



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE  
ESCUELA DE INGENIERIA

INCORPORACIÓN DEL VALOR DEL DINERO  
EN EL TIEMPO PARA LA DETERMINACIÓN DE  
LÍMITES ECONÓMICOS DE UN OPEN PIT

EDUARDO ORLANDO LATORRE NANJARÍ

Tesis para optar al grado de  
Doctor en Ciencias de la Ingeniería

Profesor Supervisor:  
**GUSTAVO LAGOS CRUZ-COKE**

Santiago de Chile, abril de 2015

© 2015, Eduardo Latorre Nanjarí



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE  
ESCUELA DE INGENIERIA

INCORPORACIÓN DEL VALOR DEL  
DINERO EN EL TIEMPO PARA LA  
DETERMINACIÓN DE LÍMITES  
ECONÓMICOS DE UN OPEN PIT

EDUARDO ORLANDO LATORRE NANJARÍ

Tesis presentada a la Comisión integrada por los profesores:

**SR. GUSTAVO LAGOS CRUZ-COKE**

**SR. LUIS CONTESSE BECKER**

**SR. EDMUNDO TULCANAZA**

**SR. JORGE NAVEA CASTRO**

**SR. TADEUSZ S. GOLOSINSKI**

**SR. CRISTIÁN VIAL EDWARDS**

Para completar las exigencias del grado de  
Doctor en Ciencias de la Ingeniería

Santiago de Chile, abril de 2015

A mi esposa Ingrid y mis hijos  
Claudio y Antonella.  
A mi madre, hermanos y abuelos.

## **AGRADECIMIENTOS**

Quiero agradecer a los profesores Gustavo Lagos C., Tadeusz Golosinski y Luis Contesse por sus comentarios y valiosa ayuda en el desarrollo de esta tesis.

Agradezco a la Pontificia Universidad Católica de Chile por darme la oportunidad de crecer como ser humano y desarrollarme aún más como profesional.

También deseo agradecer a todo el personal administrativo del Centro de Minería y de la Dirección de Postgrado de la Escuela de Ingeniería, con muchos de los cuales he creado bonitos lazos de amistad.

Finalmente, agradecer a las autoridades de la Universidad de Atacama por darme la oportunidad para seguir aprendiendo.

## INDICE GENERAL

	Pág.
DEDICATORIA.....	ii
AGRADECIMIENTOS.....	iii
INDICE GENERAL.....	iv
INDICE DE TABLAS.....	vi
INDICE DE FIGURAS.....	vii
RESUMEN.....	x
ABSTRACT.....	xii
1. INTRODUCCION.....	1
1.1 Motivación.....	1
1.2 Antecedentes.....	2
1.3 Justificación.....	3
1.4 Definición del Problema Clásico. ....	4
1.5 Objetivos de la Tesis. ....	6
1.6 Alcance de la Tesis.....	7
1.7 Metodología. ....	7
1.8 Capítulos de la Tesis. ....	8
2. REVISIÓN DE LITERATURA. ....	10
2.1 Introducción. ....	10
2.2 Límites de Pit. ....	10
2.3 Ultimate Pit. ....	12
2.4 Pit Final. ....	14
2.5 Algoritmos de Optimización de Pit.....	14
2.5.1 Cono Móvil Optimizado de Lemieux (1979). ....	15
2.5.2 Algoritmo de Lerchs y Grossmann 3D (1965). ....	17

2.5.3	Algoritmo de Tolwinski y Underwood (1992).	.22
2.6	Otros Algoritmos.	24
3.	MARCO TEÓRICO.	30
3.1	Modelos de Bloques y Límites de Pits.	30
3.2	Relaciones entre Pit Económico y Ultimate Pit.	35
3.3	Modelos de Bloques y Grafos.	44
3.4	Definición del Problema.	51
3.5	Algoritmo para Pit Económico.	53
3.5.1	Definiciones.	53
3.5.2	Modelo General del Optimización.	57
3.5.3	Determinación de una Subsecuencia Óptima.	59
3.5.4	Procedimiento Heurístico para Ajuste de Subsecuencias.	69
4.	IMPLEMENTACIÓN DEL ALGORITMO.	78
4.1	Introducción.	78
4.2	Algoritmo.	78
4.3	Cálculo de Beneficios.	80
4.3.1	Cálculo de Beneficios por Leyes de Corte.	81
4.3.2	Cálculo de Beneficios por Valor Máximo.	82
4.3.3	Variables Técnicas y Económicas de la Valoración.	83
4.3.3.1	Variables Técnicas.	83
4.3.3.2	Variables Económicas.	84
4.4	Cálculo de Valor Presente de Subárbol Cónico.	87
4.4.1	Metodología para Lectura de Nodos.	87
4.4.2	Ordenamiento de nodos.	91
4.5	Determinación de la Tasa de Descuento.	91
4.6	Árbol Cónico Máximo.	92
5.	DISCUSIÓN DE RESULTADOS.	94
5.1	Introducción.	94
5.2	Comparación con el Algoritmo de Cono Flotante.	94
5.2.1	Bloque Sustentado.	95
5.2.2	Superposición de Conos.	98

5.3	Comparación con Algoritmo de Lerchs y Grossmann (1965). .....	.101
5.3.1	Un Modelo Bidimensional Histórico.....	.102
5.3.2	Un Modelo Bidimensional más Complejo. ....	.104
5.3.3	Aplicando el Valor del Dinero en el Tiempo.....	.110
5.4	Caso Tridimensional. ....	.116
5.4.1	Características del Modelo Geológico.....	.117
5.4.2	Modelo Económico.....	.119
5.4.3	Resultados en Límites de Pit, Beneficios y VPN. ....	.120
5.4.4	Secuencia de Explotación. ....	.125
5.5	Anchos de Expansión.....	.128
5.6	Eficiencia y Beneficios de la Metodología. ....	.131
6.	CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS. ....	133
6.1	Conclusiones. ....	133
6.2	Desarrollos Futuros. ....	.137
7.	BIBLIOGRAFÍA. ....	138
8.	ANEXOS. ....	141
	Anexo A: Fotos del Pit Último generado por el Algoritmo de Lerchs y Grossmann.....	.142
	Anexo B: Fotos del Pit Último generado por el Algoritmo de Pit Económico.....	.151
	Anexo C: Fotos del Pit Económico generado por el Algoritmo de Pit Económico.....	160

## INDICE DE TABLAS

Capítulo 5	
Tabla 5.1. Valor Presente por Nodo en 1° Iteración.....	.112
Tabla 5.2. Valor Presente por Nodo en 2° Iteración.....	.113
Tabla 5.3. Cuadro comparativo entre algoritmos, caso bidimensional.....	.116
Tabla 5.4. Resumen de resultados de los algoritmos en modelo tridimensional. ...	.121
Tabla 5.5. Valor de pits anidados en el Pit Económico – Modelo Tridimensional. .	127
Tabla 5.6. Anchos de expansión a evaluar en proceso de optimización de pits. ....	.129
Tabla 5.7. Tiempo de corrida por tamaño de modelos de bloques. ....	.131

## INDICE DE FIGURAS

	Pág.
<b>Capítulo 2</b>	
Figura 2.1. Pits Anidados y Ultimate Pit. ....	.12
Figura 2.2. Modelo básico para Cono Móvil Positivo. ....	.16
Figura 2.3. Modelo básico para Cono Móvil Negativo.....	.16
Figura 2.4. Definición de Ramas Fuertes y Débiles en Algoritmo de L&G.....	.19
Figura 2.5. Variables del Algoritmo de M. Meyer (1969). ....	.26
<b>Capítulo 3</b>	
Figura 3.1. Forma y variables del Modelo de Bloques. ....	.30
Figura 3.2. Cono de Pit Factible. ....	.32
Figura 3.3. Contorno Factible. ....	.32
Figura 3.4 Disposición probable entre un <i>Ultimate Pit</i> y un Pit Económico. ....	.41
Figura 3.5 Disposición probable de dos Pits Económicos, en un <i>Ultimate Pit</i> .....	.43
Figura 3.6. Bloques de diferencia entre un Pit Económico y un Ultimate Pit. ....	.43
Figura 3.7. Adyacencia entre vértices de $G$ . ....	.45
Figura 3.8. Perfil bidimensional de un Pit Factible.....	.46
Figura 3.9 Geometría de un Talud Global. ....	.49
Figura 3.10. Serie de Árboles Cónicos Marginales. ....	.52
Figura 3.11. Secuencia Óptima de Pits Anidados. ....	.53
Figura 3.12. Ubicación espacial de nodos adyacentes. ....	.54
Figura 3.13. Nodo-base de una Árbol Cónico dentro de un Cono Factible. ....	.54
Figura 3.14. Componentes de un Árbol. ....	.56
Figura 3.15. Concavidad de la curva de VPN bajo una secuencia de explotación. ...	.58
Figura 3.16. Secuencia de Nodos Base. ....	.59
Figura 3.17. Componentes de la función de recursión.....	.61
Figura 3.18. Secuencia entre el nodo adyacente 3 y el nodo base analizado. ....	.66
Figura 3.19 Configuración para obtener el valor presente neto unitario de un nodo-base $i$ , cuando el nodo adyacente $i1$ es el de mayor valor cónico. ....	.67
Figura 3.20 Configuraciones para obtener el valor presente neto de un nodo- base, en un modelo bidimensional.....	.68
Figura 3.21. Condiciones de fortaleza de un Nodo-base. ....	.71
Figura 3.22. Ubicación de Pits Económicos en la curva de Valor Presente Neto.....	.74
Figura 3.23. Diagrama de Flujo para búsqueda de nodos fuertes. ....	.77
<b>Capítulo 4</b>	
Figura 4.1. Disposición de conos elípticos en cada cuadrante definido por un bloque-base. ....	.88
Figura 4.2. Selección de bloques pertenecientes a un subárbol cónico marginal. ....	.89
Figura 4.3. Secuencia de extracción de bloques para dos niveles.....	.91

## Capítulo 5

Figura 5.1. Modelo para problema de bloque sustentado. ....	95
Figura 5.2. Valores de conos para problema de bloque sustentado. ....	95
Figura 5.3. Resultado de la 1º iteración para problema de bloque sustentado. ....	97
Figura 5.4. Resultado de la 2º iteración para problema de bloque sustentado. ....	97
Figura 5.5. Pit Económico para problema de bloque sustentado. ....	98
Figura 5.6. Modelo para problema de superposición de conos. ....	98
Figura 5.7. Valores de conos para problema de superposición de conos. ....	99
Figura 5.8. Modelo para la 2º iteración en problema de superposición de conos. ...	100
Figura 5.9. Modelo Bidimensional de Lerchs y Grossmann (L&G). ....	102
Figura 5.10. Valores de conos para modelo de L&G (1965) ....	102
Figura 5.11. Modelo para 2º iteración del modelo de L&G (1965). ....	103
Figura 5.12. Pit Económico para modelo de L&G (1965). ....	104
Figura 5.13. Modelo Bidimensional Complejo. ....	105
Figura 5.14. Valores de conos para Modelo Bidimensional Complejo. ....	105
Figura 5.15. Modelo Bidimensional Complejo para segunda iteración. ....	107
Figura 5.16. Modelo Bidimensional Complejo para tercera iteración. ....	108
Figura 5.17. Modelo Bidimensional Complejo para cuarta iteración. ....	108
Figura 5.18. Modelo Bidimensional Complejo para quinta iteración. ....	109
Figura 5.19. Secuencia de Explotación y Pit Último del Modelo Bidimensional Complejo. ....	109
Figura 5.20. Modelo para analizar impacto del Valor del Dinero en el Tiempo (Modelo VDT). ....	111
Figura 5.21. Valores de conos para modelo VDT. ....	112
Figura 5.22. Modelo $G^1$ con valores de árboles cónicos (Modelo VDT). ....	113
Figura 5.23. Modelo $G^2$ con valores de árboles cónicos (Modelo VDT). ....	114
Figura 5.24. Pit Económico del Modelo VDT. ....	115
Figura 5.25. Pit Último L&G y secuencia con parametrización Modelo VDT. ....	115
Figura 5.26. Planta N°14 del modelo tridimensional de bloques geológico a evaluar. ....	118
Figura 5.27. Planta N°6 del modelo tridimensional de bloques geológico a evaluar. ....	118
Figura 5.28. Perfil W-E del modelo tridimensional de bloques geológico a evaluar. ....	119
Figura 5.29. Modelos de bloques del fondo del Pit Último (planta 1) creado con el APE (Izquierda) y con el A. de L&G (Derecha). ....	122
Figura 5.30. Modelos de bloques del fondo del Pit Último (Planta 2) creado con el A. de Pit Económico (Izq) y con el A. de L&G (Der). ....	122
Figura 5.31. Planta del nivel 13 del Pit Económico. ....	123
Figura 5.32. Planta del nivel 13 del Pit Último. ....	123
Figura 5.33. Diferencia de límites entre pit económico y pit último en planta del Nivel 14. ....	124
Figura 5.34. Gráfico de beneficio y VPN por pit anidado. ....	126
Figura 5.35. Secuencia de pits anidados en el nivel 14. ....	125

Figura 5.36. Modelo de Bloques Económico inicial, con límite de pit económico, para evaluación de ancho de fase óptima.....	.129
Figura 5.37. Valor presente neto por ancho de fases. ....	.130
Figura 5.38. Secuencia y pit económico para una expansión de 3 bloques de ancho.....	.130
Figura 5.39. Secuencia y pit económico para una expansión de 4 bloques de ancho.....	.130
Figura 5.40. Secuencia y pit económico para una expansión de 5 bloques de ancho.....	.130

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE  
ESCUELA DE INGENIERIA

INCORPORACIÓN DEL VALOR DEL DINERO EN EL TIEMPO PARA LA  
DETERMINACIÓN DE LÍMITES ECONÓMICOS DE UN OPEN PIT

**Tesis enviada a la Dirección de Investigación y Postgrado en cumplimiento parcial  
de los requisitos para el grado de Doctor en Ciencias de la Ingeniería por**

EDUARDO ORLANDO LATORRE NANJARÍ

**RESUMEN**

La minería es una actividad industrial de alto riesgo técnico y económico. El riesgo técnico considera las incertidumbres asociadas al tamaño, la forma y la calidad del cuerpo mineralizado, la estabilidad del diseño minero, el tamaño de la operación, la disponibilidad y utilización del equipamiento, entre otros aspectos. Por otro lado, el riesgo económico y financiero tiene relación con los pronósticos de precios, costos e inversiones, con la determinación adecuada de la tasa de descuento y con la selección óptima de fuentes de financiamiento, entre otros.

Por estas razones, en cada etapa del proceso de planificación se buscan aquellos resultados óptimos que reducen la incertidumbre y maximizan el valor presente neto del negocio. Una de estas etapas es la determinación del tamaño de pit final. Conocer el límite de pit final es muy importante, pues es la base para determinar las reservas a explotar y la rentabilidad global del negocio.

En las últimas cinco décadas, se ha investigado bastante para desarrollar algoritmos que permitan encontrar el límite óptimo de una mina explotada a cielo abierto. Se ha recurrido a la programación lineal, a la técnica de flujo en redes, a la programación dinámica, a la heurística, y más recientemente a la inteligencia artificial. Sin embargo, el problema es tan complejo que solo el algoritmo de cierre máximo de Lerchs y Grossmann (1965) ha logrado el objetivo de optimización. No obstante, este algoritmo no aporta a la estrategia empresarial de maximizar el valor presente neto, pues solo puede optimizar límites de pit en base al beneficio instantáneo o flujo de caja.

En vista de esta problemática, se piensa que un algoritmo que busque los límites de pit en base a la maximización del valor presente neto del negocio, a pesar de que no encuentre un óptimo, generará un resultado mejor que el de Lerchs y Grossmann (1965).

En esta investigación, se desarrolló un nuevo algoritmo que permite definir el límite de pit que produce el máximo valor presente neto (VPN) para un depósito mineral, bajo un escenario económico dado y para una tasa de descuento dada. El método utiliza un algoritmo que combina programación dinámica, para la búsqueda de una secuencia de extracción óptima, y heurística, para ajustar los bloques mineralizados del límite. Fue probado para la evaluación de depósitos minerales de diferentes tamaños y variadas distribuciones de leyes. Los resultados confirman que para una tasa de descuento cero los límites de pit resultaron ser muy similares que aquellos definidos utilizando el método de Lerchs y Grossmann (1965). Sin embargo, cuando se utiliza una tasa de descuento mayor que cero se genera un valor presente neto mayor o al menos igual.

Esta investigación generó dos publicaciones internacionales: “Definition of Economic Pit Limits Taking in Consideration Time Value of Money” (E. Latorre y T.S. Golosinski, 2011) y “Optimising Open Pit Mine Scheduling Taking into Consideration Time Value of Money and Mining Restrictions” (E. Latorre y T.S. Golosinski, 2012).

Palabras Claves: Minería Cielo Abierto, Optimización, Límites de Pit Final

#### **Miembros de la Comisión de Tesis Doctoral**

**Sr. Gustavo Lagos Cruz-Coke**

**Sr. Luis Contesse**

**Sr. Edmundo Tulcanaza**

**Sr. Jorge Navea Castro**

**Sr. Tadeuzs Golosinski**

**Sr. Cristian Vial Edwards**

Santiago, Abril de 2015

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE  
ESCUELA DE INGENIERIA

INCORPORATION OF THE TIME VALUE OF MONEY TO DETERMINE  
ECONOMIC LIMITS OF AN OPEN PIT MINING

**Thesis submitted to the Office of Research and Graduate Studies in partial fulfillment of the requirements for the Degree of Doctor in Engineering Sciences by**

EDUARDO O. LATORRE

**ABSTRACT**

Mining is an industrial activity with a high technical and economic risk. The technical risk is associated to some uncertainties considering the size, shape and quality of the ore body, stability mine design, the size of the operation and use of the equipment availability, among others. Moreover, the economic and financial risk is related to the forecasts of prices, costs and investments, with the proper determination of the discount rate and the optimal selection of sources of financing, among others.

For these reasons, at each stage of the planning process optimum results that reduce uncertainty and maximize the net present value of the business are required. One of these stages is the determination of the final pit size. Knowing the ultimate pit limit is very important because it is the basis for determining the reserves to operate and the overall profitability of the business.

In the past five decades, plenty of investigation has been done to develop algorithms for finding the optimal limit of operating an open pit mine. We have used linear programming, the network flow technique, the dynamic programming to heuristics, and more recently, artificial intelligence. However, the problem is so complex that only the maximum closure algorithm Lerchs and Grossmann (1965) has achieved the goal of optimization. However, this algorithm gives no business strategy to maximize the net present value, since you can only optimize pit limits based on instantaneous profit or cash flow.

In view of this problem, it is thought that an algorithm that search the pit limits based on maximizing the net present value of the business, although it does not find an optimal one, will generate a better result than Lerchs and Grossmann (1965 ). This simple idea or thought, has been the support for the hypothesis of this thesis, which is: "In the area of the pit limits optimization, a suboptimal threshold based on the net present value is equal to or better than the limit based optimal benefit"

To test this hypothesis, we developed a new algorithm to define the pit limits that yield the maximum net present value (NPV) for a mineral deposit, under a given economic scenario and for a given discount rate. The method uses an algorithm that combines dynamic programming, in the search for optimum extraction sequence, and heuristics for adjusting the limit ore blocks. It was tested in evaluating ore deposits with different sizes and various grade distributions. The results confirm that for the discount rate of zero the economic pit limits are the same as that defined using Lerchs Grossman (LG) method. However, when discount rates are higher than zero, an equal or higher net present value is generated.

This research produced two international publications: "Definition of Economic Pit Limits Taking in Consideration Time Value of Money" (E. Latorre and TS Golosinski, 2011) and "Optimising Open Pit Mine Scheduling Taking Into Consideration Time Value of Money and Mining Restrictions" (E. Latorre and TS Golosinski, 2012).

Key Words: Open Pit Mining, Optimization, Ultimate Pit Limits

**Members of the Doctoral Thesis Committee:**

**Sr. Gustavo Lagos Cruz-Coke**

**Sr. Luis Contesse**

**Sr. Edmundo Tulcanaza**

**Sr. Jorge Navea Castro**

**Sr. Tadeuzs Golosinski**

**Sr. Cristian Vial Edwards**

Santiago, Abril de 2015

## 1. INTRODUCCIÓN

### 1.1 Motivación

La minería a Rajo Abierto, *Open Pit* en terminología inglesa, es un sistema de explotación que consiste en extraer, además del mineral beneficiable de un yacimiento, la totalidad de la sobrecarga de roca estéril que se ubica sobre este, considerando un ángulo de talud factible o que soporte el macizo rocoso. Este tipo de métodos deja finalmente un anfiteatro de gigantescas dimensiones, cuyos bancos forman ese ángulo de talud factible. Como en todo negocio, antes de iniciar la explotación de un yacimiento por Open Pit, se debe realizar la planificación de largo plazo, que aparte de indicarnos la mejor estrategia para consumir las reservas y cuantificar los recursos necesarios para su explotación, también nos permite evaluar la rentabilidad global del proyecto.

Este proceso de explotación considera una serie de etapas, que van desde la creación de un modelo tridimensional de información técnica hasta la generación del plan de producción y su posterior evaluación económica. La etapa de Optimización de Pits es una parte muy importante de este proceso, debido a que su principal resultado es la generación del contorno de pit económico final.

No obstante la importancia de la optimización de pit, hasta ahora ha sido imposible diseñar un algoritmo que optimice a la vez el límite de pit final, la secuencia de explotación y los programas de producción. Esto, debido a la complejidad del algoritmo y a la inmensa cantidad de variables que se deben manejar, lo cual genera problemas tanto en el tamaño de las bases de datos como en los tiempos de corrida computacionales.

La inexistencia de un algoritmo que resuelva un problema como el anterior, hace que se genere un proceso secuencial de trabajo para pasar del pit económico al pit final, y desde este al programa de producción.

Este trabajo de tesis está motivado por la búsqueda de una metodología que enlace los procesos de optimización de límites de pit final y secuencia óptima de explotación, incorporando el valor del dinero en el tiempo. Tema que aún no ha sido resuelto por los investigadores.

## 1.2 Antecedentes

El ingeniero que realiza la planificación minera de largo plazo lo primero que hace es determinar el límite de pit que maximiza el *Flujo de Caja* de la mina, imponiendo como única restricción el ángulo de talud que soportan el cuerpo mineralizado y la roca estéril. A este pit se le denomina normalmente *Ultimate Pit*, y se obtiene a partir de la aplicación de algoritmos como LG (Lerchs y Grossmann, 1965) o Cono Flotante optimizado (Lemieux, 1969), entre otros. Posteriormente, al aplicar un modelo económico paramétrico sobre los mismos algoritmos antes mencionados, se define iterativamente una secuencia de pit anidados que van desde el más pequeño hasta el más grande (que sería el *Ultimate Pit*). Los pits anidados son agrupados para formar las llamadas Fases de Explotación, las cuales cumplen con los requerimientos operacionales en cuanto a tamaño. Finalmente, el planificador toma estas fases y les introduce las vías de transporte para la extracción de los materiales durante la explotación. La última fase diseñada (la de mayor tamaño) es la que define el límite de *Pit Final*.

Todos los algoritmos creados para encontrar los límites del *Ultimate Pit* tienen las siguientes características:

- a) La función de valoración económica a optimizar es estática, determinista y poco relevante, por lo que los algoritmos solo utilizan su resultado.
- b) La única restricción operacional son los ángulos de talud global que pueden resistir las diferentes rocas que componen el macizo.
- c) La función objetivo es el Flujo de Caja del Pit, es decir, no se considera el valor del dinero en el tiempo.

Quienes han investigado a cerca de la optimización de *Ultimate Pit*, lo han hecho a partir de:

- Teoría de Grafos: H. Lerchs & L. Grossmann (1965); J. Picard (1976); Johnson & Barnes (1988); Yegulalp & Arias (1992); R. Underwood y B. Tolwinski (1998); R. Khalokakaie, P. A. Dowd y R. J. Fowell (2000); D. S. Hochbaum y A. Chen (2000).
- Programación Lineal: M. Meyer (1969).
- Programación Dinámica: H. Sevim y D. Lei (1998).
- Redes Neuronales: S. Frimpong y P. Achireko (1997).
- Métodos Heurísticos: Lemieux (1979), Pana (1965)

De todos estos, el más utilizado en paquetes computacionales comerciales es el *Algoritmo de Lerchs y Grossmann* (LG), por dos razones fundamentales. Primero, es el único algoritmo que demuestra matemáticamente la existencia y unicidad de un contorno de pit último y, segundo, no es tan complicada su programación, tanto de la versión tridimensional como de la bidimensional.

En general, los otros métodos para encontrar el *Ultimate Pit* no han sido considerados por las empresas, principalmente porque:

- a) Siguen utilizando como variable a evaluar el Flujo de Caja del Pit y sus resultados no necesariamente son óptimos
- b) El tiempo consumido por los algoritmos es similar o superior al de Lerchs y Grossmann.
- c) Para algunos algoritmos, la programación es más compleja.

### **1.3 Justificación**

Tal como se ha expresado, las investigaciones que se han realizado hasta el momento no han logrado incorporar eficientemente el valor del dinero en el tiempo en la determinación del límite de pit óptimo. Los pocos investigadores que han desarrollado algoritmos para resolver el problema, recurren a procedimientos

heurísticos, como las redes neuronales, para disminuir el tamaño del problema y lograr tiempos computacionales adecuados. Sin embargo, los resultados no han sido óptimos en ninguno de los tres ámbitos en que se evalúa la calidad de un algoritmo: tiempo de corrida, utilización de espacio en memoria y efectividad-operatividad de los resultados.

Dado que el negocio minero se realiza en base a una operación de un alto nivel de riesgo e incertidumbre, se debe seguir investigando alternativas de evaluación de límites de pit que incorporen el valor del dinero en el tiempo, sobre todo para yacimientos mineros de gran tamaño y bajas leyes, tal como se mostrará en capítulos posteriores.

#### **1.4 Definición del Problema Clásico**

El problema del Límite Último de Pit ha sido formulado de diferentes formas en la literatura, dependiendo de la metodología utilizada para resolverlo. Sin embargo, a pesar de que la solución que se planteará más adelante requiere de una formulación discreta, es interesante tener una mirada más teórica del problema. Punto de vista que seguramente será del interés de algún ingeniero que desee encontrar alguna solución de tipo continuo.

Defínase primero a  $\Omega$  como el espacio, en  $\mathbb{R}^3$ , que contiene al cuerpo mineral y al pit de máximo tamaño factible. Es decir,  $\Omega$  es el equivalente continuo al modelo de bloques. Así, cualquier pit económicamente factible estará estrictamente contenido en  $\Omega$ . Sea  $f(x, y, z)$  la función de beneficio neto asociada a un punto cualquiera  $(x, y, z) \in \Omega$  y  $V \in \Omega$  el volumen del límite de pit último. Por otro lado, considérese un vector unitario  $\hat{n}(S)$  normal en cada punto  $(x, y, z)$  de la superficie  $S$  asociada a un pit de volumen  $V$ , y un vector unitario  $\hat{k} = (0, 0, 1)$  correspondiente al eje vertical  $z$ .

La función objetivo para encontrar el límite último de pit, equivalente al que

encuentran Lerchs y Grossmann (1965), está dada por la maximización de la funcional  $F(V)$ , así:

$$\max_V F(V) = \iiint_{V \in \Omega} f(x, y, z) dx dy dz \quad (1.4)$$

Sujeta a la siguiente condición de estabilidad geotécnica:

$$\text{Arccos}(n \cdot k) \leq \alpha \quad (1.5)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo de talud global para el macizo rocoso.

La definición matemática del problema, tal como se ha presentado en las ecuaciones (1.4) y (1.5), no se ajusta a los requerimientos del negocio minero moderno porque simplifica demasiado el verdadero problema. Financieramente hablando, no se ha considerado el valor del dinero en el tiempo, la inversión del proyecto ni la opción de pasar a una explotación subterránea, en el caso de ser posible. Desde el punto de vista operacional, no se ha considerado la secuencia de explotación ni la tasa de producción. Por otro lado, tampoco es correcto establecer una única restricción geotécnica para todo el pit.

En la búsqueda de una definición más completa, siempre desde el punto de vista analítico, se ha llegado a determinar el siguiente problema de optimización:

$$\max_V F(V, P) = -I(P) + \iiint_{V \in \Omega} f(x, y, z) e^{-r \frac{M(x, y, z)}{P}} dx dy dz \quad (1.6)$$

Con la siguiente restricción de estabilidad geotécnica:

$$RG(S) = \arccos(\hat{n}(S) \cdot \hat{k}) - \alpha \quad (1.7)$$

Donde  $F(V, P)$  es el valor presente del pit, en función del volumen  $V$  del pit y de la tasa de producción  $P$ . Además,  $I$  es la inversión total,  $r$  es la tasa de descuento,  $M$  es una función auxiliar para determinar la masa explotada hasta el punto  $(x, y, z)$  y

$RG(S)$  es alguna función auxiliar asociada a la superficie del pit. Cabe destacar que  $t(x,y,z)=M(x,y,z)/P$  es el tiempo en el que se explotará el punto  $(x,y,z)$ . Por ende, la vida útil de la mina será  $T(x,y,z_{max})$ , tal que  $F(V,P)$  es máximo.

Todos los investigadores dedicados a la búsqueda de soluciones para el problema de Pit Último coinciden en que no existe una solución satisfactoria analítica y continua. Gianini (1990) expresa en su tesis doctoral que: “Dado que, para situaciones prácticas, no existe una representación analítica simple para las funciones de ingresos, costos y beneficios, se deben utilizar técnicas numéricas para resolver el problema de límites de pit. Esto implica la discretización del problema”.

### **1.5 Objetivos de la Tesis**

Esta tesis se enfoca en la incorporación del valor del dinero en el tiempo como variable relevante para resolver el problema de límites de pit. Este es un problema que hasta el día de hoy nadie ha resuelto en forma eficiente, aunque varios autores, como Tolwinski y Underwood (1992), lo han tratado en forma tangencial para resolver otro problema, que es el de planificación de la producción, considerando que el pit final ya existe.

Un segundo objetivo es mostrar que, bajo ciertas condiciones relacionadas a la calidad del cuerpo mineralizado, un pit óptimo en valor presente neto es de menor tamaño, pero de mayor valor presente, que un pit óptimo en beneficio. Si bien este es un tema poco investigado, adquiere alta relevancia cuando se analizan yacimientos de gran tamaño, profundos y de bajas leyes.

Finalmente, un tercer objetivo tiene relación con la búsqueda de algún método que permita encontrar una secuencia óptima de extracción de bloques a partir de un secuenciamiento eficiente de pits anidados. Investigadores como Lerchs y Grossmann (1965), Whittle (1987) y Halatchev (2005), entre otros, han propuesto

técnicas para definir una secuencia de extracción óptima. Los primeros, a través de la parametrización de la función de beneficio, y el tercero simulando condicionalmente todas las posibles secuencias de extracción, bloque a bloque.

## **1.6 Alcances de la Tesis**

El problema a resolver en esta Tesis es la búsqueda de un algoritmo matemático que permita encontrar el límite económico de una mina explotada por el método Open Pit, incorporando como variable de decisión el valor presente neto del proyecto de explotación. Para ello, se aplicará programación dinámica hacia delante y procedimiento heurístico para mejorar los resultados.

Se supondrá que el modelo de bloques geológico está creado y contiene, al menos, información de leyes y densidades de la roca, sea esta mineral o estéril.

También se supondrá que los parámetros económicos como el precio del producto y los costos están predeterminados, aunque podrán variar durante el horizonte de evaluación de un modelo.

Si bien, el programa computacional será creado para actuar sobre un modelo de bloques, el algoritmo matemático será creado para que también pueda ser aplicado a la programación de un grafo. De hecho, todo el marco teórico del algoritmo se basará en algunos conceptos relevantes de la teoría de grafos.

Por último, interesa el resultado en términos de la obtención de un límite y una secuencia subóptima, mas no la eficiencia del programa computacional que se elabora para probar el algoritmo.

## **1.7 Metodología**

El marco y los fundamentos teóricos de toda investigación científica deben presentarse con rigurosidad y precisión, pues de ello depende la confiabilidad de

los resultados. Sin embargo, este autor pretende que la metodología para alcanzar los objetivos esperados de la tesis, pueda ser aplicada por cualquier ingeniero de minas que desee implementarla y evaluar el real aporte de los bloques de mineral que se ubican en los límites del pit final. Por tal motivo, la redacción de la tesis intercala definiciones y demostraciones rigurosas con explicaciones didácticas. Estas últimas, principalmente, sobre conceptos de uso común en el ámbito de la minería.

Este trabajo se inició con un estudio bibliográfico de las investigaciones que se han realizado para definir límites de pit final. Existen más de cincuenta publicaciones relativas al tema en cuestión. Sin embargo, solo se consideraron aquellas más relevantes, ya sea por su impacto en términos de resultados obtenidos, porque utilizan métodos nuevos o porque desarrollan nuevas aplicaciones de técnicas existentes. En el Capítulo 2, se presentan en detalle aquellas investigaciones más relevantes.

Posteriormente, y después de un análisis de las principales características de las técnicas de programación matemática, se tomó la decisión de aplicar programación dinámica para la determinación de la secuencia óptima de explotación y los límites de pit económico. Esta decisión se basó en las ventajas que otorga esta técnica para el tratamiento de problemas con una gran cantidad de variables a manejar y que se pueden dividir en una serie de etapas en las cuales se deben tomar decisiones parciales óptimas.

Finalmente, a partir de la implementación del algoritmo, se analizan los resultados obtenidos sobre una serie de modelos bidimensionales y tridimensionales.

## **1.8 Capítulos de la Tesis**

La estructura de esta Tesis considera 6 capítulos. El primero de ellos introduce al lector en el contexto técnico en que se desarrolla el tema en estudio.

En el segundo capítulo, se expone sobre la importancia del Pit Final y se presentan los principales algoritmos que permiten encontrar su límite último, ya sea este óptimo o semióptimo.

En el tercer capítulo se expone el marco teórico en el que se desarrolla la solución del problema. Se inicia el capítulo estableciendo la terminología y los conceptos asociados a modelamiento de bloques, grafos y límites de pit. Posteriormente, se desarrolla una secuencia de definiciones, axiomas, lemas y corolarios que llevan a demostrar, por medio de dos teoremas, que un pit económico es de igual o menor volumen que un pit último, y que además, es de igual o menor valor de beneficio. Luego, se define el problema a resolver y se expone sobre el contexto técnico y económico de la solución, estableciéndose que se adopta una estructura de mercado de competencia perfecta, en que las empresas son tomadoras de precio, y se adopta un sistema de rendimientos constantes a escala, lo cual implica costos unitarios constantes. Finalmente, se presenta el método de solución y se demuestra que la aplicación de programación dinámica hacia adelante genera una secuencia de extracción inicial óptima, y que el algoritmo encuentra una solución en un número finito de pasos.

En el Capítulo 4 se presentan algunos aspectos de la implementación del algoritmo. En primer lugar se presentan los pasos del algoritmo. Luego se explican los métodos para calcular el beneficio de un bloque y el valor presente neto de un pit anidado. Se establece el método para la lectura de nodos o bloques y la forma en como se determina la tasa de descuento por bloque, entre otros.

En el capítulo 5 se presentan los resultados de la implementación del algoritmo, aplicando el algoritmo a modelos bidimensionales pequeños y a un modelo tridimensional de mayor tamaño.

Finalmente, en el capítulo 6 se presentan las conclusiones, recomendaciones y futuros temas de investigación relacionados con esta tesis.

## **2. REVISIÓN DE LITERATURA**

### **2.1 Introducción**

Tal como se expresó en el Capítulo 1, dos de las etapas más importantes del proceso de planificación son la determinación de los límites óptimos del pit y la secuencia de explotación, pues ellas definen el tamaño y la rentabilidad del negocio minero. Para desarrollar estas etapas se requiere un modelo de bloques geológico, información económica, información financiera, una tasa de producción y una zonificación geotécnica.

Hoy en día, los algoritmos más utilizados para la determinación de límites de pit consideran una función de optimización básica, cuyas únicas variables son el flujo de caja y el ángulo de talud geotécnico. Mientras que aquellos algoritmos que integran más variables, no son considerados por las empresas ni por el resto de la comunidad científica. Esto se debe a que ellos se basan en técnicas que no permiten demostrar la existencia de un óptimo.

En este capítulo, primero se introducirá al lector en la terminología que se utiliza normalmente para nombrar los diferentes tipos de pits que se crean durante el proceso de planificación, y luego se explicarán los principales algoritmos para la determinación de límites de pits.

### **2.2 Límites de Pits**

El Proceso de Planificación para determinar el valor de una mina y cómo esta será explotada, considera una serie de etapas, que van desde la creación de un modelo tridimensional de información minera hasta la generación del programa de producción y su posterior evaluación económica. Dentro de este proceso, la determinación de los límites de pit es una tarea difícil, de alta complejidad y con un resultado final que no es óptimo. Las variables que intervienen en la determinación de este límite son las leyes de los minerales que componen el

yacimiento, las leyes de las impurezas, la densidad de los diferentes tipos de roca, las características geológicas, las características geotécnicas, las características metalúrgicas de los minerales beneficiables, la dilución minera, la recuperación minera, la recuperación metalúrgica, la tasa de producción, el precio de los metales, el costo de operación y mantenimiento para mina, planta y procesos, el nivel de inversión y todas aquellas restricciones mineras que pueden afectar a la operación de explotación, entre otras.

Todas estas variables están relacionadas. Por ejemplo, si la tasa de producción aumenta, la inversión aumenta, la vida útil de la mina disminuye, los costos aumentan y la recuperación baja. Sin embargo, la mayoría de los algoritmos de optimización actuales no consideran muchas de estas variables o simplemente las dejan fijas, dando como resultado límites de pit que no son óptimos.

A medida que se avanza en el proceso de planificación, se van generando varios límites de pit, desde el más óptimo al menos óptimo. El planificador lo primero que hace es determinar el límite de pit que maximiza el *Flujo de Caja* de la mina, imponiendo como única restricción el ángulo de talud que soportan el cuerpo mineralizado y la roca estéril. A este pit se le denomina normalmente ***Ultimate Pit***, y se obtiene a partir de la aplicación de algoritmos como el de Lerchs y Grossmann (Lerchs y Grossmann, 1965) o Cono Flotante Optimizado (Lemieux, 1969), entre otros. Posteriormente, el planificador, aplicando una técnica paramétrica y los mismos algoritmos antes mencionados (en forma iterativa), define un conjunto de pits intermedios, denominados ***Pits Anidados***, los cuales definen la secuencia de explotación de la mina. Finalmente, aplicando algún algoritmo de optimización para programas mineros, el planificador genera un programa de producción y los diseños detallados de la mina, incorporando aspectos operacionales tales como los accesos y la geometría de los bancos. El pit así obtenido se denomina ***Pit Final***.

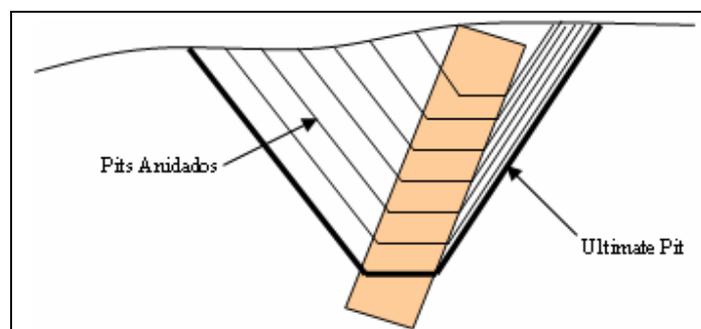


Figura 2.1. Pits Anidados y Ultimate Pit

### 2.3 Ultimate Pit

La importancia del límite de *Ultimate Pit* radica en que ofrece información relevante para la valoración del potencial económico de un depósito mineral y para el desarrollo de la planificación de largo plazo (Gianini, 1990). La determinación de este límite permite establecer el nivel de la inversión, el tamaño y ubicación de los botaderos de estériles, la ubicación de la planta de procesos, y en definitiva, el tamaño del negocio y su rentabilidad económica.

Desde el punto de vista del proceso de planificación, la determinación del *Ultimate Pit* es una tarea de gran relevancia por dos razones: porque puede ser utilizado directamente para el desarrollo del programa de producción o porque puede ser utilizado para encontrar un límite que se acerque más a un óptimo del *Valor Presente Neto* del proyecto. En efecto, en ocasiones, debido a la falta de recursos para la planificación o a la idea de que un análisis más profundo no arrojará una diferencia relevante, los planificadores asumen que todos los bloques contenidos en el *Ultimate Pit* serán considerados en el programa de producción. Sin embargo, otros planificadores consideran al *Ultimate Pit* como la base para acercarse aún más al denominado *Pit Óptimo* (a valor presente neto), y sobre este, generar el programa de producción.

Todos los algoritmos creados para encontrar los límites del *Ultimate Pit* tienen las siguientes características generales:

- a) La función económica a optimizar no es relevante.
- b) La única restricción operacional son los ángulos de talud global que pueden resistir las diferentes rocas que componen el macizo.
- c) La función objetivo es el Flujo de Caja del Pit, es decir, no se considera el valor del dinero en el tiempo (de lo contrario se obtendría un Pit Económico Óptimo).

Quienes han investigado a cerca de la optimización de *Ultimate Pit*, lo han hecho a partir de la Teoría de Grafos, la Programación Lineal, la Programación Dinámica, las Redes Neuronales y los Métodos Heurísticos como el Cono Flotante, entre otros. De todos estos, el más utilizado en paquetes computacionales comerciales, y por lo tanto, por las empresas mineras, es el *Algoritmo de Lerchs y Grossmann* (Lerchs and Grossmann, 1965). Su gran uso, se debe a dos razones. Primero, es el único algoritmo que demuestra matemáticamente la existencia y unicidad de un contorno de pit último; y segundo, no es tan complicada su programación, tanto de la versión tridimensional como de la bidimensional.

Por el contrario, los otros métodos para encontrar el *Ultimate Pit* no han sido considerados por los ingenieros, principalmente porque:

- a) Los resultados en términos de beneficio económico no necesariamente son óptimos
- b) El tiempo consumido por los algoritmos es similar o superior al de Lerchs y Grossmann.
- c) La programación suele ser más compleja.

El *Algoritmo de Lerchs y Grossmann* (LG) se ha masificado en el mercado, debido a que viene incorporado en la mayoría de los paquetes computacionales de

planificación y diseño minero Open Pit, y por lo tanto, cambiarlo por otro es una pérdida de recursos económicos.

## 2.4 Pit Final

El *Pit Final* es el límite máximo de la explotación por Open Pit, considerando una geometría de bancos y el acceso al fondo del rajo. Los pasos para construirlo son los siguientes:

- a) Determinación del límite óptimo de explotación (*Ultimate Pit*)
- b) Suavización del límite de *Ultimate Pit*. Esto se debe a que este límite no considera los ángulos adecuados de trabajo de los equipos mineros, ni los problemas de estabilidad que se pudiesen generar por curvas con radio de curvatura demasiado pequeño.
- c) Diseño de bancos. Estos son necesarios para una adecuada explotación de la mina.
- d) Inserción de rampas, las cuales expanden el rajo.
- e) Incorporación de anchos mínimos de fondo, los cuales restringen el acceso a sectores mineralizados del *Ultimate Pit*.

Todas estas intervenciones al *Ultimate Pit* hacen que el *Pit Final* no sea óptimo, y es precisamente esta la principal razón por la cual muchos planificadores no se interesan en la búsqueda de un pit realmente óptimo.

## 2.5 Algoritmos de Optimización de Pit

Como hemos visto, existen muchos algoritmos dirigidos a resolver el problema de *Ultimate Pit*. Estos algoritmos tienen como objetivo encontrar el contorno óptimo de un pit, y su función objetivo es del tipo presentado en la ecuación 1.7 del Capítulo 1.

Los modelos matemáticos y algorítmicos utilizados para determinar el *Ultimate Pit* han sido la programación lineal, entera y mixta, la inteligencia artificial, la

heurística, la programación dinámica y los métodos basados en la teoría de grafos, tales como el flujo en redes y el cierre máximo. De todos ellos, la heurística, la programación dinámica y el cierre máximo han sido los procedimientos que han dado los mejores resultados. Aunque el Cierre Máximo de Lerchs y Grossmann ha sido el único algoritmo que optimiza la variable Flujo de Caja.

En las próximas líneas de este capítulo se explicarán brevemente tres algoritmos. Los dos primeros son los algoritmos más utilizados en la industria de hoy: el algoritmo de Cono Móvil Optimizado (Lemieux, 1965) y el algoritmo de Lerchs y Grossmann (1965). El tercer algoritmo, si bien no se utiliza masiva y comercialmente, permite observar una aplicación bastante avanzada de la programación dinámica, y mediante la cual es posible acercarse aún más a un óptimo de valor presente neto: el algoritmo de Tolwinski and Underwood (1992).

### **2.5.1 Cono Móvil Optimizado de M. Lemieux (1979)**

El algoritmo heurístico del Cono Flotante fue presentado inicialmente por Pana en el año 1965. Posteriormente, fue perfeccionado por algunos ingenieros, hasta que en 1979, Marc Lemieux lo utiliza como base para su Algoritmo de Cono Móvil Optimizado.

El Algoritmo de Cono Móvil Optimizado está compuesto por tres procedimientos:

- a)** La determinación del pit último con la técnica de Cono Móvil Positivo
- b)** La determinación del pit último con la técnica de Cono Móvil Negativo
- c)** Una rutina de optimización para tratar los conos superpuestos.

El Cono Móvil Positivo consiste en extraer desde el modelo de bloques, en forma ordenada y secuencial, todos aquellos conos invertidos ubicados sobre un bloque de valor positivo, cuya sumatoria de bloques dé como resultado un valor también positivo.

Para el caso del ejemplo de la Figura 2.2, el cono sobre el bloque de valor 70 no se extrae porque tiene un valor negativo de -10; mientras que el cono ubicado sobre el bloque de valor 90 si se extrae porque la sumatoria de sus bloques da como resultado el valor 10.

-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10
	-10	-10	-10	-10	-10	
		70	90	-10		

Figura 2.2. Modelo básico para Cono Móvil Positivo

El Cono Móvil Negativo es una técnica opuesta al Cono Móvil Positivo, pues consiste en suponer que todos los bloques positivos y sus respectivos conos invertidos han sido extraídos desde el modelo de bloques. Luego, el procedimiento consiste en evaluar si un bloque debe ser devuelto al modelo.

-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10
	-10	-10	-10	-10	-10	
		70	90	-10		
			10			

Figura 2.3. Modelo básico para Cono Móvil Negativo

Para el caso del ejemplo de la Figura 2.3, si se supone que todo el rajo ya ha sido excavado, se debería tomar la decisión de devolver el bloque de valor 10 y rellenar todo ese talud, pues de esa forma el *Ultimate Pit* aumenta su valor en 20.

En muchos casos el pit generado por el Cono Móvil Positivo debería ser igual al generado por el Cono Móvil Negativo. Sin embargo, esto no siempre sucede y se debe proceder a resolver los conflictos generados por conos superpuestos.

Es así como el tercer procedimiento consiste en decidir si los conos superpuestos forman o no parte del *Ultimate Pit*. Esta técnica considera dos rutinas de reordenamiento. La primera rutina de reordenamiento se utiliza para encontrar aquellos bloques positivos que pueden formar parte del Pit Último con solo analizar la secuencia de extracción de los bloques ubicados en los pits superpuestos. La segunda rutina de reordenamiento se utiliza para identificar conjuntos de conos, los cuales están interrelacionados en la medida en que los conos positivos son positivos porque su stripping es compartido con conos negativos. Si el cono es positivo por sí mismo, entonces es incorporado al *Ultimate Pit*.

### 2.5.2 Algoritmo de Lerchs y Grossmann 3D (1965)

Antes de explicar el algoritmo, se debe introducir al lector en algunas definiciones fundamentales de la *Teoría de Grafos*, pues su objetivo fundamental es encontrar el Cierre Máximo de un Grafo. Las definiciones más importantes son las siguientes:

- Grafo Dirigido  $G(X,A)$ : es un conjunto de elementos  $X$ , llamados vértices de  $G$ , los cuales están unidos por un conjunto  $A$  de pares ordenados,  $a_i = (x,y)$ , llamados arcos de  $G$ . Cabe destacar que el concepto de arco implica una orientación, es decir, el arco  $a_i = (x,y)$  va desde el vértice  $x$  al vértice  $y$ .
- Camino: es una secuencia de arcos  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  tal que el vértice final de cada arco corresponde al vértice inicial del arco sucesor.
- Circuito: es un camino en el cual el vértice inicial coincide con el vértice final.
- Subgrafo  $G(Y)$  de  $G$ : es un grafo  $G(Y,A)$  definido por un conjunto de vértices  $Y \subseteq X$  y que contiene a todos los arcos que conectan vértices de  $Y$  en  $G$ .
- Grafo Parcial  $G(B)$  de  $G$ : es un grafo  $G(X,B)$  definido por un conjunto de arcos  $B \subseteq A$  y que contiene a todos los vértices de  $G$ .
- Función  $\Gamma$ : es una función de mapeo de  $X$  en  $X$ , tal que  $(x, y) \in A \Leftrightarrow y \in \Gamma x$ .

- Cierre de un Grafo Dirigido: es un conjunto de vértices  $Y \subseteq X$ , tal que  $x \in Y \rightarrow \Gamma x \in Y$ .
- Subgrafo Cerrado  $G(Y)$  de  $G$ : es un subgrafo en que  $Y$  es un cierre de  $G$ . Esto implica que  $Y=\emptyset$  también es un cierre de  $G$ .
- Árbol  $T(X,A)$ : es un grafo dirigido y conectado que no tiene circuitos.
- Árbol Enraizado: es un árbol que tiene un vértice inicial denominado raíz.

Cabe destacar que cuando en un árbol enraizado se elimina una arco  $a_i$ , este pasa a tener dos componentes. Una componente que se queda con la raíz original del árbol y otra que no. La componente  $T_i(X_i, A_i)$  que no contiene a la raíz original del árbol es llamada un *ramal* de  $T$ . La nueva raíz de este ramal es el vértice adyacente al arco  $a_i$ . Un ramal es un árbol en sí, y las ramas de este ramal son llamadas *ramitas*.

El problema que resuelven Lerchs y Grossmann es la búsqueda de un cierre  $Y$  de  $G$ , tal que:

$$x_i \in Y \rightarrow \Gamma x_i \in Y \text{ y } M_Y = \sum_{x_i \in Y} m_i \text{ es máximo} \quad (2.1)$$

Donde  $m_i$  es la masa de cada vértice. Un cierre con masa máxima también es llamado *Cierre Máximo*.

Para resolver este problema, Lerchs y Grossmann (1965) desarrollan un algoritmo que transforma sucesivamente un árbol  $T$ , siguiendo ciertas reglas, hasta que ya no se puedan realizar más transformaciones.

Para entender específicamente el algoritmo de LG, se definen los siguientes conceptos. Cada arco  $a_k$  de un árbol  $T$  define un ramal, denotado como  $T_k=(X_k, A_k)$ , cuyo vértice raíz es  $x_k$  y cuya masa  $M_k$  es la suma de las masas de todos los vértices de  $T_k$ . Se dice que el arco  $a_k$  soporta al ramal  $T_k$ , y por lo tanto, también soporta a la masa  $M_k$ .

En un árbol  $T$  con raíz  $x_0$ , un ramal  $T_k$  se caracteriza por la orientación del arco  $a_k$ , con respecto a  $x_0$ .  $a_k$  es llamado  $p$ -edge si el arco  $a_k$  puntea hacia el ramal  $T_k$ , en cuyo caso  $T_k$  es llamado  $p$ -branch. Si el arco  $a_k$  puntea hacia el vértice  $x_0$ , entonces  $a_k$  es un  $m$ -edge y  $T_k$  es un  $m$ -branch. De igual forma todas las ramitas de los ramales pueden ser divididas en  $p$ -twig y  $m$ -twig.

Por otro lado, se dice que un  $p$ -edge ( $p$ -branch) es fuerte si soporta una masa que es estrictamente positiva; y un  $m$ -edge ( $m$ -branch) es fuerte si soporta una masa que es nula o negativa. Los arcos que no son fuertes, se dice que son débiles. Un vértice  $x_i$  se dice que es fuerte si existe al menos un arco fuerte en el camino de  $T$  que une  $x_i$  a la raíz  $x_0$ . Los vértices que no son fuertes, se dice que son débiles.

Finalmente, se dice que un árbol está normalizado si todos los vértices fuertes son comunes a la raíz  $x_0$ .

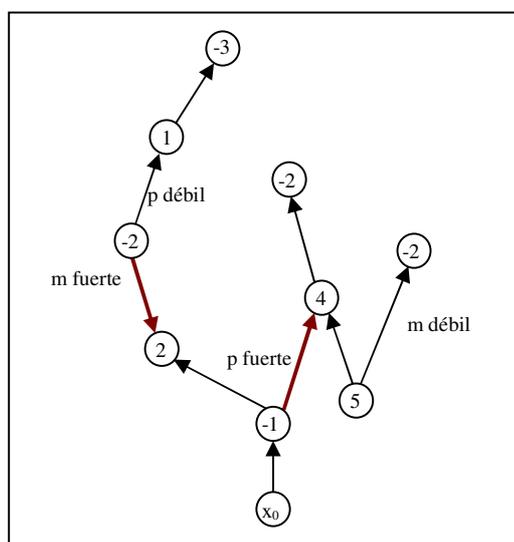


Figura 2.4. Definición de Ramas Fuertes y Débiles en Algoritmo de L&G

Antes de iniciar el proceso de iteraciones, se debe construir un árbol normalizado  $T^0$  en  $G$ . Esto implica construir un grafo  $T^0=(X,A_D)$ , donde  $A_D$  es un conjunto de arcos dummy  $(x_0,x_i)$ .

Posteriormente, la iteración  $t+1$  transforma un árbol normalizado  $T^t$  en un nuevo árbol normalizado  $T^{t+1}$ . Cada árbol  $T^t=(X, A^t)$  se caracteriza por su conjunto de arcos  $A^t$  y su conjunto de vértices fuerte  $Y^t$ . El proceso termina cuando  $Y$  es un cierre de  $G$ . La iteración  $t+1$  considera los siguientes pasos:

1. Si existe un arco  $(x_k, x_l)$  en  $G$  tal que  $x_k \in Y^t$ , y  $x_l \in X-Y^t$ , entonces se debe ir al paso 2. De otra forma se debe ir al paso 4.
2. Determinar  $x_m$ , la raíz del ramal fuerte que contiene a  $x_k$ . Construir el árbol  $T^S$  reemplazando el arco  $(x_0, x_m)$  de  $T^t$  con el arco  $(x_k, x_l)$ .

El arco  $(x_0, x_m)$  soporta, en el árbol  $T^t$ , un ramal  $T_m^t$  con masa  $M_m^t > 0$ . Sea  $[x_m, \dots, x_k, x_l, \dots, x_p, x_0]$  el camino de  $T^S$  que une  $x_m$  a  $x_0$ . Excepto para este camino, la construcción de  $T^S$  no cambia el estatus de un arco en  $T^S$  ni la masa soportada por el mismo.

Sobre el camino  $[x_m, \dots, x_0]$  se tienen las siguientes transformaciones de masas:

$$\text{Para un arco } a_i \text{ sobre el camino } [x_m, \dots, x_k] \quad M_i^S = M_m^t - M_i^t$$

$$\text{Para el arco } (x_k, x_l) \quad M_k^S = M_m^t$$

$$\text{Para un arco } a_j \text{ sobre el camino } [x_l, \dots, x_p, x_0] \quad M_j^S = M_m^t + M_j^t$$

Como se podrá observar, los arcos ubicados sobre la cadena han cambiado su estatus. Un  $p$ -edge en  $T^t$  ha pasado a ser un  $m$ -edge en  $T^S$  y viceversa. Sobre los caminos  $[x_m, \dots, x_k]$  y  $[x_l, \dots, x_p]$  en  $T^t$ , todos los  $p$ -edge soportan una masa negativa o cero y todos los  $m$ -edge soportan una masa estrictamente positiva. Por lo tanto, se obtiene la siguiente distribución de masas en  $T^S$ :

	$m$ -edge	$p$ -edge
Arco $a_i$ sobre $[x_m, \dots, x_k]$	$M_i^S \geq M_m^t$	$M_i^S < M_m^t$
Arco $(x_k, x_l)$	$M_k^S = M_m^t$	
Arco $a_j$ sobre $[x_l, \dots, x_p, x_0]$	$M_j^S > M_m^t$	$M_j^S \leq M_m^t$

3. Normalizar  $T^S$ , lo cual generará el árbol  $T^{t+1}$ . Vuelva al paso 1.

Como  $T^t$  es un árbol normalizado, todos los arcos fuertes deben estar sobre el camino  $[x_m, \dots, x_0]$ . En el proceso de normalización de  $T^S$  se remueven los arcos fuertes uno por uno. Cada arco fuerte  $a_a(x_a, x_b)$  de la cadena es reemplazado por un arco dummy fuerte  $(x_0, x_a)$ . De esta forma, se remueve un  $p$ -twig desde el ramal  $T_p^S$  y se resta su masa desde todos los arcos del camino  $[x_b, \dots, x_0]$ . Este proceso se repite hasta que todos los arcos fuertes han sido reemplazados.

4. Fin de las iteraciones.  $Y^t$  es un cierre máximo de  $G$ .

Para reforzar la formulación del algoritmo, Lerchs y Grossmann establecen las siguientes propiedades y teoremas.

***Propiedad LG 1***

Si un vértice  $x_k$  pertenece al cierre máximo  $Z$  de un árbol normalizado  $T$ , entonces todos los vértices  $X_k$  del ramal  $T_k$  también pertenecen a  $Z$ .

***Propiedad LG 2***

El cierre máximo de un árbol normalizado  $T$  es el conjunto  $Z$  de sus vértices fuertes.

Estas dos propiedades permiten establecer el siguiente teorema.

***Teorema LG 1***

Si en un grafo  $G$ , se puede construir un árbol normalizado  $T$ , tal que el conjunto  $Y$  de vértices fuertes de  $T$  es un cierre de  $G$ , entonces  $Y$  es un cierre máximo de  $G$ .

***Propiedad LG 3***

Si en  $T^S$ ,  $a_d$  es un  $m$ -edge sobre el camino  $[x_m, \dots, x_0]$ , entonces la masa  $M_d^S$  es estrictamente positiva y mayor que cualquier masa soportada por un  $p$ -edge que preceda a  $a_d$  sobre el camino  $[x_m, \dots, x_0]$ .

### ***Teorema LG 2***

Al seguir los pasos del algoritmo, se obtiene un cierre máximo de  $G$  en un número finito de pasos.

### **2.5.3 Algoritmo de Tolwinski y Underwood (1992)**

Tolwinski y Underwood (1992) desarrollaron un algoritmo que busca la secuencia de extracción y el límite de explotación que optimizan el valor presente neto del proyecto. Para esto, los autores consideran relevante y de vital importancia la secuencia de extracción de bloques, pues no existe otra forma de conocer el tiempo en que se extrae un bloque desde la mina. Para resolver el problema, idearon modelar la evolución temporal de una mina explotada a Cielo Abierto, como un problema de optimización secuencial; es decir, buscando el camino de mayor valor a través de un grafo.

La principal dificultad del algoritmo fue la escala del problema. Por esta razón, el algoritmo considera la mezcla de tres técnicas: la programación dinámica, la heurística y el aprendizaje por medio de inteligencia artificial.

El algoritmo busca un camino de nodos con el mayor valor en un grafo  $G(S, E, W)$ , donde:

$S = \{s \mid s \in G\}$  es el conjunto de nodos de  $G$ ,

$E = \{(s, s') \mid s \in S, \text{ y } \exists u \in U(s) \mid s' = s + u\}$  es el conjunto de arcos de  $G$

$W = \{I(s, s') \mid (s, s') \in E\}$  es el conjunto de pesos asociados a los elementos de  $E$ .

Los nodos del grafo corresponden a los estados del sistema, los bordes representan las transiciones entre estados, y los pesos indican las recompensas asociadas a esas transiciones.

Sea  $s_0$  el nodo que corresponde al estado inicial de la mina. El problema de la determinación de un programa de producción óptimo es ahora equivalente al problema de encontrar un camino  $s_0, s_1, \dots, s_T$  a través del grafo  $G$  que maximice la expresión:

$$I(s_0, \{u_t\}) = \sum_{t=0}^{T-1} \delta^t \cdot I(s_t, s_{t+1}) \quad (2.2)$$

Este problema difiere del clásico problema de camino más corto en que los pesos  $I(s, s')$  pueden tomar valores positivos como negativos. Otro aspecto del problema es que el número de nodos en grafos que corresponden a minas reales tiende a ser extremadamente grande, descartándose la posibilidad de resolver el problema por alguna técnica que requiera una enumeración completa de todos los nodos, como lo es la programación dinámica tradicional.

Para evitar una enumeración completa de nodos se propone la idea de búsqueda directa y combinarla con una variedad de reglas heurísticas, particularmente inspiradas en la Teoría de Inteligencia Artificial y en reglas específicas de la minería open pit.

En resumen, el algoritmo consiste en efectuar una secuencia de “corridas de simulación” (ejecutada por la subrutina *Simulation Run*), cada una de las cuales genera un camino a través del grafo, digamos  $s_0, s_1, \dots, s_T$ ; y asociado a cada nodo encontrado  $s_t$ ,  $t = 0, 1, \dots, T$ , tres atributos de estado a ser usados en las corridas de simulación posteriores. Estos atributos incluyen el valor del mejor camino encontrado hasta el momento ( $v_{st}$ ), a partir del nodo  $s_t$ ; el número de veces que el nodo  $s_t$  ha sido visitado en el curso de todas las simulaciones ejecutadas hasta el momento ( $n_{st}$ ); y un entero llamado rank ( $r_{st}$ ) que indica si  $s_t$  ha sido recientemente miembro de un camino mejorado, es decir, un camino que ha conducido a un mayor nivel de valor, más que cualquier otro camino generado en simulaciones anteriores. La variable  $V$  denotará el subconjunto de todos los

estados  $S$  que ha visitado el algoritmo y que son valiosos como para ser almacenados. Estos estados y sus atributos son almacenados en una estructura de datos la cual crece a medida que el programa progresa.

La forma en que el algoritmo selecciona el siguiente nodo a extraer, considera un mecanismo aleatorio que determina  $s_{t+1}$  de acuerdo a una distribución de probabilidad definida sobre el conjunto de todos los nodos que pueden seguir a  $s_t$ , llamado el conjunto de “hijos de  $s_t$ ”. La distribución de probabilidad esta determinada por el atributo  $(v, n, r)$  de los hijos de  $s_t$ .

No obstante el aporte de la Inteligencia Artificial, los resultados del algoritmo no son buenos. Un mejoramiento del algoritmo realizado por los autores en 1997, solo permite manejar modelos de hasta 80.000 bloques. Otro problema importante, es que la búsqueda secuencial de bloques individuales a extraer, genera espacios de operación dispersos en la mina, lo cual no se puede llevar a la práctica operacional. Finalmente, el hecho de no evaluar todos los posibles caminos hace que el algoritmo entregue cómo resultado límites de pit subóptimos, como la mayoría de los algoritmos de optimización.

## 2.6 Otros Algoritmos

Manfred Meyer (1969), desarrolló un algoritmo basado en la programación lineal para encontrar el límite último de un yacimiento tipo veta explotado por open pit. Las principales condiciones incorporadas en el modelo son la dirección e inclinación de la veta, la vida útil de la mina y los ángulos de talud del rajo. Sujeto a esto, el objetivo del modelo es maximizar los beneficios operacionales directos, que proceden de la venta del mineral menos los costos operacionales directos de la extracción, transporte y procesamiento.

El yacimiento se subdivide en  $N$  pilares idénticos de base cuadrada. Para desarrollar el modelo matemático se crea la variable  $x_j$  que representa la máxima

longitud del pilar  $j$  a ser explotada. Mientras que para ajustar un ángulo de talud  $\alpha$  dado, se agrega la restricción de que las longitudes de explotación de dos pilares vecinos no pueden diferir en más del ángulo de talud máximo permitido.

La función objetivo es:

$$D = \text{Max} \left[ \sum_{(ij) \in N} (p_{ij} + g_{ij}) y_{ij} - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g_i x_{ij} \right] \quad (2.3)$$

Con las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} x_{ij} - x_{i,j-1} &\leq \tan(\alpha) & (i = 2,3,\dots, m-1; j = 2,3,\dots, n-1) \\ -x_{ij} + x_{i,j-1} &\leq \tan(\alpha) & (i = 2,3,\dots, m-1; j = 2,3,\dots, n) \\ x_{ij} - x_{i-1,j} &\leq \tan(\alpha) & (i = 2,3,\dots, m-1; j = 2,3,\dots, n-1) \\ -x_{ij} - x_{i-1,j} &\leq \tan(\alpha) & (i = 2,3,\dots, m; j = 2,3,\dots, n-1) \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$x_{ij} \leq \tan(\alpha) \quad (i = 1, m; j = 1,2,\dots, n)$$

$$x_{ij} \leq \tan(\alpha) \quad (i = 2,3,\dots, m-1; j = 1, n)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (\text{todo } i, j)$$

$$y_{ij} = d_{ij} x_{ij} + (d_{ij1} - d_{ij}) x_{ij1}^+ + (d_{ij2} - d_{ij1}) x_{ij2}^+ \quad \{(ij) \in N\}$$

$$x_{ij} - x_{ijh}^+ + x_{ijh}^- = k_{ijh} \quad \{(ij) \in N; h = 1,2\} \quad (2.5)$$

$$x_{ijh}^+ \cdot x_{ijh}^- = 0 \quad \{(ij) \in N; h = 1,2\}$$

$$x_{ijh}^+, x_{ijh}^- \geq 0 \quad \{(ij) \in N; h = 1,2\}$$

Las restricciones 2.4 son las condiciones para mantener el ángulo de talud que soporta la roca. Mientras que las restricciones 2.5 permiten diferenciar, en cada columna, la roca mineral de la roca estéril, tal como aparece en la Figura 2.5.

Los parámetros  $g_j$  y  $p_j$  representan el costo de extracción de una unidad de estéril y el valor de una unidad de mineral, respectivamente. La variable  $y_j$  es el volumen de mineral en una columna y  $x_j$  es la profundidad óptima de una columna. Las variables  $d_j$ ,  $d_{j1}$  y  $d_{j2}$  son las áreas de mineral a sección completa, inicial y final, respectivamente, en una columna. Las variables  $k_{j1}$  y  $k_{j2}$  son los puntos inicial y final del cuerpo mineralizado en la columna; y las variables  $x_{j1}^+$ ,  $x_{j1}^-$ ,  $x_{j2}^+$  y  $x_{j2}^-$  son una medida de la forma del mineral en los límites.

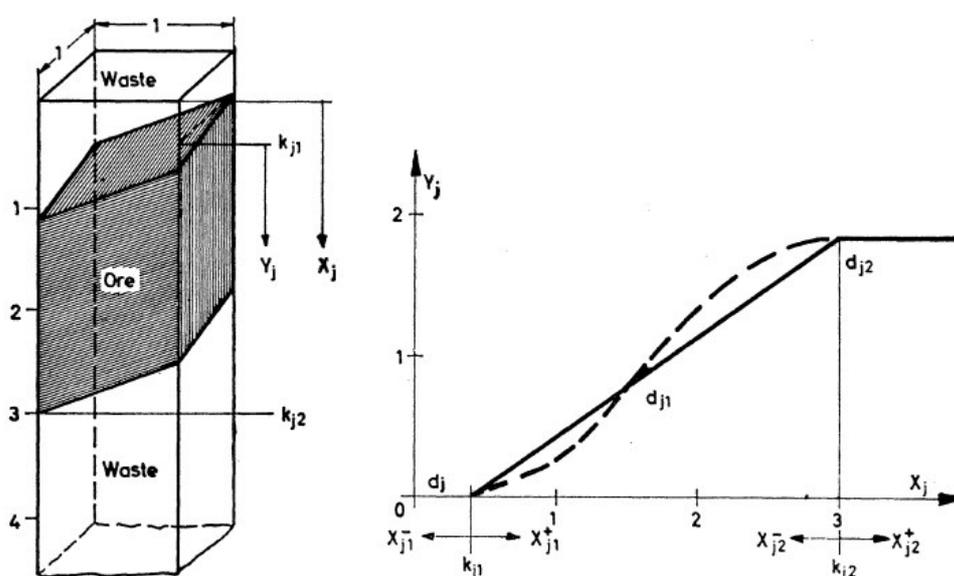


Figura 2.5. Variables del Algoritmo de M. Meyer (1969)

El principal problema de este algoritmo es que se desarrolla en base a la programación lineal. Este método matemático requiere de pocas variables para generar un óptimo en un tiempo razonable, y es por eso que el autor utiliza columnas en vez de bloques. Con esta y otras investigaciones se ha demostrado que la programación lineal, en general, no es una técnica aplicable a la búsqueda del límite de *Ultimate Pit*, y mucho menos de un límite de pit económico (que maximice el valor presente del negocio minero).

S. Frimpong y P. Achireko (1997) desarrollaron un algoritmo denominado MCS/MFNN (*Modified Conditional Simulation / Multi-layer Feedforward Neural Networks*), el cual considera las propiedades aleatorias de los campos de reservas y ley de mineral para determinar el *Ultimate Pit* de una mina explotada por el método Open Pit. Las reservas de mineral y la ley han sido modeladas usando Simulación Condicional Modificada, basada en la Mejor Estimación Lineal Insegada (*BLUE*) y en técnicas de subdivisión por ponderación local (LAS). Luego, se utilizan Redes Neuronales Artificiales para clasificar los bloques, según sus valores económicos condicionados. En este último proceso se utiliza, adicionalmente, un algoritmo de propagación de error en retroceso (EBP) para optimizar los límites de pit minimizando el error entre el real y el deseado, producido en un perceptron multicapa, bajo las restricciones de talud del pit. Este algoritmo EBP es utilizado en el entrenamiento de estas redes.

Este algoritmo fue usado para optimizar una sección del depósito de oro del Sabi Heap Leaching Gold Project en Zimbabwe. Los resultados fueron los mismos que los obtenidos por el algoritmo de Lerchs-Grossman 2D. Sin embargo, en estados multivariantes aleatorios, el algoritmo MCS/MFNN fue más conveniente según los resultados obtenidos por los autores.

No obstante estos resultados, el algoritmo no asegura el óptimo en 2D y tampoco se indica si funciona en 3D.

Finalmente, D. Hochbaum y A. Chen (2000) desarrollaron un algoritmo de máximo flujo “push-relabel” para encontrar el pit último de una explotación minera. El algoritmo debía resolver el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{Max } \sum_{j \in V} b_j \cdot x_j \quad \text{sujeto a :} \quad & x_j - x_i \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A \\ & 0 \leq x_j \leq 1 \quad \text{entero, } j \in V. \end{aligned}$$

Donde  $x_j$  es una variable binaria que es 1 si el nodo  $j$  está en el cierre, y 0 en cualquier otro caso. Mientras que  $b_j$  es el peso del nodo (beneficio neto del bloque).

Para resolver el problema se construye un grafo relacionado  $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{A})$  adicionándole un nodo fuente y un nodo recipiente. La capacidad de todos los arcos en  $A$  es el conjunto infinito, y la capacidad de todos los arcos adyacentes a los nodos fuente y recipiente es  $|b_v|$ . Luego, si  $(S, \bar{S})$  es un corte finito en el grafo  $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{A})$ , entonces la capacidad del corte  $C(S, \bar{S})$  es:

$$\sum_{j \in V - \cap S} |b_j| + \sum_{j \in V + \cap S} b_j = \sum_{j \in V - \cap S} |b_j| + \sum_{j \in V +} b_j - \sum_{j \in V + \cap S} b_j = B - \sum_{j \in S} b_j$$

Donde  $B$  es la suma de todos los pesos positivos. Por lo tanto, minimizar la capacidad del corte es equivalente a maximizar la suma total de los pesos de los nodos en el conjunto  $S$  fuente del corte.

Uno de los problemas de este algoritmo es que su tiempo de corrida es alto. Por esta razón, se deben aplicar dos procedimientos heurísticos denominados: global-relabeling y gap-relabeling, los cuales permiten mejorar la ejecución del algoritmo. El primero de ellos calcula la distancia exacta de etiquetado para todos los nodos; mientras que el segundo, se utiliza para generar etiquetas donde el algoritmo genérico no las ha creado. El algoritmo genérico de push-relabel, empuja el flujo desde un nodo  $d$  hasta un nodo  $d-1$ . Este último problema se produce porque una propiedad de este algoritmo es que se genera un arco en el grafo residual solo si la diferencia en las etiquetas de sus extremos es como máximo 1. Por lo tanto, si hay un nodo etiquetado como  $d$  y no existe un nodo etiquetado como  $d-1$ , no se genera ningún camino en el grafo residual. Es decir, se genera una brecha o salto entre la etiqueta  $d$  y etiquetas más pequeñas.

Este algoritmo, al igual que el de Lerchs y Grossmann (1965), optimiza la variable beneficio (flujo de caja), y a causa de la heurística, no puede asegurar una solución óptima para el problema de límites de *Ultimate Pit*.

### 3. MARCO TEORICO

En el presente capítulo, se abordarán los conceptos teóricos que dan sustento al algoritmo que permitirá determinar el *Limite Económico de Pit (LEP)*.

#### 3.1 Modelos de Bloques y Límites de Pits

Para desarrollar la planificación minera a rajo abierto de un depósito mineral, el modelo geológico del yacimiento y su entorno topográfico son traspasados a un modelo discreto denominado Modelo de Bloques. Este Modelo de Bloques es un arreglo tridimensional de ortoedros, los cuales adquieren o almacenan las características del macizo rocoso que queda contenido en ellos (Figura 3.1).

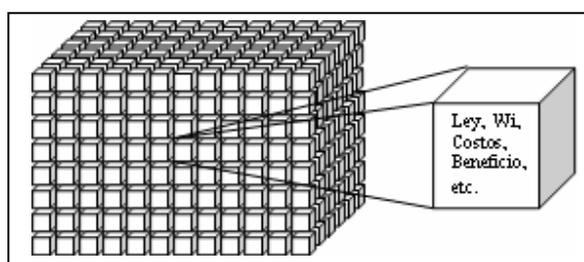


Figura 3.1. Forma y variables del Modelo de Bloques

El tamaño de cada uno de los ortoedros está determinado por el espaciamiento entre sondajes, las características geoestructurales del macizo, la forma del yacimiento, la distribución de leyes y la futura altura de bancos de la mina, entre otros. En adelante, llamaremos “bloque” a los ortoedros.

**Definición 3.1:** Si un bloque de masa  $b$  tiene una ubicación espacial dada por las coordenadas unitarias  $i$  (para el eje  $X$ ),  $j$  (para el eje  $Y$ ) y  $k$  (para el eje  $Z$ ), entonces un Modelo de Bloques se define como:

$$MB = \bigcup \{b_{ijk} : b_{ijk} \in MM \vee b_{ijk} \in ME \vee b_{ijk} \in MA\} \quad (3.1)$$

donde  $i:1,\dots,N$ ;  $j:1,\dots,J$ ;  $k:1,\dots,K$  son las coordenadas unitarias del centro geométrico de cada bloque;  $MM$  son los bloques de roca que se ubican dentro del cuerpo mineralizado,  $ME$  son los bloques de roca que se ubican fuera del cuerpo mineralizado y  $MA$  son los bloques de aire. Por lo tanto, el Modelo de Bloque sería una matriz tridimensional de  $N \times J \times K$  ortoedros.

En el Modelo de Bloques, cada una de las celdas es una unidad virtual de memoria que almacena información minera, geológica, metalúrgica y económica, proveniente de la exploración, del estudio de procesos y del análisis económico. Entre los antecedentes más importantes que se almacenan en un Modelo de Bloques están: las leyes del producto y los subproductos, las leyes de las impurezas, las densidades, los tipos litológicos, alteraciones, costos, ingresos, etc. A partir de esta información se puede obtener el beneficio (o costo) asociado a cada bloque del modelo. Si a lo anterior, agregamos una tasa de descuento y una secuencia de explotación, se obtiene el valor presente neto de los bloques.

Como se explicó en el Capítulo 2, el contorno de pit óptimo se busca en un modelo de bloques valorado económicamente; y para encontrar la secuencia de explotación se parametriza la función de beneficio con que se construye el modelo de bloques económico. Este contorno de pit óptimo es denominado *Ultimate Pit* y se obtiene al maximizar el beneficio o flujo de caja de la explotación, bajo la suposición de que todo el material se extrae instantáneamente.

En esta tesis se incorporará el concepto de Límite de Pit Económico, el cual se obtiene al maximizar el valor presente neto de la explotación, bajo la suposición de que los bloques se extraen secuencialmente en el tiempo.

**Definición 3.2:** Se denominará *Cono Factible (CF)* a un cono de revolución invertido cuyo ángulo de superficie lateral es igual o menor al ángulo de talud máximo permitido  $\alpha_k$ . La superficie lateral del cono está dada por:

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

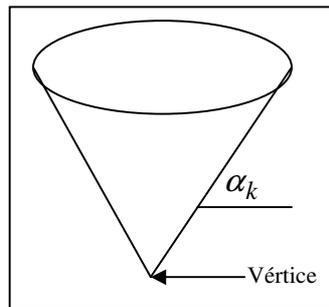


Figura 3.2. Cono de Pit Factible

**Definición 3.3:** Se dice que un bloque forma parte del Cono Factible, si las coordenadas de su centro geométrico  $(x_g, y_g, z_g)$  se ubican dentro de la superficie lateral del cono. Es decir,

$$(x_g, y_g, z_g) \in CF \Leftrightarrow f(x_g, y_g, z_g) \leq 0 \quad (3.2)$$

**Definición 3.4:** Un *Contorno Factible*  $C$ , es la unión de conos factibles.

$$C = \cup\{CF\} \quad (3.3)$$

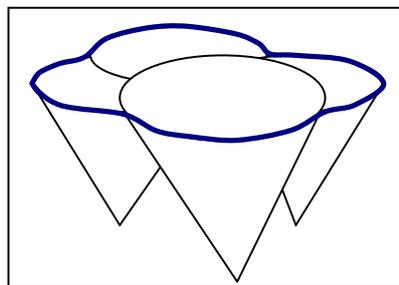


Figura 3.3. Contorno Factible

**Definición 3.5:** Se denomina *Pit Factible (PF)* al conjunto de bloques  $Y$  contenidos en un Contorno Factible.

$$Y = \{(x_g, y_g, z_g) : f(x_g, y_g, z_g) \leq 0 \wedge f \in C\} \quad (3.4)$$

**Definición 3.6:** Se denomina *Ultimate Pit* a aquel pit factible que contiene al conjunto de bloques  $\hat{Y}$  cuyo beneficio total es máximo, con respecto a cualquier otro pit factible  $Y$ .

$$\hat{Y} = \{(x_g, y_g, z_g) : B_{\hat{Y}} > B_Y\} \quad (3.5)$$

Donde  $B_Y$  es el beneficio total obtenido a partir de la sumatoria de los beneficios (y costos) parciales de cada bloque incluido en el Pit Factible  $Y$ .

**Definición 3.7:** Se denomina *Límite de Ultimate Pit* a la superficie lateral que envuelve al *Ultimate Pit*.

Según los teoremas 4.1 y 4.2 de Giannini (1990), el contorno de un *Ultimate Pit* es máximo y único.

**Definición 3.8:** Se denomina *Pit Económico* al pit factible que contiene al conjunto de bloques  $Y^*$  cuya sumatoria de valores presentes netos es máximo, con respecto a cualquier otro pit factible  $Y$ .

$$Y^* = \{(x_g, y_g, z_g) : \pi_{Y^*} > \pi_Y\} \quad (3.6)$$

Donde  $\pi_Y$  es el Valor Presente Neto total obtenido a partir de la sumatoria de los valores presentes netos parciales de cada bloque incluido en el Pit Factible  $Y$ .

**Definición 3.9:** Se denomina *Límite de Pit Económico* a la superficie lateral que envuelve al Pit Económico.

### Propiedad 3.1

Sea  $M \subset \hat{Y}$  el subconjunto de bloques que se ubica en el fondo de un Ultimate Pit. Cuando la estrategia de una explotación es maximizar el beneficio del negocio, el subconjunto  $M$  tiene un beneficio económico estrictamente positivo.

### Demostración

Dividamos los  $\hat{Y}$  bloques del Ultimate Pit en dos subconjuntos: el subconjunto  $M$  de los bloques que se ubican en el fondo del Ultimate Pit y el subconjunto  $E$  de los bloques que se ubican sobre  $M$ . Sea:

$$W_M = \sum_{i=0}^N Bm_i \quad \text{con } N = N^\circ \text{ bloques mineral}$$

$$W_E = \sum_{i=0}^M Be_i \quad \text{con } M = N^\circ \text{ bloques estéril}$$

Donde  $Bm_i$  es el beneficio de un bloque de mineral  $i$ , y  $Be_i$  el beneficio de un bloque de estéril  $i$ . Como el ultimate pit es el pit de máximo beneficio (Lerchs y Grossmann, 1969), entonces  $W_{up} = W_M + W_E$  es máximo. Además, se debe considerar que como la extracción de los nodos es descendente, entonces el conjunto de bloques  $E$  debe salir primero que el conjunto  $M$ .

Supóngase, por contradicción, que  $W_M \leq 0$ . Esto implica que el beneficio total de ambos conjuntos  $W_E + W_M \leq W_E$ . Pero como un Pit Último es aquel de mayor beneficio, entonces el Pit Factible conformado por los bloques  $E$  es un Ultimate Pit, lo cual no es cierto. Por lo tanto,  $W_M > 0$ . Esto completa la demostración.

### Propiedad 3.2

Sea  $M \subset Y^*$  el subconjunto de bloques que se ubica en el fondo de un Pit Económico. Cuando la estrategia de una explotación es maximizar el valor

presente neto del negocio, el subconjunto  $M$  tiene un valor presente neto estrictamente positivo.

### **Demostración**

Dividamos los  $Y^*$  bloques del Pit Económico en dos subconjuntos: el subconjunto  $M$  de los bloques que se ubican en el fondo del Ultimate Pit y el subconjunto  $E$  de los bloques que se ubican sobre  $M$ . Sea:

$$\Pi_M = \sum_{i=0}^N \pi m_i \quad \text{con } m_i \in \varphi$$

$$\Pi_E = \sum_{i=0}^M \pi e_i \quad \text{con } e_i \in \varphi$$

Donde  $\pi m_i$  es el valor presente neto de un bloque de mineral  $i$ ,  $\pi e_i$  el valor presente neto de un bloque de estéril  $i$ . y  $\varphi$  es una secuencia de explotación cualquiera. Como el Pit Económico es el pit de máximo valor presente neto (Definición 3.8), entonces  $\Pi_{pe} = \Pi_M + \Pi_E$  es máximo. Además, se debe considerar que como la extracción de los nodos es descendente, entonces el conjunto de bloques  $E$  debe salir primero que el conjunto  $M$ .

Supóngase, por contradicción, que  $\Pi_M \leq 0$ . Esto implica que el valor presente neto total de ambos conjuntos  $\Pi_E + \Pi_M \leq \Pi_E$ , entonces el Pit Factible conformado por los bloques  $E$  es un Pit Económico, lo cual no es cierto. Por lo tanto,  $\Pi_M > 0$ . Esto completa la demostración.

## **3.2 Relaciones entre Pit Económico y Ultimate Pit**

Según Whittle (1989):

"...el contorno de pit con valor más alto no puede ser determinado hasta que los valores de los bloques son conocidos. Los valores de los bloques no son

conocidos hasta que la secuencia minera es determinada; y la secuencia minera no puede ser determinada a menos que el contorno de pit esté disponible...".

Esto implica, que el proceso de planificación es un proceso cíclico, en el cual estas tres etapas son repetidas varias veces hasta que se logra una estabilización de los parámetros y resultados. No obstante lo anterior, el proceso se debe iniciar de alguna forma, y los planificadores han decidido partir creando el modelo de bloques económico, luego determinando el *Ultimate Pit* y finalmente definiendo la secuencia de explotación. Esta forma de trabajo impide que se pueda aplicar el Valor del Dinero del Tiempo en la determinación de los límites de pit óptimo. Por esta razón, en esta tesis se parte por derribar esta secuencia de trabajo tradicional, pues el algoritmo propuesto busca el límite económico a partir de una secuencia definida de extracción de bloques. De esta forma, puede incorporarse fácilmente el Valor del Dinero en el Tiempo, a través de un Factor de Descuento.

El Factor de Descuento es un parámetro que permite la actualización de los flujos monetarios, desde el momento en que estos ocurren, digamos  $t_2$ , hasta un período más temprano, digamos  $t_1$ ; y depende de una tasa de descuento. Esta tasa, en términos generales, está compuesta por la tasa libre de riesgo y una prima de riesgo exigida por los dueños del proyecto.

**Definición 3.10:** El Factor de Descuento está dado por la siguiente expresión:

$$\gamma_r^t = \frac{1}{(1+r)^t} \quad \text{con } t > 0 \quad (3.7)$$

donde  $t$  es el tiempo transcurrido entre dos períodos, digamos  $t_1$  y  $t_2$  ( $t = t_2 - t_1$ ); y  $r$  es la tasa de descuento. Como  $r > 0$  y  $t > 0$ , entonces  $0 < \gamma < 1$ .

El factor de descuento no tendría mucha relevancia en la determinación del límite económico de pit si no fuera por la forma física que adquiere una mina explotada por el método a Rajo Abierto, la ubicación espacial del cuerpo mineralizado dentro del rajo, la forma secuencial en que se extraen los bloques a través del

tiempo, la distribución de leyes en el yacimiento y por las bajas leyes que tienen hoy los mismos. En efecto, un rajo tiene una forma física muy similar a la de un cono invertido, el cuerpo mineralizado se ubica en el fondo del rajo y su explotación se realiza en fases cónicas desde la superficie hacia el fondo. Dado que la estrategia es siempre maximizar el retorno económico de la explotación, entonces no es rentable extraer roca estéril (sin o con bajo contenido de metal) después que se ha extraído toda la roca mineral.

En lo que sigue, se presentarán algunas definiciones, propiedades y lemas que permiten entender las principales características de un Pit Económico y de un *Ultimate Pit*.

**Definición 3.11:** La Función de Beneficio asociada a un bloque, está dada por la siguiente expresión:

$$B_i = (p - c_{fr}) * tm_i * l_i * R - c_p * tm_i - c_m * t_i \quad (3.8)$$

donde  $p$  es el precio del metal,  $C_{fr}$  es el costo de fundición, refinado y venta,  $l_i$  es la ley de mineral del bloque  $i$ ,  $R$  es la recuperación metalúrgica del proceso según el tipo de mineral,  $c_p$  es el costo de planta incluyendo depreciaciones,  $c_m$  es el costo mina incluyendo depreciaciones,  $tm_i$  son las toneladas de mineral del bloque  $i$ , y  $t_i$  son las toneladas de roca total del bloque  $i$ .

La función de beneficio  $B_i$  es creciente en el precio  $p$ , lo cual implica que si el precio  $p$  aumenta, el beneficio  $B_i$  también aumentará, y viceversa.

Con esta función de beneficios es posible definir las reservas minerales económicas, que son aquella parte del recurso mineral que contiene las especies minerales de ley económicamente extraíbles, las cuales cubren completamente el costo de extracción y procesamiento. A partir de esta definición, se puede concluir que existen leyes que generan un beneficio positivo y otras que generan un

beneficio negativo y, por lo tanto, existe un valor de ley (denominada Ley de Corte) que genera un beneficio igual a cero. Desde este punto de vista, las Reservas Minerales Económicas son aquellas compuestas por minerales de leyes superiores a la Ley de Corte. Esa Ley se obtiene al despejar la variable Ley de la función de beneficio aplicada a un bloque de mineral, para un beneficio igual a cero.

**Definición 3.12:** La Ley de Corte asociada a un yacimiento mineral es aquella que clasifica a la roca en estéril o mineral y depende del precio del producto final, los costos y la recuperación metalúrgica. Está dada por la siguiente expresión:

$$L_c = \frac{C_m + C_p}{(p - C_{fr}) * R} \quad (3.9)$$

### Propiedad 3.3

Bajo una condición de invariabilidad de las leyes del yacimiento y de la recuperación metalúrgica, cuando la Ley de Corte se incrementa, el volumen de las reservas minerales económicas disminuye o se mantiene.

### Demostración

Supóngase, por contradicción, que el volumen de las reservas minerales económicas aumenta ante un incremento de la Ley de Corte.

Un incremento de las reservas, cuando las leyes del mineral y la recuperación metalúrgica se mantienen fijas, sólo puede deberse a que el precio del producto final aumentó o los costos disminuyeron. En cualquiera de estos casos, de acuerdo a la Definición 3.9, la Ley de Corte disminuye.

Por otro lado, por Definición 3.12, la Ley de Corte discrimina entre mineral ( $l \geq L_c$ ) y estéril ( $l < L_c$ ). Por lo mismo, se define como Mineral el volumen de roca con ley  $l \geq L_c$ .

Sea  $l(v)$  una función continua y decreciente en  $R^2$ , definida en un intervalo cerrado y acotado  $[0, lm]$ , que relaciona la ley del mineral  $l$  con su volumen  $v$ , el cual también se define en un intervalo cerrado y acotado  $[0, vm]$ .

Supóngase una función lineal del tipo  $l(v) = a - b \cdot v$ , y que  $l_I(v_I) \geq l_0(v_0)$ . Luego:

$$l_I(v_I) - l_0(v_0) = a - b \cdot v_I - a + b \cdot v_0 = b \cdot (v_0 - v_I) \geq 0$$

Por lo tanto,  $v_0 \geq v_I$ . Es decir, al aumentar la ley de corte, el volumen de mineral disminuye, y viceversa.

#### **Propiedad 3.4**

Un incremento del precio  $p$  del producto final, en condición Ceteris Paribus, hace que el volumen  $V_R$  de las reservas minerales económicas se incremente o se mantenga igual.

#### **Demostración**

Supóngase, por contradicción, que al aumentar el precio del producto, el volumen de las reservas minerales económicas disminuye. Una disminución de las reservas minerales económicas implica que la Ley de Corte se incrementa, lo cual contradice la Definición 3.9.

#### **Propiedad 3.5**

Al aumentar el precio  $p$  del producto final, en condición Ceteris Paribus, el volumen de un *Ultimate Pit* aumenta o se mantiene.

#### **Demostración**

La propiedad 3.4 establece que al aumentar el precio, aumenta o se mantiene el volumen de mineral. Entonces solo falta demostrar que un incremento del volumen de mineral genera un incremento del volumen del *Ultimate Pit*.

Sean  $V$  y  $V_f$  los volúmenes inicial y final del ultimate pit,  $V_e$  el volumen del estéril,  $V_m$  el volumen del mineral y  $\Delta V_m \geq 0$  un incremento de volumen de mineral. Si se mantienen los ángulos de talud global fijos, entonces:

$$V = V_e + V_m \quad / + \Delta V_m$$

$$V + \Delta V_m = V_e + V_m + \Delta V_m$$

$$V_f = V_e + V_m + \Delta V_m$$

Por lo tanto,  $V_f \geq V$ . Esto completa la demostración.

Las propiedades 3.4 y 3.5 son de gran importancia, porque en ellas se fundamentan los mecanismos basados en la parametrización para dividir un *Ultimate Pit* en una serie de pits de menor tamaño denominados Pits Anidados.

**Definición 3.13.** Se denominará “*Pit Anidado*” (PA) al incremento de volumen de un pit producto del aumento de precio o de cualquier otro parámetro relacionado al precio, que influya positivamente en la función de beneficio.

Aplicando las definiciones 3.8 y 3.11, sean los siguientes pit económicos:

$$Y_1^* = \{(x, y, z) \text{ con } \pi^*(p_1, c_{fr}, c_p, c_m, R)\} \text{ y,}$$

$$Y_2^* = \{(x, y, z) \text{ con } \pi^*(p_2, c_{fr}, c_p, c_m, R)\}$$

Donde  $p_2 > p_1$ , son los precios aplicados para encontrar los respectivos límites de pit.

Entonces un Pit Anidado se define como:

$$PA_2 = \{(x, y, z) \in Y_2^* - Y_1^* \Leftrightarrow (x, y, z) \in Y_2^* \text{ pero } (x, y, z) \notin Y_1^*\} \quad (3.10)$$

### Lema 3.1

Dada una tasa de descuento real,  $0 < r < 1$ , un *Ultimate Pit* determinado y una definición de ángulos de talud geotécnicos, los bloques de un Pit Económico siempre están contenidos dentro de los límites del *Ultimate Pit*.

### Demostración

Supongamos por contradicción, que el volumen  $V_e$  del Pit Económico es mayor que el volumen  $V_u$  del *Ultimate Pit*, lo que implicaría que existe al menos un bloque del Pit Económico que está fuera de los límites del *Ultimate Pit*. A este volumen adicional lo denominaremos  $V_a$ . Luego,

$$V_e = V_u + V_a, \text{ con } V_a = V_M + V_E, \text{ donde } V_a > 0.$$

El beneficio generado por  $V_a$  es:

$$B_a = B_M + B_E \quad \text{con } B_M > 0. \quad (3.11)$$

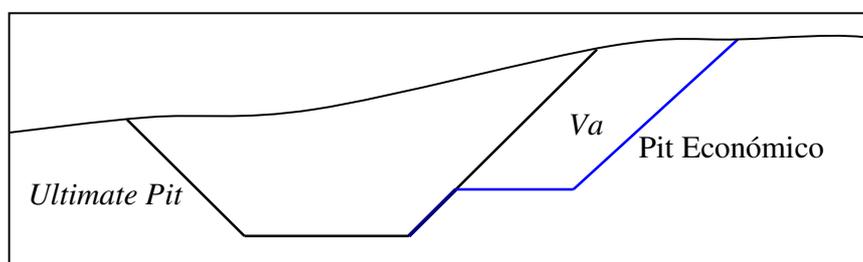


Figura 3.4 Disposición probable entre un *Ultimate Pit* y un Pit Económico.

Para que  $V_a$  forme parte del pit óptimo, su valor presente neto debe ser mayor que cero, es decir,  $\pi_a > 0$ . Con:

$$\pi_a = B_E * \gamma_r^{te} + B_M * \gamma_r^{tm} \text{ con } B_M > 0, \gamma_r^{te} \geq \gamma_r^{tm} \text{ y } r \in ]0,1] \quad (3.12)$$

Donde  $\gamma_r^{te}$  y  $\gamma_r^{tm}$  son los factores de descuento asociados al estéril y el mineral, respectivamente, y  $r$  la tasa de descuento asociada.

Entonces  $\pi_a > 0$  si:

$BE \geq 0$ . Luego,  $Ba > 0$ . Por lo tanto, el Ultimate Pit debe incluir a  $Va$ , o

$B_E < 0$  y  $|B_E| < B_M * \left( \frac{\gamma_r^{tm}}{\gamma_r^{te}} \right)$  Luego,  $Ba > 0$ . Por lo tanto, UP debe incluir a  $Va$

Si  $B_E < 0$  y  $|B_E| \geq B_M * \left( \frac{\gamma_r^{tm}}{\gamma_r^{te}} \right)$  entonces  $\pi_a \leq 0$  y  $Va$  no formaría parte del Pit Económico.

Por lo tanto,  $Ve$  no solo es el volumen del pit óptimo, sino que también el volumen del Ultimate Pit. Es decir, el volumen  $Vu$  no puede ser menor que  $Ve$ .

### **Teorema 3.1**

El Pit Económico, factible bajo una definición de ángulo de talud dado, es único.

### **Demostración**

De acuerdo al Lema 3.1, el Pit Económico siempre está contenido en el *Ultimate Pit*. Luego, como el *Ultimate Pit* es único (L. M. Giannini - 1990), entonces todos los Pit Económicos que pudiesen existir están contenidos en el *Ultimate Pit*. Por lo tanto, se debe demostrar que dentro de un *Ultimate Pit* solo puede haber un Pit Económico.

Supongamos por contradicción, que existen dos Pit Económicos,  $P1$  y  $P2$ , dentro de un *Ultimate Pit*, los cuales pueden o no interceptarse en forma parcial.

Tanto  $(P1 \cap P2)$ ,  $(P1 - P2)$  como  $(P2 - P1)$  son conjunto de bloques que cumplen con una misma definición de ángulos de talud dada y tienen valor presente neto estrictamente positivo. Llamaremos  $\pi()$  al valor presente neto del pit correspondiente. Si  $P1$  y  $P2$  son Pits Económicos, entonces ambos tienen el mayor valor presente neto, y por lo tanto,  $\pi(P1) = \pi(P2)$ .

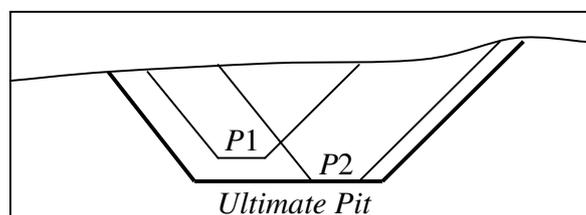


Figura 3.5 Disposición probable de dos Pits Económicos, en un *Ultimate Pit*.

Luego,

$$\pi(P1 \cup P2) = \pi(P1) + \pi(P2 - P1) > \pi(P1)$$

lo que contradice el hecho de que  $\pi(P1)$  es máximo.

Luego  $\pi(P2 - P1) = 0$  y  $P1$  es el único Pit Económico.

De la misma forma se puede deducir que  $\pi(P1 - P2) = 0$  y que  $P2$  es el único Pit Económico.

Por lo tanto,  $P1 = P2$ . lo que implica que el Pit Económico es único y está contenido en el *Ultimate Pit*.

### Corolario 3.1

En un modelo de bloques dado, el valor presente neto,  $\pi_e$ , de un Pit Económico, es igual o superior al valor presente neto,  $\pi_u$ , de su correspondiente *Ultimate Pit*.

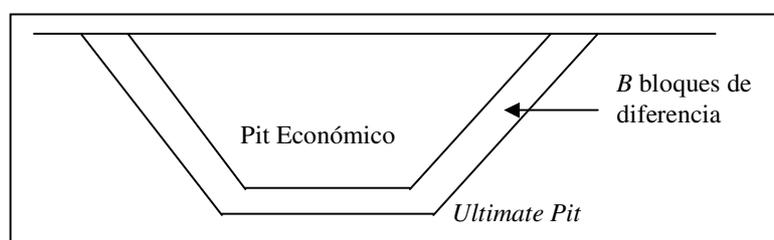


Figura 3.6. Bloques de diferencia entre un Pit Económico y un *Ultimate Pit*.

### Demostración

Por el Lema 3.1 y el Teorema 3.1, sabemos que un Pit Económico siempre está dentro de un *Ultimate Pit* y es único. Por lo tanto, el Pit Económico es igual o es de menor tamaño y está dentro del *Ultimate Pit*.

Sea  $\pi_e$  el valor presente neto de los bloques en el Pit Económico y  $\pi_u$  el valor presente netos de los bloques en *Ultimate Pit*. Supongamos que el *Ultimate Pit* tiene  $N$  bloques más que el Pit Económico, y cuyo beneficio agregado es  $B_N$ . La única forma de que exista  $N$ , es que la suma descontada del beneficio de los  $N$  bloques ( $\pi_N$ ) sea negativa o cero. Por lo tanto:

$$\pi_u = \pi_e - \pi_N \leq \pi_e \quad (3.13)$$

Por lo tanto, queda demostrado que el valor presente del Pit Económico es mayor o igual que el de su correspondiente *Ultimate Pit*.

### 3.3 Modelos de Bloques y Grafos

Un Modelo de Bloques es adecuado para la visualización y análisis del yacimiento desde la óptica minera, pero es menos eficiente para el manejo computacional, sobre todo si se trata de modelos grandes. Desde este punto de vista, es mejor transformar el modelo de bloques en un grafo tridimensional, cuyos vértices representan a los bloques del primero.

Considérese un grafo dirigido ponderado  $G(V, A, W)$  donde  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_N\}$  es el conjunto de nodos o vértices,  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_N\}$  es el conjunto de arcos con  $a_i = (v_i, v_j)$ , y  $W = \{w_1, w_2, \dots, w_i, \dots, w_N\}$  es el conjunto de pesos asociados a los elementos de  $A$ . Este dígrafo define una función de mapeo  $\Gamma$ , de  $V$  en  $V$ , tal que  $(v_i, v_j) \in A \Leftrightarrow v_j \in \Gamma v_i$ . Además, defínase un *subgrafo*  $G_Y(Y, A_Y, W_Y) \subset G$ , como un grafo con un conjunto de nodos  $v_i \in Y$ , con  $Y \subset V$ , y que contiene a todos los arcos que conectan a los nodos de  $Y$  en  $G$ .

La variable  $w_i$ , asociada a la matriz de pesos  $W$ , puede ser la ley del mineral contenida en el vértice  $i$ , en el caso de un modelo geológico, o el beneficio económico de explotar el vértice  $i$ , en el caso de un modelo económico. Se crea un arco  $a_i = (v_i, v_j)$  si y solo si, siendo  $v_j$  adyacente a  $v_i$ , la extracción de  $v_i$  depende directamente de la extracción previa de  $v_j$ . Esta restricción está gobernada por la configuración de ángulos de talud del yacimiento. Es decir, habiéndosele asignado a cada vértice  $v_i$  del grafo un ángulo de talud  $\alpha_i$ , solo se creará un arco entre  $v_i$  y  $v_j$ , si y solo si la ubicación espacial de ambos vértices forma un ángulo, respecto a la horizontal, igual o superior al ángulo  $\alpha_i$ . Este ángulo de talud  $\alpha_i$  depende de las características geomecánicas de la roca del bloque  $i$ .

Supóngase que el macizo rocoso en general (mineral y estéril) no soporta un ángulo superior a  $45^\circ$ . Si los bloques tuviesen forma cúbica, la configuración de adyacencia para el caso bidimensional sería la que se muestra en la Figura 3.7.

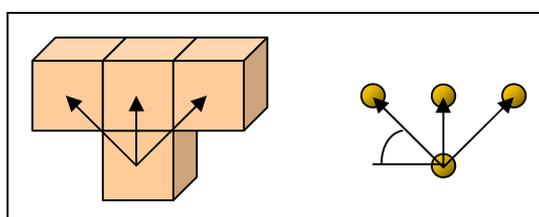


Figura 3.7. Adyacencia entre vértices de  $G$

Lo que persigue la adyacencia, desde un punto de vista minero, es identificar aquellos bloques de mineral y estéril que son necesarios extraer para despejar el bloque que está siendo analizado. Es por esta razón que, tradicionalmente, se asocia un cono invertido a la forma que toma el macizo rocoso que se ubica sobre ese bloque.

Las relaciones de equivalencia entre el modelo de bloques geológico y el grafo son las siguientes:

$$b_{ijk} \in MB \equiv v_h \in G(V, A, W)$$

$$b_{ijk} \in MM \equiv v_h \in G(V, A, W) : w_h > 0 \text{ con } w_h \in W$$

$$b_{ijk} \in ME \equiv v_h \in G(V, A, W) : w_h = 0 \text{ con } w_h \in W$$

$$b_{ijk} \in MA \equiv v_h \in G(V, A, W) : w_h = \xi \text{ con } w_h \in W \text{ y } \xi < 0$$

En todos los casos  $h = \vec{h}(i, j, k)$  con  $h \in H = \{1, \dots, M\}$ , donde  $M = N * J * K$  es el número de nodos totales del grafo.

Por las características de adyacencia entre los bloques de un modelo de bloques, el grafo  $G$  es en realidad un Árbol, es decir, un dígrafo conectado sin circuitos.

**Definición 3.14:** Un grafo  $G(V, A, W)$  dirigido, sin circuitos y ponderado, definido por un conjunto de nodos  $V = \{v_h\}_{h \in H}$ , un conjunto de arcos  $A = \{a_f\}_{f \in F}$ , con  $a_f = (v_h, v_l)$ , los cuales cumplen con la restricción de talud, y por un conjunto de pesos  $W = \{w_h\}_{h \in H}$ , es una representación exacta de un Modelo de Bloques. Donde  $F$  es el número de arcos en  $G$ .

**Definición 3.15:** Un Subgrafo  $G_Y \subset G$ , es un grafo  $(Y, A_Y)$  definido por un conjunto de vértices de  $Y \subset V$  y que contiene a todos los arcos que conectan a los vértices  $Y$  en  $G$ .

Si los arcos  $A_Y$  de  $G_Y$  no superan el ángulo de talud máximo, entonces  $G_Y$  es equivalente a un Pit Factible.

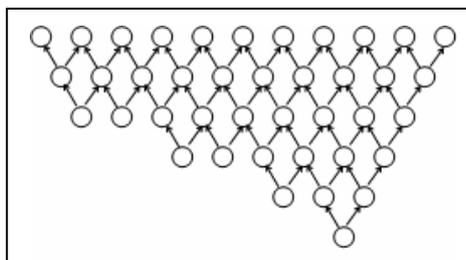


Figura 3.8. Perfil bidimensional de un Pit Factible

**Definición 3.16:** El subgrafo dirigido  $G_{\hat{Y}}(\hat{Y}, A_{\hat{Y}}, W_{\hat{Y}})$  es el equivalente al modelo de bloques del Ultimate Pit, tal que:

$$\hat{Y} = \left\{ v : \sum_{w \in W_{\hat{Y}}} (w) \text{ es máxima} \right\} \quad (3.14)$$

**Definición 3.17:** El subgrafo dirigido  $G_{Y^*}(Y^*, A_{Y^*}, W_{Y^*})$  es el equivalente al modelo de bloques del Pit Económico, tal que:

$$Y^* = \left\{ v : \sum_{w \in W_{Y^*}} (\gamma w) \text{ es máxima} \right\} \quad \text{con } \gamma: \text{factor de actualización} \quad (3.15)$$

**Definición 3.18:** Un Árbol Cónico es un subgrafo dirigido  $G_c \subset G$  contenido dentro de un Cono Factible (Figura 3.13).

Antes de presentar la siguiente propiedad, se hace necesario explicar que dependiendo de las características mecánicas del macizo rocoso, este podrá alcanzar un ángulo de talud máximo y seguro para las operaciones de explotación. Para macizos rocosos de alta calidad el ángulo de talud global podría alcanzar casi los 90°, pero a medida que esta calidad disminuye, el ángulo también lo hará. Para definir que tan seguro es un ángulo de talud global, se calcula el Factor de Seguridad ( $FS$ ).

$$FS = \frac{\Sigma F_{op}}{\Sigma F_{in}}$$

donde  $F_{op}$  son las fuerzas que se oponen al deslizamiento del talud, mientras que  $F_{in}$  son las fuerzas que inducen el deslizamiento.

El Factor de Seguridad debe ser mayor que uno para mantener un talud estable.

En general, todos los investigadores plantean sus análisis de talud, en base a los principales parámetros mecánicos de la roca, entre los que encontramos la cohesión efectiva  $c'$  y el ángulo de fricción interno efectivo  $\phi'$ . Los métodos determinísticos de análisis van desde los analíticos como el método de equilibrio límite basado en dovelas (Fellenius, Bishop, Janbu, Spencer, Morgenstern y Price) hasta los numéricos de elementos finitos. También hay métodos probabilísticos que utilizan Monte Carlo, por ejemplo.

Para simplificar el problema analítico, sin perder generalidad, supongamos una falla de tipo plana en roca seca, para analizar la existencia de ángulos de talud globales óptimos y seguros para una explotación a cielo abierto.

De acuerdo a la Figura 3.9, se tienen las siguientes fuerzas que se oponen al deslizamiento del talud:

Fuerza de Cohesión:  $c' A$

$$\text{con } A = \frac{H - z}{\text{sen}(\alpha)}$$

Fuerza Normal:  $W \cos(\alpha) \tan(\phi')$

$$\text{con } W = \frac{1}{2} \gamma H^2 \left[ \frac{1 - \left(\frac{z}{H}\right)^2}{\tan(\alpha)} - \frac{1}{\tan(\beta)} \right]$$

La fuerza que induce el deslizamiento es:  $W \text{sen}(\alpha)$

Luego el Factor de Seguridad estaría dado por:

$$FS = \frac{c' A + \left[ \frac{1}{2} \gamma H^2 \left( \frac{1 - \left(\frac{z}{H}\right)^2}{\tan(\alpha)} - \frac{1}{\tan(\beta)} \right) \right] \cos(\alpha) \tan(\phi)}{\left[ \frac{1}{2} \gamma H^2 \left( \frac{1 - \left(\frac{z}{H}\right)^2}{\tan(\alpha)} - \frac{1}{\tan(\beta)} \right) \right] \text{sen}(\alpha)}$$

donde:

$c'$ : cohesión efectiva

$\phi'$ : ángulo de fricción interna efectivo

$\gamma$ : peso específico

$\alpha$ : ángulo del plano de corte

$W$ : peso del corte

$H$ : altura del talud

$z$ : profundidad de la grieta de tracción

$\beta$ : ángulo de talud

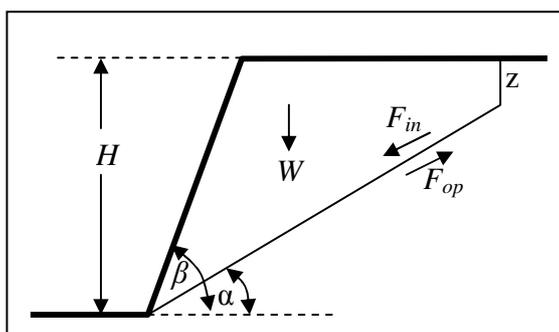


Figura 3.9 Geometría de un Talud Global

Después de un poco de álgebra, el ángulo de talud está dado por:

$$\beta = \arctan\left(\frac{\gamma H^2 B \tan(\alpha)}{\gamma(H^2 - z^2)B - 2c'(H - z)}\right)$$

$$\text{con } B = (FS \operatorname{sen}(\alpha) - \cos(\alpha) \tan(\phi')) \cos(\alpha)$$

Luego, dejando los demás parámetros fijos, el ángulo de talud global del pit dependerá principalmente del Factor de Seguridad que se asigne al cálculo y de la profundidad del pit,  $H$ .

Después de un análisis de la función anterior, el ángulo de talud global puede variar desde el ángulo promedio del plano de corte hasta los  $89^\circ$ .

El gráfico de Altura de Talud versus Ángulos de Talud presentado en la publicación “New slope stability considerations for deep open pit mines” (T. R. Stacey et al, 2003) y la experiencia de otros autores como Ever Hoek, han demostrado que el ángulo de talud global varía entre  $30^\circ$  y  $60^\circ$ , lo cual confirma la forma cónica de los pits. Por lo tanto, es intuitivo pensar que para la extracción de un nodo (bloque) cualquiera, es necesario extraer antes el árbol cónico que se ubica sobre sí, y cuya envolvente lateral tiene un ángulo que podría variar entre los  $30^\circ$  y los  $60^\circ$ .

**Propiedad 3.6:** La extracción de un nodo  $v_i \in V$ , en el grafo  $G$ , requiere la extracción previa de su Árbol Cónico  $G_{C_{v_i}}$ , cuyo ángulo de talud global es  $\beta^*$ .

**Demostración:**

Dado un grafo  $G(V, A)$  con una función  $\Gamma$  que mapea  $V$  en  $V$ , estableciendo una relación entre vértices, la cual depende de  $\beta^*$ . El par:

$$(v_k, v_j) \in A \Leftrightarrow v_j \in \Gamma v_k \quad (3.16)$$

Luego, para cualquier vértice  $v_j \in V$ :

$$v_j \in G_{C_{v_i}} \rightarrow v_j \in \Gamma v_k \text{ y } \beta_{ij} \geq \beta^* \text{ para todo } v_k \in G_{C_{v_i}} \quad (3.17)$$

Donde  $v_i$  es el nodo raíz del árbol cónico  $G_{C_{v_i}}$ ,  $v_k$  es el último nodo de una rama que nace en  $v_i$  y  $\beta_{ij}$  es el ángulo formado entre los vértices  $v_i$  y  $v_j$ , con respecto a la horizontal.

Supóngase que para extraer el vértice  $v_i$  no es necesario extraer el vértice  $v_j$ , el cual cumple con la condición (3.17). Como el vértice  $v_j$  cumple con la condición

(3.17), entonces el ángulo  $\beta_{ij} \geq \beta^*$ . Si el vértice  $v_j$  no se extrae, entonces el ángulo de talud global del pit será  $\beta_{ij}$ , lo cual es una contradicción, porque el ángulo que da estabilidad al talud global es  $\beta^*$ . Por lo tanto, el vértice  $v_j$  debe ser extraído.

### 3.4 Definición del Problema

La definición del problema fue planteada por las ecuaciones (1.4) y (1.5) del Capítulo I, y si bien la mejoramos incorporando inversión, tasa de producción y tasa de descuento (ecuaciones (1.6) y (1.7)), el problema no puede ser resuelto analíticamente por dos razones. En primer lugar,  $F(V,P)$  no es una función, sino que una funcional que depende de varias funciones asociadas a la ley del mineral, al precio, a los costos de las diferentes etapas del proceso, a la ubicación espacial de los puntos y a parámetros técnicos y económicos exógenos, que además varían con el tiempo y con la ley mineral del volumen  $dV$ . En segundo lugar, la información del yacimiento se discretiza en un Modelo de Bloques, por lo que para resolver el problema es necesario utilizar métodos numéricos aplicables a sistemas computacionales.

Desde este punto de vista, nuestro problema es encontrar el subgrafo  $G_{Y^*} \subset G$ , tal que:

$$Y^* = \left\{ v \in G(V, A, W) / \pi^*(w, t)_{Y^* \subset V} > \pi(w, t)_{Y \subset V} \right\} \quad (3.18)$$

donde  $G(V, A, W)$  es un dígrafo ponderado y  $\pi(w, t)$  es el valor presente neto asociado a cualquier pit factible con subconjunto de nodos  $Y$ , que depende de los beneficios  $w$  y del momento  $t$  en que se produce la remoción del nodo  $v$  asociado, de acuerdo a una secuencia de extracción dada. Luego,  $\pi^*(w, t)$  es el valor presente neto máximo, asociado a una secuencia óptima de remoción de nodos

$v \in Y^*$ . La restricción de estabilidad geotécnica está dada por los arcos del dígrafo.

La definición del problema, planteada mediante la ecuación 3.18, si bien es correcta para definir un óptimo en términos de valor presente neto, es de carácter general y no entrega información sobre cómo será resuelto el problema.

Por esta razón, introduciremos en la definición el concepto de Árbol Cónico (Definición 3.18). Una serie de Árboles Cónicos forman un pit económico, si todos ellos han sido creados optimizando el valor presente neto del conjunto de nodos que los componen (Figura 3.10). Claramente, estos árboles no necesariamente son concéntricos entre sí.

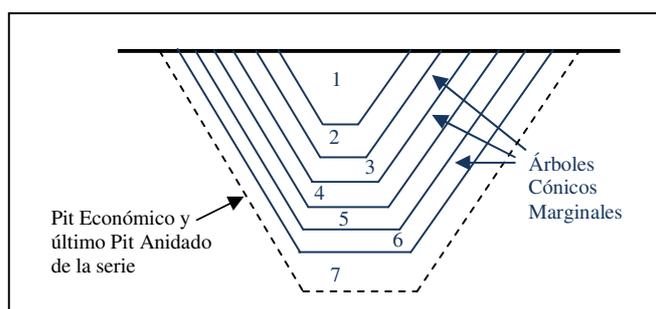


Figura 3.10. Serie de Árboles Cónicos Marginales

Ahora se redefinirá el problema en cuestión. El problema consiste en encontrar una secuencia óptima de nodos en  $N$  Árboles Cónicos  $G_{C_i}^*$ , de tal forma que el subgrafo  $G_{Y^*}$ , formado por la unión de estos  $N$  árboles, corresponda al Pit Económico.

$$\text{Sea } G_{Y^*} = \bigcup_{i=1}^N G_{C_i}^*(V_{C_i}, A_{C_i}, W_{C_i}) \quad \text{y} \quad V_{C_i} = \left\{ v : \sum_{w \in W_c} \gamma w \text{ es máxima} \right\}$$

Donde  $\gamma$  es el factor de actualización y  $w$  es el beneficio del nodo  $v$ . Entonces

$$Y^* = \{v : v \in G_{Y^*}\} \quad (3.19)$$

Cabe destacar que el subgrafo  $G_{Y^*}$  sería el Cierre Máximo del Grafo  $G$ , e  $Y^*$  es el conjunto de vértices con máximo valor presente neto, dado una secuencia óptima.

La metodología para encontrar estos árboles cónicos (pits anidados) será explicada en las siguientes páginas.

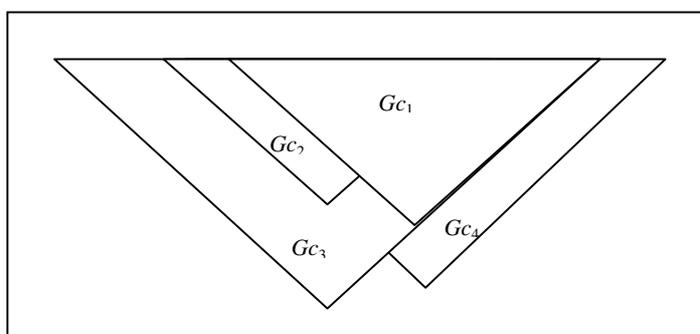


Figura 3.11. Secuencia Óptima de Pits Anidados

### 3.5 Algoritmo para Pit Económico

#### 3.5.1 Definiciones

En esta sección presentaremos algunas definiciones conocidas del ámbito de la teoría de grafos y otras de conceptos nuevos que nos permitirán explicar adecuadamente el algoritmo.

**Definición 3.19:** Sean  $v_i, v_j \in Gc(V_c, A_c)$ , entonces  $v_i$  y  $v_j$  son *Adyacentes* si  $(v_i, v_j) \in A_c, \forall v_i \neq v_j$ .

Queda claro que, dado que los nodos pertenecen a un árbol cónico, el ángulo del arco es mayor o igual que el ángulo máximo de talud.

**Definición 3.20:** Sea  $v_i$  el nodo vértice de  $Gc(V_c, A_c)$ , entonces  $v_j \in V_c$  será llamado *Nodo Adyacente* si  $\exists(v_i, v_j) \in A_c, \forall v_i \neq v_j$ . (Fig. 3.12)

**Definición 3.21:** Un *camino*  $P$  es una secuencia de arcos  $(a_1, a_2, \dots)$  tal que el nodo terminal de cada arco corresponde al nodo inicial del arco siguiente.

Sea  $a_i = (v_{i-1}, v_i) \Rightarrow P = (a_1, \dots, a_n) \in G(V, A) : v_i \in a_i \wedge v_i \in a_{i+1}$

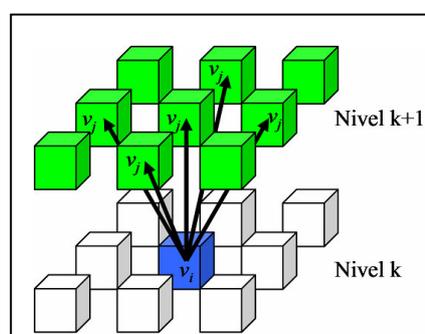


Figura 3.12. Ubicación espacial de nodos adyacentes

**Definición 3.22** Un *nodo-base* es aquel nodo que se ubica en el vértice de un árbol cónico, y será denotado por  $\eta$ .

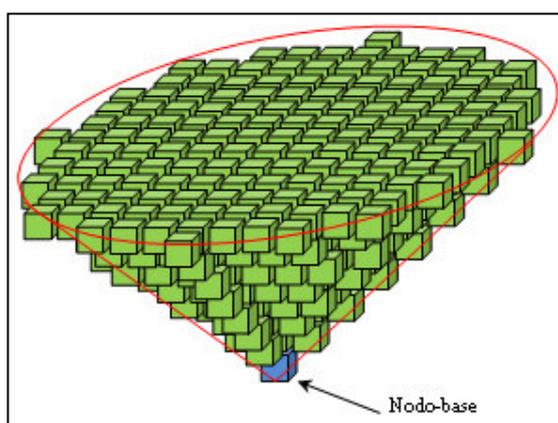


Figura 3.13. Nodo-base de una Árbol Cónico dentro de un Cono Factible

Cuando los nodos tienen una masa  $w$ , puede determinarse la masa total del árbol cónico ( $VC\eta$ ) sumando las masas de los nodos que lo componen. Si la masa de cada nodo es su beneficio producto de su explotación ( $VE$ ), y la suma se hace en forma ordenada desde la parte superior del árbol hacia la inferior, entonces es posible aplicar una tasa de descuento para calcular el valor presente neto del árbol cónico asociado a un nodo-base.

Por otro lado, cada nodo-base  $\eta$  está unido, por medio de arcos  $a_j$ , a  $J$  nodos adyacentes  $j$ , a partir de los cuales también se generan árboles cónicos. Si se asume que cada uno de esos nodos adyacentes es también un nodo-base  $\eta_j$ , con un árbol cónico que tiene una masa total  $VC_{\eta_j}$ , entonces la diferencia entre el valor del árbol cónico asociado a  $\eta_j$  y el valor del árbol cónico asociado a  $\eta$  debe corresponder necesariamente al resto de los nodos adyacentes (Figura 3.14).

**Definición 3.23:** Un *Árbol Cónico Marginal* es un subgrafo  $Gm_{\eta j} \subset G$  que se genera por la diferencia entre el árbol cónico  $Gc_{\eta}$  del nodo base  $\eta$  y el árbol cónico  $Gc_{\eta_j}$  de uno de los nodos adyacentes  $j$ .

$$Gm_{\eta j} = Gc_{\eta} - Gc_{\eta_j} = \{v \in V_{\eta} : v \notin V_{\eta_j}\} \quad (3.20)$$

El valor presente neto de un árbol cónico marginal se denotará por  $VCm_{\eta j}$ , y será la sumatoria ordenada y actualizada de las masas  $w \in W_m$  de cada nodo que lo compone.

**Definición 3.24:** Se denominará *Árbol Cónico Marginal Parcial* a la parte del árbol cónico marginal que le corresponde a cada nodo adyacente  $j$ , con excepción

de  $\eta_j$ . El *árbol cónico marginal parcial* del nodo adyacente  $j$  es un subgrafo  $Gmp_j \subseteq Gm_{\eta_j}$ .

$$Gmp_j = Gm_{\eta_j} - Gmp_{(-j)} = \{v \in Vm_{\eta_j} : v \notin V_{(-j)}\} \quad (3.21)$$

donde  $Gmp_{(-j)}$  es el grafo formado por los nodos y arcos de  $Gm_{\eta_j}$  que no forman parte del árbol cónico marginal parcial correspondiente al nodo adyacente  $j$ .

El valor presente neto del árbol cónico marginal parcial  $VCmp_j$ , será la sumatoria ordenada y actualizada de los beneficios correspondientes a los nodos que lo componen.

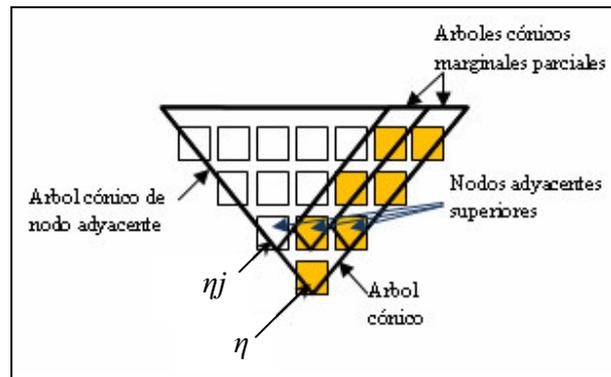


Figura 3.14. Componentes de un Árbol

De las definiciones anteriores se deduce que el dígrafo del árbol cónico correspondiente al nodo-base  $\eta$ , se construye de la siguiente forma:

$$Gc_{\eta} = Gc_{\eta_j} \cup Gm_{\eta_j} \cup \eta = G_{\eta_j} \cup \{Gmp_j\} \cup \eta \quad (3.22)$$

donde  $Gc_{\eta_j}$  es el árbol cónico correspondiente al  $j$ -ésimo nodo adyacente a  $\eta$ ,  $Gm_{\eta_j}$  es el dígrafo marginal asociado a  $\eta$  y cuyo vértice es  $\eta_j$ ,  $Gmp_j$  es el dígrafo

marginal parcial asociado al  $j$ -ésimo nodo adyacente, y  $\eta$  es el nodo-base analizado.

Por lo tanto, el Valor Presente Neto de un árbol cónico cuyo dígrafo es  $G_\eta$ , ubicado sobre un nodo-base  $\eta$ , estará dado por la siguiente expresión.

$$VC_\eta = VC_{\eta j} + \sum_{j \neq \eta j} VC_{mp_j} + \frac{VE_\eta}{(1+r)^t} \quad (3.23)$$

donde  $VE_\eta$  es el beneficio del nodo-base que actualmente se está evaluando y  $t$  es el período en que sale ese nodo. Para facilitar la comprensión y la aplicación, se asume la extracción de un bloque por período, por lo que  $t$  tendrá el mismo valor del subíndice del nodo correspondiente.

### 3.5.2 Modelo General de Optimización

El Modelo General de Optimización se basa en la simulación del proceso de extracción de bloques de mineral y estéril. Este proceso consiste en ir decidiendo, en forma secuencial, cual es el próximo bloque a extraer desde la mina, y según su contenido, definir si será enviado a la planta de procesos o a un botadero. Por lo tanto, el problema a resolver es la secuencia de explotación óptima para una mina Open Pit.

Lamentablemente, no se puede buscar ese camino analizando los valores económicos individuales de los bloques, principalmente por dos razones. En primer lugar, el tamaño de los modelos de bloque normalmente supera el millón de unidades, lo que genera un tiempo de computación elevadísimo, tal como lo expresa Tolwinski y Underwood (1992). En segundo lugar, habría que imponer una gran cantidad de restricciones para evitar perder la continuidad física de la secuencia de extracción, uno de los problemas asociados al algoritmo de Tolwinski y Underwood (1992).

Por esta razón, la optimización se hará sobre una secuencia de extracción de Árboles Cónicos Marginales (Figura 3.14), cada uno ubicado sobre un nodo-base en particular. Esta secuencia de Árboles,  $\{Gm_{\eta j}\}_{\eta=1}^N$ , será aquella que maximice el valor presente neto de la explotación del yacimiento. Sin embargo, el proceso iterativo puede fácilmente extenderse abarcando la extracción de todos los bloques de mineral, lo cual lleva inevitablemente a la creación de árboles cónicos marginales de valor negativo. Entonces, desde un punto de vista intuitivo y debido a esta característica de la metodología (la posibilidad de generar árboles cónicos marginales de valor positivo y negativo), la curva de valor presente neto acumulado de estos Árboles tiene forma cóncava, y por lo tanto, es posible encontrar una solución óptima que maximice ese valor (Figura 3.15).

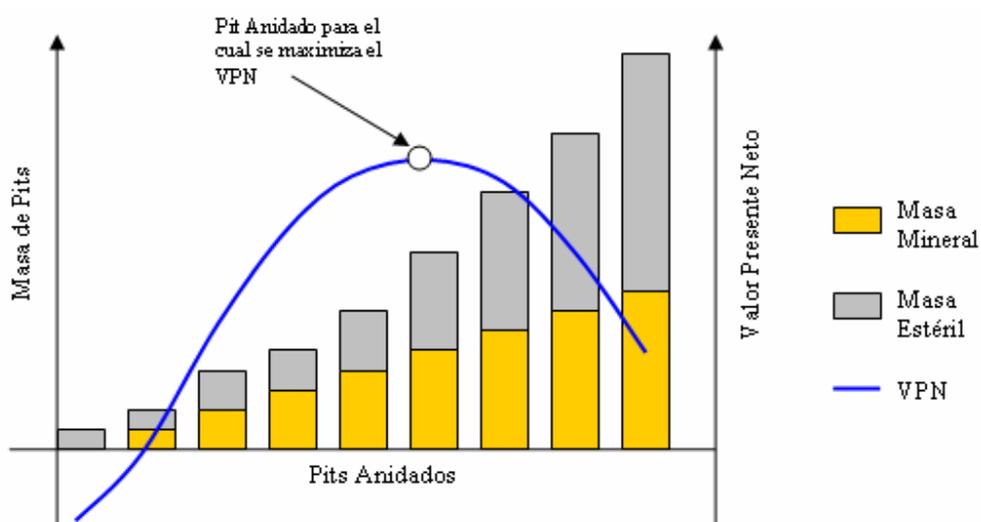


Figura 3.15. Concavidad de la curva de VPN bajo una secuencia de explotación.

La metodología general para encontrar la secuencia óptima de explotación consiste en:

- a) Iterar para buscar una secuencia de Árboles Cónicos Marginales óptimos (Figura 3.16), cada uno de los cuales tiene el mayor valor presente neto por unidad de volumen, tonelaje o bloques, en su respectiva iteración.
- b) En cada iteración del punto anterior, sub-iterar para buscar una subsecuencia de Árboles Cónicos Marginales óptimos.

Esto es lo mismo que particionar el grafo  $G$  en  $N$  conjuntos disjuntos  $Gm_{\eta_j}$  (árbol cónico marginal cuyo vértice es el nodo base  $\eta$ ), con  $1 \leq \eta \leq N$ , cuyos nodos-base son enlazados por arcos  $a(\eta_i, \eta_{i+1})$ . El peso asociado a cada arco es  $VC\eta_i$ .

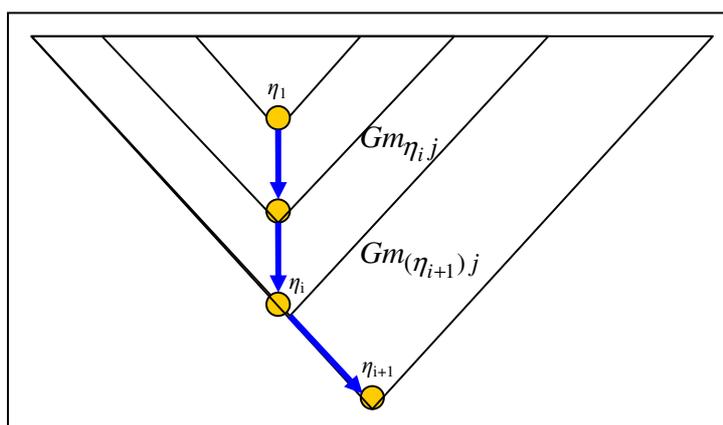


Figura 3.16. Secuencia de Nodos Base

### 3.5.3 Determinación de una Subsecuencia Óptima

Supongamos que tenemos una cantidad  $X$  (recursos mineros) que dividiremos en  $N$  partes no negativas  $Y$  (Árboles Cónicos Marginales), de tal forma que se genera la siguiente secuencia:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= Y_1 \\
 X_2 &= X_1 + Y_2 = Y_1 + Y_2 \\
 X_3 &= X_2 + Y_3 = Y_1 + Y_2 + Y_3
 \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$X_N = X_{N-1} + Y_N = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots + Y_N$$

Si de cada parte  $Y$  se obtiene un retorno actualizado  $g(Y)$  y de cada parte  $X-Y$  se obtiene un retorno acumulado y actualizado  $f(X-Y)$ , entonces tenemos la siguiente secuencia de funciones:

$$f_1(X_1) = \text{Max}_{0 \leq Y_1 < X_1} [g(Y_1)]$$

$$f_2(X_2) = \text{Max}_{0 \leq Y_2 < X_2} [g(Y_2) + f_1(X_1)] = \text{Max}_{0 \leq Y_2 < X_2} [g(Y_2) + f_1(X_2 - Y_2)]$$

$$f_3(X_3) = \text{Max}_{0 \leq Y_3 < X_3} [g(Y_3) + f_2(X_2)] = \text{Max}_{0 \leq Y_3 < X_3} [g(Y_3) + f_2(X_3 - Y_3)]$$

$$\vdots$$

$$f_N(X_N) = \text{Max}_{0 \leq Y_N < X_N} [g(Y_N) + f_{N-1}(X_{N-1})] = \text{Max}_{0 \leq Y_N < X_N} [g(Y_N) + f_{N-1}(X_N - Y_N)]$$

Nótese que  $(X_N - Y_N)$  es lo mismo que multiplicar  $X_N$  por un factor variable  $a$ , con  $0 \leq a < 1$ , que maximiza  $f(X)$ . Por lo tanto, la  $N$ -ésima función también puede expresarse de la siguiente forma:

$$f_N(X_N) = \text{Max}_{0 \leq Y_N < X_N} [g(Y_N) + f_{N-1}(aX_N)] \quad (3.24)$$

Generalizando, tenemos que:

$$f(X) = \text{Max}_{0 \leq Y < X} [g(Y) + f(aX)] \quad (3.25)$$

Esta función, monótona y creciente (Bellman, 1952), es del tipo recursiva, y por lo tanto, podemos basarnos en la programación dinámica para la búsqueda de una solución óptima.

La Figura 3.17, muestra la disposición de las cantidades  $X$ ,  $Y$  y sus respectivos retornos, como una explicación esquemática de la ecuación 3.24.

Los nodos-base del grafo corresponden a los estados del sistema, los arcos entre nodos-base representan las transiciones entre estados, y los pesos (valor presente neto de árboles cónicos marginales) indican las recompensas asociadas a esas transiciones. Las variables correspondientes al precio del producto final ( $s$ ), a los costos de explotación y procesamiento ( $c$ ), a la tasa de descuento efectiva por período ( $i$ ) y a la tasa de producción por período ( $t$ ), sirven para determinar el valor presente neto,  $g(Y)$ , de la transición entre estados, variable de estado sobre la cual actúa la técnica de programación dinámica.

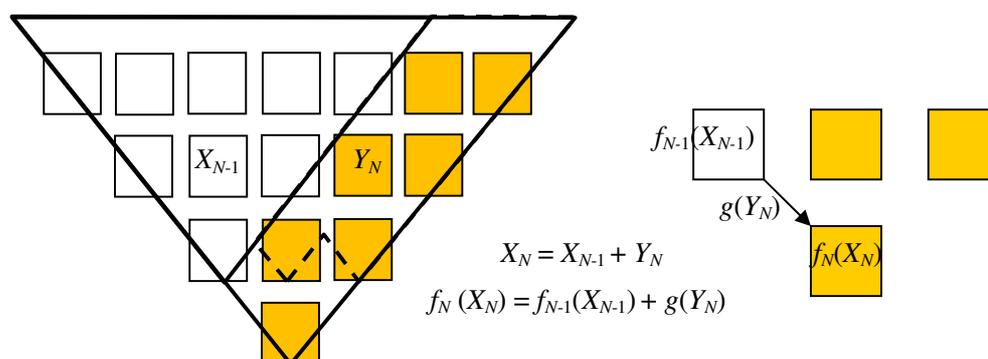


Figura 3.17. Componentes de la función de recursión

Dado que la optimización es hacia adelante, se demostrará la existencia y unicidad de una solución óptima, aplicando inversamente parte del razonamiento seguido por R. Bellman (1952) para un proceso en retroceso. Este razonamiento se expresará en términos de corolario de los teoremas 3, 4 y 5, del capítulo I de la obra “Dynamic Programming” (1952) de este autor.

### Corolario 3.2

Supóngase que existe una función  $m(X) = \text{Max}_{0 \leq Y \leq X} |g(Y)|$ , donde  $g(Y)$  es una función continua de  $Y$  para todo  $Y \geq 0$  y con  $g(0) = 0$ , y una constante  $a$ , con  $0 \leq a < 1$ , entonces:

$$\sum_{j=0}^{\infty} m(a^j X) < \infty \quad \text{para todo } X \geq 0$$

Luego, existe una solución única para la ecuación  $f(X) = \max_{0 \leq Y \leq X} [g(Y) + f(aX)]$

en el intervalo cerrado y acotado  $[0, X]$ . Esta función es continua en todo este intervalo, y tiene valor cero en  $Y=0$ .

### **Demostración:**

Dada las suposiciones hechas para  $g(Y)$ , sabemos que  $f_1(X)$  es continua para todo  $X > 0$ . Luego, inductivamente, se sabe que cada elemento de la secuencia  $f_1(X), f_2(X), f_3(X), \dots, f_N(X)$  es continua.

Sea  $Y_N(X)$  un valor de  $Y$  que maximiza  $f_N(X)$ . Si hay más de un  $Y$  que genera el máximo, se puede elegir cualquiera de ellos al azar. Entonces se pueden dar las siguientes funciones:

$$f_N(X) = g(Y_N) + f_{N-1}(X - Y_N) = g(Y_N) + f_{N-1}(aX)$$

$$f_{N-1}(X) = g(Y_{N-1}) + f_{N-2}(X - Y_{N-1}) = g(Y_{N-1}) + f_{N-2}(aX)$$

Como consecuencia de la propiedad de máximo de  $Y_N(X)$ , se dan las siguientes desigualdades:

$$f_N(X) = g(Y_N) + f_{N-1}(X - Y_N) \geq g(Y_{N-1}) + f_{N-1}(X - Y_{N-1})$$

$$f_{N-1}(X) = g(Y_{N-1}) + f_{N-2}(X - Y_{N-1}) \geq g(Y_N) + f_{N-2}(X - Y_N)$$

La resta de estas funciones, se genera las siguientes desigualdades:

$$f_N(X) - f_{N-1}(X) \geq [g(Y_{N-1}) + f_{N-1}(X - Y_{N-1})] - [g(Y_{N-1}) + f_{N-2}(X - Y_{N-1})]$$

$$f_N(X) - f_{N-1}(X) \leq [g(Y_N) + f_{N-1}(X - Y_N)] - [g(Y_N) + f_{N-2}(X - Y_N)]$$

Al eliminar paréntesis y reducir términos, las desigualdades quedan de la siguiente forma:

$$f_N(X) - f_{N-1}(X) \geq f_{N-1}(X - Y_{N-1}) - f_{N-2}(X - Y_{N-1})$$

$$f_N(X) - f_{N-1}(X) \leq f_{N-1}(X - Y_N) - f_{N-2}(X - Y_N)$$

Al combinar las dos desigualdades y aplicar valor absoluto, se genera el siguiente estimador:

$$|f_N(X) - f_{N-1}(X)| \leq \text{Max} \left[ \begin{array}{l} |f_{N-1}(X - Y_{N-1}) - f_{N-2}(X - Y_{N-1})| \\ |f_{N-1}(X - Y_N) - f_{N-2}(X - Y_N)| \end{array} \right] \quad (3.26)$$

Ahora, defínase la siguiente función

$$\mu_N(X) = \text{Max}_{0 \leq Z \leq X} |f_N(Z) - f_{N-1}(Z)| \quad \text{para } N=2, 3, \dots \quad (3.27)$$

Entonces, se puede decir que:

$$\mu_N(X) = |f_N(X) - f_{N-1}(X)| \quad (3.28)$$

Pero dado que  $Y_N$  produce el máximo, por la ecuación (3.25) tenemos que:

$$\begin{aligned} |f_N(X) - f_{N-1}(X)| &\leq |f_{N-1}(X - Y_N) - f_{N-2}(X - Y_N)| \\ |f_N(X) - f_{N-1}(X)| &\leq \mu_{N-1}(X - Y_N) \end{aligned}$$

Luego, como  $X - Y_N = aX$  para todo  $Y$  en el intervalo  $[0, X]$ , entonces:

$$\mu_N(X) \leq \mu_{N-1}(aX) \quad (3.29)$$

Estímese ahora  $\mu_2(X)$

$$\mu_2(X) = |f_2(X) - f_1(X)|$$

De acuerdo a la ecuación (3.26):

$$|f_2(X) - f_1(X)| \leq \text{Max} \left[ |f_1(X - Y_1) - f_0(X - Y_1)|, |f_1(X - Y_2) - f_0(X - Y_2)| \right]$$

Como  $f_0=0$ , entonces

$$\mu_2(X) = |f_2(X) - f_1(X)| \leq \text{Max} \left[ |f_1(X - Y_1)|, |f_1(X - Y_2)| \right] \leq m(aX)$$

Luego, aplicando iterativamente las ecuaciones (3.27), (3.28) y (3.29), para  $N: 3, 4, \dots$ , se concluye que:

$$\mu_N(X) \leq m(a^{N-1}X)$$

En virtud de la suposición hecha en relación a  $m(X)$ , se sigue que  $\sum_{N=1}^{\infty} \mu_N(X)$  converge para todo  $X$ , y lo más importante, lo hace uniformemente en cualquier intervalo finito.

En consecuencia, la función de límite  $f(X) = \lim_{N \rightarrow \infty} f_N(X)$  existe y es continua para todo  $X$ . Por lo tanto, la uniformidad con que se desarrolla la convergencia permite asegurar que  $f(X)$  es una solución para  $f(X) = \max_{0 \leq Y \leq X} [g(Y) + f(aX)]$ .

Por otro lado, para establecer la unicidad de la solución, defínase  $F(X)$  como cualquier otra solución existente para todo  $X$ , y continua en  $X=0$ , con  $F(0)=0$  y  $F_0(X)=0$ , de igual forma que para la función  $f(X)$ .

Sean las ecuaciones:

$$f(X) = \max_{0 \leq Y \leq X} [g(Y) + f_{N-1}(X - Y)]$$

$$F(X) = \max_{0 \leq Y \leq X} [g(W) + F_{N-1}(X - W)]$$

Entonces, como se hizo anteriormente, se obtienen las siguientes dos desigualdades:

$$f(X) = g(Y) + f_{N-1}(X - Y) \geq g(W) + f_{N-1}(X - W)$$

$$F(X) = g(W) + F_{N-1}(X - W) \geq g(Y) + F_{N-1}(X - Y)$$

Y como antes, se produce la siguiente desigualdad:

$$|f(X) - F(X)| \leq \max \left[ \begin{array}{l} |f_{N-1}(X - W) - F_{N-1}(X - W)| \\ |f_{N-1}(X - Y) - F_{N-1}(X - Y)| \end{array} \right]$$

Ahora se define:

$$\mu(X) = \sup_{0 \leq Z \leq X} |f(Z) - F(Z)|$$

Entonces,

$$\mu(X) = |f(X) - F(X)| \leq |f(X - Y) - F(X - Y)| = \mu(X - Y)$$

Y como  $X - Y = aX$ , entonces:

$$\mu(X) \leq \mu(aX)$$

Luego, por iteraciones sucesivas, se tiene que

$$\mu(X) \leq \mu(a^{N-1}X) \quad \text{para todo } N \geq 2$$

Dado que  $\mu(X)$  es continua en  $X=0$  y  $\mu(0) = 0$ , cuando  $N$  tiende a infinito  $\mu(X) \leq 0$ , y por lo tanto  $f(X) = F(X)$ .

Esto completa la prueba de la existencia y unicidad de la solución para nuestro sistema de ecuaciones recursivas dado por la ecuación 3.25.

En definitiva, la programación dinámica permite encontrar una secuencia de pits anidados (o nodos-base) que maximiza el valor presente neto de la explotación de un yacimiento por el método Open Pit.

En la actualidad, la búsqueda de límites de pit óptimos, a parte de no considerar el valor del dinero en el tiempo, tampoco pueden considerar parámetros económicos variables en el tiempo. Sin embargo, dado que esta metodología basa su búsqueda del límite óptimo en una secuencia de extracción, se pueden incluir parámetros técnicos y económicos variables en el tiempo, tales como el precio, los costos, las leyes y la recuperación metalúrgica, entre otros.

A la secuencia de nodos-bases óptimos que formen parte de un Árbol Cónico Marginal óptimo, se le llamará *Subsecuencia Óptima*.

La determinación de esta Subsecuencia Óptima, como se demostró anteriormente, es equivalente a encontrar el camino de valor máximo en un grafo dirigido y ponderado, al que se ha denominado con la letra  $G$ . Un problema que puede ser

resuelto eficientemente por programación dinámica (Bellman, 1957), y cuya función de recursión utilizada hacia adelante ya fue probada en el Corolario 3.2.

Para determinar una subsecuencia se requiere que los nodos almacenen el beneficio económico de su propia explotación ( $VE_i$ ), pues será este valor el que se irá acumulando actualizadamente para obtener el valor presente neto de un árbol cónico ubicado sobre un nodo-base  $i$  ( $VC\eta_i$ ).

El valor económico de un nodo individual ( $VE_i=B_i$ ) está dado por la ecuación (3.3). Sin embargo, para determinar el valor presente del árbol cónico que se ubica sobre un nodo, en su estatus de nodo-base, se utiliza una expresión similar a la ecuación 3.23:

$$VC\eta = \text{Max} \left[ VC\eta_j + \sum_{j \neq \eta_j} VCmp_j + \frac{VE_\eta}{(1+r)^t} \right] \quad (3.30)$$

Es decir, al valor presente del Árbol Cónico de un nodo adyacente ubicado en la posición  $j$ , asociado al nodo base  $\eta$ , se le suman los valores presentes de los árboles marginales parciales  $VCmp$  asociados a los restantes nodos adyacentes y el valor presente del nodo base analizado  $VE_\eta$ . Adicionalmente, se genera un arco entre el nodo base analizado y su nodo base adyacente de mayor valor presente neto.

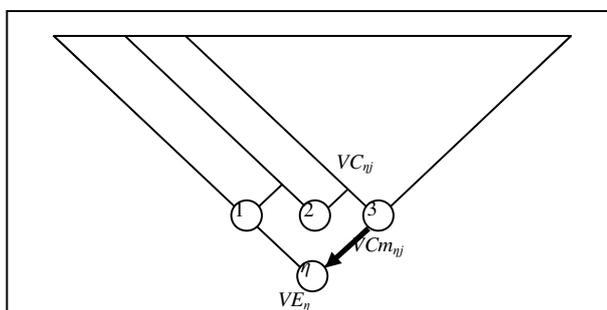


Figura 3.18. Secuencia entre el nodo adyacente 3 y el nodo base analizado.

La Figura 3.18 muestra el árbol cónico de un nodo-base formado por el árbol cónico del nodo adyacente 3 y el árbol cónico marginal formado por los nodos adyacentes 1 y 2. El nodo adyacente 3 aporta su valor de árbol cónico en calidad de nodo base ( $VC\eta$ ). Mientras que los nodos adyacentes 1 y 2 aportan su valor de árbol cónico marginal ( $VCmp_j$ ). El arco entre el nodo-base  $\eta$  analizado y el nodo-base  $\eta_j$  que maximiza el valor de cono total, asume un valor equivalente al del árbol cónico marginal  $VCm_{\eta_j}$ .

Pero el valor presente neto  $VC\eta$ , por si solo, no permite encontrar una subsecuencia óptima, sino que se debe utilizar el valor presente neto por nodo extraído  $VN\eta$ . Un ejemplo que considera este indicador es el que se muestra en las Figuras 3.17 y 3.18. Si el mayor valor presente neto para el  $i$ ésimo nodo-base de una subsecuencia se obtiene a partir de la secuencia que considera primero la extracción del árbol cónico del nodo adyacente  $i1$  y luego la de los árboles cónicos marginales parciales de  $i2$  e  $i3$ , entonces la expresión de valoración sería la siguiente:

$$VN\eta_i = \frac{VC\eta_i}{N^\circ N_i} = \frac{VC\eta_{i1} + VCmp_{i2} + VCmp_{i3} + \frac{VE\eta_i}{(1+r)^t}}{N^\circ N_i} \quad (3.31)$$

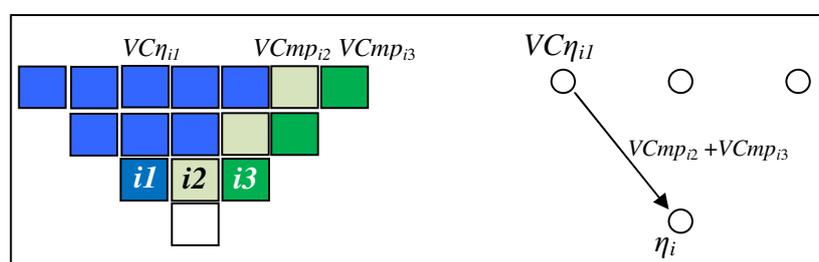


Figura 3.19 Configuración para obtener el valor presente neto unitario de un nodo-base  $i$ , cuando el nodo adyacente  $i1$  es el de mayor valor cónico.

En la Figura 3.20 se muestran los otros dos casos posibles. Cuando el cono de mayor valor está asociado al nodo adyacente  $i2$  y luego al nodo adyacente  $i3$ .

Cabe destacar que la numeración de nodos-base dentro de una subsecuencia se ha concebido invertida (o descendente), con el fin de clarificar el orden de extracción. En otras palabras, el primer árbol cónico a extraer es el asociado al nodo  $\eta_1^k$ , luego el  $\eta_2^k$  y así sucesivamente hasta el nodo  $\eta_M^k$ . En este caso,  $k$  es el número de la iteración del algoritmo o el número de la subsecuencia buscada.

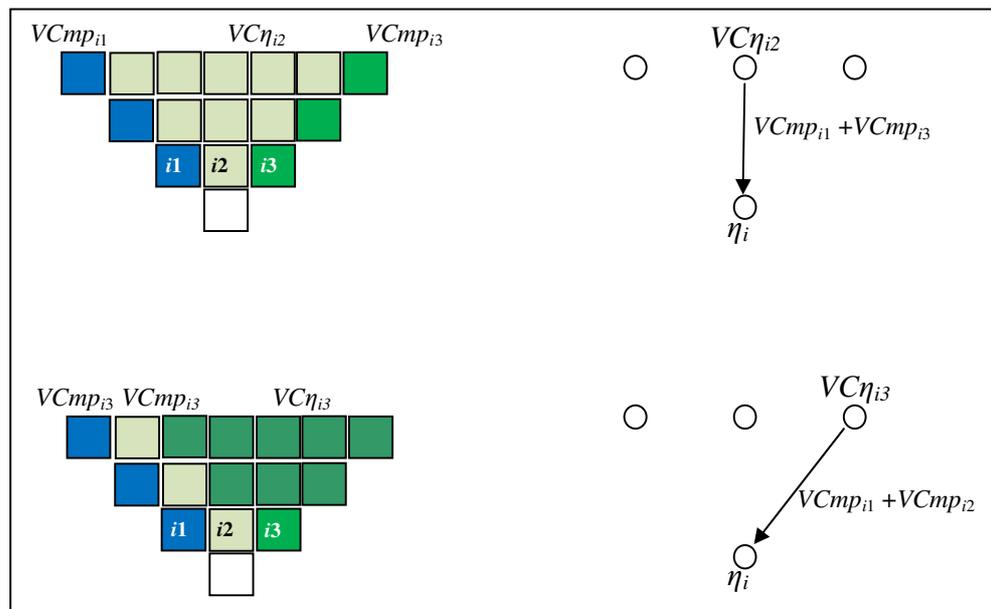


Figura 3.20 Configuraciones para obtener el valor presente neto de un nodo-base, en un modelo bidimensional.

Una vez que se ha calculado el valor presente neto de todos los nodos-base, se procede a buscar aquel de mayor valor presente por bloque extraído. Al camino que va desde ese nodo,  $\eta_M^k$ , hasta el nodo dummy,  $v_0$ , se le denomina subsecuencia.

**Definición 3.25:** Una *Subsecuencia óptima* ( $So$ ) se define como un camino de  $M$  nodos-base, que parte en un nodo dummy  $v_0$  y termina en el nodo base  $\eta_M^k$  que está asociado al árbol cónico  $G_c \subset G$  de mayor valor presente neto por nodo en  $G$ . El contador  $k$  almacena el número de la iteración.

Sea  $a_i = (\eta_i, \eta_{i+1})$

$$\Rightarrow So = (a_1, \dots, a_{(M-1)}) \in G_c(V, A, W) : \sum_{i=1}^M VN_m \eta_i \text{ es max.}$$

Esta subsecuencia es óptima porque cumple con el Principio de Optimalidad de Bellman (demostración asociada al Corolario 3.2) y porque el valor de un nodo-base considera la suma actualizada de todos los nodos que componen su árbol cónico. Sin embargo, puede darse el caso de que el nodo-base de mayor valor presente neto tenga características individuales que lo hagan no extraíble desde el punto de vista minero, como por ejemplo, que se trate de un nodo clasificado como estéril (nodo de roca con ley bajo Ley de Corte).

Para evitar la selección de nodos-base no extraíbles, se ha creado un procedimiento heurístico que permite seleccionar solo subsecuencias óptimas que tengan como vértice, nodos-base extraíbles. Si bien este ajuste no afectará la búsqueda de la mejor secuencia de explotación, si lo hará en la búsqueda del límite de pit económico.

### 3.5.4 Procedimiento heurístico para ajuste de subsecuencias

Este procedimiento se basa en un *Análisis de Marginalidad de Nodos-Base* (AMNB), el cual tiene por objeto obtener una subsecuencia óptima que finalice en un nodo-base extraíble, y por lo tanto, competente para formar parte del Límite Económico de Pit. Esto es importante porque la subsecuencia óptima puede finalizar, por ejemplo, en un nodo-base de masa negativa que asume un valor de

árbol cónico positivo, porque está siendo potenciado por los nodos positivos de ese árbol.

El Análisis de Marginalidad de Nodos-Base se fundamenta en las siguientes definiciones:

**Definición 3.26:** Un nodo-base  $\eta_i^k$  es clasificado como “Fuerte” cuando cumple con las siguientes condiciones:

- i. Su masa individual es estrictamente positiva (Figura 3.21a).

$$VE\eta_i > 0 \quad (3.32)$$

- ii. Soporta la masa de su árbol marginal,  $VCm_i$  (Figura 3.21b).

$$VCm_i + \frac{VE\eta_i}{(1+r)^t} > 0 \quad (3.33)$$

- iii. Soporta la masa de cada uno de sus árboles marginales parciales,  $VCmp_j$ , en forma independiente (Figura 3.21c).

$$VCmp_j + \frac{VE\eta_i}{(1+r)^t} > 0 \quad (3.34)$$

- iv. Soporta la masa de los nodos adjuntos negativos que lo rodean (Figura 3.21d).

$$\sum_{g=1}^{G_j} \left[ \frac{VEv_{jg}^-}{(1+r)^{t_{jg}}} \right] + \frac{VE\eta_i}{(1+r)^{G_j+1}} > 0 \quad (3.35)$$

Donde  $G_j$  es el número de nodos adjuntos negativos correspondiente al  $j$ -ésimo árbol marginal parcial;  $VEv_{jg}^-$  es el valor del  $g$ -ésimo nodo adjunto negativo, asociado al  $j$ -ésimo árbol marginal parcial; y  $G_j + 1$  es el período en que se remueve el nodo base. Un *nodo adjunto negativo* es un nodo de masa individual menor o igual que cero, que está unido al

nodo-base por medio de una o más ramas, cuyos nodos intermedios son todos menores o iguales a cero.

- v. Su subsecuencia es estrictamente creciente, a partir del primer Árbol Cónico Marginal positivo que se genere en ella (Figura 3.21e).

$$VC\eta_i^k > VC\eta_{i-1}^k \quad \text{y} \quad VCm_{\eta_{i-1}} > 0 \quad (3.36)$$

- vi. Su subsecuencia es estrictamente positiva (Figura 3.21f).

$$VC\eta_i^k > 0 \quad (3.37)$$

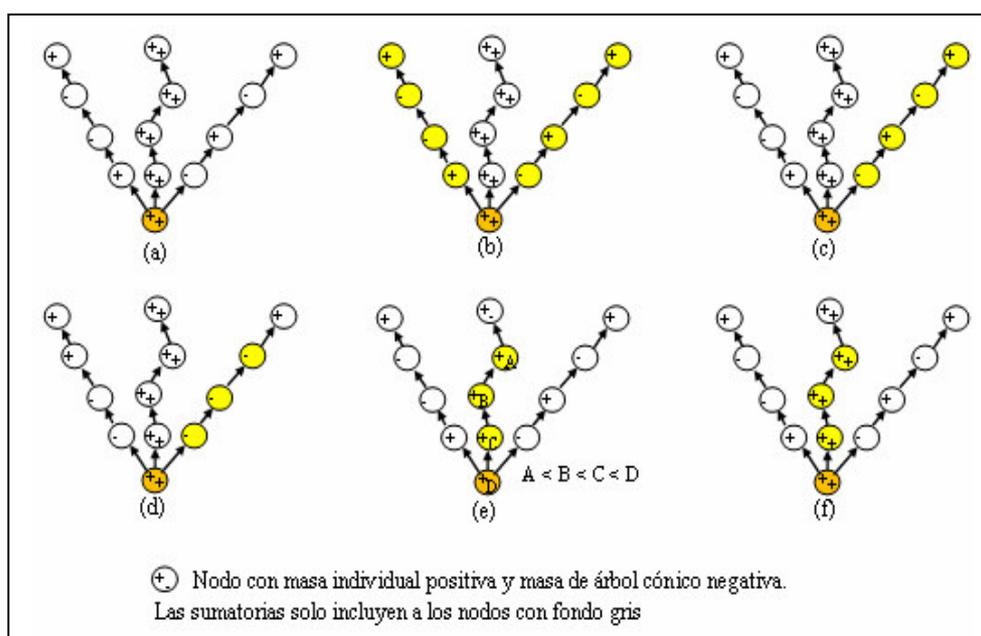


Figura 3.21. Condiciones de fortaleza de un Nodo-base.

**Definición 3.27:** Un nodo-base  $\eta_i^k$  es clasificado como “Semi-Fuerte” cuando cumple con las primeras 5 condiciones de fortaleza de la Definición 3.26. Es decir, su subsecuencia puede ser negativa.

**Definición 3.28:** Un nodo-base  $\eta_i^k$  es clasificado como “Débil” cuando no es “Fuerte” ni tampoco “Semi-Fuerte”.

Cabe destacar que en todas estas definiciones se puede cambiar el valor presente neto por el de valor presente neto unitario.

**Definición 3.29:** se definirá una *Subsecuencia Óptima Ajustada* ( $Sa_M^k$ ) como aquella Subsecuencia Óptima cuyo último nodo-base  $\eta_M^k$  cumple con las siguientes condiciones:

- Tiene el estatus de Fuerte, y
- Su valor de árbol cónico por nodo (valor unitario) es el máximo.

Es decir,

Sea  $a_i = (\eta_i, \eta_{i+1})$  un arco que une dos nodos bases de una subsecuencia óptima y  $N^o N$  es número de nodos contenidos en el árbol cónico con vértice  $M$ . Entonces:

$$Sa_M^k = (a_1, \dots, a_{(M-1)}) \in So : \eta_M \text{ es Fuerte y } \mu \text{ es Máx.} \quad (3.38)$$

$$\text{donde } \mu = \frac{\sum_{i=1}^M VCm_{\eta_i}}{N^o N}$$

En efecto, en las primeras iteraciones se buscan los pits anidados cuyos valores presentes por bloque extraído sean máximos y cuyos nodos base sean fuertes. Una vez que se han acabado los nodos bases fuertes, se inicia la búsqueda de pares semifuertes de subsecuencias. Estos pares constan de una subsecuencia semifuerte y luego de una fuerte. Si la segunda subsecuencia es también semifuerte, entonces se termina la búsqueda.

A cada *Subsecuencia Óptima Ajustada*, asociada a un nodo-base fuerte o semifuerte, le corresponde un *Subárbol Óptimo Ajustado*  $Gsa_M^k$ , que es subconjunto del grafo dirigido  $G$ .

Claramente, la subsecuencia encontrada con la técnica de programación dinámica pura es óptima, pero no genera una solución óptima para el problema de límites de pit económico, debido a las características propias de la extracción de minerales (pit anidados con forma cónica en el cual el nodo-base puede estar soportado indebidamente por bloques positivos que se ubican en niveles superiores). Por otro lado, al aplicar el procedimiento heurístico sobre la subsecuencia óptima generada por la programación dinámica, no solo tenemos una secuencia de explotación óptima sino que también podemos aproximarnos a un límite de pit óptimo evaluado directamente en función del valor presente neto del proyecto.

De esta forma, al finalizar la búsqueda de nodos-base fuertes, el cierre  $Y$  de  $G$  está compuesto solamente por nodos que forman parte de subárboles óptimos que se generan a partir de subsecuencias óptimas ajustadas fuertes. Es decir, por los bloques de mineral que más aportan a la rentabilidad del negocio. Este pit no es el óptimo, sino que aquel que normalmente se elige como pit final. Esto se debe a que el resto de los bloques de mineral, por su alta sobrecarga de estéril, aportan muy poca rentabilidad y en un tiempo considerablemente extenso. No obstante, se sigue la búsqueda hasta encontrar todos los pares de subsecuencias óptimas ajustadas (semifuertes-fuertes), relajando la sexta restricción de la definición 3.26. De esta forma, se puede generar la curva de la Figura 3.22. Esto genera un límite de pit de máximo valor presente neto, al que llamamos Pit Económico.

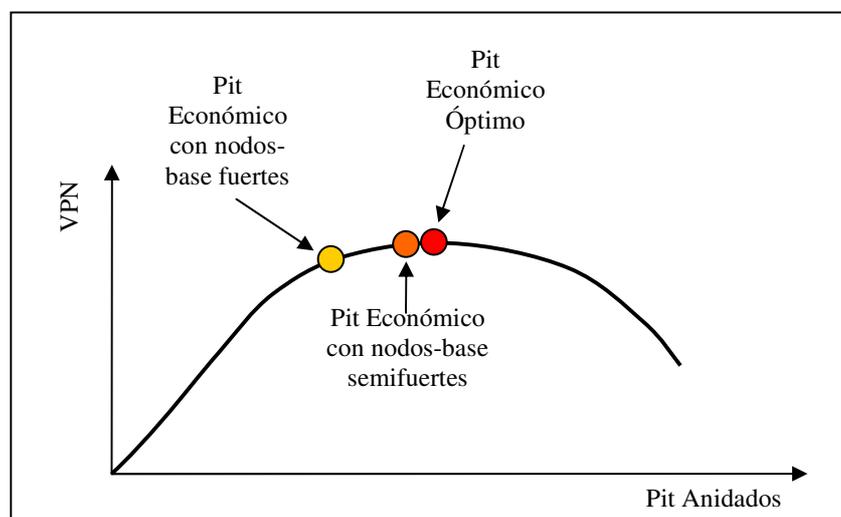


Figura 3.22. Ubicación de Pits Económicos en la curva de Valor Presente Neto.

**Definición 3.30:** Se denominará *Pit Económico* al pit formado por una secuencia de Subsecuencias Óptimas Ajustadas.

$$Y_f^* = \left\{ v_i \in \bigcup_{k \in K} G_{sa}^k \right\} \quad \text{con } K = \text{N}^\circ \text{ de } Sa \in G \quad (3.39)$$

### Propiedad 3.6

El camino  $C_{sa}$  de una subsecuencia óptima ajustada siempre tendrá una longitud  $N$  igual o menor que el camino  $C_{so}$  de la subsecuencia óptima de la cual proviene.

### Demostración

Sea  $C_{so}$  un camino de  $M$  nodos-base de una subsecuencia óptima y  $C_{sa}$  el camino de  $N$  nodos-base de la subsecuencia óptima ajustada correspondiente, tal como se expresa a continuación:

$$C_{so} = (a_{\eta_1}, \dots, a_{\eta_M}) \in So(V_o, A_o) : v_i \in a_{\eta_i} \wedge v_i \in a_{\eta_{i+1}}$$

$$Csa = (a_{\eta_1}, \dots, a_{\eta_N}) \in Sa(Vo, Ao) : v_i \in a_{\eta_i} \wedge v_i \in a_{\eta_i+1}$$

Siendo  $So$  la subsecuencia de mayor valor presente neto por nodo.

Supongamos por contradicción que  $N > M$ .

$$Si \eta_N \in Sa \Rightarrow \eta_N \in So_N$$

Con  $So_N$  una subsecuencia óptima de  $N$  nodos base.

Como  $So_N$  es óptima, entonces:

$$\sum_{i=1}^N VNm_{\eta_i} \text{ es max.}$$

Esto es una contradicción, pues  $So$  es la subsecuencia de máximo valor presente neto unitario. Por lo tanto,  $N$  no es mayor que  $M$ .

### **Propiedad 3.7**

Una subsecuencia óptima ajustada que finaliza en un nodo-base fuerte es estrictamente positiva.

### **Demostración**

Esta propiedad está impuesta por el punto vi, de la definición 3.26.

### **Propiedad 3.8**

El algoritmo encuentra un cierre  $Y \subset G$ , con  $Y$  el grafo formado por todos los subárboles óptimos ajustados, en un número finito de iteraciones.

### **Demostración**

La veracidad de esta propiedad se fundamenta en las siguientes aseveraciones:

- El grafo  $G$  que contiene a los subárboles óptimos ajustados es finito.

- Durante la búsqueda de una secuencia de subárboles óptimos ajustados,  $T^0$ ,  $T^1$ ,  $T^2$ , ...,  $T^k$ , ...,  $T^N$ , nunca se repetirá alguno de ellos, debido a que cuando es encontrada una subsecuencia óptima ajustada, ésta es extraída desde el grafo  $G$  y es almacenada en un grafo  $S$ . Por lo tanto, en cada iteración, el grafo  $G$  decrece en tamaño y el grafo  $S$  crece.
- En el proceso de recursión mediante el cual se busca un nodo-base fuerte, el número de sub-iteraciones para pasar de un nivel a otro es finito, debido a que en cada etapa o nivel de análisis, el número de arcos que convergen a un nodo-base es finito e igual al número de nodos adyacentes superiores.

En definitiva, en cada iteración del algoritmo propuesto, se desarrollan los siguientes pasos:

- a) Mediante una función de recursión se calcula el valor presente neto de cada nodo-base en  $G$ . El cálculo se realiza nivel por nivel, desde la superficie hasta el fondo.
- b) Se genera un listado de nodos-base, de mayor a menor valor presente neto unitario o por bloque extraído.
- c) Al nodo-base de mayor valor presente neto por bloque extraído se le realiza un análisis de marginalidad para determinar su fortaleza.
- d) Si el nodo-base analizado es fuerte, su árbol cónico es retirado de  $G$ , es almacenado en el grafo  $T$  y se vuelve al paso a). En caso contrario, se analiza el siguiente nodo-base de la lista. Si no se encuentra un nodo-base fuerte, el proceso concluye.

Para encontrar los árboles correspondientes a pares de subsecuencias óptimas ajustadas (semifuertes-fuertes), se sigue el mismo procedimiento anterior, cambiando solo el paso (d) al aceptar incorporar al pit óptimo una subsecuencia óptima de un nodo-base semifuerte; siempre y cuando el siguiente sea fuerte.

En la Figura 3.23 se muestra el diagrama de flujo del algoritmo.

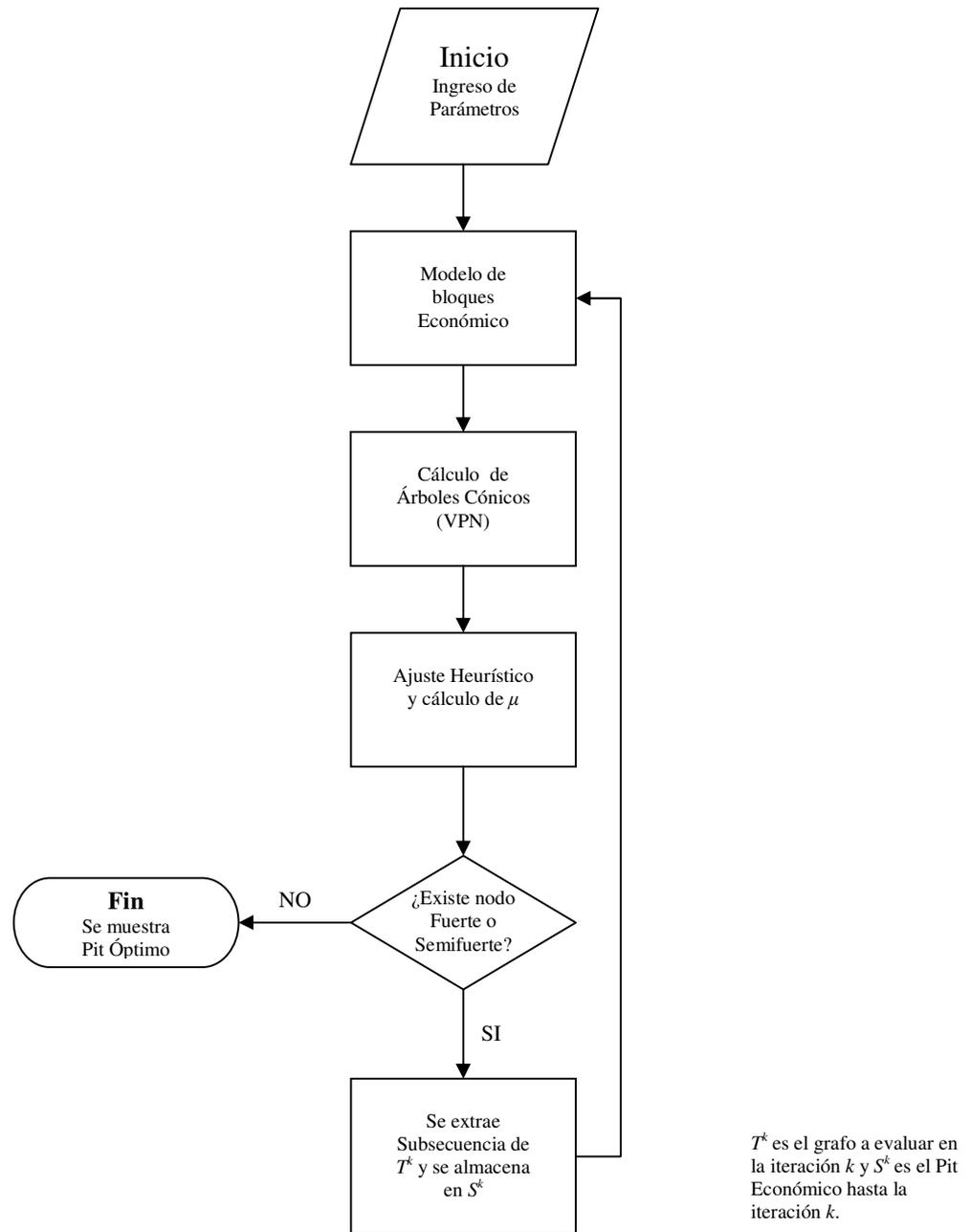


Figura 3.23. Diagrama de Flujo para búsqueda de nodos fuertes.

## 4. IMPLEMENTACIÓN DEL ALGORITMO

### 4.1 Introducción

En el Capítulo 3 se presentó un modelo matemático basado en la programación dinámica y la heurística, para resolver el problema de límites económicos de un Open Pit. Se probó que la programación dinámica con recursión hacia adelante permite encontrar una secuencia óptima de explotación que maximiza el valor presente neto del negocio minero, pero que por sus características no puede ser aplicada directamente a la búsqueda de los límites económicos de Pit.

Para poder encontrar este límite económico, se requirió la incorporación de algunas reglas heurísticas de carácter minero, con las cuales se ajustó la secuencia de explotación.

En el presente capítulo, se exponen algunos conceptos y técnicas que permiten implementar de mejor forma este algoritmo.

### 4.2 Algoritmo

Al inicio, se importa desde un programa de diseño minero el modelo de bloques geológico y se transforma en el grafo  $G(V, A, L)$ , que considera la totalidad de nodos y arcos que definen la adyacencia entre nodos. Cada nodo tiene como masa, la ley del bloque respectivo. Al mismo tiempo se crean los grafos  $G^0(V_G^0, A_G^0, W_G^0, \Pi_G^0)$  y  $T^0(V_T^0, A_T^0, W_T^0, \Pi_T^0)$  inicialmente vacíos, los que en adelante nombraremos simplemente como  $G^0$  y  $T^0$ , respectivamente.  $G^0$  será el grafo de trabajo sobre el cual se realizarán los cálculos del modelo y el grafo  $T^0$  almacenará los nodos del pit económico. En estos grafos, cada nodo almacenará dos masas: una es  $VE\eta_i \in W$  que es el beneficio generado por la explotación de un nodo y la otra es el valor presente neto por nodo  $VN\eta_i \in \Pi$  de su árbol cónico.

Los vectores S, C y R almacenan los valores del precio del producto final (s) por período, los costos de explotación y procesamiento (c) por nivel o tamaño de los recursos y la tasa de descuento (r) por período, respectivamente.

Los pasos de la iteración t+1 son los siguientes:

1. Para cada nodo  $i$  del grafo  $G^t$ , seguir los siguientes pasos:
  - a. Calcula el valor de beneficio  $w \in W^t$ , de acuerdo a los valores de las variables determinadas para la iteración actual  $s^t$  y  $c^t$ .
  - b. Se calcula el valor presente ( $VCm_{ij}$ ) de todos Árboles Cónicos Marginales, aplicando nodo a nodo la tasa de descuento correspondiente a la presente iteración  $r^t$ , y sus correspondientes números de nodos.
  - c. Se calcula el valor presente neto por nodo máximo asociado al nodo base, mediante la siguiente expresión:

$$VN\eta_i = \frac{VC\eta_i}{N^\circ N_i} = \frac{\left[ \frac{VE\eta_i}{(1+r)^t} + \text{Max}[VC\eta_{ij} + VCm_{ij}] \right]}{N^\circ N_i}$$

donde  $j$  es el índice del nodo adjunto superior que aporta su valor de cono ( $VC\eta_{ij}$ ) y  $N^\circ N_i$  es el número de nodos totales incluidos en el Cono del nodo base.

2. Hacer una lista de nodos-base ordenándolos de mayor a menor valor presente neto por nodo ( $VN\eta_i$ ).
3. Aplicar análisis de marginalidad a los nodos-base de la lista creada en el Paso 2 hasta encontrar el nodo-base fuerte o semifuerte de mayor valor presente por nodo. Este nodo-base tiene asociada una subsecuencia  $Sa^t$  y un subárbol  $Gp^t$ .
4. Remover del grafo  $G^t$  el subárbol cónico  $Gp^t$ , asociado a la subsecuencia óptima ajustada  $Sa^t$  encontrada en el paso 3, para transformarlo en el grafo

$G^{t+1}$ , y en el cual las masas  $W^t$  y  $\Pi^t$  se inicializan a cero. Al mismo tiempo, el subárbol cónico  $Gp^t$  es agregado al grafo  $T^t$ , para transformarlo en  $T^{t+1}$ . Luego vaya al paso 1.

5. Los nodos almacenados en el grafo  $T^t$ , son los que forman parte del Pit Económico.

Los pasos del algoritmo presentado anteriormente, esconden una serie de subpasos y cálculos intermedios que complejizan la implementación. En los siguientes párrafos se hará referencia a ellos.

### 4.3 Cálculo de Beneficios

El beneficio generado por la explotación de un nodo del grafo  $G$ , está en función de parámetros económicos y técnicos. Estos parámetros serán variables ya sea desde el punto de vista espacial como temporal. Por ejemplo, la ley de mineral varía espacialmente, porque cambia de valor dependiendo de su posición dentro del cuerpo mineral. Por lo tanto, cada nodo tendrá su propio valor de ley. Por otro lado, el precio del producto varía estocásticamente con respecto al tiempo. Si bien existen algunas metodologías para estimar precios futuros, la aplicación de estas no está dentro de los alcances de la tesis. En todo caso, el algoritmo permite la incorporación de un vector de precios variables, ya sea por período, por bloques o por iteración. Si bien una variación de precios puede generar una variación en los límites de pit, la desviación estadística de los pronósticos de precios es tan alta, para un horizonte de evaluación mayor a 10 años, que no es recomendable utilizar series de precios más allá de ese horizonte, sino que solo un precio promedio. Por otro lado, si el pit tuviese una vida útil menor a 10 años, el resultado de este algoritmo, incluyendo tasa de descuento, sería muy similar al de Lerchs y Grossmann (1965), por lo que este algoritmo no tendría una ventaja comparativa. Por lo tanto, la utilización de un precio promedio general para la vida útil de la mina es una decisión bastante razonable. No obstante lo anterior, una serie de

precios variables afectaría con mayor fuerza a la secuencia de explotación. Por esta razón, no es descartable el uso de una serie de precios para los primeros 10 años de vida útil de la mina.

Por otro lado, lo que afecta con mayor fuerza al límite de pit económico es el valor promedio del precio, pues a mayor valor, mayor será el tamaño del pit económico. Por esta razón, siempre es bueno no escatimar en gastos para obtener el precio promedio más cercano al real.

En este algoritmo es posible aplicar vectores de precios, costos y de cualquier variable temporal que afecte el beneficio. En cada iteración, es posible modificar todos los parámetros y variables de la función.

Para determinar el beneficio de cada nodo, se pueden utilizar dos metodologías: por Leyes de Corte o por Beneficio Máximo.

#### 4.3.1 Cálculo de Beneficios por Leyes de Corte

En minería existen dos Leyes de Corte importantes para una evaluación de largo plazo: Ley de Corte Crítica ( $lc$ ) y Ley de Corte Marginal ( $lmg$ ).

##### a) Ley de Corte Crítica

Es aquella que discrimina entre mineral y mineral marginal. En otras palabras, define el material que será enviado a la planta de procesos. Se calcula de acuerdo a la siguiente expresión:

$$lc = \frac{c_1 + c_2}{(s - c_3) * R} \quad (4.1)$$

donde  $c_1$ ,  $c_2$  y  $c_3$  son el costo unitario mina de mineral, el costo unitario planta y el costo unitario de refinación y venta, respectivamente. La variable  $s$  es el precio del producto y  $R$  es la recuperación metalúrgica.

b) Ley de Corte Marginal

Es aquella que discrimina entre mineral marginal y estéril. Es decir, define aquel material que podría ser enviado a planta, siempre que las condiciones económicas futuras lo permitan. Se calcula de acuerdo a la siguiente expresión:

$$lmg = \frac{c_2}{(s - c_3) * R} \quad (4.2)$$

De acuerdo a estas definiciones, los nodos (o bloques) pueden ser clasificados como estéril, mineral marginal y mineral. Dependiendo de esta clasificación será la forma de la función de beneficio que se aplique.

Cuando el nodo es clasificado como estéril ( $l_n < l_{mg}$ ), la función de beneficio será:

$$w = -c_4 * Tn \quad (4.3)$$

donde  $c_4$  es el costo unitario mina del estéril y  $Tn$  es el tonelaje del nodo.

Cuando el nodo es clasificado como marginal o mineral ( $l_n \geq l_{mg}$ ), la función de beneficio será:

$$w = [(s - c_3) * l_n * R * -c_1 - c_2] * Tn \quad (4.4)$$

donde  $l_n$  es la ley del nodo.

### 4.3.2 Cálculo de Beneficios por Valor Máximo

Otra forma de calcular el beneficio de un nodo es decidiendo por la función que dé mayor valor.

$$w = \begin{cases} -c_4 * Tn & \text{si } -c_4 \geq [(s - c_3) * l_n * R * -c_1 - c_2] \\ [(s - c_3) * l_n * R * -c_1 - c_2] * Tn & \text{de otra forma} \end{cases} \quad (4.5)$$

Esta va a ser la metodología que se utilizará en esta tesis.

### **4.3.3 Variables Técnicas y Económicas de la Valoración**

Tal como lo expresan las ecuación 4.4 y 4.5, en la valoración de los nodos se conjugan una serie de variables y parámetros técnicos y económicos cuya determinación es tan compleja como el problema que deseamos resolver en esta tesis. Por esta razón, a pesar de que cada uno de ellos se tratará como una variable exógena, se hará referencia a ellas en forma breve con el fin de establecer algunos lineamientos económicos.

#### **4.3.3.1 Variables Técnicas**

Las principales variables técnicas involucradas en la valoración económica de un nodo son la recuperación metalúrgica y la ley media del mineral contenido en este.

##### **a) Recuperación Metalúrgica**

La Recuperación Metalúrgica ( $R$ ) es una variable que depende fuertemente del tipo de mineralización en que se aloja el metal y de la eficiencia del proceso que se utilice para su separación de la roca huésped. Para efectos de esta tesis se supondrá constante, debido a que un análisis de pit final y secuencia de explotación se realizan en base a una mineralización conocida y un proceso previamente definido.

##### **b) Ley Media del Mineral**

La Ley Media del mineral es el contenido promedio de metal en una unidad de mineral. Puede ser expresada en porcentaje, unidades de masa o en partes por mil o millón. La Ley Media depende del tipo de mineralización y de la efectividad de la técnica utilizada para su determinación. Esta es una variable muy importante pues el ingreso total del proyecto minero depende fuertemente de ella. Para efectos de esta tesis se supondrá que el modelo de leyes está previamente definido.

#### 4.3.3.2 Variables Económicas

Las principales variables económicas involucradas en la valoración económica de un nodo son el precio del o los productos y el costo de todo el proceso (mina, planta y venta).

##### a) Precio

El precio corresponde al valor de la unidad de metal en el momento en que es transada en el mercado. Dado que las transacciones serán hechas en momentos futuros, se hace necesario pronosticar el precio para cada período de evaluación. No obstante lo anterior, normalmente esto no se hace por tres razones:

- i. La variable está gobernada por una componente estocástica que hace imposible su determinación en forma cierta y, por lo tanto, existirán tantos valores por período como personas realizando la estimación.
- ii. Por lo general, el horizonte de evaluación es tan extenso (por sobre los 10 años) que la valoración de la variable se vuelve cada vez más incierta.
- iii. Las técnicas de valoración que involucran volatilidad, sobreestiman la rentabilidad del negocio, bajo la suposición de que se tomarán las decisiones gerenciales correctas en los momentos óptimos.

Luego, lo que hacen todas las empresas mineras es valorar los proyectos a un precio promedio fijo, el cual es bastante más realista y adecuado para ser utilizado en el largo plazo bajo la metodología del Valor Presente Neto. Por otro lado, se supondrá un mercado competitivo, por lo que la producción de una mina individual no afectará el precio de mercado de su producto. Por estas razones, para efectos de esta tesis

supondremos un precio promedio fijo para la vida útil aproximada del yacimiento.

#### b) Costos

Los costos se clasifican según la etapa del proceso de que se trate. Desde este punto de vista existen los costos mina, planta y refino. El costo mina puede estar referido al costo del material estéril como del material mineral. El costo mina incluye a las operaciones unitarias (perforación, tronadura, carguío, transporte, servicios y chancado primario) y una cuota por amortización y depreciación. El costo planta depende del proceso, pero normalmente se considera desde el chancado secundario hasta la etapa previa a la fusión (para sulfuros) o a la extracción por solventes (para óxidos), e incluye una cuota por amortización y depreciación. El costo de refino y venta incluye los costos aguas abajo en el proceso que viene después de la planta, incluido los costos por venta; pero también incluye los gastos generales y una cuota por amortización y depreciación.

En general, en la mediana y gran minería, los costos medios tienen directa relación con el tamaño de la producción y el nivel tecnológico. Desde este último punto de vista, podemos hablar de la innovación incremental y de la innovación radical (quebres tecnológicos). En la historia de la minería actual han existido solamente dos quebres tecnológicos de alta relevancia que han logrado una disminución importante de los costos: la flotación y la lixiviación. No visualizándose un nuevo quiebre tecnológico a futuro, el cambio tecnológico a gran escala no es una variable importante en la determinación de los costos por ahora. Por su parte, la innovación tecnológica incremental ha estado permanentemente activa, principalmente impulsada por la disminución de la calidad de los yacimientos minerales. Según COCHILCO, en su informe “Reseña de la Innovación Tecnológica en la Minería del Cobre: El Caso de Codelco” (Dic-

2005), entre 1990 y 2004 la disminución de la ley media de cobre ha sido de un 32%. Para otros productos minerales, la situación ha sido similar y es por eso que este tipo de innovaciones ha sido de gran importancia para contrarrestar la disminución de los costos de operación.

Por otro lado, se tiene el tamaño de la producción. Esta es una de las variables más importantes, junto con la innovación incremental, que afectan la magnitud de los costos medios de operación. En el informe de COCHILCO denominado “Costos de la Minería: ¿Cuánto Impactan los Insumos en la Industria del Cobre?” (2008), se realiza un estudio econométrico que permite analizar las economías de escala en la industria. Se concluye que existen economías de escala muy acentuadas hasta una tasa de producción de aproximadamente unas 300 mil toneladas métricas de cobre fino. A partir de esta tasa y hasta las 900 mil toneladas métricas de cobre fino, los costos medios caen a una menor velocidad, se podría decir que son casi constantes. Pero finalmente, a partir de las 900 mil toneladas métricas de cobre fino, se comienza a manifestar una deseconomía de escala. Esto último aún no ha sido demostrado, pues no existen minas que alcancen producciones superiores a esta.

Bajo estas consideraciones, y para efectos de esta tesis, se supondrá un sistema de rendimientos constantes a escala, lo cual implica que los costos medios unitarios se mantienen constantes ante variaciones en los niveles de producción.

En resumen, ante variaciones en los niveles de producción, se mantendrán el precio y los costos unitarios aplicados en la función de valoración de bloques. Este es un aspecto importante para efectos de la modelación, pues si bien no tienen efecto en el algoritmo propiamente tal, si tienen efecto en el resultado final. En efecto, si por ejemplo hubiera economía de escala, al aumentar la producción, el costo unitario medio disminuiría y el beneficio aumentaría (al mantener un

precio constante), lo cual haría más difícil encontrar diferencias entre un pit evaluado a tasa de descuento cero y evaluado a tasa de descuento mayor que cero. No obstante lo anterior, el modelo matemático del algoritmo permite incorporar cualquier sistema rendimientos a escala; así como vectores de precios.

#### **4.4 Cálculo de Valor Presente de Subárbol Cónico.**

El valor presente neto de un nodo-base cualquiera está dado por la ecuación 3.29 del capítulo 3. Para obtener esta expresión se debe seleccionar un método de lectura de nodos, luego se debe ordenar los nodos seleccionados de acuerdo a su posición y finalmente calcular el valor de cada uno de los sumandos de la expresión.

##### **4.4.1 Metodología para la Lectura de Nodos**

Para determinar el valor de un subárbol cónico marginal parcial o cualquier otro, se deben sumar los nodos en forma ordenada desde la superficie hasta el nodo adyacente, y dentro del volumen correspondiente al cono de ese nodo adyacente, tal como se muestra en la Figura 4.1.

Para simplificar la búsqueda, desde el punto de vista de este autor, el sistema de búsqueda puede realizarse sobre el modelo de bloques y no sobre el grafo  $G$ . Por lo tanto, esto permitirá utilizar coordenadas unitarias y ecuaciones geométricas.

Determinar los bloques que forman parte de un subárbol cónico marginal parcial, cumpliendo con un ángulo de talud previamente definido, es un aspecto muy importante en la determinación de límites de pit o en la creación de fases de explotación. Lipkewich y Borgman (1969) construyeron un patrón de búsqueda llamado Knight's Move que selecciona trece bloques para ajustarse a un ángulo de 45 grados; Caccetta y Giannini (1988) mejoran el patrón Knight's Move agregando variabilidad de ángulos mediante una matriz de pares (azimut, dip); Alford y Whittle (1986) utilizan un patrón para ángulos de talud variables, pero

no indican como se determina; Dowd y Onur (1993) utilizan una plantilla cónica; y Khalokakaie et. al. (2000), a partir de las coordenadas del bloque base, determinan la proyección horizontal del talud en cada nivel, para las cuatro direcciones principales (Norte, Oeste, Sur y Este), y luego, mediante la ecuación de la elipse, verifican si los bloques están dentro o fuera de esta curva. Todos los métodos utilizan el cono, la plantilla o el patrón para la búsqueda de bloques de sobrecarga, comenzando en un bloque base y subiendo hasta alcanzar la superficie o un nivel dado. Sin embargo, en esta tesis no se puede utilizar ninguna de las técnicas descritas anteriormente por dos razones:

- a) este algoritmo realiza en forma paralela la búsqueda de nodos y el cálculo del valor del árbol cónico, y
- b) la incorporación de bloques al cálculo debe ir desde la superficie hasta el nodo base, simulando la explotación minera.

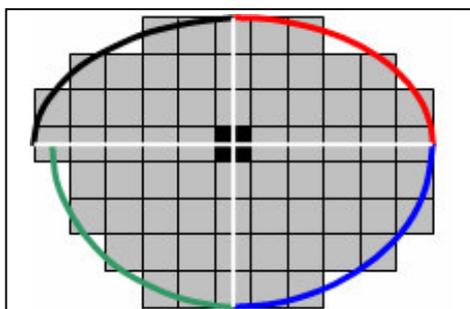


Figura 4.1. Disposición de conos elípticos en cada cuadrante definido por un bloque-base

Por estas razones, en esta tesis se propone utilizar la idea de Khalokakaie et. al. (2000), pero con un nuevo enfoque. El proceso de selección de nodos consta de los siguientes pasos:

1. Se establece el próximo bloque-base a evaluar (nodo-base).
2. Las coordenadas centrales del bloque-base se convierten en el vértice de cuatro conos elípticos parciales, cada uno de ellos ubicados en un

cuadrante, tal como se muestra en la Figura 4.1. El uso de cada uno de estos conos parciales dependerá del cuadrante al cual pertenezca el bloque que se está analizando.

3. Si el bloque analizado se ubica dentro del cono elíptico, entonces es incorporado al árbol cónico del nodo base.

Cuando se requiere conocer los bloques que forman parte de un subárbol cónico marginal parcial, a la condición de que el bloque esté dentro del subárbol cónico del bloque adyacente al cual corresponde ese subárbol, debe agregarse la condición de que además no pertenezca a los subárboles de los otros nodos adyacentes.

En la figura 4.2 se muestra el caso cuando se evalúan los bloques que pertenecen a un subárbol cónico marginal, aplicando el mismo ángulo de talud para todo el modelo (los conos son circulares y se convierten en uno solo para todos los cuadrantes). En este caso, se analiza si un bloque en particular pertenece al cono del bloque-base, pero no pertenece al cono del bloque adyacente de mayor valor.

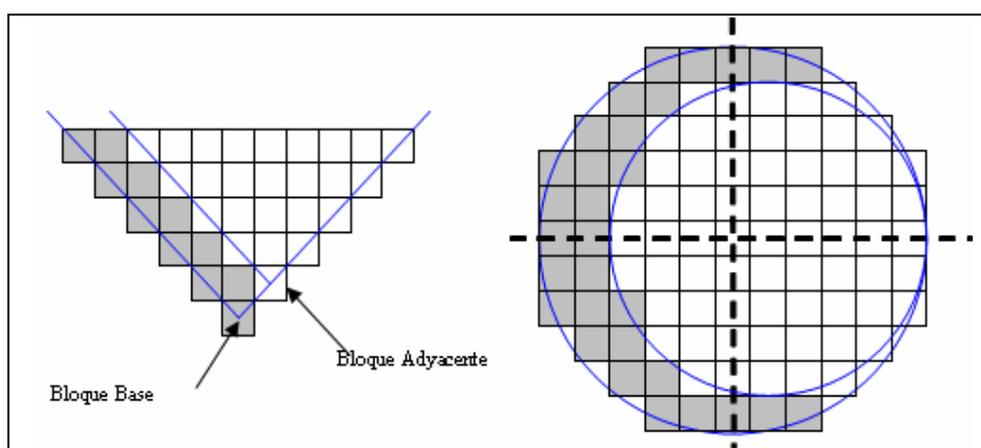


Figura 4.2. Selección de bloques pertenecientes a un subárbol cónico marginal

Este algoritmo toma en consideración dos aspectos importantes:

- a. La búsqueda se realiza desde la superficie hacia el fondo, lo cual permite aplicar una tasa de descuento al momento de la evaluación.
- b. Si se definiera un ancho mínimo de explotación en el fondo, permitiría analizar hasta el nivel en que la cantidad de bloques genere un espacio igual o superior a ese ancho.

Para establecer las condiciones de búsqueda, en el caso de un cono elíptico regular, defínanse los siguientes parámetros. Sean  $(b_i, b_j, b_k)$  las coordenadas unitarias centrales de un bloque-base a evaluar. Sean  $\alpha_x^+, \alpha_x^-, \alpha_y^+, \alpha_y^-$ , los ángulos de talud hacia el Este, Oeste, Norte y Sur, respectivamente. Sean  $dx, dy$  y  $dz$  el tamaño del bloque en las direcciones  $X, Y$  y  $Z$ , respectivamente; y sea  $(i, j, k)$  el vector unitario del bloque que se desea analizar, también en las direcciones  $X, Y$  y  $Z$ , respectivamente. Entonces, la función generatriz del cono elíptico es:

$$f(i, j, k) = \tan(\alpha_x) * [(i - b_i) * dx]^2 + \tan(\alpha_y) * [(j - b_j) * dy]^2 - [(k - b_k) * dz]^2 = 0 \quad (4.6)$$

Luego,

- Si  $f(i, j, k) \leq 0$  entonces el punto  $P(i, j, k)$ , centro del bloque analizado, está dentro del cono con vértice en  $(b_i, b_j, b_k)$ .
- Si  $f(i, j, k) > 0$  entonces el punto  $P(i, j, k)$ , centro del bloque analizado, está fuera del cono con vértice en  $(b_i, b_j, b_k)$ .

Si los ángulos fuesen diferentes en los cuatro cuadrantes, deben definirse ecuaciones para cada uno de ellos, e incorporar las ecuaciones de los planos de los ejes coordenados, de tal forma de establecer el cuadrante en el cual se encuentra el bloque analizado.

#### 4.4.2 Ordenamiento de Nodos

Al mismo tiempo que los bloques están siendo seleccionados, deben ser ordenados o enumerados (etiquetados), simulando una secuencia de extracción. Este ordenamiento es importante para asegurar una extracción nivel a nivel. La secuencia de extracción dentro de un mismo nivel es de menor relevancia, debido a que esto dependerá del diseño final del rajo o del subárbol cónico marginal y de las condiciones operacionales imperantes en el momento de la extracción real.

Por estas razones, los bloques serán ordenados desde el Nivel Superior (de la topografía) hasta el Nivel Inferior (del nodo-base), de Sur a Norte y finalmente de Oeste a Este, tal como se muestra en el ejemplo de la Figura 4.3.

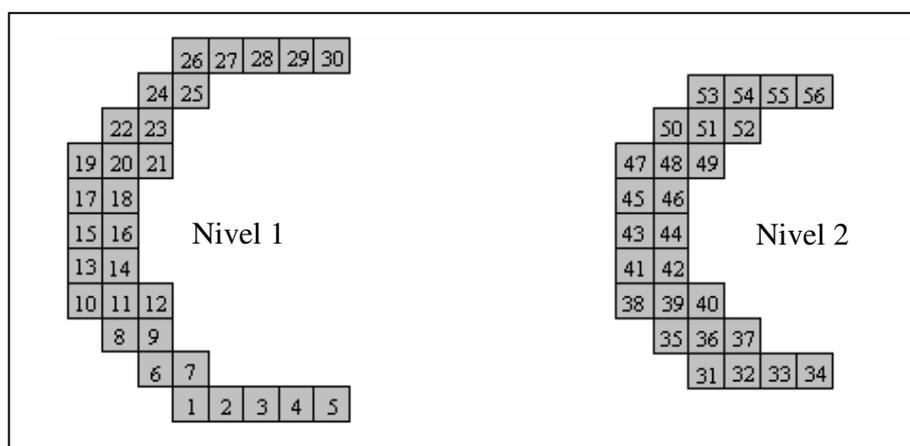


Figura 4.3. Secuencia de extracción de bloques para dos niveles.

#### 4.5 Determinación de la Tasa de Descuento

A pesar de que el algoritmo permite utilizar vectores de tasas de descuento, no está dentro del alcance de esta tesis desarrollar modelos para la determinación de esas tasas. Por esta razón, se aplicará lo que normalmente se hace hoy en la industria: asignar una tasa de descuento efectiva promedio,  $r$ .

Esta tasa normalmente se especifica por unidad de tiempo. Sin embargo, para efectos de este algoritmo, se aplicará por nodo (o bloque). Para encontrar esta tasa de descuento se debe especificar previamente una tasa de producción anual, en bloques por año  $Q(b/a)$ , y una tasa de descuento anual efectiva  $i(\%/a)$ .

La función para encontrar la tasa de descuento por bloque es:

$$r = \left[ \left( 1 + \frac{i}{100\%} \right)^{1/Q} - 1 \right] * 100\% \quad (\%/b) \quad (4.7)$$

En esta función,  $r$  es la tasa de descuento efectiva por bloque.

Como se podrá observar, aunque se mantenga invariable la tasa de descuento anual, al cambiar la tasa de producción anual, también cambiará la tasa de descuento por bloque.

#### 4.6 Árbol Cónico Máximo

El grafo de un Modelo de Bloques para un yacimiento grande, es grande; lo cual dificulta el procesamiento de datos y extiende el tiempo de corrida. Por esta razón, antes de ejecutar cualquier paso del algoritmo, se reducirá el tamaño del grafo, dejando solo aquellos nodos factibles de extraer. Es decir, todos los nodos con ley mayor que cero ( $l_n > 0$ ) y aquellos que, independiente de su ley, se ubican dentro de los conos factibles de los anteriores. De esta forma, se estima que el tamaño del grafo se puede reducir entre un 70% a un 80%. El grafo resultante es el árbol cónico de mayor tamaño posible.

Esta tarea se puede realizar de dos formas, y en ambas se requiere utilizar las coordenadas unitarias  $(i, j, k)$ .

La primera forma es aplicar el siguiente algoritmo:

a) Se marcan todos los nodos del fondo (primer nivel,  $k=1$ ) con el valor de ley

$$lv_{i,j,k} = -A \quad (A \text{ es un entero de valor alto})$$

b) Para cada nodo  $v_{i,j,k}$ , del segundo nivel en adelante:

Si  $lv_{i,j,k} \leq 0$  y  $lva_{i,j,k-1} = -A$  entonces  $lv_{i,j,k} = -A$

c) Si el nodo  $lv_{i,j,k} \neq -A$  se le asigna nueva posición en el grafo. De lo contrario, se elimina.

La variable  $lva$  son los nodos adjuntos que se ubican en el nivel inferior.

La segunda forma de generar este árbol cónico de máximo tamaño, es creando una variable  $pm$  (pit máximo) y utilizando la metodología de selección de nodos del punto 4.3. Los pasos son los siguientes:

a) Todos los nodos del grafo son marcados con un valor especial  $pm=A$ .

b) Para todos los nodos de ley positiva,  $lv_{i,j,k} > 0$ :

Se posiciona un cono invertido sobre el nodo analizado. Luego, todos los nodos que se ubican dentro del cono son marcados con un valor  $pm=B$

c) Se crea un nuevo grafo  $G$  con los nodos cuya variable  $pm=B$ .

## 5. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

### 5.1 Introducción

El modelo descrito en el Capítulo 3 es efectivo para encontrar el óptimo económico en términos de Valor Presente Neto. Por lo tanto, en este capítulo se intentará mostrar, mediante aplicaciones teóricas y una real, que el *Ultimate Pit* encontrado con este algoritmo es igual al producido por el algoritmo de Lerchs y Grossmann (1965), y que el pit económico tiene un valor presente neto igual o mayor que aquel producido por ese mismo algoritmo.

El presente algoritmo, tiene características que lo hacen potente y efectivo para el análisis de diferentes condiciones técnicas y económicas de una explotación minera. Por ejemplo, permite la aplicación de precios, costos y leyes de corte variables en el tiempo; permite probar diferentes tasas de producción o que estas varíen con el tiempo; permite probar con diferentes anchos de expansiones y aplicar anchos de fondo mínimos, entre otros.

No obstante lo anterior, en el presente capítulo solo se mostrará las principales propiedades del algoritmo, se harán comparaciones de los límites de pit final, respecto de los resultados ofrecidos por Lerchs y Grossmann (1965), y se presentarán algunas ideas respecto del análisis de expansiones.

### 5.2 Comparación con el Algoritmo de Cono Flotante

La selección de nodos fuertes y semifuertes para la búsqueda del pit económico, permite superar los problemas tradicionales del algoritmo de Cono Flotante. Estos problemas, expuestos por Marc Lemieux en su artículo denominado Moving Cone Optimizing Algorithm (1979), son los que se presentan en los siguientes párrafos.

### 5.2.1 Bloque Sustentado

Esta situación acontece cuando un bloque sale o es seleccionado producto de que está siendo sustentado por otros de valor positivo. Al aplicar el algoritmo de Cono Flotante al modelo de la Figura 5.1, el bloque de valor 1 es seleccionado porque es ayudado inapropiadamente por el bloque de valor 7. Esto produce un resultado no óptimo, debido a que el pit óptimo solo considera a los bloques positivos 7 y 9.

-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
	-1	-1	-1	-1	-1	
		7	9	-1		
			1			

Figura 5.1. Modelo para problema de bloque sustentado

Fuente: Lemieux – 1979

Lo primero que hace el algoritmo de Pit Económico es calcular el valor presente neto del árbol cónico que se ubica sobre cada nodo, en este caso a una tasa de descuento 0 (beneficio neto de cada árbol).

-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
	-4	-4	-4	-4	-4	
		-1	1	-9		
			4			

Figura 5.2. Valores de conos para problema de bloque sustentado

Como se puede observar en la Figura 5.2, la subsecuencia óptima es -1, -4, 1 y 4. Siendo el nodo base de mayor valor, el último (4). El ajuste de esta subsecuencia arroja los siguientes resultados:

$$VEv_{nb_4} = 1 > 0, \text{ por lo tanto cumple}^1.$$

<sup>1</sup> En este capítulo se ha cambiado el símbolo del nodo-base  $\eta$  por  $nb$ .

$$VCm_4 + \frac{VEv_{nb_4}}{(1+r)^t} = -1 - 1 + 7 - 1 - 1 - 1 + 1 = 3 > 0, \text{ por lo tanto cumple}$$

$$VCmp_{4,1} + \frac{VEv_{nb_4}}{(1+r)^t} = -1 - 1 + 7 + 1 = 6 > 0, \text{ por lo tanto cumple}$$

$$VCmp_{4,2} + \frac{VEv_{nb_4}}{(1+r)^t} = -1 - 1 - 1 + 1 = -2 < 0, \text{ por lo tanto no cumple}$$

Luego, el 4° nodo-base de la subsecuencia óptima no es fuerte.

El siguiente bloque en analizar es el 3° de la misma secuencia (dado que no hay otro nodo positivo), y los resultados son:

$$VEv_{nb_3} = 9 > 0, \text{ por lo tanto cumple.}$$

$$VCm_3 + \frac{VEv_{nb_3}}{(1+r)^t} = -1 - 1 - 1 - 1 + 9 = 5 > 0, \text{ por lo tanto cumple}$$

$$VCmp_{3,1} + \frac{VEv_{nb_3}}{(1+r)^t} = -1 - 1 + 9 = 7 > 0, \text{ por lo tanto cumple}$$

$$VCmp_{3,2} + \frac{VEv_{nb_3}}{(1+r)^t} = -1 - 1 + 9 = 7 > 0, \text{ por lo tanto cumple}$$

$$\sum_{g=1}^2 \frac{VEv_{1,g}^-}{(1+r)^{t_{1,g}}} + \frac{VEv_{nb_3}}{(1+r)^{t_3}} = -1 - 1 + 9 = 7 > 0, \text{ por lo tanto cumple}$$

$$\sum_{g=1}^2 \frac{VEv_{2,g}^-}{(1+r)^{t_{2,g}}} + \frac{VEv_{nb_3}}{(1+r)^{t_3}} = -1 - 1 + 9 = 7 > 0, \text{ por lo tanto cumple}$$

$$VCv_{nb_3}^1 = 1 > -4 = VCv_{nb_2}^1, \text{ por lo tanto cumple}$$

$$VCv_{nb_3}^1 = 1 > 0, \text{ por lo tanto cumple (adquiere estatus de fuerte)}$$

Luego el árbol cónico asociado al nodo base 3 de la primera subsecuencia, es extraído de  $G^0$ , y los valores de las masas ( $w$  y  $\pi$ ) de  $G^1$  son:

-1						-1
	-1				-1	
		7		-1		
			1			

-1						-1
	-2				-2	
		5		-3		
			3			

Figura 5.3. Resultado de la 1ª iteración para problema de bloque sustentado

El nodo base de mayor valor es el 3º de la secuencia de la izquierda (5). Entonces, sobre él se aplicará el análisis de marginalidad:

$$VEv_{nb_3} = 7 > 0, \text{ por lo tanto cumple.}$$

$$VCm_3 + \frac{VEv_{nb_3}}{(1+r)^t} = -1 - 1 + 7 = 5 > 0, \text{ por lo tanto cumple}$$

$$VCmp_{3,1} + \frac{VEv_{nb_3}}{(1+r)^t} = -1 - 1 + 7 = 5 > 0, \text{ por lo tanto cumple}$$

$$\sum_{g=1}^2 \frac{VEv_{1,g}^-}{(1+r)^{t_{1,g}}} + \frac{VEv_{nb_3}}{(1+r)^{t_3}} = -1 - 1 + 7 = 5 > 0, \text{ por lo tanto cumple}$$

$$VCv_{nb_3}^2 = 5 > -2 = VCv_{nb_2}^2, \text{ por lo tanto cumple}$$

$$VCv_{nb_3}^2 = 5 > 0, \text{ por lo tanto cumple (adquiere estatus de fuerte)}$$

Luego el árbol cónico asociado al nodo base 3 de la segunda subsecuencia, es extraído de  $G^1$ , y los valores de las masas ( $w$  y  $\pi$ ) de  $G^2$  son:

						-1
					-1	
				-1		
			1			

						-1
					-2	
				-3		
			-2			

Figura 5.4. Resultado de la 2ª iteración para problema de bloque sustentado

Como no quedan nodos de valor acumulado positivos, el algoritmo termina. El resultado final es el pit (o grafo  $T$ ) de la Figura 5.5, con un valor total de  $VCv_{nb_3}^1 + VCv_{nb_3}^2 = 1 + 5 = 6$ .

	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
		-1	-1	-1	-1		
			7	9			

Figura 5.5. Pit Económico para problema de bloque sustentado

### 5.2.2 Superposición de Conos

Este problema ocurre cuando dos o más bloques no salen por sí solos, pero si podrían hacerlo en conjunto. Al aplicar el algoritmo de Cono Flotante al modelo de la Figura 5.6, no se obtiene ningún pit, pues al analizar el primer bloque positivo, su valor de cono es -1, y lo mismo ocurre con el segundo bloque positivo. Sin embargo, el pit último existe y tiene un valor de 4.

Ahora, se aplicará el algoritmo de pit económico para determinar el pit último.

-1	-1	-1	-1	-1	-1
	-1	-1	-1	-1	
		7	7		

Figura 5.6. Modelo para problema de superposición de conos

Fuente: Lemieux – 1979

En la Figura 5.7 se muestra el modelo con nodos-base valorizados. Como ningún nodo-base es positivo, entonces no hay bloques fuertes.

	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
		-4	-4	-4	-4		
			-1	-1			

Figura 5.7. Valores de conos para problema de superposición de conos

Entonces se relajará la sexta restricción para establecer la existencia de nodos-base semifuertes. Los nodos-base mayores son los dos últimos bloques con valor de árbol cónico -1. Dado que se ubican en el mismo nivel, es indiferente cual de ellos elegir. Por lo tanto, se analizará el de la izquierda, suponiendo adicionalmente que el nodo-base predecesor en su subsecuencia es el nodo adyacente superior central.

$$VEv_{nb_3} = 7 > 0, \text{ por lo tanto cumple.}$$

$$VCm_3 + \frac{VEv_{nb_3}}{(1+r)^t} = -1 - 1 - 1 - 1 + 7 = 3 > 0, \text{ por lo tanto cumple}$$

$$VCmp_{3,1} + \frac{VEv_{nb_3}}{(1+r)^t} = -1 - 1 + 7 = 5 > 0, \text{ por lo tanto cumple}$$

$$VCmp_{3,2} + \frac{VEv_{nb_3}}{(1+r)^t} = -1 - 1 + 7 = 5 > 0, \text{ por lo tanto cumple}$$

$$\sum_{g=1}^2 \frac{VEv_{1,g}^-}{(1+r)^{t_{1,g}}} + \frac{VEv_{nb_3}}{(1+r)^{t_3}} = -1 - 1 + 7 = 5 > 0, \text{ por lo tanto cumple}$$

$$\sum_{g=1}^2 \frac{VEv_{2,g}^-}{(1+r)^{t_{2,g}}} + \frac{VEv_{nb_3}}{(1+r)^{t_3}} = -1 - 1 + 7 = 5 > 0, \text{ por lo tanto cumple}$$

$$VCv_{nb_3}^1 = -1 > -4 = VCv_{nb_2}^1, \text{ por lo tanto cumple.}$$

Este análisis indica que el bloque evaluado es semifuerte, luego se extrae desde  $G^0$ , pero no se agrega a  $T$ , a no ser que el siguiente nodo a evaluar sea fuerte. El

modelo de  $G^1$  con los valores de los tres árboles cónicos restantes se muestra en la Figura 5.8.

						-1	
					-2		
			5				

Figura 5.8. Modelo para la 2<sup>o</sup> iteración en problema de superposición de conos

Al realizar análisis marginal al tercer nodo-base de la subsecuencia con valor 5, se obtienen los siguientes resultados:

$$VEv_{nb_3} = 7 > 0, \text{ por lo tanto cumple.}$$

$$VCm_3 + \frac{VEv_{nb_3}}{(1+r)^t} = -1 - 1 + 7 = 5 > 0, \text{ por lo tanto cumple}$$

$$VCmp_{3,1} + \frac{VEv_{nb_3}}{(1+r)^t} = -1 - 1 + 7 = 5 > 0, \text{ por lo tanto cumple}$$

$$\sum_{g=1}^2 \frac{VEv_{1,g}^-}{(1+r)^{t_{1,g}}} + \frac{VEv_{nb_3}}{(1+r)^{t_3}} = -1 - 1 + 7 = 5 > 0, \text{ por lo tanto cumple}$$

$$VCv_{nb_3}^2 = 5 > -2 = VCv_{nb_2}^1, \text{ por lo tanto cumple.}$$

$$VCv_{nb_3}^2 = 5 > 0, \text{ por lo tanto cumple}$$

Como el nodo-base cumple con todas las restricciones, adquiere el estatus de fuerte. Ahora, solo falta verificar que la extracción conjunta de la subsecuencia semifuerte y la subsecuencia fuerte es estrictamente positiva. Como en este caso no hay una tasa de descuento, el valor total es la simple suma de las subsecuencias, es decir:

$$VCv_{nb_3}^1 + VCv_{nb_3}^2 = -1 + 5 = 4$$

En resumen, el algoritmo presentado en esta tesis resuelve los problemas más importantes del algoritmo de Cono Flotante, por lo que se podría decir que genera un resultado más óptimo.

### **5.3 Comparación con el Algoritmo de Lerchs y Grossmann (1965)**

Realizar una comparación de nuestro algoritmo con el de Lerchs y Grossmann (1965) es de alta relevancia, debido a la importancia que ha adquirido este último en el negocio de la minería a Cielo Abierto.

Ya hemos explicado, en capítulos anteriores, las falencias que tiene el algoritmo de L&G cuando se utiliza para la determinación de límites de pit y secuencia de explotación en yacimientos de gran tamaño. La inexistencia de una tasa de descuento, la imposibilidad de generar árboles de valor negativo<sup>1</sup> y la obligatoriedad de utilizar valores promedios de las variables, hace que L&G sea un algoritmo menos efectivo de lo que realmente se piensa.

A pesar de que nuestro algoritmo no es capaz de asegurar un pit económico óptimo, puede suplir los problemas de L&G y entregar un resultado, que en la práctica, es mucho mejor y más cercano a un óptimo en valor presente.

Todas estas ventajas las expondremos a través de pequeños ejemplos, para finalmente presentar un modelo de mayor tamaño.

---

<sup>1</sup> Lerchs y Grossmann (1965) no puede generar árboles de valor negativo porque si así fuese, se generarían bucles, lo que no permitiría asegurar que el algoritmo encuentre una solución en un número finito de iteraciones. A su vez, este problema del algoritmo, hace que el primer Pit Anidado sea muy grande cuando el cuerpo mineral se encuentra relativamente profundo o las mejores leyes se encuentran muy profundas dentro del cuerpo mineral. Luego, en estos casos, no es posible estimar la mejor ubicación del pre-stripping.

**5.3.1 Un Modelo Bidimensional Histórico**

El primer modelo que se evaluará será el que presentaron Lerchs y Grossmann (1965) en su publicación “Optimum Design of Open-Pit Mines”, para explicar el funcionamiento de su algoritmo bidimensional. Este modelo es el que se muestra en al Figura 5.9. Se trata de un yacimiento tipo veta con un cierto manteo superior a 45°. Cada celda del modelo contiene el beneficio de su extracción y procesamiento.

-4	-4	-4	-4	8	12	12	0	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4
	-4	-4	-4	0	12	12	8	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	
		-4	-4	-4	8	12	12	0	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4		
			-4	-4	0	12	12	8	-4	-4	-4	-4	-4	-4			
				-4	-4	8	12	12	0	-4	-4	-4	-4				
					-4	0	12	12	8	-4	-4	-4					
						-4	8	12	12	0	-4						
							0	12	12	8							

Figura 5.9. Modelo Bidimensional de Lerchs y Grossmann (L&G)

Al aplicar el algoritmo de Pit Económico, se genera primero el modelo de valores de árboles cónicos que se muestra en la Figura 5.10.

-4	-4	-4	-4	8	12	12	0	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4
	-16	-16	-4	16	44	36	16	-12	-16	-16	-16	-16	-16	-16	-16	-16	
		-24	-4	28	60	72	44	0	-32	-36	-36	-36	-36	-36	-36		
			0	32	64	92	80	32	-28	-60	-64	-64	-64	-64			
				28	60	92	104	72	0	-64	-96	-100	-100				
					48	80	108	96	44	-44	-108	-140					
						60	92	104	72	-4	-96						
							64	92	80	28							

Figura 5.10. Valores de conos para modelo de L&G (1965)

Como se podrá observar, parte del listado de valores de nodos-base positivos es el siguiente:

108, 104, 104, 96, 92, 92, 92, 92, 80, 80, 80, ...

Para la búsqueda del nodo-base fuerte de mayor valor, se comenzará el análisis marginal con el nodo-base de valor 108. Este nodo-base es el último nodo de la

subsecuencia 12, 44, 72, 92, 104, 108, tal como lo muestran las flechas de la Figura 5.10.

El análisis marginal del nodo de valor 108, para una tasa de descuento 0, es:

$$VEv_{nb_6} = 12 > 0, \text{ cumple.}$$

$$VCm_6 + \frac{VEv_{nb_3}}{(1+r)^t} = -4 - 4 - 4 + 0 + 8 - 4 - 4 - 4 - 4 + 12 + 12 = 4 > 0,$$

cumple

$$VCmp_{6,1} + \frac{VEv_{nb_6}}{(1+r)^t} = -4 - 4 - 4 + 0 + 8 + 12 = 8 > 0, \text{ cumple}$$

$$VCmp_{6,3} + \frac{VEv_{nb_6}}{(1+r)^t} = -4 - 4 - 4 - 4 + 12 + 12 = 8 > 0, \text{ cumple}$$

No existen bloques negativos asociados al nodo-base evaluado.

$$VCv_{nb_6}^1 = 108 > 104 = VCv_{nb_5}^1 > VCv_{nb_4}^1 > \dots, \text{ cumple}$$

$$VCv_{nb_6}^1 = 108 > 0, \text{ cumple}$$

Por lo tanto, este nodo-base asume el estatus de fuerte y su árbol cónico es retirado de  $G^0$ . Luego, el modelo de  $G^1$  con sus valores de árboles cónicos es el de la Figura 5.11.

-4	-4											-4	-4	-4	-4	-4
	-12	-8										-8	-12	-16	-16	-16
		-20	-12									-12	-20	-28	-32	-36
			-28	-16								-16	-28	-40	-48	-56
				-36	-20							-16	-36	-52	-64	-76
					-44	-20						-4	-28	-60	-80	-96
						-48	-16	-4	-28	-76	-112					
							-44	-16	-28	-72						

Figura 5.11. Modelo para 2° iteración del modelo de L&G (1965)

Como ya no hay nodos-base estrictamente positivos, se tomará entre todos los nodos de mineral, aquel nodo-base de mayor valor de árbol cónico, y más cercano a la superficie, para evaluar su estatus. Ese nodo se ubica en la celda (9, 3), y tiene una valor de -4. Su subsecuencia va justo por el talud derecho, y considera los siguientes bloques: -4, -4, -4, -4, 0, 12 (o su equivalente en valores de árboles cónicos: -4, -8, -12, -16, -16, -4).

$$VEv_{nb_6} = 12 > 0, \text{ cumple.}$$

$$VCm_6 + \frac{VEv_{nb_3}}{(1+r)^t} = -4 - 4 - 4 - 4 + 0 + 12 = -4 < 0, \text{ no cumple}$$

Como en la segunda iteración, el mejor nodo disponible para la extracción es débil, el algoritmo termina. El resultado final es el pit *T* que se muestra en la Figura 5.12, y que tiene un valor de 108.

Al aplicar el algoritmo de Lerchs y Grossmann (1965) a este modelo, se obtiene el mismo resultado. Por lo tanto, nuestro algoritmo ha generado el pit último de mayor valor posible.

		-4	-4	8	12	12	0	-4	-4	-4	-4	-4					
			-4	0	12	12	8	-4	-4	-4	-4						
				-4	8	12	12	0	-4	-4							
					0	12	12	8	-4								
						8	12	12									
							12										

Figura 5.12. Pit Económico para modelo de L&G (1965)

### 5.3.2 Un Modelo Bidimensional más Complejo

El siguiente modelo ficticio (Figura 5.13) permite explorar el comportamiento del algoritmo, bajo condiciones más complejas de la forma del pit último. En este caso, nos encontraremos con un yacimiento más masivo y de contornos erráticos.



$$VCm_{10} + \frac{VEv_{nb_{10}}}{(1+r)^t} = 27 > 0, \text{ cumple}$$

$$VCmp_{10,1} + \frac{VEv_{nb_{10}}}{(1+r)^t} = 17 > 0, \text{ cumple}$$

$$VCmp_{10,3} + \frac{VEv_{nb_{10}}}{(1+r)^t} = 11 > 0, \text{ cumple}$$

$$\sum_{g=1}^1 \frac{VEv_{1,g}^-}{(1+r)^{t_{1,g}}} + \frac{VEv_{nb_{10}}}{(1+r)^{t_{10}}} = -2 < 0, \text{ no cumple}$$

Luego, este nodo-base es débil.

Para no extender innecesariamente el desarrollo del análisis, el lector puede verificar que los nodos-base con valor 124 y 117 también son débiles. Luego, la evaluación del nodo-base con valor 115 produce los siguientes resultados:

$$VEv_{nb_9} = 3 > 0, \text{ por lo tanto cumple.}$$

$$VCm_9 + \frac{VEv_{nb_9}}{(1+r)^t} = 13 > 0, \text{ cumple}$$

$$VCmp_{9,2} + \frac{VEv_{nb_9}}{(1+r)^t} = 13 > 0, \text{ cumple}$$

$$VCmp_{9,3} + \frac{VEv_{nb_9}}{(1+r)^t} = 3 > 0, \text{ cumple}$$

$$\sum_{g=1}^1 \frac{VEv_{1,g}^-}{(1+r)^{t_{1,g}}} + \frac{VEv_{nb_9}}{(1+r)^{t_9}} = 1 > 0, \text{ cumple}$$

$$VCv_{nb_9}^1 = 115 > 102 = VCv_{nb_8}^1, \text{ cumple}$$

$$VCv_{nb_9}^1 = 115 > 0, \text{ cumple}$$







Este límite último de pit es el mismo que se obtiene con el algoritmo de Lerchs y Grossmann (1965).

Un aspecto a destacar es que el algoritmo permite encontrar una secuencia de explotación a partir del primer bloque extraído. Esto no lo puede hacer Lerchs y Grossmann (1965), debido a que no puede procesar subgrafos de valor negativo. Si así fuese, no podría asegurar un resultado óptimo en un número finito de iteraciones. Por lo tanto, el subgrafo más pequeño que puede generar el algoritmo de L&G dependerá de la profundidad a la cual se encuentre el cuerpo mineralizado.

En este sentido, nuestro algoritmo puede generar una secuencia de extracción desde la superficie, debido a que la forma en que se busca un pits anidado es a partir de la mejor secuencia de explotación.

Se aplicó el algoritmo a una gran cantidad de modelos bidimensionales similares, encontrándose siempre el límite último de pit, igual al generado por Lerchs y Grossmann. Esto permitió pasar al siguiente nivel de análisis: la aplicación del valor del dinero en el tiempo.

### **5.3.3 Aplicando el Valor del Dinero en el Tiempo**

Como se sabe, el valor del dinero en el tiempo es un factor importante para la determinación de límites de pit (Nilsson 1997). En efecto, a medida que el tamaño del yacimiento crece, también lo hace la altura de sus taludes, y el mineral que se ubica en ellos cada vez queda más lejos de la superficie. Por lo tanto, el valor presente neto de este mineral disminuye.

Por otro lado, el límite de pit último es una superficie envolvente en la que se da un beneficio marginal igual a cero. Es decir, en ese límite los ingresos marginales son iguales a los costos marginales. Pero si en ese mismo límite se evalúa el valor presente neto, por la ubicación del mineral, el resultado podría ser negativo, lo

cual significa que el límite económico podría envolver un volumen de roca menor.

Para visualizar estas situaciones, evaluemos el modelo de la figura 5.20.

-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1
	-1	-1	-1	-1	-1	-1	42	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	5	-1	-1	4	2	3	5	-1	-1	
		-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	8	3	-2	3	8	7	8	-1	-1		
			-2	-2	-2	-2	1	1	2	7	22	10	20	10	6	5	10	-2	-2	-2				
				-2	-2	-2	-2	-2	-2	9	25	32	26	12	7	7	10	-2	4					
				-2	-2	-2	-2	-2	1	13	29	60	43	18	9	7	12	-2						
					-3	2	2	3	9	1	15	66	92	22	2	20	-3							
						35	-2	-2	-2	-2	2	6	30	6	-3	7								
							3	-2	-2	-2	3	3	3	-3	2									
									-3	-3	-3	-3	-3	-3										

Figura 5.20. Modelo para analizar impacto del Valor del Dinero en el Tiempo (Modelo VDT).

Para evaluar el árbol cónico correspondiente a cada nodo-base se utiliza la ecuación 3.23 del Capítulo 3. En este caso, se aplica una tasa de descuento del 10% anual promedio y se establece una tasa de producción de 1 bloque por año.

Otro aspecto importante a destacar, es que el método de análisis para este modelo incorporará el criterio de Máximo Valor Presente por Nodo (Ecuación 3.31) para la elección del nodo-base al cual se le aplicará el análisis marginal. Hasta ahora, no se había utilizado este criterio con el fin de facilitar la comprensión del método general y porque los modelos presentados no lo requerían. Sin embargo, el modelo de la Figura 5.20 es un modelo relativamente más complejo desde el punto de vista de la búsqueda de una secuencia de explotación óptima.

Los valores de árboles cónicos para cada bloque del modelo, se muestran en la Figura 5.21.









Figura 5.24. Pit Económico del Modelo VDT

La secuencia de pit anidados contenida en el pit económico no produce el máximo valor presente neto del proyecto, pero si se puede decir que es suprema, pues tiene su origen a partir de una secuencia óptima establecida por programación dinámica y considera una secuencia de nodos-base que va desde aquel con mayor valor presente neto unitario hasta el menor. El resultado generado por el algoritmo de Lerchs y Grossmann (1965) se muestra en la Figura 5.25. Su flujo de caja es 748, el cual es mayor que el obtenido por el algoritmo de Pit Económico. Esto es lógico, pues considera un conjunto de bloques marginales adicionales que tienen un beneficio positivo.

Por otro lado, si se establece una secuencia de explotación parametrizando la función de beneficio del modelo económico y aplicando repetidamente el algoritmo de Lerchs y Grossmann (1965), entonces el valor presente del pit último de L&G es 22,3, considerablemente menor al obtenido por el algoritmo de Pit Económico, y con una mayor cantidad de reservas (más bloques). Esto significa que L&G a generado un menor Valor Presente Neto del negocio minero y una vida útil mayor.

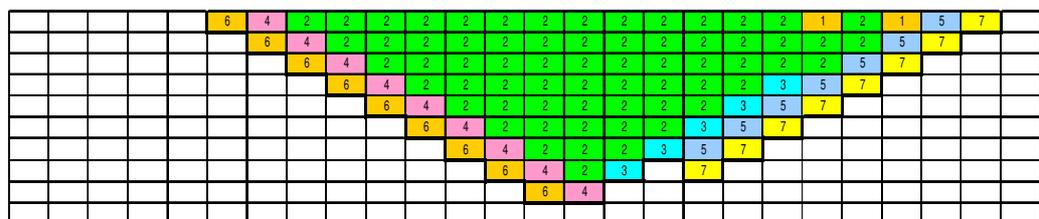


Figura 5.25. Pit Último L&G y secuencia con parametrización Modelo VDT

El menor Valor Presente Neto de Lerchs y Grossmann (1965) se debe al gran tamaño del segundo pit anidado, el cual no permite saber el punto de la superficie donde se debe comenzar la explotación. Este pit anidado tiene ese tamaño debido a que el algoritmo no puede encontrar grafos negativos, tal como se explicó anteriormente. La siguiente es la tabla resumen de los resultados obtenidos:

Tabla 5.3. Cuadro comparativo entre algoritmos (L&G y Pit económico), caso bidimensional.

Item	Pit Último (L&G)	Algoritmo Pit Económico
Nº de Nodo	105	88
Flujo de Caja	748	745
VPN	22,3	39,7

Otra diferencia a destacar es la menor cantidad de nodos o bloques que forman parte del pit económico. Lo cual permite no sobredimensionar el tamaño de la planta de procesos, ajustar los niveles de inversión y mejorar la rentabilidad del negocio. Como el algoritmo permite modificar la tasa de producción, se puede buscar la tasa que produce el mayor Valor Presente Neto y el óptimo tamaño de planta.

#### 5.4 Caso Tridimensional

Hasta ahora se han presentado casos ficticios bidimensionales, con el fin de exponer el funcionamiento, las principales características y ventajas comparativas del algoritmo de Pit Económico. Se ha mostrado que puede resolver efectivamente los problemas del algoritmo de Cono Flotante, y por otro lado, a pesar de que no se prueba la existencia de un límite de pit económico óptimo, puede generar resultados considerablemente mejores que los obtenidos con el algoritmo de Lerchs y Grossmann (1965).

En las siguientes líneas se presentará una aplicación del algoritmo sobre un modelo de bloques tridimensional de tamaño real.

#### **5.4.1 Características del Modelo Geológico**

Este modelo de bloques geológico tiene las siguientes características:

- Número de Nodos al Este: 61
- Número de Nodos al Norte: 60
- Número de Nodos en el eje Z: 17
- Número de Nodos totales: 62.220
- Dimensión X de la celda: 30 m
- Dimensión Y de la celda: 30 m
- Dimensión Z de la celda: 30 m
- Densidad de la roca (mineral y estéril): 2,5 ton/m<sup>3</sup>
- Recursos: 475.694.640 ton
- Ley Media de Recursos: 0,466 %Cu

Las figuras 5.26, 5.27 y 5.28, obtenidas con el software DATAMINE<sup>MR</sup>, muestran dos plantas y un perfil del modelo de bloques geológico a evaluar, respectivamente. Los colores de las celdas del modelo están de acuerdo a una categorización de las leyes de cobre del yacimiento, tal como lo muestra la leyenda adjunta.

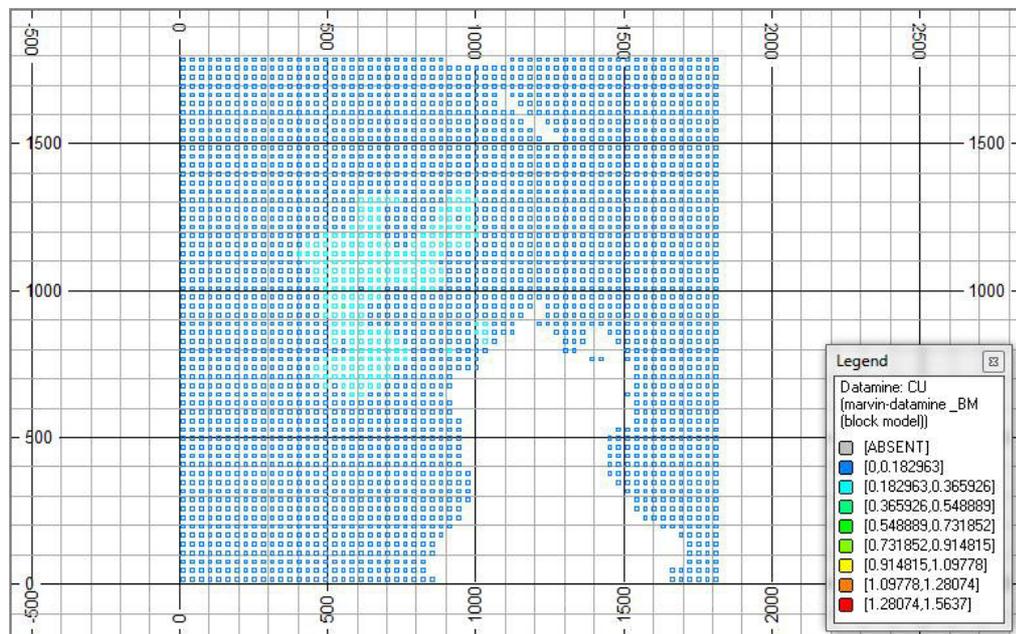


Figura 5.26. Planta N°14 del modelo tridimensional de bloques geológico a evaluar

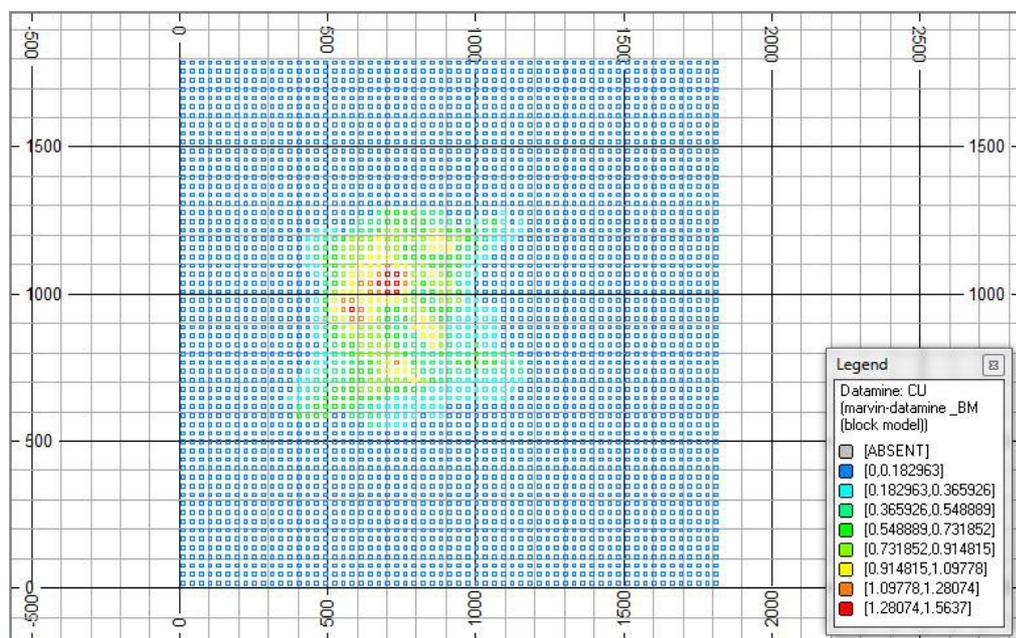


Figura 5.27. Planta N°6 del modelo tridimensional de bloques geológico a evaluar.

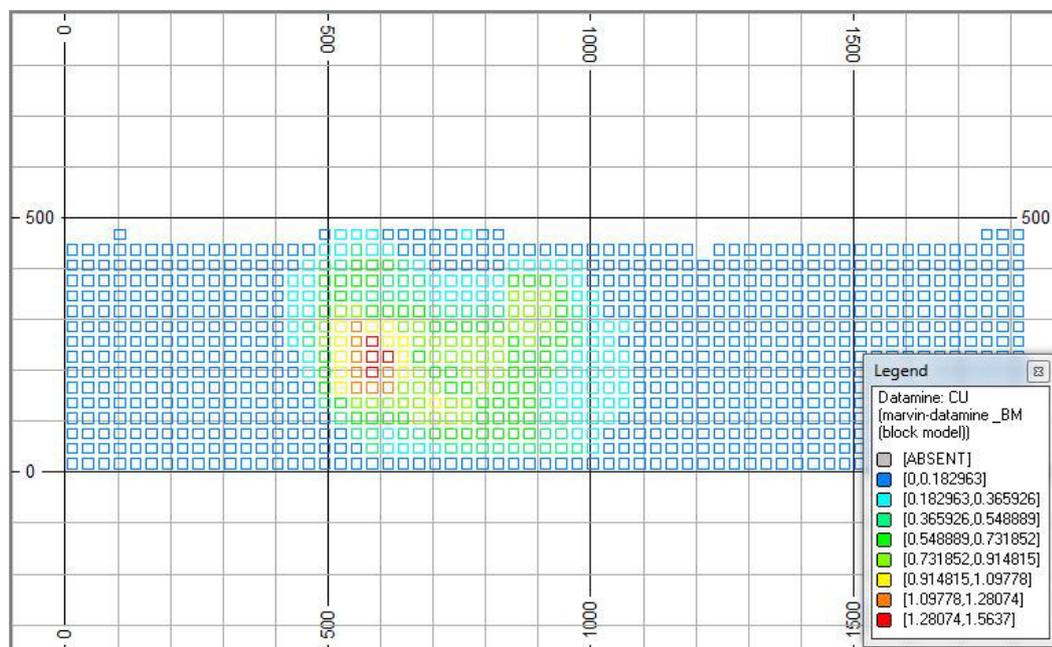


Figura 5.28. Perfil W-E del modelo tridimensional de bloques geológico a evaluar.

#### 5.4.2 Modelo Económico

A este modelo geológico se le aplicaron los siguientes parámetros económicos:

- Costo Minero de referencia: 1,8 US\$/ton
- Costo de Proceso: 2,5 US\$/ton
- Costo de venta: 0,3 US\$/lb
- Precio del Cobre: 1 US\$/lb
- Recuperación Metalúrgica: 90%
- Tasa de Descuento: 10%

Lográndose obtener un modelo de bloques económico con las siguientes características:

- Recursos de Mineral: 294.772.500 toneladas (4.367 bloques)
- Valor del Mineral: US\$ 1.167.449

### 5.4.3 Resultados en Límites de Pit, Beneficios y Valor Presente Neto

Sobre este modelo se hicieron correr los algoritmos de Lerchs y Grossmann (1965)<sup>1</sup> y el desarrollado en esta tesis, al cual se le denominó Algoritmo de Pit Económico (APE).

Este último fue implementado con el software Visual Basic y en un ambiente de planilla Excel. El computador utilizado tiene un procesador Intel Core i3 de 2,13 GHz, 2,3 GB de memoria RAM y sistema operativo de 32 bit. Aunque las características de la programación y las potencialidades del lenguaje de programación no son las mejores, entrega los resultados mínimos como para realizar las comparaciones necesarias. El resultado del programa de Pit Económico es un listado de las celdas del modelo de bloques que forman parte del Pit Económico. Este listado puede ser importado por cualquier software de diseño minero para la visualización del pit.

Otro aspecto a destacar, antes de presentar los resultados, es que para aplicar la tasa de descuento a cada bloque se debe determinar antes una tasa de producción, para así saber en cuantos bloques se deberá dividir la tasa de descuento anual efectiva de 10%. En este caso se aplicó una tasa de producción de 10.000.000 de toneladas por año, lo que implica extraer aproximadamente 149 bloques en igual período. Luego, la tasa de descuento por bloque es:

$$r_{bloque} = \left[ (1 + 0,1)^{(1/149)} - 1 \right] * 100\% = 0,06399\%$$

De acuerdo a los resultados obtenidos, se puede decir que el algoritmo de Pit Económico cumple su principal objetivo, que es generar límites de pit más ajustados o cercanos a un óptimo en valor presente neto.

---

1 Aplicando el software NPVScheduler de Datamine Software Limited

Como se esperaba (Tabla 5.4), el *Ultimate Pit* creado con el Algoritmo de Pit Económico resultó ser de menor tamaño que aquel creado por el Algoritmo de L&G. El primero contiene 216.607.500 toneladas de reservas y el segundo 220.050.000 toneladas. Esto se debe a tres razones. En primer lugar, el algoritmo no genera un límite de pit óptimo, por lo que probablemente quedaron bloques de mineral marginales sin extraer, ubicados en las paredes del rajo. En segundo lugar, el software con que se aplicó el Algoritmo de L&G considera un patrón compuesto por 9 bloques adyacentes y 8 niveles, a diferencia del Algoritmo de Pit Económico que considera un patrón de 5 bloques de adyacencia y un sistema de ecuaciones de conos invertidos de revolución. No obstante lo anterior, la selección de bloques en el fondo de los rajos es la misma con ambos algoritmos, tal como se muestra en las imágenes de la Figura 5.29 y Figura 5.30. Por estas razones, la comparación más fidedigna es entre resultados del Algoritmo de Pit Económico con tasas de descuento al 0% y al 10%.

Tabla 5.4. Resumen de resultados de los algoritmos en modelo tridimensional

ITEM	PIT L&G	PIT APE		DIFERENCIAS	
		r = 0%	r = 10%	L&G v APEr=0%	APE r=0% v r=10%
Beneficio (US\$)	661,561,752	657,365,780	656,918,231	-4,195,972	-447,549
VPN (US\$)		148,118,819	148,119,204		385
Mineral (ton)	220,050,000	216,607,500	213,030,000	-3,442,500	-3,577,500
Estéril (ton)	223,357,500	218,565,000	212,827,500	-4,792,500	-5,737,500
Material (ton)	443,407,500	435,172,500	425,857,500	-8,235,000	-9,315,000
Razón E/M	1.02	1.01	1		
Vid Útil (años)	44.32	43.52	42.59	-0.80	-0.93

La diferencia de forma entre los límites de *Ultimate Pit* entregados por ambos algoritmos (L&G y APE), produce la diferencia entre los beneficios. Dado que el *Ultimate Pit* del Algoritmo de Pit Económico es de menor tamaño, también genera un menor beneficio (US\$ 657.365.780), lo cual era esperable, por las razones ya expuestas.

Pero los resultados esperables, más importantes, tienen relación con las diferencias de tamaño, beneficio y valor presente neto entre el *Ultimate Pit* y el Pit Económico.

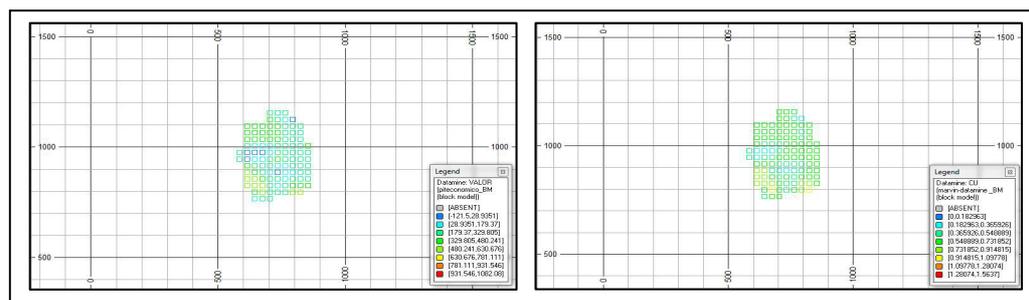


Figura 5.29. Modelos de bloques del fondo del Pit Último (planta 1) creado con el APE (Izquierda) y con el A. de L&G (Derecha)

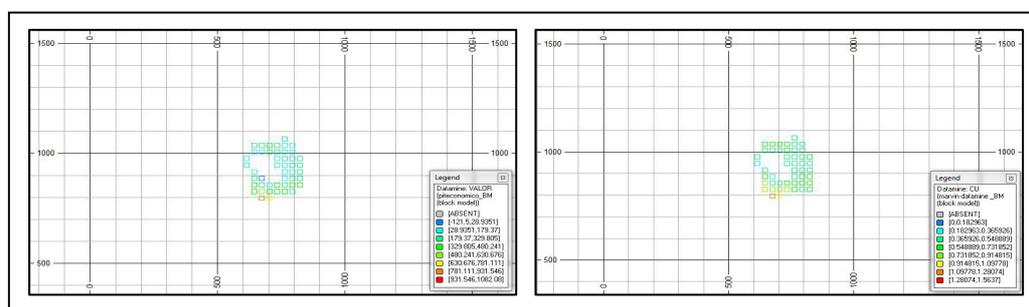


Figura 5.30. Modelos de bloques del fondo del Pit Último (Planta 2) creado con el A. de Pit Económico (Izq) y con el A. de L&G (Der)

De acuerdo al Lema 3.1 del Capítulo 3, el volumen de un pit económico es menor o igual al volumen de un pit último. En este caso, la masa del pit económico resultó ser menor en 9.315.000 toneladas, respecto del pit último. Esta diferencia, como es de suponer, no solamente es en términos de materiales estériles, sino que también hay diferencia en reservas de mineral. En efecto, las reservas del pit económico son de 213.030.000 toneladas con una ley media de 0,6419% Cu,

mientras que las del pit último son 216.607.500 toneladas con una ley media de 0,6409% Cu.

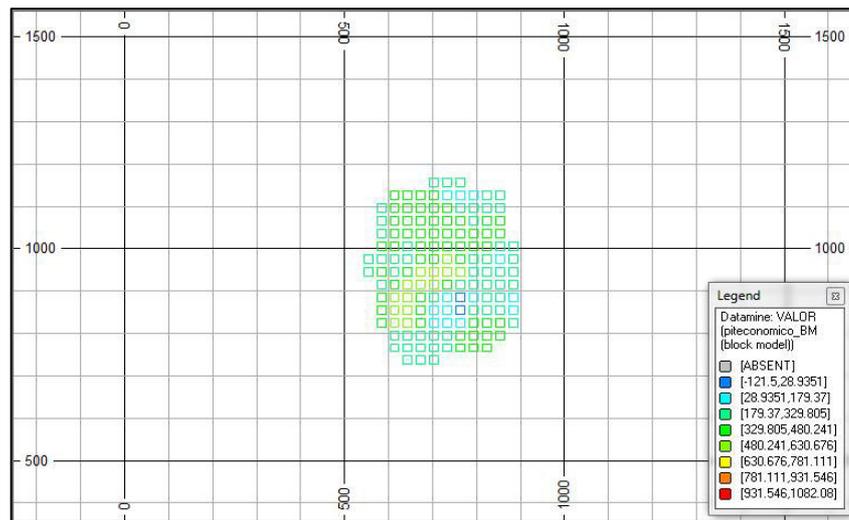


Figura 5.31. Planta del nivel 13 del Pit Económico

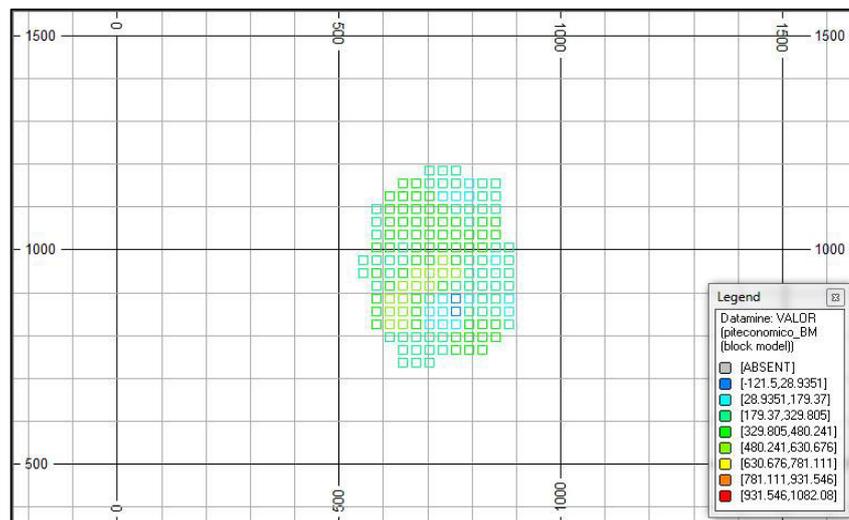


Figura 5.32. Planta del nivel 13 del Pit Último

Esta vez, las diferencias en reservas se manifiestan en el fondo de los respectivos rajos. Tal como se observa en el plano del nivel 2 de ambos modelos de bloque (Figuras 5.31 y 5.32), existe una diferencia en el sector norte de los rajos. Estos bloques, en conjunto con otros bloques de valor positivo que se ubican en niveles superiores del pit último, cubren el costo de los bloques de estéril que forman parte de sus árboles cónicos. Sin embargo, cuando se aplica una tasa de descuento y se asume una secuencia de extracción, ya no lo hacen.

Por otro lado, producto de esta diferencia de masa, equivalente a 138 bloques, se produce una diferencia en el beneficio total que aporta cada rajo. Como es lógico, el rajo de pit económico al tener 138 bloques menos entre mineral y estéril, su beneficio es menor que el del pit último en US\$ 447.549. Sin embargo, en términos de valor presente neto, el pit económico tiene US\$ 385 más de utilidades que el pit último. La diferencia es pequeña porque se trata de bloques que serán extraídos en 42 años más.

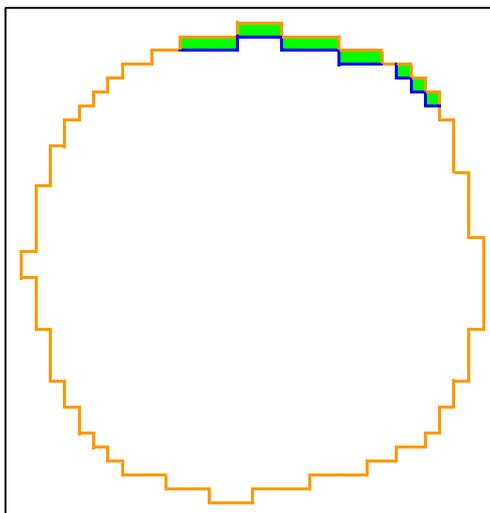


Figura 5.33. Diferencia de límites entre pit económico y pit último en planta del Nivel 14.

Cabe destacar que la diferencia entre el límite de *Ultimate Pit* y el límite de Pit Económico, depende del precio de evaluación, de los costos, pero principalmente de la ley del mineral. Claramente, a medida que disminuye la ley media del yacimiento, aumenta el tamaño de la diferencia entre ambos límites.

Otro aspecto importante de considerar, es la vida útil de la mina. Al comparar las vidas útiles de ambos pit, es posible observar que el Pit Económico tiene 0,93 años de vida útil menos que el *Ultimate Pit*. Por lo tanto, se puede decir que con el Pit Económico se podría obtener un VPN de US\$ 148.119.204 en 42,59 años de operación, mientras que si se implementa el *Ultimate Pit* se podría obtener un VPN de US\$ 148.118.819 en 43,52 años de operación. Si bien el yacimiento es de tamaño mediano, el resultado global, en términos de ahorro económico y tiempo, es bastante importante.

#### **5.4.4 Secuencia de Explotación**

Un aspecto importante de los resultados obtenidos, es la creación de una secuencia óptima de extracción de pits anidados. La Figura 5.34 muestra un gráfico de las curvas de beneficio y valor presente neto para el *Ultimate Pit* y el Pit Económico. Las curvas relacionadas al *Ultimate Pit* nacen en el origen y siempre son crecientes; mientras que aquellas asociadas al Pit Económico parten en el origen, pero primero descienden y luego crecen en forma más suave.

En varios casos de yacimientos de tamaño mediano, leyes bajas y/o lejanos de la superficie terrestre, al aplicar Lerchs y Grossmann el primer pit anidado contiene un gran porcentaje de las reservas. Cuando esto sucede, se genera una curva de beneficio como la de este ejemplo. Si bien, esto no genera un problema para la determinación del límite de pit, si afecta fuertemente la creación de una secuencia de explotación adecuada, pues no es posible determinar claramente donde se debe iniciar la explotación.

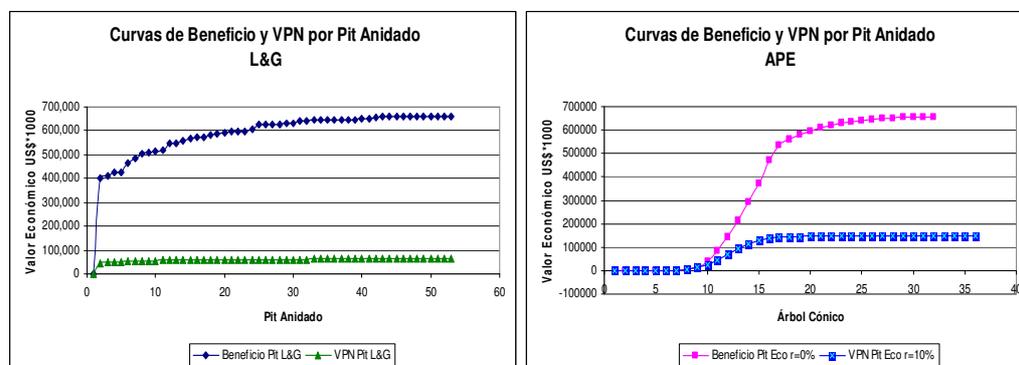


Figura 5.34. Gráfico de beneficio y VPN por pit anidado

El Algoritmo de Pit Económico, permite encontrar una secuencia de pits anidados, desde la superficie hasta el fondo, nivel por nivel. Es decir, se pueden crear pits anidados de valor negativo. Esta es la razón de porqué las curvas para beneficio y VPN generadas por el Algoritmo de Pit Económico inicialmente son negativas y luego crecen suavemente hasta alcanzar el máximo valor presente neto. También se debe considerar que las reservas se reparten mejor en cada pit anidado del Pit Económico, al contrario de lo que sucede con L&G, cuyo segundo pit anidado contiene prácticamente la mitad de las reservas. La Figura 5.35 muestra la secuencia de pits anidados en una planta del nivel 14.

La secuencia de valores de pits anidados creados con el algoritmo de Pit Económico, para una tasa de descuento efectiva de 10% anual y una tasa de producción de 10 millones de toneladas, se muestra en la Tabla 5.5.

La mayor parte de la reservas se encuentran entre los pit anidados 10 y 16. Sin embargo, a partir del vigésimo quinto pit anidado, el aporte de cada uno de ellos es muy menor.

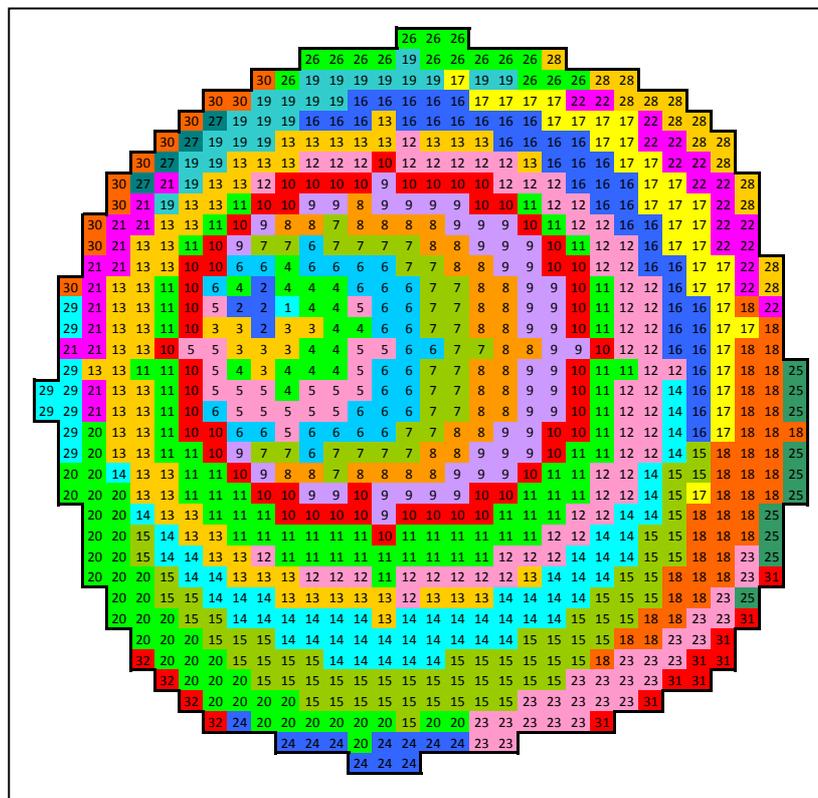


Figura 5.35. Secuencia de pits anidados en el nivel 14.

En el anexo, se presentan las plantas y algunos perfiles de los pit creados con el algoritmo de Pit Económico.

Tabla 5.5. Valor de pit anidados en el Pit Económico - Modelo Tridimensional.

Pit	VPN Acum	VPN Parcial	Pit	VPN Acum	VPN Parcial	Pit	VPN Acum	VPN Parcial
1	-5,869	-5,869	13	92,871,016	24,049,245	25	147,504,689	98,682
2	-105,385	-99,515	14	112,719,018	19,848,002	26	147,600,010	95,321
3	-525,932	-420,548	15	127,021,880	14,302,863	27	147,691,400	91,390
4	-1,245,408	-719,475	16	138,950,894	11,929,013	28	147,768,684	77,284
5	-1,796,667	-551,259	17	143,675,409	4,724,515	29	147,828,241	59,558
6	-2,254,071	-457,404	18	145,104,529	1,429,120	30	147,885,034	56,793
7	-1,007,144	1,246,927	19	145,766,567	662,039	31	147,934,556	49,521
8	3,635,552	4,642,695	20	146,277,688	511,121	32	147,979,823	45,268
9	11,930,820	8,295,269	21	146,649,984	372,295	33	148,019,899	40,075
10	24,731,313	12,800,493	22	146,983,528	333,544	34	148,054,991	35,092
11	44,513,452	19,782,139	23	147,210,259	226,730	35	148,088,886	33,895
12	68,821,771	24,308,319	24	147,406,007	195,748	36	148,119,204	30,318

## 5.5 Anchos de Expansión

Otra ventaja del Algoritmo de Pit Económico, por sobre el Algoritmo de Lerchs y Grossmann (1965), es que como utiliza un cono invertido para la búsqueda de los pit anidados, es posible especificar un ancho de pit anidado, convirtiéndolo en una expansión. De esta forma, aplicando el mismo algoritmo matemático, es posible determinar secuencias y límites de pit para diferentes anchos de expansión. Seleccionando aquel ancho que genera el valor presente neto de máximo.

El ancho de expansión es una función de las dimensiones de los equipos de carguío y transporte minero, de la relación lastre/mineral y del tiempo que demore la explotación de sí misma, entre otros. De estas tres variables, las dos últimas deben ser evaluadas una vez que se ha determinado el tamaño de la expansión. Sin embargo, con los equipos de carguío y transporte no sucede lo mismo. Para evaluar un ancho de expansión, obligadamente se deben considerar previamente que equipos podrían ser utilizados durante la operación, pues a medida que aumenta el tamaño de estos equipos, aumenta el tamaño de la expansión. Esto implica que cada tamaño de expansión tiene asociado un costo de operación específico. Esta relación debe establecerse antes de iniciar el análisis de ancho de expansión óptimo.

Antes de continuar, se debe aclarar que el método para realizar este análisis no se incorporó en la programación del algoritmo, por lo que no es posible probarlo en un modelo tridimensional. Sin embargo, se puede mostrar la utilidad de esta aplicación a partir del ejemplo de la Figura 5.36, el cual fue descrito en la publicación “Optimising open pit mine scheduling taking into consideration time value of money and mining restrictions” (Latorre y Golosinski, 2012) .

La Figura 5.36 muestra un modelo de bloques bidimensional, al cual se le ha determinado el contorno de pit económico. Sobre este modelo se evaluaron 5

anchos de expansión, cada uno de los cuales tiene asociado un costo operacional distinto. Las expansiones y costos analizados son los de la Tabla 5.6.

Tabla 5.6. Anchos de expansión a evaluar en un proceso de optimización de pit

Ancho de Expansión (Nºbloques)	Costo de Operación (US\$/ton)
2	1.9
3	1.65
4	1.45
5	1.55
6	1.7

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
1	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5
2	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5
3	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	2,639	24,95	11,57	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-1,82	7,102	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5
4	-4.5	-4.5	-4.5	20,49	11,57	20,49	24,95	16,03	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-1,82	7,102	29,42	11,57	2,639	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5
5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	24,95	29,42	16,03	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	2,639	38,34	-4.5	-4.5	11,57	7,102	16,03	29,42	33,88	29,42	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5
6	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	29,42	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	20,49	7,102	51,73	42,81	30,49	24,95	47,27	20,49	24,95	38,34	42,81	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5
7	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	16,03	24,95	11,57	47,27	56,2	38,34	38,34	42,81	38,34	29,42	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5
8	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	20,49	24,95	29,42	16,03	24,95	38,34	47,27	51,73	56,2	38,34	24,95	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5
9	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	11,57	7,102	29,42	42,81	33,88	56,2	-4.5	-4.5	60,66	42,81	29,42	7,102	7,102	2,639	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5
10	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-1,82	2,639	7,102	-4.5	24,95	51,73	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-1,82	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5	-4.5

Figura 5.36. Modelo de Bloques Económico inicial, con límite de pit económico, para evaluación de ancho de fase óptima.

Al aplicar el algoritmo de Pit Económico con estos anchos de expansión y aplicando los respectivos costo de operación en la función de beneficio, se generan secuencias de expansión, cada una de las cuales tiene un valor presente neto distinto. La Figura 5.37 muestra un gráfico con estos valores; mientras que las Figuras 5.38, 5.39 y 5.40 muestran las secuencias resultantes para las expansiones de 3, 4 y 5 bloques de ancho. Para las expansiones de sobre 3 bloques de ancho, se ha considerado un ancho mínimo de fondo de 3 bloques.

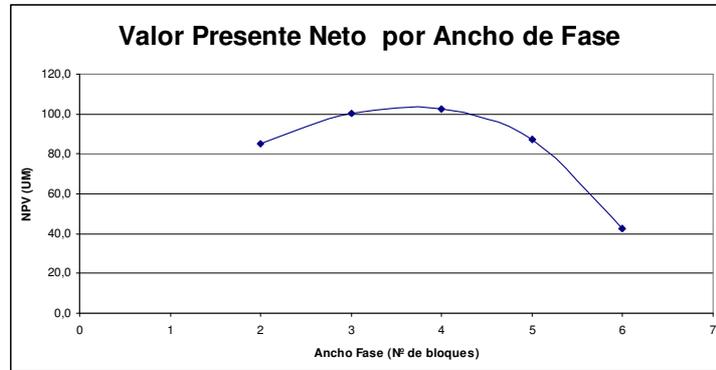


Figura 5.37. Valor presente neto por ancho de fases

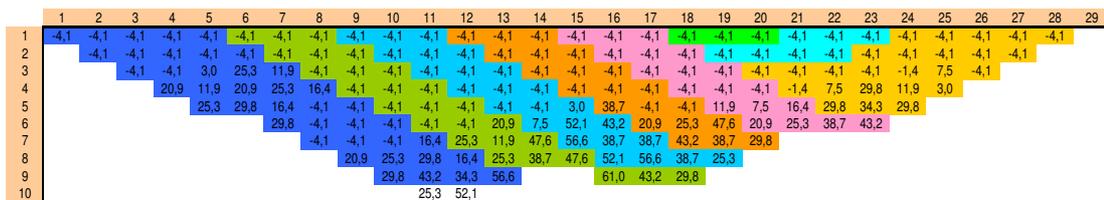


Figura 5.38. Secuencia y pit económico para una expansión de 3 bloques de ancho

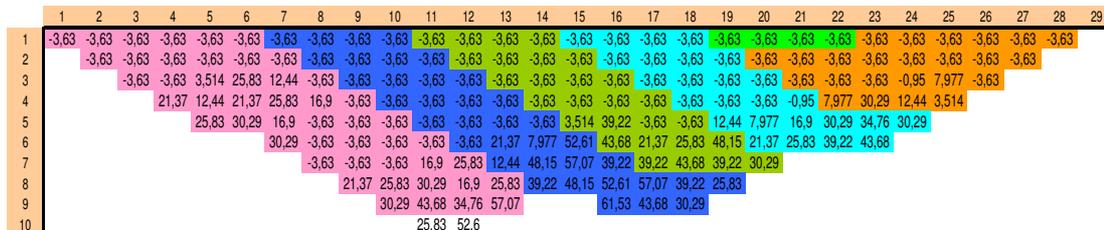


Figura 5.39. Secuencia y pit económico para una expansión de 4 bloques de ancho

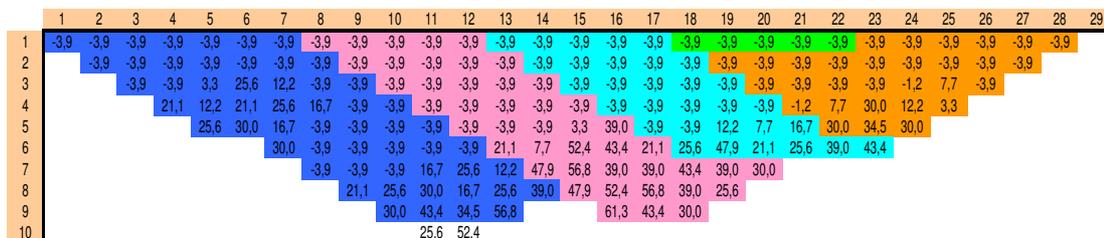


Figura 5.40. Secuencia y pit económico para una expansión de 5 bloques de ancho

La mejor secuencia es aquella que considera un ancho de expansión de 4 bloques, la cual tiene un valor presente de US\$102,3 millones.

### 5.6 Eficiencia y Beneficios de la Metodología

La metodología considera tres secciones importantes: el cálculo del modelo económico, la valoración de árboles cónicos óptimos y el procedimiento heurístico para el ajuste de los árboles. De estas tres secciones, la más compleja es la valoración de árboles cónicos óptimos, pues considera la selección de los nodos que componen cada uno de los árboles cónicos marginales parciales, para cada nodo base del grafo.

En general, la eficiencia del algoritmo computacional depende de la habilidad del programador y de la complejidad del algoritmo mismo. Si bien, para efectos de esta tesis no se realizó un análisis exhaustivo de la eficiencia del algoritmo computacional, claramente la complejidad en tiempo es del tipo cuadrática ( $O(n^2)$ ). Esta conjetura se fundamenta en dos aspectos. En un análisis a priori, se puede observar que para determinar los nodos que forman parte de un árbol cónico marginal parcial y valorarlos (uno de los pasos más complejos del algoritmo), se debe utilizar reiteradamente una cadena de instrucciones anidadas: FOR – IF – ELSEIF y comparaciones que involucran funciones cuadráticas. Mientras que en un análisis a posteriori, el algoritmo que trabaja sobre un modelo tridimensional ha generado los siguientes tiempos de corrida:

Tabla 5.7. Tiempo de corrida por tamaño de modelos de bloques.

Nº de nodos	Tiempo (hrs)
9000	0.16
62200	5.5
540000	135

Desde el punto de vista de los beneficios aportados por esta tesis, la metodología permite encontrar el límite de pit que produce un valor presente neto muy cercano al máximo, genera una secuencia de explotación óptima, nivel por nivel, desde la superficie hasta alcanzar el límite final de pit, y permite evaluar diferentes tamaños de fases de explotación. Esto no lo hace ninguno de los algoritmos actuales, ni aquellos desarrollados en proyectos de investigación. El único problema, es que producto de la incorporación de un procedimiento heurístico, no es posible demostrar la optimalidad de la metodología. Sin embargo, las pruebas sobre modelos bidimensionales y tridimensionales, indican que el límite se acerca bastante al óptimo.

## 6. CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS

### 6.1 Conclusiones

La determinación del tamaño o límite óptimo de un Open Pit, es una de las etapas más importantes de la planificación minera, debido a que esta es una de las variables que influye en la definición de la tasa de producción de la mina, el tamaño de la planta de procesos y la rentabilidad global del negocio minero.

El problema de encontrar el límite de pit último ha sido largamente estudiado por varios investigadores en las últimas cuatro décadas; y ha sido resuelto eficientemente por Lerchs y Grossmann en 1965. Sin embargo, hasta el día de hoy aún no se ha resuelto el problema de encontrar el límite de pit económico que maximiza un VPN.

El modelo descrito en esta tesis, basado en la programación dinámica y procedimientos de ajuste heurísticos, aproxima una solución discreta al problema de límites de pit económico que maximizan el valor presente neto del proyecto de una mina explotada por el método Open Pit.

Para aplicar este modelo matemático, se requiere que el recurso natural o cuerpo mineralizado esté discretizado en una matriz de celdas o bloques dispuestos ordenadamente en lo que comúnmente se denomina Modelo de Bloques Geológico. Sobre este modelo se aplica una función de beneficio, en la cual pueden variar determinística o estocásticamente cualquiera de sus variables: precio, costos, recuperaciones, entre otras.

El problema que se desea resolver tiene las siguientes características:

- a) Se trata de un proceso de decisión secuencial, el cual puede dividirse en etapas.
- b) En cada etapa debe tomarse una decisión sobre el siguiente volumen de mineral a extraer.

- c) La variable de decisión es el valor presente neto.
- d) La función a evaluar en cada momento es del tipo recursiva hacia adelante.

Dada estas características, se tomó la decisión de aplicar la técnica de programación dinámica para encontrar una secuencia de explotación de pits anidados o árboles cónicos. Al extraer todos los bloques que aportan valor al proyecto minero, se tendrá como resultado final una secuencia de explotación y el límite de pit económico. No obstante lo anterior, esto no sucede aplicando programación dinámica pura, pues esta técnica:

- a) No discrimina entre valores positivos y negativos para cumplir su objetivo de maximización. Lamentablemente, no pueden existir bloques de valor negativo en los límites inferiores del rajo.
- b) Puede seleccionar bloques positivos cuya sobrecarga adyacente sea negativa y mayor a la masa positiva del bloque evaluado.

Por estas razones, se requiere de un procedimiento heurístico que ajuste las decisiones determinadas por la programación dinámica. Este procedimiento permite seleccionar aquellos bloques o nodos-base que cumplan con las siguientes características principales:

- a) Tienen valor de beneficio positivo
- b) Soportan el costo de extracción de los bloques adyacentes
- c) El árbol cónico que se ubica sobre sí, aporta el mayor valor presente neto por bloque extraído.

Así, se obtiene una secuencia de explotación que se aproxima a una solución óptima.

En términos de límites de pit, la solución es subóptima si solo se seleccionan los nodos base fuertes, pues los semifuertes tienen asociados árboles cónicos marginales que aportan beneficio al *Ultimate Pit* pero que por lo general, no aportan valor al Valor Presente Neto del Pit Económico.

No obstante lo anterior, si de todas formas se deseara extraer esos bloques marginales, el Algoritmo de Pit Económico lo permite, pues los pasos se pueden repetir  $N$  veces hasta que ya no hayan más nodos-base semifuertes. Incluso se puede continuar hasta que ya no hayan más bloques de mineral, lo cual implica extraer todo el recurso. Luego, se deja al usuario que seleccione el pit anidado que pasará a ser el límite de pit económico. En este contexto, el Pit Económico de mayor valor si es el pit óptimo. Sin embargo, el llegar a determinar este Pit Económico Óptimo tiene un inconveniente importante en términos de tiempo de computación. En efecto, dejar que el algoritmo continúe su búsqueda de subárboles cónicos más allá del último nodo-base semifuerte, implica que el algoritmo se demorará un tiempo exageradamente grande para encontrar el óptimo. Aproximadamente, 5 horas para un modelo de 70.000 bloques.

Como el algoritmo programado para esta tesis solo corre hasta alcanzar el pit económico compuesto por nodos-base fuertes y semifuertes, los resultados en términos de límites de pit son subóptimos. Sin embargo, están tan cercanos al óptimo, que se podría decir que las diferencias entre el *Ultimate Pit* creado con el algoritmo de Lerchs y Grossmann (1965) y aquel creado con el algoritmo de Pit Económico, son casi marginales. Para el caso del ejemplo tridimensional presentado en el Capítulo 5, el *Ultimate Pit* de L&G tiene un 1,56% más de bloques de mineral y un 0,63% más de beneficio que el APE.

En todos los casos bidimensionales presentados en el Capítulo 5, el método del Algoritmo de Pit Económico encuentra exactamente el pit último óptimo. Mientras que en el caso del modelo tridimensional, por la forma en como se programó el algoritmo, se da una diferencia de 122 bloques de material, es decir, una diferencia del 1,86% respecto del pit último creado con el Algoritmo de L&G.

Pero los resultados más importantes tienen relación con las diferencia entre *Ultimate Pit* y Pit Económico. Desde este punto de vista, tanto los casos

bidimensionales como el tridimensional ejemplifican las hipótesis del Lema 3.1, el Teorema 3.1 y el Corolario 3.1 del Capítulo 3. Es decir, el volumen de un Pit Económico, el cual es único, es igual o menor que el de un *Ultimate Pit*; y adicionalmente, el valor presente neto de un Pit Económico es mayor o igual que el de un *Ultimate Pit*.

De acuerdo a los resultados del caso tridimensional, las reservas del Pit Económico son 3.577.500 toneladas menores que las del *Ultimate Pit* y tienen una ley levemente superior. Por otro lado, el beneficio generado por el Pit Económico es US\$447.549 menor que el del *Ultimate Pit*, pero la vida útil del Pit Económico es 0,93 años menor y es levemente superior en valor presente neto (US\$385 más). La razón de que la diferencia en valor presente sea tan pequeña, se debe a que se trata de bloques marginales que serán extraídos hacia el final de la vida útil de la mina, casi en 43 años más. Por lo tanto, sus pesos en valor presente neto son muy bajos.

En resumen, se puede concluir que efectivamente, bajo ciertas condiciones, se genera una diferencia de límites de pit al cambiar la variable a maximizar de beneficio a valor presente neto. En general, las principales condiciones que se deben dar para que se produzca esta diferencia, ya sea en términos físicos como económicos, son:

- a) El horizonte de evaluación debe ser extenso.
- b) El yacimiento debe ser de baja ley media o, en su defecto, ubicarse a gran profundidad, de tal forma que en sus límites el beneficio esté muy cercano a cero.
- c) Atravesar por ciclos económicos recesivos o en que los precios promedios y las tasas de descuento son bajos.
- d) Empresas con estructuras de costos altos.

Si se dan algunas o todas estas condiciones, los algoritmos que maximizan beneficio no generan un buen resultado en términos de límites de pit, y se hace necesario encontrar aquel límite que maximiza el valor presente neto del negocio.

Dado que estas son las condiciones actuales y futuras de la mayoría de las empresas mineras de mediano a gran tamaño, se puede concluir que este algoritmo, así como las futuras investigaciones sobre este tema, más que nunca toman una mayor relevancia para la optimización del negocio minero.

## **6.2 Desarrollos Futuros**

Los temas a investigar en el ámbito de la optimización de límites de pit no están agotados. Hay mucho aún por crear y optimizar. En lo relacionado al tema de esta tesis, se pueden investigar y probar otras técnicas de optimización para resolver el problema de pit económico. Además, falta por incorporar una mayor cantidad de variables de decisión, y considerar la volatilidad de algunas variables de estado como el precio, los costos, las leyes del yacimiento, entre otros.

Finalmente, se puede avanzar un paso más en el proceso de planificación, e investigar a cerca de cómo establecer un programa de producción que maximice valor presente neto y que permita definir al mismo tiempo el límite de la explotación de una mina Open Pit.

## BIBLIOGRAFÍA

Alford G. G. and Whittle, J. (1986). Application of Lerchs-Grossmann Pit Optimisation to the Design of Open Pit Mines, Open Pit Mining Conference, Calgary, Canada, pp. 201 – 207.

Askari-Nasab, H. and Awuah-Offei, (2009) Open pit optimisation using discounted economic block values, *Transactions of the Institute of Mining and Metallurgy*, Section A: Mining Technology, vol 118, pp 1- 12

Askari-Nasab, H., Frimpong, S. and Szymanski, J. (2008). Investigating continuous time open pit dynamics. *The Journal of The Southern African Institute of Mining and Metallurgy*. Vol. 108, 61 – 71.

Bellman R. (1957). *Dynamic Programming*. Princeton University Press. New Jersey.

Bley, A., Boland, N., Fricke, C. and Froyland, G. (2010). A strengthened formulation and cutting planes for the open pit mine production scheduling problem, *Computer & Operations Research Journal* 37, (2010), pp. 1641 – 1647.

Boland, N., Dumitrescu, I., Froyland, G. and Gleixner, A. M. (2009). LP-based disaggregation approaches to solving the open pit mining production scheduling problem with block processing selectivity, *Computers & Operations Research* 36, pp. 1064 – 1089.

Caccetta, L. and Giannini, L. M. (1988). An application of discrete mathematics in the design of an open pit mine, *Discrete Applied Mathematics*, v.21 n.1, pp. 1 – 19.

Caccetta, L. and Hill, S. P. (2003) An application of branch and cut to open pit mine scheduling, *J. Global Optimizat.*, 27, pp. 349–365.

Dagdelen, K. y Johnson, T.B. (1986) Optimum open pit production scheduling by lagrangian parameterization, *Proc. 19<sup>th</sup> APCOM Symposium AIME*, pp. 127 – 142.

Dowd P.A. and Onur A.H. (1992), Optimising open pit design and sequencing. *Proceeding of APCOM*, Tucson, Arizona, pp. 411 – 422.

Frimpong S. and Achireko P.K. (1997). The MCS/MFNN algorithm for open pit optimization, *International Journal of Mining, Reclamation and Environment*, 11:1, pp. 45 – 52.

Giannini, L. M. (1990). Thesis: Optimum design of open pit mines. *Curtin University of technology*.

Golosinski, Tad S. and Bush, T. (2000). A comparison of open pit design and scheduling techniques. *International Journal of Mining, Reclamation and Environment*, 14:1, 53 – 61.

Halatchev, R. (2005) A model of discounted profit variation of open pit production sequencing optimization. *Proceedings of the 32nd International Symposium on Applications of Computers and Operations Research in the Mineral Industry*. Littleton, USA, SME, pp 315–323.

Khalokakaie R, Dowd P.A. and Fowell R.J. (2000). Lerchs-Grossmann algorithm with variable slope angle. *Mining Technology: IMM Transactions section A*, Vol 109, N° 2, August, pp. 77-85.

Khodayari, A. (2013). A new algorithm for determining ultimate pit limits based on network optimization. *Int. J. Min. & Geo-Eng.* Vol 47, No. 2, Dec, pp. 129-137.

Latorre, E.L and Golosinski, T.S. (2011), Definition of economic pit limits taking in consideration time value of money. *CIM Journal*, volume 2, number 3, pp. 56 – 68.

Latorre, E.L and Golosinski, T.S. (2012), Optimising open pit mine scheduling taking into consideration time value of money and mining restrictions. *International Journal of Mining, Reclamation and Environment*, Vol. 27, Number 3, 156 - 165.

Lemieux M. (1979). Moving cone optimizing algorithm . *In Weiss A. ed. Computer methods for the 80s in the mineral industry* (New York: AIME), pp. 329 – 345.

Lerchs H. and Grossmann I.F. (1965). Optimum design for open pit mines. *CIM Bulletin* 58, pp. 47 – 54.

Lipkewich, M. P. and Borgman, L. (1969) Two and three dimensional pit design optimization techniques. *A Decade of Digital Computing in the Mineral Industry*, A. Weiss, ed., AIME, New York, pp. 505 – 523.

Meyer M. (1969). Applying linear programming to the design of ultimate pit limits. *Management Science*, Vol. 16, N° 2, Application Series, October, pp. B121-B135.

NPV Scheduler versión 4.16.2299.1 (2008). *Datamine Corp. Ltd.*

Picard J. (1976). Maximal closure of a graph and applications to combinatorial problems. *Management Science*, Vol. 22, N° 11, July, pp. 1268-1272.

Sevim H. and Lei D. (1998). The problem of production planning in open pit mines. *INFOR*, Vol. 33, N° 1/2, 1998, pp. 1-12.

Tolwinski B. and Underwood R. (1992). An algorithm to estimate the optimal evolution of an open pit mine. *Proceeding of APCOM*, Tucson, Arizona, pp. 399 – 405.

Tolwinski B. and Underwood R. (1996). An scheduling algorithm for open pit mines. *IMA Journal of Mathematics Applied in Business & Industry*, pp. 247-240.

Tolwinski B. and Golosinski T.S. (1995). Long Term Open Pit Scheduler. 4<sup>th</sup> *International Symposium on Mine Planning and Equipment Selection*, Calgary, Canada, October 31 -November 3, pp. 265-270.

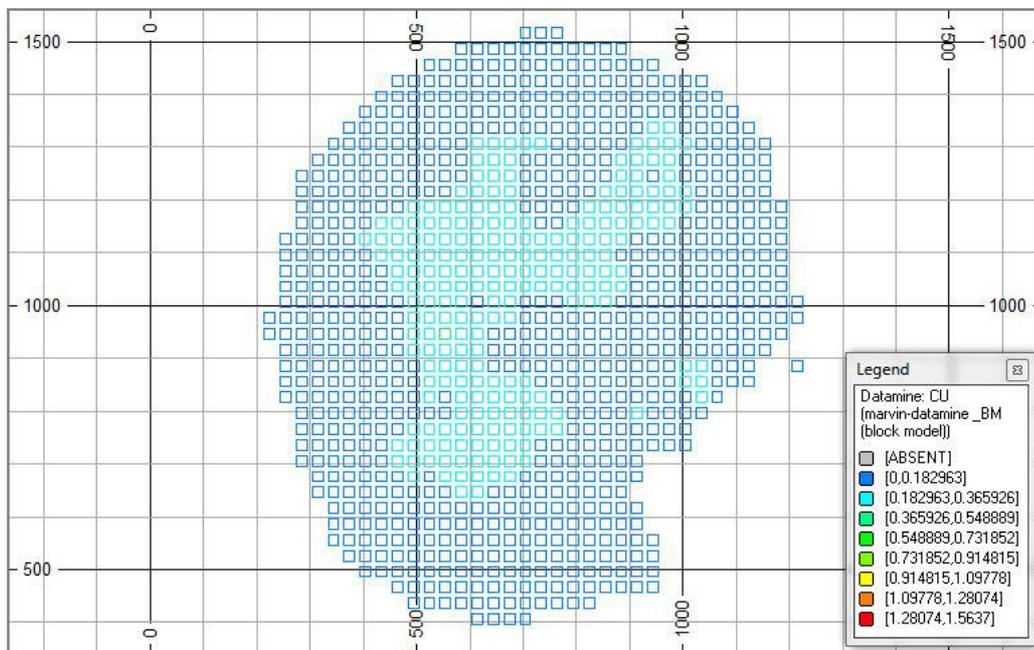
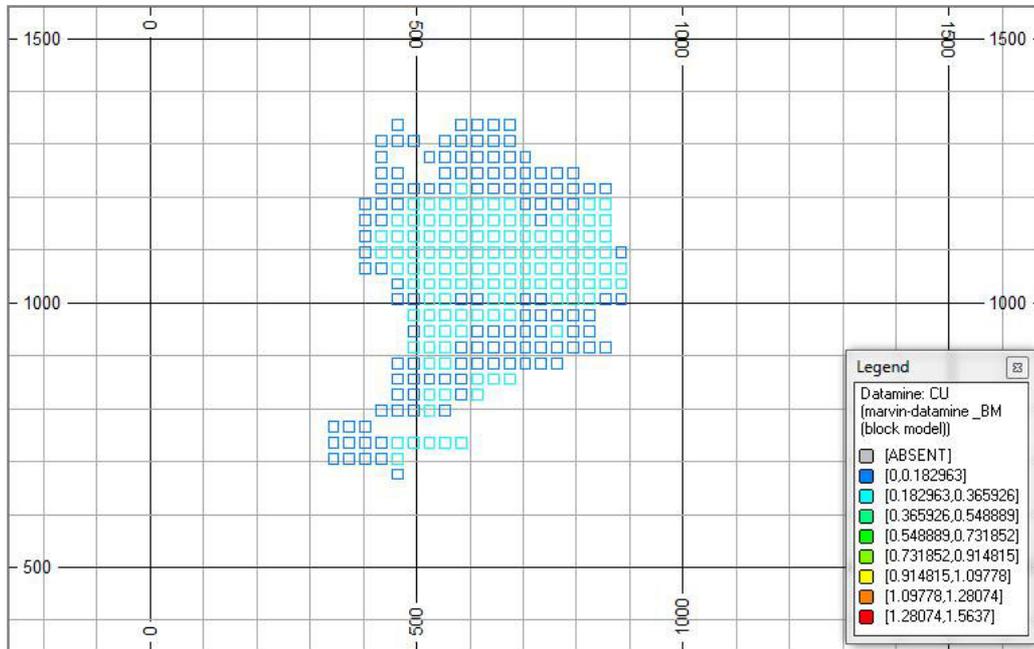
Whittle, J. (1999) A decade of open pit mine planning and optimization – the craft of turning algorithms into packages, *APCOM'99 Computer Applications in the Minerals Industries 28<sup>th</sup> International Symposium*.

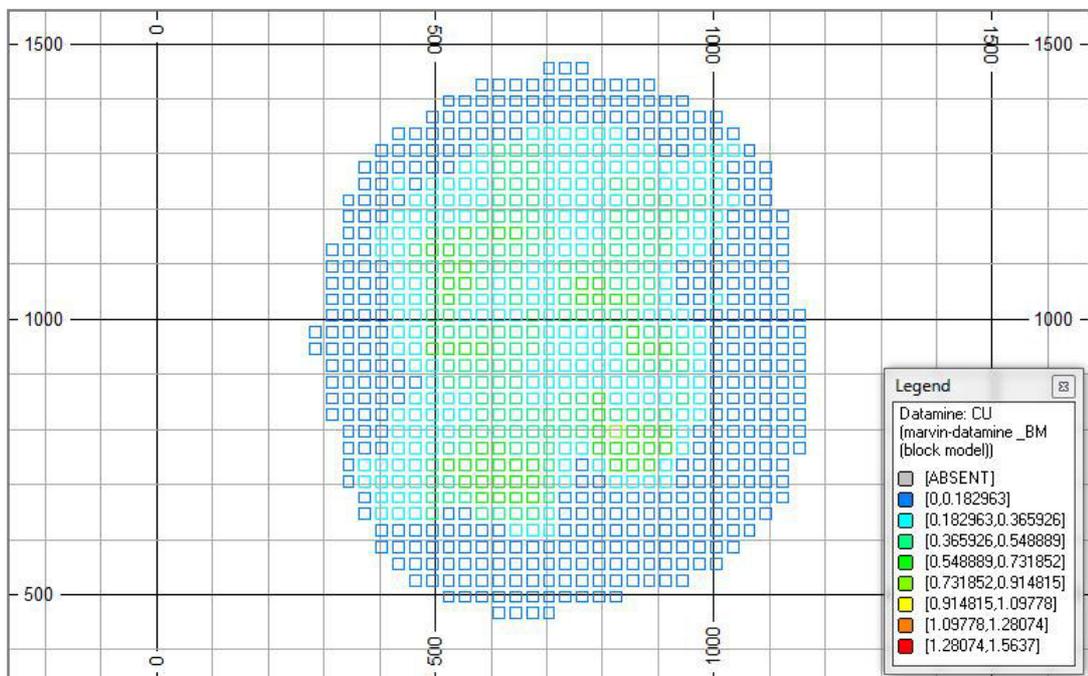
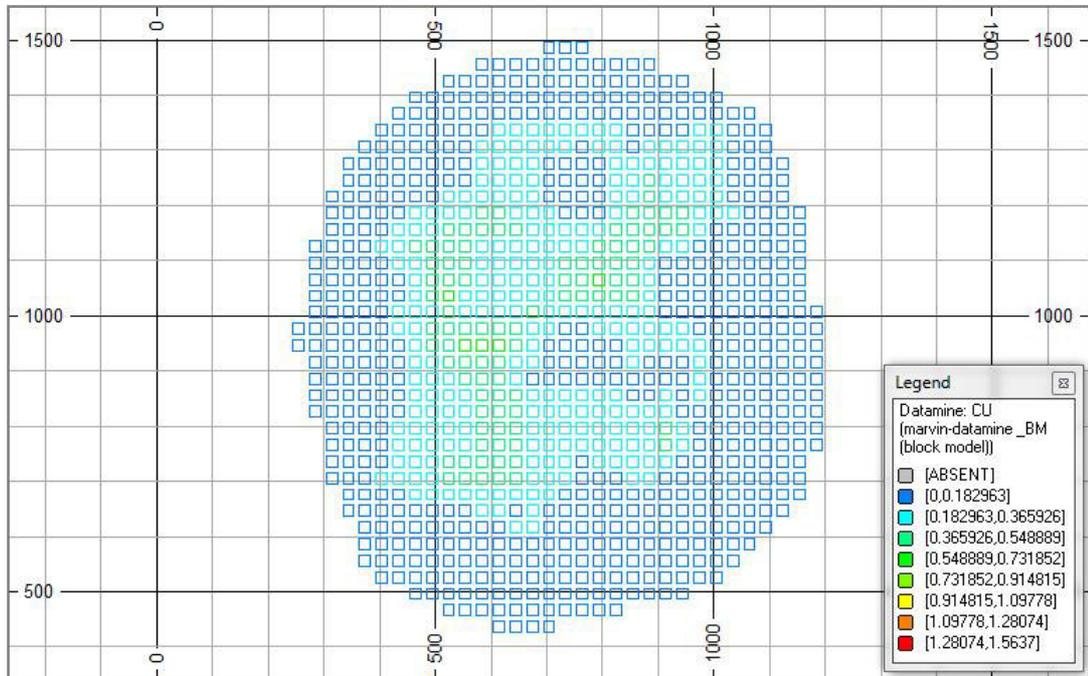
Whittle, J. (2006) Strategic Mine planning 4.0 Help, *Gemcom Software International Inc.*

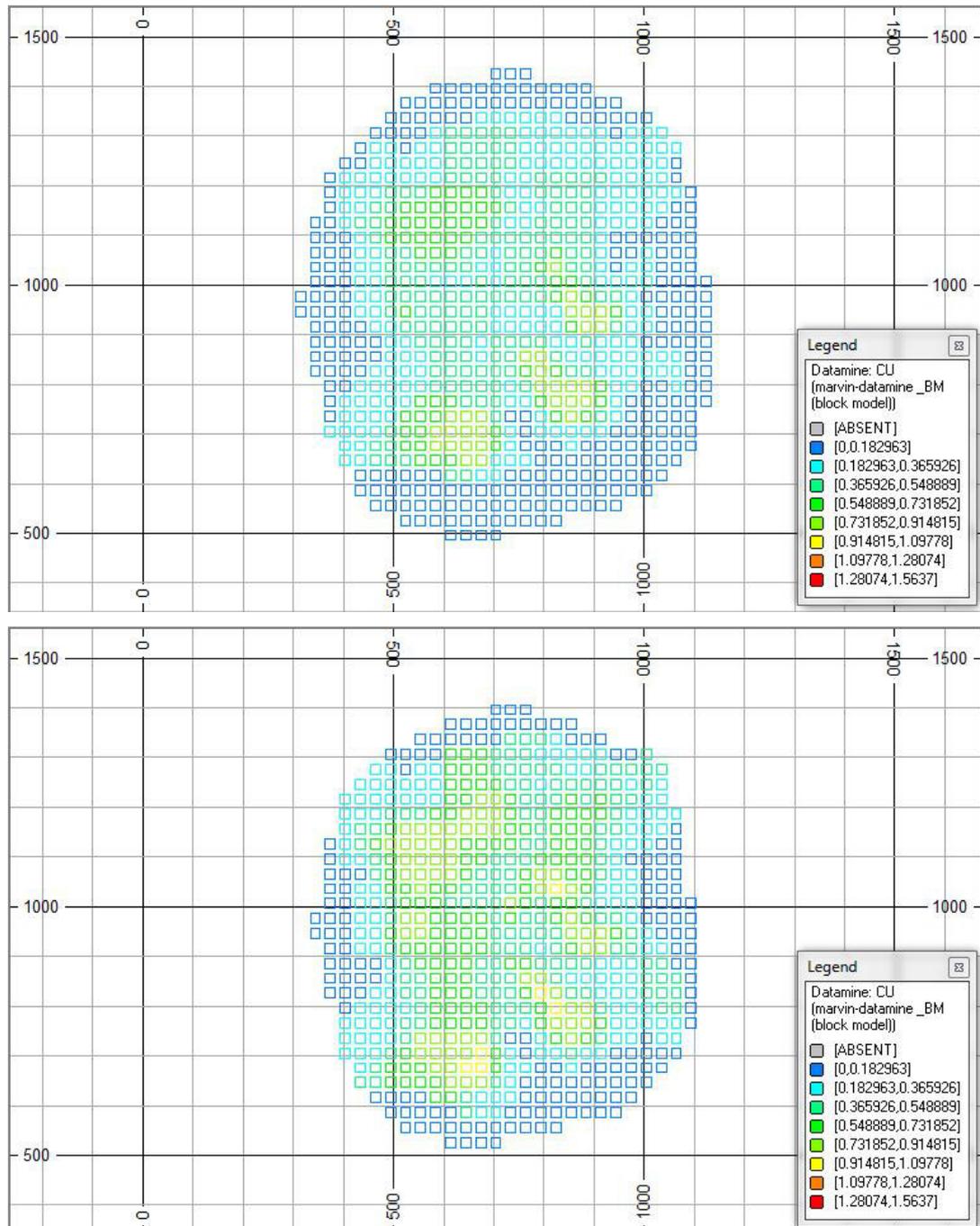
Zhao Y. and Kim Y.C. (1992). A new optimum pit limit design algorithm. *Proceeding of APCOM*, Tucson, Arizona, pp. 423 – 434.

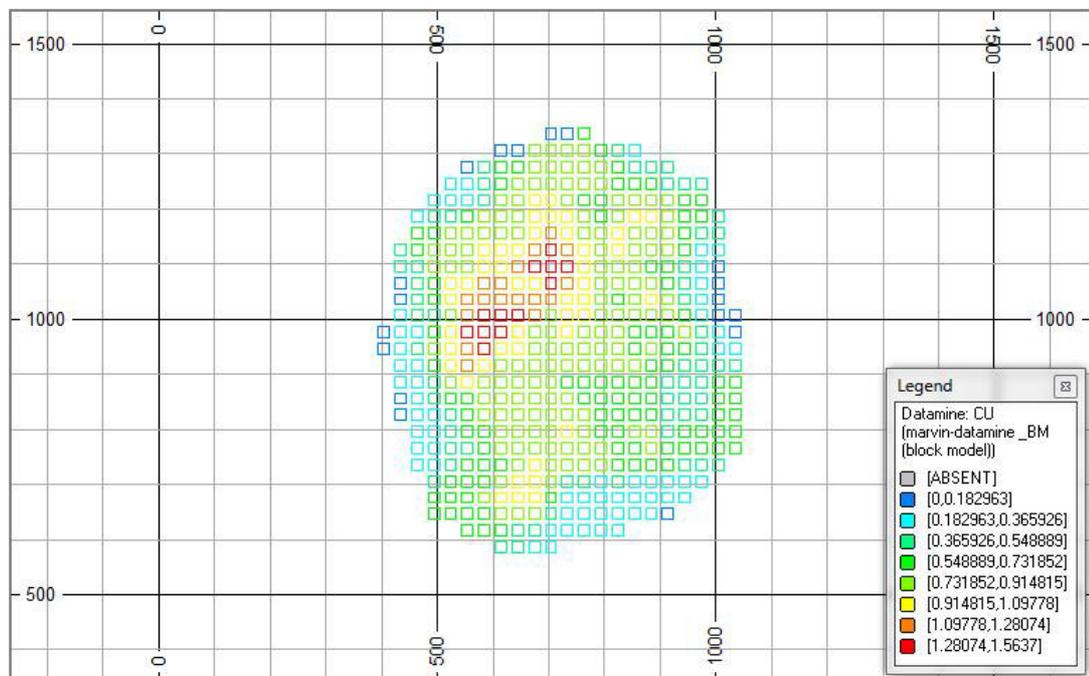
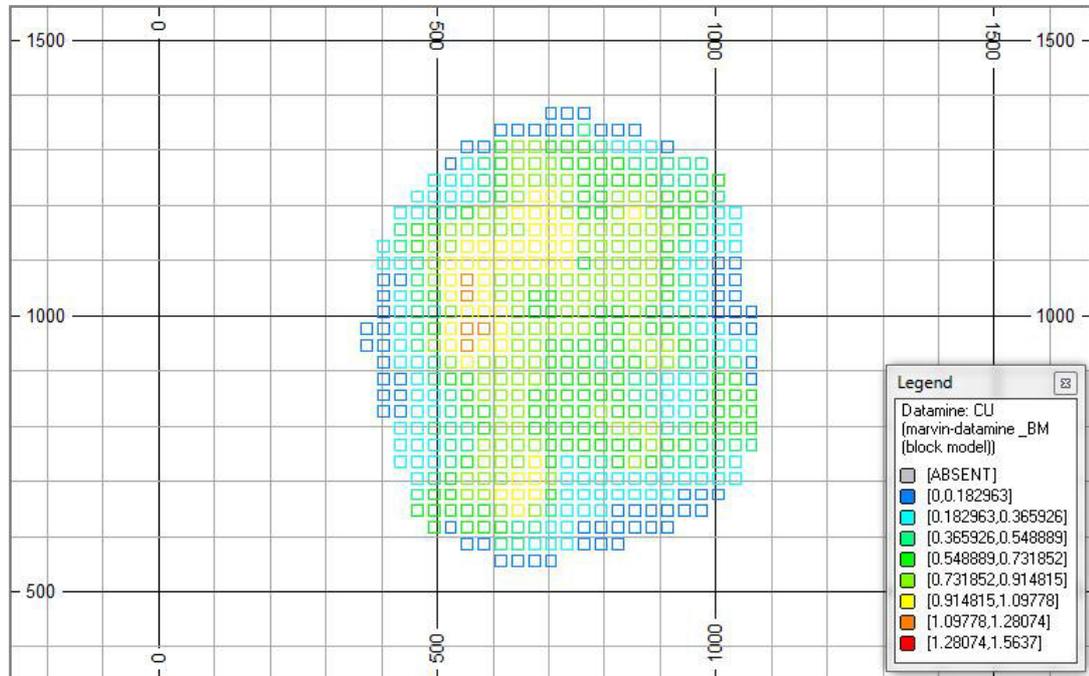
**ANEXOS**

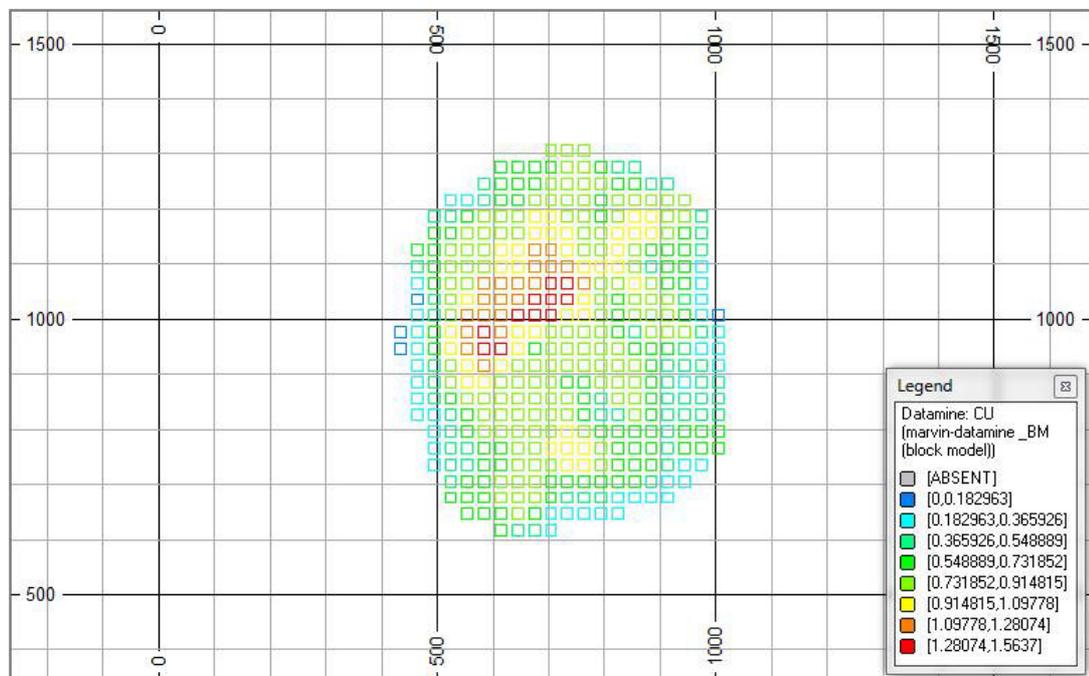
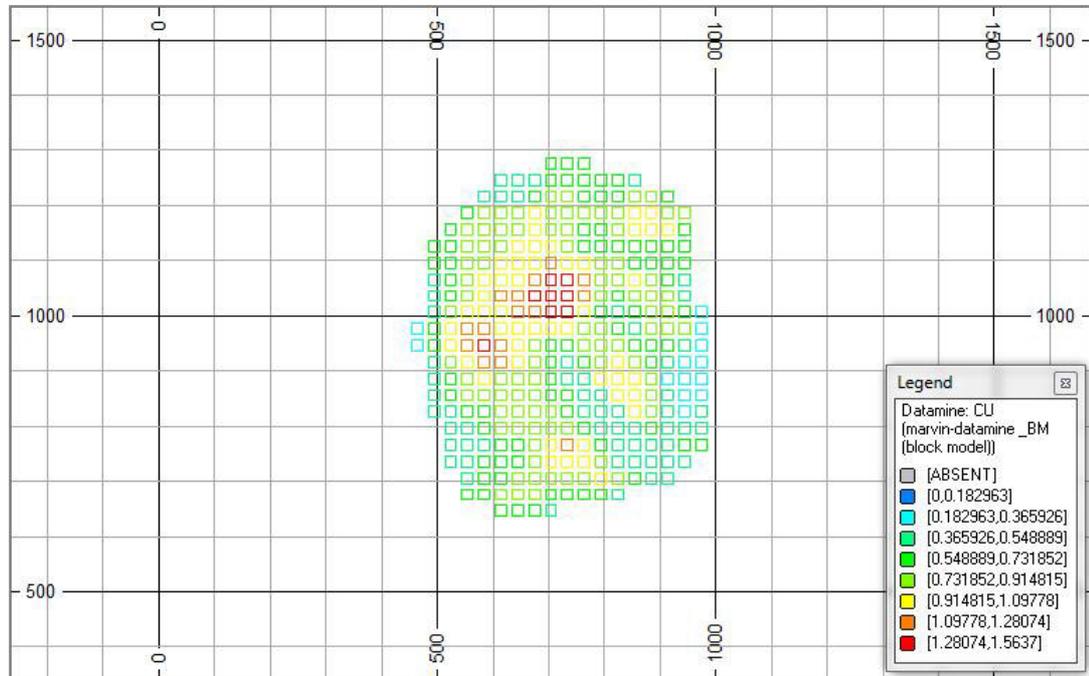
**ANEXO A:** Fotos del Pit Último generado por el Algoritmo de Lerchs y Grossmann  
(Software NPVScheduler de Datamine )

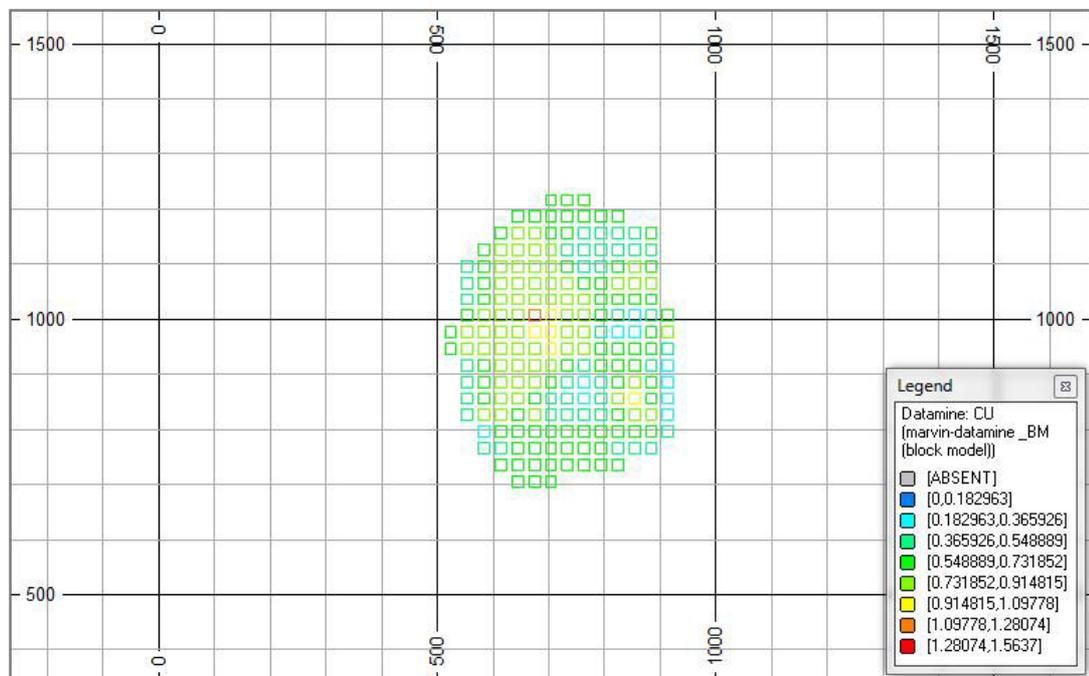
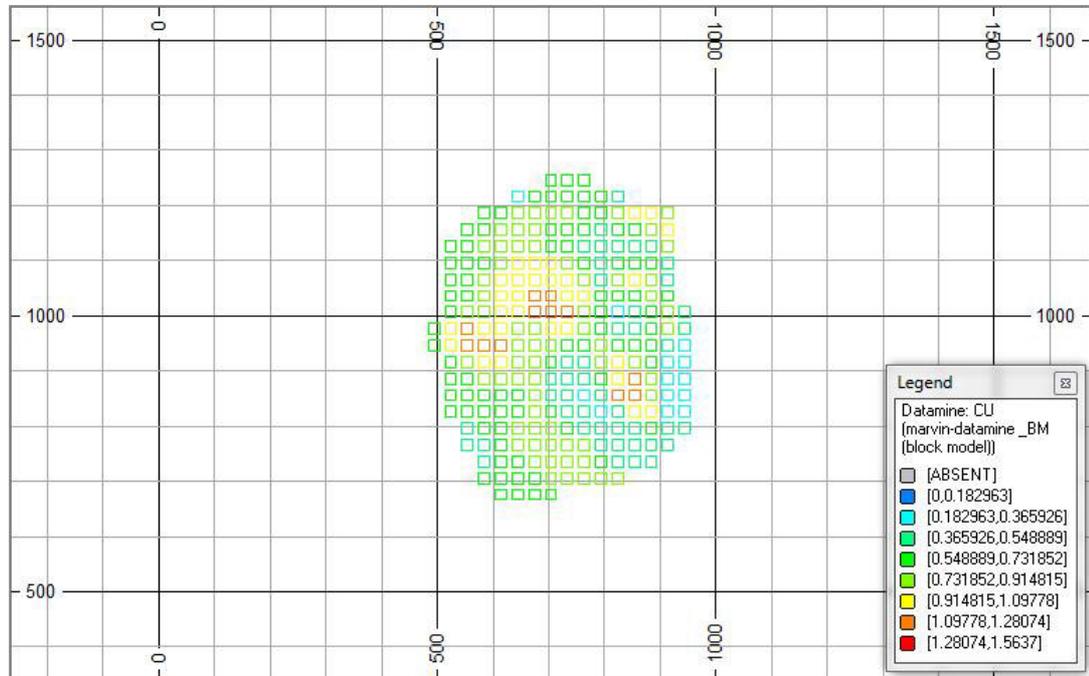


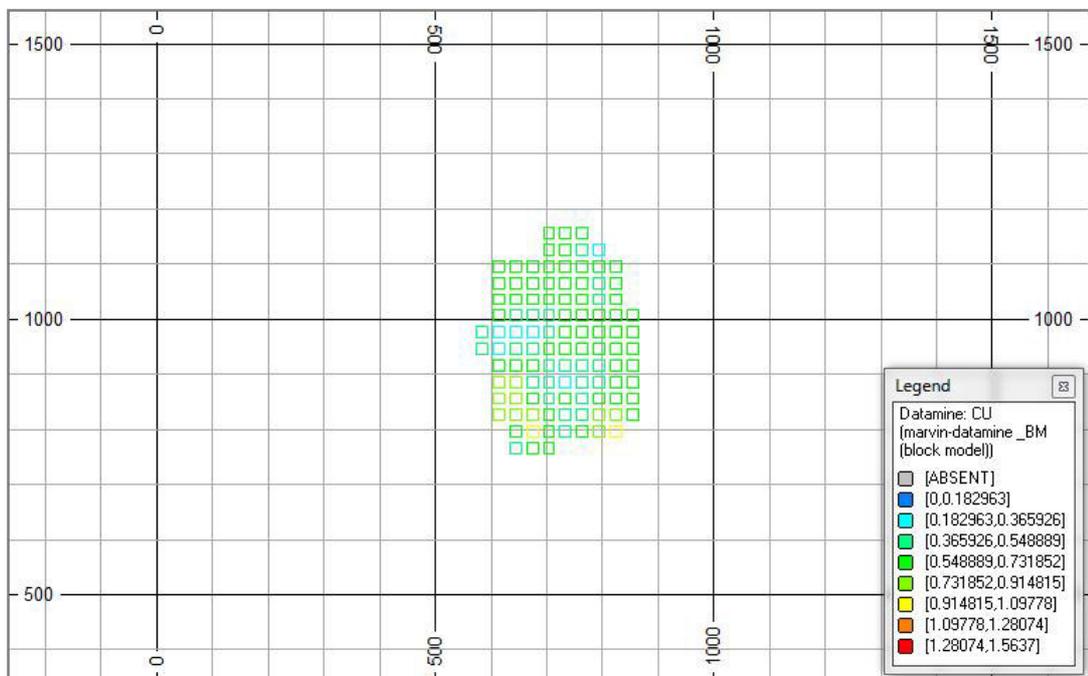
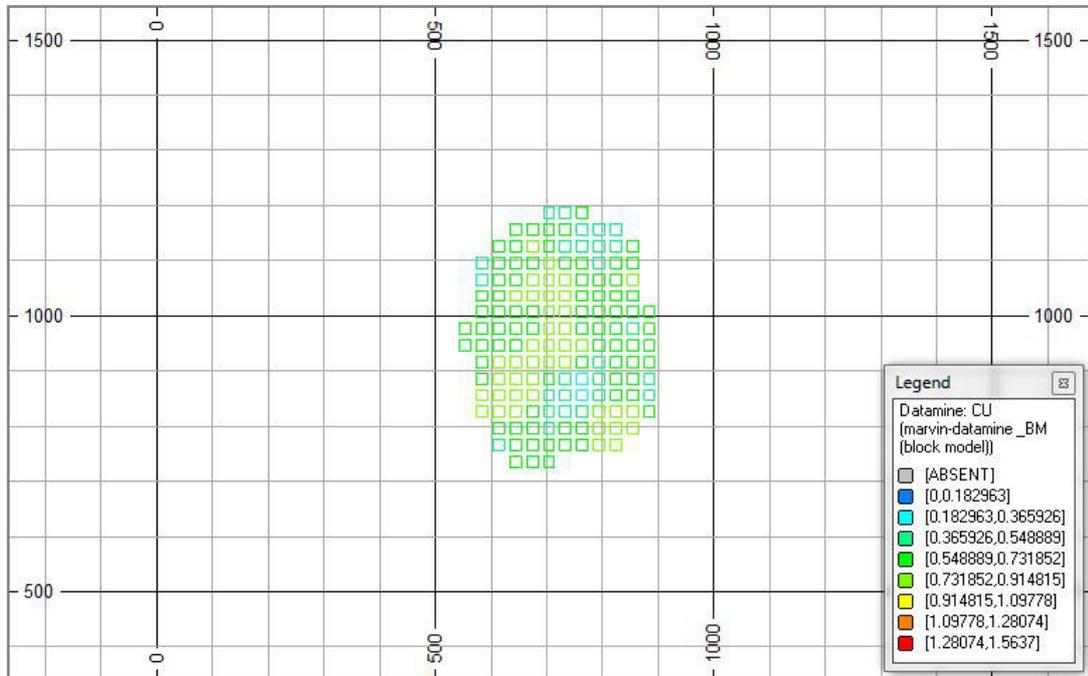


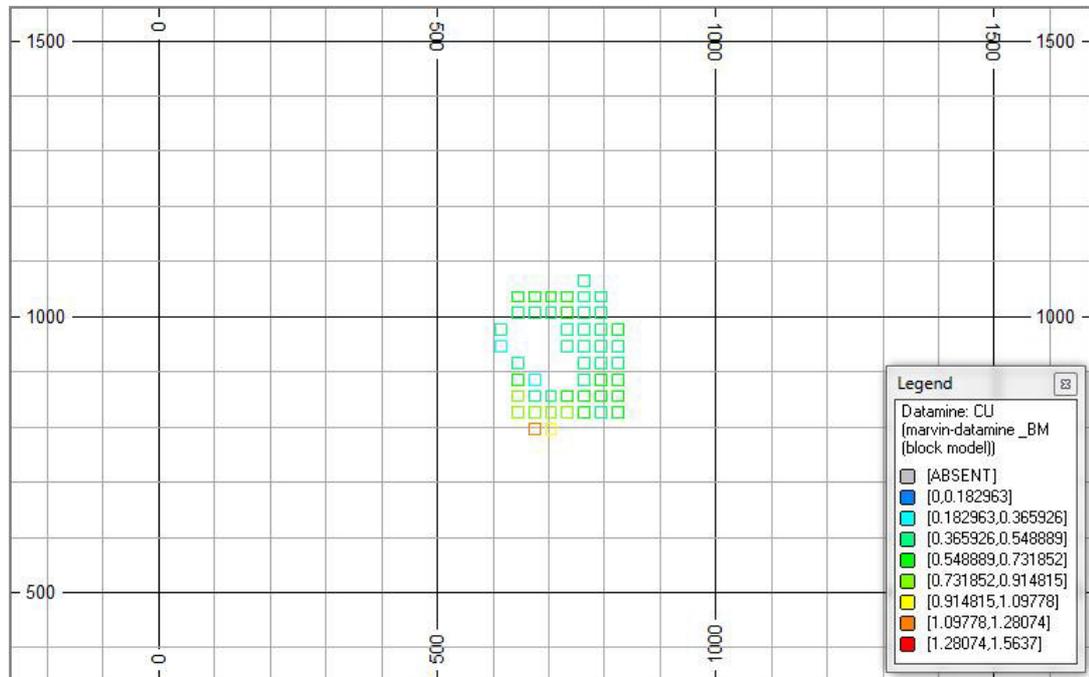




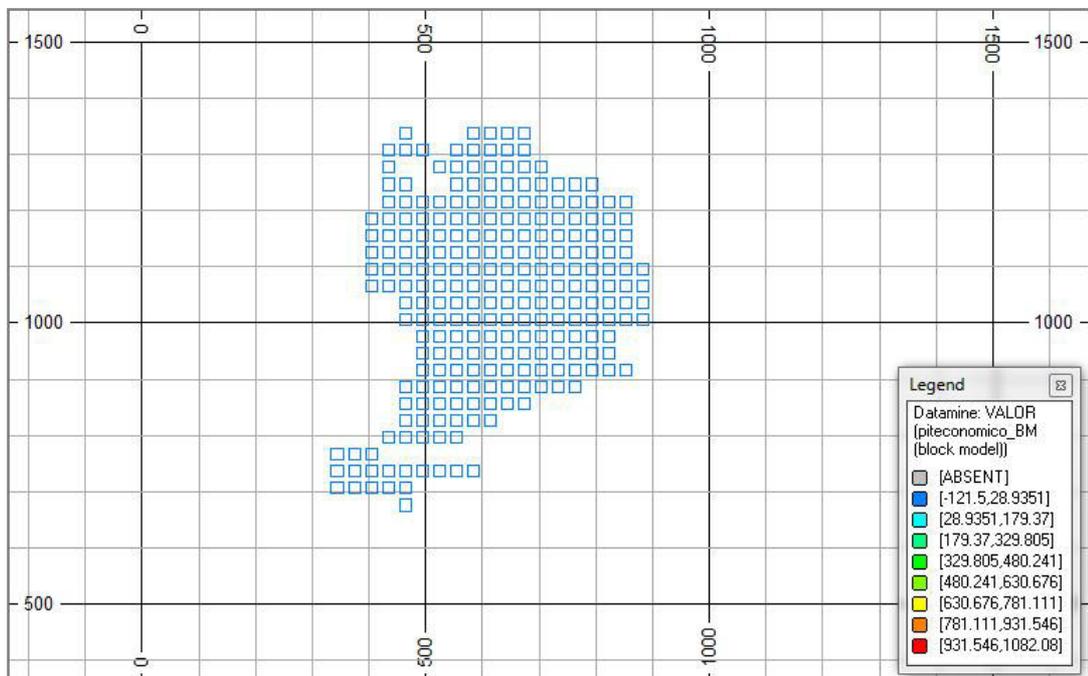
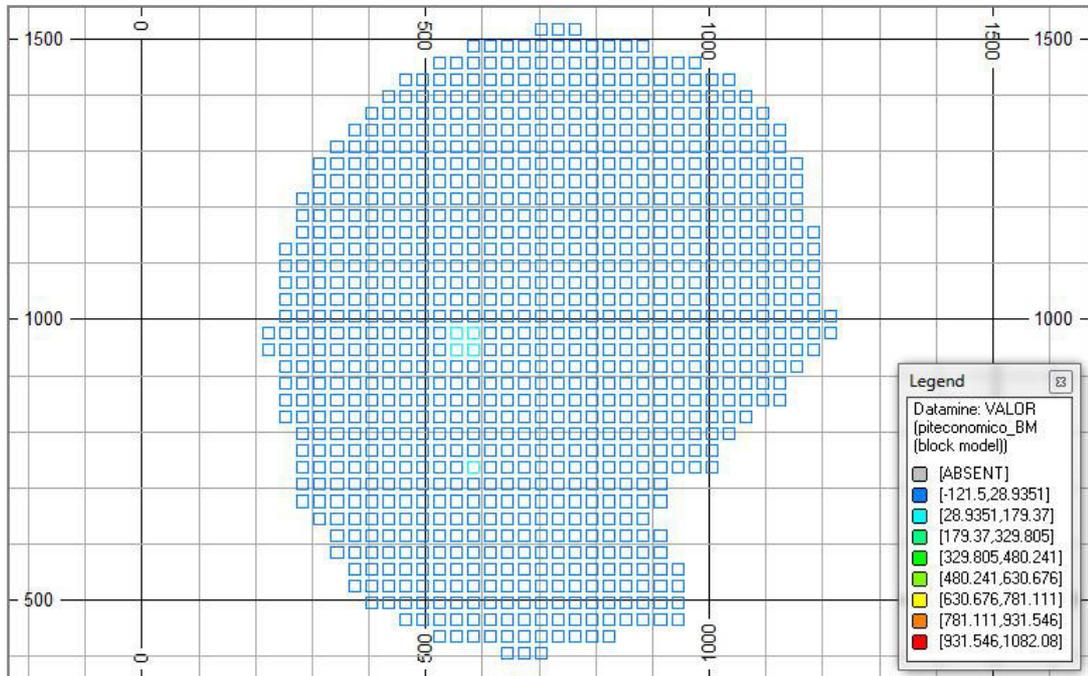


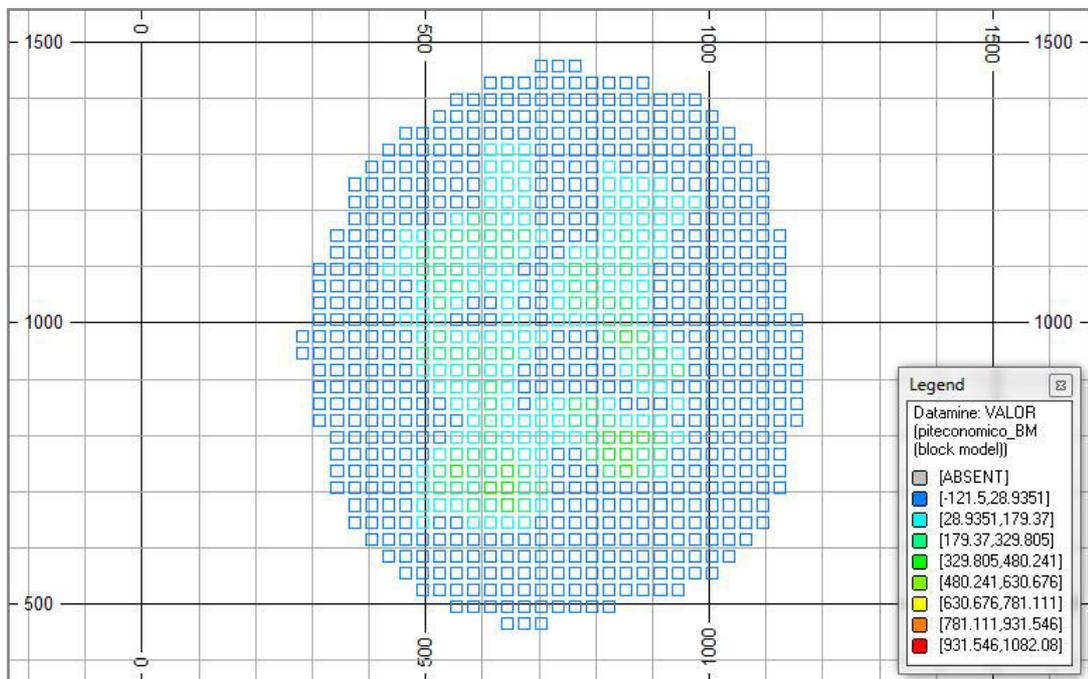
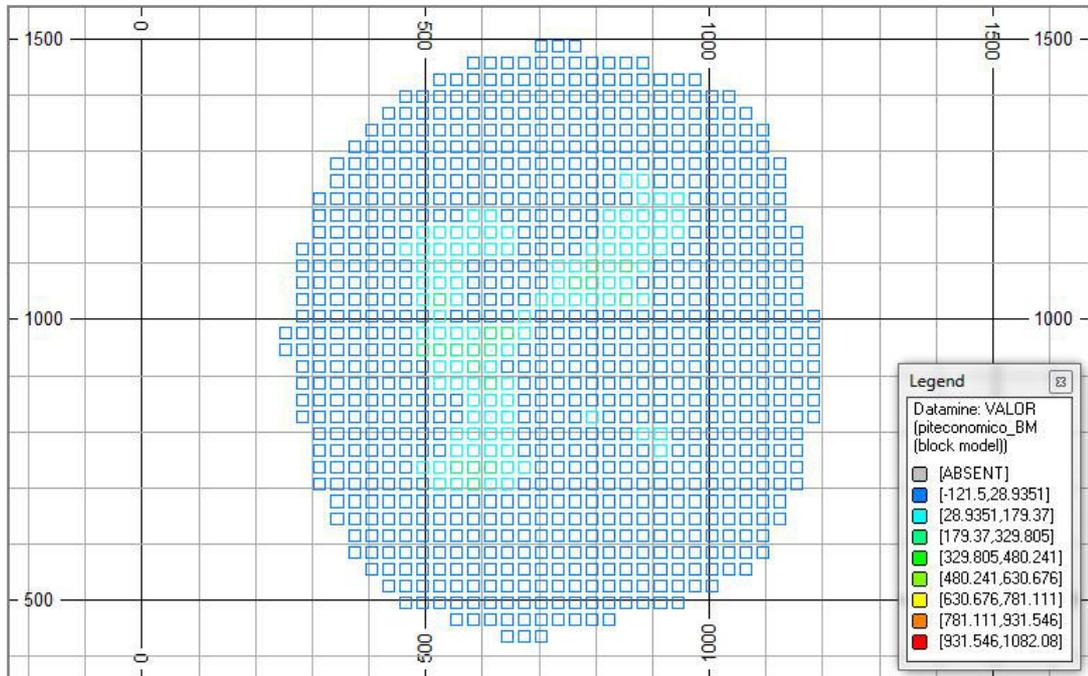


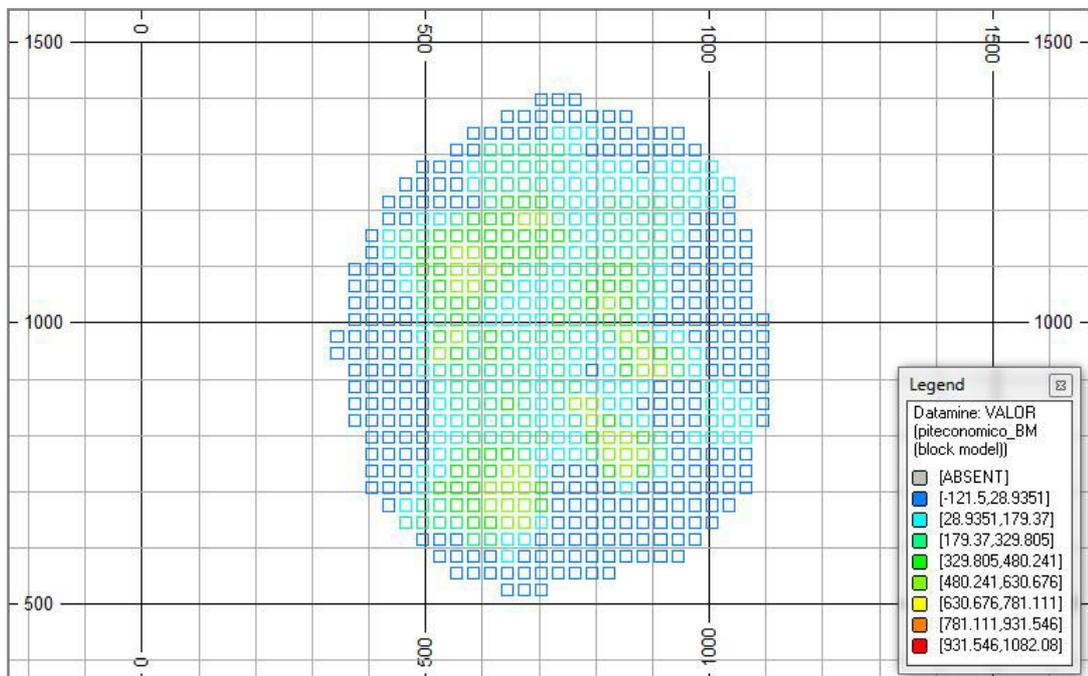
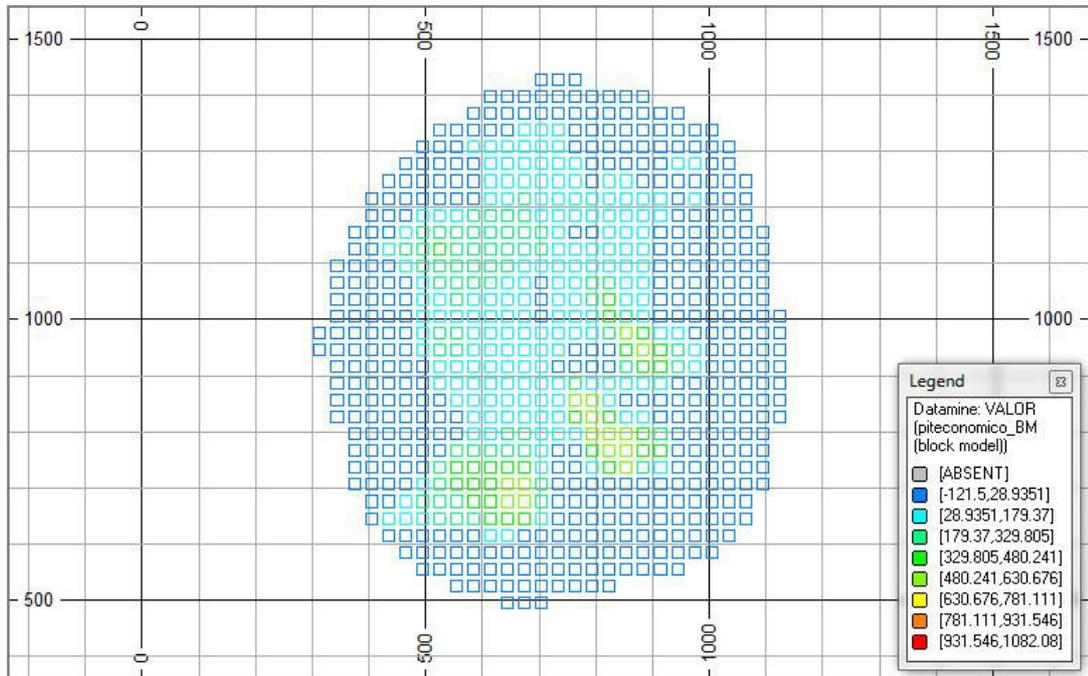


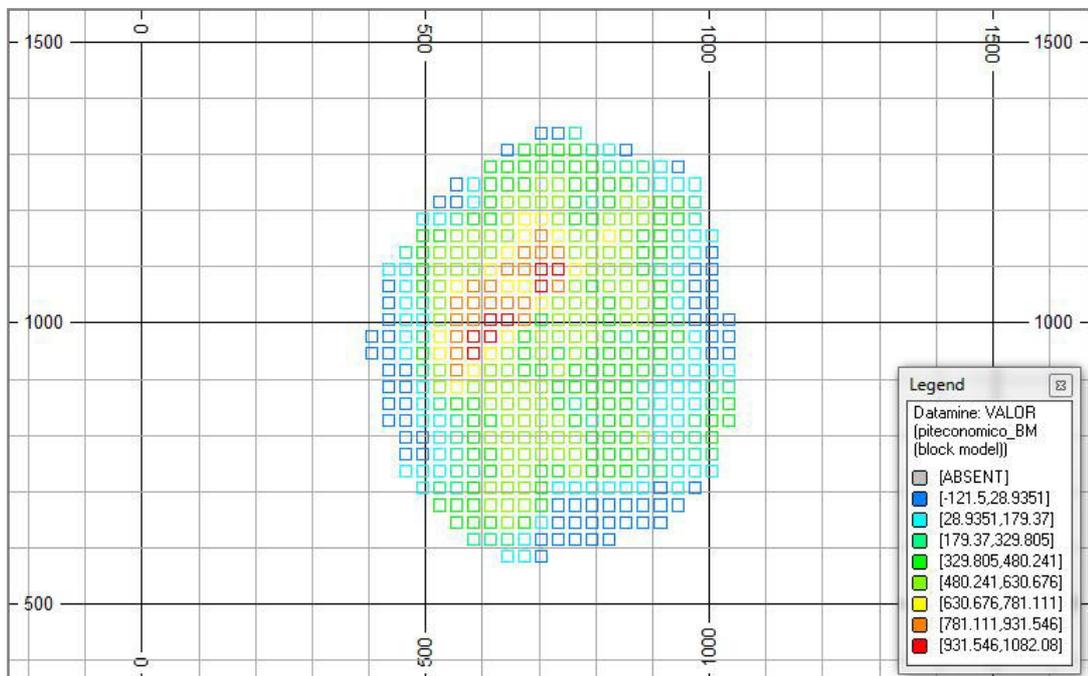
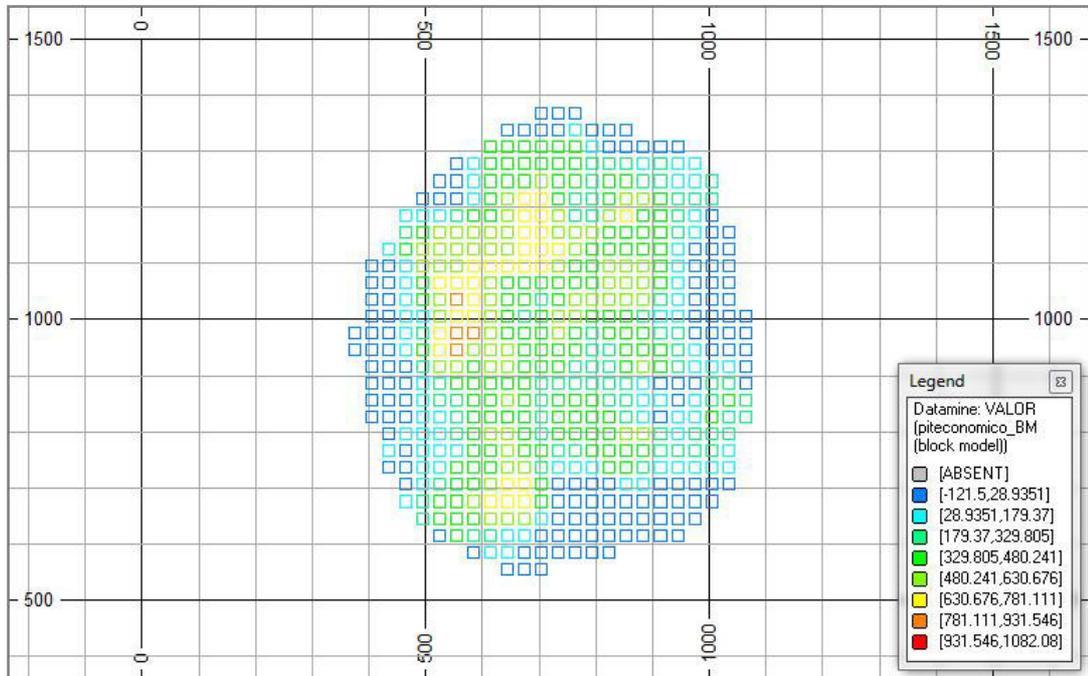


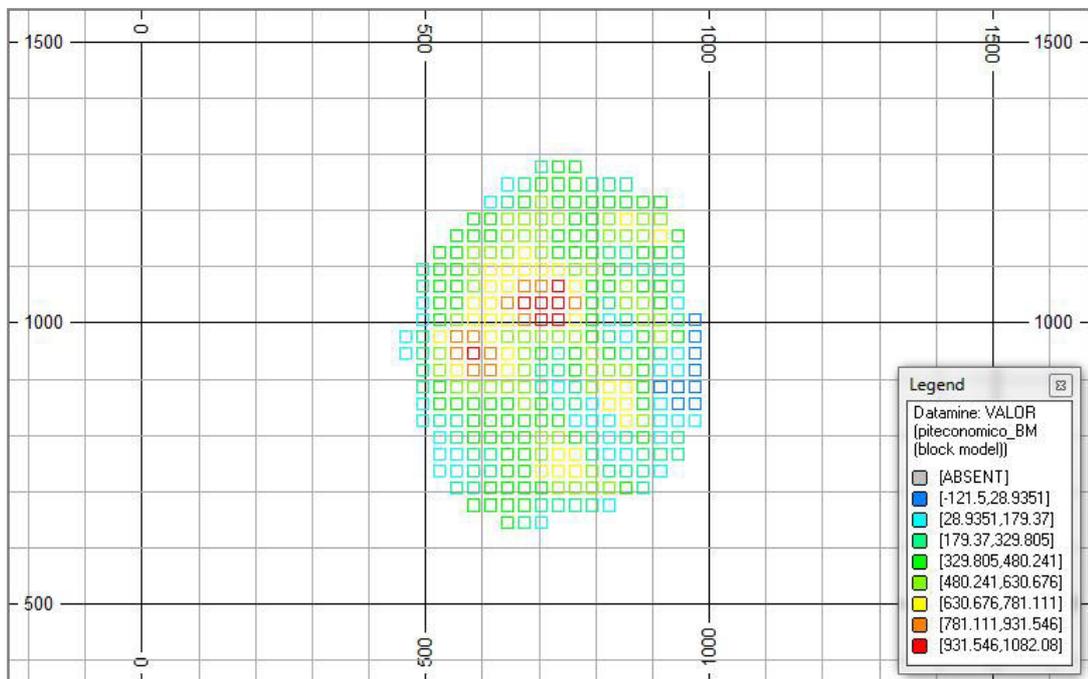
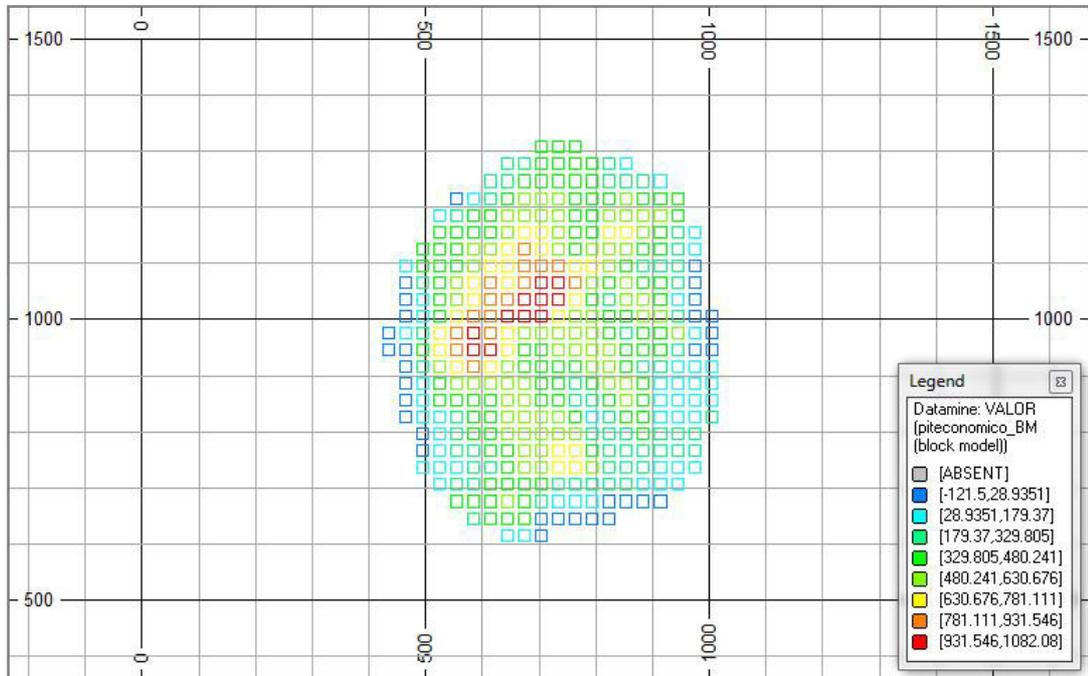
ANEXO B: Fotos del Pit Último generado por el Algoritmo de Pit Económico

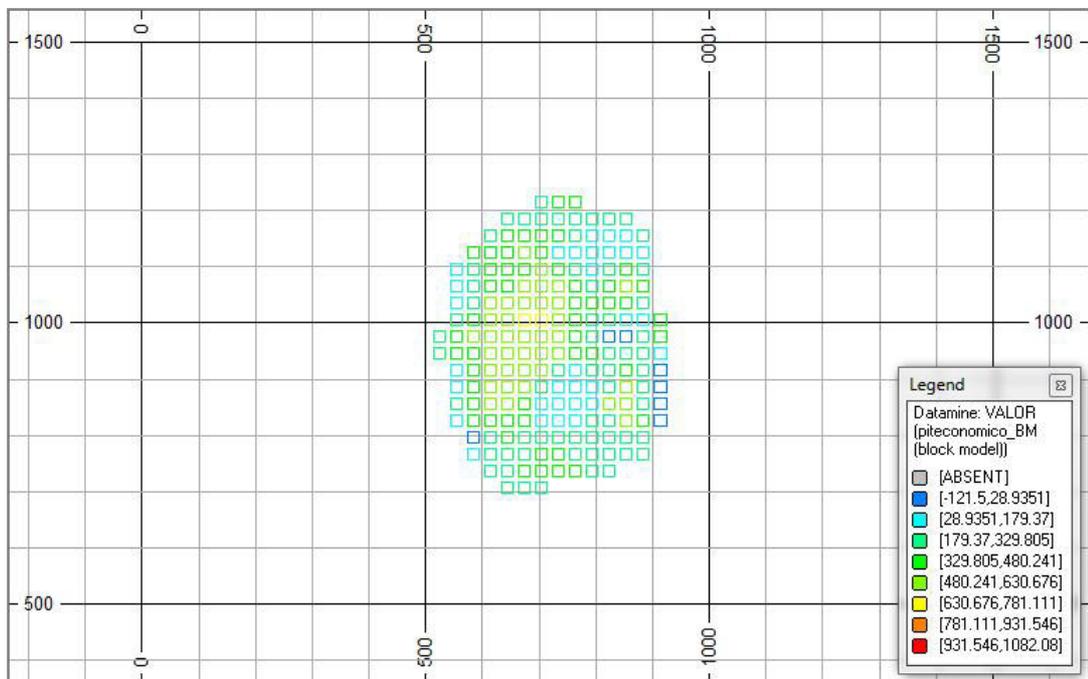
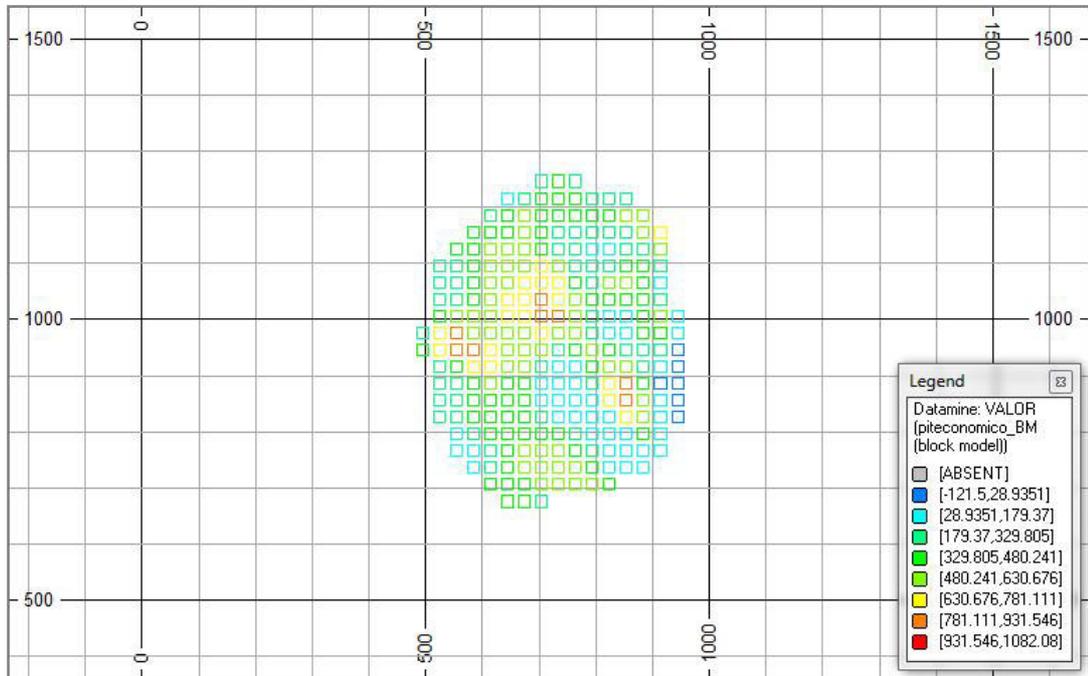


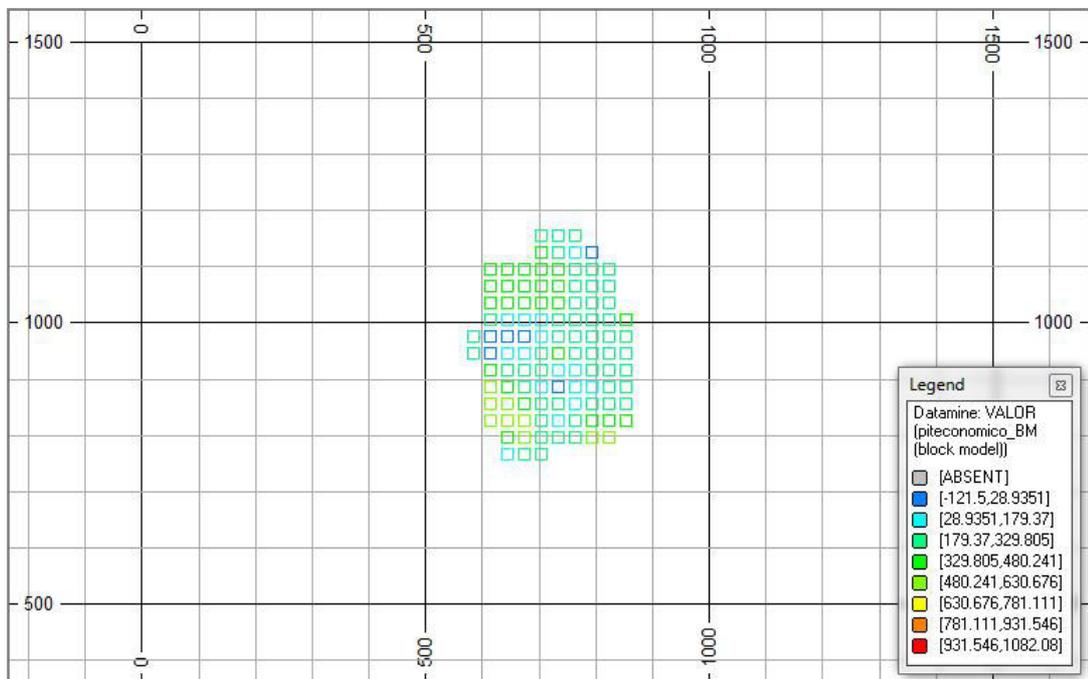
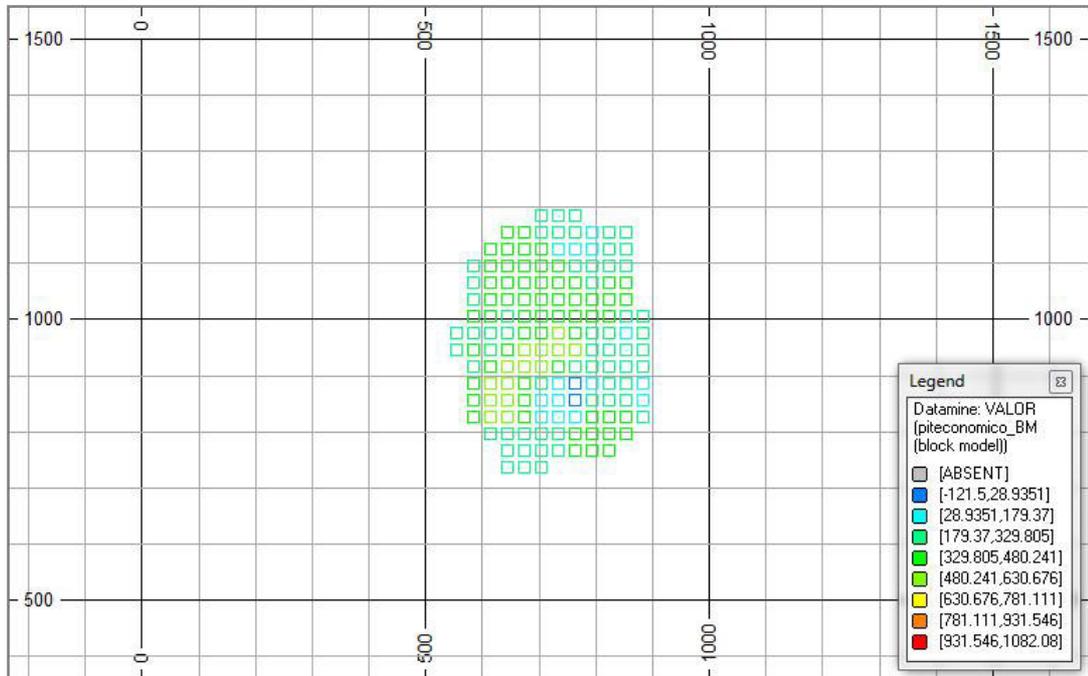


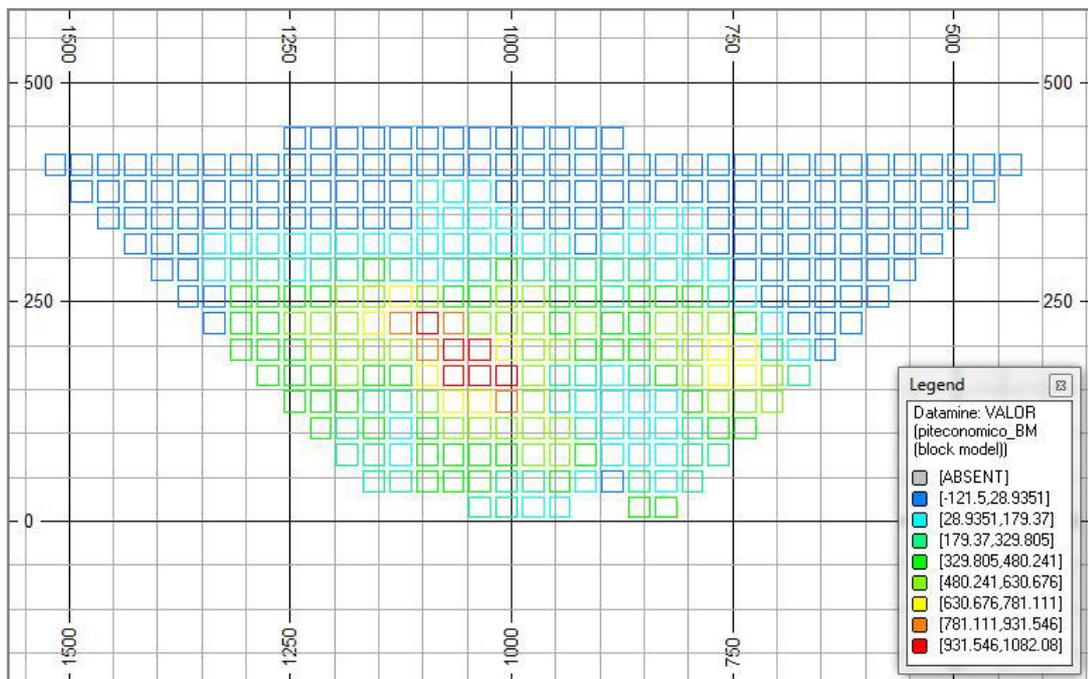
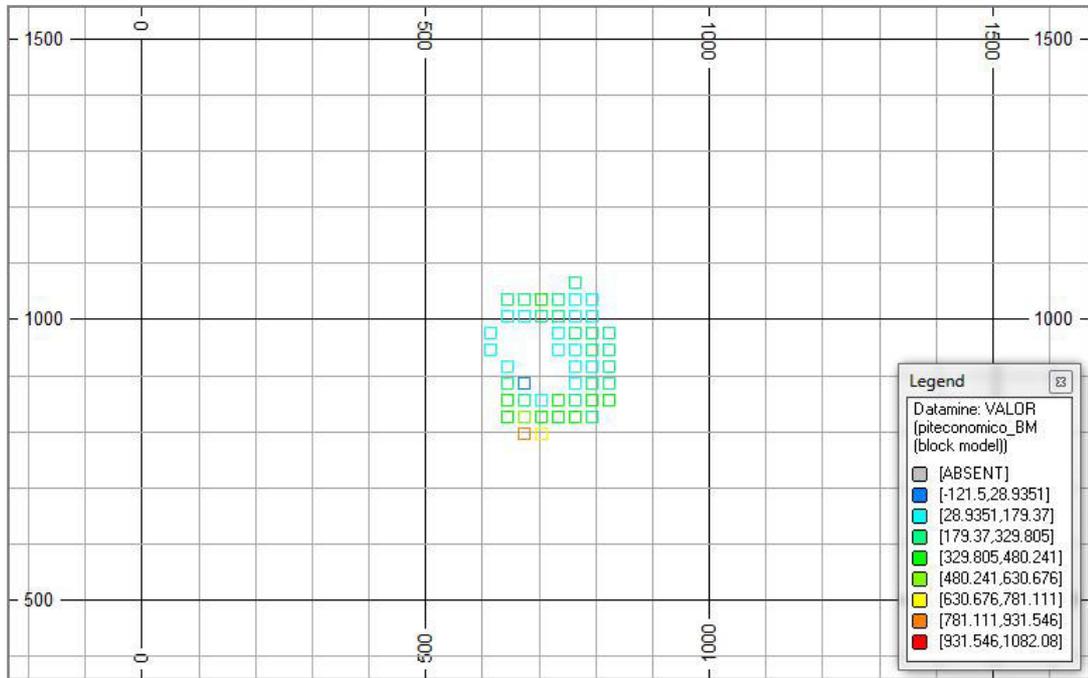












ANEXO C: Fotos del Pit Económico generado por el Algoritmo de Pit Económico

