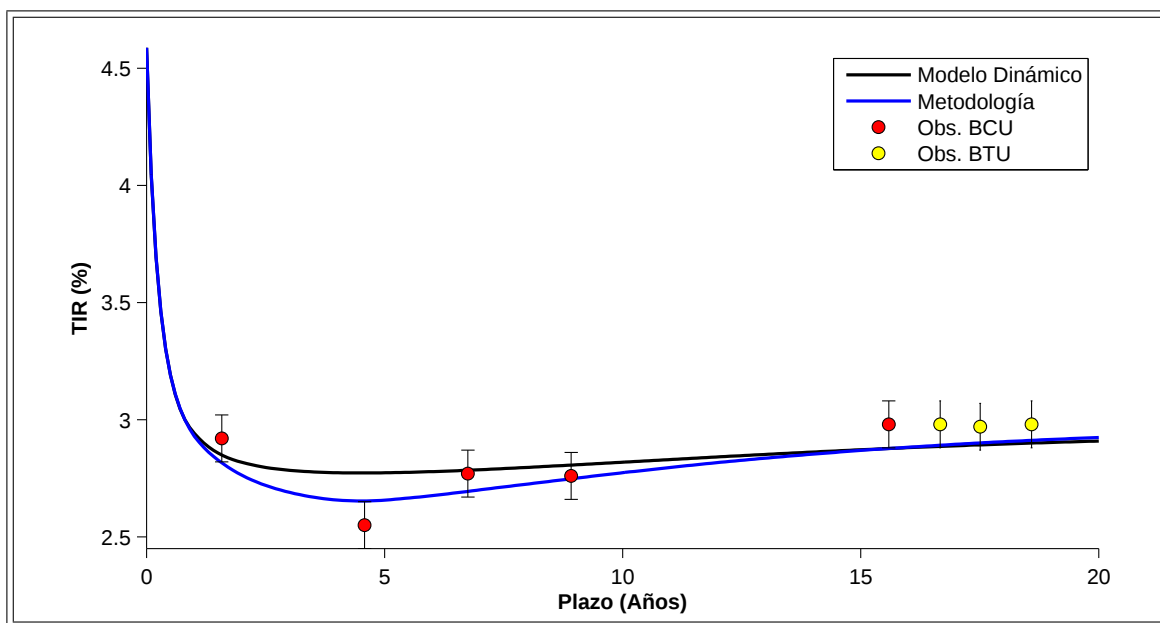


FIGURA M.6. Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU para el día 02/02/2007. Tolerancia de 10 puntos bases.

TABLA M.4. Máximo error de valorización de la metodología y el modelo dinámico. Tolerancia de 5 puntos bases. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2003-2007.

Plazo	MAE MDA	MAE MD
0	9,87	53,72
1	5,22	147,41
2	8,65	52,51
3	7,75	34,03
4	6,57	38,02
5	6,69	35,72
6	5,34	18,21
7	5,57	15,75
8	5,41	29,62
9	5,31	35,46
10	5,29	30,81
15	5,18	19,72
16	5,19	21,79
17	5,23	29,99
18	5,52	25,22
19	5,35	28,95
20	5,29	34,96

ANEXO N. EJEMPLO DE LA IMPLEMENTACIÓN DEL ALGORITMO CON PESOS

Hasta el momento el trabajo se ha centrado en analizar el desempeño del algoritmo con rangos de tolerancia. Sin embargo, también es interesante poder estudiar el comportamiento de la calibración con *trade-off* entre entropía relativa y error de valorización. Para ello se definen distintos casos con pesos w_j iguales para todos los instrumentos.

En las tablas N.1, N.2, N.3 y N.4 se muestran los resultados. Lo primero que salta a la vista es que, como la minimización del error se hace en términos de precio, la estimación de la tasa de los papeles de largo plazo es más cercana. Como es de esperar, a medida que se disminuye el peso w_j , menor es el *MAE*.

TABLA N.1. Error absoluto medio y sesgo de las observaciones con respecto a metodología y modelo dinámico. Algoritmo con peso $w = 0,01$. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2006-2007.

Plazo	MAE MDA	Sesgo MDA	MAE MD	Sesgo MD
0	17,48	1,37	17,42	0,35
1	12,20	7,61	11,71	6,70
2	7,53	4,16	7,28	2,64
3	5,53	4,51	5,34	2,82
4	4,52	-3,19	6,48	-5,52
5	6,39	-5,98	9,02	-8,71
6	3,62	2,53	4,60	1,05
7	2,35	0,83	3,21	-0,67
8	2,60	-0,94	3,27	-1,65
9	3,74	-3,44	4,78	-4,36
10	6,05	-6,05	6,60	-6,42
15	4,12	4,12	9,37	9,37
16	2,68	2,64	7,54	7,42
17	1,99	1,97	7,04	6,92
18	1,48	0,04	5,14	4,78
19	1,52	-0,97	4,05	3,09
20	1,88	-1,28	4,55	3,41
Total	4,73	0,02	6,48	0,30

En las figuras N.1 y N.2, se realiza una comparación gráfica de las distintas estructuras generadas. Se puede observar claramente cómo las curvas se ajustan con mayor precisión a las transacciones a medida que se disminuye el peso w_j .

TABLA N.2. Error absoluto medio y sesgo de las observaciones con respecto a metodología y modelo dinámico. Algoritmo con peso $w = 0,005$. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2006-2007.

Plazo	MAE MDA	Sesgo MDA	MAE MD	Sesgo MD
0	17,76	1,27	17,42	0,35
1	12,02	7,49	11,71	6,70
2	7,31	4,27	7,28	2,64
3	5,43	4,69	5,34	2,82
4	3,94	-2,54	6,48	-5,52
5	5,48	-5,01	9,02	-8,71
6	3,56	3,05	4,60	1,05
7	2,40	1,38	3,21	-0,67
8	2,35	-0,27	3,27	-1,65
9	3,05	-2,74	4,78	-4,36
10	5,27	-5,27	6,60	-6,42
15	3,63	3,63	9,37	9,37
16	2,34	2,30	7,54	7,42
17	1,69	1,65	7,04	6,92
18	1,42	-0,19	5,14	4,78
19	1,57	-1,16	4,05	3,09
20	1,82	-1,41	4,55	3,41
Total	4,40	0,31	6,48	0,30

TABLA N.3. Error absoluto medio y sesgo de las observaciones con respecto a metodología y modelo dinámico. Algoritmo con peso $w = 0,001$. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2006-2007.

Plazo	MAE MDA	Sesgo MDA	MAE MD	Sesgo MD
0	18,51	0,23	17,42	0,35
1	10,35	5,58	11,71	6,70
2	5,61	2,98	7,28	2,64
3	4,45	3,95	5,34	2,82
4	3,10	-1,81	6,48	-5,52
5	4,00	-3,54	9,02	-8,71
6	3,21	3,11	4,60	1,05
7	2,32	1,74	3,21	-0,67
8	1,90	0,51	3,27	-1,65
9	1,74	-1,39	4,78	-4,36
10	3,50	-3,48	6,60	-6,42
15	2,09	2,08	9,37	9,37
16	1,38	1,30	7,54	7,42
17	1,14	1,01	7,04	6,92
18	1,17	-0,30	5,14	4,78
19	1,22	-0,99	4,05	3,09
20	1,16	-0,99	4,55	3,41
Total	3,50	0,40	6,48	0,30

TABLA N.4. Error absoluto medio y sesgo de las observaciones con respecto a metodología y modelo dinámico. Algoritmo con peso $w = 0,0001$. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2006-2007.

Plazo	MAE MDA	Sesgo MDA	MAE MD	Sesgo MD
0	16,62	-1,41	17,42	0,35
1	5,17	1,37	11,71	6,70
2	2,16	0,39	7,28	2,64
3	2,23	1,92	5,34	2,82
4	1,55	-0,59	6,48	-5,52
5	1,91	-1,59	9,02	-8,71
6	1,37	1,34	4,60	1,05
7	0,94	0,69	3,21	-0,67
8	0,87	0,16	3,27	-1,65
9	0,63	-0,27	4,78	-4,36
10	1,07	-1,01	6,60	-6,42
15	0,50	0,46	9,37	9,37
16	0,37	0,18	7,54	7,42
17	0,47	0,34	7,04	6,92
18	0,53	-0,14	5,14	4,78
19	0,39	-0,29	4,05	3,09
20	0,30	-0,18	4,55	3,41
Total	1,72	0,07	6,48	0,30

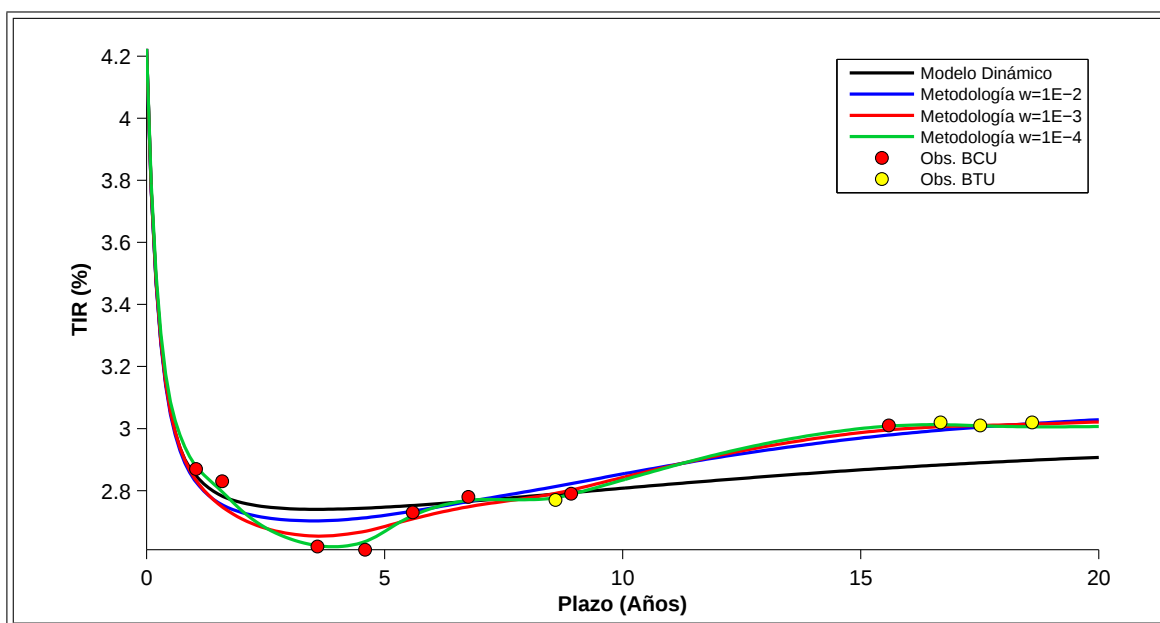


FIGURA N.1. Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU para el día 31/01/2007. Distintos pesos w_j .

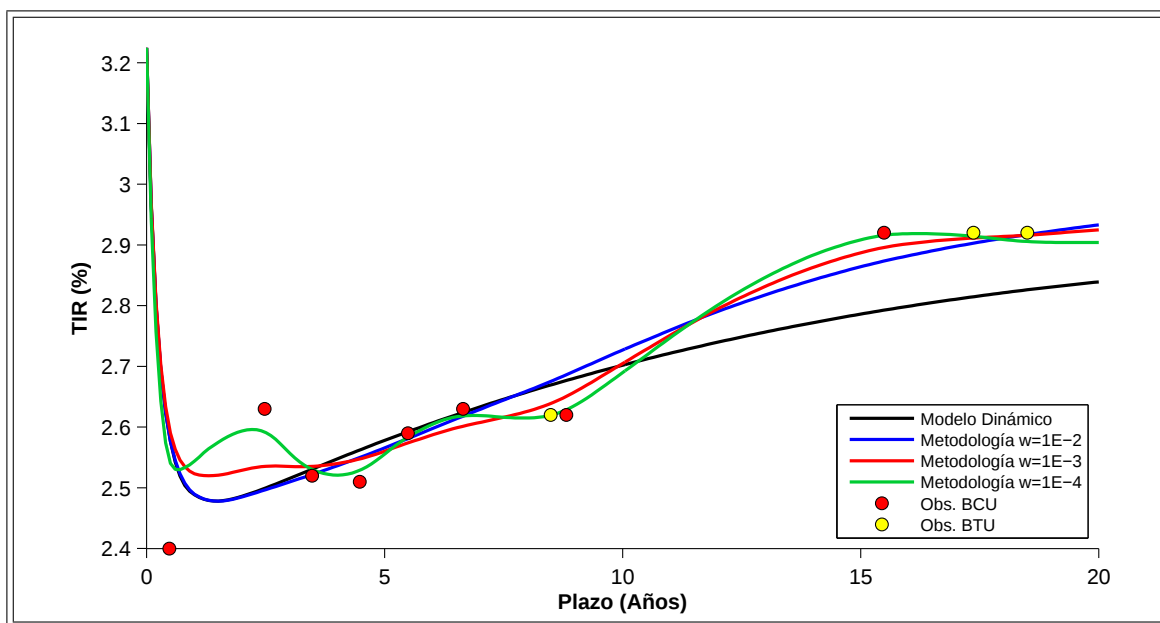


FIGURA N.2. Estructura de rendimiento de papeles BCU/BTU para el día 09/03/2007. Distintos pesos w_j .

ANEXO O. MATRIZ DE CORRELACIÓN DE LOS ÍNDICES DE LIQUIDEZ

En las tablas O.1 y O.2 se detallan las correlaciones de los índices de liquidez por plazo para las familias BCU/BTU y PRC.

TABLA O.1. Matriz de correlación de los índices de liquidez. Instrumentos BCU/BTU. Periodo 2003-2007

Plazo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	16	17	18	19	20
0	1,00																
1	-0,51	1,00															
2	-0,30	-0,35	1,00														
3	0,65	-0,25	-0,45	1,00													
4	0,27	-0,50	0,63	-0,25	1,00												
5	-0,07	0,10	-0,51	0,26	0,07	1,00											
6	-0,84	0,57	0,19	-0,25	0,14	-0,44	1,00										
7	-0,16	0,45	0,16	0,18	0,29	-0,23	0,54	1,00									
8	-0,02	-0,68	0,36	-0,44	0,24	-0,46	-0,66	-0,37	1,00								
9	0,12	0,10	-0,07	0,06	0,20	0,40	0,35	-0,04	-0,68	1,00							
10	-0,57	-0,03	-0,05	-0,53	-0,33	0,69	-0,50	-0,30	0,40	-0,47	1,00						
15	-0,09	-0,60	0,42	-0,14	0,02	-0,35	0,16	-0,96	0,73	-0,08	0,02	1,00					
16	-0,65	0,42	-0,45	0,13	-0,62	0,16	-0,12	-0,16	-0,67	0,12	-0,37	0,00	1,00				
17	0,26	0,46	-0,40	-0,10	-0,68	0,06	0,08	-0,23	-0,45	0,21	-0,24	-0,08	0,60	1,00			
18	-0,13	0,66	-0,33	-0,17	-0,56	-0,22	0,15	-0,02	-0,30	-0,09	-0,30	0,11	0,82	0,84	1,00		
19	-0,86	0,15	0,18	0,15	0,28	-0,42	0,39	0,14	0,19	-0,07	-0,11	-0,81	0,16	-0,61	-0,32	1,00	
20	-0,10	-0,48	-0,21	0,40	-0,24	0,27	-0,56	-0,65	0,16	-0,26	0,76	0,82	-0,28	-0,26	-0,42	0,01	1,00

TABLA O.2. Matriz de correlación de los índices de liquidez. Instrumentos PRC. Periodo 2003-2007

Plazo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	1,00																				
1	0,76	1,00																			
2	0,56	0,82	1,00																		
3	0,53	0,76	0,92	1,00																	
4	-0,36	-0,40	-0,54	-0,45	1,00																
5	-0,17	-0,24	-0,11	-0,03	0,21	1,00															
6	-0,26	-0,18	-0,23	-0,25	0,32	0,21	1,00														
7	-0,51	-0,58	-0,50	-0,43	0,23	0,20	0,11	1,00													
8	-0,36	-0,61	-0,80	-0,82	0,26	-0,14	0,04	0,24	1,00												
9	-0,24	-0,27	-0,11	-0,04	0,11	0,12	0,16	0,16	-0,32	1,00											
10	0,67	0,69	0,59	0,58	-0,17	-0,35	-0,35	-0,48	-0,43	-0,36	1,00										
11	-0,20	0,11	0,44	0,44	-0,17	-0,02	-0,04	0,21	-0,61	0,30	0,13	1,00									
12	-0,28	-0,12	-0,01	-0,03	0,32	-0,16	0,11	0,19	0,02	-0,32	0,24	0,31	1,00								
13	0,04	0,07	0,20	0,18	0,04	-0,15	-0,04	-0,04	-0,41	0,51	0,13	0,52	0,04	1,00							
14	0,69	0,83	0,80	0,71	-0,44	-0,13	-0,17	-0,56	-0,63	-0,11	0,49	0,07	-0,20	0,14	1,00						
15	0,65	0,83	0,88	0,83	-0,52	-0,10	-0,31	-0,57	-0,74	-0,11	0,66	0,38	-0,20	0,24	0,76	1,00					
16	-0,13	-0,04	0,40	0,43	-0,38	-0,06	-0,52	0,05	-0,39	0,20	0,22	0,55	0,05	0,07	0,10	0,42	1,00				
17	-0,26	-0,03	-0,16	-0,16	0,46	-0,48	-0,24	-0,19	-0,08	0,37	0,40	0,21	0,30	0,45	-0,38	-0,01	0,27	1,00			
18	0,00	0,36	-0,07	0,30	0,36	0,51	0,25	0,37	-0,64	0,51	-0,69	0,04	-0,55	0,06	0,31	-0,61	-0,50	-0,16	1,00		
19	0,33	-0,60	-0,21	-0,49	-0,88	-0,72	-0,42	-0,15	0,66	-0,90	0,76	-0,33	0,25	0,18	-0,70	0,72	0,76	-0,82	-0,93	1,00	
20	0,05	0,84	-0,65	-0,28	-0,77	-0,72	-0,96	0,64	0,16	0,01	-0,91	0,82	-0,79	0,87	0,95	0,91	0,48	0,77	0,57	-0,65	1,00