PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE

ESCUELA DE INGENIERIA

ENFOQUE DE OPTIMIZACIÓN PARA LA TRANSICIÓN DESDE JORNADAS PARCIALES A JORNADAS COMPLETAS EN UN SISTEMA ESCOLAR

TOMÁS IGNACIO PAVEZ VAN RYSSELBERGHE

Tesis para optar al grado de

Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Profesor Supervisor:

RICARDO GIESEN ENCINA

Santiago de Chile, Diciembre, 2016

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE

ESCUELA DE INGENIERIA

ENFOQUE DE OPTIMIZACIÓN PARA LA TRANSICIÓN DESDE JORNADAS PARCIALES A JORNADAS COMPLETAS EN UN SISTEMA ESCOLAR

TOMÁS IGNACIO PAVEZ VAN RYSSELBERGHE

Tesis presentada a la Comisión integrada por los profesores:

RICARDO GIESEN ENCINA

HOMERO LARRAÍN IZQUIERDO

PAULO ROCHA E OLIVEIRA

JOSÉ LUIS ALMAZAN CAMPILLAY

Para completar las exigencias del grado de

Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Santiago de Chile, Diciembre, 2016

A mi familia y amigos,

AGRADECIMIENTOS

Me gustaría agradecer, en primer lugar, a Conicyt por su apoyo económico durante el trayecto de este trabajo. Otra institución que me gustaría agregar en estos agradecimientos es al Centro de Desarrollo Urbano Sustentable (CEDEUS), FONDAP 15110020. También me gustaría agregar a mi profesor guía, Ricardo Giesen, por sus buenas ideas, y a todo el departamento por el apoyo entregado, sobre todo a Kathy y a Cyndy por su cordialidad y buena disposición en ayudar en lo que se necesite. No se deben quedar fuera de estos agradecimientos mis padres, ni mis buenas hermanas Valentina, Natalia, Magdalena y Fernanda.

Otras instituciones que merecen ser mencionadas son el *Instituto Alpha e Beto* (IAB) y Routing UC por toda la información compartida y las buenas ideas entragadas para la elaboración de este trabajo. De IAB me gustaría agradecer de manera especial a Paulo Rocha e Oliveira y de Routing UC a Pablo Madujano, a Nikolas Julio y a José Tomás Robles.

Me gustaría agradecer el apoyo de mis buenos amigos Owen Bull, José Ignacio Olave y Christopher Browne por toda la ayuda durante el transcurso de la universidad. Finalmente, agradecer a la mayoría de mis compañeros de postgrado, sobre todo a: Hernán Catalán por ser quien apaña a procrastinar con un café; a Vicente Huerta y a Nicolás García por su buen humor y el apoyo mostrado en los momentos difíciles en Concepción; y a Sebastián Muñoz, Francisco Garrido, Ignacio Arismendi y varios más por los gratos momentos compartidos.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMEN

Para implementar la transición de un sistema de jornada parcial escolar a uno de jornada completa se deben realizar mejoras de infraestructura a las escuelas. Uno de los desafíos es minimizar la disrupción de la educación de los alumnos que tendrán que ser transferidos y a la vez minimizar los costos y el tiempo de transición.

El trabajo desarrollado en esta tesis consiste en elaborar un modelo de programación entero mixto que permita entregar un plan para realizar la mejor transición posible de la situación actual a una situación óptima dada. Dado que la solución de este modelo implica un costo computacional considerable, se programó una heurística basada en el algoritmo GRASP para encontrar una solución inicial factible cercana al óptimo para dársela como punto de partida al *software* de optimización y así alcanzar el óptimo en tiempos razonables.

El método propuesto fue probado con datos reales de dos municipios brasileños: Axixa y Timón. Los resultados mostraron que la decisión de qué colegio abrir y cuándo abrirlo es robusta sobre la estimación de alumnos futuros. Además incluir el costo subjetivo de cambiar un alumno de colegio en la función objetivo puede mejorar notoriamente los niveles de servicio sin aumentar de manera importante los costos monetarios. Finalmente, el uso de una heurística GRASP para alcanzar una solución inicial reduce el tiempo de resolución desde más de cuatro semanas hasta menos de diez minutos. Además, para los casos estudiados, la heurística puede alcanzar soluciones que están a menos del 5% del óptimo.

Palabras Claves: *optimización, GRASP, heurística, jornada completa, Programación Entera Mixta*

ABSTRACT

In order to implement a transition from multiple to full-day shift is that schools need to be upgraded. One of the challenges is to minimize the disruption on the number of students, regarded to be changed to school, lost at the same time minimize the cost and time for the full transition.

This paper presents MIP model to find the best possible transition between the current situation and the desired configuration of schools. In addition, since obtaining the exact solution implies considerable computational time, a heuristic based in the GRASP algorithm was proposed. The heuristic finds an initial feasible solution that is relatively close to the optimum. This solution is then handed to the optimization software to reach the optimal solution.

The proposed method was implemented and tested with real data from two rural Brazilian municipalities: Axixa and Timon. The results showed that the decision of which school to open and when to open it is robust to the estimation of the number of future students. In addition, including the subjective cost of transferring a student in the objective function can significantly improve service levels without an important increase in the objective costs. The use of a GRASP heuristic to reach an initial solution reduced the solving time from over four weeks to less than ten minutes. Furthermore, in the cases studied, the heuristic can reach solutions that are less than a 5% from the optimal.

Keywords: *optimization, GRASP, heuristics, full-day shift, schools, Mixed Integer Programming*

INTRODUCCIÓN

En muchas partes del mundo, los sistemas escolares operan a jornada parcial para aumentar la cantidad de alumnos que pueden estudiar en un mismo establecimiento. Las autoridades encargadas de la educación han indicado que se desea aumentar las horas de jornada escolar. Este aumento de horas, hace que el sistema cambie de jornada parcial a completa. La razón de querer hacer este cambio es que hay estudios que avalan que existe correlación entre el número de horas escolares y el rendimiento académico (Martinic, 2015). Otro beneficio del cambio de jornada escolar es que los niños, al estar en los colegios, se mantienen alejados de las calles y hace más fácil para los padres (especialmente las madres) unirse a la fuerza laboral.

La transición de jornadas parciales a jornadas completas requiere aumentar la capacidad, ya sea construyendo escuelas mejorando las existentes. Dado que la construcción toma más tiempo que la duración de las vacaciones escolares, las autoridades encargadas de la educación se ven enfrentadas al desafío de reasignar a los alumnos a otros colegios mientras sus establecimientos escolares se encuentran inutilizados debido a los trabajos en curso. Por lo tanto, este plan de transición de jornada escolar no solo requiere programar cuándo construir o mejorar una escuela, sino que se debe considerar una relocalización de alumnos mientras sus colegios estén inutilizados debido a estas construcciones.

Estudios anteriores ya han propuesto modelos de optimización para obtener el tamaño y la localización de los colegios. Estos modelos anteriormente mencionados ayudan a decidir qué escuela mantener abierta, con cuántas salas debe operar para qué grado y la asignación de alumnos a los distintos establecimientos. Entre los estudios anteriormente mencionados podemos encontrar a: Lemberg (2004), Daskin & Maass (2015), Caro et al. (2004), Lemberg y Church (2000), Mandujano el al. (2012), Araya et al. (2012) entre otros. Lo que ninguno de estos estudios considera es la transición entre el estado actual y el estado deseado. No considerar esto último es problemático porque no solo los costos de la transición pueden ser prohibitivamente altos, sino que la gran mayoría de las personas que deben tomar la decisión de cambiar la jornada escolar (como los alcaldes o las personas del ministerio de educación) probablemente terminen su periodo electoral antes que se llegue al final del proyecto, y quieren dejar un legado que sea percibido más como una mejora del sistema más que una molestia (Giesen et al. 2015).

El objetivo de esta tesis es formular y resolver un modelo matemático que permita encontrar el mejor plan de transición entre la situación actual y la situación deseada. Este plan de transición debe considerar, no solo la planificación de la construcción de colegios, sino que también la asignación de alumnos a los distintos establecimientos escolares. Este plan nunca debe dejar a un alumno sin asignar, y minimiza tanto los costos monetarios (como el costo de transporte, el costo de personal o de construcción) como los costos no monetarios (como el costo de cambiar alumnos de colegio). La situación final a la que se quiere llegar se obtuvo utilizando el modelo de Mandujano et al. (2012) sobre las condiciones iniciales de las instancias testeadas.

Un importante aporte de este trabajo fue la incorporación de los costos no monetarios en la función objetivo del modelo, siendo el principal el costo de mover a un alumno de colegio. Cambiar a un estudiante de un colegio a otro no solo genera un costo logístico, sino que además afecta de manera negativa en el rendimiento académico del alumno (Schwartz, 2015). Lemberg & Church (2000) definen este problema como "*School Boundary Stability Problem Over Time*" (SBS) y desarrollan un modelo que pone menos énfasis en los costos monetarios tradicionales sobre los niveles de servicio. A diferencia del caso anterior, donde se pondera de manera aleatoria, en este trabajo se pondera el nivel de servicio con una disposición al pago por mover alumnos de colegio que es decidida por el modelador o las autoridades relevantes.

El modelo de este trabajo fue testeado con datos reales de dos municipios rurales de Brasil: Axixa con 2.510 alumnos y 18 colegios iniciales; y Timon con 6.479 alumnos y 109 colegios iniciales. Dichas instancias fueron lo suficientemente grandes para hacer notar que, para instancias reales, obtener la solución pura del software de optimización comercial puede ser muy costosa computacionalmente. Para reducir este costo se programó e implementó una heurística basada en la metaheurística GRASP (*Greedy Randomized Adaptive Search Procedure*) de Feo & Resende (1995). Esta heurística GRASP entrega una solución lo suficientemente cercana al óptimo como para darle al software de optimización un buen punto de partida, y así disminuir notoriamente los costos computacionales.

Las grandes contribuciones de este trabajo pueden resumirse en: (i) el problema de transición de jornadas parciales a jornadas completas pudo ser formulado como un modelo de optimización lineal entero mixto, considerando no solo los costos monetarios, sino que también los costos no monetarios como el nivel de servicio entregado a los estudiantes considerando los cambios de establecimiento escolar. (ii) La implementación de una heurística tipo GRASP para obtener una solución cercana al óptimo y usarla como punto inicial para así disminuir los costos computacionales. (iii) Finalmente, demostrar que, al menos en el caso de Axixa, la consideración del nivel de servicio en la función objetivo aumenta ligeramente los gastos del municipio, pero mejora notoriamente el nivel de servicio, disminuyendo a menos de la mitad los cambios de alumnos de colegio.

En la sección dos de esta tesis se encuentra una revisión bibliográfica, tanto de modelos de localización de colegios y de transición como de heurísticas utilizadas para resolver problemas complejos de distintas características. En la sección tres se explica más en profundidad el problema a resolver y se plantea y detalla el modelo matemático usado. En la sección cuatro se explica y detalla la heurística utilizada para resolver el problema. En la sección cinco se encuentran los casos de estudio: un ejemplo pequeño para ilustrar la funcionalidad del modelo, y dos municipios brasileños: uno de tamaño mediano (Axixa), y otro de tamaño grande (Timon). En cada subsección se encuentran los resultados de cada caso y los análisis de sensibilidad correspondientes a cada uno. Finalmente, en la sección seis se encuentran las conclusiones y extensiones de este trabajo.

REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

La revisión bibliográfica está dividida en cuatro partes: la primera parte es una revisión de problemas de localización y asignación de alumnos para entender cómo ha sido abordado este tema; la segunda parte consiste en estudiar problemas de transición. La tercera parte es una breve revisión sobre modelos de predicción para poder estimar de mejor manera el *input* del problema correspondiente a la cantidad de alumnos que van a llegar en el futuro de los distintos sectores; y finalmente hay una revisión de heurísticas para resolver de manera más rápida el problema de este trabajo.

1.1 Problemas de localización y asignación de alumnos a escuelas

En su esencia, el problema tratado es uno de localización de escuelas y asignación de alumnos, así que se revisó la literatura disponible al respecto de ese problema o uno análogo. En primer lugar y posiblemente más importante, está el trabajo de Mandujano et al. (2012), no solo porque trata un problema de localización y asignación, sino porque en los casos de estudios que se mencionarán en el capítulo cinco, se utilizó sus modelos para determinar cómo debiese ser la situación final de los municipios. Mandujano propuso el *School Location and Size Problem* (SLSP) para determinar decisiones estratégicas como la localización de colegios, el tamaño que deben tener estos mismos y la asignación de alumnos a los distintos colegios.

Una forma de modelar el problema de localización y asignación de escuelas que se ha usado antes es *p-Median Problem* (PMP) (Daskin & Maass, 2015). El PMP es el problema de localizar *p* instalaciones para minimizar las distancias promedio ponderadas entre nodos de demanda y la instalación más cercana. Como es aparente, el PMP es aplicable a un problema normal de localización de escuelas y asignación de alumnos. Pero en este caso particular, en el que la localización final de las escuelas está dada y las opciones de operación intermedias limitadas, el PMP pierde su atractivo.

Otro acercamiento al problema de asignación es tratarlo como un problema entero y enumerar soluciones hasta encontrar la mejor (Liggett, 1973). Como enumerar todas las soluciones posibles no es práctico el autor usó un algoritmo GRASP para llegar al mejor resultado posible de manera rápida.

El problema tratado por Liggett tiene la particularidad de que surgió por la necesidad de integrar racialmente las escuelas. Esta necesidad no se manifiesta en el problema tratado, pero sí ocurre que los alumnos no son homogéneos, éstos pertenecen a distintos grados y esto solo podría ignorarse si todas las escuelas tuvieran la misma estructura y los alumnos de distintos grados se distribuyeran homogéneamente en las zonas geográficas (Caro et al., 2004). Como se tratan municipios rurales de población muy esparcida, no se pueden hacer estos supuestos.

Lemberg define el *School District Planning Problem* (SDP o SDPP) en dos fases: cómo manipular las distintas capacidades de un distrito escolar y la asignación de estudiantes para llegar a una alternativa factible que maneje de la mejor manera posible los recursos del distrito en el largo plazo (Lemberg, 2004). El problema tratado en esta tesis puede verse como un caso particular del SDP con la salvedad de que ya se tiene la solución a largo plazo, lo que se busca es la mejor transición, es decir, la mejor forma de asignar los recursos en el mediano plazo.

Las metodologías propuestas para solucionar el SDP normalmente se enfocan en la reducción de costos de transporte. Pero Lemberg y Church (2000) hacen notar que estos problemas se dan en ambientes políticos y que por lo tanto otras variables entran en juego. Los autores ponen hincapié especialmente en el costo asociado de tener que cambiar alumnos de colegio.

Un problema paralelo al SDP es el *School Boundary Stability Problem Over Time* (SBS) en el que se busca encontrar soluciones estables de largo plazo que minimicen el cambio (Lemberg & Church, 2000). Los autores crean un problema de optimización en el que se penaliza el mover a un estudiante de institución, y así se maximiza la estabilidad. También crean un problema mixto SDP-SBS en el que se mezclan ambos problemas ponderándose en la función objetivo, así se pueden llegar a soluciones que minimicen los costos duros, los costos blandos, o ambos dependiendo de la importancia que se les dé a priori.

El estudio *Optimizing Location and size of rural schools in Chile* (Araya et al., 2012) es muy interesante ya que se consideran escuelas de distinto tipo, por ejemplo, escuelas multigrado en las que solo un profesor en una sala está a cargo de alumnos de distintos grados, escuelas con solo algunos grados y distintas combinaciones. También considera la posibilidad de cerrar o expandir escuelas existentes, crear o eliminar salones de clases y crear nuevas escuelas. Como tal, no se toman en cuenta solo los costos de transporte, sino que los costos asociados a abrir, transformar y cerrar escuelas y/o salas y los costos de operación. La inclusión de escuelas de distinto tipo en Araya et al. es valiosa, pero insuficiente en cuanto a la preferencia que se le debe dar a los colegios integrales con respecto a los multigrado.

1.2 Problemas de Transición

Los problemas de optimización de una transición de un estado a otro no son particularmente comunes. Normalmente resulta más atractiva la modelación del estado óptimo sin necesariamente pensar cómo llegar a éste. Si es difícil encontrar literatura que trate de problemas de transición, más difícil es encontrar para el tema específico de la educación.

A pesar de que no hay mucha literatura sobre la transición en la educación, eso no significa que no se puedan extraer aportes valiosos de transiciones en otras áreas. Por ejemplo, Bakhtavar et al. (2012) estudiaron la transición de una mina a tajo abierto a una bajo tierra. Si bien los problemas son muy distintos, existen ideas interesantes que pueden usarse. En este caso la transición como una parte de un problema mucho más grande, es decir, no minimiza los costos de la transición en sí como un problema parte, sino que trabajan sobre toda la operación de la mina.

Una transición más estudiada es el cambio de matrices eléctricas, tanto en fuentes de energía como en formas de entregarla. Pruckner et al. (2014) estudiaron la transición de Bavaria hacia energías renovables. En este caso se modela el problema como uno entero mixto y se divide en dos partes; la primera es encontrar un plan de extensión de capacidad eficiente en cuanto a costo, la segunda es asegurar que cada unidad siga teniendo suministro de energía con respecto a las capacidades derivadas de la primera parte. El problema iterará entre ambas partes hasta llegar a un óptimo.

Hajimiragha et al. (2011) estudiaron la transición óptima a un sistema eléctrico compatible con automóviles híbridos. Este caso es interesante no solo en cuanto a la optimización sobre una transición, sino que toma en cuenta costos ambientales no estrictamente monetarios, de la manera que se tendrá que hacer para el problema de transición de colegios rurales.

Lee y Williams (2011) trabajaron sobre un modelo de optimización sobre la transición de distintos programas de señales de tránsito para acomodar la demanda de tráfico. A primera vista este parece ser un problema con muy poca relación al tema de la tesis, después de todo la transición de señales de tráfico es puramente operacional y la transición de escuelas es un proceso de años. Sin embargo, entrega el punto de vista del factor humano en un problema. Las transiciones de tráfico son problemáticas porque son seres humanos los que se enfrentan a la situación, es un problema no monetario que tiene que tomarse en cuenta. De forma similar en la transición de colegios, existen factores humanos que son más o menos deseables y que no son monetarios (como el cambiar constantemente alumnos de colegio) que deben ser tomados en cuenta.

1.3 Métodos de Predicción

El problema de asignación de alumnos cuenta con el dato de los alumnos que existen en la actualidad en el sistema, pero ya que se busca una solución para los próximos años se necesita una aproximación para cuántos alumnos de cada grado existirán en el futuro.

Para esto una posibilidad es usar el suavizamiento exponencial. El suavizamiento exponencial es un método de predicción de series de tiempo cuya formulación más simple se atribuye a Brown (1963) y básicamente se puede expresar como:

$$s_t = \alpha \cdot x_t + (1 + \alpha) \cdot s_{t-1} \tag{2.1}$$

Donde α es el factor de suavizamiento, entre cero y uno. En otras palabras, el estadístico s_t es un simple promedio ponderado entre la observación actual x_t y el estadístico anterior s_{t-1} (Gelper, Fried, & Croux, 2007). El método de suavizamiento exponencial simple es razonable para series de tiempo estacionarias, pero se encuentra con problemas cuando existen tendencias. Es por eso que Holt (1959) propone agregar una variable de tendencia F_t:

$$\begin{gathered} s_t = \alpha_1 \cdot x_t + (1 + \alpha_1) \cdot (s_{t-1} + F_{t-1}) \\ F_t = \alpha_2 (s_t - s_{t-1}) + (1 - \alpha_2) F_{t-1} \end{gathered} \tag{2.2}$$

Para cada tiempo t, F_t captura la tendencia lineal local de la serie. Los parámetros α_1 y α_2 son de nuevo valores entre cero y uno que regulan el grado de suavizamiento (Gelper, Fried, & Croux, 2007). Sin mucho esfuerzo, el método de Holt puede expandirse para incluir estacionalidad, sin embargo, para el caso de la demanda de educación no se ha observado estacionalidad por lo que no se incluirá en los casos de estudio.

El suavizamiento exponencial en sus distintas versiones ha probado constantemente su utilidad; se usa regularmente en áreas como: operaciones, ciencias de gestión, marketing y estadística (Ravinder, 2013) (Sobol & Collins, 1993). Por lo que expandir su uso a demanda por educación no es solo natural.

1.4 Heurística utilizada: Greedy Randomized Adaptive Search Procedure (GRASP)

Ya que la resolución de un problema tan grande como el que se está tratando puede tomar una cantidad desmedida de tiempo, se hace necesario el uso de una heurística para llegar a una buena solución inicial con la que comenzar. Dentro de la literatura se pueden ver varios tipos de heurísticas pero una de las más usadas para este tipo de problema es la metaheurística GRASP. Para profundizar más en los distintos tipos de heurísticas ver Pearl (2014). A continuación se detallará cómo funciona GRASP.

Esta metaheurística fue planteada por Feo y Resende (1995). GRASP es una heurística iterativa de muestreo aleatorio en que en cada iteración se obtiene una solución al problema. La solución final que entrega este procedimiento es el incumbente entre todas las soluciones entregadas por las iteraciones anteriores, es decir, en cada iteración se obtiene un resultado factible y el mejor de todos los resultados es la solución final de la metaheurística. La cantidad de iteraciones que realice el algoritmo depende del criterio de parada a utilizar. Algunos de los posibles criterios de parada son: (i) que el resultado sea mejor (mayor o menor, dependiendo si se quiere maximizar o minimizar) que una cota planteada inicialmente, (ii) que el número de iteraciones no supere cierto umbral, o (iii) una mezcla de ambas.

Cada iteración de la metaheurística está compuesta por dos etapas: (i) Una etapa de construcción y (ii) una etapa de mejora local. A continuación, en la figura 1, se presenta un pseudocódigo genérico de cómo funciona el algoritmo. Este pseudocódigo indica que, mientras no se haya cumplido el criterio de parada establecido, se creará una solución factible (línea 1). Se mejora mediante el método de búsqueda local de la metaheurística, y se actualiza para ver si la solución encontrada es mejor que la mejor solución que se tenía hasta entonces.

```
procedure grasp()
    InputInstance();
    for GRASP stopping criterion not satisfied →
        ConstructGreedyRandomizedSolution(Solution);
        LocalSearch(Solution);
        UpdateSolution(Solution,BestSolutionFound);
    rof;
    return(BestSolutionFound)
end grasp;
```

Figura 1: Pseudocódigo GRASP
Fuente: Feo & Resende (1995)

Lo primero que debe hacerse en cada iteración es la fase de construcción. Ésta encuentra una solución inicial factible para luego ser mejorada con el segundo método. Esta solución se construye iterativamente, de elemento por elemento mientras no se haya encontrado la solución factible. La figura 2 muestra un pseudocódigo de este método de construcción.

```
procedure ConstructGreedyRandomizedSolution(Solution)
    Solution = {};
    for Solution construction not done →
        MakeRCL(RCL);
        s = SelectElementAtRandom(RCL);
        Solution = Solution ∪ {s};
        AdaptGreedyFunction(s);
    rof;
end ConstructGreedyRandomizedSolution;
```

Figura 2: Pseudocódigo de la fase de construcción de GRASP
Fuente: Feo & Resende (1995)

Lo que indica este pseudocódigo es que, mientras no se haya encontrado una solución, se ordenen todas las posibles variables a agregar a la solución en una lista ordenada de manera *greedy*. Que esté ordenada de manera *greedy* significa que las alternativas quedarán ordenadas de mayor a menor utilidad. Luego, se construye otra lista, la *Restricted Candidate List* (RCL), con las alternativas más *greedy*.

La cantidad de opciones a considerar en la RCL puede hacerse por diversos caminos. Una opción es considerar un parámetro α entre 0 y 1, llamaremos z_1 al primer valor de la lista (el mejor). Luego, para armar la RCL se consideran todas aquellas opciones que tengan un costo comprendido en $[z_1, (1+\alpha)\cdot z_1]$. Si el valor de la variable está en ese intervalo se considera dentro de la RCL. Una segunda alternativa para crear la RCL es simplemente fijar la cardinalidad de la lista.

Una vez que se crea la RCL, se escoge un elemento de la lista. La aleatoriedad de la elección de la alternativa es tal que sea más probable escoger una alternativa buena a escoger una mala. Una forma de lograr lo anterior es, suponiendo que la RCL tiene ρ elementos, que la probabilidad de escoger el mejor elemento sea de $\rho/(\sum_{i=1}^{i=\rho} i)$. La probabilidad de escoger la segunda mejor alternativa es de $(\rho-1)/(\sum_{i=1}^{i=\rho} i)$, y así sucesivamente hasta llegar que la probabilidad de escoger la peor alternativa de la RCL es de $1/(\sum_{i=1}^{i=\rho} i)$.

Una vez que se obtuvo el nuevo elemento a agregar a la solución inicial, se añade a la misma y se recalcula el beneficio de agregar el resto de las opciones a la solución para volver a iterar hasta llegar a una solución factible.

Una vez que se termina la fase de construcción y se obtiene una solución inicial, el siguiente paso es una fase de búsqueda local. A continuación, en la figura 3, se muestra el pseudocódigo de esta fase.

```
procedure local(P,N(P),s)
    for s not locally optimal →
        Find a better solution t ∈ N(s);
        Let s = t;
    rof;
    return(s as local optimal for P)
end local;
```

Figura 3: Pseudocódigo de la fase de búsqueda local metaheurística GRASP
Fuente: Feo & Resende (1995)

Esta fase consiste básicamente en moverse por soluciones vecinas hasta llegar a un óptimo local. Llámense soluciones vecinas a aquellas soluciones en que todas las variables menos una tienen exactamente el mismo valor. Es decir, esta fase consiste en que, si mejora la función objetivo alterando el valor de una sola variable, y el problema continúa siendo factible, entonces se modifica el valor de dicha variable hasta que se alcanza un óptimo local.

Una vez terminado el proceso de búsqueda, se guarda el óptimo local encontrado como solución de esa iteración de la metaheurística, y se compara con el incumbente (la mejor solución de las iteraciones anteriores). Si la función objetivo mejora, entonces se guarda esta nueva solución que pasa a ser el incumbente. Estas iteraciones se repiten hasta que se alcance el criterio de parada, entregando como solución final el último incumbente.

Trabajos reportados en la literatura

Para analizar si es una buena idea usar este algoritmo para resolver el problema, se estudiaron casos en que se usó esta metaheurística con éxito.

En el paper *A GRASP algorithm for flexible job-shop scheduling problem with limited resource constraints* Rajkumar et al. (2010) usan un algoritmo GRASP para solucionar el problema FJSSP (*flexible job-shop scheduling*) con restricciones de recursos limitados. Los resultados computacionales mostraron que el algoritmo de tipo GRASP produjo resultados significativamente mejores que algoritmos de otros autores para el mismo problema como el algoritmo genético.

También Delmaire et al. (1998) destacan la eficiencia de las heurísticas GRASP, superando con creces a acercamientos previos en cuanto a tiempo de resolución para el problema SSCPLP (*Single Source Capacitated Plant Location Problem*), y al compararse con experimentos usando CPLEX se confirmó la calidad de este tipo de heurísticas. El SSCPLP es comparable con el problema de asignación de alumnos. En ambos casos la capacidad (de planta o escuela) es limitada y si en uno los clientes deben ser servidos por solo una planta cada uno, en el otro los alumnos deben ir a solo una escuela cada uno.

Binato et al. (2002) usan una heurística GRASP para solucionar el JSP (*Job Shop Scheduling Problem*). Si bien el JSP no es un problema particularmente cercano al estudiado en esta tesis, el paper es particularmente interesante porque a la heurística le agregan dos conceptos nuevos: una estrategia de intensificación y POP (*Proximate Optimality Principle*). Pero descubren que, si bien la heurística general es competitiva para encontrar una solución aproximada para el JSP, mejora sólo de forma marginal al modificarla.

Tal vez de forma más importante, varios autores han usado heurísticas GRASP para solucionar problemas emparentados. Ya se discutió sobre cómo Liggett (1973) usó un algoritmo GRASP para optimizar la reasignación de alumnos debido a las nuevas políticas de desegregación de escuelas. También Pavez et al. (2016) aplicaron GRASP para solucionar el problema emparentado, SLP (*School location problem*). Al hacer esto se encontró una solución a solo un 3.1% del óptimo y que tomó menos de un 2% del tiempo necesario para encontrar la solución óptima.

DEFINICIÓN DEL PROBLEMA Y MODELO MATEMÁTICO

1.5 Definición del problema

Como se dijo en la introducción, la educación entregada por colegios de jornada parcial no es de un estándar deseado cuando se le compara con colegios integrales (Martinic, 2015). Para solucionar este problema se han desarrollado modelos que permiten proponer dar solución dadas las condiciones de un municipio o localidad. Estos modelos entregan una solución final, pero no el cómo llegar a ésta. Es más, Giesen et al. (2015) discuten la implementación del modelo de Mandujano et al. (2012), destacando que una de las mayores dificultades enfrentadas al momento de la implementación es el plan de transición, que si las construcciones no alcanzan a ser hechas durante las vacaciones, las autoridades no saben qué escuela debe atender a qué estudiante durante la transición, y al no saber responder dichas preguntas, la implementación no se lleva a cabo.

La transición del estado actual al propuesto es un problema porque en un municipio o localidad cuyas escuelas operan con hasta tres turnos, naturalmente la capacidad no será la suficiente como para que funcionen como colegios integrales. Por esto es de suma importancia decidir qué colegios ampliar primero, cuándo ampliarlos, cuántos turnos deben operar los colegios restantes durante los años de transición, dónde se deben relocalizar los alumnos mientras se están construyendo los colegios, entre otras variantes. En esta tesis se propone un modelo que permite obtener una solución a las interrogantes anteriores intentando incurrir en el menor costo total, intentando cambiar un menor número de veces a los alumnos de establecimientos escolares, e intentando terminar la transición en el menor tiempo posible. A continuación, se procederá a detallar los supuestos del modelo y las restricciones consideradas.

1.5.1 Principales Supuestos

Los principales supuestos que se asumieron en la creación del modelo son:

- El costo subjetivo de cambiar a un alumno de colegio es el mismo independiente de a qué colegio sea redirigido. Por ejemplo, si un alumno se cambia de colegio a uno al frente de donde está estudiando, el costo subjetivo que se incurre al cambiar al estudiante de establecimiento es el mismo a si se cambiara a un colegio a kilómetros de distancia. Vale la pena destacar que lo que sí se va a ver afectado es el costo de transporte, lo que se mantiene constante es la penalidad por haber cambiado al alumno de establecimiento afectando su educación.
- El costo de transporte se considera como la suma de la distancia recorrida por todos los alumnos por lo que cuesta mover a un alumno un kilómetro. Este parámetro es constante independiente de cuántos alumnos se estén moviendo. En otras palabras, no hay economías de escala.
- La capacidad de las salas es fija e inflexible para cada uno de los distintos grados. Esto quiere decir que, si la capacidad de la sala es de 25 alumnos, no va a ser posible asignar 26 alumnos a la misma a pesar de que sea solo uno más.
- La cantidad de alumnos que hay en todos los sectores de cada uno de los grados de cada año es conocida para todo el horizonte de planificación.
- El modelo no considera salas multiseriadas. En cada sala solo pueden estudiar alumnos de un mismo grado.

1.5.2 Restricciones consideradas

Las restricciones que se deben considerar al momento de formular el modelo son: (i) la capacidad de los colegios y los turnos a los que operan, (ii) el instante en que cada colegio efectivamente se vuelve integral, (iii) que varios colegios pueden tener los mismos administrativos; (iv) las salas operativas de un colegio al momento en que se construyen las salas, y finalmente (v) las restricciones presupuestarias. A continuación, se explica en más detalle cada una de éstas.

Capacidad de un Colegio

La capacidad de un colegio depende por un lado de la cantidad de salas que tenga, y por otro de la cantidad de turnos con la que opere. Por ejemplo, un colegio con cuatro salas operando a un turno tiene la misma capacidad que un colegio de dos salas operando a dos turnos. Es bastante común que las salas usadas en colegios parciales no cumplan con las características deseadas de un colegio integral (Rocha, 2015), por lo que si se tiene planificado crear un colegio integral con cuatro salas en un lugar donde actualmente hay un colegio con cuatro salas, éstas deben remodelarse y construir cuatro salas nuevas con la infraestructura correspondiente, a estas salas se les llamará "salas integrales". Aquellas salas que no sean integrales, se les llamará "salas temporales".

Colegio Integral

En este modelo, para que un colegio efectivamente sea considerado integral debe cumplir con tres condiciones: (i) tener todas sus salas integrales construidas, es decir, ya debe tener tantas salas integrales como se había planificado inicialmente (recordar que el estado final de los colegios es un dato para este modelo), (ii) no debe tener salas temporales operativas, (iii) debe operar con los grados que fue planeada, y la más importante, (iv) debe operar a jornada completa, a un solo turno. Cabe mencionar que no todos los colegios se vuelven integrales en la situación final. Los colegios que finalmente se volverán integrales son un *input* del problema.

Aglomeración de colegios

Tras conversaciones con Paulo Rocha, y según Villalobos (2012), es relativamente común que algunos administrativos trabajen en más de un colegio. Por ello hay grupos de colegios, en los que, si una de éstos está abierta, abrir el resto de los colegios de ese grupo no tiene costo administrativo extra, pues los mismos directores y administrativos trabajarían en los establecimientos de ese grupo.

Salas Operativas al momento en que se está remodelando el colegio

Cuando se están realizando trabajos en un colegio es razonable pensar que el mismo no va a estar operativo, o su capacidad disminuye. Un dato de este modelo es el porcentaje de salas disponibles al momento de construir salas integrales, es decir, si el colegio va a estar cerrado u operará a una fracción de su capacidad.

Restricción Presupuestaria

Por último, también se debe considerar la restricción presupuestaria. Si bien éste es un problema político, la forma en la que se pueden presentar las restricciones presupuestarias son muy variadas. En este caso se adaptó el modelo con la realidad brasileña, en el que los municipios destinan fondos para distintas funciones. Existen tres tipos de fondos: (i) un fondo destinado exclusivamente a transporte, (ii) otro destinado exclusivamente a personal administrativo y profesores, y (iii) un presupuesto municipal que el municipio puede usar en lo que estime conveniente. Esto significa que los costos en administración y operación de colegios pueden ser pagados tanto usando el fondo de personal administrativo como el fondo municipal en caso de que el primero no fuese suficiente. El caso es análogo para los costos de transporte, mientras que los recursos necesarios para la construcción de salas, tanto temporales como integrales, deben venir exclusivamente del presupuesto municipal.

1.6 Datos

A continuación, se presentarán los distintos datos necesarios para correr el modelo. En primer lugar, se mostrarán los conjuntos, seguido por los parámetros usados. Dentro de los parámetros se encuentran los costos, los presupuestos y otros parámetros importantes para el modelo.

3.3.1 Conjuntos

A continuación, en la tabla 1, se presentan los distintos conjuntos utilizados por el modelo.

Tabla 1: Descripción de conjuntos
Fuente: Elaboración propia

CONJUNTO	DESCRIPCIÓN
S	Conjunto de todas las escuelas
SX_i	Subconjunto de escuelas que pueden compartir directores y administrativos. Puede haber varios de estos subconjuntos.
ST	Conjunto de todos los subconjuntos de escuelas que pueden compartir directores y administrativos
SI	Subconjunto de las escuelas que se vuelven integrales
G	Conjunto de todos los grados[1]
B	Conjunto de todos los sectores[2]
T	Conjunto de todos los periodos o años
K	Conjunto de los tipos de sala. ({Integral, temporal})
P	Conjunto de los tipos de presupuestos. ({Transporte, Personal administrativo, Municipal})
H	Conjunto de los tipos de costos monetarios o directos. ({Transporte, Administrativo, Operacional, construcción de salas})

[1] Los grados son los distintos niveles escolares.

[2] Los sectores son los distintos lugares cerca de los hogares de los alumnos donde éstos pueden acceder a los buses.

3.3.2 Parámetros

Dentro de los parámetros utilizados se encuentran los costos, tanto monetarios como subjetivos, los distintos tipos de presupuestos de los municipios y otros parámetros necesarios para determinar la transición deseada.

Costos

Dentro de los costos existen dos grandes subgrupos: los costos directos, que son costos que se incurren explícitamente, y costos indirectos que corresponden a penalidades usadas en la modelación para castigar soluciones no deseadas y que se deben calibrar. A continuación, se muestran dos tablas de costos con sus respectivas definiciones: la 2 con los costos directos, y la 3 con los costos indirectos. Dentro de los costos directos considerados se encuentran: (i) el de transporte, (ii) el de construcción de salas, tanto integrales como temporales; (iii) el de administración de colegios, y finalmente (iv) el de operación de salas integrales y temporales.

Tabla 2: Costos directos
Fuente: Elaboración propia

COSTOS DIRECTOS	DESCRIPCIÓN
$Ctrans_{s,b}$	Costo de mover a un estudiante desde el sector *b* hasta el colegio *s*.
$CC_{s,k,t}$	Costo de construir una sala del tipo *k* en el colegio *s* en el periodo *t*.
$Cadmin_{sx,t}$	Costo de administración del grupo de colegios *SX* durante el periodo *t*.
$CO_{s,k,,t}$	Costo de operar una sala del tipo *k* en el colegio *s* en el periodo *t*.

Tabla 3: Costos indirectos
Fuente: Elaboración propia

COSTOS INDIRECTOS	DESCRIPCIÓN
Cmov	Costo de mover a un alumno de colegio.
$\boldsymbol{CNI_{s,t}}$	Costo de que el colegio *s* no sea integral en el año *t*.

Presupuestos

Como se mencionó, el municipio dispone de algunos fondos anuales que solamente pueden ser usados en algunas áreas. Por este motivo se van a tener distintos tipos de presupuestos ($B_{p,t}$) con una variable binaria que indica en qué se pueden gastar ($J_{p,k}$).

Tabla 4: Presupuestos
Fuente: Elaboración propia

PRESUPUESTO	DESCRIPCIÓN
$\boldsymbol{B_{p,t}}$	Presupuesto gubernamental del tipo *p* para el año *t*.
$\boldsymbol{J_{p,k}}$	Parámetro binario que toma el valor uno si el tipo de presupuesto *p* se puede usar para el tipo de gasto *k*.

Otros parámetros

En la tabla 5 que se presenta a continuación se muestran otros parámetros necesarios para el modelo:

Tabla 5: Otros parámetros para el modelo
Fuente: Elaboración propia

PARÁMETROS	**DESCRIPCIÓN**
$NS_{g,b,t}$	Cantidad de alumnos de grado *g* que están en el sector *b* en el año *t*.
$cp_{s,0}$	Cantidad de salas pendientes integrales iniciales para el colegio *s*.
$c_{s,temporal,0,p}$	Cantidad actual de salas del colegio *s* que operan a *p* número de turnos. Recordar que las salas actuales funcionan como salas temporales.
$CAP_{s,g}$	Cantidad de alumnos de grado *g* que puede tener una sala del colegio *s*.
$y_{s,g,b,0}$	Proporción inicial de los alumnos del sector *b* del grado *g* que van al colegio *s* sobre el total de alumnos del sector *b*.
$CG_{s,g}$	Cantidad de salas dedicadas al grado *g* que debe tener el colegio *s*.
$CTMAX_s$	Cantidad máxima de salas temporales que se pueden construir en el colegio *s*.
$CDIS_s$	Porcentaje de salas del colegio *s* que pueden estar disponibles al momento de hacer una construcción.

1.2 Modelo matemático

3.2.1 Variables

Las variables de este modelo se pueden separar en dos tipos: las variables de decisión, que son los resultados que efectivamente se buscaban y las variables auxiliares, que son variables usadas para ayudar a que se cumplan ciertas restricciones. A continuación, se describen ambos tipos de variables.

Variables de decisión

Aquí las variables de decisión son: la cantidad de salas integrales que se construye en el colegio *s* en el periodo *t* ($x_{s,t}$), la cantidad de salas temporales que se construye en el colegio *s* en el periodo *t* ($xt_{s,t}$), la proporción de alumnos del sector *b* del grado *g* que van al colegio *s* en el periodo *t* ($y_{s,g,b,t}$), y una variable binaria que vale 1 si el colegio *s* está operando a *p* turnos en el periodo *t* ($sh_{s,t,p}$). A continuación, en la tabla 6, se muestra una tabla con las variables de decisión principales del modelo.

Tabla 6: Variables de decisión principales
Fuente: Elaboración propia

VARIABLE PRINCIPAL	DESCRIPCIÓN
$x_{s,k,t}$	Cantidad de salas del tipo *k* que se construyen en el colegio *s* en el periodo *t.*
$y_{s,g,b,t}$	Proporción de alumnos del sector *b* del grado *g* que van al colegio *s* durante el periodo *t.*
$sh_{s,t,p}$	Variable binaria que vale 1 si el colegio *s* está operando a *p* turnos durante el periodo *t.*

Variables auxiliares

Estas variables se pueden derivar de las variables principales y se utilizan para que se puedan cumplir las condiciones necesarias de este problema. A continuación, en la tabla 7, se muestra una tabla con todas estas variables y una pequeña descripción de cada una.

Tabla 7: Variables de decisión auxiliares
Fuente: Elaboración propia

VARIABLE AUXILIAR	DESCRIPCIÓN
$xg_{s,g,t}$	Cantidad de salas operativas que el colegio *s* destina al grado *g* en el periodo *t*.
$c_{s,k,t,p}$	Cantidad de salas del tipo *k* que el colegio *s* tiene en el año *t* operando a *p* turnos.
$i_{s,t}$	Variable binaria que vale 1 si el colegio *s* es integral en el periodo *t* y 0 si no.
$co_{s,k,t}$	Cantidad de salas operativas del tipo *k* que tiene el colegio *s* en el periodo *t*.
$as_{sx,t}$	Variable binaria que vale 1 si hay algún colegio del subconjunto *SX* abierto en *t*.
$a_{s,t}$	Variable binaria que vale 1 si el colegio *s* está abierto en el año *t* y 0 si no.
$bc_{s,t}$	Variable binaria que vale 1 si en el colegio *s* se están construyendo salas integrales en el periodo *t* y 0 si no.
$cp_{s,t}$	Cantidad de salas integrales pendientes del colegio *s* en el periodo *t*.

$mov_{s,g,b,t}$	Número de alumnos de grado *g* del sector *b* que en el año t se cambian al colegio *s*
$b_{p,h,t}$	Parte del presupuesto del tipo *p* que será destinado al gasto del tipo *h*.

3.2.2 Costos y función objetivo

El objetivo del modelo matemático propuesto es lograr transformar la mayor cantidad de colegios en integrales antes de una fecha límite al menor costo posible. A continuación, se detallarán las partes de la función objetivo. Ésta considera algunos costos duros como el costo de construcción de salas temporales e integrales, costos administrativos de mantener colegios abiertos, costos operacionales, entre otros, y algunos costos blandos como el costo de que el colegio *s* no sea integral en *t*, o lo que cuesta mover a un alumno de colegio. A continuación, se muestran los distintos costos:

Costos directos

<u>Costo de transporte</u>: Corresponde a la suma sobre todos los periodos de la distancia recorrida por todos los alumnos de todos los paraderos de todos los grados para llegar a todos los colegios por el costo de mover a un alumno un kilómetro.

$$\sum_{s\in S}\sum_{g\in G}\sum_{b\in B}\sum_{t\in T} Ctrans_{s,b}\cdot NS_{g,b,t}\cdot y_{s,g,b,t} \tag{3.1}$$

<u>Costo operacional</u>: Corresponde a la suma de todos los costos variables de operación de las salas, considerando salas temporales e integrales por su respectivo costo de operación, para todos los periodos.

$$\sum_{s\in S}\sum_{t\in T}\sum_{k\in K} CO_{s,k,t}\cdot co_{s,k,t} \tag{3.2}$$

Costo administrativo: Corresponde a la suma de todos los costos administrativos incurridos de cada uno de los periodos. Si llega a haber algún colegio del conjunto *SX* en el periodo *t*, se multiplica por la variable binaria respectiva.

$$\sum_{sx\in ST}\sum_{t\in T} Cadmin_{sx,t}\cdot as_{sx,t} \tag{3.3}$$

Costo de construcción: Corresponde a la suma de todos los costos de construcción, sean éstos para construir salas temporales o integrales en cada uno de los periodos.

$$\sum_{s\in S}\sum_{t\in T}\sum_{k\in K} CC_{s,k}\cdot x_{s,k,t} \tag{3.4}$$

Costos indirectos

Los costos indirectos corresponden a costos que penalizan soluciones no deseadas. Cabe destacar que este costo, a diferencia de los costos directos, no son fácilmente medibles. Los dos grandes costos indirectos que se consideraron en este trabajo son: (i) un costo asociado a cambiar alumnos de colegio; y (ii) otro costo asociado en demorarse en transformar un colegio a integral. A continuación, se detallará cada uno de los costos anteriores.

Costo asociado a cambiar alumnos de colegio:

Éste costo representa la suma del producto de todos los cambios de alumnos de establecimiento escolar por la disposición al pago por no cambiar a un alumno de colegio.

Éste término, escrito matemáticamente con los términos anteriormente detallados es el siguiente:

$$\sum_{s\in S}\sum_{g\in G}\sum_{b\in B}\sum_{t\in T} Cmov \cdot mov_{s,g,b,t} \tag{3.5}$$

<u>Costo de que los colegios no sean integrales</u>:

Para modelar este problema, se considera una penalidad para incentivar a terminar antes de algún *deadline* determinado. Este costo debe ser lo suficientemente grande para que el modelo prefiera incurrir en todos los costos de construcción y redistribución de alumnos en lugar de incurrir en éste. Este costo es la suma sobre todos los años de no tener un colegio habilitado integralmente en el año *t*. Notar que si aún hay plazo, este valor puede ser cero. La notación matemática del costo ya mencionado es la siguiente:

$$\sum_{s\in SI}\sum_{t\in T} CNI_{s,t} \cdot (1 - i_{s,t}) \tag{3.6}$$

Función objetivo

Tras sumar todos los costos anteriores, la función objetivo es la siguiente:

$$\sum_{s\in S}\sum_{g\in G}\sum_{b\in B}\sum_{t\in T} Ctrans_{s,b}\cdot NS_{g,b,t}\cdot y_{s,g,b,t}+\sum_{s\in S}\sum_{t\in T}\sum_{k\in K} CO_{s,k,t}\cdot co_{s,k,t}$$
$$+\sum_{sx\in ST}\sum_{t\in T} Cadmin_{sx,t}\cdot as_{sx,t}+\sum_{s\in S}\sum_{t\in T}\sum_{k\in K} CC_{s,k,t}\cdot x_{s,k,t}$$
$$+\sum_{s\in SI}\sum_{g\in G}\sum_{b\in B}\sum_{t\in T} Cmov\cdot mov_{s,g,b,t} \tag{3.7}$$
$$+\sum_{s\in SI}\sum_{t\in T} CNI_{s,t}\cdot(1-i_{s,t})$$

1.2.3 Restricciones

En este problema se separa en 6 tipos de restricciones distintos: (i) de presupuesto, (ii) para verificar si el colegio es integral, (iii) de conservación de salas y colegios, (iv) sobre alumnos, (v) sobre las capacidades de cada establecimiento escolar, y finalmente (vi) sobre la naturaleza de las variables. A continuación, se detallarán cada uno de los distintos tipos de restricciones.

Restricciones de presupuesto

Los municipios en Brasil tienen presupuesto anual destinado a distintos ámbitos: (i) uno exclusivamente a transporte; (ii) otro a profesores y administrativos; (iii) y un último que puede ser destinado a lo que el municipio estime conveniente. Para poder modelar lo anterior en la formulación matemática se usaron las siguientes restricciones:

$$\sum_{h\in H} J_{p,h}\cdot b_{p,h,t}\leq B_{p,t} \qquad \forall p\in P,\ \ \forall t\in T \tag{3.8}$$

$$\sum_{s\in S}\sum_{g\in G}\sum_{b\in B} Ctrans_{s,b}\cdot NS_{g,b,t}\cdot y_{s,g,b,t}=\sum_{p\in P} J_{p,transport}\cdot b_{p,transporte,t} \quad \forall t\in T \tag{3.9}$$

$$\sum_{s\in S}\sum_{k\in K} CC_{s,k,t}\cdot x_{s,k,t} = \sum_{p\in P} J_{p,construcción}\cdot b_{p,construcción,t} \quad \forall t\in T \tag{3.10}$$

$$\sum_{sx\in ST} Cadmin_{sx,t}\cdot a_{sx,t} = \sum_{p\in P} J_{p,administración}\cdot b_{p,administración,t} \quad \forall t\in T \tag{3.11}$$

$$\sum_{s\in S}\sum_{k\in K} CO_{s,k,t}\cdot co_{s,k,t} = \sum_{p\in P} J_{p,operación}\cdot b_{p,operación,t} \quad \forall t\in T \tag{3.12}$$

La restricción (3.8) se asegura que todo lo gastado por cada uno de los presupuestos no exceda los mismos. La restricción (3.9) se asegura que en cada periodo la sume de lo gastado en transporte por cada uno de los distintos presupuestos sea igual al costo de transporte. Las restricciones (3.10), (3.11) y (3.12) son restricciones del mismo tipo que la (3.9), pero con el costo de construcción de salas, costo de administración de los colegios y costo operacional respectivamente.

Restricciones para verificar integralidad

Para que un colegio se considere integral debe cumplir las siguientes cuatro condiciones: (i) haber construido todas las salas que tenía planificado construir, (ii) no tener salas temporales, (iii) operar a un turno; y finalmente (iv) tener todas sus salas integrales operativas. Las restricciones para verificar dichas condiciones son:

$$cp_{s,0}\cdot\left(1-i_{s,t}\right) \geq cp_{s,t} - 0.5 \quad \forall s\in SI, \forall\, t\in T \tag{3.13}$$

$$M\cdot\left(1-i_{s,t}\right) \geq co_{s,temporal,t} - 0.5 \;\; \forall s\in SI, \forall t\in T \tag{3.14}$$

$$i_{s,t} - 0.5 \leq sh_{s,t,1} \quad \forall s\in SI, \forall t\in T \tag{3.15}$$

$$i_{s,t} \leq a_{s,t} \;\; \forall s\in SI, \forall t\in T \tag{3.16}$$

$$CG_{s,g} \cdot \quad _{s,t} \leq xg_{s,g,t} - 0.5 \quad \forall s \in SI, \forall g \in G, \forall t \in T \tag{3.17}$$

La restricción (3.13) se encarga de que $i_{s,t}$ solo pueda valer uno si el colegio s no tiene salas pendientes en t. La restricción (3.14) solo permite que la variable $i_{s,t}$ adquiera el valor de uno si el colegio s no tiene salas temporales operativas en t. La restricción (3.15) hace que la misma variable solo sea igual a uno si el colegio está operando a un solo turno. La restricción (3.16) hace que el colegio se considere integral solo si está operativo, y como la segunda restricción no permite que tenga salas temporales, ésta restringe a que esté operativo solo con salas integrales trabajando a un solo turno. Finalmente, la restricción (3.17) obliga que la variable $i_{s,t}$ solo valga uno si, para todos los grados, haya al menos la cantidad de salas operativas que se tenía planeado construir. Además, se incorpora una restricción (3.35), que se detallará más adelante, que no permite que se construyan más salas que las que se tenía planeado. Por lo tanto, para que la variable binaria $i_{s,t}$ valga uno, el colegio debe operar con todos los grados con la cantidad de salas que se había planeado originalmente.

Restricciones en conservación de salas y colegios

Este tipo de restricciones vincula las salas de distintos periodos para que se conserven a través del tiempo. También determinan la cantidad de salas destinadas a cada grado en cada colegio en cada periodo, según el número de salas que se tengan disponibles y la cantidad de turnos a la que se esté operando. Las restricciones de este tipo son las siguientes:

$$sh_{s,t,shift} \cdot M \geq c_{s,k,t,shift} \quad \forall s \in S, \forall k \in K, \forall t \in T, \forall shift \in SH \tag{3.18}$$

$$\sum_{shit \in SH} sh_{s,t,shift} = 1 \quad \forall s \in S, \forall t \in T \tag{3.19}$$

$$M \cdot as_{sx,t} \geq \sum_{s \in S} a_{s,t} \qquad \forall SX \in ST, \qquad \forall t \in T \tag{3.20}$$

$$M \cdot a_{s,t} \geq \sum_{k \in K} co_{s,k,t} \qquad \forall s \in S, \forall t \in T \tag{3.21}$$

$$\sum_{g \in G} xg_{s,g,t} = \sum_{k \in K} co_{s,t} \qquad \forall s \in S, \forall t \in T \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned} \sum_{shift \in SH} c_{s,temporal,t,shift} \\ = \sum_{i=1}^{i=t} x_{s,temporal,i} - \sum_{shift \in SH} c_{s,temporal,0,shift} \cdot \sum_{i=1}^{i=t} bc_{s,i} \\ + Cdis_s \cdot \sum_{shift \in SH} c_{s,temporal,0,shift} \cdot bc_{s,t} \quad \forall s \in S, \forall t \in T \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$co_{s,k,t} \leq \sum_{shift \in SH} shift \cdot ct_{s,k,t,shift} \qquad \forall s \in S, \forall k \in K, \forall t \in T \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned} \sum_{shift \in SH} c_{s,integral,t+1,shift} = \sum_{shift \in SH} c_{s,integral,t,shift} + x_{s,integral,t} \qquad \forall s \\ \in SI, \forall t \in \{1, \dots, Tmax - 1\} \end{aligned} \tag{3.25}$$

$$i_{s,t} \geq i_{s,t-1} \qquad \forall s \in S, \forall t \in T \tag{3.26}$$

La restricción (3.18) es del tipo *Big M*. Ésta hace que solamente existan salas, tanto temporales como integrales, operando a *shift* turnos si el colegio opera a *shift* turnos. La restricción (3.19) obliga que la variable binaria $sh_{s,t,shift}$ solo sea igual a uno para un *shift* determinado en todas las escuelas y periodos.

Las restricciones (3.20) y (3.21) también son del tipo *Big M*. La primera se activa si hay algún colegio abierto en el subconjunto de colegios *SX*, para que la variable binaria $as_{sx,t}$

sea igual a uno en tal caso. La segunda hace que la variable binaria $a_{s,t}$ valga uno solo si el colegio *s* tiene salas operativas (sean integrales o temporales), en el periodo *t*. La restricción (3.22) indica que la suma sobre los grados de todas las salas debe ser igual al número de salas operativas (sean integrales o temporales) en el periodo *t*. La restricción (3.23) indica que el número de salas temporales, independientemente de la cantidad de turnos en la que operen, debe ser igual al número de salas temporales que se hayan construido hasta entonces más las salas iniciales siempre y cuando no se hayan construido salas integrales con anterioridad, dado que en ese caso quedan inutilizadas las salas temporales iniciales para construir las integrales. En caso de que ese colegio esté en construcción, se pueden habilitar el $CDIS_s$ por ciento de las salas del colegio *s*.

La restricción (3.24) amplifica la cantidad de salas operativas (tanto integrales como temporales) según la cantidad de turnos que esté operando cada una. Por ejemplo, si un colegio tiene tres salas temporales operando a dos turnos, entonces la cantidad de salas operativas temporales que puede tener son máximo seis. La restricción (3.25) indica que la cantidad de salas integrales que se tienen en el periodo *t+1*, independientemente de los turnos a los que estén operando, es igual a las salas integrales totales del periodo *t* más las que se están construyendo. Finalmente, la restricción (3.26) garantiza que una vez que un colegio comienza a funcionar a tiempo integral, lo seguirá haciendo en el futuro.

Restricciones sobre alumnos

Estas restricciones aseguran que todos los alumnos sean asignados a un colegio, que los alumnos asignados a un colegio quepan en el mismo, y permiten tener un registro de la cantidad de estudiantes que se han cambiado de colegio.

$$mov_{s,g,b,t} \geq NS_{g,b,t} \cdot (y_{s,g-1,b,t-1} - y_{s,g,b,t}) \forall s \in S, \forall g \in \{2,..,Gmax\}, \forall b \in B, \forall t \in T \qquad (3.27)$$

$$mov_{s,g,b,t} \geq 0 \qquad \forall s \in S, \forall g \in G, \forall b \in B, \forall t \in T \qquad (3.28)$$

$$\sum_{s\in S} y_{s,g,b,t} = 1 \qquad \forall g \in G, b \in B, t \in T\colon \ \{NS_{g,b,t} > 0\} \tag{3.29}$$

$$\sum_{b\in B} NS_{g,b,t} \cdot y_{s,g,b,t} \leq xg_{s,g,t} \cdot CAP_g \quad \forall s \in S, \forall g \in G\ \forall t \in T \tag{3.30}$$

La restricción (3.27) registra cantidad de alumnos que se cambian de colegio en el periodo t. La restricción (3.28) se asegura de que los movimientos sean no negativos. La restricción (3.29) obliga a que todos los alumnos de todos los grados, sectores y periodos, sean asignados a algún colegio. Finalmente, la restricción (3.30) indica que la cantidad de alumnos del grado g que van a un colegio no puede exceder la capacidad de una sala por la cantidad de salas operativas que tenga ese colegio destinado para el grado g.

Restricciones de capacidad en cada colegio

Estas restricciones obligan al modelo a que no se construyan más salas temporales de las que realmente caben en el colegio, llevar un registro de si en el colegio *s* se han construido salas integrales, y registrar cuántas salas pendientes quedan en cada periodo

$$\sum_{t\in T} x_{s,temporal,t} \leq CTmax_s \qquad \forall s \in S \tag{3.31}$$

$$bc_{s,t} \cdot M \geq x_{s,integral,t} \qquad \forall s \in SI, \forall t \in T \tag{3.32}$$

$$x_{s,integral,t} \geq bc_{s,t} \qquad \forall s \in SI, \forall t \in T \tag{3.33}$$

$$cp_{s,t} = cp_{s,t-1} - x_{s,integral,t} \qquad \forall s \in SI, \forall t \in T \tag{3.34}$$

$$\sum_{t\in T} x_{s,interal,t} \leq cp_{s,0} \qquad \forall s \in SI \tag{3.35}$$

La restricción (3.31) indica que la suma de todas las salas temporales que se construyeron en un colegio no puede exceder a la cantidad máxima de salas temporales que caben en el mismo. La restricciones (3.32) y (3.33), al igual que varias de las anteriores, es del tipo *BigM* (aunque el M grade de la restricción 3.33 es 1), que obliga a la variable $bc_{s,t}$ tomar el valor uno si se están construyendo salas en el colegio *s* durante el año *t* (3.32) o cero en caso contrario (3.33). La restricción (3.34) indica que la cantidad de salas pendientes en el periodo *t* en el colegio *s* es igual a la cantidad de salas pendientes que tenía el colegio en el periodo anterior menos la cantidad de salas integrales que se construyeron en el periodo anterior (t-1). Finalmente, la restricción (3.35) obliga al modelo a no crear más salas de las que se tenía planeado originalmente. Esto es porque, dado que existen distintos tipos de colegios, puede que el óptimo sea una opción que no se encuentra dentro de dichos tipos.

Restricciones de naturaleza de las variables

Las últimas restricciones que se deben agregar son las de la naturaleza de las variables. Éstas son:

$$x_{s,k,t} \in Z^{+} \cup \{0\} \qquad \forall s \in S, \forall k \in K\ \forall t \in T \tag{3.36}$$

$$y_{s,g,b,t} \geq 0 \qquad \forall s \in S, \forall g \in G, \forall b \in B, \forall t \in T \tag{3.37}$$

$$sh_{s,t,shift} \in \{0,1\} \qquad \forall s \in S, \forall t \in T, \forall shift \in SH \tag{3.38}$$

$$xg_{s,g,t} \in Z^{+} \cup \{0\} \qquad \forall s \in S, \forall g \in G, \forall t \in T \tag{3.39}$$

$$c_{s,k,t,shift} \in Z^{+} \cup \{0\} \qquad \forall s \in S, \forall k \in K, \forall t \in T, \forall\ shift \in SH \tag{3.40}$$

$$i_{s,t} \in \{0,1\} \qquad \forall s \in SI, \forall t \in T \tag{3.41}$$

$$co_{s,k,t} \in Z^{+} \cup \{0\} \qquad \forall s \in S, \forall k \in K, \forall t \in T \tag{3.42}$$

$$as_{sx,t} \in \{0,1\} \quad \forall SX \in ST, \forall t \in T \tag{3.43}$$

$$a_{s,t} \in \{0,1\} \quad \forall s \in S, \forall t \in T \tag{3.44}$$

$$bc_{s,t} \in \{0,1\} \quad \forall s \in SI, \forall t \in T \tag{3.45}$$

$$cp_{s,t} \in Z^{+} \cup \{0\} \quad \forall s \in SI, \forall t \in T \tag{3.46}$$

$$mov_{s,g,b,t} \in Z^{+} \cup \{0\} \quad \forall s \in S, \forall g \in G, \forall b \in B, \forall t \in T \tag{3.47}$$

$$b_{p,h,t} \geq 0 \quad \forall p \in P, \forall h \in H, \forall t \in T \tag{3.48}$$

METODOLOGÍA DE RESOLUCIÓN

En un comienzo se corrió el modelo anterior sin usar ninguna heurística para tener una noción de qué tan necesaria es la misma. El resultado de lo anterior fue que Gurobi (*software* de optimización comercial), para un municipio de 18 escuelas, 18 zonas, 8 años de horizonte y 11 grados (un municipio real de tamaño medio), tomó más de cuatro semanas en encontrar una solución. La demora anterior se debe a la gran cantidad de variables de decisión que hay, dado que se debe asignar a qué colegio van los alumnos de todos los grados de todas las zonas de todos los periodos.

Para acelerar la resolución del problema, se programó una heurística que le entrega al software de optimización una solución inicial mejorada para iniciar la poda. La heurística se basó en el algoritmo GRASP, ya que esta heurística fue probada de manera exitosa en los modelos de localización de la tesis Mandujano et al. (2012) por Pavez et al. (2016). Un detalle que se debe considerar es que el problema tratado en esta tesis, al igual que el problema estratégico de Mandujano et al. (2012), es un problema de localización. Como ya se mencionó en la revisión bibliográfica, la metaheurística GRASP consta de dos fases: la primera fase de construcción de una solución inicial, y la segunda fase de mejora local. A continuación, se explicará cada una de las siguientes fases.

1.3 Fase de construcción

La fase de construcción de la metaheurística GRASP consiste en tomar las X mejores decisiones vecinas, ordenarlas de mejor a peor y asignar a cada una la probabilidad de ser escogida. La mejor alternativa va a tener una probabilidad más alta de ser escogida que la peor. Si la cantidad de alternativas a considerar por esta heurística es X, la probabilidad de escoger la mejor alternativa es de $\frac{X}{\sum_{i=1}^{i=X} i}$; la de escoger la segunda mejor alternativa es de $\frac{X-1}{\sum_{i=1}^{i=X} i}$, y así sucesivamente hasta que la probabilidad de escoger la peor de las X alternativas sea de $\frac{1}{\sum_{i=1}^{i=X} i}$.

Para encontrar el valor del largo de la lista de alternativas a considerar (RCL), se aplicó la heurística para el caso del municipio de Axixa 100 veces con distintos largos de RCL. A continuación, en la figura 4 se muestra un gráfico de cajas con los distintos valores de la función objetivo y distintos largos de la RCL.

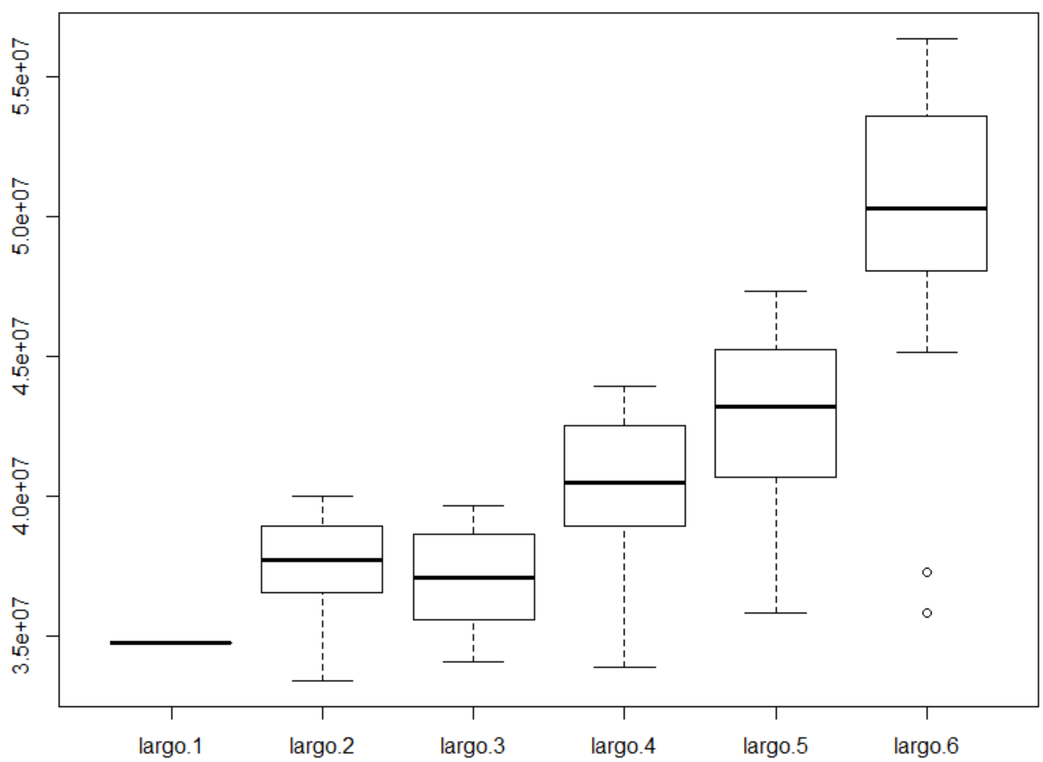


Figura 4: Gráficos de cajas con resultados GRASP según largo de RCL
Fuente: Elaboración propia

En el gráfico se puede apreciar que, si el largo de la lista es uno, la heurística es completamente *Greedy*. Un algoritmo *Greedy* es aquel que se mueve a la mejor solución vecina. Por ser completamente *Greedy*, tiene varianza cero, ya que en cada solución siempre toma la mejor solución vecina independientemente de la semilla que se esté usando en la corrida. A medida que aumentan los largos de la RCL, la varianza aumenta, y el promedio tiende a aumentar, pero el mínimo puede llegar a ser menor que el caso completamente *Greedy*. En efecto, en el caso planteado con anterioridad, el mínimo del caso de largo dos es muy cercano a cuando se tiene largo uno, y el mínimo del caso tres es menor al *Greedy*.

En este trabajo, se corrió la heurística cinco veces. La primera vez se considera un RCL de largo uno dado que, si se corriera más veces con ese largo, la solución entregada sería la misma. Las cuatro veces restantes se corrió la heurística con un largo de RCL de tres.

A continuación, se explicará de una manera más detallada cómo funciona el algoritmo.

1.3.1 Inicio de la heurística

Lo primero que hace esta heurística es transformar escuelas *multigraded* (EM) en escuelas *singlegraded* (ES). Una EM es aquel establecimiento escolar que en una sala recibe alumnos de distintos grados para hacer la clase. Por lo general, para realizar las clases, los grados son agregados en *levels*, que son aglomeraciones de varios grados. Lo que se hizo con este tipo de escuelas fue transformarlas en *singlegraded* en el primer año.

Para transformar las EM a ES en la heurística, se reasignaron los alumnos de las escuelas *multigraded*. Para esto, se revisan todos los alumnos que van a una escuela *multigraded* cualquiera, todas las salas operativas que tienen todas las escuelas *multigraded* y se estudia cuándo y cómo asignar a los nuevos alumnos.

La forma de analizar esta nueva asignación es, en primer lugar, ver cuántos alumnos en promedio deben ir por sala por cada grado. Para calcular este promedio, a priori se asume que se asigna una sola sala por grado, con esto se calcula la cantidad promedio de alumnos por sala para cada grado, y si la cantidad de salas operativas es mayor a las salas que se están usando por ahora, entonces se aumenta la cantidad de salas del grado con mayor promedio de alumnos. Luego se recalcula y se repite hasta que el número de salas usadas sea igual al número de salas operativas.

Si alguno de estos promedios es mayor a la capacidad de una sala, se aumentan los turnos de las escuelas *multigraded*. Para evaluar qué escuela aumenta sus turnos, para el grado que tiene el mayor promedio de alumnos (y al mismo tiempo sobre la capacidad de una sala), se evalúan los costos de transporte de construir una sala adicional en cada uno de los colegios que aún pueden aumentar sus turnos. El cálculo del costo de transporte se realiza de manera *greedy*. Éste se calcula asignando a cada alumno al colegio *multigraded* que tiene más cercano.

En el caso de que todas las salas alcancen sus turnos máximos, y aún no queden salas operativas, entonces se empiezan a crear salas temporales hasta que todos los promedios de alumnos de todos los grados estén por debajo de la capacidad de una sala.

A continuación, se presentará un ejemplo que ilustra lo anteriormente explicado. Supóngase que hay tres colegios *multigraded* con las características descritas en la tabla 8.

Tabla 8: Datos ejemplo transformación a ES
Fuente: Elaboración propia

Colegio	Salas	Turnos	Salas operativas	Alumnos grado 1	Alumnos grado 2	Alumnos grado 3	Alumnos grado 4
1	1	2	2	10	10	10	10
2	2	1	2	15	10	10	5
3	2	1	2	10	15	10	5

También supóngase que la capacidad de una sala es de 20 alumnos para todos los grados, y la cantidad máxima de *shifts* es de dos.

El primer paso es calcular la cantidad total de salas que tienen las EM. Luego, se calcula el total de estudiantes de los distintos grados que están en EM. Una vez que se obtiene este valor, se asume que a cada uno de los grados donde hay estudiante se le asigna una sala. Luego se calcula el promedio de alumnos por sala y se le asigna una sala al grado más congestionado. El procedimiento anterior se repite hasta que la cantidad total de salas usadas y la cantidad total de salas disponibles sean iguales. El las tablas 9, 10 y 11 se puede apreciar cómo serían los resultados de estas iteraciones.

Tabla 9: Primera iteración ejemplo transformación a ES
Fuente: Elaboración propia

Grado	**Cantidad de alumnos**	**Cantidad de salas**	**Promedio de alumnos por sala**
1	35	1	35
2	35	1	35
3	30	1	30
4	20	1	20
Salas operativas: 6		Salas ocupadas: 4	

Tabla 10: Segunda iteración ejemplo transformación a ES
Fuente: Elaboración Propia

Grado	**Cantidad de alumnos**	**Cantidad de salas**	**Promedio de alumnos por sala**
1	35	2	17.5
2	35	1	35
3	30	1	30
4	20	1	20
Salas operativas: 6		Salas ocupadas: 5	

Tabla 11: Tercera iteración ejemplo transformación a ES
Fuente: Elaboración propia

Grado	Cantidad de alumnos	Cantidad de salas	Promedio de alumnos por sala
1	35	2	17.5
2	35	2	17.5
3	30	1	30
4	20	1	20
Salas operativas: 6		Salas ocupadas: 6	

Una vez que la cantidad de salas operativas es igual a la cantidad de salas ocupadas, y aún quedan grados con promedio mayor a la capacidad de una sala, entonces se aumentan los turnos de un colegio. Para determinar qué colegio aumenta el número de turnos a los que funciona, se evalúa, de los colegios que aún no están a capacidad máxima de turnos, cuál es la que tiene menor distancia física a los alumnos. A continuación, se presenta lo anterior en el ejemplo.

$$Costo\ aumentar\ turnos\ colegio\ 1: \infty$$

$$Costo\ aumentar\ turnos\ colegio\ 2: \sum_{i \in alumnos\ de\ grado\ 3} dist\ entre\ alumno\ i\ y\ colegio\ 2$$

$$Costo\ aumentar\ turnos\ colegio\ 3: \sum_{i \in alumnos\ de\ grado\ 3} dist\ entre\ alumno\ i\ y\ colegio\ 3$$

Supongamos que en este ejemplo el costo de transporte del colegio 2 es 15, y el costo del colegio 3 es 13.

En ese caso se aumenta la cantidad de turnos del colegio 2, y se pone en el segundo turno una sala operativa del grado 3.

1.3.2 Iteración por periodo

Una vez que todos los establecimientos escolares se transformaron a ES, en cada periodo se realizan tres pasos:

- Asignación de salas recién construidas.
- Asignación de salas para alumnos de primer año.
- Determinar qué colegio construir en el periodo y reasignación de alumnos.

A continuación, se explica más en detalle cada uno de los pasos mencionados.

a) <u>Asignación de salas recién construidas</u>: En el caso de que en el periodo anterior se hubiesen construido colegios nuevos, el primer paso es asignar qué alumnos deben ir a dicho establecimiento. Es bueno recordar que un *input* del problema anterior es cuántas salas se deben tener destinadas para cada grado (por ejemplo, una sala para cada grado). Como la cantidad de salas por grado no es variable de decisión, la elección de qué alumno asignar al colegio recién construido es bastante sencilla. A priori, los alumnos que se asignarán al colegio serán los alumnos que antes de la construcción estudiaban en el establecimiento. El siguiente paso es determinar si la cantidad de estudiantes asignados a la escuela es la adecuada.

   Si la capacidad no es lo suficientemente grande como para permitir que todos los alumnos que antes iban a ese colegio sigan en el mismo, entonces solo se dejan a los estudiantes que se encuentren más cerca de la institución. Se asignarán al establecimiento tantos alumnos como capacidad tenga. Los alumnos que no son asignados se mantienen en los colegios temporales a los que anteriormente estaban asociados. Notar que dentro de los alumnos no asignados están algunos que antes atendía esta escuela, pero dejó de tener salas destinadas a su grado.

En el caso de que la cantidad de alumnos sea inferior a la capacidad de la sala, se buscan los alumnos más cercanos al colegio de dicho grado que estén estudiando en una escuela no integral para asignarlos a ésta, dándole prioridad a alumnos que estén estudiando en algún colegio que en el periodo anterior haya tenido que instalar salas temporales. Esto sucede, por ejemplo, cuando en el colegio se han instalado salas para grados que antes no estudiaban en el mismo.

Es bueno recalcar que las decisiones anteriores son completamente *greedy*. Esto se debe a que, incluso si se quisiera hacer GRASP en la solución, la situación sería exactamente la misma que la hecha de manera miope después de hacer la fase de mejora, solo enlenteciendo el programa.

b) <u>Asignación de salas para alumnos de primer año</u>: Una vez que se definieron los alumnos que van a los colegios recién construidos, el siguiente paso es determinar donde asignar a los alumnos de primer año. En primer lugar, se realiza un análisis de capacidad. Luego se calcula el cociente entre el número total de alumnos de primero y el total de salas integrales destinadas a alumnos de primero.

Si el cociente anteriormente calculado es inferior o igual a la capacidad, entonces solo se asignan los alumnos de primero a colegios integrales. La asignación de alumnos a colegios, en este caso, es completamente *greedy*. Es decir, se toma la menor distancia entre un alumno de primer grado no asignado y un colegio que le quede capacidad y se asigna al mismo. Lo anterior se repite hasta que todos los alumnos de primero estén asignados.

En el caso de que el cociente anterior sea mayor que la capacidad de una sala, en primer lugar, se asignan alumnos de primero a los colegios integrales más cercanos, hasta que todos los colegios integrales estén a capacidad. La prioridad de los colegios integrales sobre los temporales con los alumnos de primero se debe principalmente a que, al ser asignados inmediatamente a colegios integrales, estos estudiantes no tendrán que cambiarse de colegio en el futuro. Una vez que todos los colegios integrales están a capacidad, se evalúa cuántas salas de colegios parciales son necesarias. Para determinarlo, se calcula un nuevo cociente entre la cantidad de alumnos de primero que no fue asignada con la capacidad de una sala. La cantidad de salas necesarias será la aproximación al entero superior del cociente anterior.

Si la cantidad de salas adicionales necesarias es menor a la cantidad de salas que el año anterior fueron destinadas a alumnos de último año, se calcula la suma de las distancias de los alumnos de primero más cercana a cada escuela. La cantidad de alumnos que se suman es igual a la capacidad de una sala. Luego se ordenan de menor a mayor y se toman las *k* primeras opciones, siendo *k* el largo de la RCL de la heurística de GRASP. Recordar que el valor de *k* varía dependiendo de la iteración en que se encuentre. Finalmente, se utiliza el criterio de elección GRASP para elegir el colegio. Una vez que se elige el colegio, se vuelven a actualizar las distancias y se repite el proceso hasta que todos los alumnos son asignados. Cabe destacar que como la cantidad de salas adicionales necesarias es menor a la cantidad ya desocupadas por los alumnos graduados de los colegios parciales, no es necesario aumentar turnos o asignar salas nuevas pues las ya existentes tienen capacidad suficiente.

Si la cantidad de salas adicionales necesarias es mayor a la cantidad de salas que fueron usadas por los alumnos que ya terminaron su educación, es necesario destinar estudiantes a nuevas salas. Para lo anterior, además de considerar la suma de la distancia de los alumnos, se le adiciona el costo de construir una sala temporal en el caso de ser necesaria o el costo de aumentar los turnos (un aumento en el costo administrativo del colegio). Como se utiliza la heurística GRASP, la elección de salas tiene un componente aleatorio. Por lo mismo puede que se elija construir una sala temporal o utilizar una sala en un turno extra antes de usar una sala ya disponible. Por lo mismo si ya se adicionaron las suficientes salas como para que el número promedio por alumno por sala sea menor que la capacidad de la misma, se dejan de considerar las nuevas salas temporales o los turnos extra.

c) Determinar qué colegios construir en el periodo y reasignación de alumnos: Cuando ya se asignaron los alumnos de primer año, el siguiente paso es determinar qué colegios construir. Para esta elección se calculan los costos de reasignación de alumnos de aquellos colegios en los que aún queda presupuesto municipal para ampliarse. Los costos considerados son el costo de transporte de alumnos, el costo de construcción de salas temporales y/o de aumento de turnos en el caso de ser necesario.

   Para la elección de a qué colegio transferir los alumnos cuyo establecimiento entra en construcción se evalúa el colegio más cercano parcial que tenga una sala operativa para su grado con capacidad disponible. En el caso de que ningún colegio tenga salas con capacidad disponible, se evalúa si alguno de los colegios cercanos puede tener una sala con otro turno o es necesario crear una sala temporal adicional. Para cada colegio temporal (siempre que alcance el presupuesto municipal para ampliarlo ese año), se calcula el costo de trasladar los alumnos más el de crear salas temporales o más turnos.
   Una vez que se tienen todos los costos de todos los colegios que se pueden ampliar, se utiliza el criterio GRASP de elección. Recordar que el criterio GRASP es ordenarlos de menor a mayor, tomar los *k* primeros, siendo *k* el largo del RCL, y se elige con probabilidad $\frac{k}{\sum_{i=1}^{k} i}$ la mejor opción, con probabilidad $\frac{k-1}{\sum_{i=1}^{k} i}$ la segunda mejor opción y así sucesivamente con las k primeras opciones.

1.4 Fase de mejora

En esta fase se lleva la solución anterior a un óptimo local. Para conseguir lo anterior, se hacen 3 pasos:

a) El primer paso es asegurarse que todos los alumnos no vayan a colegios que se encuentren muy lejos unos de otros. Para esto, para los colegios que se encuentren más cerca y aún le quede capacidad, lo que se hace es comparar la disminución del costo de transporte con el cambio de mover alumnos de colegio. Cabe mencionar que si el alumno ya fue movido de colegio ese mismo periodo no se incurre nuevamente en dicha penalización, mientras que, si se quiere cambiar al alumno de un colegio de jornada completa a otro de jornada parcial, la penalización por cambiar al alumno del colegio es el doble. Esto se debe a que como el estudiante va a estar en un colegio parcial, en algún momento va a tener que volver a cambiarse a otro de jornada completa.

b) El segundo paso es evaluar si cerrar alguna sala que esté desocupada. Acá hay un *trade off* entre el costo de operación de las salas con un aumento en los costos de transportes más el costo de mover alumnos de colegio. En general, si una sala está muy desocupada, puede que valga la pena moverlos de colegios a establecimientos más lejanos para ahorrarse el profesor. Esta mejora evita salas con baja ocupación.

c) El tercer y último paso consiste en evaluar si cerrar un colegio. Puede que existan colegios pequeños con una sala con alta ocupación. Como la sala está ocupada no va a convenir que se cierre, pero si al costo operacional de la sala se le suma el costo de administración del colegio, puede que valga la pena cerrarse. Se compara el costo de cambiar alumnos de colegio y un aumento en el costo de transporte versus el costo administrativo del colegio más el costo operacional de sus salas. Esta mejora evita tener colegios pequeños.

CASOS DE ESTUDIO

Para entender y analizar el problema anteriormente planteado, se planteará el problema en dos ejemplos: un ejemplo ficticio pequeño, un ejemplo real mediano (el municipio brasileño de Axixa) y un ejemplo real grande (el municipio de Timon). Es bueno mencionar que en cada uno de los casos que se evaluará, por simplicidad, se asumirá que si se quiere abrir un establecimiento escolar se va a tener que incurrir en el costo administrativo correspondiente, a menos que se indique lo contrario.

Para los ejemplos reales, para estimar la cantidad de alumnos futura en cada grado en cada sector se asumió una tasa de aprobación de un 100% y una deserción nula. Ello implica que si en el año t hay un número determinado de alumnos del grado g en algún sector, al año siguiente habrá la misma cantidad de alumnos en el grado siguiente.

Para estimar los alumnos de primer año que llegarán a los distintos sectores se utilizó un modelo de Holt. Éste es un modelo con tendencia sin estacionalidad. Se escogió un modelo de Holt sobre el resto de los modelos ya que al ver un gráfico con los datos, se pudo ver que no existe estacionalidad en el número de alumnos que van llegando a los distintos sectores. A continuación, en el gráfico de la figura 5 se muestra un ejemplo con datos del municipio brasileño de Axixa con la cantidad de alumnos de primer año en los distintos periodos.

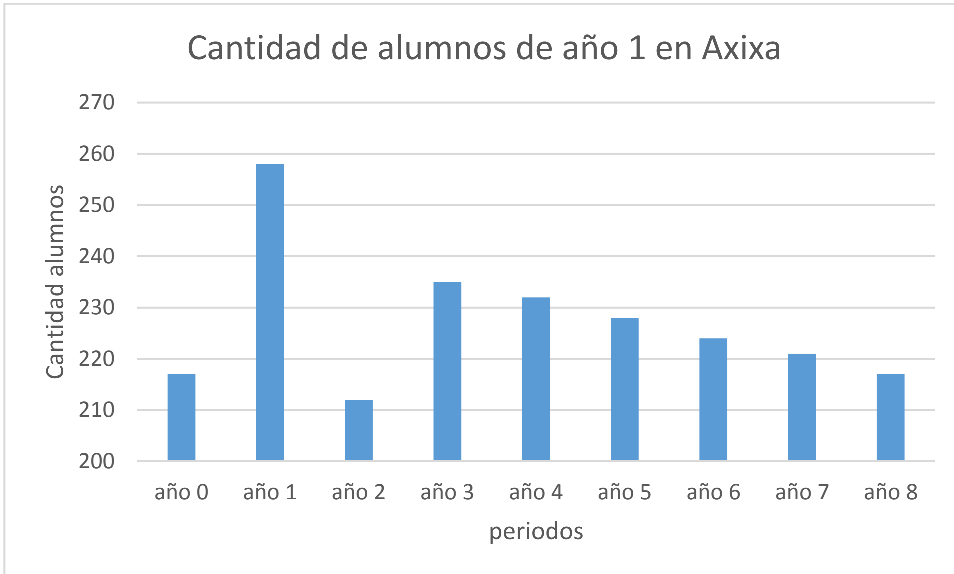


Figura 5: Gráfico con número de alumnos de primer año en Axixa
Fuente: Elaboración propia

Una vez aclarado lo anterior, procederá a detallar cada uno de los ejemplos inicialmente mencionados.

1.5 Ejemplo ficticio pequeño

Este ejemplo tiene ocho sectores, tres colegios, cuatro grados y tres períodos. En la figura 6 se muestra un mapa con los colegios y con los sectores. Para mayor información sobre las distancias, consultar el anexo 1 del documento.

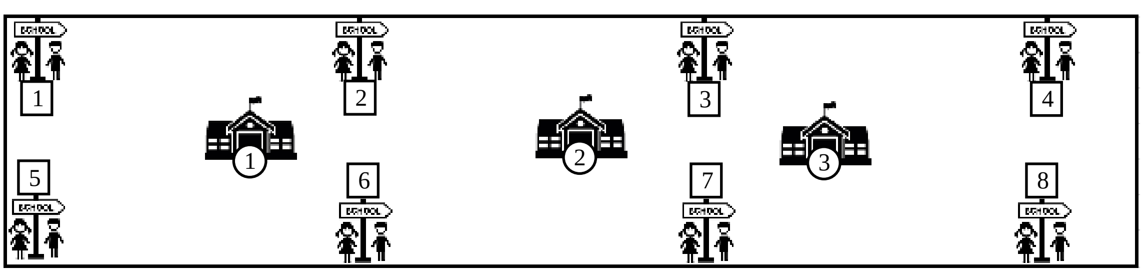


Figura 6: Mapa de ejemplo ficticio
Fuente: Elaboración propia

Cada sector tiene 10 alumnos, y por simplicidad se hizo que cada vez que un alumno egresa en algún periodo, al año siguiente ingresan la misma cantidad de alumnos en el grado 1. Por ejemplo, si en el sector 1 hay cinco alumnos en el grado 4 (último grado de este ejemplo) en el año 1, en el año 2 ingresan cinco alumnos en el grado 1. También se asume que hay una aprobación del 100%. Es decir, si en el año *t* hay una cantidad *x* de alumnos en el grado *g*, en el año *t+1* van a haber *x* alumnos en el grado *g+1*. En el anexo 2, se puede encontrar de manera más detallada la distribución de alumnos de los distintos sectores de los distintos grados, y en los distintos periodos.

Cada sala puede funcionar con 10 alumnos como máximo por turno. Por ejemplo, si un colegio funciona a un turno, cada sala tiene una capacidad de 10 alumnos. Si un colegio funcionara a dos turnos, cada sala tendría una capacidad de 20 alumnos (10 de un grado y 10 de otro, no es necesario que sea el mismo grado). La distribución inicial de salas, de los turnos y de la cantidad de alumnos que va a cada colegio se puede apreciar en la tabla 12 que se presenta a continuación:

Tabla 12: Distribución inicial de salas, turnos y alumnos en los distintos colegios
Fuente: Elaboración propia

Colegio	**Salas**	**Turnos**	**Alumnos grado 1**	**Alumnos grado 2**	**Alumnos grado 3**	**Alumnos grado 4**	**Alumnos totales**
1	2	1	0	10	0	10	20
2	2	2	10	10	10	10	40
3	1	2	10	0	10	0	20

En la tabla 12 se puede ver que los colegios 1 y 2 tienen dos salas cada uno, el primero las tiene trabajando a un turno, mientras que el segundo trabaja las salas a dos turnos. El tercer colegio solo tiene una sala, pero al estar trabajando a dos turnos, tiene la misma capacidad que el primer colegio.

La solución a la que se quiere llegar se puede apreciar en la tabla 13.

Tabla 13: Solución final ejemplo sencillo
Fuente: Elaboración propia

Colegio	Cantidad salas grado 1	Cantidad salas grado 2	Cantidad salas grado 3	Cantidad salas grado 4
1	1	1	1	1
2	0	0	0	0
3	1	1	1	1

Esta solución se obtuvo resolviendo el problema del *School Location and Scheduling Problem* planteado por Mandujano et al. (2012). Es bueno recordar que, incluso si un colegio tuviese la cantidad de salas que entrega la solución final, hay que cerrar el colegio por un año para abastecerlo de la infraestructura necesaria para que se pueda volver integral. Además, se tomó que se quiere llegar a esta solución antes de los tres años.

A continuación, en las tablas 14,15 y 16 se mostrarán los resultados obtenidos tras haber corrido el modelo anterior.

Tabla 14: Solución estado de colegios en el periodo 1
Fuente: Elaboración propia

Colegio	Salas temporales	Salas integrales	Salas integrales en construcción	Turnos	Cantidad de alumnos
1	2	0	0	2	40
2	2	0	0	2	40
3	0	0	4	0	0

Tabla 15: Solución estado de colegios en el periodo 2
Fuente: Elaboración propia

Colegio	Salas temporales	Salas integrales	Salas integrales en construcción	Turnos	Cantidad de alumnos
1	0	0	4	0	0
2	2	0	0	2	40
3	0	4	0	1	40

Tabla 16: Solución estados de colegios en el periodo 3
Fuente: Elaboración propia

Colegio	Salas temporales	Salas integrales	Salas integrales en construcción	Turnos	Cantidad de alumnos
1	0	4	0	1	40
2	2	0	0	0	0
3	0	4	0	1	40

Los resultados anteriores indican que, el primer año se construyen las salas necesarias para hacer integral al colegio 3 (el colegio más pequeño), mientras que los alumnos que antes iban a ese colegio se transfieren temporalmente al colegio 1, y éste cambia su operación a dos turnos para no construir salas temporales.

En el periodo 2, se opera el colegio 3 como integral. Esto es, todas sus salas operativas son integrales y opera a un turno. Además, se construyen las salas necesarias para que el colegio 1 se vuelva integral y mientras este establecimiento está inhabilitado, se opera el colegio 2 a dos turnos.

Finalmente, en el periodo 3 se cierra la escuela 2 y las escuelas 1 y 3 funcionan de manera integral.

A continuación, se muestran gráficos de cómo evolucionan la cantidad de escuelas integrales en los distintos periodos (figura 7), y el porcentaje de alumnos que van a escuelas integrales (figura 8).

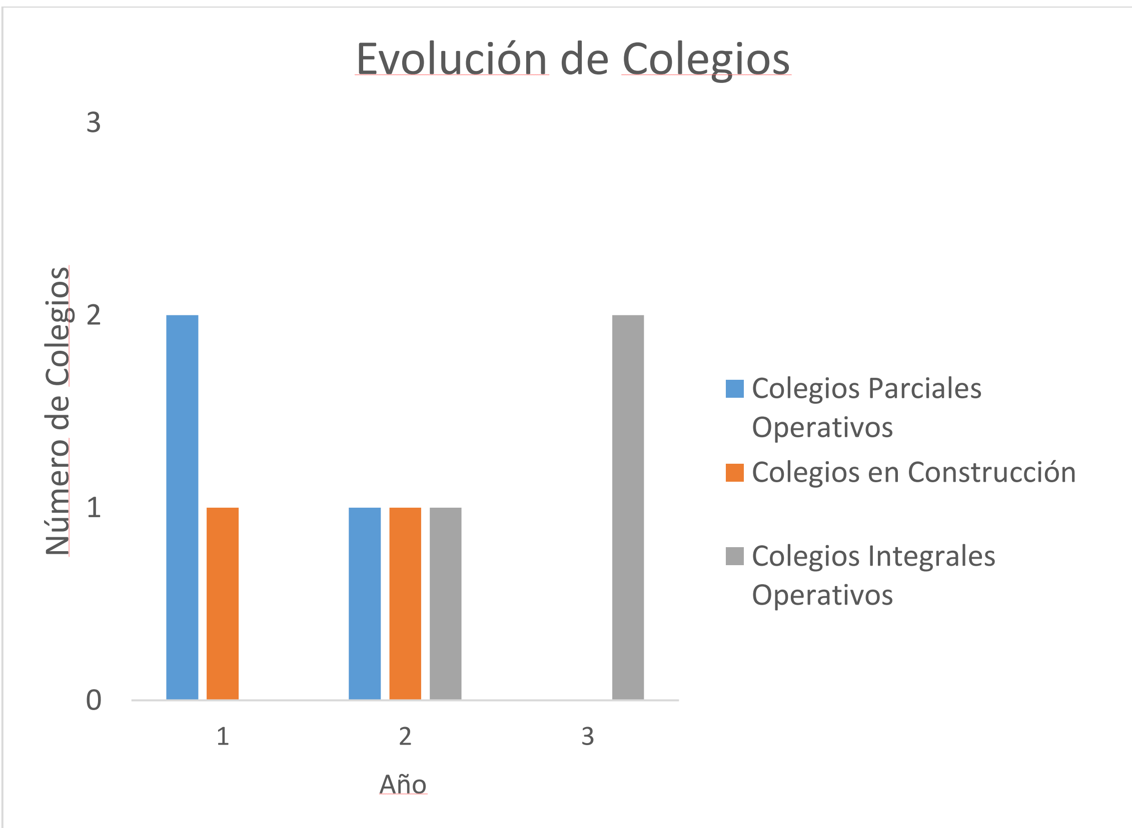


Figura 7: Evolución de colegios en los distintos periodos ejemplo ficticio
Fuente: Elaboración propia

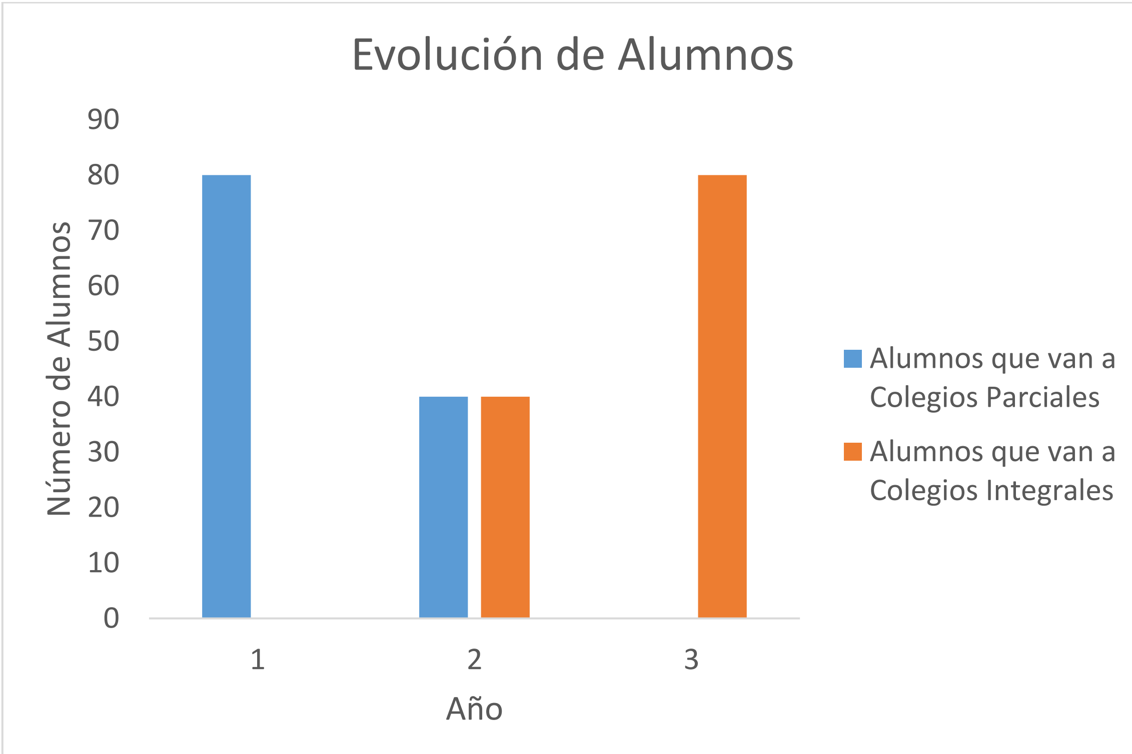


Figura 8: Evolución de la cantidad de alumnos que van a colegios integrales ejemplo ficticio
Fuente: Elaboración propia

Es bueno destacar que la evolución de los colegios fue independiente del número que se usó para valorar el costo de cambiar a un alumno de colegio. La asignación de alumnos a los distintos colegios depende del *trade off* entre el costo subjetivo de cambiar a un alumno de colegio y el costo de transporte. A continuación, se mostrarán los resultados para corridas con un costo de mover alumnos de colegio casi despreciable y otra con el mismo costo con un valor alto.

1.5.1 Escenario con un alto costo de cambiar alumnos de colegio

En este caso, el costo de mover alumnos superaba al costo de transporte. Este escenario, durante el año 1, al cerrar el colegio 3 para construir las salas integrales, los alumnos que antes iban allá son trasladados al colegio 1, mientras que los que iban a los colegios 1 y 2 siguen yendo a los mismos. En el anexo 3 se muestra gráficamente la distribución de los alumnos de los distintos grados durante el año 1.

En el año 2, cuando se cierra el colegio 1 para volverlo integral, los alumnos que antes iban a ese colegio empiezan a ir al colegio 3. En el anexo 4 se muestra gráficamente la distribución de los alumnos de los distintos grados durante el segundo año.

Finalmente, en el año 3, al cerrar el colegio 2 y abrir el colegio 1 de manera integral, los alumnos que antes iban al colegio 2 el año pasado, ahora van al colegio 1. En el anexo 5 se puede ver gráficamente la distribución de alumnos de todos los grados durante este último año.

A continuación, en la tabla 17, se muestran los kilómetros en total recorridos por los alumnos, y la cantidad de alumnos que se tuvo que cambiar de colegio en cada año y en total.

Tabla 17: Tabla resumen con alto costo de cambiar alumnos de colegio
Fuente: Elaboración propia

	Distancia total recorrida	Cambios de colegio
Año 1	550	10
Año 2	470	30
Año 3	440	30

1.5.2 Escenario con un bajo costo de cambiar alumnos

En este caso, como el costo de transporte es mayor que el costo de cambiar a alumnos de establecimiento escolar, los alumnos simplemente son asignados a los colegios más cercanos. En los anexos 6, 7 y 8 se puede ver gráficamente la distribución de alumnos a los distintos colegios en los años 1, 2 y 3 respectivamente. En la tabla 18 se muestra una tabla con la distancia total recorrida por todos los alumnos y la cantidad de cambios de colegio que se obtuvieron en este escenario.

Tabla 18: Tabla resumen con bajo costo de cambiar alumnos de colegios
Fuente: Elaboración propia

	Distancia total recorrida	Cambios de colegio
Año 1	450	40
Año 2	445	60
Año 3	440	40

Finalmente, para terminar con este ejemplo chico se probaron corridas de qué hubiese pasado si el colegio 2 y 3 pueden compartir directores. El resultado terminó siendo que, en lugar de mantener abierto el colegio 1 y aumentarle la cantidad de jornadas, se decide empezar construyendo este colegio y se crea una sala temporal en el colegio 3, ya que crear una sala temporal en este tiene un menor costo que la administración del colegio 1. Con respecto a la asignación de alumnos, tanto en el caso de tener un alto costo de mover alumnos como un costo de mover alumnos despreciable, se comporta de manera similar al caso anterior, donde en lugar de ser el colegio uno el que se mantiene abierto, es el colegio 3. Lo anterior hace sentido debido a la simetría que tiene este caso pequeño.

1.6 Ejemplo real mediano: Axixa

Como ejemplo real, se corrió la heurística en dos municipios brasileños: Axixa y Timon. Axixa es un municipio rural ubicado en el estado de Tocantins en el centro del país. Es el municipio más pequeño del estado, posee 18 escuelas y,

Figura 9. Foto aérea Municipio Axixa.
Fuente: Prefeitura de Axixa (2009)

según los datos que se recopilaron por Routing UC (2016), posee 2510 alumnos de los 11 distintos grados (*Pré I, Pré II* y de primer a noveno año). A continuación, se muestra un mapa con los colegios que tiene la localidad.

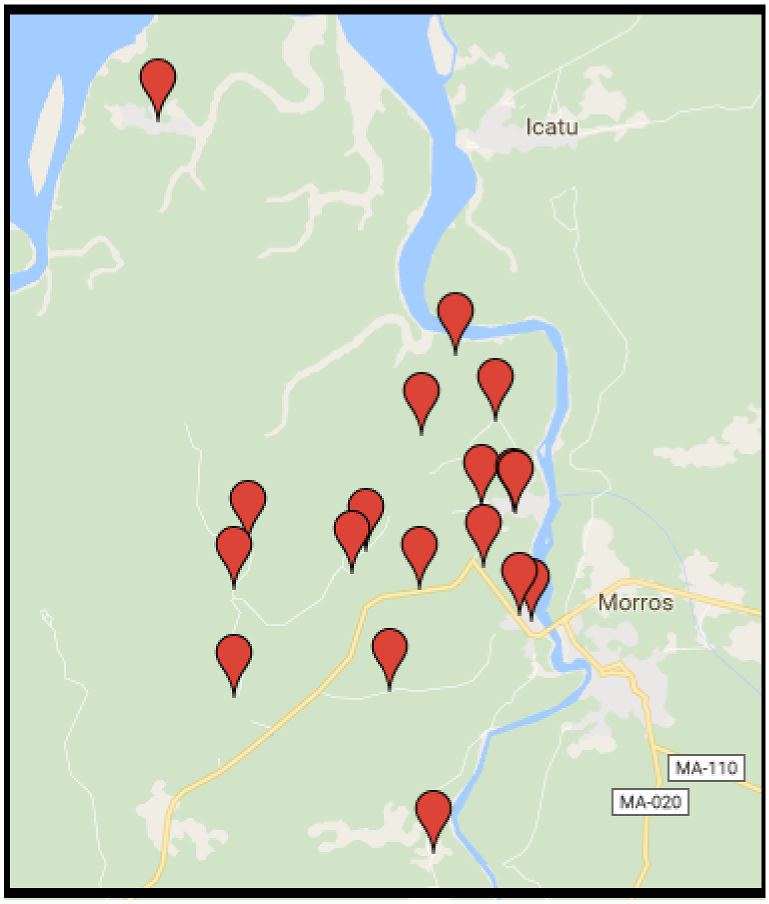


Figura 10: Mapa colegios actuales Axixa
Fuente: Elaboración propia usando Google Maps.

Además, para determinar qué colegios mantener abiertos, se usó el modelo de localización de colegios de Mandujano el al. (2012). Dicho modelo, además de entregar qué colegios mantener abiertos, determinó las salas que debe tener cada establecimiento y a qué grado corresponden. Al haber dos grados de Pre-Escolar, y nueve grados de Educación Básica, en la solución final se obtuvieron siete tipos distintos colegios: el primero con una sala para cada grado de Pre-Escolar, el segundo con una sala para cada grado de *Ensino*

Fundamental I, el tercero con una sala para cada grado de *Ensino Fundamental II*, el cuarto para una sala para cada grado de Básica; el quinto con una sala para cada grado, el sexto con dos salas para cada grado de Educación Básica, y finalmente, el séptimo con dos salas para cada grado. La cantidad de colegios de cada tipo en la solución final del municipio, junto con un resumen de los tipos de colegios, puede verse en la tabla 19. Además en la figura 11 puede apreciarse un mapa con la ubicación de los colegios finales del municipio. Finalmente, en la figura 12 se adjunta un gráfico que muestra la cantidad de colegios con distinta cantidad de salas.

Tabla 19: Cantidad de tipos de colegios situación final Axixa
Fuente: Elaboración propia

Descripción	Cantidad de colegios final Axixa
Una sala para cada grado Pre-Escolar	1
Una sala para cada grado *Ensino Fundamental I*	0
Una sala para cada grado *Ensino Fundamental II*	1
Una sala para cada grado de Educación Básica	8
Una sala para cada grado estudiado	4
Dos salas para cada grado de Educación Básica	0
Dos salas para cada grado estudiado	0

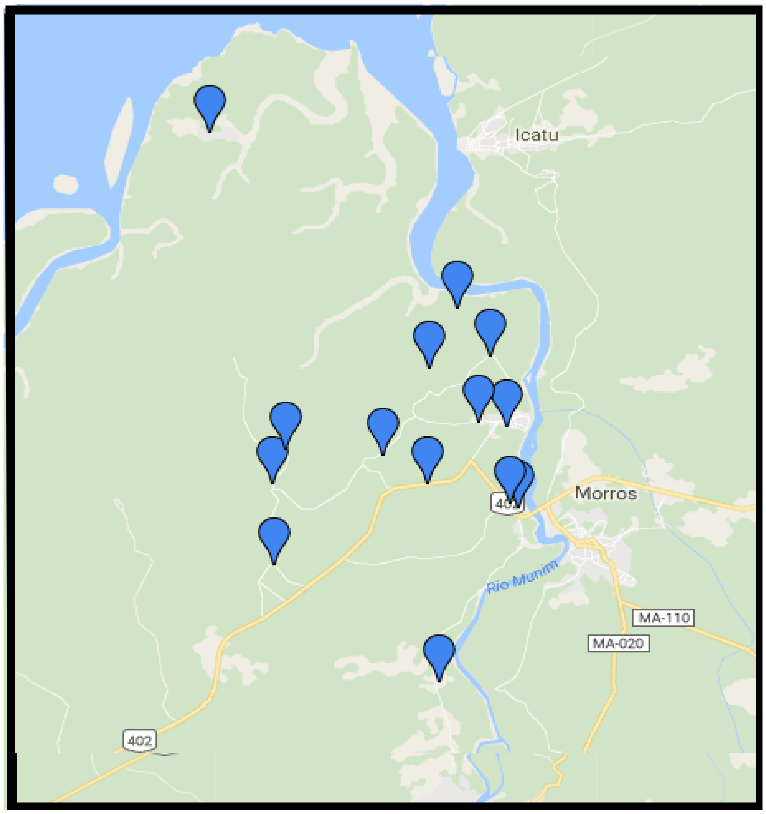


Figura 11: Mapa situación final Axixa
Fuente: Elaboración propia con información de Routing UC (2016).

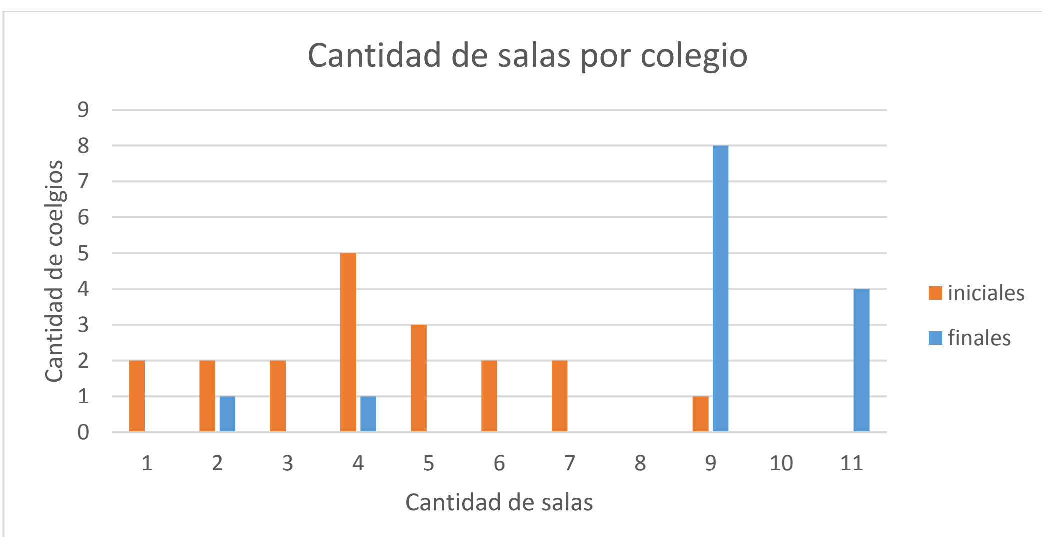


Figura 12: Cantidad de colegios con distintas cantidades de salas Axixa
Fuente: Elaboración propia con información de Routing UC (2016)

Sobre la información de alumnos, se consideró que cada sector correspondía a un colegio. Los datos sobre cuántos alumnos de cada grado van a los distintos colegios fue obtenido gracias a Routing UC (2016). En la figura 13 se muestra un gráfico con la cantidad de alumnos por grado en el municipio.

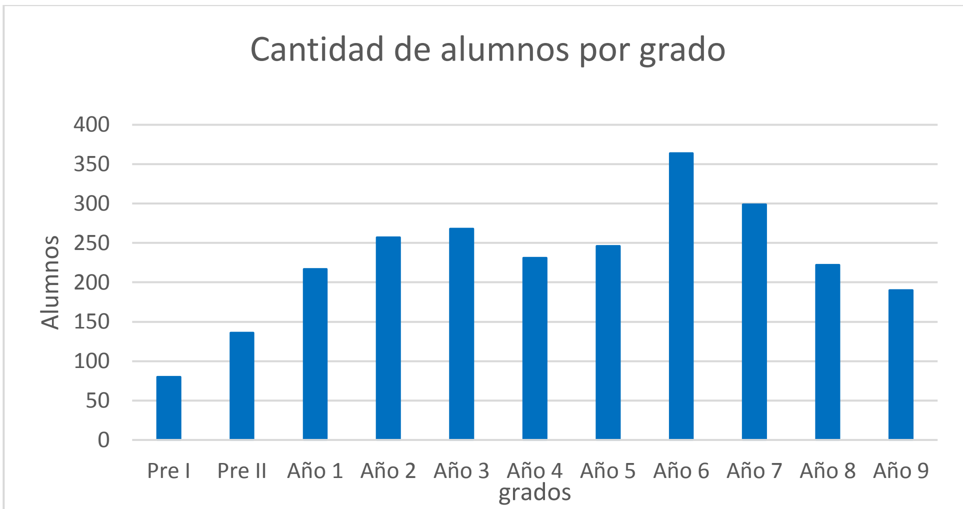


Figura 13: Gráfico de cantidad de alumnos por grado en Axixa
Fuente: Elaboración propia con información de Routing UC (2016).

1.6.1 Resolución

A diferencia del ejemplo pequeño ficticio, el problema real del municipio de Axixa es demasiado grande y al entregarse directamente a Gurobi toma demasiado tiempo en su resolución. Es por esto que se decidió usar una heurística de tipo GRASP para llegar a una solución "buena" (si bien, no óptima) y usarla como solución inicial.

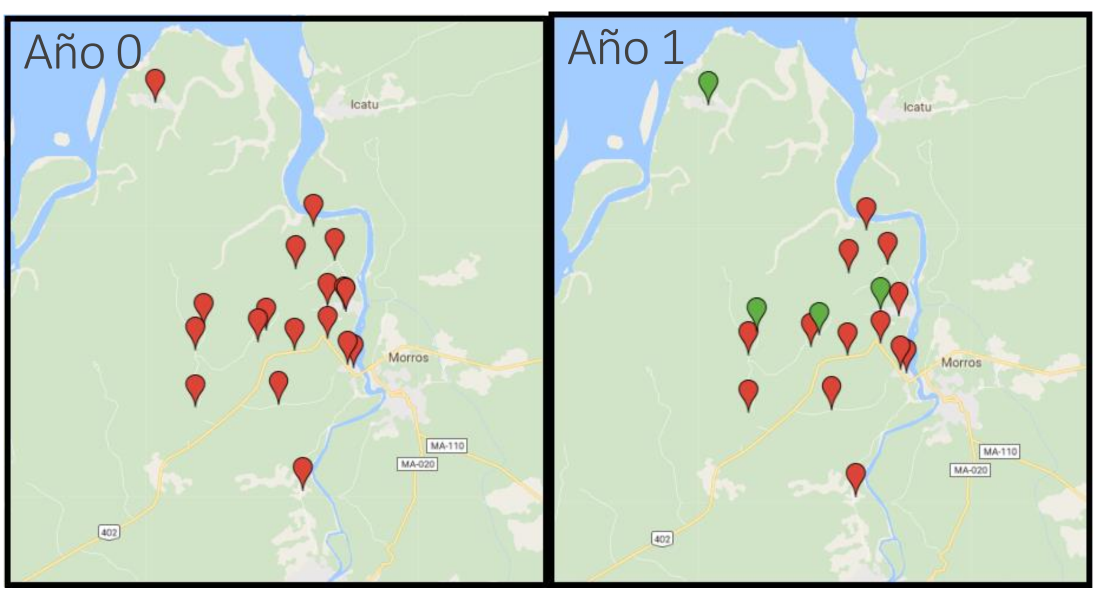
En la tabla 20 se puede ver que la solución entregada por la heurística dista en menos de un 5% del óptimo y toma solo diez segundos en llegar a esta. Cuando se utiliza la solución entregada por la heurística como punto inicial de Gurobi toma algo menos de diez minutos en llegar al óptimo. Un tiempo órdenes de magnitud inferior al respectivo si se usara solamente Gurobi, que necesitó varias semanas.

Tabla 20: Comparación de resultados
Fuente: Elaboración propia

	Costos monetarios	**Función objetivo**	**Cantidad de alumnos que se mueven**	**Tiempo de resolución (segundos)**
Gurobi	R$ 38.112.035	R$ 38.620.835	5.088	>2.000.000
Heurística	R$ 40.016.637	R$ 40.439.837	4.232	10
Heurística + Gurobi	R$ 38.112.035	R$ 38.620.835	5.088	497

1.6.2 Resultados

Una de las mejores formas de mostrar resultados que constan de una transición es de forma pictórica. Es por eso que en la figura 14 se muestran mapas mostrando la evolución de Axixa desde su situación original al óptimo.



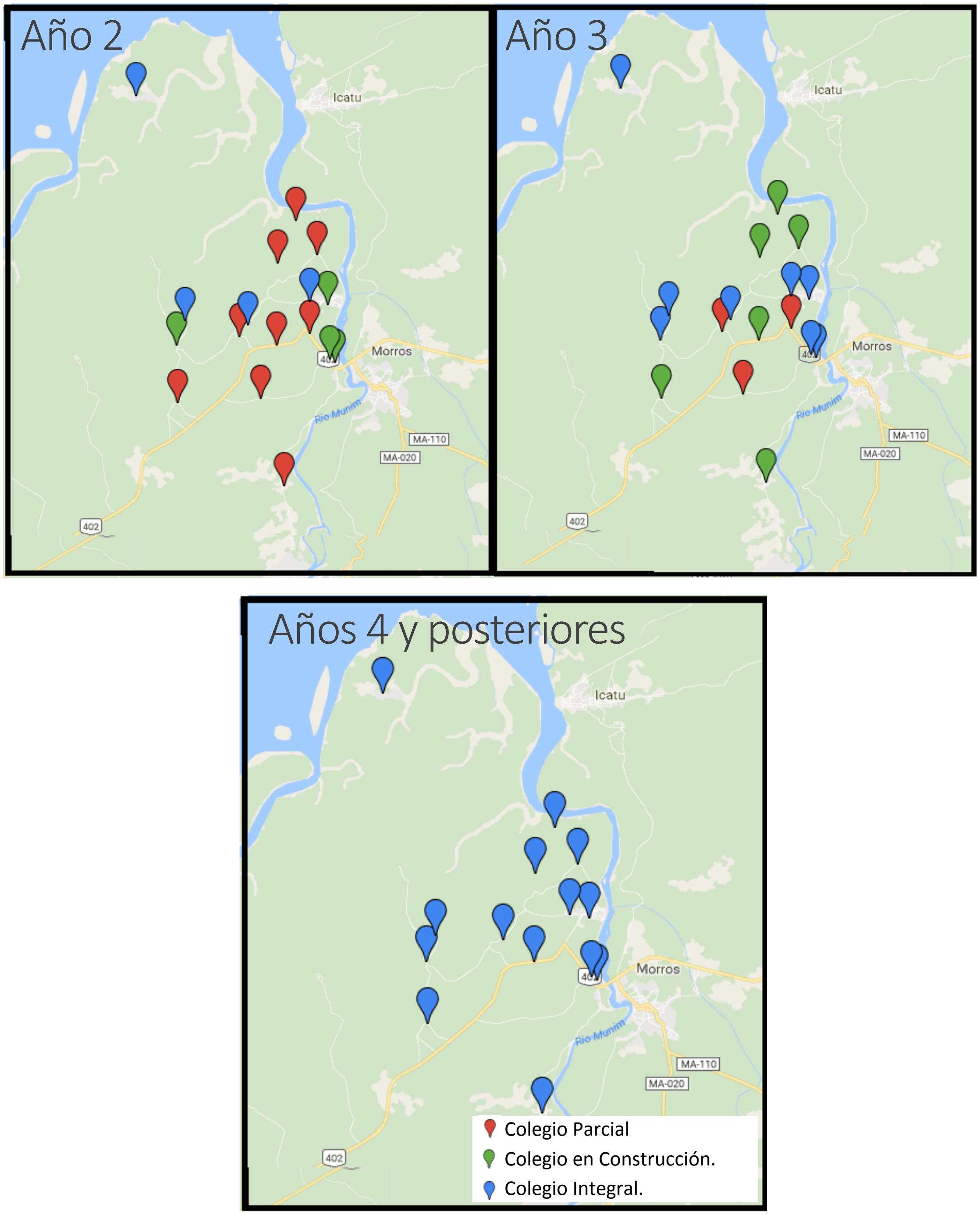


Figura 14: Mapas de transición de los distintos colegios en Axixa
Fuente: Elaboración propia usando Google Maps

En los siguientes gráficos se puede ver la evolución en números de los colegios de parciales a integrales (figura 15) y de los alumnos con respecto a qué tipo de colegio atienden (firgura 16). Se puede ver como el número de colegios disminuye de 18 a 14 y cómo también el número de alumnos disminuye levemente debido a las predicciones de la continuidad de alumnos en el municipio.

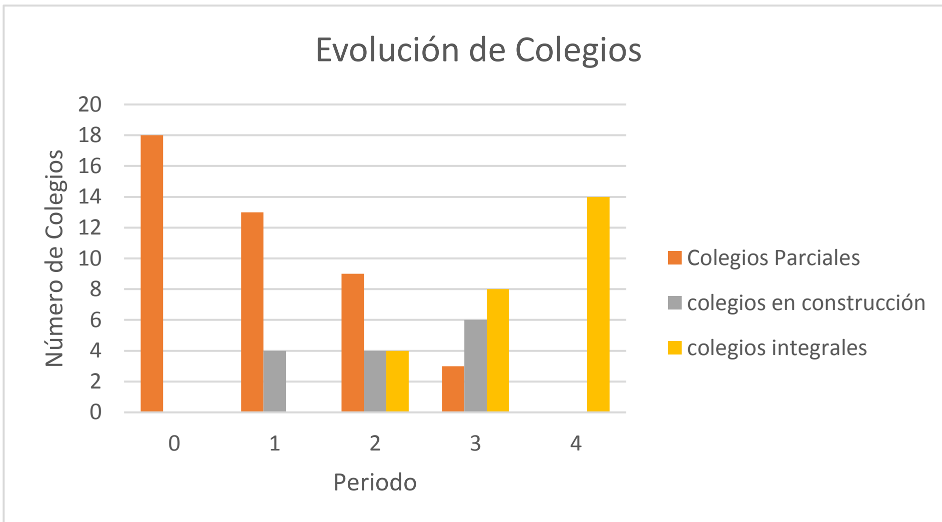


Figura 15: Gráfico con la transición de colegios de parciales a integrales Axixa.
Fuente: Elaboración propia

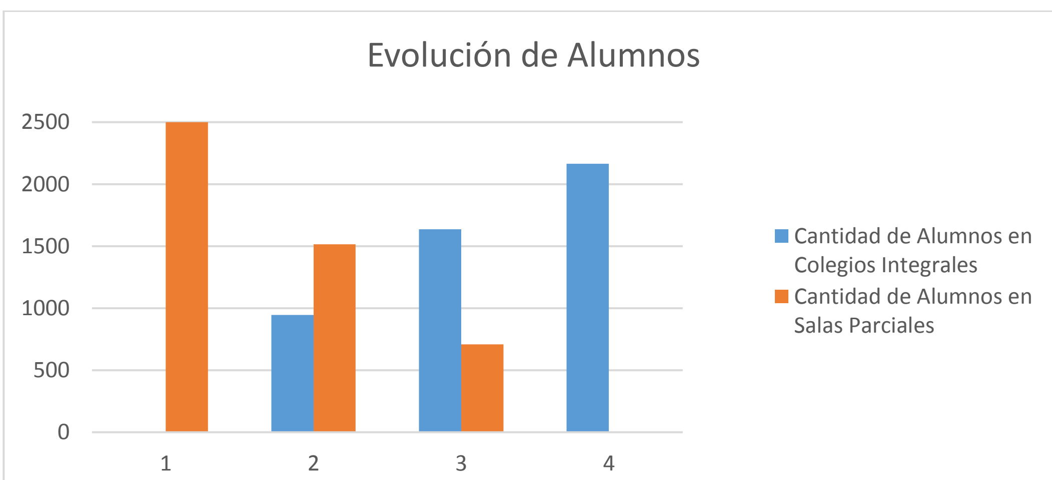


Figura 16: Gráfico con la evolución de a qué tipo de colegio van los alumnos en Axixa
Fuente: Elaboración propia

Otro aspecto que debe tenerse en consideración es cuánto están viajando los alumnos que se cambian de establecimiento escolar. Para lo anterior, en la figura 17, se presenta un histograma que muestra el aumento de la distancia viajada por los alumnos que se cambian de colegio. En dicho gráfico se puede apreciar que la gran mayoría de los alumnos se mueve a los colegios que quedan relativamente cerca de donde están estudiando inicialmente.

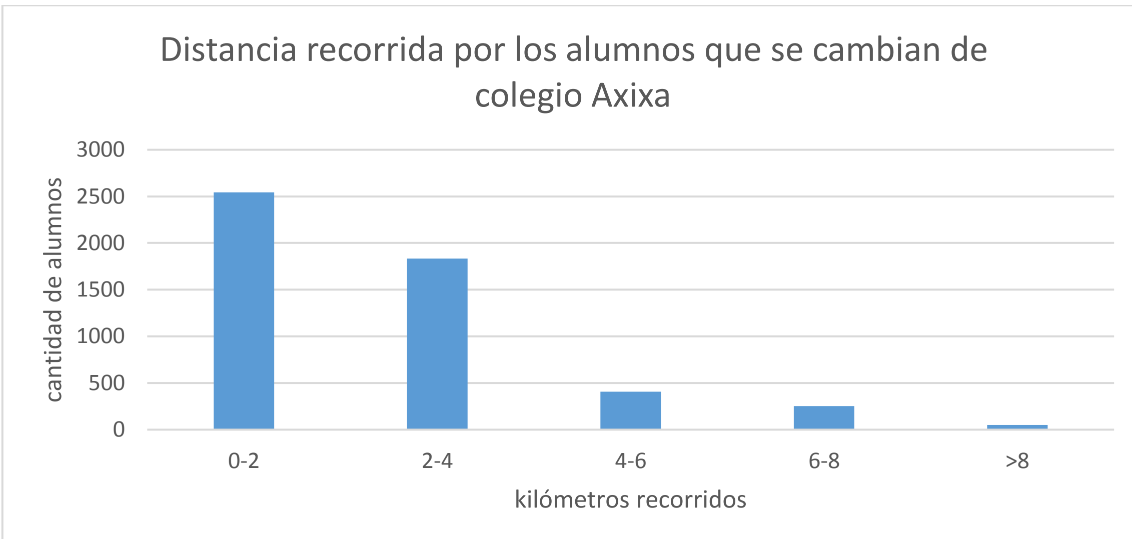


Figura 17: Histograma con la distancia recorrida por los alumnos que se cambian de colegio Axixa
Fuente: Elaboración propia

Finalmente, un factor a considerar en el resultado es la distancia que recorren los alumnos de cada colegio. En la figura 18 se muestra un gráfico de caja con la distancia recorrida por cada alumno en cada año. Es bueno mencionar que, dado que los sectores considerados corresponden a colegios, hay algunos alumnos que recorren distancia cero. Además, como en este municipio no se cierran muchos establecimientos, más de la mitad de los alumnos no recorren distancia.

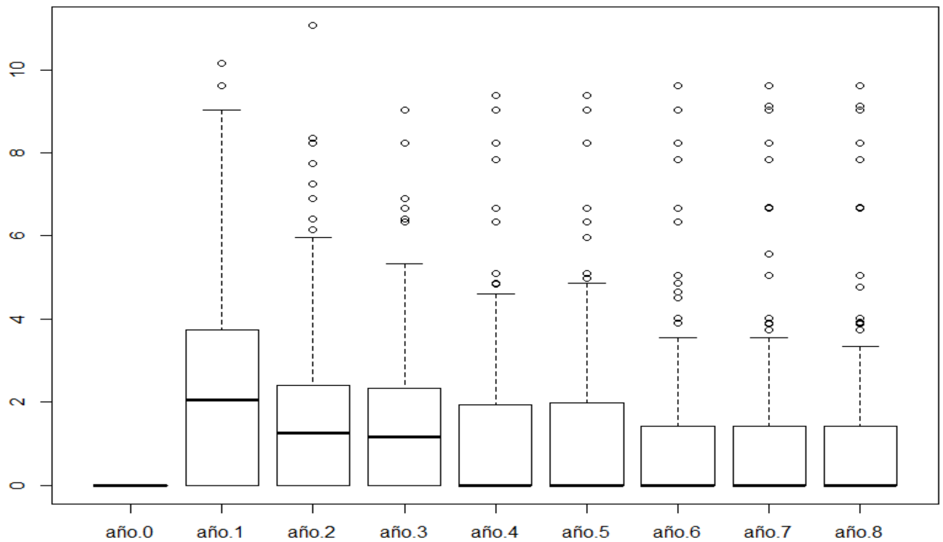


Figura 18: Gráficos de caja con las distancias recorridas en cada año por los alumnos Axixa
Fuente: Elaboración propia

1.6.3 Análisis de sensibilidad

Como en varios parámetros se posee incertidumbre, se realizó un análisis de sensibilidad para estudiar qué tan robusto es el modelo si se llegase a errar en alguno de los parámetros supuestos. Los parámetros analizados fueron: (i) el costo de transporte, para estudiar cómo afecta la solución si llegase a aumentar el costo del combustible; (ii) la cantidad de alumnos que van a los distintos colegios, dado que nunca se va a tener certeza de cuántos alumnos de los distintos sectores hay en el futuro; y finalmente (iii) el costo de mover alumnos de colegio, ya que, al ser un costo subjetivo, no se tiene certeza de dicho valor. A continuación, se explicará cada uno de los puntos anteriores.

Costo de transporte

Al variar los costos de transporte, en general, la solución no cambia. Una de las principales razones de lo anterior es que todas las distancias se aumentaron en la misma proporción, y el aumento que debe sufrir el costo de transporte para que valga la pena el cambiar el colegio al que van los alumnos es de aproximadamente siete veces. Por lo anterior, se puede considerar que la solución entregada por el modelo es robusta con respecto al costo del combustible.

Cantidad de alumnos que van a los distintos colegios

Lo que se hizo en este punto fue analizar qué es lo que sucede si el número de alumnos en realidad es mayor o menor del estimado.

Si la cantidad de alumnos de los distintos sectores en realidad es menor que la estimada, entonces simplemente los alumnos dejan de ir a los colegios de jornada parcial más lejanos. Cabe mencionar que si el número de alumnos se baja mucho, entonces el *input* del modelo deja de tener sentido, pues se van a estar construyendo salas integrales que son innecesarias, o excesos de colegios integrales. Por ejemplo, si el número de alumnos baja de 2.510 a la mitad, tener 14 colegios integrales deja de ser óptimo.

En el caso de que el número de alumnos aumente, aumentando a todos los grados y sectores en la misma proporción, los alumnos adicionales son reasignados a los colegios más cercanos que tengan salas con capacidad para recibirlos. En el caso de que no queden salas para recibirlos, se empiezan a crear más salas temporales. Cabe destacar que con todos los valores que se testearon, la decisión de qué colegio empezar a construir en qué periodo no cambió. Lo que ocurrió es que a medida que aumentaba el número de alumnos algunos colegios dejaban de cerrarse. Esto se debe a que, al llegar a un aumento determinado de alumnos, el *input* deja de tener sentido, pues los colegios integrales que se quieren construir ya no son suficientes. Por esta misma razón, si se aumenta la cantidad de alumnos más de un 25%, hay colegios parciales que no se cierran.

En resumen, si el *input* del modelo es consecuente la solución entregada por el modelo es robusta.

Costo de mover un alumno de colegio

Finalmente, se testeó cómo iba cambiando la solución a medida que cambiaba el valor monetario que se le asigna a cambiar a un alumno de colegio. Este valor, a diferencia de los dos anteriores, sí afectaba de manera importante la solución del problema. Como este costo es subjetivo, lo que se hizo fue correr el modelo con distintos valores del mismo. A continuación, en la figura 19, se muestra un gráfico con distintos valores del costo monetario implicado y la cantidad de alumnos que se mueven.

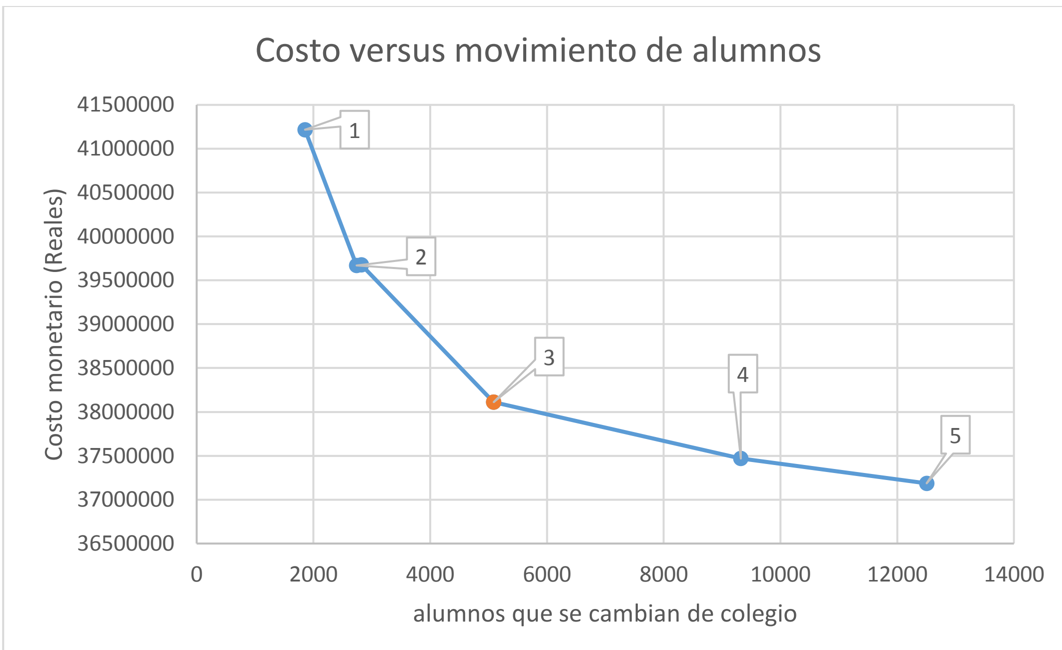


Figura 19: Gráfico de costo monetario vs la cantidad de alumnos que se cambian de colegio Axixa
Fuente: Elaboración propia

El punto óptimo va a depender de la disposición a pagar del municipio por mover un alumno. El punto 5 conviene si la disposición a pagar para que un alumno no se cambie de colegio se mueve entre R$ 0 y R$ 24 aproximadamente. El punto 4 es conveniente si este costo por cambiar a un alumno de colegios se mueve entre R$ 24 y R$ 88 aproximadamente. El punto 3 es el óptimo si el costo ya mencionado oscila entre R$ 88 y

R$ 152. El punto 2 conviene si el costo se mueve entre R$ 152 y R$ 689. Finalmente, si la disposición al pago supera los R$ 689 entonces conviene el punto 1. Un resumen de lo anterior se puede apreciar en la tabla 21.

Tabla 21: Tabla de rangos de la disposición al pago por no mover un alumno de colegio
Fuente: Elaboración propia

Punto	Intervalo de la disposición a pagar (R$) para no mover un alumno de colegio para que dicho punto sea óptimo
5	(0,24)
4	(24,88)
3	(88,152)
2	(152,689)
1	>689

Para los resultados anteriores se tomó como costo subjetivo de mover un alumno de colegio R$ 100, mostrando los resultados del punto 3, que por inspección visual muestra un mayor *trade off* entre costo monetario y cantidad de alumnos que se mueven. Como el valor de dicho costo es subjetivo, además se analizaron los resultados de corridas con: Un costo nulo de mover alumnos de colegio (punto 5) y un costo de mil reales de mover alumnos de colegio (punto 1). Los resultados generales de dichas corridas se pueden ver en la tabla 22.

Tabla 22: Comparación de resultados según costo de mover alumnos de colegio
Fuente: Elaboración propia

Costo de mover alumnos (R$)	Costo monetario (R$)	Función objetivo	Cantidad de alumnos que se cambian de colegio

1000	41217042	43072042	1855
100	38112035	38620835	5088
0	36986520	36986520	12505

En los resultados anteriores se puede apreciar que, al considerar el costo de mover alumnos en la función objetivo, se pueden disminuir notoriamente la cantidad de alumnos que se cambian de colegio sin incurrir en mayores costos monetarios, ya que al aumentar un dos por ciento los costos, se logran disminuir a más de la mitad los alumnos que se cambian de colegio.

1.7 Ejemplo real grande: Timon

A modo de ejemplo real de mayor tamaño se usó el municipio de Timón en el estado de Maranhão en el noreste de Brasil. Con una población de más de 160.000 habitantes, es mucho más grande que Axixa (Noticias de Timon, 2016).

Figura 20. Foto aérea Municipio Timon.

Fuente: Noticias de Timon (2010)

Los datos utilizados en Timon, al igual que en caso de Axixa, fueron obtenidos gracias a Routing UC. Según estos datos, este municipio cuenta con 6479 alumnos de Pre-Escolar y Básica, y un total de 106 colegios distintos. En la figura 21, se muestra un mapa con los distintos colegios que tiene en la actualidad el municipio.

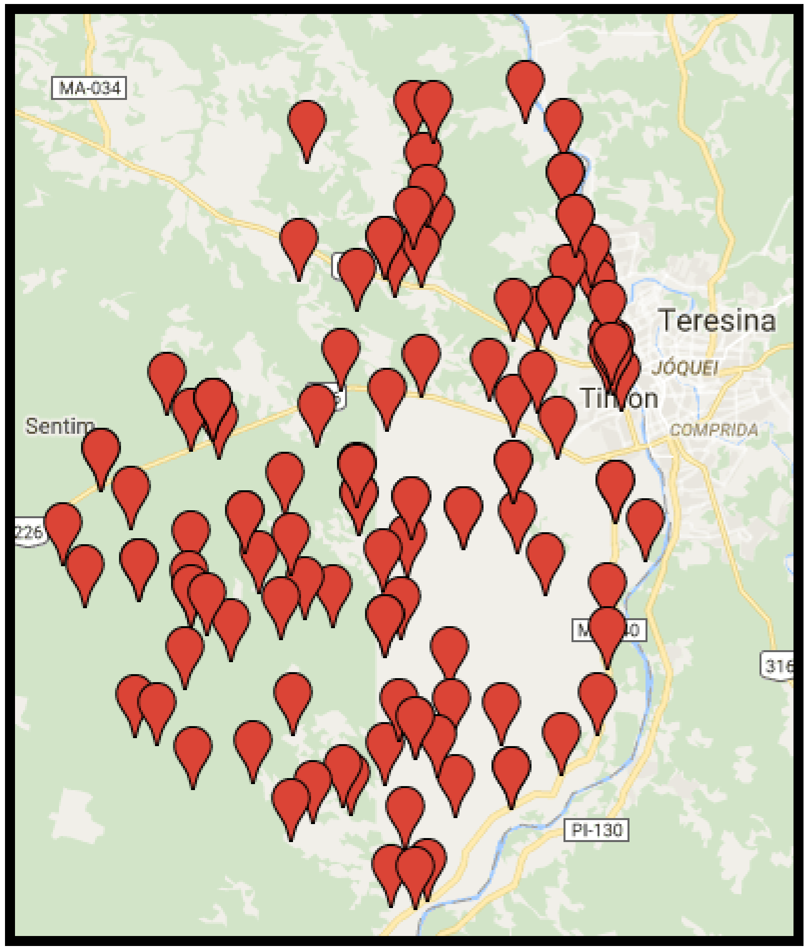


Figura 21: Mapa colegios actuales Timon
Fuente: Elaboración propia

El alto número de colegios que se observa en este municipio se debe a que la gran mayoría de estos solo posee una sala. Para decidir cómo debe ser la situación final, al igual que en el municipio anterior, se corrió el modelo de localización de colegios de Mandujano et al. (2012) para decidir cuáles se mantienen y de qué tamaño deben ser. Recordar que solo hay siete categorías de escuelas que se le entregó al modelo como *input*. A continuación, se muestra un mapa con los colegios escogidos para volverse integral (figura 22) y una tabla con la cantidad de colegios de los distintos tipos que entregó el modelo (tabla 23).

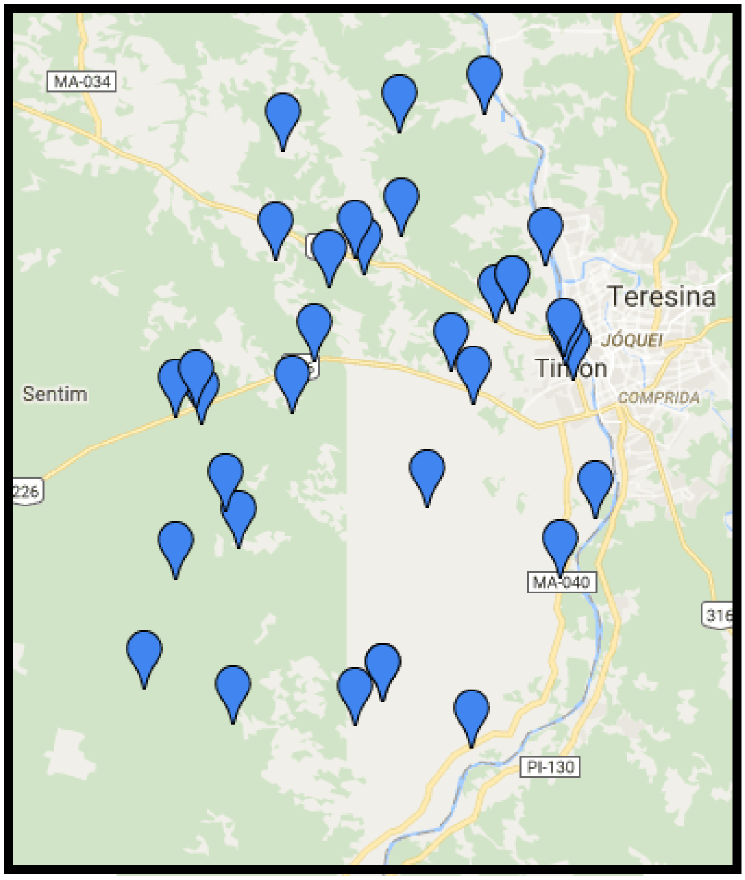


Figura 22: Mapa situación final Timon
Fuente: Elaboración propia con información de Routing UC (2016)

Tabla 23: Cantidad de colegios de cada tipo situación final Timon
Fuente: Elaboración propia

Descripción	Cantidad colegios final Timon
Una sala para cada grado Pre-Escolar	8
Una sala para cada grado *Ensino Fundamental I*	7
Una sala para cada grado *Ensino Fundamental II*	5
Una sala para cada grado de Educación Básica	1
Una sala para cada grado estudiado	7
Dos salas para cada grado de Educación Básica	3

Dos salas para cada grado estudiado	3

Viendo los mapas se puede apreciar la disminución de colegios que entrega el modelo. Dicha disminución se debe a que la gran mayoría de los colegios actuales tienen tan solo una sala. Para poder dimensionar lo anterior, en la figura 23 se muestra un gráfico con la cantidad de colegios con distinto número de salas, tanto en la situación final como en la situación inicial.

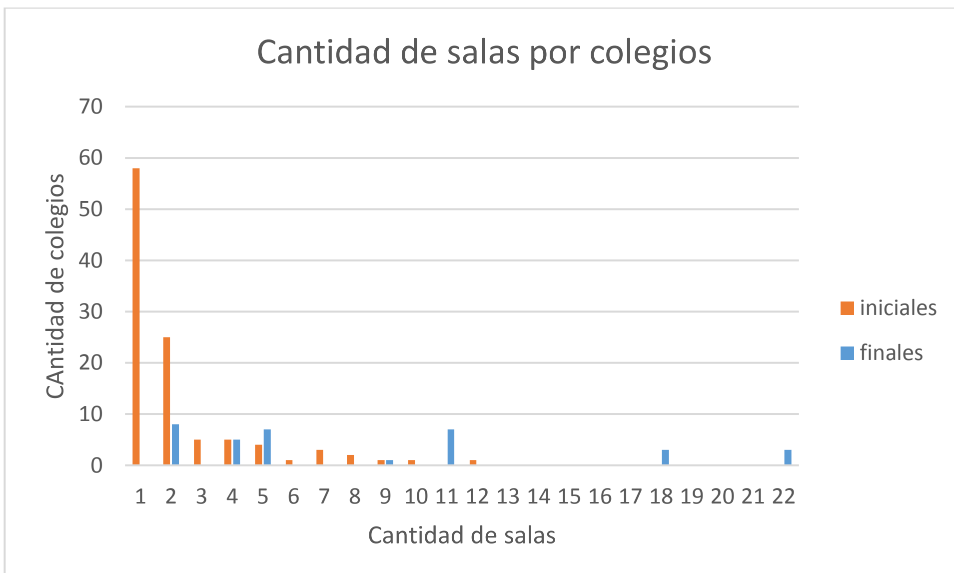


Figura 23: Gráfico con la cantidad de colegios con las distintas cantidades de salas Timon
Fuente: Elaboración propia

Como ya se dijo anteriormente, según los datos entregados por Routing UC (2016), el municipio cuenta con un total de 6.479 alumnos de los distintos grados considerados. EN la figura 24 se muestra un gráfico con la cantidad de alumnos de los distintos grados que posee el municipio

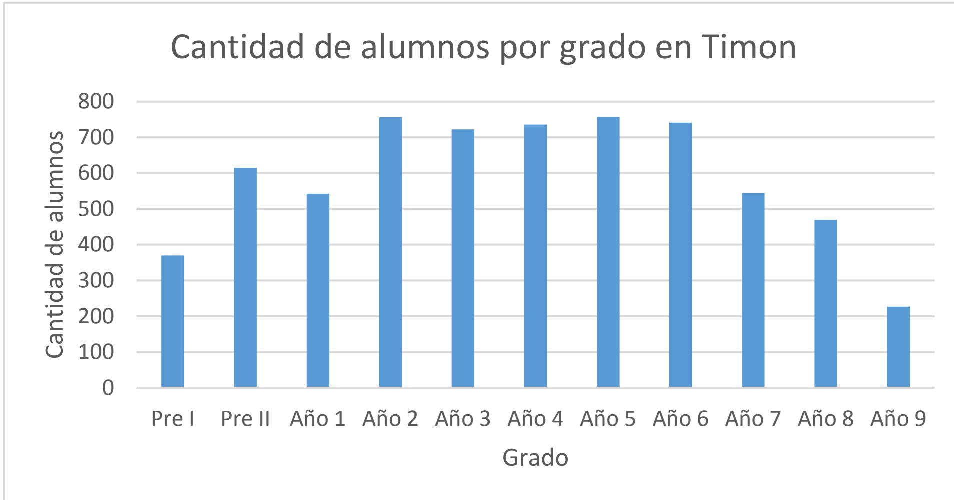


Figura 24: Gráfico con la cantidad de alumnos por grado en Timon
Fuente: Elaboración propia con información de Routing UC (2016).

Al igual que en el caso anterior, cada colegio se consideró un como un sector de origen alumnos. Se supuso una deserción nula y una tasa de aprobación de un cien por ciento, y para estimar la cantidad de alumnos que van llegando a los distintos sectores también se usó un Modelo de Holt. A continuación, en la figura 25 se muestra un gráfico de cómo va evolucionando el número total de alumnos en los distintos periodos.

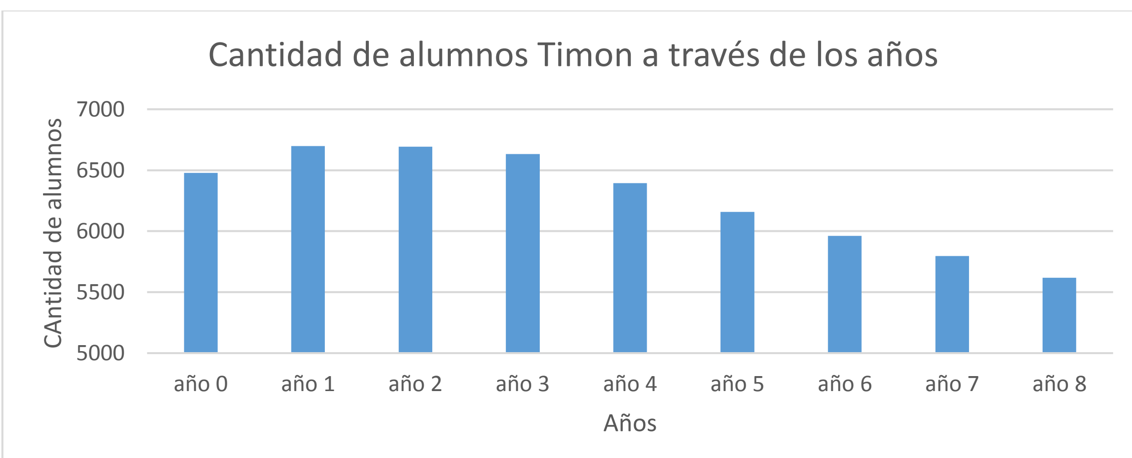


Figura 25: Evolución del número total de alumnos Timon
Fuente: Elaboración propia

1.7.1 Resultados

Como en el municipio de tamaño mediano correr solo Gurobi tomó varias semanas, ni siquiera se intentó ese procedimiento. Para alcanzar el óptimo se utilizó la heurística GRASP para entregarle una solución inicial cercana al óptimo al optimizador. La solución entregada se encontraba a un gap de optimalidad entre un tres y cuatro por ciento. En la tabla 24 se muestra un resumen de los costos entregados tanto de la heurística como de la solución óptima. A continuación, en la figura 26, se puede apreciar cómo debiese hacerse la transición de colegios según el modelo propuesto.

Tabla 24: Resumen costos heurística y el óptimo Timon
Fuente: Elaboración propia

Escenario	Costo monetario anual	Función objetivo	Número de alumnos que se cambian de colegio
Heurística	R$13.707.957	R$112.046.756	23.831
Haurística+Gurobi	R$14.237.084	R$116.332.073	24.354

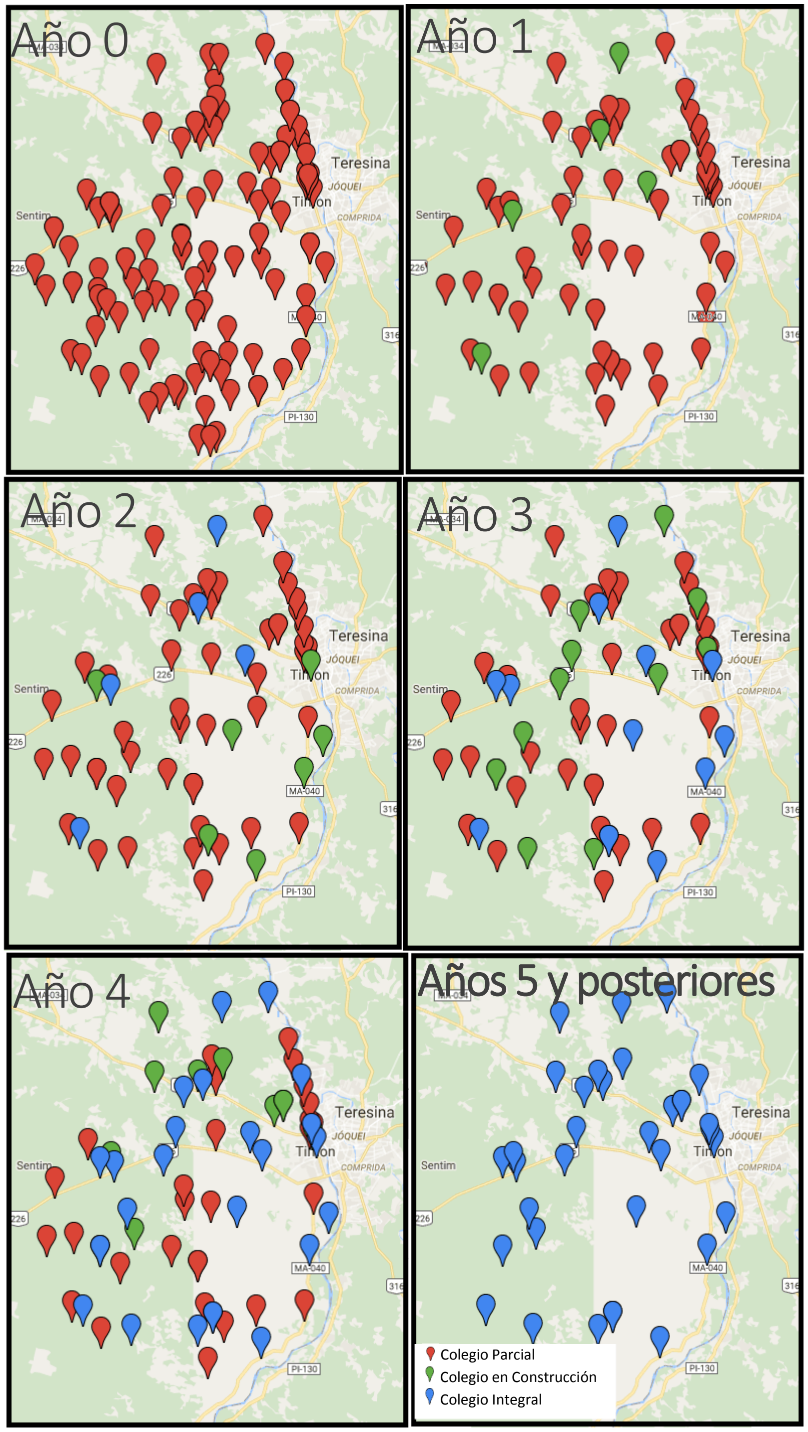


Figura 26: Mapas de transición de los distintos colegios en Timon
Fuente: Elaboración propia usando Google Maps.

Para facilitar los análisis, además de los mapas anteriores a continuación se presentan una serie de gráficos con la evolución del municipio. En el gráfico de la figura 27 se muestra el número de colegios de joranda parcial, en construcción e integrales en cada una de los periodos. Aquí se puede apreciar que el primer año se cierran cerca de la mitad de los colegios. Esto se debe a que todos los colegios cerrados poseen tan solo una sala.

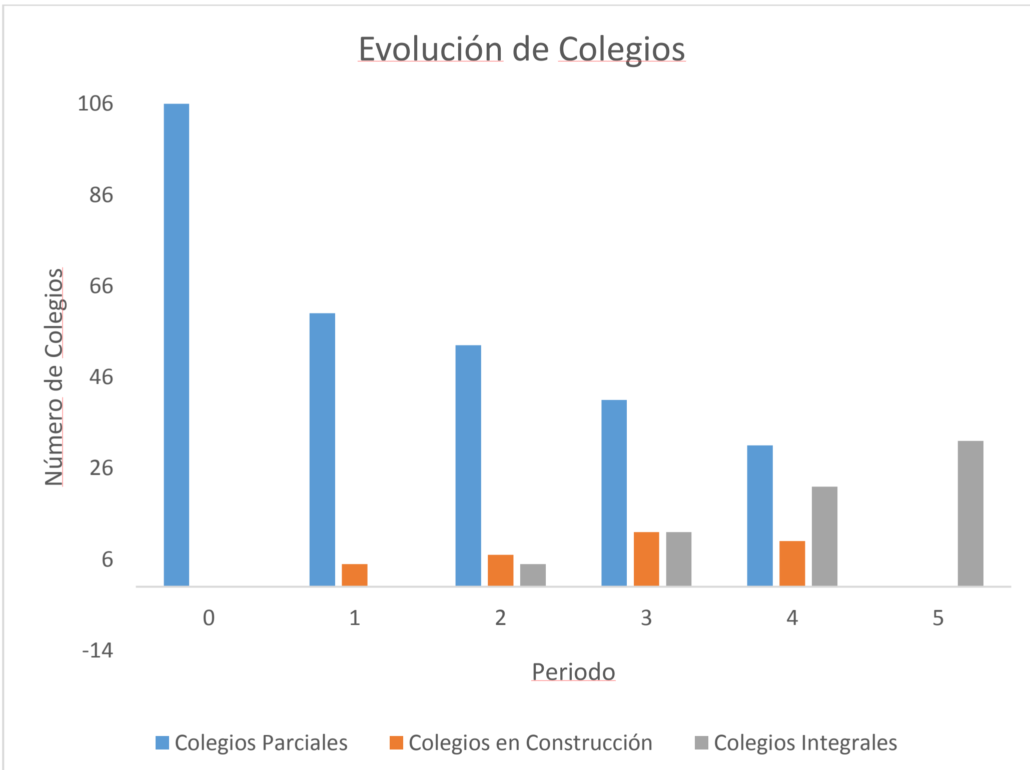


Figura 27: Gráfico con la evolución de colegios en Timon
Fuente: Elaboración propia

El gráfico de la figura 28 muestra la evolución de la cantidad de alumnos que van a colegios integrales y parciales en los distintos periodos, sirve para dimensionar el tamaño de los colegios. Con este gráfico se puede apreciar claramente que los primeros colegios construidos son los más grandes, y la cantidad de personas que cambian de colegio de jornada parcial a un establecimiento de jornada completa es relativamente constante de año a año.

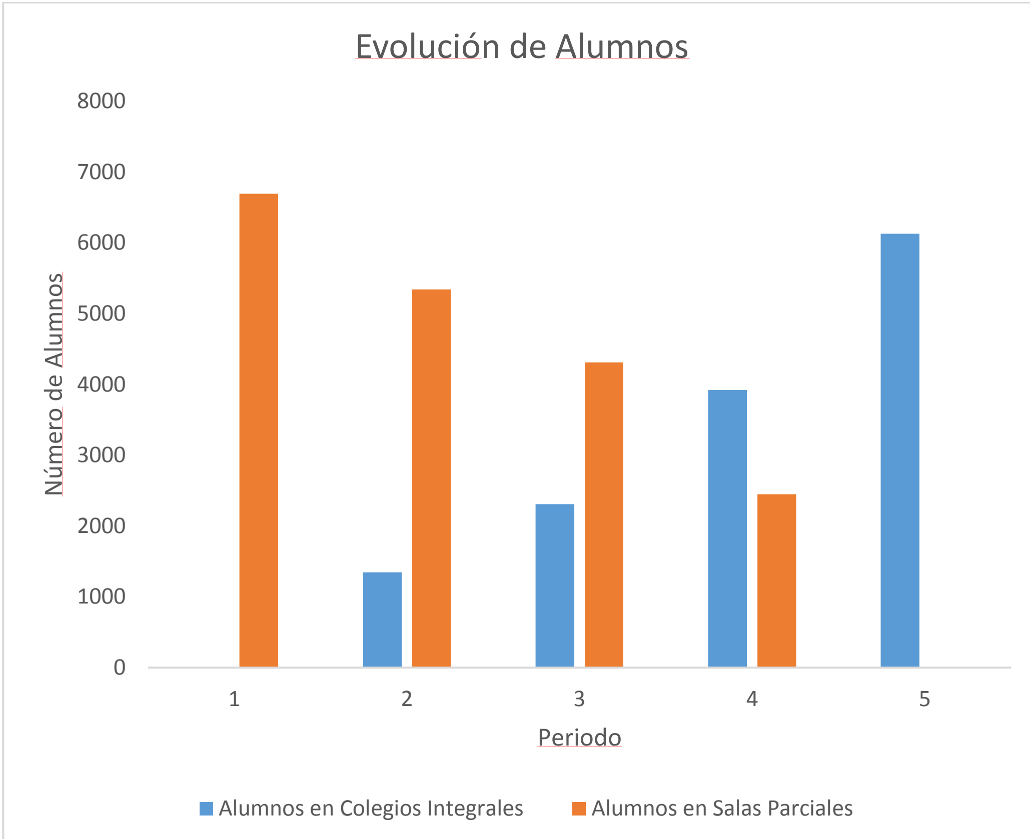


Figura 28: Gráfico con la evolución del tipo de colegio que van los alumnos en Timon
Fuente: Elaboración Propia.

Finalmente, se evaluará cuánto se está moviendo cada alumno. Para analizar lo anterior, al igual que en el caso de Axixa, se elaboraron gráficos de cajas para determinar la distancia total recorrida por los alumnos (figura 29). Como cada colegio es un sector, y en un comienzo todos los colegios están abiertos, la distancia total recorrida por los alumnos es nula. Ahora bien, como en el primer año se cierran alrededor de la mitad de los colegios, la distancia total recorrida inmediatamente sube.

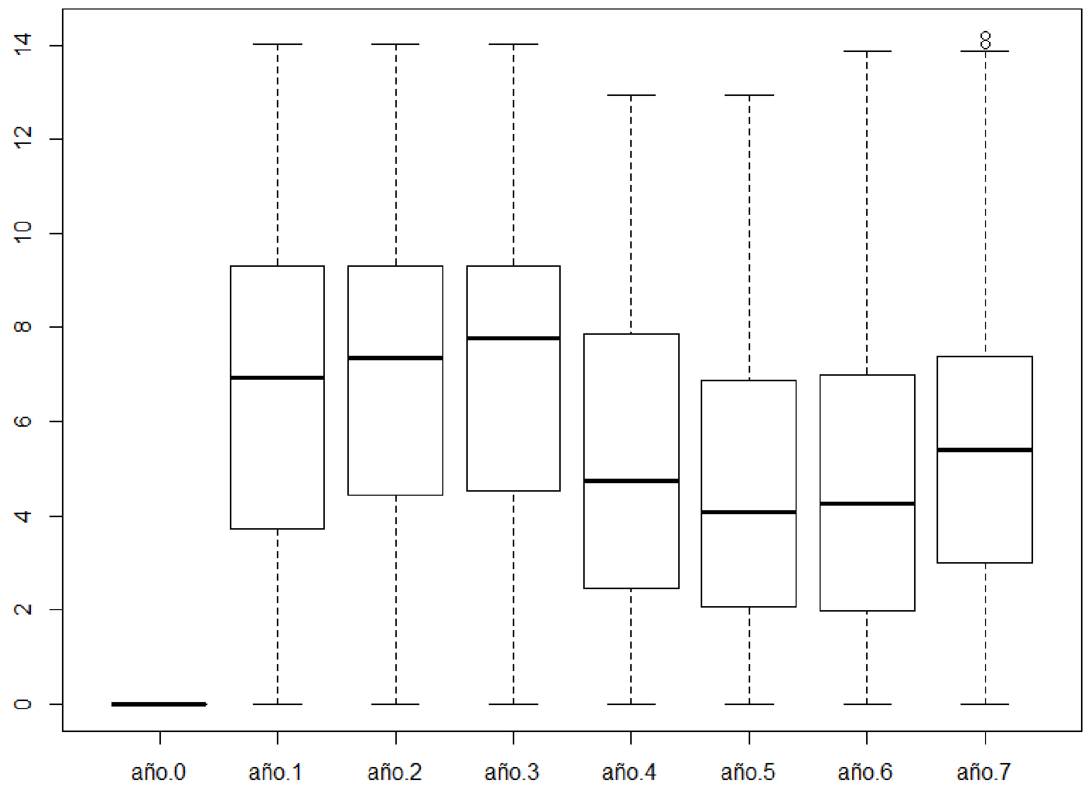


Figura 29: Gráficos de cajas con distancias recorridas por cada alumno en cada periodo Timon
Fuente: Elaboración propia

Finalmente, otra consideración importante es cuánto deben recorrar los alumnos que se cambian de establecimiento escolar. Para analizar lo anterior, en la figura 30, se aprecia un histograma que muesta cuántos alumnos están recorriendo cada rango de kilómetros. Lo anterior muestra que la gran mayoría de los alumnos que se cambian de colegio recorren entre 2 y 6 kilómetros. Esto es por la cantidad de colegios que se cierran y el tamaño del municipio.

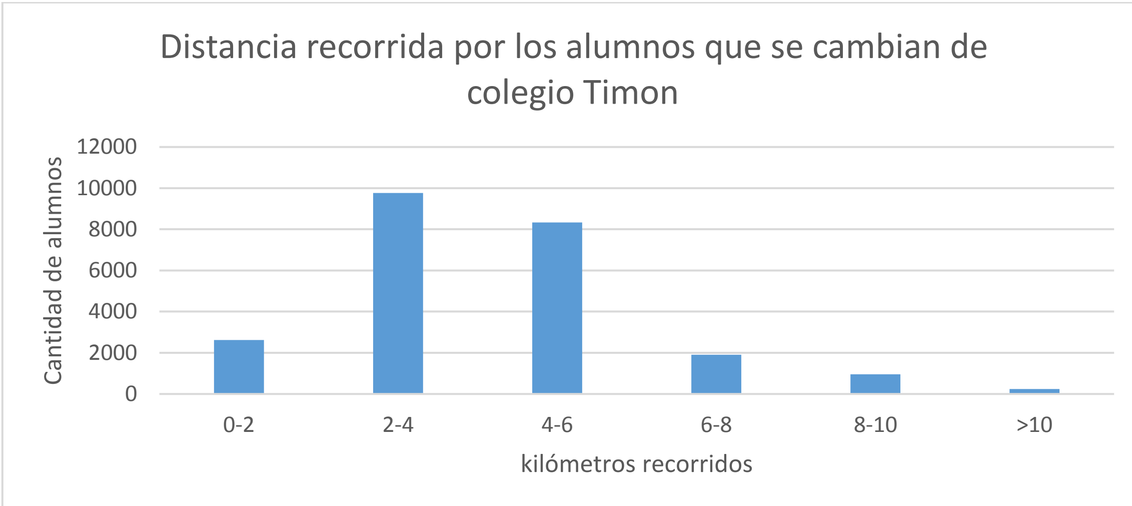


Figura 30: Histograma con la cantidad de kilómetros que recorren los alumnos que se cambian de colegio Timon
Fuente: Elaboración propia

1.7.2 Análisis de sensibilidad

Al igual que en el municipio pasado se realizó un análisis de sensibilidad de la solución entregada con respecto a tres variables distintas: (i) el número de alumnos que llegan en periodos sucesivos, (ii) el precio del combustible (costo de transporte aumentado proporcionalmente), y (iii) el valor monetario de cambiar a un alumno de establecimiento escolar.

Sobre el número de alumnos que van llegando en periodos sucesivos, al igual que en el caso anterior, mientras el *input* sea consistente con el aumento del número de alumnos, la decisión de qué colegio empezar a construir en qué periodo es robusta respecto a este parámetro. Lo que es más sensible es la asignación a alumnos a los distintos colegios debido a la capacidad de las salas. Es decir, al aumentar el número de alumnos, las salas a las que estaban yendo no poseen suficiente capacidad y éstos empiezan a asignarse a colegios más lejanos.

Sobre aumento proporcional del costo de transporte, afecta a la asignación de alumnos y a la creación de salas temporales. Al aumentar estos costos resulta más conveniente crear una sala temporal que enviar a los alumnos de dicha sala a colegios más lejanos. Debido a lo anterior, se produce una disminución de la distancia recorrida por los alumnos. A continuación, en la figura 31, se muestran los gráficos de cajas de los distintos periodos tras un aumento de cuatro veces el costo de transporte. En dichos gráficos puede verse que la distancia recorrida por los alumnos durante los primeros periodos es menor que la original, mientras que la de los últimos periodos es prácticamente la misma. Esto se debe a que durante los primeros periodos se crearon salas temporales que disminuían la distancia recorrida por los alumnos de esos años, y en los últimos, al ser todos los colegios integrales, las soluciones no cambian.

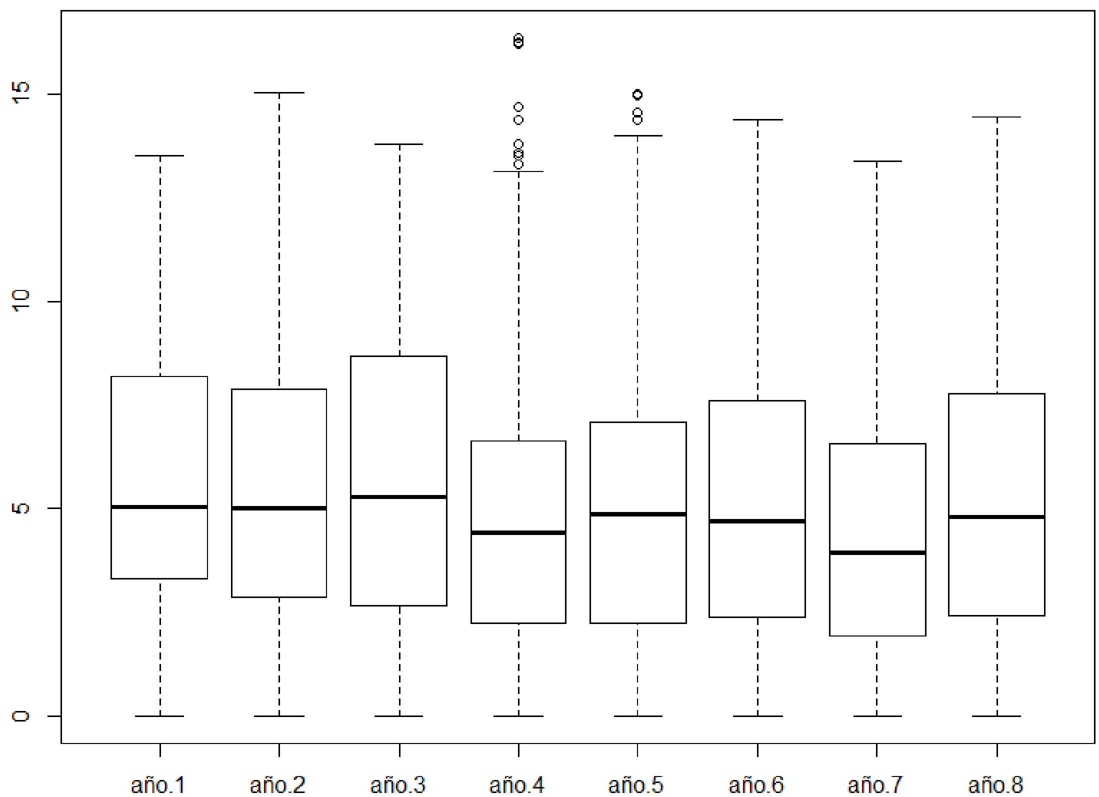


Figura 31: Gráfico de cajas con las distancias recorridas por los alumnos con el costo de distancia aumentado 4 veces

Fuente: Elaboración propia

Para terminar, se realizó un análisis de sensibilidad con respecto a la disposición a pagar por no cambiar a un alumno de colegio. Los valores que se consideraron para este análisis son los mismos que se usaron con Axixa: un valor que a criterio del modelador representa el mejor *trade off* entre movimientos de alumnos y aumento del costo de transporte, un valor que penaliza de manera importante el cambio de colegios, y un valor nulo, que solo considera los costos monetarios incurridos. Los resultados de estos tres análisis se pueden apreciar en la tabla 25.

Tabla 25: Tabla resultado análisis de sensibilidad costo de mover un alumno de colegio Timon
Fuente: Elaboración propia

Costo de mover alumno de colegio	Costo Monetario	Función objetivo	Cantidad de alumnos que se cambian de colegio
R$ 100	R$ 109.663.652	R$112.046.752	23.831
R$ 1.000	R$123.063.668	R$137.780.668	14.717
NULO	R$103.591.547	R$103.591.547	30.585

En la tabla anterior se puede apreciar que al considerar un costo de mover alumno de R$ 100, los costos monetarios aumentan un poco menos de un 6%, mientras que la cantidad de cambios de colegio disminuye cerca de un 20%. Es bueno destacar que, dado que se deben cerrar varios colegios, en este municipio no es factible disminuir mucho el cambio de alumnos de colegio. En caso de que se considerara un valor de R$ 1000 por este costo subjetivo, se mantienen abiertos colegios exclusivamente para que egresen los alumnos que tengan que egresar aumentando en gran medida los costos monetarios.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Esta sección se divide en dos partes. Primero se presentan las principales conclusiones que se desprenden de este trabajo. Segundo, se propondrán extensiones o posibles líneas de trabajo futuro.

Normalmente no se formulan modelos matemáticos de transición para conseguir estados optimizados, sino que solo se desarrollan para encontrar la situación final óptima. La manera de llegar a ésta es muy poco estudiada. En esta tesis se formuló, desarrolló y resolvió un modelo de programación entera mixta que permitió establecer el costo y forma de hacer una transición de un sistema educacional actual a uno deseado.

La resolución del problema de transición es muy costosa computacionalmente. Por lo anterior, para resolver éste problema se diseñó y programó una heurística para encontrar una solución inicial cercana al óptimo. Dicha metaheurística logró disminuir varios órdenes de magnitud el tiempo de resolución, pasando de más de cuatro semanas a menos de diez minutos, logrando resultados a un 5% de la solución óptima.

1.8 Conclusiones

De este trabajo se desprenden las siguientes conclusiones principales: (i) la incorporación de costos blandos en el modelo; (ii) mejoras en el tiempo de resolución por el uso de heurísticas; (iii) efectividad de la heurística comparada con el óptimo. A continuación, se detalla cada uno de los puntos anteriores.

1.8.1 La incorporación de costos blandos en el modelo

Uno de los principales aportes de este trabajo es la de no solo incluir costos monetarios, sino que también costos blandos en la función objetivo. Los costos blandos considerados son: el mover alumnos de colegio, dado que según Martinic (2015) estos cambios afectan de forma importante su educación; y el poder darle un *deadline* al cambio de sistema educacional.

Los resultados mostraron, al menos en las instancias probadas en este trabajo, que la incorporación de los costos anteriormente mencionados mejora notoriamente el nivel de servicio sin aumentar de manera importante los costos. Por ejemplo, en el municipio de Axixa, logró disminuir a más de la mitad el cambio de alumnos de colegio aumentando solo cerca de un 2% los costos monetarios.

1.8.2 Mejoras en el tiempo de resolución por el uso de heurísticas

Al correr Axixa, un municipio mediano, usando solo el software de optimización, el problema llegó a demorarse cerca de cuatro semanas en lograr conseguir resultados. Por este motivo se programó una heurística basada en la metaheurística GRASP para entregarle a Gurobi una buena solución inicial factible. Dicha solución disminuyó de manera importante la cantidad de ramificaciones que por las que tiene que pasar el modelo. Esto se debe a que, al tener un buen incumbente, es posible hacer la poda antes. Con esta mejora, para el caso del municipio antes mencionado, el tiempo de resolución bajó a menos de diez minutos.

1.8.3 Efectividad de la heurística comparada con el óptimo

En los casos estudiados la heurística diseñada llegó a resultados a menos de un 5% del óptimo, tanto para el caso del municipio de Axixa, como del municipio de Timon. Por lo tanto, si se quisiera evitar el uso de un software de optimización podría recurrirse directa y exclusivamente a la heurística sin tener grandes pérdidas de recursos.

1.9 Extensiones

Para mejorar este trabajo, se podrían desarrollar los siguientes trabajos futuros: (i) mejorar la predicción del número de alumnos; (ii) mejorar la estimación al pago por cambios de colegios; (iii) incorporación de otras variables blandas que influyen en la implementación del modelo de transición. A continuación, se detallan cada uno de las extensiones anteriores

1.9.1 Mejorar la predicción del número de alumnos

A pesar de que los resultados mostraron que si el *input* es consistente, la decisión de qué y cuándo cerrar un colegio es robusta, para que este *input* sea consistente es necesario tener una buena predicción en el número de alumnos que habrá en los siguientes periodos. Para este trabajo se supuso una tasa de aprobación de un 100% (lo que no necesariamente es cierto), y se realizaron modelos simples de series de tiempo para predecir el número de alumnos que llegarían periodo tras periodo. Otro factor que no se consideró es el cambio de alumnos del sistema de educación municipal al sistema de educación privada y viceversa. Suponer que se mantiene constante la proporción de alumnos en el sistema municipal y el privado es un supuesto fuerte, sobre todo si los municipios tienen la intención de mejorar el sistema educacional municipal a un sistema de jornada completa. Es bueno mencionar que todos estos supuestos que no se consideraron, afectan de manera importante en el *input*, pero no la formulación matemática del problema.

1.9.2 Mejorar la estimación al pago por cambios de colegios

Un parámetro que afecta de manera importante el modelo es el costo que se considera por cambiar a un alumno de colegio. Lo que se hizo en esta tesis fue probar distintos valores y ver cuál entregaba el mayor *trade off* entre los costos y el nivel de servicio. Sin embargo, esta disposición al pago debería variar mucho con respecto a las distintas características del municipio, como su densidad de colegios, la cantidad de alumnos que tiene, estado de la situación de transporte, etc. Una extensión a este trabajo podría ser cuantificar cuánto realmente es lo que debiese valer este parámetro dada las características de las distintas localidades.

Otra posible extensión referente al precio que se le asigna a transferir un alumno es que, dependiendo del cambio de colegio, se asigne un costo distinto. El modelo actualmente no toma en cuenta si se está cambiando a un alumno al colegio a dos cuadras del original o al que está al otro lado de la cuidad, a todas las transferencias le asigna el mismo valor. Dicha modificación no afecta de manera importante el modelo, solo habría que darle unos dos subíndices (el colegio que está yendo actualmente y el colegio al que va a ir) al costo de mover un alumno de colegio y a la variable que cuantifica los cambios de establecimiento escolar. El único problema que tendría este cambio es que aumenta en una dimensión más el problema, pero dado que la heurística logra resolver el problema anterior en tiempos razonables, podría lograrse sin mayores inconvenientes.

1.9.3 Incorporación de otras variables blandas que influyen en la implementación del modelo de transición

Por lo general, al modelar distintos tipos de problemas de optimización, no suelen modelarse variables no medibles monetariamente. En este trabajo se incluyó dentro de la función objetivo las transferencias de alumnos y un plazo para que se terminen de construir los colegios, pero también podrían incluirse otros tipos de variables aun no consideradas.

La inclusión de estas variables puede llegar a ser determinante a la hora de decidir si se hace o no un proyecto, especialmente en casos como éste en el que las decisiones son sobre todo políticas. Un buen augurio de los resultados que podrían obtenerse al agregar más variables blandas es que al menos al incluir las trabajadas en esta tesis, en las instancias probadas, se mejoró la calidad de servicio significativamente, sin un aumentar de forma importante los costos monetarios.

Para terminar este capítulo, vale la pena decir que modelar y optimizar problemas de política pública puede ser especialmente difícil por la cantidad de variables políticas y sociales que entran en juego. No se puede abordar como un problema de producción en el que solo se minimizan costos o maximizan beneficios pecuniarios. En esta tesis se intenta reconciliar la optimización *dura* con un problema de política pública al ingresar varias de las variables que podrían considerarse "sociales" al problema y así llegar a una solución que no sea la óptima de forma monetaria, sino que de forma "pública". Esta inclusión efectiva muestra los posibles alcances que puede tener la optimización aplicada a otros problemas políticos en los que no se trata tanto con costos e inversiones, sino que con personas.

BIBLIOGRAFÍA

Araya, F., Dell, R., Donoso, P., Marianov, V., Martínez, F., & Weintraub, A. (2012). Optimizing location size of rural schools in Chile. *TOC*, 695-710.

Bakhtavar, E. S. (2012). Optimization of the transition from open-pit to underground operation in combined mining using (0-1) integer programming. *Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy*, 1059-1064.

Binato, S., Hery, W. J., Loewenstern, D. M., & Resende, M. G. (2002). A Grasp for Job Shop Scheduling. *Essays and Surveys in Metaheuristics*, 59-79.

Brown, R. G. (1963). *Smoothing, forecasting and prediction of discrete time series.* Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

Caro, F., Shirabe, T., Guignard, M., & Weintraub, A. (2004). School redistricting: embedding GIS tools with integer programming. *Journal of the Operational Research Society*, 836-849.

Daskin, M. S., & Maass, K. L. (2015). The p-Median Problem. En G. Laporte, S. Nickel, & F. Saldanha da Gama, *Location Science* (págs. 21-45). Ann Arbor: Springer International Publishing.

Delmaire, H., Díaz, J. A., Fernández, E., & Ortega, M. (1998). Reactive GRASP and Tabu Search Based Heuristics dor the SIngle Source Capacitated Plant Location Problem. *INFOR Journal*, 194-225.

Feo, T. A., & Resende, M. G. (Marzo de 1995). Greedy Randomized Adaptive Search Procedures. *Journal of Global Optimization*, *6*(109), 109–133.

Ford, J., Bosworth, D., & Wilson, R. (1995). Part-time work and full-time higher education. *Studies in Higher Education*, *20*(2), 187-202.

Gelper, S., Fried, R., & Croux, C. (2007). Robust Forecasting with Exponential and Holt-Winters Smoothing. *Department of Decision Sciences and Information Management (KBI)*, 1-21.

Giesen, R., Rocha E Oliveira, P., & Marianov, V. (2015). Rural School Location and Student Allocation. In H. A. Eiselt, & V. Marianov, *Applications of Location Analysis* (pp. 273-289). Springer International Printing.

Hajimiragha, A. H., Canizares, C. A., Fowler, M. W., Moazeni, S., & Elkamel, A. (2011). A Robust Optimization Approach for Planning the Transition to Plug-in Hybrid Electric Vehicles. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2264 - 2274.

Holt, C. (1959). Forecasting seasonals and trends by exponentially weighted moving averages. *ONR Research*.

Lee, J., & Williams, B. (2011). Development and evaluation of a constrained optimization model for traffic signal plan transition. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 490-508.

Lemberg, D. S. (2004). Spatial Analysis and Modeling for the School District Planning Problem. En D. G. Janelle, B. Warf, & K. Hansen, *WorldMinds: Geographical Perspectives on 100 Problems* (págs. 119-124). Kluwer Academic Publishers.

Lemberg, D. S., & Church, R. L. (2000). The school boundary stability problem over time. *Socio-Economic Planning Sciences*, 159-176.

Liggett, R. S. (1973). The Application of an Implicit Enumeration Algorithm to the School Desegregation Problem. *Management Science*, 159-168.

Mandujano, P., & Giesen, R. F.-C. (2012). Model for Optimization of Locations of Schools and Student Transportation in Rural Areas. *The Transportation Network Modeling*, 74-81.

Martinic, S. (Febrero de 2015). El tiempo y el aprendizaje escolar. *Revista Brasileira de Educação*, *20*(61), 479-499.

Noticias de Timon. (2016). *Sobre Timon: Geografía de Timon*. Obtenido de Noticias de Timon, O portal do povo timonense: http://www.noticiasdetimon.com.br/sobre-timon/geografia-de-timon

Pavez, T., Giesen, R., Oliveira, P., Julio, N., Mandujano, P., & Ferrer, J. (Marzo de 2016). Solving Strategical and Tactical Location and Routing Problems through a Heuristic Approach. Santiago: Routing UC.

Pearl, J. (1984). Heuristics: intelligent search strategies for computer problem solving.

Prefeitura de Axixa. (2009). *Prefeitura de Axixa*. Obtenido de Prefeitura de Axixa, Trabalho e Dignidade: http://www.axixa.to.gov.br/

Pruckner, M., Thurner, C., Martin, A., & German, R. (2014). A Coupled Optimization and Simulation Model for the Energy Transition in Bavaria. *MMB & DFT 2014*(7).

Rajkumar, M., Asokan, P., Anikumar, N., & Page, T. (2011). A GRASP algorithm for flexible job-shop scheduling problem with limited resource constraints. *International Journal of Production Research*, 2409-2423.

Ravinder, H. V. (2013). Forecasting With Exponential Smoothing - What's the Right Smoothing Constant? *Review of Business Information Systems*, 117-126.

Rocha e Oliveira, P. (3 de Marzo de 2015). Reunión SLSH. (T. Pavez, Entrevistador)

Routing UC. (2016). Datos Brasil. Santiago, Chile: DICTUC.

Schwartz, A. E., Stiefel, L., & Cordes, S. A. (2015). Moving Matters: The Causal Effect of Moving Schools on Student Performance. *IESP Working Paper*, 1-36.

Sobol, M. G., & Collins, J. (1993). A Simple Method to Adjust Exponential Smoothing Forecasts for Trend and Seasonality. *Working Papers*(162).

Villalobos, M. F., & Giesen, R. (2012). Extensión de la Metodología de Localización de Escuelas y Transporte de Alumnos en Áreas Rurales. Santiago, Chile: Pontificia Universidad Católica de Chile, Escuela de Ingeniería.

ANEXOS

1.10 Anexo 1: Distancias entre todos los colegios y todos los sectores del ejemplo pequeño

Tabla 26: Tabla con la distancia entre colegios y sectores del ejemplo pequeño
Fuente: Elaboración propia

	sector 1	sector 2	sector 3	sector 4	sector 5	sector 6	sector 7	sector 8
colegio 1	5	4	7	10	5	4	7	10
colegio 2	8	5	4	7	8	5	4	7
colegio 3	10	7	4	5	10	7	4	5

1.11 Anexo 2: Tablas con la cantidad de alumnos en los distintos sectores en los distintos periodos

Tabla 27: Tabla con la distribución de alumnos en los distintos sectores del ejemplo sencillo en el periodo 0
Fuente: Elaboración propia

t=0	grado 1	grado 2	grado 3	grado 4
sector 1	0	5	0	5
sector 2	5	5	0	0
sector 3	0	0	5	5
sector 4	5	0	5	0
sector 5	5	0	5	0
sector 6	0	0	5	5
sector 7	5	5	0	0
sector 8	0	5	0	5

Tabla 28: Tabla con la distribución de alumnos en los distintos sectores del ejemplo sencillo del periodo 1
Fuente: Elaboración propia

t=1	grado 1	grado 2	grado 3	grado 4
sector 1	5	0	5	0
sector 2	0	5	5	0
sector 3	5	0	0	5
sector 4	0	5	0	5
sector 5	0	5	0	5

sector 6	5	0	0	5
sector 7	0	5	5	0
sector 8	5	0	5	0

Tabla 29: Tabla con la distribución de alumnos en los distintos sectores del ejemplo sencillo del periodo 2
Fuente: Elaboración propia

t=2	**grado 1**	**grado 2**	**grado 3**	**grado 4**
sector 1	0	5	0	5
sector 2	0	0	5	5
sector 3	5	5	0	0
sector 4	5	0	5	0
sector 5	5	0	5	0
sector 6	5	5	0	0
sector 7	0	0	5	5
sector 8	0	5	0	5

Tabla 30: Tabla con la distribución de alumnos en los distintos sectores del ejemplo sencillo del periodo 3
Fuente: Elaboración propia

t=3	**grado 1**	**grado 2**	**grado 3**	**grado 4**
sector 1	5	0	5	0
sector 2	5	0	0	5
sector 3	0	5	5	0
sector 4	0	5	0	5
sector 5	0	5	0	5
sector 6	0	5	5	0
sector 7	5	0	0	5
sector 8	5	0	5	0

1.12 Anexo 3: Solución de asignación de colegios de los distintos grados del periodo 1 con alto costo de cambiar alumnos de colegio

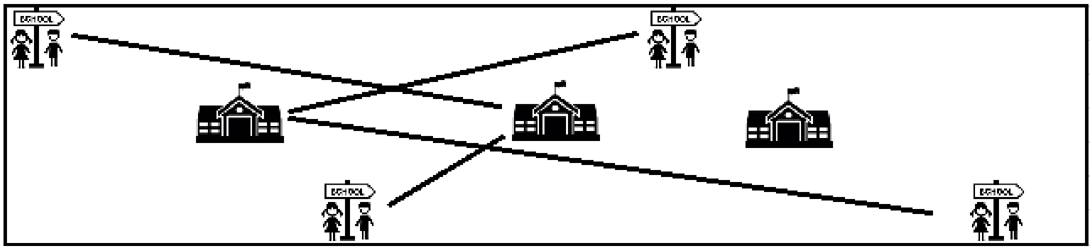


Figura 32: Asignación de alumnos alto costo de cambiar un alumno de colegio, año 1, grado1
Fuente: Elaboración propia

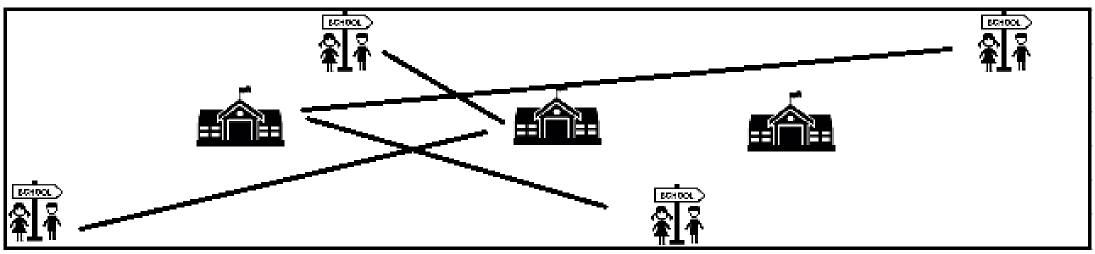


Figura 33: Asignación de alumnos alto costo de cambiar un alumno de colegio, año 1, grado 2
Fuente: Elaboración propia

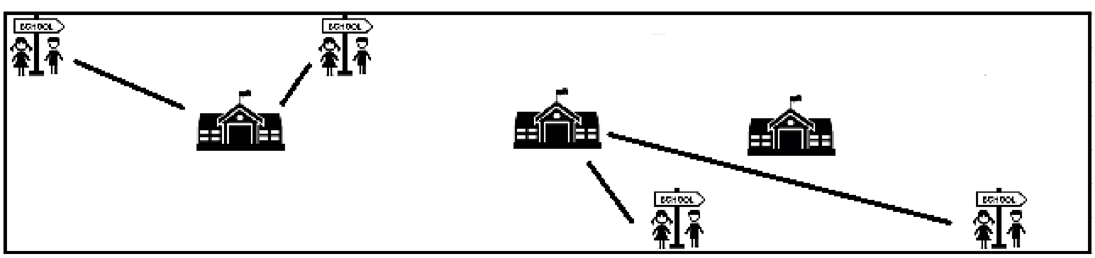


Figura 34: Asignación de alumnos alto costo de cambiar un alumno de colegio, año 1, grado 3
Fuente: Elaboración propia

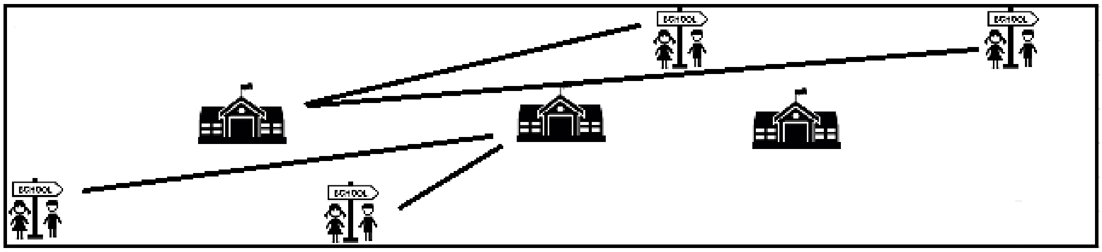


Figura 35: Asignación de alumnos alto costo de cambiar un alumno de colegio, año 1, grado 4
Fuente: Elaboración propia

1.13 Anexo 4: Solución de asignación de colegios de los distintos grados del periodo 2 con alto costo de cambiar alumnos de colegio

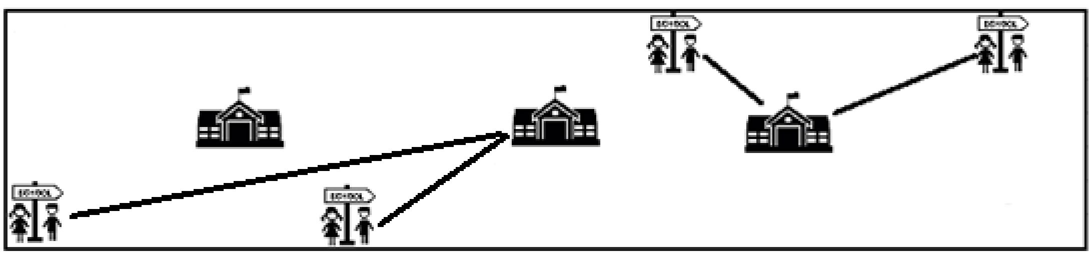


Figura 36: Asignación de alumnos alto costo de cambiar un alumno de colegio, año 2, grado 1
Fuente: Elaboración propia

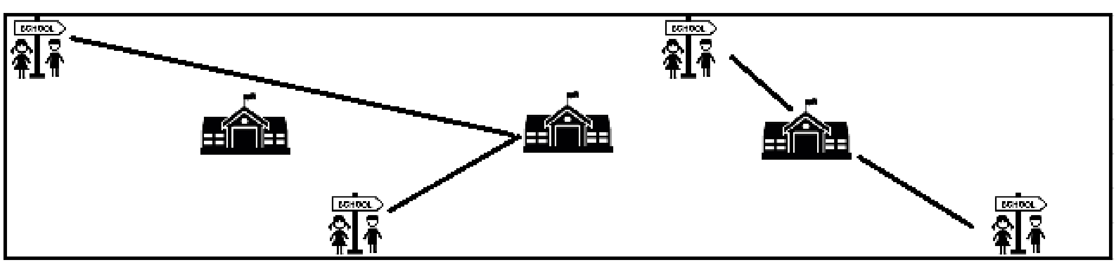


Figura 37: Asignación de alumnos alto costo de cambiar un alumno de colegio, año 2, grado 2
Fuente: Elaboración propia

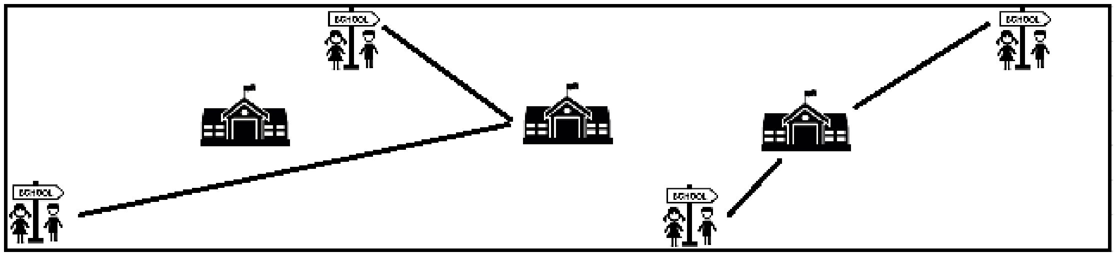


Figura 38: Asignación de alumnos alto costo de cambiar un alumno de colegio, año 2, grado 3
Fuente: Elaboración propia

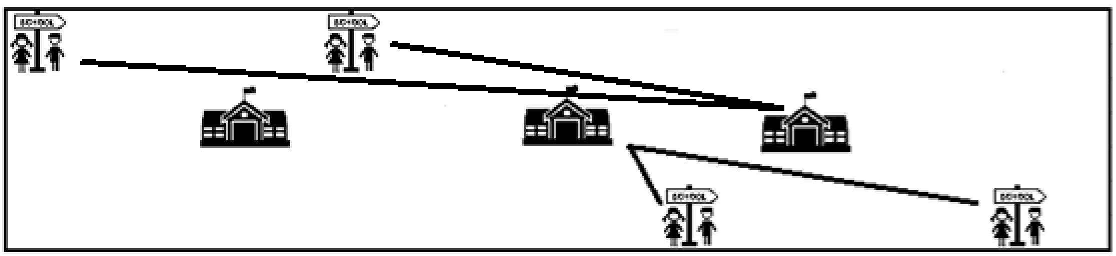


Figura 39: Asignación de alumnos alto costo de cambiar un alumno de colegio, año 2, grado 4
Fuente: Elaboración propia

1.14 Anexo 5: Solución de asignación de colegios de los distintos grados del periodo 3 con alto costo de cambiar alumnos de colegio

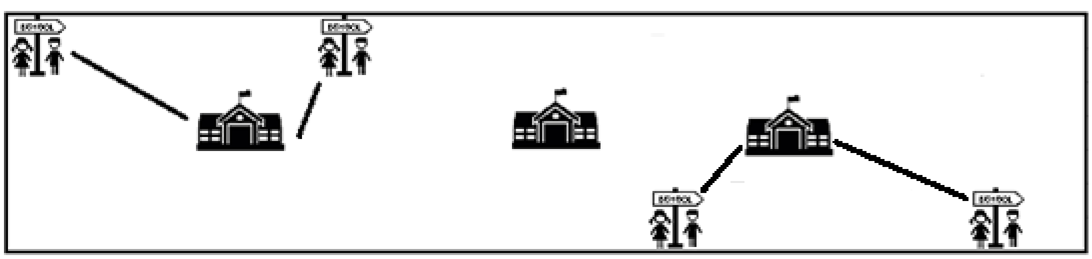


Figura 40: Asignación de alumnos alto costo de cambiar un alumno de colegio, año 3, grado 1
Fuente: Elaboración propia

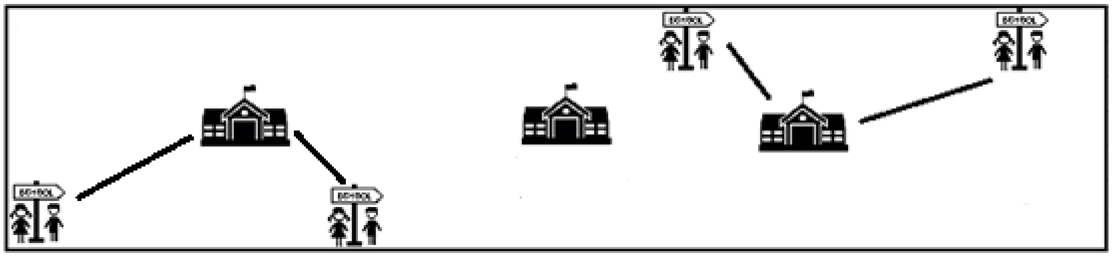


Figura 41: Asignación de alumnos alto costo de cambiar un alumno de colegio, año 3, grado 2
Fuente: Elaboración propia

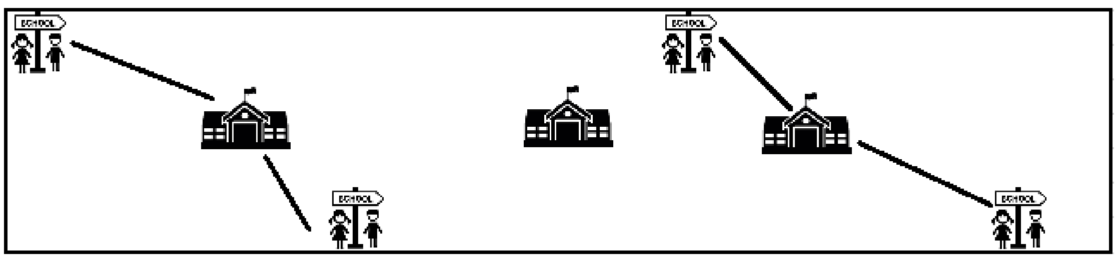


Figura 42: Asignación de alumnos alto costo de cambiar un alumno de colegio, año 3, grado 3
Fuente: Elaboración propia

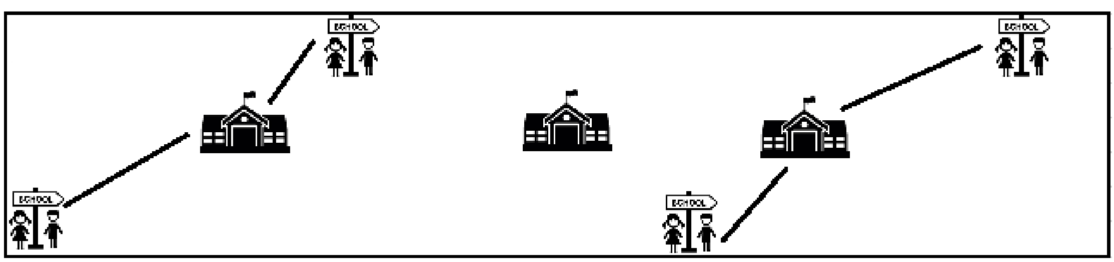


Figura 43: Asignación de alumnos alto costo de cambiar un alumno de colegio, año 3, grado 4
Fuente: Elaboración propia

1.15 Anexo 6: Solución de asignación de colegios de los distintos grados del periodo 1 con bajo costo de cambiar alumnos de colegio

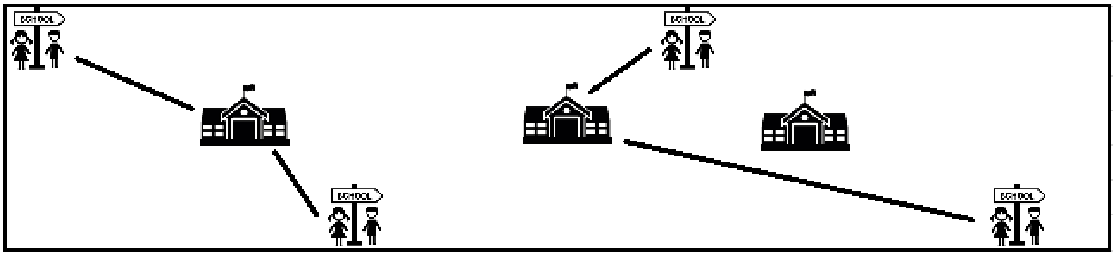


Figura 44: Asignación de alumnos bajo costo de cambiar alumnos de colegio, año 1,grado 1
Fuente: Elaboración propia

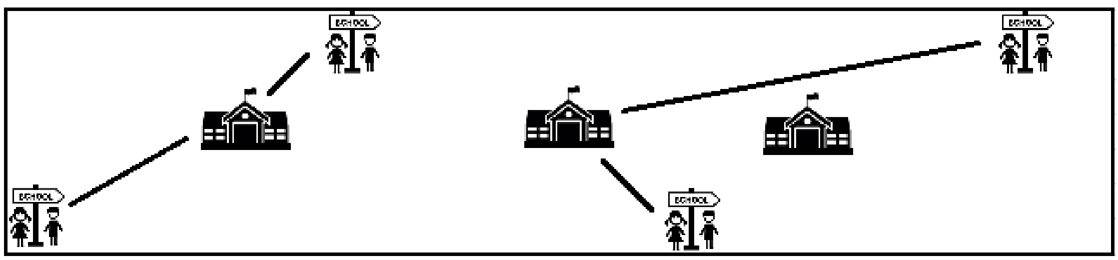


Figura 45: Asignación de alumnos bajo costo de cambiar alumnos de colegio, año 1, grado 2
Fuente: Elaboración propia

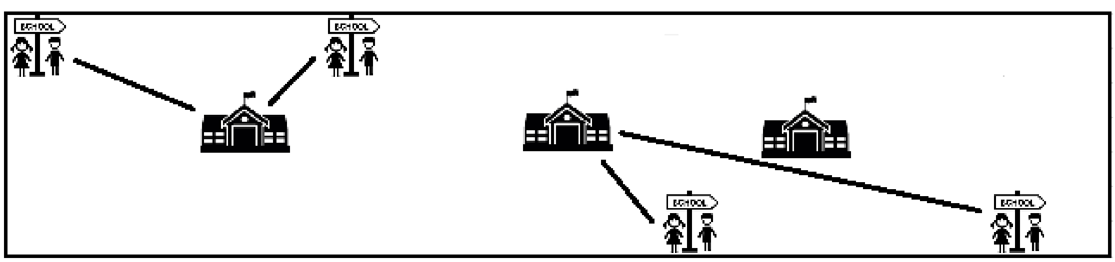


Figura 46: Asignación de alumnos bajo costo de cambiar alumnos de colegio, año 1, grado 3
Fuente: Elaboración propia

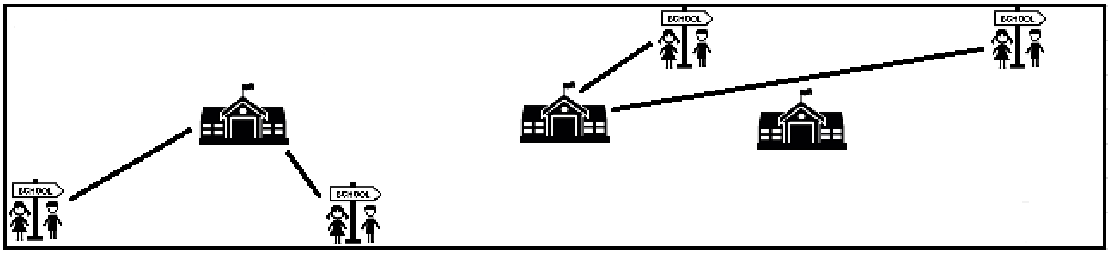


Figura 47: Asignación de alumnos bajo costo de cambiar alumnos de colegio, año 1, grado 4
Fuente: Elaboración propia

1.16 Anexo 7: Solución de asignación de colegios de los distintos grados del periodo 2 con bajo costo de cambiar alumnos de colegio

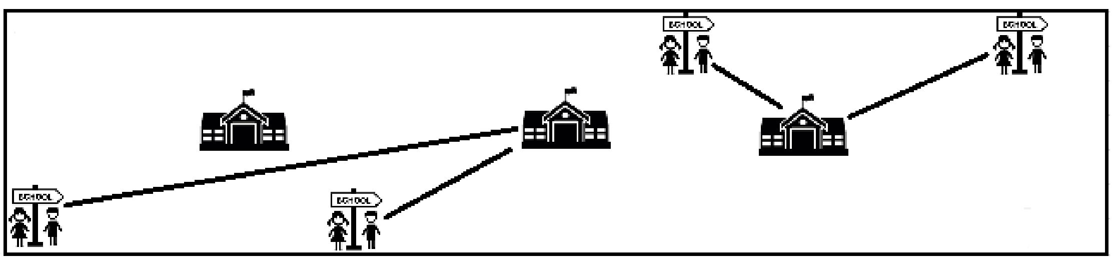


Figura 48: Asignación de alumnos bajo costo de cambiar alumnos de colegio, año 2, grado 1
Fuente: Elaboración propia

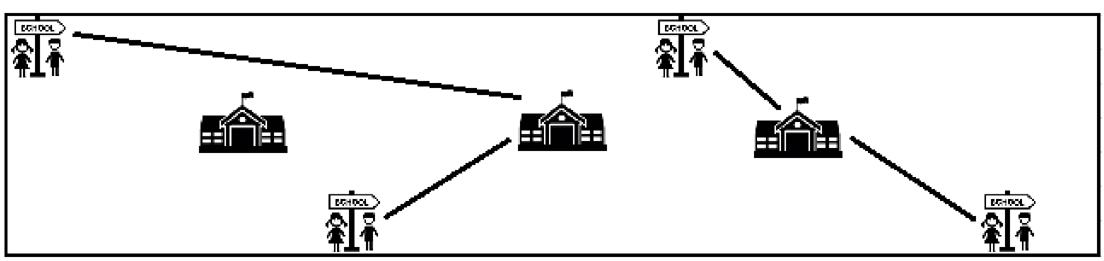


Figura 49: Asignación de alumnos bajo costo de cambiar alumnos de colegio, año 2, grado 2
Fuente: Elaboración propia

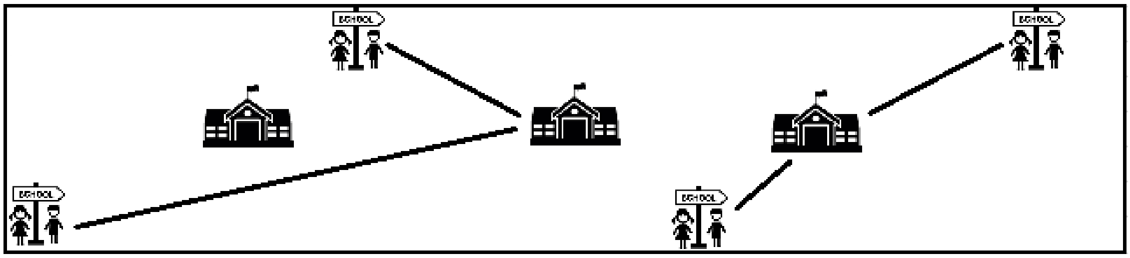


Figura 50: Asignación de alumnos bajo costo de cambiar alumnos de colegio, año 2, grado 3
Fuente: Elaboración propia

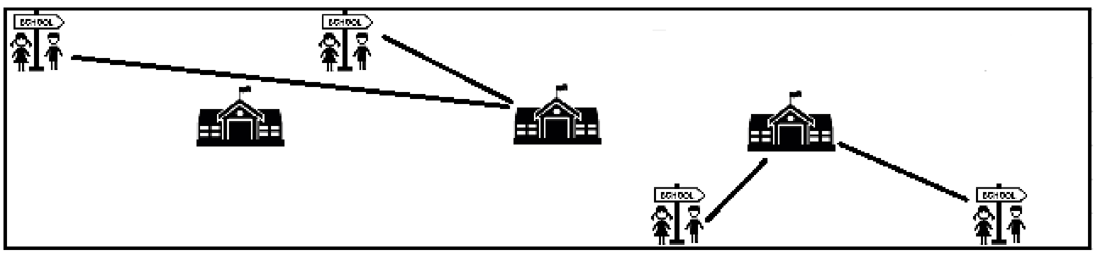


Figura 51: Asignación de alumnos bajo costo de cambiar alumnos de colegio, año 2, grado 4
Fuente: Elaboración propia

1.17 Anexo 8: Solución de asignación de colegios de los distintos grados del periodo 3 con bajo costo de cambiar alumnos de colegio

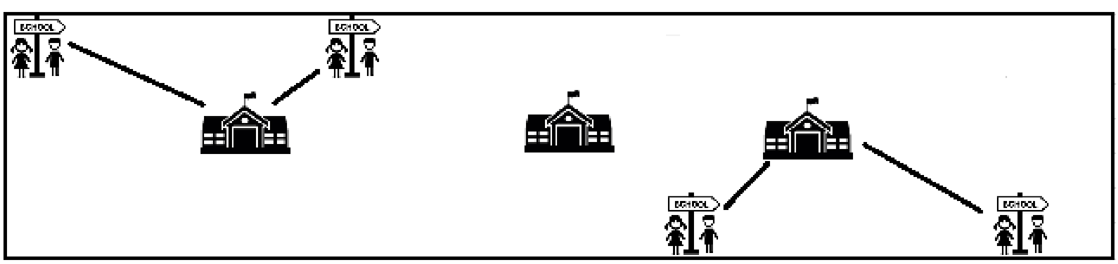


Figura 52: Asignación de alumnos bajo costo de cambiar alumnos de colegio, año 3, grado 1
Fuente: Elaboración propia

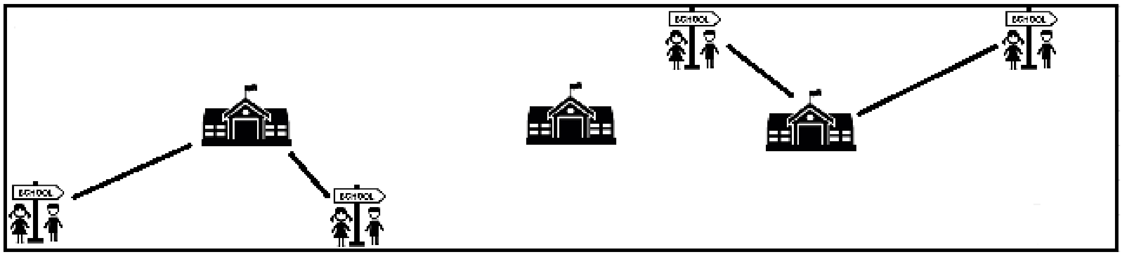


Figura 53: Asignación de alumnos bajo costo de cambiar alumnos de colegio, año 3, grado 2
Fuente: Elaboración propia

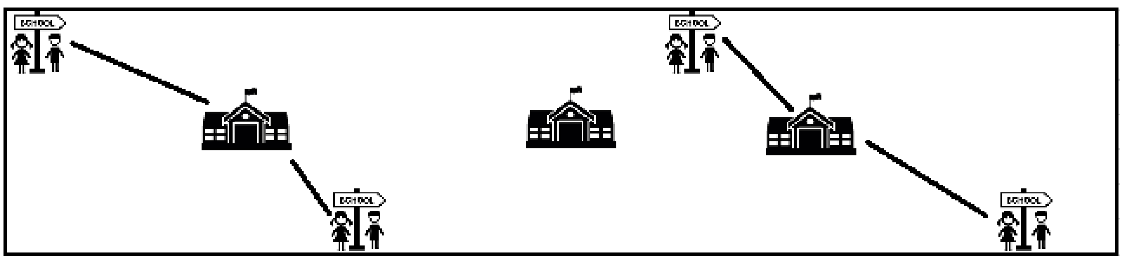


Figura 54: Asignación de alumnos bajo costo de cambiar alumnos de colegio, año 3, grado 3
Fuente: Elaboración propia

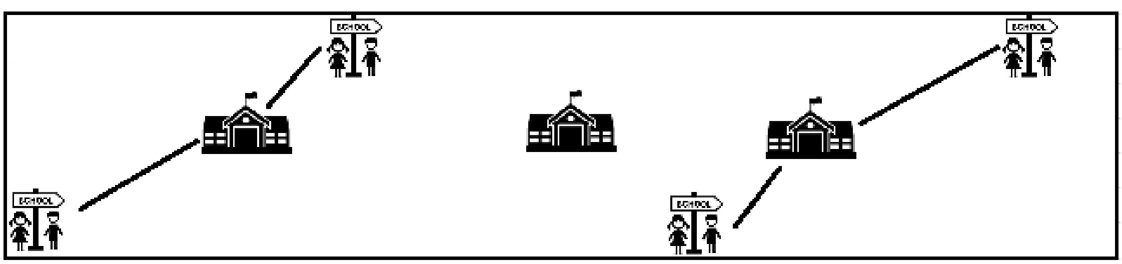


Figura 55: Asignación de alumnos bajo costo de cambiar alumnos de colegio, año 3, grado 4
Fuente: Elaboración propia