



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

MODELO ANALÍTICO PARA EL COMPORTAMIENTO HIDROLÓGICO DE CUENCAS URBANAS

MACARENA DE LOS ÁNGELES ZEGPI SEPÚLVEDA

Tesis para optar al grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería.

Profesor Supervisor:
BONIFACIO FERNÁNDEZ L.

Santiago de Chile, (Julio, 2008)

© 2008, Macarena Zegpi Sepúlveda.



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

MODELO ANALÍTICO PARA EL COMPORTAMIENTO HIDROLÓGICO DE CUENCAS URBANAS

MACARENA DE LOS ÁNGELES ZEGPI SEPÚLVEDA

Tesis presentada a la Comisión integrada por los profesores:

BONIFACIO FERNÁNDEZ L.

EDUARDO VARAS C.

PEDRO RIVERA I.

JOSÉ LUIS ALMAZÁN C.

Para completar las exigencias del grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería.

Santiago de Chile, (Julio, 2008)

A mi familia, Jorge y amigos.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer con especial cariño a mi familia y a Jorge Maureira por estar siempre conmigo y brindarme su apoyo durante todos los años de universidad y en especial durante el periodo de desarrollo de mi tesis.

A mi profesor supervisor Bonifacio Fernández por guiar mi trabajo y ayudarme a conseguir los objetivos planteados.

A los profesores Eduardo Varas y José Luis Almazán y a Pedro Rivera por acceder a ser parte de la comisión y por sus valiosos comentarios, observaciones y sugerencias.

También quiero agradecer a los profesores, compañeros y amigos que conocí durante los años de estudio que de una u otra forma contribuyeron al desarrollo de esta tesis. Quiero mencionar de manera especial a Jorge Gironás, Gustavo Calle, Marco Alsina y Alex Thumann quienes siempre estuvieron dispuestos a ayudarme a superar los obstáculos que se presentaban en el camino.

A la Sociedad Canal del Maipo por la Beca Arturo Cousiño Lyon que recibí el año 2006 y fue de gran ayuda para el desarrollo de mi tesis.

Finalmente, quiero agradecer a la Pontificia Universidad Católica y al Departamento de Ingeniería Hidráulica y Ambiental por las valiosas herramientas que me entregaron durante los años de estudio.

INDICE GENERAL

	Pág.
DEDICATORIA	ii
AGRADECIMIENTOS	iii
INDICE DE TABLAS	vii
INDICE DE FIGURAS.....	ix
RESUMEN.....	xiii
ABSTRACT.....	xiv
1. INTRODUCCIÓN.....	1
2. MODELO ESTOCÁSTICO DE LLUVIAS.....	4
2.1 Tiempo mínimo entre tormentas	4
2.2 Funciones de distribución marginal	12
2.2.1 Función de distribución de probabilidad exponencial	12
2.2.2 Función de distribución de probabilidad gama-2	13
2.2.3 Bondad de ajuste y criterio de elección de Akaike.....	14
2.3 Funciones de distribución conjunta.....	15
2.3.1 Estimación del parámetro θ	20
2.3.2 Bondad de ajuste de las cópulas	22
3. TRANSFORMACIÓN LLUVIA-ESCORRENTÍA	25
3.1 Volumen de escorrentía (v_r).....	25
3.2 Caudal máximo (Q_p)	29

3.2.1	Caudal máximo según hidrograma propuesto por Guo y Adams..	30
3.2.2	Caudal máximo según hidrograma SCS	31
3.2.3	Estimación del tiempo de concentración	33
4.	FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE LAS PROPIEDADES DE ESCORRENTÍA.....	38
4.1	Función de probabilidad acumulada del volumen de escorrentía (v_r).....	38
4.2	Función de probabilidad acumulada del caudal máximo (Q_p)	42
4.2.1	Función de probabilidad acumulada de Q_p utilizando hidrograma propuesto por Guo y Adams	42
4.2.2	Función de probabilidad acumulada de Q_p utilizando hidrograma del SCS	52
5.	APLICACIÓN DEL MODELO Y COMPARACIÓN CON SIMULACIÓN CONTINUA SWMM EPA 5.0.....	57
5.1	Modelo estocástico de lluvias	58
5.2	Información física de las cuencas.	71
5.3	Resultados	79
5.3.1	Volumen de escorrentía	80
5.3.2	Caudal máximo.....	82
6.	CONCLUSIONES.....	88
	BIBLIOGRAFÍA	91
	ANEXOS	95
	ANEXO A: Características de las subcuencas.....	96

ANEXO B: Tiempo de concentración de las subcuencas..... 98

ANEXO C: Tiempo de viaje asociado a cada ruta..... 99

INDICE DE TABLAS

	Pág.
Tabla 2-1: tau de Kendall en términos del parámetro de cada cópula.	21
Tabla 3-1: Valores de C_v según tipo de superficie de conducción.....	36
Tabla 4-1: Magnitudes relativas de los interceptos y pendientes de las rectas v_1 , v_2 y v_3 que definen la región de integración para $P(Q_p \leq q_p)$ cuando $q_p > 0$	47
Tabla 5-1: Resumen del registro de precipitación horaria.	58
Tabla 5-2: Principales estadísticos de las tormentas.	60
Tabla 5-3: Parámetros estimados por método de máxima verosimilitud para cada serie.	60
Tabla 5-4: Estadísticos de prueba y valores críticos del test χ^2	62
Tabla 5-5: Valores de AIC estimados para los ajustes.....	62
Tabla 5-6: Funciones de densidad de probabilidad marginal para v , t y b	63
Tabla 5-7: Estimación de tau de Kendall ($\hat{\tau}$)	63
Tabla 5-8: $\hat{\theta}$ de las cópulas para ajustarse a $H_{v,t}(v,t)$	64
Tabla 5-9: $\hat{\theta}$ de las cópulas para ajustarse a $H_{t,b}(t,b)$	64
Tabla 5-10: AIC de las cópulas ajustadas a v vs. t	64
Tabla 5-11: AIC de las cópulas ajustadas a t vs. b	67

Tabla 5-12: Familia de cópulas escogida para cada par de variables.	68
Tabla 5-13: Características agregadas de las cuencas modeladas.....	76
Tabla 5-14: Valores de intensidad de lluvia efectiva (mm/hr) utilizados en la ecuación de Morgali y Linsley.....	76
Tabla 5-15: Tiempo de concentración de las subcuencas de Chillán.....	77
Tabla 5-16: Tiempo de concentración de las subcuencas de la comuna de La Reina.....	77
Tabla 5-17: Tiempo de viaje por las calles de la cuenca ubicada en Chillán.....	78
Tabla 5-18: Tiempo de viaje por las calles de la cuenca ubicada en la comuna de La Reina.	78
Tabla 5-19: Tiempo de concentración de las cuencas.....	79

INDICE DE FIGURAS

	Pág.
Figura 2-1: Esquema de un registro continuo de intensidad de precipitación.	5
Figura 2-2: Esquema de un registro de continuo de volumen de precipitación.	5
Figura 2-3: Coeficiente de variación de la serie de TET en función de IETD para el registro de precipitación en Quinta Normal.	7
Figura 2-4: Autocorrelograma para determinar IETD en Quinta Normal.	8
Figura 2-5: Acercamiento del autocorrelograma de Quinta Normal.	8
Figura 2-6: Número promedio de eventos de precipitación al año en función de IETD en Quinta Normal.	9
Figura 2-7: Esquema de un proceso representado por una cadena de Markov simple.	10
Figura 2-8: Ejemplo de K-Kplots.	23
Figura 3-1: Curvas de capacidad de infiltración para distintos suelos.	26
Figura 3-2: Hidrograma utilizado por Guo y Adams.	30
Figura 3-3: Hidrograma triangular del SCS.	32
Figura 3-4: Representación esquemática de la subcuenca (James et al., 1998).	36
Figura 4-1: Región de integración para calcular $P(0 < v_r \leq v_0)$ cuando $v_0 > hS_{dt}$. .	41

Figura 4-2: Región de integración para $P(Q_p \leq q_p)$ para cuenca tipo 1 con $q_p < 2f_c h$	48
Figura 4-3: Región de integración para $P(Q_p \leq q_p)$ para cuenca tipo 1 con $2f_c h \leq q_p < 2hS_{dd}/t_c$	49
Figura 4-4: Región de integración para $P(Q_p \leq q_p)$ para cuenca tipo 1 con $q_p \geq 2f_c h$	50
Figura 4-5: Región de integración para $P(Q_p \leq q_p)$ para cuenca tipo 2 con $2hS_{dd}/t_c \leq q_p < 2f_c h$	51
Figura 4-6: Región de integración para $P(Q_p \leq q_p)$ cuando $q_p < 1.1hS_{dd}/t_c$	55
Figura 4-7: Región de integración para $P(Q_p \leq q_p)$ cuando $q_p \geq 1.1hS_{dd}/t_c$	55
Figura 5-1: Probabilidades de transición de la lluvia horaria de Chillán.....	59
Figura 5-2: Probabilidades de transición de las lluvia horaria de Santiago.	59
Figura 5-3: Distribuciones de probabilidad teóricas y distribución de empírica para las tormentas de Chillán. (a) Volumen. (b) Duración. (c) TET.	61
Figura 5-4: Distribuciones de probabilidad teóricas y distribución de empírica para las tormentas de Santiago. (a) Volumen. (b) Duración. (c) TET.	61
Figura 5-5: K-Kplots para las cópulas ajustadas a las variables $v-t$ de Chillán.....	65
Figura 5-6: K-Kplots para las cópulas ajustadas a las variables $v-t$ de Santiago.....	65
Figura 5-7: K-Kplots para las cópulas ajustadas a las variables $t-b$ de Chillán.....	66

Figura 5-8: K-Kplots para las cópulas ajustadas a las variables $t-b$ de Santiago.	67
Figura 5-9: Función de probabilidad conjunta de las variables $v-t$ en Chillán.	69
Figura 5-10: Función de probabilidad conjunta de las variables $t-b$ en Chillán.	69
Figura 5-11: Función de probabilidad conjunta de las variables $v-t$ en Santiago. ...	70
Figura 5-12: Función de probabilidad conjunta de las variables $t-b$ en Santiago. ...	70
Figura 5-13: Esquema general de las principales cuencas de la ciudad de Chillán. Fuente: MOP (2007).	71
Figura 5-14: Detalle de la subcuenca ubicada en la ciudad de Chillán. Fuente: MOP (2007).	72
Figura 5-15: Esquema general de las principales cuencas de la comuna de La Reina. Fuente: González (2008).	73
Figura 5-16: Detalle de la subcuenca ubicada en la comuna de La Reina. Fuente: González (2008).	73
Figura 5-17: Esquema de la subcuenca ubicada en la ciudad de Chillán.	74
Figura 5-18: Esquema de la subcuenca ubicada en la comuna de La Reina.	74
Figura 5-19: Periodo de retorno para el volumen de esorrentía de la cuenca ubicada en Chillán.	81
Figura 5-20: Periodo de retorno para el volumen de esorrentía de la cuenca ubicada en La Reina.	81

Figura 5-21: Periodo de retorno para el caudal máximo de la cuenca ubicada en Chillán.....	84
Figura 5-22.- Periodo de retorno para el caudal máximo de la cuenca ubicada en La Reina.	85
Figura 5-23: Sensibilidad del caudal máximo respecto al tiempo de concentración en la cuenca ubicada en Chillán.....	86
Figura 5-24: Sensibilidad del caudal máximo respecto al tiempo de concentración en la cuenca ubicada en La Reina.....	87

RESUMEN

Se propone un modelo analítico para estimar las funciones de distribución de probabilidad del volumen y caudal máximo de crecidas urbanas a partir de la función de probabilidad conjunta del volumen y duración de tormentas e información física de la cuenca. La función de probabilidad conjunta del volumen, v , y la duración de tormentas, t , es derivada utilizando teoría de cópulas, examinando y evaluando cuatro familias de cópulas arquimedeanas con la finalidad de encontrar la más apropiada para reproducir la estructura de dependencia de las variables. Las curvas de frecuencia del volumen y caudal máximo de escorrentía se obtienen integrando la función de densidad de probabilidad conjunta en regiones apropiadas del plano v - t delimitadas por condiciones derivadas del proceso lluvia-escorrentía. El modelo es probado en dos cuencas urbanas ubicadas en las ciudades de Chillán y Santiago, Chile. Los resultados se comparan con los provenientes de simulación continua en SWMM EPA 5.0, obteniendo un buen ajuste, y con los de un modelo analítico que asume la duración y volumen de tormentas como variables estadísticamente independientes distribuidas exponencialmente.

ABSTRACT

An analytical model to estimate the probability distribution functions of volume and peak discharge rate of an urban runoff event is developed based on the joint probability function of rainfall volume, v , and duration, t . The joint distribution of rainfall volume and duration is derived using copulas theory. Four families from Archimedean copulas were examined and assessed in order to find the one that best reproduces the dependence structure of the variables. The frequency distribution functions of volume and peak discharge rate of a runoff event are obtained integrating the joint density function in appropriate regions of the plane v - t , bounded by conditions from the rainfall-runoff process. The model is tested in two urban catchments located in the cities of Chillán and Santiago, Chile. The results were compared with those from continuous simulations using SWMM EPA 5.0, obtaining good agreement, and with those from other analytical model, which assumes rainfall duration and rainfall volume as independent exponential variables.

1. INTRODUCCIÓN

En la planificación, diseño y operación de los sistemas de drenaje de aguas lluvias de cuencas urbanas es fundamental disponer de herramientas que permitan predecir el comportamiento del sistema frente a diferentes escenarios. Lamentablemente, la gran mayoría de las cuencas urbanas no está instrumentalizada y los datos de escurrimiento son escasos por lo que no es posible realizar un análisis histórico. Además, gran parte de la planificación y el diseño se realizan en etapas anteriores al desarrollo urbano propiamente tal, por lo que el análisis hidrológico basado en observaciones resulta normalmente impracticable y se debe recurrir a otras metodologías. Habitualmente se recurre a modelos simples lluvia-escorrentía aplicados a eventos aislados, como tormentas de diseño con periodo de retorno entre 2 y 100 años. Este procedimiento permite encontrar los parámetros de diseño para condiciones poco frecuentes, pero no entrega información sobre el comportamiento de las aguas lluvias en condiciones habituales. Como solución a dicho problema se han desarrollado herramientas computacionales que permiten simular en forma continua la respuesta hidrológica de una zona urbana, representándola por sus parámetros geomorfológicos y usando una serie continua de precipitaciones como excitación del sistema. Los modelos analíticos son una alternativa a la simulación continua y permiten obtener las funciones de distribución de probabilidad de características de los eventos de escorrentía (típicamente volumen y caudal máximo) a partir de las propiedades estadísticas de las lluvias y las propiedades físicas de la cuenca. Los modelos analíticos tienen la ventaja de ser compactos y simples de usar y permiten evaluar la sensibilidad de la respuesta hidrológica a cada una de las variables físicas que caracterizan las soluciones de drenaje. Su estructura típica contiene tres pasos: a) Definición del modelo estocástico de lluvias, b) Transformación lluvia-escorrentía y c) Obtención de la función de distribución de probabilidad del volumen de escorrentía y del caudal máximo, o de otra propiedad de la respuesta del sistema.

Las diferencias entre un modelo analítico y otro radican en las distintas formas de modelar las lluvias y el proceso lluvia-escorrentía. Usualmente las tormentas se

modelan bajo supuestos de independencia entre sus características (Eagleson, 1972; Díaz-Granados *et al.*, 1984) o se introduce la dependencia utilizando funciones de distribución de probabilidad conjunta con limitaciones respecto del grado y forma de dependencia que reproducen (Córdova y Rodríguez-Iturbe, 1985; Kurothe *et al.*, 1997; Goel *et al.*, 2000). Para la transformación lluvia-escorrentía, la mayoría de los trabajos consideran la aplicación de tasas de infiltración constante (Eagleson, 1972; Kurothe *et al.*, 1997; Goel *et al.*, 2000). Otros métodos de infiltración utilizados son el de la curva número (Raines y Valdes, 1993) o la ecuación de Philip (Díaz-Granados *et al.*, 1984). Guo y Adams (1998a,b) desarrollaron un modelo para cuencas urbanas en el que caracterizan las tormentas a través de su duración y volumen asumiéndolas como variables exponenciales estadísticamente independientes, estiman las pérdidas por infiltración con la ecuación de Horton y emplean un hidrograma triangular con tiempo base igual a la suma de la duración de la tormenta y el tiempo de concentración de la cuenca para obtener el caudal máximo. Chen y Adams (2007) variaron el modelo de Guo y Adams asumiendo que todas las tormentas tienen la misma duración, adoptando un valor igual al promedio muestral. En la misma línea, Rivera *et al.* (2005) propusieron un modelo similar, intentando reproducir la dependencia entre el volumen y duración a través de la intensidad media, la que modelaron como una variable exponencialmente distribuida. Los modelos desarrollados hasta ahora tienen el inconveniente de no representar adecuadamente la estructura de dependencia entre las características de las tormentas. Por un lado, algunos asumen independencia, mientras que otros tienen restricciones en cuanto a las funciones marginales o abordan la dependencia a través del coeficiente de correlación lineal de Pearson (Córdova y Rodríguez-Iturbe, 1985; Kurothe *et al.*, 1997), en circunstancias de que la estructura de dependencia de las variables puede ser diferente.

En los últimos años se ha introducido al campo de la hidrología el concepto de “cópula” para representar la dependencia entre variables. Una cópula es una función que ensambla funciones de distribución unidimensionales para formar funciones de distribución

multivariadas (Nelsen, 2006). Esta herramienta evita las restricciones expuestas, pues la función de dependencia entre dos o más variables se determina en forma independiente de las funciones de distribución marginal, lo que permite modelar la estructura probabilística de un fenómeno multivariado con mayor flexibilidad.

En este trabajo se desarrolla un modelo analítico para estimar la función de distribución de probabilidad del volumen de escorrentía y del caudal máximo en cuencas urbanas a partir de un modelo estocástico de lluvias desarrollado de acuerdo a la teoría de cópulas y una caracterización de la cuenca basada en el trabajo de Guo y Adams (1998a,b), con algunas modificaciones. En primer lugar se desarrolla la metodología para determinar funciones de probabilidad conjunta bivariadas, la que se aplica para encontrar la función de probabilidad conjunta del volumen y duración de tormentas que corresponde a la excitación del modelo analítico y para encontrar la función de probabilidad conjunta de la duración y tiempo entre tormentas que se utiliza en un paso intermedio de la implementación. Luego, se desarrollan las ecuaciones correspondientes al proceso lluvia-escorrentía, obteniendo expresiones para el volumen de escorrentía y el caudal máximo definidas en términos de las propiedades estadísticas de las tormentas y propiedades físicas de la cuenca a modelar. En tercer lugar, se encuentran las funciones de probabilidad para el volumen y caudal máximo, las que se obtienen de integrar la función de probabilidad conjunta del volumen (v) y duración (t) en regiones del plano v - t definidas por las ecuaciones que rigen el modelo lluvia-escorrentía. Finalmente, se aplica el modelo desarrollado a dos cuencas, donde se dispone de toda la información necesaria.

2. MODELO ESTOCÁSTICO DE LLUVIAS

El objetivo de esta sección es desarrollar un modelo estocástico para representar las tormentas que ocurren en un determinado lugar. En primer lugar se propone una metodología para identificar tormentas como eventos independientes a partir de un registro continuo de precipitaciones. Este primer paso es importante pues normalmente la información de precipitación se encuentra disponible en forma continua a lo largo del tiempo pero para construir la función de entrada al modelo analítico se requiere de un análisis estadístico por eventos. Cada tormenta queda caracterizada por su duración (t), volumen caído (v) y tiempo entre tormentas respecto de la tormenta sucesora (TET). A partir de la definición de eventos de precipitación se procede a derivar las funciones de distribución marginal de v , t y TET ($f_v(v)$, $f_T(t)$ y $f_B(b)$ respectivamente) para luego encontrar las funciones de distribución conjunta de v y t y de t y TET, utilizando la teoría de cópulas.

2.1 Tiempo mínimo entre tormentas

Cuando se requiere realizar un análisis estadístico de precipitaciones lo común es contar con un registro continuo de éstas, normalmente expresadas como intensidad instantánea o volumen de lluvia caído durante intervalos de tiempo predeterminados. Si se grafica la serie continua de intensidad de lluvia se obtiene un gráfico como el de la Figura 2-1, mientras que si se grafica el volumen caído o la intensidad promedio se obtiene un gráfico con el aspecto del de la Figura 2-2. En ellas se observa que hay periodos con lluvia, llamados tormentas, y periodos secos cuya duración corresponde al tiempo entre tormentas (TET). En base a esto, razonando intuitivamente, parece claro que la independencia de dos eventos consecutivos depende de la duración del periodo seco entre ellos. Así, debería existir un tiempo mínimo de separación entre dos eventos para asegurar independencia entre ellos (Restrepo-Posada y Eagleson, 1982). Luego, para distinguir entre dos tormentas consecutivas se define un periodo mínimo de tiempo sin

precipitación (IETD) y se acepta que periodos de lluvia separados por un TET mayor que IETD corresponden a tormentas distintas, mientras que aquellos separados por un TET menor que IETD pertenecen al mismo evento. Una vez definido el IETD se procede a discretizar el registro continuo y a estimar las características de las tormentas. Es claro que los análisis estadísticos basados en distintos valores de IETD implican resultados distintos ya que definen distintas tormentas (Adams *et al.*, 1986), por lo que la elección del IETD debe justificarse utilizando un criterio con base estadística (Adams y Papa, 2000).

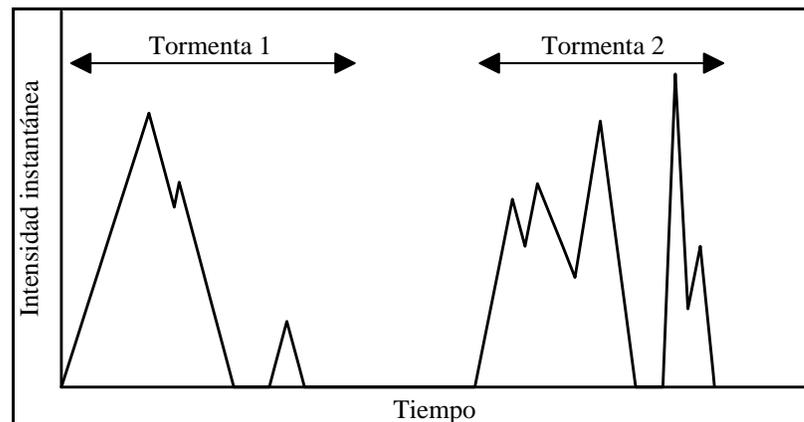


Figura 2-1: Esquema de un registro continuo de intensidad de precipitación.

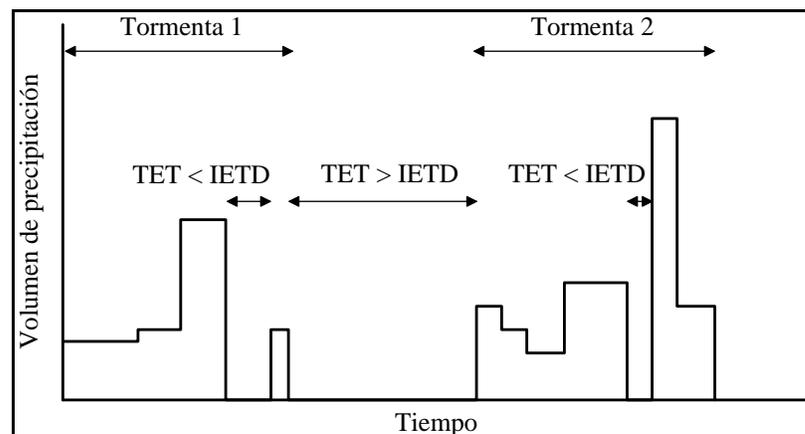


Figura 2-2: Esquema de un registro de continuo de volumen de precipitación.

Varios autores han desarrollado diferentes metodologías para estimar el IETD. Una de ellas corresponde al método exponencial desarrollado por Restrepo-Posada y Eagleson (1982), que se basa en suponer que la función de densidad de probabilidad de TET puede ser representada por una distribución exponencial. El procedimiento consiste en discretizar la serie continua de precipitaciones según distintos valores de IETD y verificar si las duraciones de periodos secos entre tormentas siguen una distribución exponencial para $TET \geq IETD$. Para esto, se recurre a que el coeficiente de variación es igual a la unidad para distribuciones exponenciales. Así, el método consiste en adoptar un valor para IETD, discretizar el registro y calcular el coeficiente de variación de la serie de TET resultante. Este procedimiento se repite hasta obtener un valor igual o parecido a 1. Un problema de este procedimiento es que si bien se cumple con una condición necesaria, no es suficiente para asegurar que una variable distribuya exponencialmente.

Otro método para distinguir eventos independientes corresponde a los llamados tests de autocorrelación, en los que se calcula el autocorrelograma de la serie de intensidad media o volumen de precipitación, usualmente a escala horaria (Bonta y Rao, 1988). En este caso el IETD corresponde al desfase a partir del cual el coeficiente de correlación es estadísticamente nulo. Este tipo de procedimientos se ha aplicado utilizando tanto el coeficiente de correlación lineal de Pearson como coeficientes de correlación de ranking, entregando mejores resultados estos últimos. Bonta y Rao (1988) estudiaron los factores que afectan a la determinación de IETD tanto por el método exponencial como por tests de autocorrelación de ranking, concluyendo que en ambos casos intervalos de muestreo de una hora son adecuados y que se requiere del orden de 10 años de datos para realizar un análisis preciso.

Un tercer método se basa en la relación que existe entre el IETD y el número promedio de eventos al año. Si se construye un gráfico “Promedio de eventos al año vs. IETD” se debe elegir un valor de IETD tal que para valores mayores no se observen variaciones

importantes en el número promedio de eventos por año. Sin embargo, esto no ocurre siempre y puede ocurrir que nunca se encuentre dicho valor de IETD, ya que es posible que no se observe el comportamiento asintótico esperado (Adams y Papa, 2000).

Las metodologías presentadas tienen inconvenientes por diferentes motivos. Por un lado, el método exponencial asume una distribución de probabilidad predeterminada para TET. Por otro lado, los tests de autocorrelación intentan identificar eventos independientes basando su análisis sólo en una variable, en circunstancias que las tormentas son eventos multivariados. Además, en algunos casos el autocorrelograma no entrega información decisiva.

A modo de ejemplo, las figuras a continuación presentan los resultados de la aplicación de los tres métodos mencionados a la precipitación horaria registrada en la estación de Quinta Normal durante el periodo 1917-1960. La Figura 2-3 muestra la aplicación del método exponencial, en ella se puede ver que $CV \cong 1$ cuando IETD es del orden de 320 horas. Es decir, según este criterio, deben ocurrir al menos 13 días seguidos sin precipitación para decir que dos eventos son independientes, este resultado se considera excesivo.

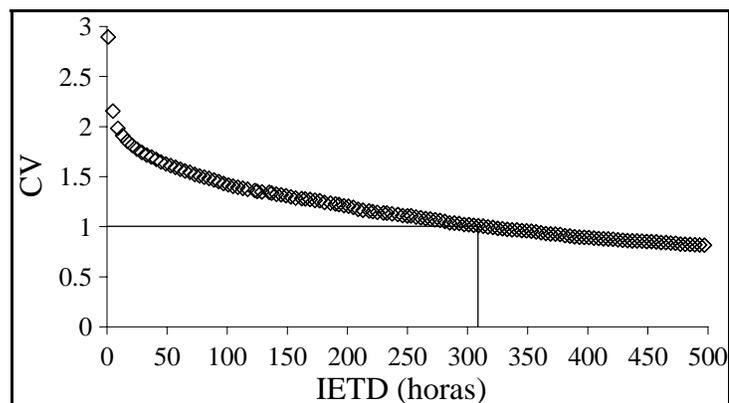


Figura 2-3: Coeficiente de variación de la serie de TET en función de IETD para el registro de precipitación en Quinta Normal.

La Figura 2-4 muestra el autocorrelograma del volumen de precipitación horaria. Se observa que el coeficiente de autocorrelación (ρ) tiende a cero rápidamente. Sin embargo, la Figura 2-5 muestra un acercamiento del gráfico anterior y en ella se puede ver que ρ oscila cerca de cero llegando a alejarse más allá del límite de confianza del 95 % (línea horizontal), por lo que no se puede concluir nada con este procedimiento.

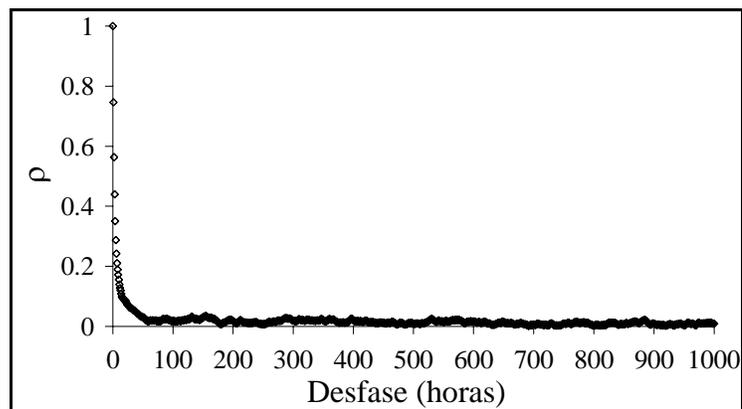


Figura 2-4: Autocorrelograma para determinar IETD en Quinta Normal.

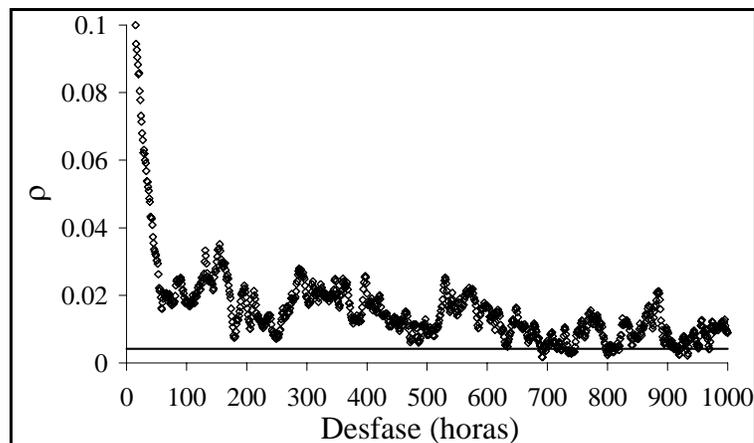


Figura 2-5: Acercamiento del autocorrelograma de Quinta Normal.

Finalmente, la Figura 2-7 muestra que el número promedio de eventos al año tiende a estabilizarse para valores de IETD del orden de 500 horas, al igual que en el caso del método exponencial, este valor se considera excesivo.

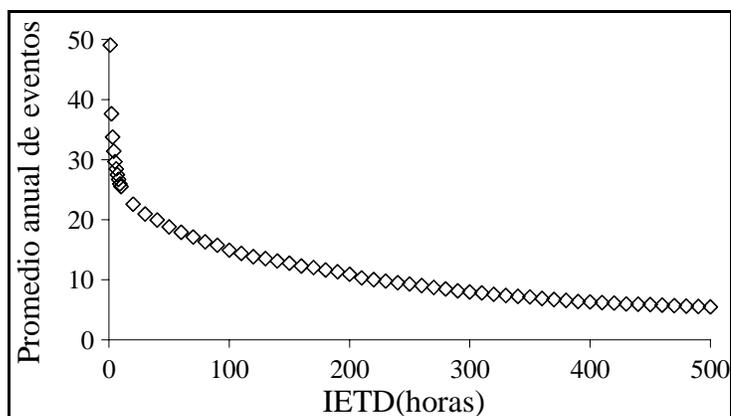


Figura 2-6: Número promedio de eventos de precipitación al año en función de IETD en Quinta Normal.

Otro inconveniente de estos métodos es que no se basan en el hecho de que llueva o no llueva propiamente tal, por lo que el resultado obtenido no corresponde al mínimo tiempo que debe transcurrir para que una tormenta no dependa de otra ocurrida en un momento anterior, si no al mínimo tiempo que debe transcurrir para que las características de los eventos presenten las propiedades deseadas. Por ello, se propone utilizar una metodología basada en la modelación de la lluvia horaria por una cadena de Markov simple (Salas, 1993). El fenómeno se representa por un proceso con dos estados, lluvia y no lluvia, y una matriz probabilidades de transición. Se adopta “0” para representar al estado sin lluvia y “1” para el estado con lluvia. La Figura 2-3 muestra una representación esquemática de un proceso modelado por una cadena de Markov simple.

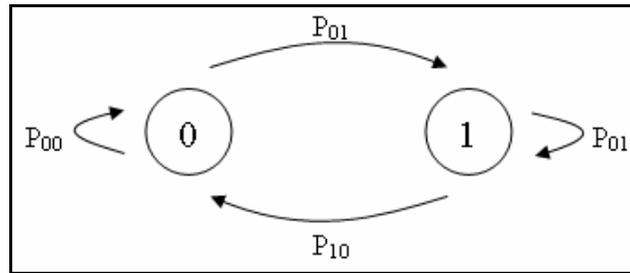


Figura 2-7: Esquema de un proceso representado por una cadena de Markov simple.

Este tipo de procesos queda definido por sus probabilidades de transición de estado, las que se pueden estimar a partir de valores observados con el siguiente grupo de ecuaciones:

$$P_{00} = \frac{N_{00}}{N_{00} + N_{01}}; P_{01} = \frac{N_{01}}{N_{00} + N_{01}}; P_{10} = \frac{N_{10}}{N_{10} + N_{11}}; P_{11} = \frac{N_{11}}{N_{10} + N_{11}} \quad (2.1)$$

Donde,

N_{ij} : Número de transiciones del estado i al estado j , con $i, j = 0, 1$.

P_{ij} : Probabilidad de pasar del estado i al estado j , con $i, j = 0, 1$.

Otro importante elemento en la definición de una cadena de Markov corresponde a la matriz de probabilidades de transición (\mathbf{P}). En ella las probabilidades tienen la siguiente disposición.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Para este tipo de procesos las probabilidades de transición después de muchas etapas se independizan del estado inicial y tienden a un valor igual a la probabilidad libre, tal

como muestra la ecuación (2.3). Así, se propone adoptar como IETD un valor m^* a partir del cual se acepta que $P_{ij,m^*} \cong P_j$, con un cierto nivel de tolerancia ε .

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P_{ij,m} = P_j = \frac{N_j}{N_i + N_j} \quad (2.3)$$

Donde,

m : Número de etapas de transición (en este caso horas).

$P_{ij,m}$: Probabilidad de transición del estado i al estado j en m etapas.

P_j : Probabilidad de ocurrencia del estado j .

Para estimar las probabilidades de transición en m etapas se utiliza otra importante propiedad de las cadenas de Markov, que consiste en que la matriz de probabilidades de transición en m etapas es igual a la matriz de transición en una etapa multiplicada m veces por si misma.

$$\mathbf{P}^m = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{00,m} & P_{01,m} \\ P_{10,m} & P_{11,m} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

En resumen, para discretizar el registro continuo disponible se debe seguir los siguientes pasos:

- Calcular la precipitación horaria a partir del registro continuo.
- Identificar el número de horas con y sin lluvia (N_1 y N_0).
- Identificar número de transiciones entre estados (N_{00}, N_{01}, N_{10} y N_{11}).
- Calcular probabilidades libres y de transición ($P_1, P_0, P_{00}, P_{01}, P_{10}$ y P_{11}).
- Adoptar un nivel de tolerancia ε y estimar IETD de acuerdo a la ecuación (2.5).

$$IETD = m^* \left| P_j - \varepsilon < P_{ij,m^*} < P_j + \varepsilon \right. \quad (2.5)$$

- Discretizar el registro en tormentas caracterizadas por su volumen, duración y TET.

2.2 Funciones de distribución marginal

Una vez identificadas las tormentas se debe ajustar a las series de duración, volumen de precipitación y TET funciones de distribución marginal. Para ello, se consideran como candidatas las funciones de distribución exponencial y gama de dos parámetros (gama-2 de aquí en adelante), cuyos parámetros se ajustan por el método de máxima verosimilitud (ML). La bondad de ajuste se evalúa de acuerdo al test χ^2 y en caso de que ambas familias constituyan un buen ajuste se recurre al Criterio de Información de Akaike.

2.2.1 Función de distribución de probabilidad exponencial

Una variable aleatoria x distribuye exponencial si su función de densidad de probabilidad es:

$$f_x(x) = \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot x) \quad x \geq 0 \quad (2.6)$$

Donde λ es el parámetro de la distribución y su estimador por método de máxima verosimilitud es el inverso del valor esperado:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\hat{\mu}} \quad (2.7)$$

Donde μ se puede estimar como el promedio muestral.

2.2.2 Función de distribución de probabilidad gama-2

Una variable aleatoria x distribuye gama-2 si su función de densidad de probabilidad es la siguiente.

$$f_x(x) = \frac{1}{\alpha \cdot \Gamma(\beta)} \left[\frac{x}{\alpha} \right]^{\beta-1} \exp\left(-\frac{x}{\alpha}\right) \quad x \geq 0 \quad (2.8)$$

Donde α y β son los parámetros de la distribución y sus estimadores por método de máxima verosimilitud satisfacen las ecuaciones (2.9) y (2.10) .

$$\hat{\alpha} = \hat{\mu} / \hat{\beta} \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln \left(\frac{x_i}{\hat{\mu}} \right) + \ln(\hat{\beta}) - \psi(\hat{\beta}) = 0 \quad (2.10)$$

Donde,

N : es el tamaño de la muestra.

x_i : es la observación i .

$\psi(\cdot)$: es la función digama, definida por la ecuación (2.11), donde $\Gamma(\cdot)$ es la función gama y $\Gamma'(\cdot)$ su derivada.

$$\psi(\hat{\beta}) = \frac{\Gamma'(\hat{\beta})}{\Gamma(\hat{\beta})} \quad (2.11)$$

Como $\hat{\beta}$ no puede despejarse explícitamente de la ecuación (2.10), se debe encontrar numéricamente. En este trabajo se utiliza el software Maple 8 para la resolución de la ecuación.

2.2.3 Bondad de ajuste y Criterio de Información de Akaike

Para evaluar la calidad del ajuste se aplica el test χ^2 que consiste en comparar el número real de observaciones con el número esperado de observaciones, según la distribución probada, que caen en intervalos previamente definidos. El estadístico de prueba se calcula según la ecuación (2.12) (Haan, 1977).

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad (2.12)$$

Donde,

k : Es el número de intervalos.

O_i : Número real de observaciones en el intervalo i .

E_i : Número esperado de observaciones en el intervalo i .

Así, la hipótesis de que los datos provienen de la distribución candidata se rechaza si:

$$\chi_c^2 > \chi_{1-\alpha, gld}^2 \quad (2.13)$$

Donde,

$\chi_{1-\alpha, gld}^2$: Valor crítico para un nivel de significancia α y gld grados de libertad.

gld : Grados de libertad de la función χ^2 , estimados según la ecuación (2.14).

$$gld = k - \text{n}^\circ \text{ de parámetros estimados} - 1 \quad (2.14)$$

Como se mencionó anteriormente, en este trabajo se consideran dos familias de distribución candidatas para ajustarse a ν , t y TET. En caso de que ambas presenten un

buen ajuste se aplica el Criterio de Información de Akaike (Hipel y McLeod, 1994), que consiste en seleccionar el modelo con menor AIC , dado por la ecuación (2.15).

$$AIC = -2 \cdot \ln(ML) + 2 \cdot k \quad (2.15)$$

Donde,

ML : Es el máximo valor de la función de verosimilitud del modelo.

k : Es el número de parámetros ajustados.

2.3 Funciones de distribución conjunta

El modelo analítico requiere de la función de distribución conjunta del volumen y la duración de tormentas como variable de entrada y de la función de distribución conjunta de la duración y TET para un paso intermedio. Para esto, se propone utilizar la teoría de cópulas que permite encontrar una función de distribución conjunta independientemente de las distribuciones marginales de las variables y del grado de dependencia existente entre ellas. En Nelsen (2006) se encuentra la siguiente información sobre la primera aparición del concepto de cópulas en el ámbito matemático:

“El concepto de cópula fue empleado por primera vez con sentido matemático o estadístico por Abe Sklar (1959) en el teorema que ahora lleva su nombre para describir funciones que “unen” funciones de distribución unidimensionales para formar funciones de distribución multivariadas” (p.2)

El uso de la teoría de cópulas en hidrología es relativamente reciente, pero se está considerando cada vez con mayor frecuencia en el desarrollo de modelos para analizar la estructura probabilística de eventos hidrológicos multivariados. Lo usual es adoptar familias de distribución bivariadas donde el comportamiento individual de las variables debe ser caracterizado por modelos univariados provenientes de la misma familia de funciones. Las cópulas permiten evitar esta restricción y con ellas es posible usar funciones de distribución marginal distintas (Genest y Favre, 2007). Entre los trabajos

que han usado cópulas en la modelación de variables hidrológicas se puede mencionar el de De Michele y Salvadori (2003), quienes exploraron el uso de cópulas en la modelación bivariada de tormentas a través de la función de distribución conjunta de la intensidad media y duración de tormentas. Favre *et al.* (2004) presentaron una metodología para modelar caudales máximos y volumen de crecida usando cópulas. De Michele y Salvadori (2003) y Salvadori y De Michele (2004) aplicaron el uso de cópulas en la modelación del comportamiento conjunto de variables hidrológicas como intensidad y duración de tormentas, volumen y caudal máximo en un río o una crecida. De Michele *et al.* (2005) usaron un tipo de cópula en la derivación de una distribución bivariada de volumen y caudal de crecida para verificar el funcionamiento de aliviaderos de represas. Zhang y Singh (2007) desarrollaron distribuciones de probabilidad bivariadas para modelar las características de tormentas en distintas localidades. Otros trabajos más generales relativos a la aplicación de cópulas en hidrología son los de Dupuis (2007), Genest y Favre (2007) y Salvadori y De Michele (2007).

Sin perder generalidad, limitando la aplicación de las cópulas al caso bidimensional, se tiene que la función de distribución acumulada (FDA de aquí en adelante) conjunta $H_{X,Y}(x,y)$ de cualquier par de variables aleatorias continuas (X,Y) puede ser escrita según Nelsen (2006) con la ecuación (2.16).

$$H_{X,Y}(x,y) = C(F_X(x), G_Y(y)) \quad (2.16)$$

Donde,

$F_X(x)$, $G_Y(y)$: Funciones de distribución marginal acumulada de X e Y .

C : Es la cópula.

Cabe destacar que $C : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ pues su dominio corresponde a las funciones marginales $F_X(x)$ y $G_Y(y)$ que son variables distribuidas en el intervalo $[0,1]$.

La principal ventaja de esta teoría radica en que la selección de un modelo apropiado para la dependencia entre X e Y , representado por la cópula C , es independiente de la elección de las distribuciones marginales. Así, el problema de determinar $H_{X,Y}(x, y)$ se resume en dos pasos paralelos: (1) Estimar distribuciones marginales, $F_X(x)$ y $G_Y(y)$ y (2) Estimar la función de dependencia C (Zhang y Singh, 2007).

Una cópula $C: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ para un par de variables aleatorias X e Y con funciones de distribución marginal acumulada $U_1 = F_X(x)$ y $U_2 = G_Y(y)$ es una FDA conjunta si cumple con las siguientes propiedades (u_1 y u_2 son valores específicos de U_1 y U_2).

Propiedad 1:

$$C(u_1, 0) = C(0, u_2) = 0 \quad (2.17a)$$

$$C(u_1, 1) = u_1 \text{ y } C(1, u_2) = u_2 \quad (2.17b)$$

Propiedad 2: Para todo $u_1^1, u_1^2, u_2^1, u_2^2 \in [0,1]$ tales que $u_1^1 \leq u_1^2$ y $u_2^1 \leq u_2^2$ se tiene que:

$$C(u_1^2, u_2^2) - C(u_1^2, u_2^1) - C(u_1^1, u_2^2) + C(u_1^1, u_2^1) \geq 0 \quad (2.18)$$

Una función que cumple esta propiedad se conoce como 2-creciente.

Varios autores han trabajado en el desarrollo de familias de cópulas. Nelsen (2006) presenta un extenso listado de los tipos de cópulas disponibles en la literatura. Las más populares en aplicaciones hidrológicas son las Arquimedeanas, pues poseen propiedades específicas que las hacen fáciles de construir y hay muchas familias de cópulas en esta clase, lo que permite reproducir un amplio rango de dependencia. Genest y MacKay (1986) presentaron y demostraron algunas de estas propiedades para el caso de distribuciones bivariadas, las que son ampliables a aplicaciones multivariadas. En este

trabajo se hace uso de cópulas Arquimedeanas de un parámetro por sus cualidades y porque han sido exitosamente utilizadas en hidrología.

Una cópula Arquimedean de un parámetro para dos variables aleatorias X e Y se expresa como:

$$C_{\theta}(u_1, u_2) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \phi(u_2)) = H_{X,Y}(x, y) \quad 0 \leq u_1, u_2 \leq 1 \quad (2.19)$$

Donde,

ϕ : Es la función generadora de cópula, $\phi: [0,1] \rightarrow [0,\infty)$.

θ : Es el parámetro de la cópula, escondido en la función ϕ .

Para que $C_{\theta}(u_1, u_2)$ cumpla las propiedades de una FDA conjunta la función ϕ debe cumplir con:

- (i) Ser estrictamente decreciente. Es decir, $\phi'(u) < 0$.
- (ii) Ser convexa. Es decir $\phi''(u) < 0$
- (iii) $\phi(1) = 0$
- (iv) $\phi^{-1}(u) = 0$ si $\phi(0) \leq u$

ϕ' y ϕ'' corresponden a la primera y segunda derivada de ϕ respectivamente. ϕ^{-1} es la función inversa.

Al igual que en el trabajo de Zhang y Singh (2007), en este trabajo se hace uso de las cuatro familias de cópulas Arquimedeanas que se presentan a continuación. En forma similar al caso de ajuste de funciones de distribución marginal, estas familias son consideradas candidatas, por lo que se ajusta cada una de ellas y posteriormente se evalúa la bondad del ajuste para elegir la mejor.

a. Cópula 1: Familia Cook-Johnson

Función generadora: $\phi(t) = t^{-\theta} - 1$, $\theta \geq 0$

Cópula: $C_\theta(u_1, u_2) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}$

b. Cópula 2: Familia Frank

Función generadora: $\phi(t) = -\ln \left[\frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1} \right]$, $\theta \neq 0$

Cópula: $C_\theta(u_1, u_2) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right)$

c. Cópula 3: Familia Gumbel-Hougaard

Función generadora: $\phi(t) = [-\ln(t)]^\theta$, $\theta \in [1, \infty)$

Cópula: $C_\theta(u_1, u_2) = \exp \left(- \left((-\ln(u_1))^\theta + (-\ln(u_2))^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \right)$

d. Cópula 4: Familia Ali-Mikhail-Haq

Función generadora: $\phi(t) = \ln \left(\frac{1 - \theta(1-t)}{t} \right)$, $\theta \in [-1, 1)$

Cópula: $C_\theta(u_1, u_2) = \frac{u_1 u_2}{1 - \theta(1-u_1)(1-u_2)}$

2.3.1 Estimación del parámetro θ

Para estimar el parámetro θ se utiliza el método de momentos basado en el coeficiente de correlación tau de Kendall (τ). Este coeficiente corresponde a una de las medidas de asociación o dependencia más usadas en estadística para variables con distribución no normal (Dupuis, 2007).

Para una muestra aleatoria bivariada $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)\}$ de N observaciones de las variables (X, Y) existen $\binom{N}{2}$ posibilidades de escoger dos pares distintos (x_i, y_i) y (x_j, y_j) , los que pueden ser concordantes o discordantes. Dos pares son concordantes si $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$ y son discordantes si $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$, ($i \neq j$). La estimación muestral para el tau de Kendall (τ_N) viene dada por la siguiente expresión (Nelsen, 2006).

$$\tau_N = \frac{(P_N - Q_N)}{\binom{N}{2}} \quad (2.20)$$

Donde,

P_N : Es el número de pares concordantes en la muestra de tamaño N .

Q_N : Es el número de pares discordantes en la muestra de tamaño N .

Para pares tales que $(x_i - x_j)(y_i - y_j) = 0$ la posibilidad de ser concordante o discordante es la misma.

El rango del coeficiente tau de Kendall corresponde al intervalo $[-1,1]$, donde los extremos corresponden a la máxima medida de dependencia (ya sea positiva o negativa) y el valor nulo al caso de independencia estadística.

Genest y MacKay (1986) demostraron una de las propiedades que convierten a las cópulas Arquimedeanas en las más populares en aplicaciones estadísticas. En ellas existe una relación teórica entre el tau de Kendall y la función generadora de cópula, ϕ , dada por la ecuación (2.21). Luego, para obtener el parámetro θ basta con igualar el coeficiente muestral (τ_n) con el coeficiente paramétrico (τ_θ) del modelo.

$$\tau_\theta = 4 \cdot \int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)} dt + 1 \quad (2.21)$$

La Tabla 2-1 muestra la ecuación que se debe resolver para encontrar el estimador $\hat{\theta}$ del parámetro de cada una de las familias de cópulas candidatas.

Tabla 2-1: tau de Kendall en términos del parámetro de cada cópula.

Cópula	$\tau_\theta = f(\theta)$	Restricción τ
Cook – Johnson	$\tau_\theta = \frac{\theta}{(\theta+2)}$	$\tau \geq 0$
Frank	$\tau_\theta = 1 - \frac{4}{\theta} [D_1(-\theta) - 1]$	No hay
Gumbel- Hougaard	$\tau_\theta = 1 - \theta^{-1}$	$\tau \geq 0$
Ali-Mikhail-Haq	$\tau_\theta = \left(\frac{3\theta-2}{\theta}\right) - \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{\theta}\right)^2 \ln(1-\theta)$	Recomendada para $\tau \in [-0.2, 0.3]$

$D_1(\cdot)$ es la función de Debye de primer orden y se define según :

$$D_1(\theta) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \frac{t}{\exp(t)-1} dt \quad \theta > 0 \quad (2.22)$$

La función $D_1(\cdot)$ con argumento negativo puede ser expresada como:

$$D_1(-\theta) = D_1(\theta) + \frac{\theta}{2} \quad (2.23)$$

2.3.2 Bondad de ajuste de las cópulas

Para evaluar la bondad de ajuste de las cópulas a los datos disponibles se aplica un test gráfico desarrollado por Genest y Rivest (1993) que compara las funciones de probabilidad empírica y teórica de la variable $W = C_\theta(U_1, U_2)$, llamadas K_θ y K_n respectivamente. Es decir, se evalúa el ajuste a través de la función de distribución de la variable $W \in [0,1]$ que en realidad es la función de dependencia entre X e Y .

En primer lugar se estiman los valores empíricos de W_i según la ecuación (2.24).

$$W_i = \frac{\# \text{ de pares tales que } x \leq x_i \text{ e } y \leq y_i}{N} \quad (2.24)$$

Y luego se calcula su función de distribución empírica para los valores de W_i calculados:

$$K_n(W_i) = \frac{\# \text{ de } W_j \text{ tales que } W_j \leq W_i}{N} \quad (2.25)$$

Genest y Rivest (1993) demostraron que la función de distribución de probabilidad teórica de W para cópulas Arquimedeanas está dada por la ecuación (2.26).

$$K_\theta(w) = w - \frac{\phi(w)}{\phi'(w)}, \quad w \in (0,1) \quad (2.26)$$

La función K_θ , al igual que K_n , se evalúa en cada W_i y se construye un gráfico K_θ vs. K_n , llamado K-Kplot. Si los puntos graficados se ajustan a la recta que pasa por el origen con pendiente unitaria significa que las funciones K_n y K_θ concuerdan y que la cópula reproduce de buena manera la estructura de dependencia de los datos. La Figura 2-8 muestra un ejemplo de dos gráficos K_θ vs. K_n , en este caso, el gráfico (a) representaría un mejor ajuste que el gráfico (b).

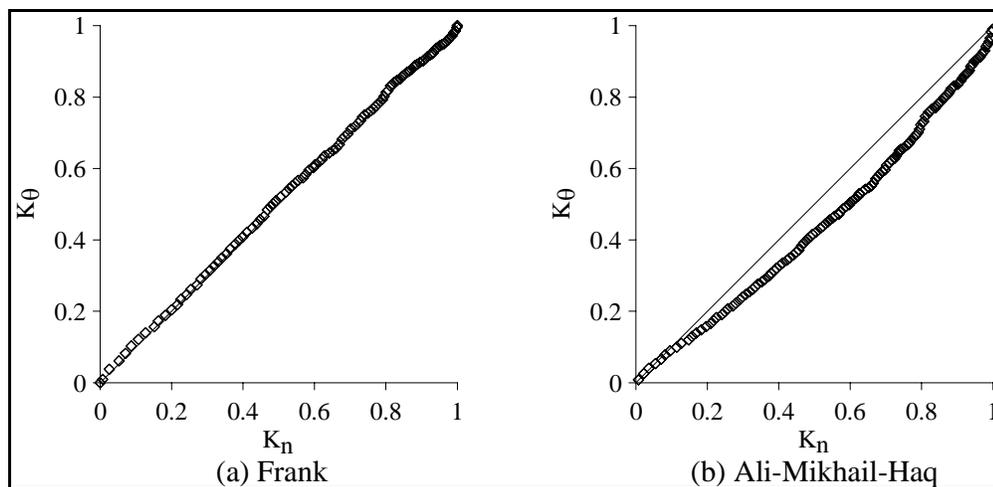


Figura 2-8: Ejemplo de K-Kplots.

En caso de que más de una cópula presente un buen ajuste basado en los gráficos K-Kplots se emplea el Criterio de Información de Akaike para métodos de ajuste no paramétricos (Zhang y Singh, 2007). En este caso, el AIC se calcula según la ecuación (2.27), donde MSE es el error cuadrático medio calculado según la ecuación (2.28), en

que $x_c(i)$ corresponde a la probabilidad calculada y $x_o(i)$ a la probabilidad empírica de la observación i .

$$AIC = N \cdot \log(MSE) + 2(\text{n}^\circ \text{ de parámetros estimados}) \quad (2.27)$$

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_c(i) - x_o(i))^2 \quad (2.28)$$

Con la metodología descrita hasta el momento es posible estimar la FDA conjunta de un determinado par de variables X e Y , $H_{X,Y}(x, y)$. Sin embargo, la implementación del modelo analítico exige conocer la función de densidad de probabilidad (fdp) conjunta, la que se obtiene diferenciando $H_{X,Y}(x, y)$ en ambas variables, tal como muestra la ecuación (2.29).

$$h_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 H_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial G_Y(y)}{\partial y} \quad (2.29)$$

3. TRANSFORMACIÓN LLUVIA-ESCORRENTÍA

En esta sección se desarrollan las expresiones para calcular el volumen (v_r) y el caudal máximo (Q_p) asociado a un evento de escorrentía, estableciendo las relaciones funcionales entre las características de los eventos de precipitación que constituyen la entrada del modelo analítico y las características de los eventos de escorrentía que constituyen el resultado. Para el caso de v_r se usó la metodología desarrollada por Guo y Adams (1998a) y para Q_p además de aplicar la metodología propuesta por Guo y Adams (1998b) se evaluó la posibilidad de implementar el modelo utilizando el hidrograma triangular del Soil Conservation Service de Estados Unidos para establecer comparaciones y esclarecer si la utilización de un hidrograma distinto mejora los resultados obtenidos.

3.1 Volumen de escorrentía (v_r)

Guo y Adams (1998a) desarrollaron una metodología para estimar el volumen de escorrentía como la diferencia entre el volumen de precipitación y las pérdidas debido a intercepción, almacenamiento superficial e infiltración durante las tormentas. Las pérdidas por intercepción y almacenamiento superficial se representan por un solo parámetro, entendiendo de aquí en adelante que las pérdidas por almacenamiento superficial también incluyen a aquellas debido a intercepción. La cuenca se divide en dos tipos de superficies, permeable e impermeable, con alturas de detención superficial (en mm), S_{dp} y S_{di} respectivamente. Las pérdidas por infiltración ocurren solo en las áreas permeables y se estiman con la ecuación de Horton:

$$f_p(t) = f_c + (f_o - f_c) \cdot e^{-kt} \quad (3.1)$$

Donde,

f_p : Es la capacidad de infiltración en el instante t (mm/hr).

f_c : Es la capacidad de infiltración última (mm/hr).

f_o : Es la capacidad de infiltración al inicio de la tormenta (mm/hr).

t : Es el tiempo desde el inicio de la tormenta (hr).

k : Es el coeficiente de decaimiento de la capacidad de infiltración (hr^{-1}).

La Figura 3-1 muestra curvas de capacidad de infiltración para distintos suelos, usando valores típicos de los parámetros de acuerdo a la información disponible en James *et al.* (1998).

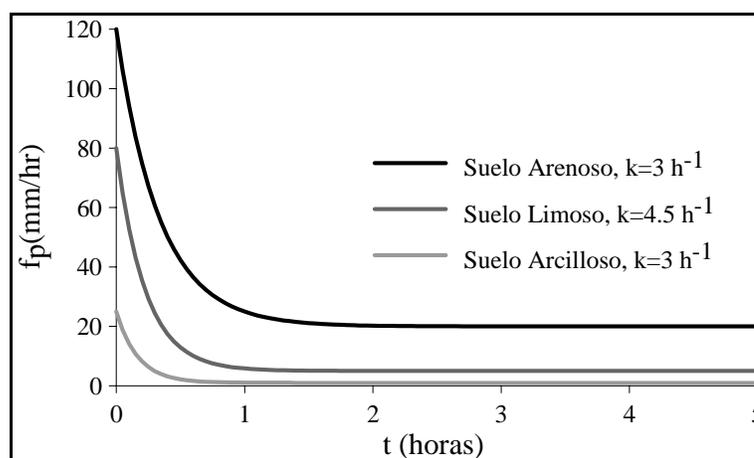


Figura 3-1: Curvas de capacidad de infiltración para distintos suelos.

Al integrar la ecuación (3.1) se obtiene el máximo volumen infiltrable durante una tormenta de duración t , que en milímetros se calcula como:

$$S_{mf} = \int_0^t (f_c + (f_o - f_c) \cdot e^{-kT}) dT = S_{iw} + f_c \cdot t \quad (3.2)$$

$$S_{iw} = \frac{f_o - f_c}{k} [1 - \exp(-k \cdot t)] \quad (3.3)$$

En la ecuación (3.2) se observa que el proceso de infiltración se debe a dos efectos. El primer término del lado derecho corresponde al volumen de infiltración inicial antes de la saturación, llamado de aquí en adelante S_{iw} , y el segundo término corresponde a pérdidas por infiltración a tasa constante f_c . En la Figura 3-1 se observa que para los tres tipos de suelo la capacidad de infiltración decae rápidamente hasta su valor último, por lo que S_{iw} debería satisfacerse durante la primera parte de las lluvias, si el volumen de precipitación es suficiente.

Se considera que en los periodos secos entre tormentas el suelo recupera su capacidad de infiltración, con lo que la capacidad de infiltración inicial varía de un evento a otro. Así, asumiendo que en la última tormenta se alcanzó la saturación del suelo (capacidad de infiltración f_c), la recuperación se modela según la siguiente ecuación (James *et al.*, 1998):

$$f_o(b) = f_m - (f_m - f_c) \cdot e^{-k_d \cdot b} \quad (3.4)$$

Donde,

b : Es el tiempo seco entre tormentas (hr).

f_m : Es la capacidad de infiltración máxima (mm/hr).

k_d : Es el coeficiente de recuperación de la capacidad de infiltración (hr^{-1}) y para su cálculo se considera $k_d = R \cdot k$, con R una constante mucho menor que 1.

Sustituyendo (3.4) en (3.3) se obtiene la siguiente expresión para S_{iw} :

$$S_{iw} = \frac{(f_m - f_c)}{k} [1 - e^{-k \cdot t}] \cdot [1 - e^{-k_d b}] \quad (3.5)$$

Dado que b y t son variables aleatorias que dependen de las tormentas, S_{iw} también lo es. Sin embargo, para el desarrollo del modelo analítico este parámetro se trata como una constante, igual a su valor esperado, calculado según (3.6).

$$E(S_{iw}) = \int_{IETD} \int_0^{\infty} S_{iw} \cdot h_{B,T}(b, t) dt db \quad (3.6)$$

En la ecuación (3.6), $h_{B,T}(b, t)$ es la función de densidad de probabilidad conjunta de TET y la duración de las tormentas, determinada con teoría de cópulas.

Finalmente, para encontrar una expresión para el volumen de escorrentía, se asume que el volumen de lluvia debe satisfacer S_{di} para que se genere escorrentía en las zonas impermeables y, por otro lado, debe satisfacer S_{dp} y S_{iw} para que se genere escurrimiento en las zonas permeables. Considerando lo anterior, el volumen de escorrentía generado por las áreas impermeables (v_{ri}) está dado por la ecuación (3.7) y el volumen de escorrentía generado por las áreas permeables (v_{rp}) está dado por (3.8).

$$v_{ri} = \begin{cases} 0 & v \leq S_{di} \\ v - S_{di} & v > S_{di} \end{cases} \quad (3.7)$$

$$v_{rp} = \begin{cases} 0 & v \leq S_{dp} + S_{iw} + f_c \cdot t \\ v - S_{dp} - S_{iw} - f_c \cdot t & v > S_{dp} + S_{iw} + f_c \cdot t \end{cases} \quad (3.8)$$

El volumen de escurrimiento total se define como la suma ponderada por área de los aportes de ambos tipos de superficie y está dado por la ecuación (3.9), donde h la fracción de área impermeable de la cuenca.

$$v_r = \begin{cases} 0 & v \leq S_{di} \\ h(v - S_{di}) & S_{di} < v \leq S_{il} + f_c t \\ v - S_d - f_c(1-h)t & v > S_{il} + f_c t \end{cases} \quad (3.9)$$

Donde S_{iw} se estima como $E(S_{iw})$ y los términos S_{il} y S_d están dados por:

$$S_{il} = S_{dp} + S_{iw} \quad (3.10)$$

$$S_d = hS_{di} + (1-h)S_{il} \quad (3.11)$$

3.2 Caudal máximo (Q_p)

La relación entre el caudal máximo, el volumen de precipitación y la duración de tormentas no es tan directa como para el caso del volumen de escurrimiento. Para la estimación de Q_p se debe conocer la distribución de la lluvia durante la tormenta, calcular el hidrograma de respuesta y de ahí obtener el caudal máximo. En la práctica, se han usado métodos como el de la onda cinemática, hidrograma unitario e hidrogramas triangulares para establecer la relación entre la lluvia y la escorrentía. Guo y Adams (1998b) adoptaron un hidrograma de respuesta triangular con tiempo base igual a la suma de la duración de la tormenta y el tiempo de concentración de la cuenca, obteniendo buenos resultados. En este trabajo, se desarrolla el modelo utilizando el hidrograma propuesto por ellos pero además se implementa una alternativa adoptando el hidrograma triangular del Soil Conservation Service de Estados Unidos como una manera de comparar resultados y explorar el desempeño de ambos hidrogramas.

3.2.1 Caudal máximo según hidrograma propuesto por Guo y Adams

Para calcular el caudal máximo de un evento con volumen de escorrentía v_r , Guo y Adams (1998a) utilizaron un hidrograma de respuesta de la cuenca como el de la Figura 3-2. Ellos propusieron que la duración de un evento de escorrentía puede estimarse como la suma de la duración de la tormenta que lo origina (t) más el tiempo de concentración de la cuenca (t_c), basándose en que es posible observar escurrimiento a la salida de una cuenca al inicio de la correspondiente tormenta si el tiempo de retraso causado por el tiempo necesario para llenar las depresiones de la cuenca es despreciable y en que la última gota en caer en el punto hidráulicamente más alejado de la cuenca demora t_c en alcanzar la salida.

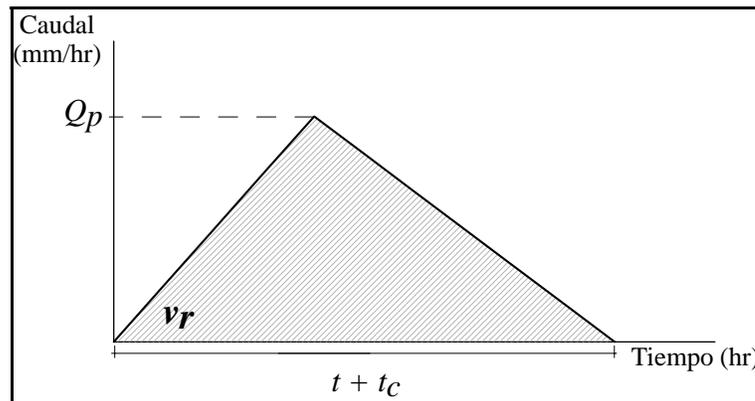


Figura 3-2: Hidrograma utilizado por Guo y Adams.

De acuerdo a la Figura 3-2, el volumen de escorrentía es igual al área bajo el hidrograma, es decir:

$$v_r = \frac{1}{2}(t+t_c)Q_p \quad (3.12)$$

Luego, Q_p se calcula como:

$$Q_p = \frac{2v_r}{(t+t_c)} \quad (3.13)$$

Cabe destacar que la expresión anterior es independiente del momento en que ocurre el caudal máximo, lo que, según los propios autores, podría afectar las estimaciones. Sin embargo, su trabajo acepta esta aproximación y se obtienen resultados razonables.

Reemplazando (3.9) en (3.13) se obtiene la siguiente expresión para Q_p .

$$Q_p = \begin{cases} 0 & v \leq S_{di} \\ \frac{2h(v-S_{di})}{t+t_c} & S_{di} < v \leq S_{il} + f_c t \\ \frac{v-S_d - f_c(1-h)t}{t+t_c} & v > S_{il} + f_c t \end{cases} \quad (3.14)$$

3.2.2 Caudal máximo según hidrograma SCS

También se usó el hidrograma triangular del Soil Conservation Service de Estados Unidos (Soil Conservation Service, 1972), que fue derivado de muchos hidrogramas calculados para representar la respuesta de una cuenca. Esta aproximación tiene una zona de ascenso que corresponde al 37% del volumen escurrido (Figura 3-3) y establece que el tiempo base (t_b) y el tiempo al máximo (t_p) se estiman en términos del tiempo de concentración de la cuenca, de acuerdo a las siguientes expresiones (MINVU, 1996).

$$t_p = 0.67t_c \quad (3.15)$$

$$t_b = 2.67t_p = 1.8t_c \quad (3.16)$$

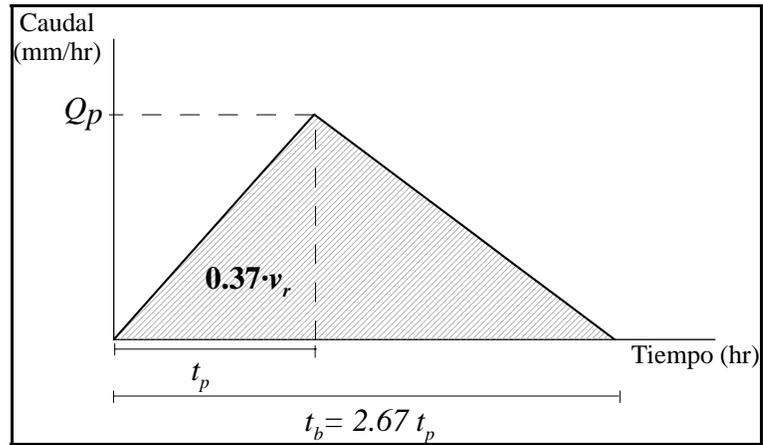


Figura 3-3: Hidrograma triangular del SCS.

Luego, Q_p y v_r se relacionan a través de la ecuación (3.17).

$$\frac{1}{2} t_p Q_p = 0.37 v_r \quad (3.17)$$

Reemplazando (3.15) en (3.17) y ordenando, se obtiene:

$$Q_p = \frac{1.1 \cdot v_r}{t_c} \quad (3.18)$$

Finalmente, reemplazando la ecuación (3.9) en (3.18) se obtiene:

$$Q_p = \begin{cases} 0 & v \leq S_{di} \\ \frac{1.1h(v - S_{di})}{t_c} & S_{di} < v \leq S_{il} + f_c t \\ \frac{1.1[v - S_d - f_c(1-h)t]}{t_c} & v > S_{il} + f_c t \end{cases} \quad (3.19)$$

3.2.3 Estimación del tiempo de concentración

En las expresiones desarrolladas para el cálculo del caudal máximo de un evento de escorrentía se incluye el tiempo de concentración de la cuenca. Este parámetro en general tiene asociado una serie de factores que hacen que su estimación sea compleja y de gran incertidumbre.

En los modelos analíticos, para cada parámetro de la cuenca (S_{di} , S_{dp} , S_{iw} , f_m , f_c , k , R y h) se adopta un valor global, promediado espacialmente, lo que corresponde a una modelación agregada de la cuenca. Sin embargo, para disminuir el grado de incertidumbre, en el cálculo del tiempo de concentración se recomienda utilizar una representación de la cuenca de acuerdo a una configuración típicamente utilizada en simulación continua, subdividiendo la cuenca en subcuencas de características homogéneas, conectadas por elementos de conducción (por ejemplo calles o colectores). Si no es posible la subdivisión en subcuencas, el tiempo de concentración se calcula para la cuenca agregada, considerando el recorrido del flujo a través de la cuenca completa (Quader y Guo, 2006).

Para estimar el tiempo de concentración de las subcuencas se adoptó una configuración inspirada en la modelación por método SWMM. En dicho modelo cada subcuenca se representa por un plano inclinado subdividido en dos planos paralelos, permeable e impermeable, que escurren directamente hacia la salida (James *et al.*, 1998). Luego, se calcula el tiempo de concentración para cada plano de escurrimiento y se adopta como tiempo de concentración de la subcuenca el mayor valor. Es decir, si t_{ci} es el tiempo de concentración del plano impermeable y t_{cp} es el tiempo de concentración del plano permeable se tiene que el tiempo de concentración de la subcuenca, llamado t_{cs} , es:

$$t_{cs} = \max(t_{ci}, t_{cp}) \quad (3.20)$$

Para estimar el tiempo de concentración en cada plano existen muchas fórmulas y en la literatura se encuentran fórmulas que en términos generales se pueden agrupar en dos tipos. Las fórmulas del tipo 1 expresan t_c como una función que depende solo de las características de la cuenca, mientras que las del tipo 2 expresan t_c en términos de las características de la cuenca y la intensidad de lluvia (Quader y Guo, 2006). Dentro de las fórmulas tipo 2 se encuentra la de Morgali y Linsley (ecuación (3.21)) que corresponde a una ecuación de flujo superficial ampliamente utilizada y fue adoptada para este trabajo.

$$t_c = \frac{7}{60} \frac{L^{0.6} n^{0.6}}{i_e^{0.4} S^{0.3}} \quad (3.21)$$

Donde,

L : Es la longitud del escurrimiento superficial (m).

n : Es el coeficiente de rugosidad de Manning de la superficie.

i : Es la intensidad de precipitación efectiva (mm/hr).

S : Es la pendiente (m/m).

Para la aplicación de la fórmula (3.21) al plano permeable e impermeable se adopta la notación de las ecuaciones (3.22) y (3.23).

$$t_{cp} = \frac{7}{60} \frac{L_p^{0.6} n_p^{0.6}}{i_{ep}^{0.4} S^{0.3}} \quad (3.22)$$

$$t_{ci} = \frac{7}{60} \frac{L_i^{0.6} n_i^{0.6}}{i_{ei}^{0.4} S^{0.3}} \quad (3.23)$$

Donde,

n_p : Es la rugosidad de la superficie permeable.

n_i : Es la rugosidad de la superficie impermeable.

L_p : Es la longitud del plano permeable (m).

L_i : Es la longitud del plano impermeable (m).

i_{ep} : Es la intensidad de lluvia efectiva sobre la superficie permeable (mm/hr).

i_{ei} : Es la intensidad de lluvia efectiva sobre la superficie impermeable (mm/hr).

El valor de los parámetros S , n_i y n_p se puede obtener de mediciones de terreno ya que corresponden a características reales de las subcuencas, mientras que el largo de los planos se debe calcular, ya que es un concepto que nace de la modelación de ellas. La Figura 3-4 muestra un esquema de la configuración geométrica del modelo de subcuenca adoptado. Para efectos de la modelación se asume que la subcuenca es de ancho constante W , parámetro conocido como ancho equivalente (Huber, 1992), y las longitudes de cada plano se calculan de acuerdo a la proporción de superficie impermeable y permeable de la subcuenca.

Respecto del valor de precipitación efectiva se sigue la metodología usada por Guo y Adams (1998b), en la que para el plano impermeable se utiliza el promedio histórico de intensidad de precipitación, calculado sin considerar aquellos eventos en que el volumen de precipitación, expresado en milímetros, no satisface la altura detención superficial del plano impermeable S_{di} . Para el plano permeable también se calcula el promedio histórico, pero calculado sin considerar aquellos eventos que no satisfacen las pérdidas iniciales de este tipo de superficie ($S_{il} = S_{dp} + S_{iw}$).

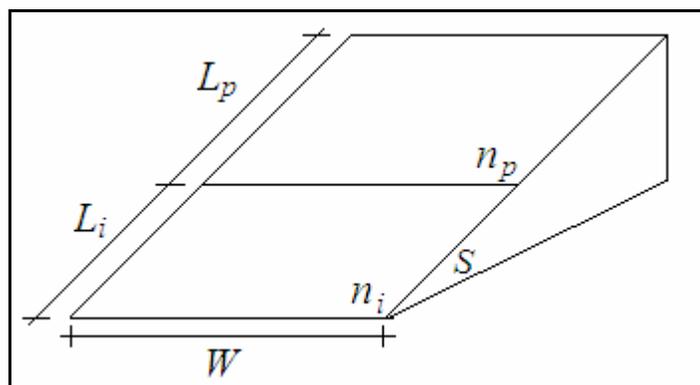


Figura 3-4: Representación esquemática de la subcuenca (James *et al.*, 1998).

El tiempo de viaje por los elementos de conducción que unen a las subcuencas se calcula como el cociente entre el largo del elemento (L_p) y la velocidad del escurrimiento, estimada de acuerdo a la ecuación (3.24), propuesta por el Urban Drainage and Flood Control District (2008).

$$V_p = 0.3048 \cdot C_v \cdot S_p^{0.5} \quad (3.24)$$

Donde,

V_p : Velocidad de conducción (m/s).

C_v : Coeficiente de transporte (según Tabla 3-1).

S_p : Pendiente del elemento de conducción (m/m).

Tabla 3-1: Valores de C_v según tipo de superficie de conducción

Tipo de superficie	Coeficiente de transporte, C_v
Pradera	2.5
Labranza	5
Pasto corto y césped	7
Suelos casi desnudos	10
Áreas pavimentadas	20

Finalmente, el tiempo de concentración se calcula para todas las rutas posibles que puede seguir el flujo y se adopta el mayor valor. Una ruta está compuesta por subcuencas y elementos de conducción, con lo que tiempo de viaje total asociado a ella se calcula según:

$$t_{c,r} = \sum_{k=1}^{N_{s,r}} t_{cs,r,k} + \sum_{k=1}^{N_{p,r}} \frac{L_{p,r,k}}{V_{p,r,k}} \quad (3.25)$$

Donde,

$t_{c,r}$: Es el tiempo de concentración asociado a la ruta r .

$N_{s,r}$: Es el número de subcuencas de la ruta r .

$N_{p,r}$: Es el número de elementos de conducción de la ruta r .

$t_{cs,r,k}$: Es el tiempo de concentración de la k -ésima subcuenca de la ruta r .

$L_{p,r,k}$: Es el largo del k -ésimo elemento de conducción de la ruta r .

$V_{p,r,k}$: Es la velocidad del escurrimiento en el k -ésimo elemento de conducción de la ruta r .

Y el tiempo de concentración de la cuenca completa corresponde a:

$$t_c = \max_r \{t_{c,r}\} \quad (3.26)$$

De más está decir que por más que se racionalice el cálculo la estimación del tiempo de concentración es tremendamente arbitraria y conduce a resultados muy dispares por pequeños cambios de criterios.

4. FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE LAS PROPIEDADES DE ESCORRENTÍA

La transformación lluvia-escorrentía para cuencas urbanas queda representada por la ecuación (3.9), que describe la relación funcional entre las variables v_r , v y t y por las ecuaciones (3.14) o (3.19) que describen la relación entre Q_p , v y t , dependiendo del hidrograma de respuesta que se adopte. En esta sección se derivan las funciones de distribución de probabilidad de v_r y Q_p usando la teoría de distribuciones de probabilidad y las relaciones funcionales antes mencionadas.

4.1 Función de probabilidad acumulada del volumen de escorrentía (v_r)

La función de probabilidad acumulada de v_r se calcula integrando la función de densidad de probabilidad conjunta del volumen y duración de tormentas $h_{v,T}(v,t)$ sobre regiones de integración definidas en el plano $v-t$ para valores de v_r en los tres rangos de la ecuación (3.9). Para ello, se consideran tres casos: (a) No se produce escurrimiento en la cuenca, (b) El escurrimiento se genera sólo en las áreas impermeables y (c) El escurrimiento puede generarse en las áreas impermeables y permeables.

a) No se produce escurrimiento en la cuenca ($v_r = 0$)

El volumen de escurrimiento es nulo si el volumen de precipitación v es menor que la altura de detención del área impermeable S_{di} , es decir, $v \leq S_{di}$. Luego la probabilidad de escorrentía nula viene dada por:

$$P(v_r = 0) = P(v \leq S_{di}) = \int_0^{\infty} \int_0^{S_{di}} h_{v,T}(v,t) dv dt \quad (4.1)$$

b) El escurrimiento se genera sólo en áreas impermeables

Este caso se presenta cuando el volumen de precipitación v satisface S_{di} pero no es capaz de satisfacer las pérdidas iniciales que ocurren en las zonas permeables, es decir, $S_{di} < v \leq S_{il}$. De acuerdo a la ecuación (3.9), esta situación determina que v_r es siempre menor que hS_{dd} , con $S_{dd} = S_{il} - S_{di}$. Luego, la probabilidad de que v_r sea menor que un valor v_0 , con v_0 mayor que cero pero menor o igual que hS_{dd} , se obtiene de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 P(0 < v_r \leq v_0) &= P(0 < h(v - S_{di}) \leq v_0) \\
 &= P\left(S_{di} < v \leq \frac{v_0}{h} + S_{di}\right) \\
 &= \int_0^{\frac{v_0}{h} + S_{di}} \int_{S_{di}}^{\infty} h_{v,T}(v, t) \, dv \, dt
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 P(v_r \leq v_o) &= P(0 < v_r \leq v_0) + P(v_r = 0) \\
 &= \int_0^{\frac{v_0}{h} + S_{di}} \int_0^{\infty} h_{v,T}(v, t) \, dv \, dt \quad v_0 \leq hS_{dd}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

c) El escurrimiento puede generarse en las áreas impermeables y permeables

Cuando $v > S_{ii}$, las áreas permeables también pueden contribuir a la generación de escorrentía, dependiendo de la duración de la tormenta y la capacidad de infiltración del suelo. En este caso el volumen de escorrentía es mayor que hS_{dd} y la probabilidad de que v_r sea menor que un cierto valor v_0 se calcula como la suma de las probabilidades de no excedencia de dos grupos de eventos mutuamente excluyentes. El primer grupo incluye a aquellos eventos en que el área permeable no genera escorrentía debido a la alta capacidad de infiltración del suelo ya que $v \leq S_{ii} + f_c t$. Mientras que el grupo 2 incluye aquellos eventos que cumplen con $v > S_{ii} + f_c t$, es decir, a aquellos eventos en que tanto la superficie impermeable como la permeable contribuyen a la escorrentía.

La Figura 4-1 indica la zona de integración para los eventos de escorrentía en este rango de v_r . En primer lugar, se tiene que el límite inferior para v es S_{ii} . Además, los eventos del grupo 1 corresponden a todas aquellas combinaciones (v, t) que cumplen con $v \leq S_{ii} + f_c t$ y con $h(v - S_{di}) \leq v_0$, mientras que los eventos del grupo 2 cumplen con $v > S_{ii} + f_c t$ y con $v - S_d - f_c(1 - h)t \leq v_0$. En resumen, el grupo 1 está compuesto por todos los pares (v, t) que se encuentran bajo la rectas 1 y 2 pero sobre la recta 4, mientras que el grupo 2 está compuesto por aquellos puntos que están bajo la recta 3 pero sobre la recta 2, donde:

$$\text{Recta 1: } v = \frac{v_0}{h} + S_{di}$$

$$\text{Recta 2: } v = S_{ii} + f_c t$$

$$\text{Recta 3: } v = v_0 + S_d + f_c(1 - h)t$$

$$\text{Recta 4: } v = S_{ii}$$

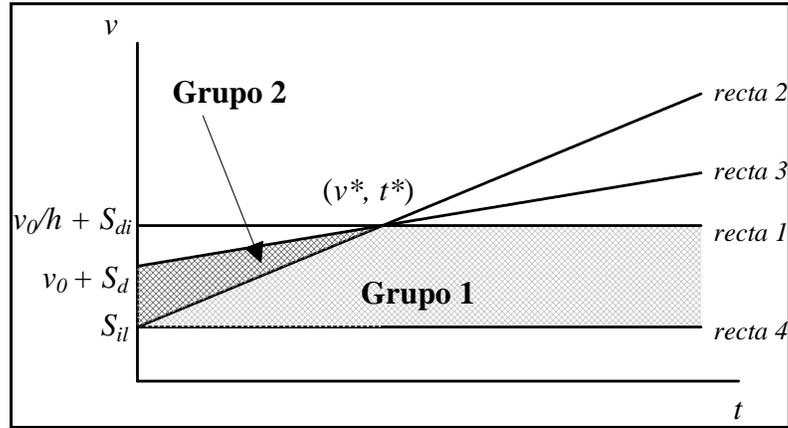


Figura 4-1: Región de integración para calcular $P(0 < v_r \leq v_0)$ cuando $v_0 > hS_{dd}$.

Luego, $P(v_r \leq v_0)$ con $v_0 > hS_{dd}$ se calcula como:

$$P(v_r \leq v_0) = \int_0^{\frac{v_0}{h} + S_{dd}} \int_{S_{dl}} h_{v,T}(v,t) dv dt - \int_0^{t^*} \int_{f_c(1-h)t + v_0 + S_d}^{\frac{v_0}{h} + S_{dd}} h_{v,T}(v,t) dv dt + P(v_r \leq hS_{dd}) \quad (4.4)$$

Donde,

$$P(v_r \leq hS_{dd}) = \int_0^{\infty} \int_0^{S_{dl}} h_{v,T}(v,t) dv dt \quad (4.5)$$

El valor de t^* corresponde a la abscisa del punto donde se intersectan las rectas y se calcula según la ecuación (4.6).

$$t^* = \frac{1}{f_c} \left(\frac{v_0}{h} - S_{dd} \right) \quad (4.6)$$

Resumiendo, la FDA de v_r , definida por tramos es:

$$\begin{aligned}
 F_{V_r}(v_r) &= \int_0^\infty \int_0^{S_{di}} h_{V,T}(v,t) dv dt & v_0 = 0 \\
 F_{V_r}(v_r) &= \int_0^\infty \int_0^{\frac{v_0+S_{di}}{h}} h_{V,T}(v,t) dv dt & v_0 \leq hS_{dd} \\
 F_{V_r}(v_r) &= \int_0^\infty \int_0^{\frac{v_0+S_{di}}{h}} h_{V,T}(v,t) dv dt - \int_0^{t^*} \int_{f_c \cdot (1-h)t+v_0+S_d}^{\frac{v_0+S_{di}}{h}} h_{V,T}(v,t) dv dt & v_0 > hS_{dd}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

4.2 Función de probabilidad acumulada del caudal máximo (Q_p)

La función de distribución acumulada de Q_p , $F_{Q_p}(q_p)$, se obtiene integrando $h_{V,T}(v,t)$ sobre regiones del plano $v-t$ definidas de acuerdo a la relación funcional encontrada para Q_p , v , t , dada por la ecuación (3.14) o (3.19), dependiendo del hidrograma de respuesta adoptado para la cuenca. A continuación se desarrolla $F_{Q_p}(q_p)$ para ambos casos.

4.2.1 Función de probabilidad acumulada de Q_p utilizando hidrograma propuesto por Guo y Adams

De acuerdo a la ecuación (3.14), la probabilidad de caudal nulo es equivalente al caso en que el volumen de lluvia sea menor o igual a la altura de detención superficial de las áreas impermeables. Luego, la probabilidad de ocurrencia de este tipo de evento está dada por la ecuación (4.8).

$$P(Q_p = 0) = P(v \leq S_{di}) = \int_0^{\infty} \int_0^{S_{di}} h_{v,T}(v, t) dv dt \quad (4.8)$$

Para el cálculo de $P(Q_p \leq q_p)$ cuando $q_p > 0$, Guo y Adams (1998b) proponen interpretar $P(Q_p \leq q_p)$ como la suma de dos términos: $P_1(Q_p \leq q_p)$ cuando v y t son tales que $S_{di} < v \leq S_{ii} + f_c t$ y $P_2(Q_p \leq q_p)$ cuando v y t cumplen con $v > S_{ii} + f_c t$. Luego,

$$P(Q_p \leq q_p) = P_1(Q_p \leq q_p) + P_2(Q_p \leq q_p) \quad (4.9)$$

La región de integración para P_1 , llamada región 1, está definida por las siguientes desigualdades:

$$\frac{2h(v - S_{di})}{t + t_c} < q_p$$

$$S_{di} < v \leq S_{ii} + f_c t$$

Lo que equivale a:

$$v < \frac{q_p}{2h} t + \frac{q_p t_c}{2h} + S_{di}$$

$$S_{di} < v \leq S_{ii} + f_c t$$

Y la región de integración para determinar P_2 está limitada por:

$$\frac{2[v - S_d - f_c(1-h)t]}{t + t_c} < q_p$$

$$v > S_{il} + f_c t$$

Lo que equivale a:

$$v < \left[\frac{q_p}{2} + f_c(1-h) \right] t + \frac{q_p t_c}{2} + S_d$$

$$v > S_{il} + f_c t$$

Es decir, las regiones de integración en el plano $v-t$ para determinar P_1 y P_2 son áreas limitadas por las rectas de las ecuaciones (4.10), (4.11) y (4.12). La región 1 corresponde a todas las combinaciones que están bajo v_1 y v_2 , mientras que la región 2 está sobre v_1 pero bajo v_3 .

$$v_1 = S_{il} + f_c t \tag{4.10}$$

$$v_2 = \frac{q_p}{2h} t + \frac{q_p t_c}{2h} + S_{di} \tag{4.11}$$

$$v_3 = \left[\frac{q_p}{2} + f_c(1-h) \right] t + \frac{q_p t_c}{2} + S_d \tag{4.12}$$

En las ecuaciones (4.10), (4.11) y (4.12) se observa que los interceptos y pendientes de las rectas v_1 , v_2 y v_3 dependen de los valores de S_{di} , S_{il} , S_d , f_c , h , t_c y q_p , por lo que la ubicación relativa de ellas, y por ende las zonas de integración, depende del valor q_p

que se requiera evaluar y el tipo de cuenca. Para comparar la magnitud relativa de las pendientes de las rectas (S_1 , S_2 y S_3 respectivamente) Guo y Adams proponen que los posibles valores de q_p se deben dividir en dos rangos: $q_p < 2f_c h$ y $q_p \geq 2f_c h$. Ya que cuando $q_p < 2f_c h$ se tiene que S_2 y S_3 son menores que S_1 y cuando $q_p \geq 2f_c h$ S_2 y S_3 son mayores que S_1 .

La diferencia entre las pendientes de las líneas v_2 y v_3 se calcula como:

$$S_2 - S_3 = \frac{q_p}{2h} - \frac{q_p}{2} - f_c(1-h) = (1-h) \left[\frac{q_p}{2h} - f_c \right] \quad (4.13)$$

Sabiendo que $0 \leq h \leq 1$, de la ecuación (4.13) se puede ver que cuando $q_p < 2f_c h$ la pendiente S_2 es menor que S_3 , mientras que cuando $q_p \geq 2f_c h$ ocurre lo contrario. En resumen, si $q_p < 2f_c h$ la magnitud relativa de las pendientes es $S_2 < S_3 < S_1$ y cuando $q_p \geq 2f_c h$ la magnitud relativa es $S_1 \leq S_3 \leq S_2$.

Para determinar la magnitud relativa de los interceptos de las rectas, denotados con la letra I , se sigue un análisis similar al hecho para las pendientes. Así, la diferencia entre los interceptos de v_1 y v_2 está dada por la ecuación (4.14), en la que se observa que cuando $q_p < \frac{2hS_{dd}}{t_c}$ los interceptos cumplen $I_1 > I_2$, mientras que cuando $q_p \geq \frac{2hS_{dd}}{t_c}$, $I_1 \leq I_2$.

$$I_1 - I_2 = S_{il} - \frac{q_p t_c}{2h} - S_{di} = S_{dd} - \frac{q_p t_c}{2h} \quad (4.14)$$

La diferencia entre los interceptos de v_1 y v_3 está dada por la ecuación (4.15). En ella se observa que cuando $q_p < \frac{2hS_{dd}}{t_c}$ los interceptos cumplen $I_1 > I_3$, mientras que cuando

$q_p \geq \frac{2hS_{dd}}{t_c}$ ocurre que $I_1 \leq I_3$.

$$I_1 - I_3 = S_{il} - \frac{q_p t_c}{2} - S_d = S_{il} - \frac{q_p t_c}{2} - hS_{di} - (1-h)S_{il} = hS_{dd} - \frac{q_p t_c}{2} \quad (4.15)$$

Finalmente, la diferencia entre I_2 e I_3 se calcula según (4.16). En este caso, si $q_p < \frac{2hS_{dd}}{t_c}$ los interceptos cumplen $I_2 < I_3$ y si $q_p \geq \frac{2hS_{dd}}{t_c}$ se tiene que $I_2 \geq I_3$.

$$I_2 - I_3 = \frac{q_p t_c}{2h} + S_{di} - \frac{q_p t_c}{2} - S_d = \frac{q_p t_c}{2h} (1-h) + S_{di} - hS_{di} - (1-h)S_{il} \quad (4.16)$$

$$= (1-h) \left[\frac{q_p t_c}{2h} - S_{dd} \right]$$

En resumen, si $q_p < \frac{2hS_{dd}}{t_c}$ la magnitud relativa de los interceptos es $I_2 < I_3 < I_1$ y

cuando $q_p \geq \frac{2hS_{dd}}{t_c}$ la magnitud relativa es $I_1 \leq I_3 \leq I_2$.

La Tabla 4-1 resume las relaciones establecidas para los interceptos y pendientes de las líneas v_1 , v_2 y v_3 .

Tabla 4-1: Magnitudes relativas de los interceptos y pendientes de las rectas v_1 , v_2 y v_3 que definen la región de integración para $P(Q_p \leq q_p)$ cuando $q_p > 0$.

	Si $q_p < 2f_c h$	$q_p \geq 2f_c h$
Si $q_p < 2hS_{dd}/t_c$	$S_2 < S_3 < S_1$	$S_1 \leq S_3 \leq S_2$
	$I_2 < I_3 < I_1$	$I_2 < I_3 < I_1$
Si $q_p \geq 2hS_{dd}/t_c$	$S_2 < S_3 < S_1$	$S_1 \leq S_3 \leq S_2$
	$I_1 \leq I_3 \leq I_2$	$I_1 \leq I_3 \leq I_2$

Para dejar completamente determinadas las posiciones relativas de las rectas v_1 , v_2 y v_3 es necesario conocer las magnitudes relativas de los términos $2f_c h$ y $2hS_{dd}/t_c$, lo que equivale a comparar f_c con el término S_{dd}/t_c . Así, si $f_c < S_{dd}/t_c$, los posibles valores de q_p deben ser divididos en tres rangos para determinar la relación entre los interceptos y pendientes de las tres líneas: $q_p < 2f_c h$, $2f_c h \leq q_p < 2hS_{dd}/t_c$ y $2hS_{dd}/t_c \leq q_p$. De la misma manera, si $f_c \geq S_{dd}/t_c$, los valores de q_p se clasifican en: $q_p < 2hS_{dd}/t_c$, $2hS_{dd}/t_c \leq q_p < 2f_c h$ y $2f_c h \leq q_p$.

Para definir las zonas de integración, las cuencas urbanas se dividen en dos tipos. Las cuencas tipo 1 son las que presentan una capacidad de infiltración última menor que S_{dd}/t_c y las tipo 2 corresponden a aquellas en que $f_c \geq S_{dd}/t_c$. Para ambos tipo de cuencas existen tres posibles rangos de q_p , presentando cada uno distintas configuraciones para las magnitudes relativas de los interceptos y pendientes de las rectas que definen la zona de integración, a continuación se determinan estas zonas para cada una de las configuraciones posibles.

4.2.1.1 Cuencas urbanas tipo 1, $f_c < S_{dd}/t_c$

a) Caso $q_p < 2f_c h$

En este caso se tiene que $S_2 < S_3 < S_1$ y $I_2 < I_3 < I_1$, con lo que la región de integración es la que se muestra en la Figura 4-2 y la probabilidad se calcula según la ecuación (4.17).

$$P(Q_p \leq q_p) = \int_0^{\infty} \int_0^{v_2(v,t)} h_{v,T}(v,t) dv dt \quad (4.17)$$

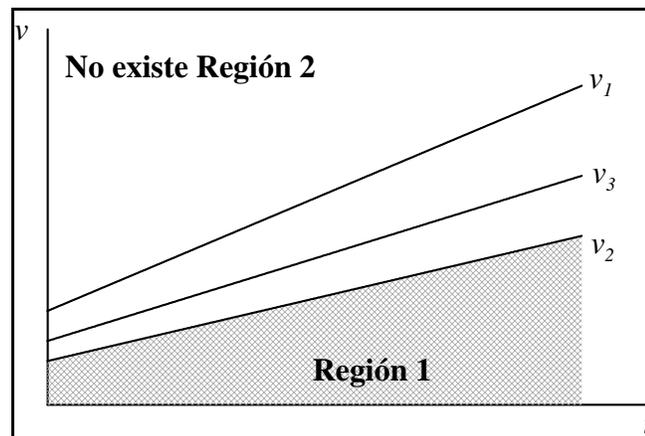


Figura 4-2: Región de integración para $P(Q_p \leq q_p)$ para cuenca tipo 1 con $q_p < 2f_c h$.

b) Caso $2f_c h \leq q_p < 2hS_{dd}/t_c$

En este caso las rectas se ubican de acuerdo a las siguientes relaciones de sus pendientes e interceptos: $S_1 \leq S_3 \leq S_2$ y $I_2 < I_3 < I_1$. La región de integración se muestra en la Figura 4-3 y la probabilidad se calcula según la ecuación (4.18).

$$P(Q_p \leq q_p) = \int_0^{t^{**}} \int_0^{v_2(v,t)} h_{v,T}(v,t) dv dt + \int_{t^{**}}^{\infty} \int_0^{v_3(v,t)} h_{v,T}(v,t) dv dt \quad (4.18)$$

Donde,

$$t^{**} = \frac{2gS_{dd} - q_p t_c}{q_p - 2f_c h} \quad (4.19)$$

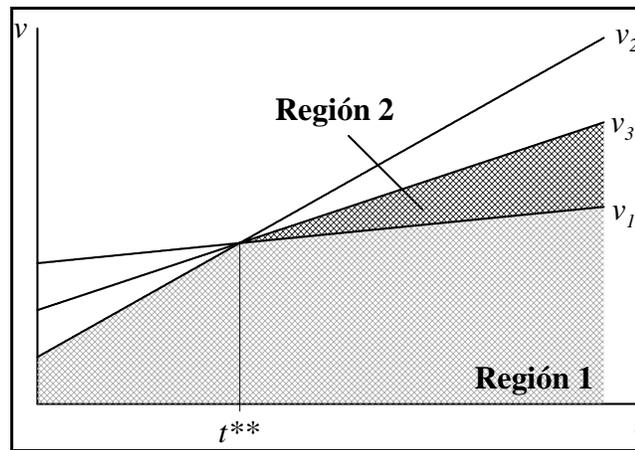


Figura 4-3: Región de integración para $P(Q_p \leq q_p)$ para cuenca tipo 1 con $2f_c h \leq q_p < 2hS_{dd} / t_c$

c) Caso $2hS_{dd} / t_c \leq q_p$

En este caso se tiene que $S_1 \leq S_3 \leq S_2$ y $I_1 \leq I_3 \leq I_2$, con lo que la región de integración es la que se muestra en la Figura 4-4 y la probabilidad se calcula según la ecuación (4.20).

$$P(Q_p \leq q_p) = \int_0^{\infty} \int_0^{v_3(v,t)} h_{v,T}(v,t) dv dt \quad (4.20)$$

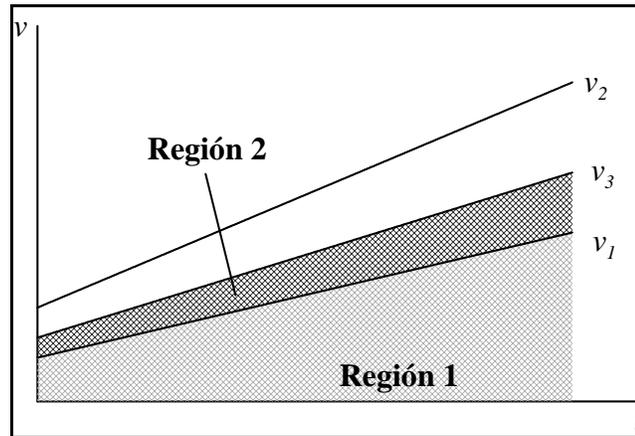


Figura 4-4: Región de integración para $P(Q_p \leq q_p)$ para cuenca tipo 1 con $q_p \geq 2f_c h$.

4.2.1.2 Cuencas urbanas tipo 2

a) Caso $q_p < 2hS_{dd}/t_c$

En este caso $S_2 < S_3 < S_1$ y $I_2 < I_3 < I_1$, es decir, la magnitud relativa de pendientes e interceptos es igual que en el caso $q_p < 2f_c h$ para las cuencas tipo 1. Luego, la región de integración es la misma que en dicho caso y la probabilidad se calcula con la ecuación (4.17).

b) Caso $2hS_{dd}/t_c \leq q_p < 2f_c h$

En este rango de q_p las magnitudes relativas de pendientes e interceptos siguen el siguiente orden: $S_2 < S_3 < S_1$ y $I_1 \leq I_3 \leq I_2$. De acuerdo a esto, la región de integración es la que se muestra en la Figura 4-5 y la probabilidad se calcula como:

$$P(Q_p \leq q_p) = \int_0^{t^{**}} \int_0^{v_3(v,t)} h_{v,T}(v,t) dv dt + \int_{t^{**}}^{\infty} \int_0^{v_2(v,t)} h_{v,T}(v,t) dv dt \quad (4.21)$$

Con t^{**} definido con la ecuación (4.19).

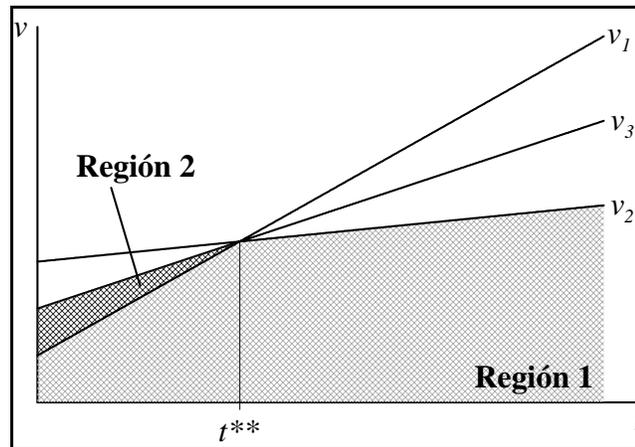


Figura 4-5: Región de integración para $P(Q_p \leq q_p)$ para cuenca tipo 2 con $2hS_{dd}/t_c \leq q_p < 2f_c h$

c) Caso $2f_c h \leq q_p$

En este caso $S_1 \leq S_3 \leq S_2$ y $I_1 \leq I_3 \leq I_2$, es decir, la magnitud relativa de pendientes e interceptos es igual que en el caso $2hS_{dd}/t_c \leq q_p$ para las cuencas tipo 1. Luego, la región de integración es la misma que en dicho caso y la probabilidad se calcula con la ecuación (4.20).

En resumen, $P(Q_p \leq q_p) = F_{Q_p}(q_p)$ para $q_p > 0$ está dada por los conjuntos de ecuaciones (4.22) y (4.23):

- **Para cuencas Tipo 1 con $fc < S_{dd} / t_c$**

$$F_{Q_p}(q_p) = \int_0^{\infty} \int_0^{v_2(v,t)} h_{v,T}(v,t) dv dt \quad q_p < 2f_c h$$

$$F_{Q_p}(q_p) = \int_0^{t^{**}} \int_0^{v_2(v,t)} h_{v,T}(v,t) dv dt + \int_{t^{**}}^{\infty} \int_0^{v_3(v,t)} h_{v,T}(v,t) dv dt \quad 2f_c h \leq q_p < \frac{2hS_{dd}}{t_c} \quad (4.22)$$

$$F_{Q_p}(q_p) = \int_0^{\infty} \int_0^{v_3(v,t)} h_{v,T}(v,t) dv dt \quad \frac{2hS_{dd}}{t_c} \leq q_p$$

- **Para cuencas Tipo 2 con $fc \geq S_{dd} / t_c$**

$$F_{Q_p}(q_p) = \int_0^{\infty} \int_0^{v_2(v,t)} h_{v,T}(v,t) dv dt \quad q_p < \frac{2hS_{dd}}{t_c}$$

$$F_{Q_p}(q_p) = \int_0^{t^{**}} \int_0^{v_3(v,t)} h_{v,T}(v,t) dv dt + \int_{t^{**}}^{\infty} \int_0^{v_2(v,t)} h_{v,T}(v,t) dv dt \quad \frac{2hS_{dd}}{t_c} \leq q_p < 2f_c h \quad (4.23)$$

$$F_{Q_p}(q_p) = \int_0^{\infty} \int_0^{v_3(v,t)} h_{v,T}(v,t) dv dt \quad 2f_c h \leq q_p$$

4.2.2 Función de probabilidad acumulada de Q_p utilizando hidrograma del SCS

Al desarrollar las expresiones para $P(Q_p \leq q_p)$ de acuerdo a la relación funcional entre Q_p , v , t deducida a partir del hidrograma del SCS, la probabilidad de caudal nulo se calcula de la misma manera que en el caso del hidrograma propuesto por Guo y Adams ya que esta situación no depende de la forma de la respuesta de la cuenca, si no de la profundidad de las depresiones superficiales de las zonas impermeables.

$$\text{Luego, } P(Q_p = 0) = P(v \leq S_{di}) = \int_0^{\infty} \int_0^{S_{di}} h_{v,T}(v, t) dv dt.$$

Para el cálculo de $P(Q_p \leq q_p)$, para $q_p > 0$, $h_{v,T}(v, t)$ se integra en el plano $v-t$ sobre las regiones A y B, delimitadas por las rectas de las ecuaciones (4.24), (4.25) y (4.26), determinadas de acuerdo a la ecuación (3.19) que describe la relación funcional entre Q_p , v y t . La región A corresponde a las combinaciones de (v, t) que se encuentran bajo v_a y bajo v_b , mientras que la región B está ubicada sobre v_a pero bajo v_b , donde:

$$v_a = S_{il} + f_c t \quad (4.24)$$

$$v_b = \frac{q_p t_c}{1.1h} + S_{di} \quad (4.25)$$

$$v_c = \frac{q_p t_c}{1.1} + S_d + f_c (1-h)t \quad (4.26)$$

Para determinar las posiciones relativas de las rectas v_a , v_b y v_c , y por ende las regiones de integración, se examinan las magnitudes relativas de sus pendientes (S_a , S_b y S_c) e interceptos (I_a , I_b y I_c). Respecto de las pendientes se tiene que $S_a = f_c$, $S_b = 0$ y $S_c = (1-h)f_c$. Como $0 \leq h \leq 1$, las pendientes siempre cumplen con $S_b \leq S_c \leq S_a$, independientemente de las propiedades de la cuenca y el valor de q_p que se requiera evaluar. Sin embargo, la relación entre las magnitudes relativas de los interceptos no es tan directa. La diferencia entre los interceptos de v_a y v_b está dada por:

$$I_a - I_b = S_{il} - S_{di} - \frac{q_p t_c}{1.1h} = S_{dd} - \frac{q_p t_c}{1.1h} \quad (4.27)$$

Luego, si $q_p < 1.1hS_{dd}/t_c$ se cumple que $I_a > I_b$, mientras que cuando $q_p \geq 1.1hS_{dd}/t_c$ los interceptos cumplen con $I_a \leq I_b$.

Repitiendo el mismo análisis para las diferencias $I_a - I_c$ y $I_b - I_c$ se obtiene que cuando $q_p < 1.1hS_{dd}/t_c$ los interceptos cumplen con $I_a > I_c$ y $I_c > I_b$. Por otro lado, cuando $q_p \geq 1.1hS_{dd}/t_c$ se cumple que $I_a \leq I_c$ y $I_c \leq I_b$.

En resumen, si $q_p < 1.1hS_{dd}/t_c$ se tiene que $I_b < I_c < I_a$ y cuando $q_p \geq 1.1hS_{dd}/t_c$ se cumple $I_a \leq I_c \leq I_b$. Luego, para calcular $F_{Q_p}(q_p)$ se definen dos rangos para q_p :

a) Caso $q_p < 1.1hS_{dd}/t_c$

Para este caso la región de integración corresponde a la Figura 4-6 y la probabilidad acumulada se calcula según (4.28).

$$P(Q_p \leq q_p) = \int_0^{\infty} \int_0^{v_b} h_{v,T}(v,t) dv dt \quad (4.28)$$

b) Caso $q_p \geq 1.1hS_{dd}/t_c$

Para este caso la región de integración corresponde a la Figura 4-7 y la probabilidad acumulada se calcula según (4.29).

$$P(Q_p \leq q_p) = \int_0^{t^{***} v_c} \int_0^{v_c} h_{v,T}(v,t) dv dt + \int_0^{t^{***} v_b} \int_0^{v_b} h_{v,T}(v,t) dv dt \quad (4.29)$$

Donde,

$$t^{***} = \frac{1}{f_c} \left[\frac{q_p t_c}{1.1h} - S_{dd} \right] \quad (4.30)$$

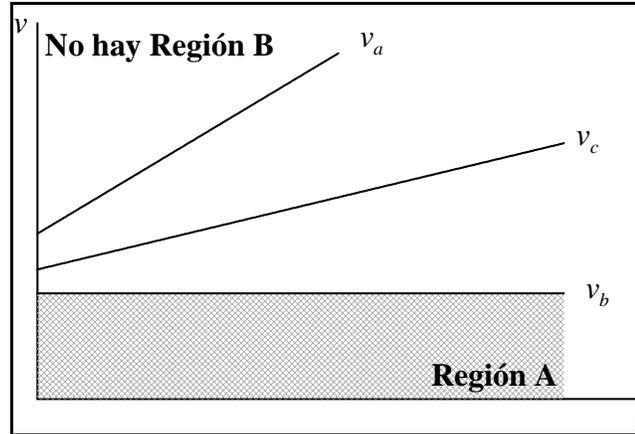


Figura 4-6: Región de integración para $P(Q_p \leq q_p)$ cuando $q_p < 1.1hS_{dd}/t_c$.

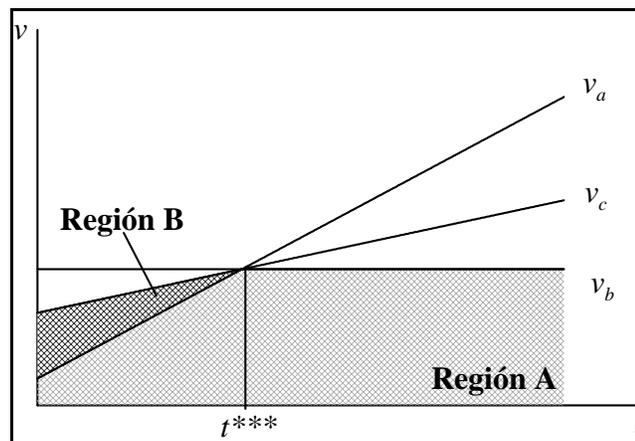


Figura 4-7: Región de integración para $P(Q_p \leq q_p)$ cuando $q_p \geq 1.1hS_{dd}/t_c$.

Resumiendo, la función de probabilidad acumulada para Q_p cuando se utiliza el hidrograma del SCS es:

$$\begin{aligned}
 F_{Q_p}(q_p) &= \int_0^{\infty} \int_0^{S_{di}} h_{v,T}(v,t) dv dt & q_p = 0 \\
 F_{Q_p}(q_p) &= \int_0^{\infty} \int_0^{v_b} h_{v,T}(v,t) dv dt & q_p \leq 1.1hS_{dd}/t_c \quad (4.31) \\
 F_{Q_p}(q_p) &= \int_0^{t^{***} v_c} \int_0^{v_c} h_{v,T}(v,t) dv dt + \int_0^{t^{***} v_b} \int_0^{v_b} h_{v,T}(v,t) dv dt & q_p > 1.1hS_{dd}/t_c
 \end{aligned}$$

5. APLICACIÓN DEL MODELO Y COMPARACIÓN CON SIMULACIÓN CONTINUA SWMM EPA 5.0

En este capítulo se muestra la implementación del modelo analítico en dos cuencas urbanas y la modelación de ellas mediante simulación continua en SWMM EPA 5.0 (Rossman, 2007) con la finalidad de comprobar si el modelo analítico es capaz de reproducir resultados similares a los obtenidos con modelos que contemplan una representación más compleja de la cuenca.

La primera cuenca se ubica en la ciudad de Chillán, VIII Región. Para ella se utiliza la información disponible en la consultoría DP.ALL-27 (MOP, 2007), trabajo en que se realizó una modelación de la red drenaje de la ciudad de Chillán en el programa XP SWMM-32 de la empresa CAICE para eventos de lluvias de diseño.

La segunda cuenca modelada se ubica en la ciudad de Santiago, Región Metropolitana, específicamente en la comuna de La Reina. Para este caso se utiliza la información disponible en el trabajo de González (2008), quien modeló el sistema de drenaje de la comuna con el programa SWMM-UC, también considerando eventos de lluvias aisladas.

La información disponible en ambos trabajos es bastante detallada y están disponibles todos los parámetros necesarios para la aplicación el modelo analítico y la implementación del modelo en SWMM. Para esto último se adoptó el mismo esquema de subdivisión de cuenca en subcuencas y elementos de conducción desarrollados en los trabajos ya mencionados. Respecto a las lluvias, para la ciudad de Chillán se cuenta con el registro de volumen de precipitación cada 15 minutos de la estación pluviométrica del Campus Chillán de la Universidad de Concepción del periodo 1998-2006 (Arumí, 2007). Para la subcuenca de La Reina se utilizó el registro de la estación de Quinta Normal, consistente en volumen de precipitación cada 10 minutos para el periodo 1917-1960.

5.1 Modelo estocástico de lluvias

El primer paso para implementar el modelo analítico consiste en encontrar el modelo estocástico de lluvias que represente adecuadamente la estructura de dependencia de las variables v y t de las tormentas.

Para ello, el registro continuo de precipitaciones disponible se discretizó de acuerdo al criterio de IETD, el que se estimó siguiendo la metodología basada en la modelación de la lluvia horaria usando cadenas de Markov explicada en el acápite 2.1. En primer lugar, se agrupó por horas la información disponible en los registros de Chillán y Santiago, encontrando las propiedades de la Tabla 5-1 (ver notación en acápite 2.1).

Tabla 5-1: Resumen del registro de precipitación horaria.

Lugar	Chillán	Santiago
Periodo de registro	1998-2006	1917-1960
Intervalo de registro (min)	15	10
Horas con lluvia	6783	10203
Horas sin lluvia	72105	371671
P_0	0.086	0.027
P_1	0.914	0.973
P_{00}	0.972	0.994
P_{01}	0.028	0.006
P_{10}	0.298	0.205
P_{11}	0.702	0.795

Las Figuras 5-1 y 5-2 muestran las probabilidades de transición en función del número de etapas para cada registro. En ellas se aprecia que a partir de un cierto valor de m P_{00} y P_{10} son prácticamente iguales a P_0 , mientras que P_{01} y P_{11} a P_1 , es decir, que las probabilidades de transición tienden a independizarse del estado inicial. Adoptando en

ambos casos un nivel de tolerancia $\varepsilon = \pm 0.001$ se obtuvo para Chillán IETD = 18 horas y para Santiago IETD = 30 horas.

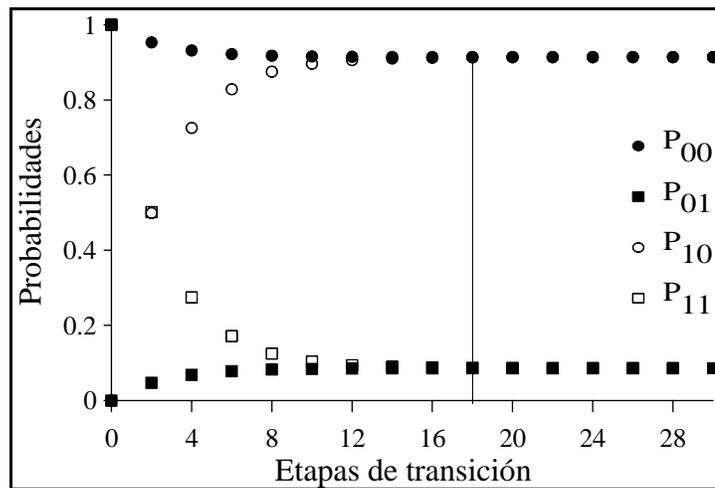


Figura 5-1: Probabilidades de transición de la lluvia horaria de Chillán.

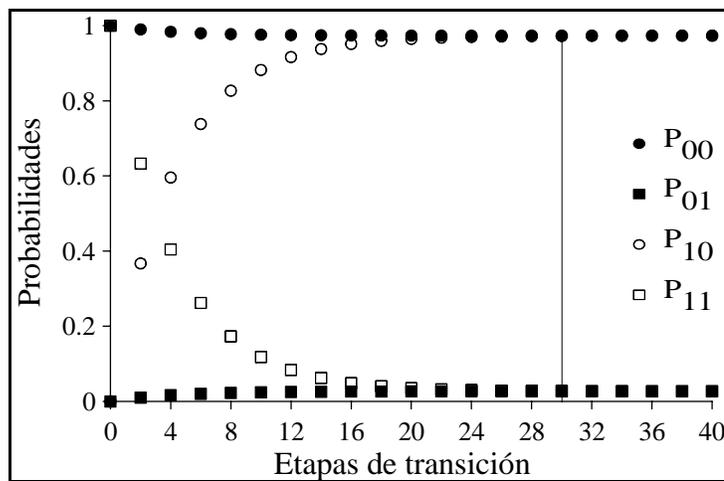


Figura 5-2: Probabilidades de transición de las lluvia horaria de Santiago.

Al discretizar los registros de Chillán y Santiago, utilizando los valores de IETD encontrados, se obtuvieron series de 666 y 860 tormentas, lo que corresponde a

promedios anuales de 74 y 22 eventos respectivamente. Los principales estadígrafos de las tormentas obtenidas en cada ciudad se indican en la Tabla 5-2.

Tabla 5-2: Principales estadígrafos de las tormentas.

	Volumen (mm)	Duración (hr)	TET (hr)
Chillán			
Promedio	15.1	17.7	98.5
Mínimo	0.1	0.3	18.0
Máximo	333.5	311.5	2254.8
Desviación Estándar	32.3	28.9	187.0
Asimetría	4.5	3.9	6.1
Kurtosis	27.9	24.2	50.2
Santiago			
Promedio	15.5	18.2	426.0
Mínimo	0.1	0.2	30.0
Máximo	210.6	286.7	5057.2
Desviación Estándar	22.0	24.0	733.8
Asimetría	3.6	3.6	3.8
Kurtosis	18.5	24.0	15.7

A las series obtenidas de volumen, duración y TET se les ajustó funciones de distribución exponencial y gama-2, estimando sus parámetros por método de máxima verosimilitud. La Tabla 5-3 muestra los parámetros estimados para cada serie y las Figuras 5-3 y 5-4 muestran las distribuciones ajustadas y distribución empírica.

Tabla 5-3: Parámetros estimados por método de máxima verosimilitud para cada serie.

	Volumen (mm)	Duración (hr)	TET (hr)
Chillán			
Exponencial, λ	0.066	0.056	0.012
Gama-2, α	47.0	39.7	161.5
Gama-2, β	0.32	0.45	0.50
Santiago			
Exponencial, λ	0.065	0.055	0.003
Gama-2, α	22.0	22.4	677.6
Gama-2, β	0.70	0.81	0.58

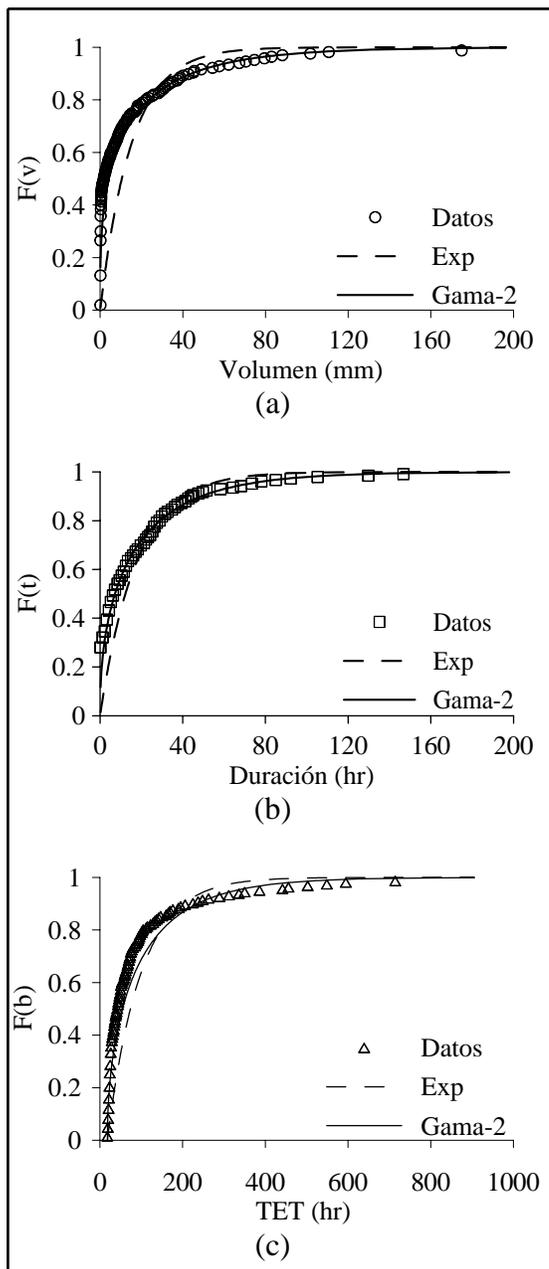


Figura 5-3: Distribuciones de probabilidad teóricas y distribución de empírica para las tormentas de Chillán. (a) Volumen. (b) Duración. (c) TET.

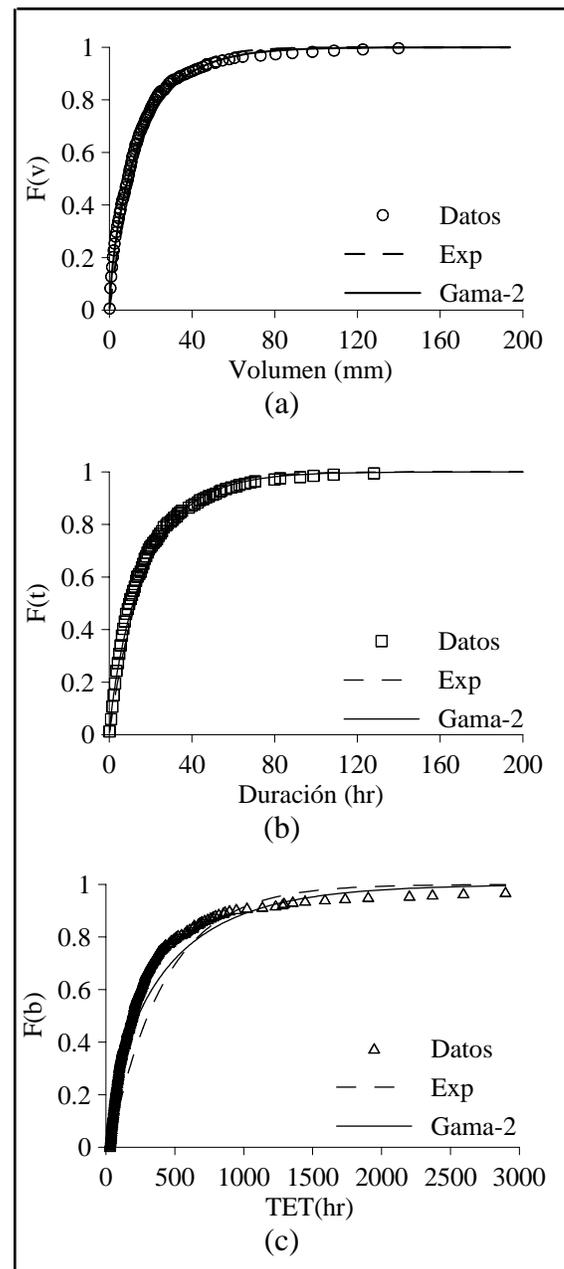


Figura 5-4: Distribuciones de probabilidad teóricas y distribución de empírica para las tormentas de Santiago. (a) Volumen. (b) Duración. (c) TET.

Para evaluar la bondad de ajuste de los datos a las funciones de distribución candidatas se aplicó el test χ^2 con un nivel de significancia $\alpha = 0.05$ a cada una de las series. En todos los casos se obtuvo que la hipótesis nula no podía ser rechazada. Luego, para determinar cuál de las dos familias era preferible se aplicó el Criterio de Información de Akaike, eligiendo para cada caso el ajuste con menor AIC , definido según la ecuación (2.15). La Tabla 5-4 muestra el valor crítico del estadígrafo $\chi^2_{1-\alpha, gdl}$ para cada variable y el valor de prueba, mientras que la Tabla 5-5 muestra los valores de AIC calculados, concluyéndose que en todos los casos se selecciona la distribución gama-2, cuyos parámetros estimados son los de la Tabla 5-3.

Tabla 5-4: Estadísticos de prueba y valores críticos del test χ^2 .

	Volumen (mm)	Duración (hr)	TET (hr)	$\chi^2_{1-\alpha, gdl}$
Chillán				
Exponencial	0.82	0.30	0.40	7.81
Gama-2	0.06	0.10	0.06	5.99
Santiago				
Exponencial	0.06	0.04	0.21	7.81
Gama-2	0.01	0.02	0.06	5.99

Tabla 5-5: Valores de AIC estimados para los ajustes.

	Volumen (mm)	Duración (hr)	TET (hr)
Chillán			
Exponencial	4948	5163	7465
Gama-2	1332	1334	1296
Santiago			
Exponencial	6433	6714	12126
Gama-2	1712	1710	1692

Las funciones de densidad de probabilidad marginal de cada variable son las que se muestran en la Tabla 5-6.

Tabla 5-6: Funciones de densidad de probabilidad marginal para v , t y b .

	Chillán	Santiago
Volumen (mm)	$f_V(v) = \frac{1}{47.0 \cdot \Gamma(0.32)} \left[\frac{v}{47.0} \right]^{-0.68} e^{-\frac{v}{47.0}}$	$f_V(v) = \frac{1}{22.0 \cdot \Gamma(0.70)} \left[\frac{v}{22.0} \right]^{-0.30} e^{-\frac{v}{22.0}}$
Duración (hr)	$f_T(t) = \frac{1}{39.7 \cdot \Gamma(0.45)} \left[\frac{t}{39.7} \right]^{-0.55} e^{-\frac{t}{39.7}}$	$f_T(t) = \frac{1}{22.4 \cdot \Gamma(0.81)} \left[\frac{t}{22.4} \right]^{-0.19} e^{-\frac{t}{22.4}}$
TET (hr)	$f_B(b) = \frac{1}{161.5 \cdot \Gamma(0.50)} \left[\frac{b}{161.5} \right]^{-0.50} e^{-\frac{b}{161.5}}$	$f_B(b) = \frac{1}{677.6 \cdot \Gamma(0.58)} \left[\frac{b}{677.6} \right]^{-0.42} e^{-\frac{b}{677.6}}$

Para encontrar la función de probabilidad conjunta entre el volumen y duración de tormentas y entre duración y TET se estimó el parámetro θ para cada familia candidata de cópulas. En primer lugar se calculó el coeficiente tau de Kendall para cada muestra y luego se obtuvo $\hat{\theta}$ de las relaciones $\tau_\theta = f(\theta)$ de la Tabla 2-1. La Tabla 5-7 muestra la estimación muestral $\hat{\tau}$ y las Tablas 5-8 y 5-9 el parámetro $\hat{\theta}$ estimado para cada cópula. Para el caso de la función de probabilidad conjunta del volumen y duración de tormentas la familia Ali-Mikhail-Haq no fue ajustada debido a que la aplicación de esta cópula no se recomienda para variables con medidas de dependencia demasiado grandes. En cuanto a la distribución conjunta de la duración y TET en Santiago, que presentan correlación negativa ($\hat{\tau} = -0.062$), no fue posible ajustar la familia Cook-Johnson ni la familia Gumbel-Hougaard por ser cópulas definidas para valores positivos de τ .

Tabla 5-7: Estimación de tau de Kendall ($\hat{\tau}$).

	Volumen vs. Duración	Duración vs. TET
Chillán	0.693	0.051
Santiago	0.572	-0.062

Tabla 5-8: $\hat{\theta}$ de las cópulas para ajustar la FDA conjunta de v y t , $H_{v,T}(v,t)$.

Familia	Chillán	Santiago	Restricción
Cook-Johnson	4.52	2.68	$\tau \geq 0$
Frank	11.1	-7.23	Sin restricción
Gumbel-Hougaard	3.26	2.34	$\tau \geq 0$
Ali-Mikhail-Haq	-	-	$\tau \in [-0.2, 0.3]$

Tabla 5-9: $\hat{\theta}$ de las cópulas para ajustar la FDA conjunta de t y b $H_{T,B}(t,b)$.

Familia	Chillán	Santiago	Restricción
Cook-Johnson	0.11	-	$\tau \geq 0$
Frank	-0.46	0.56	Sin restricción
Gumbel-Hougaard	1.05	-	$\tau \geq 0$
Ali-Mikhail-Haq	0.63	0.60	$\tau \in [-0.2, 0.3]$

La Figura 5-5 y la Figura 5-6 muestran los K-Kplots de las cópulas ajustadas a las variables $v-t$ de Chillán y Santiago respectivamente. Según los gráficos, se concluyó que para las variables de Chillán el mejor ajuste corresponde a la familia Cook-Johnson, lo que se corroboró con el Criterio de Información de Akaike, pues según los valores de la Tabla 5-10 esta familia presenta el menor AIC . Para el caso de las cópulas ajustadas a los datos $v-t$ de Santiago no fue posible realizar la elección basándose solo en los K-Kplots, pues, aparentemente todas las familias se ajustan bien y ninguna presenta un comportamiento sobresaliente respecto de las otras dos. Sin embargo, el menor valor de AIC lo presenta la familia Gumbel-Hougaard, siendo esta la escogida para representar la estructura de dependencia entre v y t en Santiago.

Tabla 5-10: AIC de las cópulas ajustadas a v vs. t

Familia	Chillán	Santiago
Cook-Johnson	-894	-2520
Frank	-578	-1179
Gumbel-Hougaard	-884	-2596
Ali-Mikhail-Haq	-	-

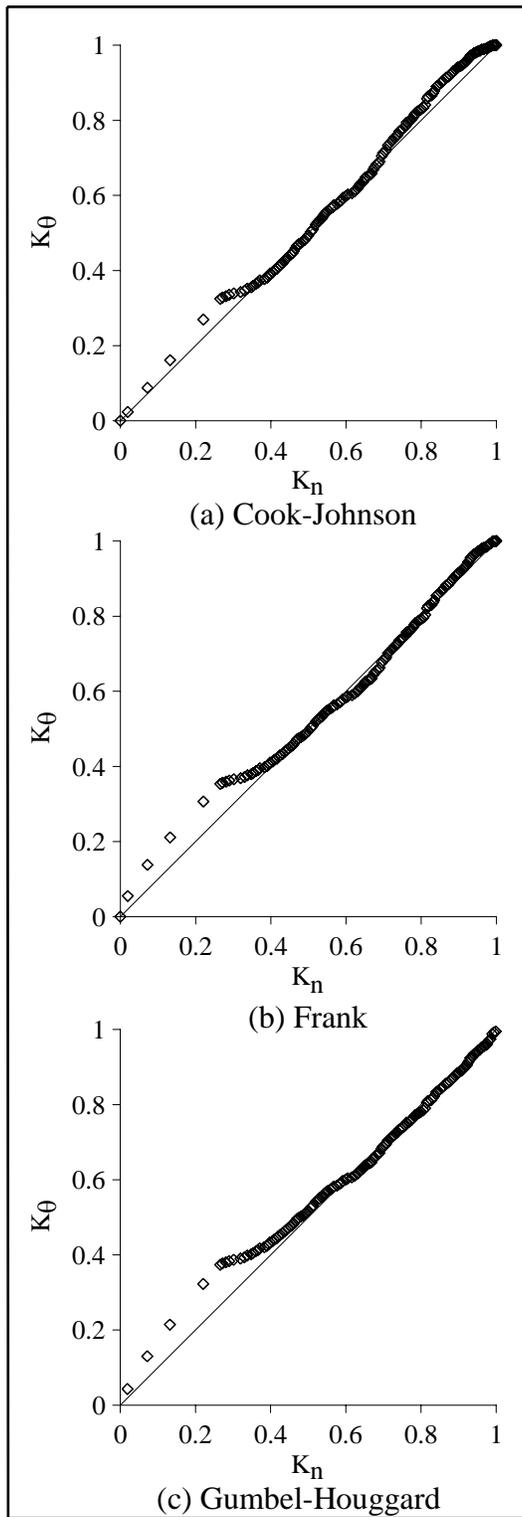


Figura 5-5: K-Kplots para las cópulas ajustadas a las variables $v-t$ de Chillán.

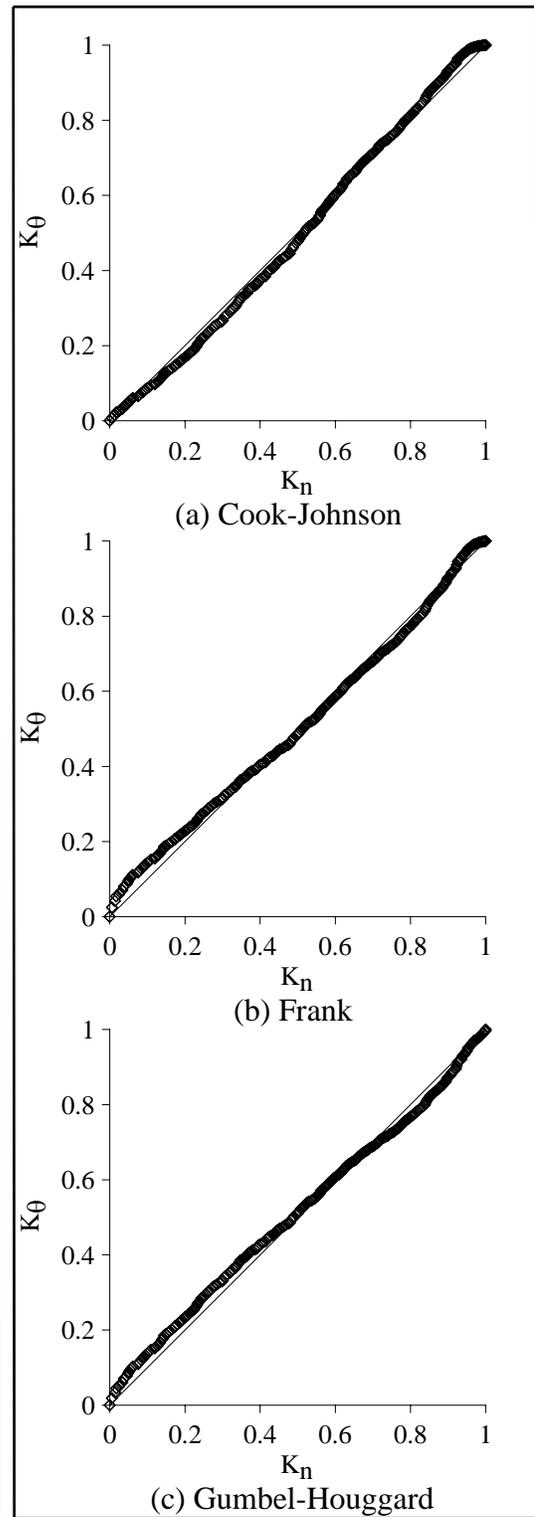


Figura 5-6: K-Kplots para las cópulas ajustadas a las variables $v-t$ de Santiago.

La Figura 5-7 muestra los K-Kplots de las cópulas ajustadas a las variables $t-b$ de Chillán. Se observa que la familia Ali-Mikhail-Haq es la que presenta el mejor ajuste, lo que concuerda con los valores de AIC que se muestran en la Tabla 5-11. Luego, esta es la familia escogida para representar la estructura de dependencia de los datos en cuestión.

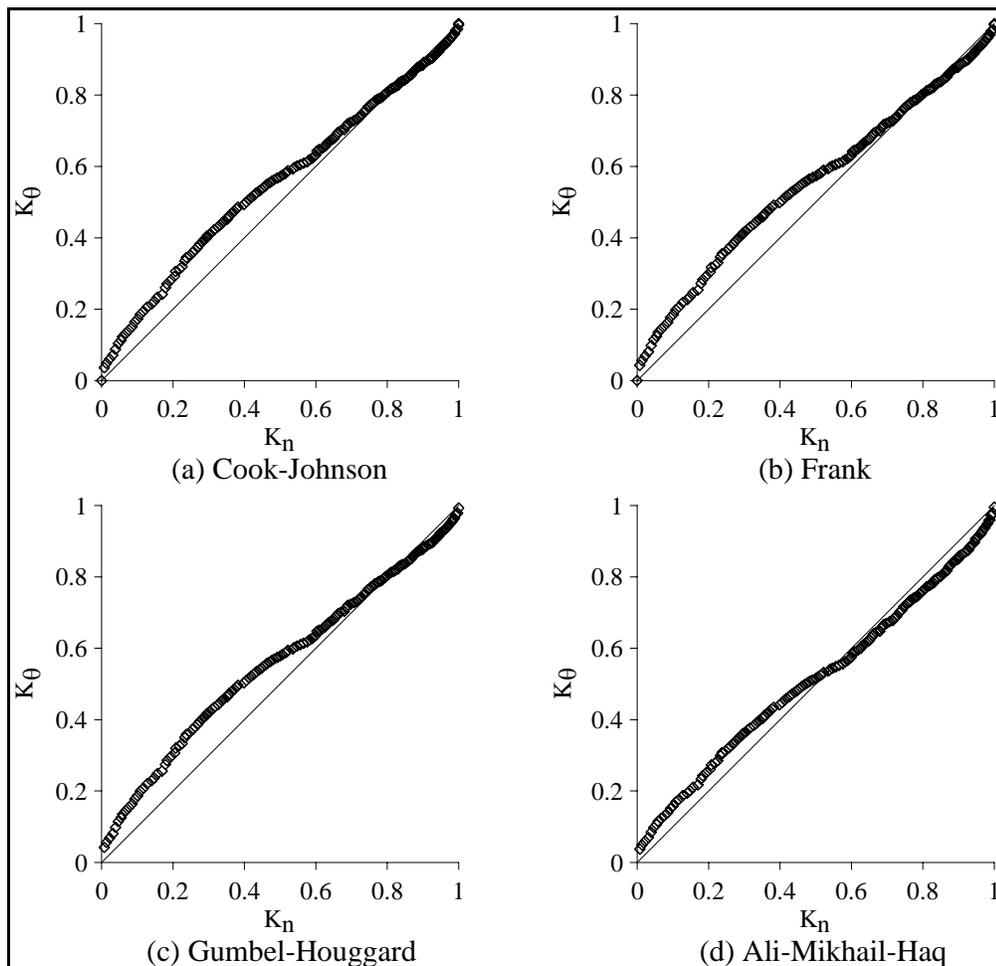


Figura 5-7: K-Kplots para las cópulas ajustadas a las variables $t-b$ de Chillán.

Finalmente, la Figura 5-8 muestra los K-Kplots de las cópulas ajustadas a las variables $t-b$ de Santiago. En base a ellos, se observa claramente que la cópula Frank es la que

presenta el mejor ajuste. Sin embargo, la Tabla 5-11 muestra que el menor valor de AIC corresponde a la familia Ali-Mikhail-Haq, por lo que existe una inconsistencia entre los criterios. A pesar de esto, considerando que la diferencia entre los AIC calculados para ambas familias es poco significativa y que el K-Kplot de la familia Frank es notoriamente más apropiado que el K-Kplot de la familia Ali.Mikhail-Haq, se eligió la familia Frank para representar la FDA conjunta de b y t en la comuna de La Reina.

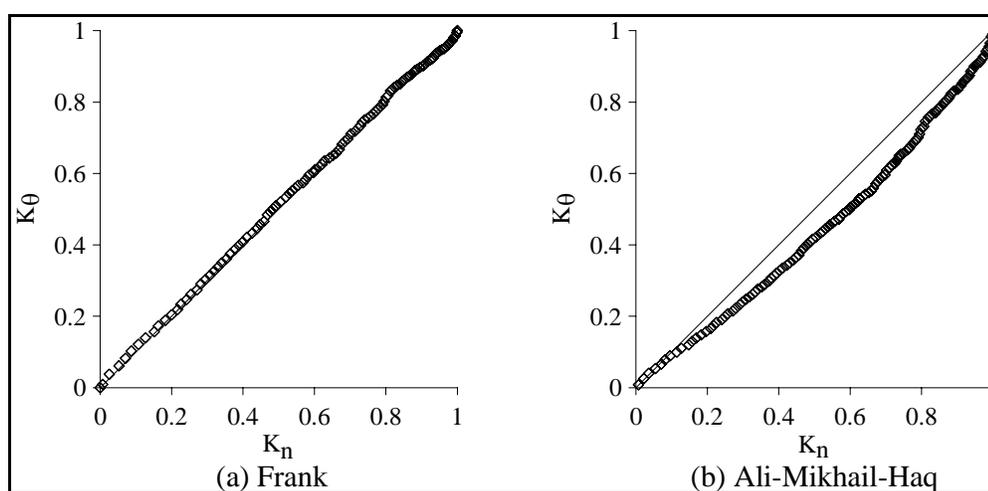


Figura 5-8: K-Kplots para las cópulas ajustadas a las variables t - b de Santiago.

Tabla 5-11: AIC de las cópulas ajustadas a t vs. b

Familia	Chillán	Santiago
Cook-Johnson	-1507	-
Frank	-1427	-2588
Gumbel-Hougaard	-1501	-
Ali-Mikhail-Haq	-1593	-2655

La Tabla 5-12 muestra un resumen de la familia de cópula escogida para representar la estructura de dependencia de cada par de variables y el valor de su parámetro.

Tabla 5-12: Familia de cópulas escogida para cada par de variables.

	Chillán		Santiago	
	Familia	$\hat{\theta}$	Familia	$\hat{\theta}$
Volumen vs. Duración	Cook-Johnson	4.52	Gumbel-Houggard	2.34
Duración vs. TET	Ali-Miqhail-Haq	0.63	Frank	0.56

Así, las funciones de probabilidad conjunta para las características de las tormentas de Chillán vienen dadas por las ecuaciones (5.1) y (5.2).

$$H_{V,T}(v,t) = \left(F_T(t)^{-4.52} + F_V(v)^{-4.52} - 1 \right)^{-\frac{1}{4.52}} \quad (5.1)$$

$$H_{B,T}(b,t) = \frac{F_T(t) \cdot F_B(b)}{1 - 0.63 \cdot [1 - F_T(t)] [1 - F_B(b)]} \quad (5.2)$$

Y para Santiago,

$$H_{V,T}(v,t) = \exp \left\{ - \left[\left(-\ln(F_V(v)) \right)^{2.34} + \left(-\ln(F_T(t)) \right)^{2.34} \right]^{\frac{1}{2.34}} \right\} \quad (5.3)$$

$$H_{B,T}(b,t) = -\frac{1}{0.56} \ln \left\{ 1 + \frac{[\exp(-0.56F_T(t)) - 1][\exp(-0.56F_B(b)) - 1]}{\exp(-0.56) - 1} \right\} \quad (5.4)$$

Donde, $F_V(v)$, $F_T(t)$ y $F_B(b)$ corresponden a las FDAs marginales, ajustadas anteriormente para cada localidad. En las siguientes figuras se muestran las FDAs conjuntas ajustadas y empíricas.

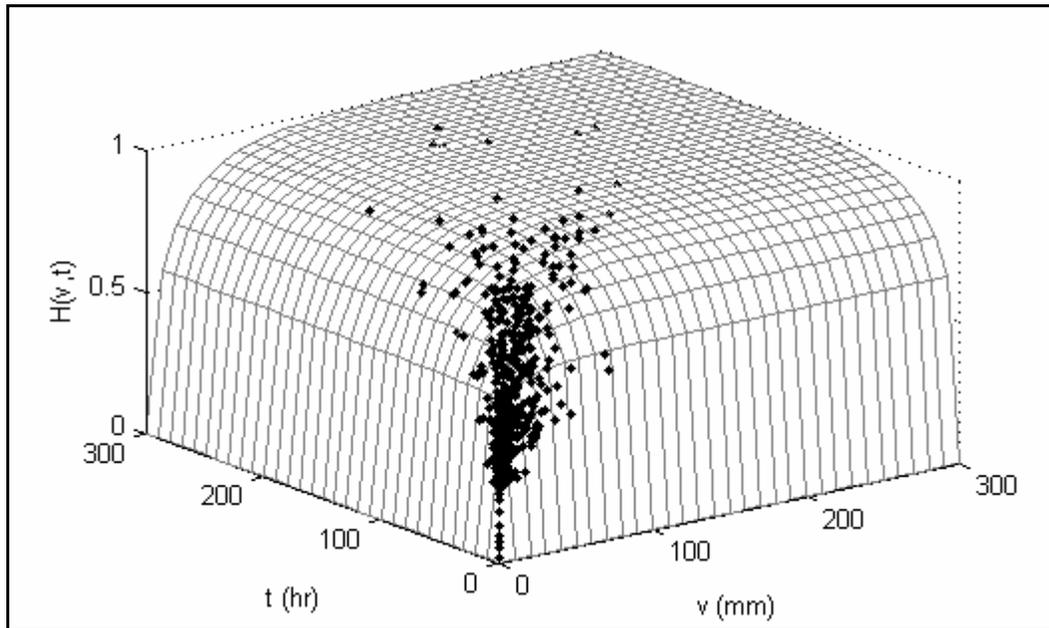


Figura 5-9: Función de probabilidad conjunta de las variables $v-t$ en Chillán.

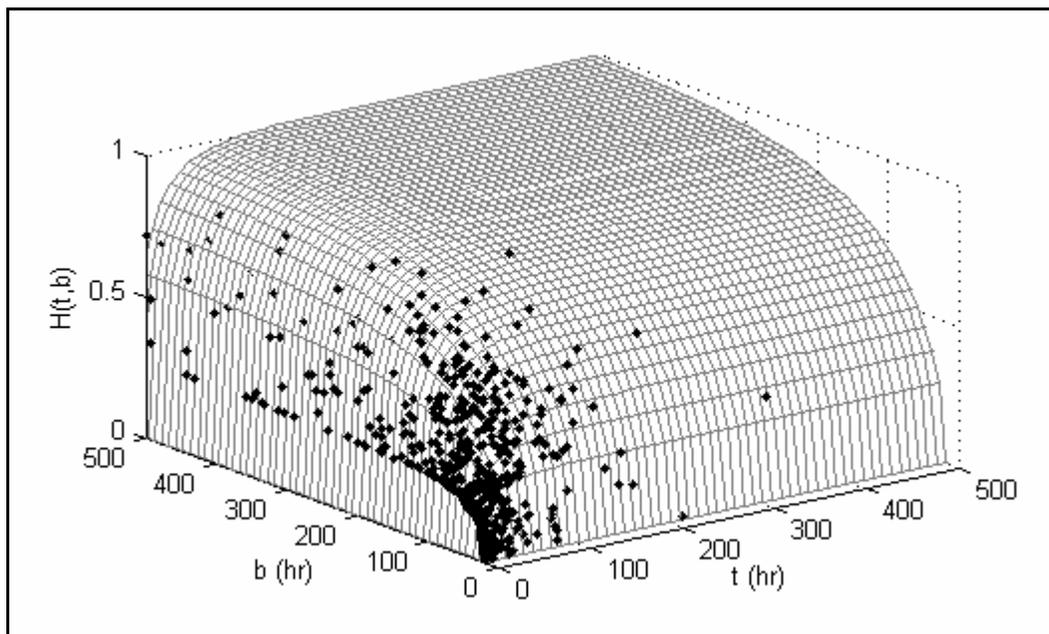


Figura 5-10: Función de probabilidad conjunta de las variables $t-b$ en Chillán.

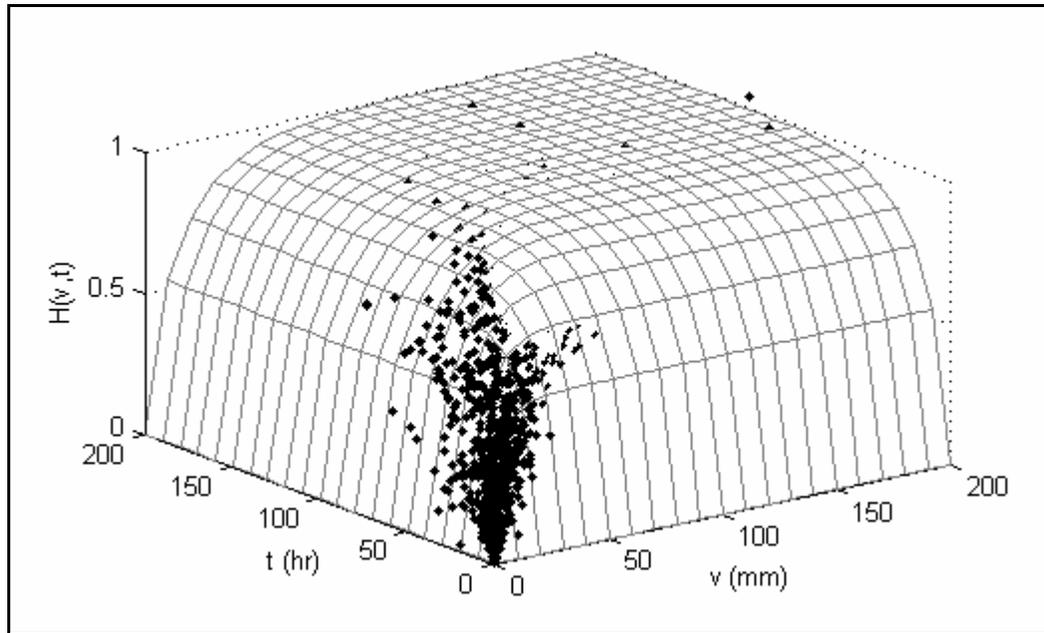


Figura 5-11: Función de probabilidad conjunta de las variables $v-t$ en Santiago.

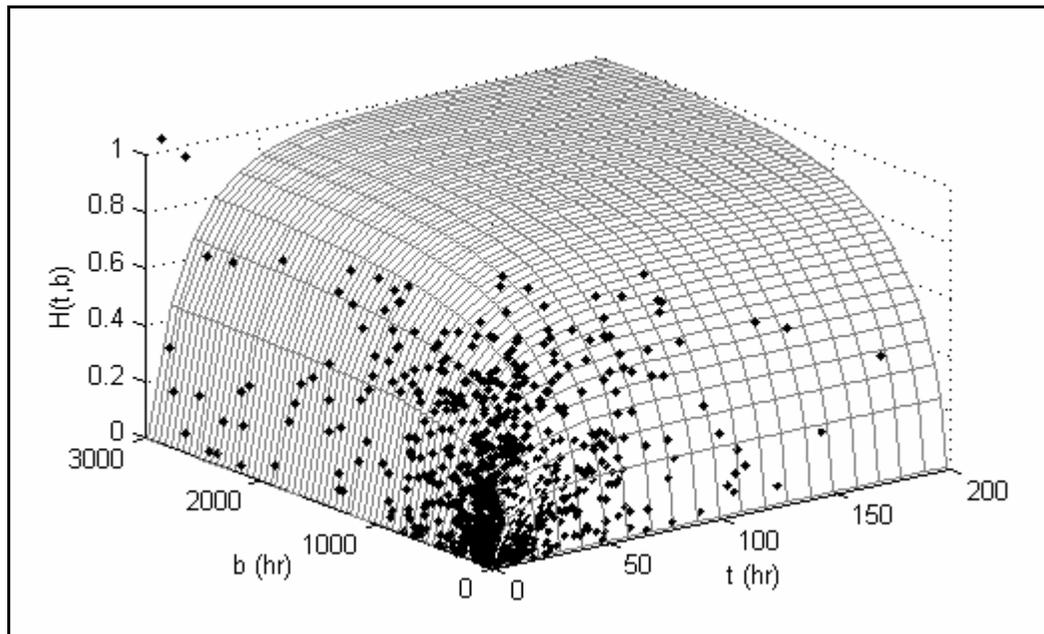


Figura 5-12: Función de probabilidad conjunta de las variables $t-b$ en Santiago.

5.2 Información física de las cuencas

Las cuencas modeladas en este trabajo se encuentran dentro de las zonas de estudio abarcadas en trabajos anteriores y la información física para su modelación proviene exclusivamente de ellos. Específicamente, para el caso de Chillán, la subcuenca modelada se encuentra en un sector de la ciudad que, de acuerdo al análisis de uso de suelos hecho en la consultoría DP.ALL-27 (MOP, 2007) presenta un uso preponderantemente urbano, con un 50 % aprox. de superficie impermeable. La Figura 5-13 muestra una imagen general de la ciudad de Chillán, en ella se indica la ubicación de la cuenca modelada en este trabajo.



Figura 5-13: Imagen aérea de la de la ciudad de Chillán.
Fuente: Google Earth.

La Figura 5-14 muestra un detalle de la subcuenca modelada en este trabajo.

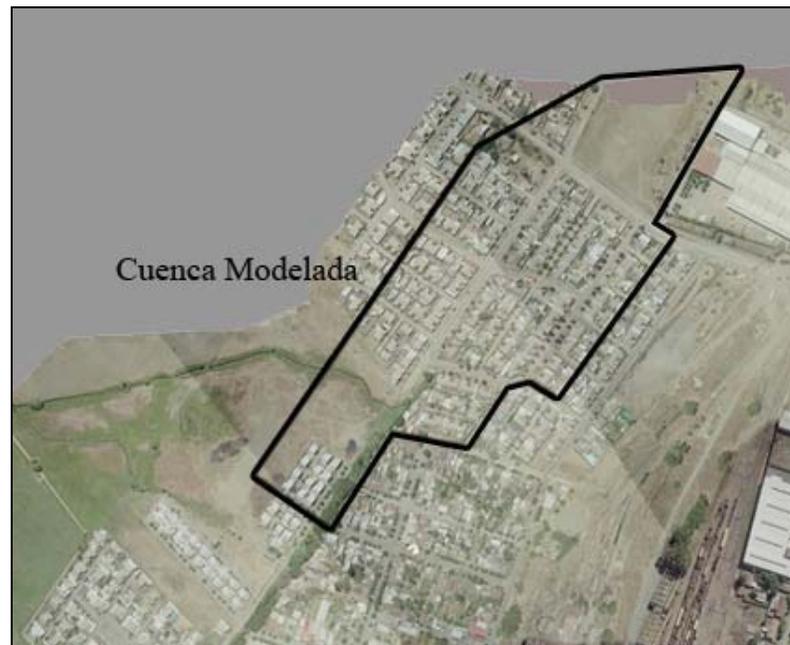


Figura 5-14: Detalle de la subcuenca ubicada en la ciudad de Chillán.
Fuente: MOP (2007).

De manera similar, en González (2008) también se realizó una subdivisión en sectores, según el patrón de drenaje, de la comuna de La Reina. La subcuenca modelada en este trabajo se ubica en el sector 11 definido en el trabajo original, que de acuerdo a la clasificación de uso de suelos corresponde a un sector urbano con densidad media. La Figura 5-15 muestra un esquema general de la comuna, donde se indica la ubicación de la subcuenca modelada en este trabajo y en la Figura 5-16 se muestra un detalle de esta última.



Figura 5-15: Imagen aérea de Google Earth de La Reina georreferenciada con calles de la comuna. Fuente: González (2008).

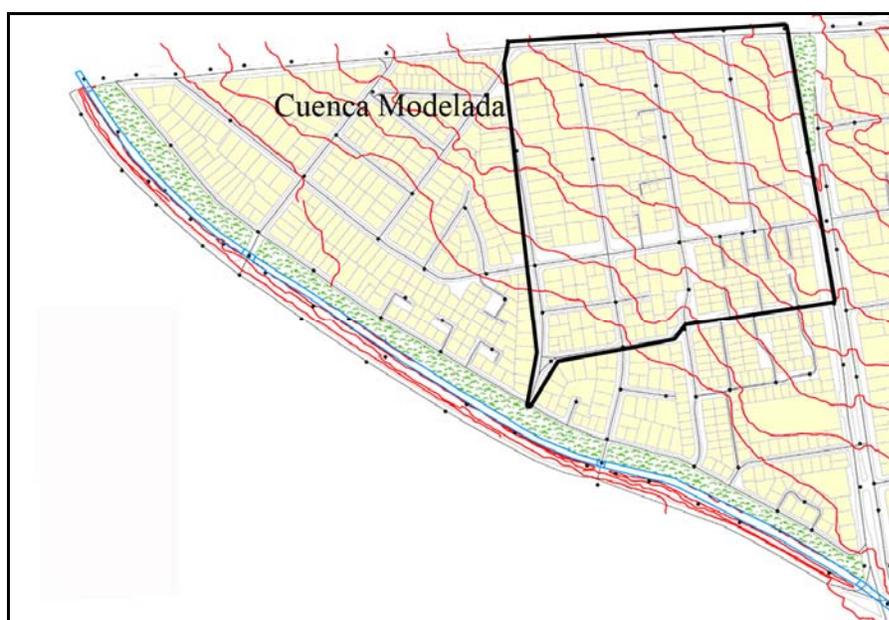


Figura 5-16: Detalle de la subcuenca ubicada en la comuna de La Reina. Fuente: González (2008).

Para entender de mejor manera el sistema de drenaje de las subcuencas seleccionadas, en las Figuras 5-17 y 5-18 se muestra un esquema simplificado de ellas, indicando los elementos involucrados en la modelación: subcuencas (S), nodos de descarga y elementos de conducción (C).

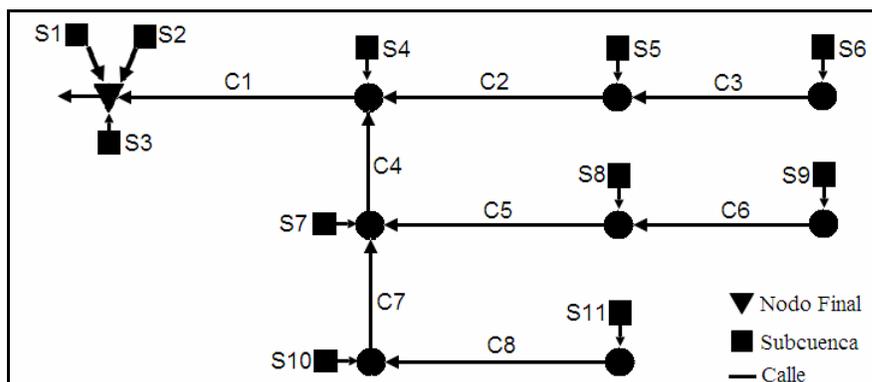


Figura 5-17: Esquema de la subcuenca ubicada en la ciudad de Chillán.

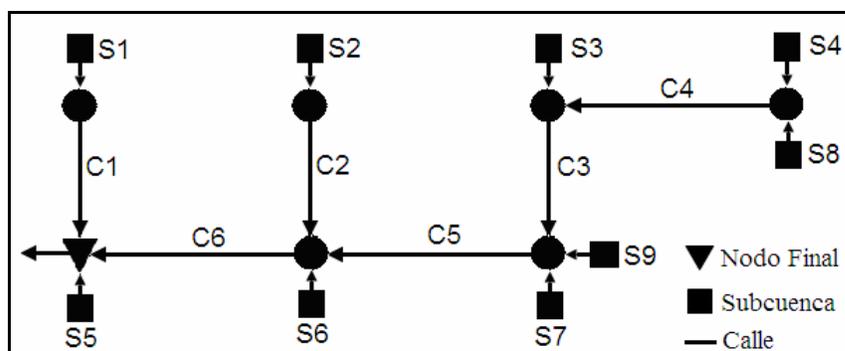


Figura 5-18: Esquema de la subcuenca ubicada en la comuna de La Reina.

Para cada subcuenca se conoce el área total, área impermeable con y sin detención, ancho equivalente (W), pendiente (S), coeficiente de rugosidad de Manning para

superficies permeable e impermeable (n_p y n_i), altura de detención superficial para superficies permeable e impermeable (S_{dp} y S_{di}) y parámetros de infiltración (f_m , f_c , k , R). Para las calles se conoce su pendiente, largo, sección transversal y material. Para utilizar esta información en el modelo analítico, se deben encontrar los parámetros de la cuenca agregada (excepto para el tiempo de concentración), los que se calculan como el promedio ponderado por área (Quader y Guo, 2006), siguiendo la ecuación (5.5).

$$M = \frac{A_1 M_1 + A_2 M_2 + \dots + A_N M_N}{A_1 + A_2 + \dots + A_N} \quad (5.5)$$

Donde,

M : Parámetro de la cuenca agregada.

M_i : Parámetro de la subcuenca i .

A_i : Área de la subcuenca i .

N : Número de subcuencas.

El modelo analítico contempla solo la existencia de áreas permeables con detención, mientras que la modelación en SWMM EPA 5.0 considera que existen áreas permeables con detención (veredas, calles, estacionamientos) y sin detención (techos). Para calcular el valor de S_{di} se considera que en aquellas áreas llamadas “impermeables sin detención” se requiere al menos de 1 mm para generar flujo. Así, el S_{di} de cada subcuenca se calcula como el promedio ponderado por área de la altura de detención superficial de las áreas impermeables con detención (valor propio de cada superficie) y 1 mm para las áreas sin detención.

La Tabla 5-13 muestra los parámetros agregados de las cuencas que corresponden a las variables de entrada al modelo analítico. En el ANEXO A se encuentra la información

para cada subcuenca y la demás información necesaria para la simulación en SWMM EPA 5.0.

Tabla 5-13: Características agregadas de las cuencas modeladas.

Parámetro	Variable	Unidad	Chillán	Santiago
Área	A	ha	10	14
Fracción de área impermeable	h	%	50	80
Almacenamiento superficial en área impermeable	S_{di}	mm	2.0	2.7
Almacenamiento superficial en área permeable	S_{dp}	mm	10.0	12.0
Capacidad de infiltración máxima	f_m	mm/hr	46.5	60.0
Capacidad de infiltración última	f_c	mm/hr	4.7	5.0
Coef. de decaimiento de la capacidad de infiltración	k	hr ⁻¹	2	2
Coef. de recuperación de la capacidad de infiltración	k_d	hr ⁻¹	0.001	0.001
Volumen de infiltración inicial antes de la saturación*	S_{iw}	mm	1.7	7.6
Pérdidas iniciales del área permeable	S_{il}	mm	11.6	19.6

* Calculado según ecuación (3.6) con las propiedades de la cuenca agregada.

Para el cálculo del tiempo de concentración se aplicó la metodología descrita en la sección 3.2.3. Se utilizó sólo un valor de intensidad de lluvia efectiva para cada tipo de superficie (permeable e impermeable) en el cálculo del tiempo de concentración de las subcuencas, basándose en los parámetros agregados de la cuenca, la Tabla 5-14 muestra los valores encontrados.

Tabla 5-14: Valores de intensidad de lluvia efectiva (mm/hr) utilizados en la ecuación de Morgali y Linsley.

	Planos Permeables	Planos Impermeables
Chillán	1.12	1.23
La Reina	1.26	1.39

La Tabla 5-15 muestra el tiempo de concentración de las subcuencas de la cuenca ubicada en la ciudad de Chillán. Se indica el tiempo de viaje superficial para cada plano y el que finalmente se adopta como tiempo de concentración. La Tabla 5-16 muestra la misma información para la cuenca ubicada en la comuna de La Reina. En el ANEXO B se muestran pasos intermedios de cálculo.

Tabla 5-15: Tiempo de concentración de las subcuencas de Chillán.

Subcuenca	t_{cp} (hr)	t_{ci} (hr)	t_{cs} (hr)
1	0.25	3.39	3.39
2	0.10	1.31	1.31
3	0.27	1.03	1.03
4	0.50	1.91	1.91
5	0.67	2.54	2.54
6	0.76	3.70	3.70
7	0.36	1.39	1.39
8	0.29	1.12	1.12
9	0.05	1.27	1.27
10	0.80	3.05	3.05
11	0.40	1.51	1.51

Tabla 5-16: Tiempo de concentración de las subcuencas de la comuna de La Reina.

Subcuenca	t_{cp} (hr)	t_{ci} (hr)	t_{cs} (hr)
1	0.23	0.62	0.62
2	0.39	1.05	1.05
3	0.25	0.67	0.67
4	0.24	0.63	0.63
5	0.43	1.16	1.16
6	0.35	0.94	0.94
7	0.20	0.53	0.53
8	1.04	2.77	2.77
9	0.31	0.84	0.84

Las Tablas 5-17 y 5-18 muestran el tiempo de viaje estimado para cada calle según la ecuación (3.24). Para todas se adoptó un coeficiente de transporte $C_v = 20$ por tratarse de calles pavimentadas.

Tabla 5-17: Tiempo de viaje por las calles de la cuenca ubicada en Chillán.

Calle	S_p (%)	L_p (m)	V_p (hr)	t_p (hr)
1	3.70	57.3	1.17	0.01
2	2.21	128.4	0.91	0.04
3	2.18	146.6	0.90	0.05
4	0.62	60.2	0.48	0.03
5	2.16	128.4	0.90	0.04
6	2.00	127.1	0.86	0.04
7	1.86	47.3	0.83	0.02
8	1.72	122.8	0.80	0.04

Tabla 5-18: Tiempo de viaje por las calles de la cuenca ubicada en la comuna de La Reina.

Calle	S_p (%)	L_p (m)	V_p (hr)	t_p (hr)
1	0.90	142.6	0.58	0.07
2	1.18	121.0	0.66	0.05
3	1.67	109.4	0.79	0.04
4	1.12	95.3	0.64	0.04
5	0.98	88.1	0.60	0.04
6	0.55	117.3	0.45	0.07

De acuerdo a los esquemas las cuencas (Figura 5-13 y Figura 5-14) se calculó el tiempo de viaje asociado a todas las rutas posibles que podría seguir el flujo y finalmente se eligió el mayor valor, la Tabla 5-19 muestra el tiempo de concentración estimado para ambos casos y la ruta asociada, en el ANEXO C se muestra el tiempo calculado para todas las posibles rutas.

Tabla 5-19: Tiempo de concentración de las cuencas.

Cuenca	t_c (horas)	Ruta
Chillán	3.8 ~ 4	S6 - C3 - C2 - C1
La Reina	3	S8 - C4 - C3 - C5 - C6

5.3 Resultados

Las FDAs de v_r y Q_p se obtuvieron integrando numéricamente las expresiones (4.7), (4.22), (4.23) y (4.31).

Las curvas de frecuencia obtenidas se presentan en términos de periodo de retorno (T), cuya relación con $F_x(x)$ se indica en la ecuación (5.6).

$$T = \frac{1}{\bar{N} \cdot (1 - F_x(x))} \quad (5.6)$$

Donde,

$F_x(x)$: Es la función de probabilidad acumulada de una variable x cualquiera.

\bar{N} : Número promedio de eventos al año.

Para el análisis de los resultados de SWMM se exploró la serie continua de caudal vs. tiempo obtenida de la simulación. A partir de ella se calculó v_r y se reconoció Q_p asociado a cada evento. Luego se calculó la probabilidad de no excedencia empírica, dada por la ecuación (5.7) y el periodo de retorno de acuerdo a la ecuación (5.8).

$$P = \frac{M}{N + 1} \quad (5.7)$$

$$T = \frac{1}{\bar{N} \cdot P} \quad (5.8)$$

Donde,

P : Probabilidad de excedencia.

M : Es el ranking del evento, ordenando la serie de manera descendente.

N : Número total de eventos de escorrentía.

5.3.1 Volumen de escorrentía

Las Figuras 5-19 y 5-20 muestran las curvas v_r vs. T obtenidas para la cuenca ubicada en Chillán y la cuenca ubicada en la comuna de La Reina, respectivamente. En los gráficos se incluyen 2 curvas más los resultados provenientes de la simulación continua. La curva (1) corresponde al modelo analítico que incluye la modelación de la dependencia entre la duración y volumen de tormentas a través de la teoría de cópulas. Mientras que la curva (2) corresponde a la curva de frecuencia del volumen de escorrentía calculada con las ecuaciones desarrolladas por Guo y Adams, es decir, sin considerar la dependencia entre v y t .

En ambos gráficos se observa que para un mismo periodo de retorno los modelos analíticos subestiman el volumen de escorrentía generado por evento respecto de las estimaciones provenientes de los resultados de simulación continua. Sin embargo, en ambas cuencas el modelo analítico que considera la dependencia de las variables v y t se ajusta mejor a los resultados de SWMM, es decir, al incluir el efecto de la dependencia se produce una mejora en los resultados. Cabe destacar que las mayores diferencias entre los modelos analíticos se observan en la ciudad de Chillán, lugar donde la medida de dependencia entre las variables es mayor. Es decir, a medida que aumenta la dependencia entre el volumen y la duración de las tormentas se comenten mayores errores en la estimación de la frecuencia del volumen de escorrentía al ignorar este efecto.

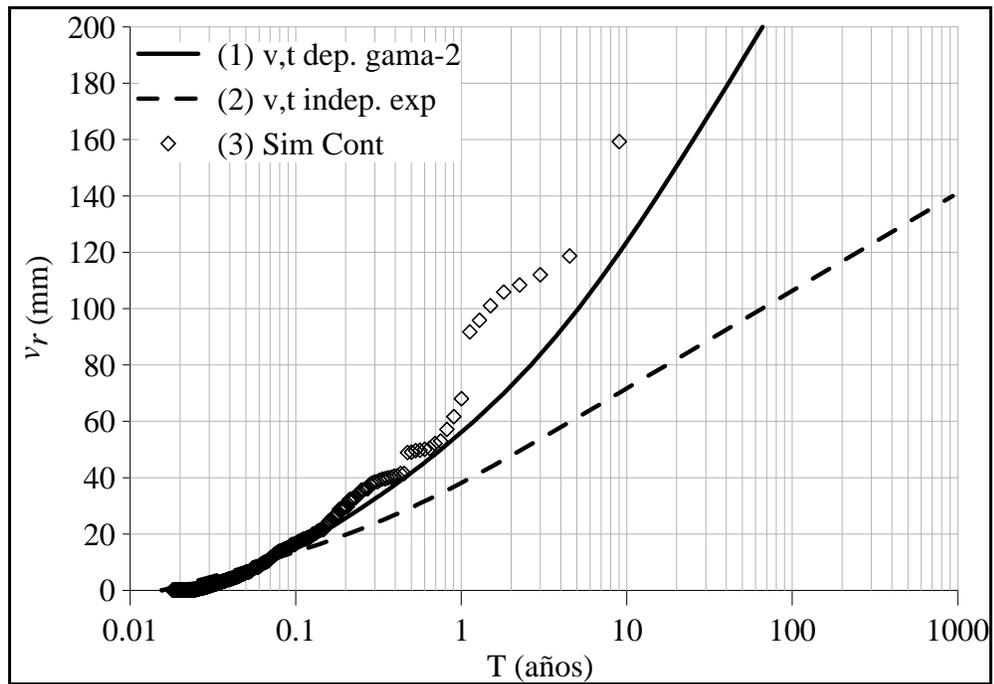


Figura 5-19: Periodo de retorno para el volumen de escorrentía de la cuenca ubicada en Chillán.

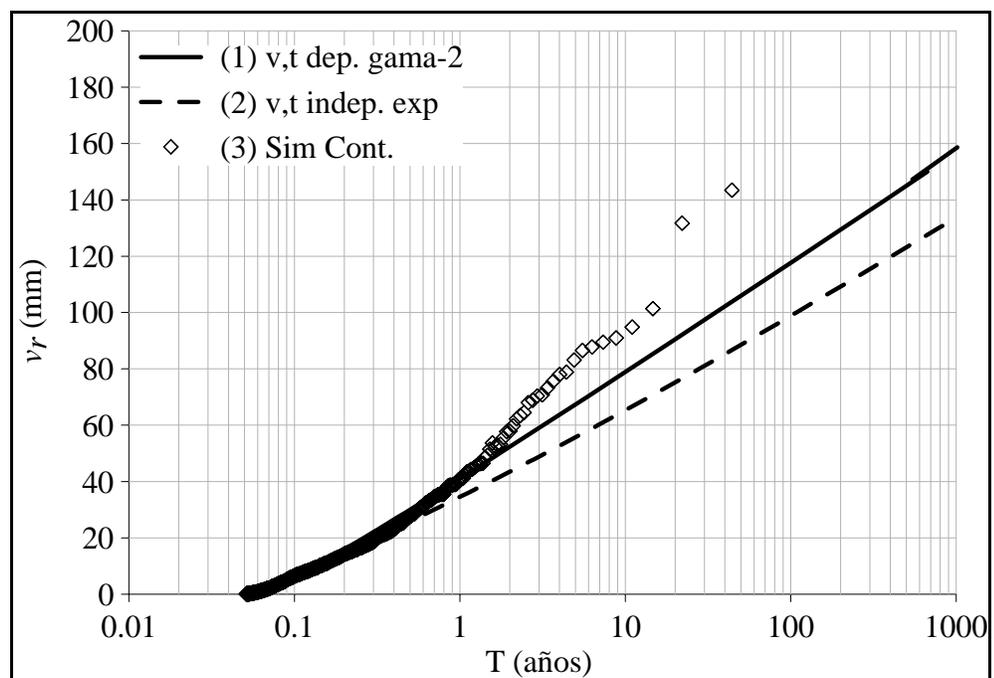


Figura 5-20: Periodo de retorno para el volumen de escorrentía de la cuenca ubicada en La Reina.

5.3.2 Caudal máximo

En las Figuras 5-21 y 5-22 se muestran las curvas de frecuencia para el caudal máximo. Para esta variable además de cambiar la modelación de las lluvias respecto del modelo de Guo y Adams se contempló una variación en la modelación de la repuesta de la cuenca. Por esta razón, en los gráficos se observan 3 curvas más los resultados provenientes de simulación continua. Cada curva corresponde a lo siguiente:

- (1) Ecuaciones propuestas en esta tesis de acuerdo a que (v,t) son variables dependientes y que el hidrograma de respuesta es el del SCS.
- (2) Ecuaciones desarrolladas por Guo y Adams, es decir (v,t) variables independientes y respuesta de la cuenca de acuerdo al hidrograma propuesto por ellos.
- (3) Análisis estadístico de los resultados de simulación continua en SWMM.
- (4) Combinación de los modelos anteriores: (v,t) variables dependientes y respuesta de la cuenca de acuerdo al hidrograma propuesto por Guo y Adams.

Tanto en la Figura 5-21 como en la 5-22, al comparar las curvas (2) y (4) que tienen el mismo hidrograma de respuesta, se advierte que la estimación del caudal máximo cambia según el modelo de lluvias adoptado. Se concluye que la modelación de la relación de dependencia entre las variables (v,t) incide en las estimaciones del periodo de retorno del caudal máximo asociado a un evento.

Al comparar las curvas (2) y (4) con los resultados provenientes de la simulación continua se observa un resultado similar que en el caso del volumen de escorrentía. En ambas localidades, la curva de frecuencia calculada incluyendo la dependencia de las

variables (v,t) se ajusta mejor a los resultados de SWMM que las curvas que no incluyen este efecto. A pesar de esta mejora, ambas curvas difieren.

La curva (1) se calculó para explorar la reacción del modelo analítico frente a cambios en la modelación de la respuesta de la cuenca, en este caso el hidrograma de respuesta propuesto por Guo y Adams se cambió por el hidrograma del SCS. Observando los gráficos se concluye que en ambos casos el ajuste del modelo mejora al cambiar el hidrograma, especialmente en el caso de Chillán. En la cuenca de la comuna de La Reina para periodos de retorno menores que 3 años la curva (3) es la que mejor se ajusta a los resultados de simulación continua, mientras que para $T > 3$ la curva (2) es la que se ajusta mejor. Sin embargo, en términos globales la curva (1) reproduce mejor el comportamiento de los resultados provenientes de la simulación continua.

De acuerdo a los gráficos el hidrograma del SCS se asemeja más a la respuesta hidrológica de las cuencas evaluadas en este trabajo que el hidrograma propuesto por Guo y Adams. Sin embargo queda abierta la posibilidad de explorar la implementación del modelo con otros hidrogramas, entendiendo que la respuesta de la cuenca depende de la aplicación específica y es imposible pretender reproducir todos los casos con sólo un tipo de respuesta. Queda en evidencia la importancia de una estimación correcta del tiempo de concentración.

A pesar de que parece más lógico que la respuesta de la cuenca dependa de la duración de la lluvia, merece la pena señalar que en caso de que la duración de una tormenta sea 0.8 veces el tiempo de concentración de la cuenca, $t = 0.8 \cdot t_c$, ambos hidrogramas deben entregar el mismo valor de Q_p . En cambio, si la duración de la tormenta es mayor que t_c el hidrograma propuesto por Guo y Adams debería dar una estimación del caudal máximo menor que el entregado por el método del SCS. Se analizaron las series de duración de tormentas y se encontró que en ambas localidades las tormentas “tienden” a

durar más que $0.8 \cdot t_c$ con lo que se espera que el modelo de Guo y Adams “tienda” a subestimar la predicción del caudal máximo respecto a lo que entrega el hidrograma del SCS. Por ejemplo, en el caso de Chillán $0.8 \cdot t_c$ es igual a 3.2 horas y el 62 % de las tormentas tiene una duración superior, por lo que es razonable que al aplicar el hidrograma del SCS la predicción de Q_p se ajuste mejor a las estimaciones provenientes de la simulación continua, que es justamente lo que se observa en la Figura 5-17. Respecto a la cuenca de la comuna de La Reina se tiene que $0.8 \cdot t_c = 2.4$ horas y que el 84 % de las lluvias presenta una duración mayor que ese valor por lo que también se obtienen mayores estimaciones de Q_p al aplicar el hidrograma SCS en vez del hidrograma propuesto por Guo y Adams.

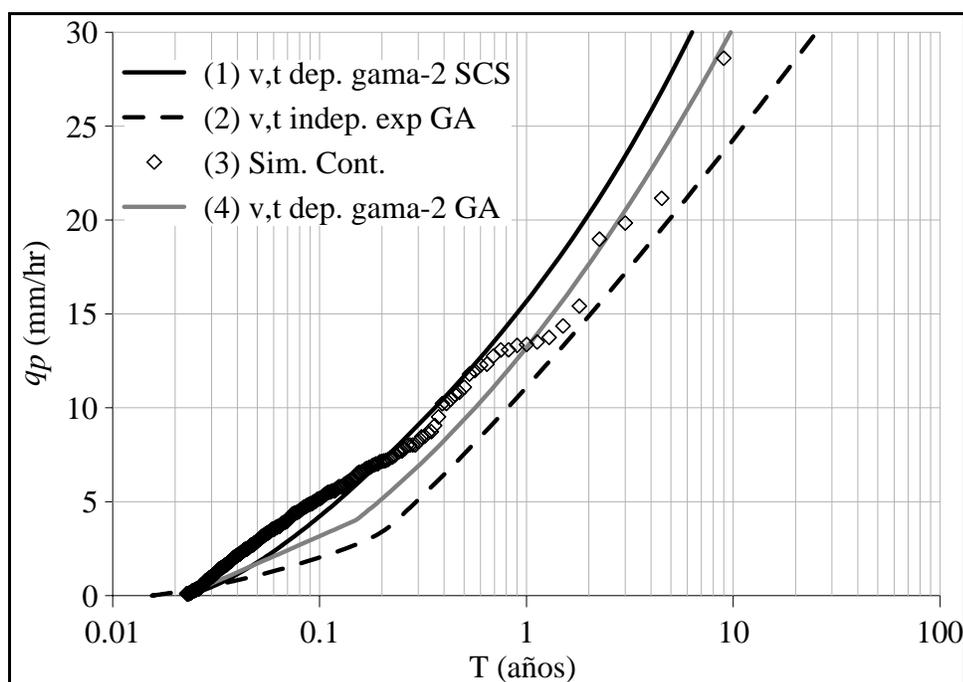


Figura 5-21: Periodo de retorno para el caudal máximo de la cuenca ubicada en Chillán.

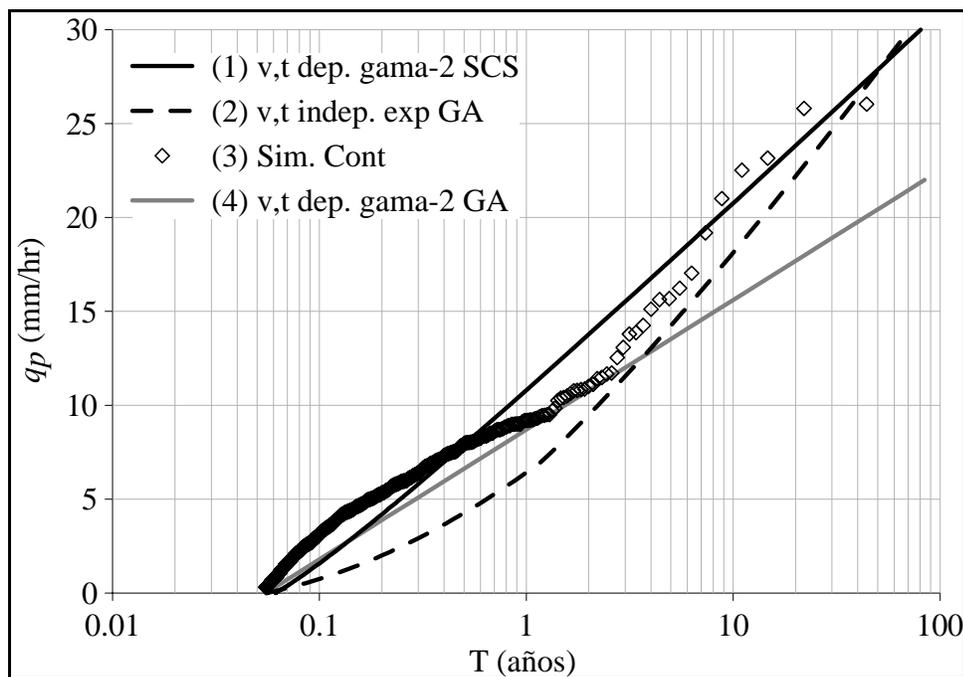


Figura 5-22.- Periodo de retorno para el caudal máximo de la cuenca ubicada en La Reina.

Por otro lado, el tiempo de concentración también es un factor importante en la estimación del caudal máximo. En este trabajo se optó por usar un valor constante de t_c para eventos de esorrentía con distintos periodos de retorno, calculado en base a una fórmula que incluye la intensidad de lluvia efectiva, la que se representó por una estimación gruesa de su promedio histórico. Considerando que t_c es el único parámetro del modelo analítico que no corresponde a un parámetro de la simulación continua y que existe gran incertidumbre en su estimación por depender de muchas variables y procesos complejos que ocurren en una cuenca, las Figuras 5-23 y 5-24 muestran la sensibilidad de las estimaciones del caudal máximo frente a cambios en el valor de t_c . En ellas se observa que a medida de que el valor del tiempo de concentración aumenta, la predicción del caudal máximo disminuye, lo que concuerda con el hecho de que el tiempo base del hidrograma es directamente proporcional a t_c . Así, si aumenta t_c ,

aumenta el tiempo base del hidrograma, lo que, sujeto a un volumen de escorrentía determinado, obliga a que el caudal máximo disminuya.

El objetivo del modelo analítico no es entregar valores exactos y detallados del caudal asociado a un periodo de retorno (o nivel de riesgo), sino entregar órdenes de magnitud de los parámetros para la etapa de planificación de proyectos. En este sentido, es recomendable realizar el análisis de sensibilidad propuesto. Por ejemplo, para el caso de Chillán se estimó un tiempo de concentración de 4 horas y en la Figura 5-23 se observa que los resultados obtenidos de la simulación continua se ubican en una zona delimitada por las curvas $Q_p = f(T)$ correspondientes a $t_c = 2$ horas y a $t_c = 5$, es decir, con una variación de $\pm 0.5 \cdot t_c$ se obtuvo un abanico de resultados que contiene a los resultados provenientes de una modelación mucho más compleja. Para el caso de Santiago, en que el tiempo de concentración se estimó en 3 horas se observa la misma situación.

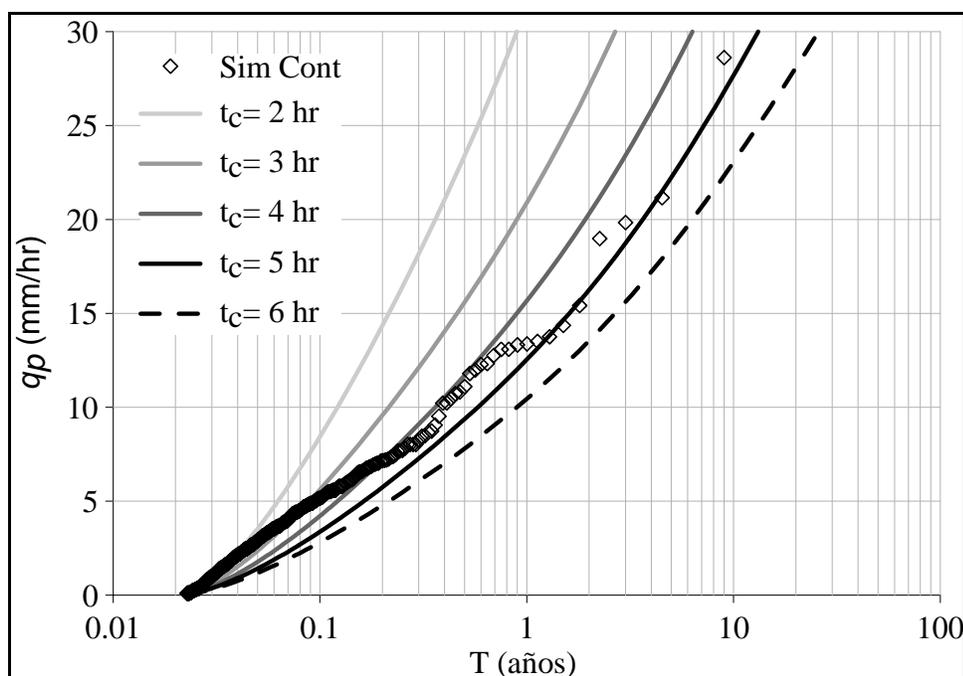


Figura 5-23: Sensibilidad del caudal máximo respecto al tiempo de concentración en la cuenca ubicada en Chillán.

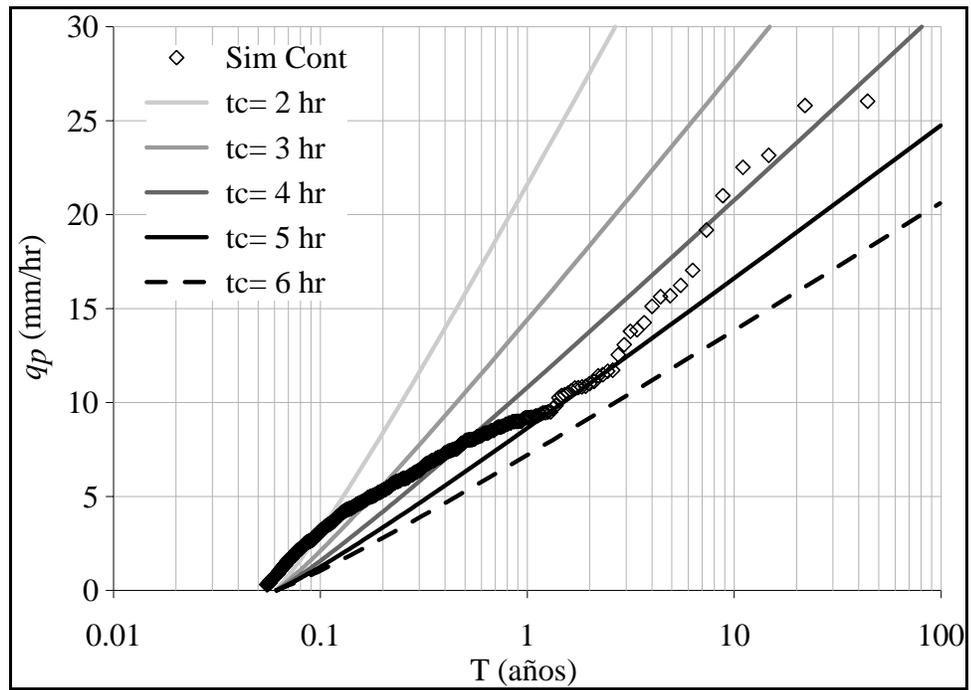


Figura 5-24: Sensibilidad del caudal máximo respecto al tiempo de concentración en la cuenca ubicada en La Reina.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se propuso un modelo analítico para estimar la curva de frecuencia del volumen de escorrentía y caudal máximo de las crecidas generadas en una cuenca urbana a partir de un modelo estocástico de lluvias. Éste se desarrolló siguiendo la teoría de cópulas para reproducir el efecto de la dependencia entre el volumen y la duración de las tormentas. El modelo se evaluó en dos cuencas, con distintas características físicas y distintos registros de precipitación de entrada. Para ambos casos las funciones de distribución marginal del volumen y la duración de las tormentas se ajustaron a un modelo gama-2, sin embargo la estructura de dependencia de estas variables es distinta en cada localidad por lo que se adoptaron familias de cópulas diferentes para cada caso, representando en cada lugar de la mejor manera posible el comportamiento bivariado de las variables. A la luz de los resultados se comprobó que las cópulas constituyen una herramienta versátil para reproducir la estructura probabilística de eventos hidrológicos bivariados.

Las curvas de frecuencia obtenidas para el volumen y caudal máximo se compararon con las obtenidas por otro modelo analítico que no considera el efecto de la dependencia y con los provenientes del análisis estadístico de los resultados obtenidos con simulación continua en SWMM EPA 5.0. Para el caso del volumen de escorrentía se obtuvo que incluir la dependencia en la modelación de las lluvias incide directamente en la estimación del periodo de retorno. En ambas cuencas se observó que para un mismo periodo de retorno el modelo de lluvias que incluye dependencia entrega estimaciones de v_r mayores que en el caso de no incluirla, ajustándose mejor a los resultados obtenidos de la simulación continua, sobre todo para eventos con periodo de retorno menor que 1 años, es decir para aquellos eventos habituales para los que generalmente no se realizan análisis de frecuencia (por ejemplo cuando se aplica simulación por eventos con lluvias de diseño).

En cuanto a la estimación de la curva de frecuencia del caudal máximo, además de incluir la dependencia estadística del volumen y la duración de las tormentas, se exploró la posibilidad de modelar la respuesta de las cuencas de una manera distinta respecto del modelo original. Se concluye entonces que además de incluir la dependencia de las variables (v,t) es muy importante tratar de reproducir la respuesta de la cuenca de la forma más cercana a la realidad posible. En la cuenca de la ciudad de Chillán el hidrograma SCS mostró un muy buen comportamiento respecto de los resultados obtenidos con simulación continua. Sin embargo, en la cuenca de La Reina, a pesar de que el ajuste es aceptable, aún se puede mejorar. Por lo tanto, se deja abierta la posibilidad de implementar el modelo analítico con otros hidrogramas que se ajusten mejor a cada aplicación específica.

Los modelos analíticos constituyen una alternativa a la modelación por simulación continua en las etapas de planificación y factibilidad de proyectos, pues permiten obtener órdenes de magnitud razonables. Este es un muy buen resultado ya que son modelos bastante compactos que se pueden implementar en una hoja de cálculo sin la necesidad de *softwares* especiales. Además, tienen la cualidad de que en caso de no tener certeza sobre el valor de un parámetro se pueden realizar fácilmente análisis de sensibilidad, obteniendo sin mucho esfuerzo distintas curvas de frecuencia para distintos valores del parámetro. Además, en casos de que se quiera realizar algún proyecto que contemple distintas soluciones de drenaje, lo que se traduce básicamente en cambios en los parámetros de infiltración, porcentaje de impermeabilidad y tiempo de concentración, los modelos analíticos también permiten evaluar el riesgo asociado a cada escenario.

Existen trabajos en los que se ha aplicado el modelo de Guo y Adams en la evaluación de técnicas de manejo de aguas lluvias urbanas como piscinas de detención (Guo, 2001; Chen y Adams, 2005) o acoplado un modelo de carga de contaminantes que permita obtener las curvas de frecuencia de la concentración (Chen y Adams, 2006). Estos

trabajos, a pesar de no incluir la dependencia de la duración y volumen de las tormentas, han presentado resultados alentadores, por lo que resulta interesante explorar su aplicación en otras cuencas incorporando el efecto de la dependencia y explorando la aplicación de nuevos hidrogramas de respuesta.

BIBLIOGRAFÍA

- Adams, B. J., Fraser, H. G., Howard, C. D. D. & Hanafy, M. S. (1986). Meteorological data analysis for drainage system design. *Journal of Environmental Engineering*, 112(5), 827-848.
- Adams, B. J. & Papa, F. (2000). *Urban stormwater management planning with analytical probabilistic models*. (1a .ed.). New York: John Wiley Sons, Inc.
- Arumí, J.L. (2007). Conversación personal. Registro de precipitaciones en el Campus Chillán de la Universidad de Concepción.
- Bonta, J. V. & Rao, A. R. (1988). Factors affecting the identification of independent storm events. *Journal of Hydrology*, 98(3-4), 275-293.
- Chen, J. Y. & Adams, B. J. (2005). Urban storm water control evaluation with analytical probabilistic models. *Journal of Water Resources Planning and Management-Asce*, 131(5), 362-374.
- Chen, J. Y. & Adams, B. J. (2006). Urban stormwater quality control analysis with detention ponds. *Water Environment Research*, 78(7), 744-753.
- Chen, J. Y. & Adams, B. J. (2007). Development of analytical models for estimation of urban stormwater runoff. *Journal of Hydrology*, 336(3-4), 458-469.
- Córdova, J. R. & Rodríguez-Iturbe, I. (1985). On the probabilistic structure of storm surface runoff. *Water Resources Research*, 21(5), 755-763.
- De Michele, C. & Salvadori, G. (2003). A generalized pareto intensity-duration model of storm rainfall exploiting 2-copulas. *Journal of Geophysical Research*, 108(D2), 4067.
- De Michele, C., Salvadori, G., Canossi, M., Petaccia, A. & Rosso, R. (2005). Bivariate statistical approach to check adequacy of dam spillway. *Journal of Hydrologic Engineering*, 10(1), 50-57.

- Díaz-Granados, M. A., Valdes, J. B. & Bras, R. L. (1984). A physically based flood frequency distribution. *Water Resources Research*, 20(7), 995-1002.
- Dupuis, D. J. (2007). Using copulas in hydrology: Benefits, cautions, and issues. *Journal of Hydrologic Engineering*, 12(4), 381-393.
- Eagleson, P. S. (1972). Dynamics of flood frequency. *Water Resources Research*, 8(4), 878-898.
- Favre, A. C., El Adlouni, S., Perreault, L., Thiémonge, N. & Bobee, B. (2004). Multivariate hydrological frequency analysis using copulas. *Water Resources Research*, 40, W01101.
- Genest, C. & Favre, A. C. (2007). Everything you always wanted to know about copula modeling but were afraid to ask. *Journal of Hydrologic Engineering*, 12(4), 347-368.
- Genest, C. & MacKay, J. (1986). The joy of copulas: Bivariate distributions with uniform marginals. *The American Statistician*, 40(4), 280-283.
- Genest, C. & Rivest, L. P. (1993). Statistical-inference procedures for bivariate archimedean copulas. *Journal of the American Statistical Association*, 88(423), 1034-1043.
- Goel, N. K., Kurothe, R. S., Mathur, B. S. & Vogel, R. M. (2000). A derived flood frequency distribution for correlated rainfall intensity and duration. *Journal of Hydrology*, 228(1-2), 56-67.
- González, V. B. (2008). *Modelación de aguas lluvias urbanas a escala municipal*. Memoria para optar al título de Ingeniero Civil de Industrias, con Diploma en Ingeniería Hidráulica. Pontificia Universidad Católica. Santiago, Chile.
- Guo, Y. P. (2001). Hydrologic design of urban flood control detention ponds. *Journal of Hydrologic Engineering*, 6(6), 472-479.

Guo, Y. P. & Adams, B. J. (1998a). Hydrologic analysis of urban catchments with event-based probabilistic models - 1. Runoff volume. *Water Resources Research*, 34(12), 3421-3431.

Guo, Y. P. & Adams, B. J. (1998b). Hydrologic analysis of urban catchments with event-based probabilistic models - 2. Peak discharge rate. *Water Resources Research*, 34(12), 3433-3443.

Haan, C. T. (1977). *Statistical methods in hydrology* (1a. ed.). Ames: Iowa State University Press.

Hipel, K. W. & McLeod, A. I. (1994). *Time Series Modelling of Water Resources and Environmental*. (Capítulo 6: Parameter Estimation, pp. 203-234). *Developments in Water Science* (Vol. 45). USA: Elsevier.

Huber, W.C. & Dickinson, R.E. (1992). *Storm Water Management Model, Version 4: User's Manual*. U.S. Environmental Protection Agency, Athens, Georgia, USA.

James, W., Huber, W. C., Dickinson, R. E. & James, R. C. (1998). *Water systems models hydrology. User guide to swmm4 runoff and supporting modules (rain, temperature, combine and statistics)*. Guelph, Ontario, Canada: Computational Hydraulics International.

Kurothe, R. S., Goel, N. K. & Mathur, B. S. (1997). Derived flood frequency distribution for negatively correlated rainfall intensity and duration. *Water Resources Research*, 33(9), 2103-2107.

MINVU (1996). *Técnicas alternativas para soluciones de aguas lluvias en sectores urbanos. Guía de diseño*. Ministerio de Vivienda y Urbanismo. Santiago, Chile.

MOP (2007). Consultoría DP.L1-27. *Estudio de la factibilidad y diseño detallado del mejoramiento del canal de la luz en Chillán, VIII Región. Etapa 2. Estudios básicos*. Tomo I. Ministerio de Obras Públicas. Santiago, Chile.

Nelsen, R. B. (2006). *An introduction to copulas* (2a. ed.). New York: Springer Science+Business Media, Inc.

- Quader, A. & Guo, Y. P. (2006). Peak discharge estimation using analytical probabilistic and design storm approaches. *Journal of Hydrologic Engineering*, 11(1), 46-54.
- Raines, T. H. & Valdés, J. B. (1993). Estimation of flood frequencies for ungaged catchments. *Journal of Hydraulic Engineering-Asce*, 119(10), 1138-1154.
- Restrepo-Posada, P. J. & Eagleson, P. S. (1982). Identification of independent rainstorms. *Journal of Hydrology*, 55(1-4), 303-319.
- Rivera, P., Gironás, J., Montt, J. P. & Fernández, B. (2005). An analytical model for hydrologic analysis in urban watersheds, *10th International Conference on Urban Drainage*. Copenhagen, Dinamarca.
- Rossman, L. A. (2007). *Storm water managment model. Users's manual. Version 5.0*. U.S. EPA. Cincinnati, Ohio, USA.
- Salas, J. D. (1993). Analysis and modeling of hydrologic time series. En D. R. Maidment, *Handbook of hydrology* (pp. 19.1-19.72). USA: McGraw-Hill, Inc.
- Salvadori, G. & De Michele, C. (2004). Frequency analysis via copulas: Theoretical aspects and applications to hydrological events. *Water Resources Research*, 40, W12511.
- Salvadori, G. & De Michele, C. (2007). On the use of copulas in hydrology: Theory and practice. *Journal of Hydrologic Engineering*, 12(4), 369-380.
- Soil Conservation Service (1972). Hydrology. *SCS National Engineering Handbook* (sección 4). US Department of Agriculture, Washington, D.C.
- Urban Drainage and Flood Control District (2008). *Urban storm drainage criteria manual*. (Vol. 1). Denver, Colorado.
- Zhang, L. y Singh, V. P. (2007). Bivariate rainfall frequency distributions using archimedean copulas. *Journal of Hydrology*, 332(1-2), 93-109.

ANEXOS

ANEXO A: Características de las subcuencas

Tabla A-1: Características de las subcuencas de la cuenca ubicada en Chillán.

Cuenca	Área						Propiedades Físicas		Rugosidad		Detención Superficial		Infiltración	
	Total	Impermeable	Imp sin Det.	Imp con Det.	Permeable	h	Ancho Eq.	Pendiente	n imperm	n perm	S _{di}	S _{dp}	f _m	f _c
	(há)	(há)	(há)	(há)	(há)		(m)	(%)			(mm)	(mm)	(mm/hr)	(mm/hr)
1	1.319	0.385	0.249	0.136	0.934	0.292	364.0	0.050	0.008	0.275	4	11	60.0	5.0
2	0.696	0.203	0.131	0.072	0.493	0.292	210.0	1.000	0.008	0.275	4	11	60.0	5.0
3	0.609	0.350	0.230	0.120	0.260	0.574	126.0	0.910	0.015	0.200	4	10	45.0	5.0
4	1.495	0.858	0.564	0.294	0.637	0.574	192.0	0.300	0.015	0.200	4	10	45.0	5.0
5	1.819	1.044	0.686	0.358	0.775	0.574	220.5	0.130	0.015	0.200	4	10	45.0	5.0
6	0.549	0.160	0.104	0.057	0.388	0.292	149.0	0.010	0.023	0.140	4	9	37.5	4.0
7	0.677	0.388	0.255	0.133	0.288	0.574	256.0	0.100	0.015	0.200	4	10	45.0	5.0
8	0.666	0.382	0.251	0.131	0.284	0.574	228.6	0.250	0.015	0.200	4	10	45.0	5.0
9	0.716	0.007	0.000	0.007	0.709	0.010	240.0	0.150	0.030	0.080	4	8	30.0	3.0
10	0.686	0.394	0.259	0.135	0.292	0.574	221.4	0.010	0.015	0.200	4	10	45.0	5.0
11	0.629	0.361	0.237	0.124	0.268	0.574	206.1	0.100	0.015	0.200	4	10	45.0	5.0

$k = 2 \text{ hr}^{-1}$ para todas las subcuencas.

$R = 5 \cdot 10^{-4}$ para todas las subcuencas.

Tabla A-2: Características de las subcuencas de la cuenca ubicada en la comuna de La Reina.

Cuenca	Área						Propiedades Físicas		Rugosidad		Detención Superficial		Infiltración	
	Total	Impermeable	Imp sin Det.	Imp con Det.	Permeable	h	Ancho Eq.	Pendiente	n imperm	n perm	S _{di}	S _{dp}	f _m	f _c
	(há)	(há)	(há)	(há)	(há)		(m)	(%)			(mm)	(mm)	(mm/hr)	(mm/hr)
1	1.956	1.472	0.632	0.840	0.485	0.75	435.16	1.197	0.012	0.200	4	12	60.0	5.0
2	2.361	1.776	0.762	1.014	0.585	0.75	532.09	0.204	0.012	0.200	4	12	60.0	5.0
3	2.294	1.725	0.741	0.985	0.568	0.75	500.73	0.989	0.012	0.200	4	12	60.0	5.0
4	1.947	1.465	0.629	0.836	0.482	0.75	467.14	1.008	0.012	0.200	4	12	60.0	5.0
5	1.772	1.333	0.572	0.761	0.439	0.75	288.04	0.286	0.012	0.200	4	12	60.0	5.0
6	1.047	0.788	0.338	0.450	0.259	0.75	189.97	0.463	0.012	0.200	4	12	60.0	5.0
7	0.703	0.529	0.227	0.302	0.174	0.75	241.46	0.857	0.012	0.200	4	12	60.0	5.0
8	0.641	0.482	0.207	0.275	0.159	0.75	130.48	0.010	0.012	0.200	4	12	60.0	5.0
9	0.924	0.695	0.298	0.397	0.229	0.75	283.39	0.236	0.012	0.200	4	12	60.0	5.0

$k = 2 \text{ hr}^{-1}$ para todas las subcuencas.

$R = 5 \cdot 10^{-4}$ para todas las subcuencas.

ANEXO B: Tiempo de concentración de las subcuencas.

Tabla B.1.- Tiempo de concentración de cada subcuenca de la cuenca ubicada en Chillán.

Subcuenca	Area (há)	h	W(m)	Lp (m)	Li (m)	np	ni	iep (mm/hr)	iei (mm/hr)	S (%)	tcp (hr)	tci (hr)	tcs (hr)
1	1.319	0.292	364.0	25.65	10.58	0.275	0.008	1.23	1.12	0.050	3.39	0.25	3.39
2	0.696	0.292	210.0	23.48	9.68	0.275	0.008	1.23	1.12	1.000	1.31	0.10	1.31
3	0.609	0.574	126.0	20.60	27.76	0.200	0.015	1.23	1.12	0.910	1.03	0.27	1.03
4	1.495	0.574	192.0	33.17	44.68	0.200	0.015	1.23	1.12	0.300	1.91	0.50	1.91
5	1.819	0.574	220.5	35.14	47.33	0.200	0.015	1.23	1.12	0.130	2.54	0.67	2.54
6	0.549	0.292	149.0	26.06	10.75	0.140	0.023	1.23	1.12	0.010	3.70	0.76	3.70
7	0.677	0.574	256.0	11.26	15.17	0.200	0.015	1.23	1.12	0.100	1.39	0.36	1.39
8	0.666	0.574	228.6	12.41	16.72	0.200	0.015	1.23	1.12	0.250	1.12	0.29	1.12
9	0.716	0.010	240.0	29.52	0.30	0.080	0.030	1.23	1.12	0.150	1.27	0.05	1.27
10	0.686	0.574	221.4	13.20	17.78	0.200	0.015	1.23	1.12	0.010	3.05	0.80	3.05
11	0.629	0.574	206.1	13.01	17.52	0.200	0.015	1.23	1.12	0.100	1.51	0.40	1.51

Tabla B.2.- Tiempo de concentración de cada subcuenca de la cuenca ubicada en la comuna de La Reina.

Subcuenca	Area (há)	h	W(m)	Lp (m)	Li (m)	np	ni	iep (mm/hr)	iei (mm/hr)	S (%)	tcp (hr)	tci (hr)	tcs (hr)
1	1.9563	0.7522	435.2	11.14	33.82	0.200	0.012	1.39	1.26	1.197	0.62	0.23	0.62
2	2.3612	0.7522	532.1	11.00	33.38	0.200	0.012	1.39	1.26	0.204	1.05	0.39	1.05
3	2.2938	0.7522	500.7	11.35	34.46	0.200	0.012	1.39	1.26	0.989	0.67	0.25	0.67
4	1.9473	0.7522	467.1	10.33	31.36	0.200	0.012	1.39	1.26	1.008	0.63	0.24	0.63
5	1.7725	0.7522	288.0	15.25	46.29	0.200	0.012	1.39	1.26	0.286	1.16	0.43	1.16
6	1.0472	0.7522	190.0	13.66	41.47	0.200	0.012	1.39	1.26	0.463	0.94	0.35	0.94
7	0.7032	0.7522	241.5	7.22	21.91	0.200	0.012	1.39	1.26	0.857	0.53	0.20	0.53
8	0.6411	0.7522	130.5	12.17	36.96	0.200	0.012	1.39	1.26	0.010	2.77	1.04	2.77
9	0.9238	0.7522	283.4	8.08	24.52	0.200	0.012	1.39	1.26	0.236	0.84	0.31	0.84

ANEXO C: Tiempo de viaje asociado a cada ruta.

Tabla C-1: Tiempo de viaje asociado a cada posible ruta de la cuenca ubicada en Chillán.

Nº	Ruta	Tiempo (hr)
1	S1	3.4
2	S2	1.3
3	S3	1.0
4	S4-C1	1.9
5	S5-C2-C1	2.6
6	S6-C3-C2-C1	3.8
7	S7-C4-C1	1.4
8	S8-C5-C4-C1	1.2
9	S9-C6-C5-C4-C1	1.4
10	S10-C7-C4-C1	3.1
11	S11-C8-C7-C4-C1	1.6
Máximo	S6-C3-C2-C1	3.8

Tabla C-2: Tiempo de viaje asociado a cada posible ruta de la cuenca ubicada en la comuna de La Reina.

Nº	Ruta	Tiempo (hr)
1	S1-C1	0.7
2	S2-C2-C6	1.2
3	S3-C3-C5-C6	0.8
4	S4-C4-C3-C5-C6	0.8
5	S5	1.2
6	S6-C6	1.0
7	S7-C5-C6	0.6
8	S8-C4-C3-C5-C6	3.0
9	S9-C5-C6	1.0
Máximo	S8-C4-C3-C5-C6	3.0