



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE EDUCACIÓN
PROGRAMA DE DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

**EXPERIENCIA DE RELACIÓN CON LA MATEMÁTICA EN
ESTUDIANTES QUE INICIAN LA EDUCACIÓN UNIVERSITARIA, Y
QUE POSEEN DISTINTO NIVEL DE HABILIDAD CUANTITATIVA:
UNA EXPERIENCIA CORPOREIZADA**

Por

MARÍA PAOLA MARCHANT ARAYA

Tesis presentada a la Facultad de Educación para optar al grado académico de
Doctor en Ciencias de la Educación

Director de Tesis: Dr. Claudio Núñez V.
Co-Director de Tesis: Dr. Carlos Cornejo A.

Mayo, 2016
Santiago, Chile

A mis padres,
Fundamento de lo que soy
A Manuel, Ignacio, Maximiliano y Victoria
Mis razones para vivir.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo de investigación ha significado un esfuerzo personal que para llegar a su término con éxito comprometió el apoyo de muchas personas a las que quiero agradecer. Sin embargo, no podría partir sin darle gracias a Dios por haberme dado la vida, la paciencia, la constancia, la fuerza y sabiduría necesaria para enfrentar un desafío como este. Y en especial, por haberme hecho sentir su compañía en los momentos difíciles.

Agradezco a mis padres, quienes me enseñaron a confiar en mis capacidades y a dar lo mejor de mí a los demás. A Manuel, por su amor y apoyo constante, en especial cuando a veces el camino parecía cuesta arriba. A mis hijos Manuel Ignacio, Maximiliano y Victoria, por la paciencia y el apoyo permanente, por sus abrazos que me reconfortaron tantas veces.

A mis hermanas Ana y Loreto, por su amor, compañía y paciencia conmigo, para entender el proceso que estaba viviendo y por su ánimo y alegría.

A mis amigas, Sandra, Carla y Verónica, quienes me vieron partir con este sueño, me acompañaron en el proceso y estuvieron ahí presentes en la etapa final. Gracias por el refuerzo positivo, el cariño, las recomendaciones y su apoyo permanente.

Gracias a mis profesores, en especial a mis tutores Claudio Núñez y Carlos Cornejo por sus orientaciones y guía para lograr que este haya sido un trabajo de calidad. A la señora Erika Himmel de quien no sólo aprendí mucho de investigación y evaluación, sino que también ha sido y será un referente siempre presente en mi futuro profesional y académico.

Agradezco al profesor Luis Flores, quien me animó a mirar la realidad desde una perspectiva diferente a la acostumbrada, encontrándome con la subjetividad y la fenomenología. Esta ha sido una experiencia enriquecedora como persona y profesional, que va siendo parte de lo que soy. Al profesor Patricio Felmer, quien con sus aportes y recomendaciones, desde la disciplina de la matemática, me permitió seguir aprendiendo como investigadora respecto de las decisiones que uno va tomando, así como también, iluminó el camino a seguir para futuras investigaciones.

Agradezco también a Paloma mi asistente y ayudante, y a Tomás. Que importante fue su trabajo como correctores en la recogida de datos para dar validez a los resultados. Gracias por su dedicación, apoyo y constancia.

No puedo terminar estas palabras sin agradecer a tantos colegas, amigos y profesores de la Facultad de Educación, de las escuelas de Construcción Civil, Psicología y Trabajo Social de la UC que me orientaron, iluminaron con sus consejos y me animaron a seguir adelante.

Muchas gracias.

TABLA DE CONTENIDOS

RESUMEN	XI
INTRODUCCIÓN	1
PRIMERA PARTE: MARCO GENERAL DE LA INVESTIGACIÓN	
CAPITULO 1	
1.1. Antecedentes y problematización	4
1.2. Objetivos de investigación	10
1.2.1 Objetivo General	10
1.2.2 Objetivos Específicos	10
1.3. Marco Teórico	11
1.3.1. Antecedentes acerca del estudio de la Matemática	11
1.3.2. Una aproximación desde la Psicológica Cognitiva a la Cognición Corporeizada	13
1.3.3. La experiencia en la matemática corporeizada	18
1.3.4. Estrategias Holística y Analítica y su relación con la Matemática	20
1.3.5. Gestualidad y su relación con la matemática	23
1.3.6. Vivencias significativas de aprendizaje de la matemática escolar	29
1.4. Marco Metodológico	33
1.4.1. Tipo de Investigación	33
1.4.2. Participantes	35
1.4.3. Procedimiento de recolección de información e instrumentos.	38
1.4.4. Preparación del trabajo de campo	42
1.4.5. Procedimiento general de análisis de datos	43
1.5. Desempeño de los estudiantes en el test	43
1.5.1. Análisis de las respuestas por ítem	45
1.5.2. Procedimientos de resolución y errores más frecuentes	55

SEGUNDA PARTE: PRESENTACIÓN DE LOS ESTUDIOS

CAPITULO 2

ESTUDIO 1: ESTRATEGIAS HOLÍSTICA Y ANALÍTICA EN LA RESOLUCION DE SITUACIONES MATEMÁTICAS	59
2.1. Población y muestra	59
2.2. Instrumentos de registro de observación	59
2.3. Procedimiento de registro de información	64
2.4. Procedimientos y técnicas de análisis de datos	64
2.5. Análisis de resultados de Estudio 1	66

CAPÍTULO 3

ESTUDIO 2: GESTUALIDAD EN RESOLUCION DE SITUACIONES MATEMÁTICAS	73
3.1. Población y muestra	73
3.2. Instrumento de registro de observación	73
3.3. Procedimiento de registro de información	75
3.4. Procedimientos y técnicas de análisis de datos	75
3.5. Análisis de Resultados de Estudio 2	76
3.5.1. Categoría Postura Corporal	77
3.5.2. Categoría Movimiento de las Manos	82
3.5.3. Categoría Características del Discurso	89
3.5.4. Categoría Seguridad en la Resolución	92

CAPÍTULO 4

ESTUDIO 3: VIVENCIAS SIGNIFICATIVAS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA ESCOLAR	93
4.1. Población y muestra	93
4.2. Técnica de recolección de datos	93
4.3. Procedimiento de registro de información	95
4.4. Procedimientos y técnicas de análisis de datos	95
4.5. Análisis de Resultados del Estudio 3	96
4.5.1. Dimensión 1: Disposición de los estudiantes ante la enseñanza y aprendizaje de la matemática	97
4.5.2. Dimensión 2: Percepción del apoyo familiar durante el	

aprendizaje de la matemática escolar	102
4.5.3. Dimensión 3: Estrategias de estudios para el aprendizaje de la matemática	105
4.5.4. Dimensión 4: Experiencias escolares que favorecieron el aprendizaje de la matemática	108
4.5.5. Dimensión 5: Experiencias escolares que dificultaron el aprendizaje de la matemática	111
4.5.6. Dimensión 6: Motivos de la Elección de Carrera	114
4.5.7. Síntesis del análisis cualitativo comparado por área	116

TERCERA PARTE: UN MODELO DE RELACIÓN CON LA MATEMÁTICA

CAPITULO 5: 119

5.1. Población y muestra	119
5.2. Instrumento de registro de datos	119
5.3. Procedimientos y técnicas de análisis de datos	121
5.4. Resultados del estudio	122
5.4.1 Articulación de los estudios Estrategia y Gestos	122
5.4.2 Articulación de los estudios sobre estrategias, gestos y experiencias significativa.	126
5.5. Discusión	131
5.5.1 Dimensiones del estudio: estrategia cognitiva elegida, gestualidad expresada y vivencia significativa en la etapa escolar	131
5.5.2 Experiencia de relación con la matemática, desde una perspectiva corporeizada.	136
5.6. Conclusiones de la Investigación	141
5.7. Aporte, proyecciones y limitaciones de la investigación	145

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 149

ANEXOS

Anexo 1. Análisis descriptivos sub muestra	163
Anexo 2. Consentimiento Informado	166
Anexo 3. Set de situaciones matemáticas	170
Anexo 4. Notas de campo	176
Anexo 5. Carta solicitud Directores de Docencia	185
Anexo 6. Carta invitación a alumnos	186
Anexo 7. Escalas de Estrategias Holística y Analítica	187
Anexo 8. Análisis de Escalas Holística y Analítica	194
Anexo 9: Rúbrica de gestualidad	198
Anexo 10: Análisis Rúbrica de gestualidad	199
Anexo 11: Análisis descriptivo de las categorías de gestualidad por área	203
Anexo 12: Guion Entrevista Abierta	208
Anexo 13: Análisis de resultados Categoría Disposición de los estudiantes	209
Anexo 14: Análisis de resultados Categoría Apoyo de Padres	261
Anexo 15: Análisis de resultados Categoría Estrategias de Estudio	273
Anexo 16: Análisis de resultados Categoría Experiencias Favorables de Enseñanza de la Matemática	284
Anexo 17: Análisis de resultados Categoría Experiencias Desfavorables de Enseñanza de la Matemática	300
Anexo 18: Análisis de resultados Categoría Elección de Carrera	310
Anexo 19: Análisis de Conglomerado	315

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Tópicos abordados en los estudios	35
Tabla 2. Distribución de la Muestra por Sexo y Área de procedencia	37
Tabla 3. Distribución de la Muestra por Área y Puntaje PSU	38
Tabla 4. Distribución de la Muestra por Área y Tipo de Colegio de Procedencia	38
Tabla 5. Comportamiento de las preguntas utilizadas en el estudio, comparando por áreas	42
Tabla 6. Desempeño en los ítems por área	44
Tabla 7. Desempeño de los estudiantes por ítem	45
Tabla 8. Estrategias de resolución por área	56
Tabla 9. Errores más frecuentes en la resolución, por área	57
Tabla 10. Resultados de Confiabilidad (<i>α de Cronbach</i>) por escala	60
Tabla 11. Análisis del componente 1 EH	61
Tabla 12. Análisis del componente 2 EH	61
Tabla 13. Análisis del componente Analítico	62
Tabla 14. Análisis del componente Bipolar	63
Tabla 15. Análisis de componente con escalas integradas	64
Tabla 16. Análisis de consistencia de correctores	66
Tabla 17. Descriptivos de las Estrategias Cognitivas	67
Tabla 18. Categorías de la Rúbrica para el Análisis Gestual	74
Tabla 19. Análisis Kappa de Cohen por categoría	76
Tabla 20. Dimensión: “Uso de manos”, por áreas	89
Tabla 21. Dimensión “Características del Discurso” por área	91
Tabla 22. Dimensión “Seguridad en la resolución” por área	92
Tabla 23. Profesión o actividad de los Padres	102
Tabla 24. Categorías y sub categorías significativas de los tres estudios	120
Tabla 25. Conglomerados Estrategia y Gestos	122
Tabla 26. Conglomerados Estrategia, Gestos y Experiencias Significativas	126

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Ejemplo resolución correcta (Estudiante caso 24 Humanista)	46
Figura 2. Ejemplo resolución correcta (Estudiante caso 32 Ingeniería)	46
Figura 3. Olvidar descontar el primer partido (Estudiante caso 60 Ingeniería)	47
Figura 4. Confusión con el rol del jugador libre (Estudiante 22 Ingeniería)	47
Figura 5. Error en el planteamiento del problema (Estudiante caso 3 Humanista)	48
Figura 6. No se entiende lo que se pregunta (Estudiante caso 7 Humanista)	48
Figura 7. Uso correcto de la regla de tres (Estudiante Caso 59, Ingeniería)	49
Figura 8. Sabe que tiene que aplicar la "regla de tres" pero no sabe cómo (Estudiante Caso 10, Humanista)	49
Figura 9. Procedimiento habitual con promedios (Estudiante Caso 56, Ingeniería)	50
Figura 10. Debilidad en el planteamiento matemático (Estudiante caso 6, Humanista)	51
Figura 11. Uso de la aproximación sin resultado positivo (Estudiante Caso 21, Humanista)	51
Figura 12. Horas para llenar la piscina (Estudiante Caso 60, Ingeniería)	52
Figura 13. Error de cálculo (Estudiante caso 38, Ingeniería)	53
Figura 14. “Solución alternativa” (Estudiante caso 14, Humanista)	54
Figura 15. No entender el concepto de porcentaje (Estudiante caso 13, Humanista)	55
Figura 16. Dificultad para establecer la ecuación y operar con porcentajes (Estudiante caso 41, Humanista)	55
Figura 17. Caso Holístico (Ingeniería)	78
Figura 18. Caso Analítico (Letras)	79
Figura 19. Caso Analítico (Letras)	79
Figura 20. Caso Analítico (Ingeniería)	80
Figura 21. Caso Analítico (Humanista)	80
Figura 22. Caso Analítico (Ingeniería)	81
Figura 23. Caso Analítico (Ingeniería)	81
Figura 24: Caso Analítico- Gesto Indicativo	84
Figura 25: Caso Holístico – Gesto Indicativo	84
Figura 26: Caso Analítico: “Eliminación Directa”	85

Figura 27: Gesto “dividir”, operación matemática (Caso Analítico)	86
Figura 28: Gesto “agregar”, operación matemática	87
Figura 29: Gesto ilustrativo: “pensando en dos opciones”	87
Figura 30. Vivencias significativas de los estudiantes del área Humanista en su proceso de aprendizaje de la matemática, en la etapa escolar	116
Figura 31. Vivencias significativas de los estudiantes del área de Ingeniería en su proceso de aprendizaje de la matemática, en la etapa escolar	117
Figura 32. Síntesis acerca de las vivencias significativas de los estudiantes en el aprendizaje de la matemática escolar	118
Figura 33. Relación entre la Estrategia de procesamiento y Gestualidad	125
Figura 34. Relaciones del estilo <i>Analítico Expandido</i>	128
Figura 35. Relaciones del estilo <i>Analítico Acotado</i>	129

ÍNDICE DE GRÁFICOS

Gráfico 1. Análisis de componentes principales de Gestualidad	75
Gráfico 2. Tono Corporal por Área	77
Gráfico 3. Conexión Personal por Área	81
Gráfico 4. Tipo de Gestos por Área	83

RESUMEN

Los sujetos construyen una relación significativa con la matemática que nace de la unión entre la mente y el cuerpo, no con la matemática en sí misma. Esta afirmación explicita la principal motivación de este estudio: reconocer a la matemática encarnada y en relación con nuestras capacidades humanas, procesos cognitivos y nuestra historia social. El aprendizaje de la matemática se configura entonces, en una red de significados compartidos intersubjetivamente, una experiencia de relación que no se restringe a desempeños académicos. El propósito de la investigación fue comprender y analizar la experiencia de relación que han establecido con la matemática estudiantes que inician la educación universitaria, con distinto nivel de habilidad cuantitativa, a partir de la gestualidad expresada, la estrategia cognitiva elegida y las vivencias significativas en la etapa escolar, al resolver situaciones matemáticas de la vida cotidiana.

A nivel general, el diseño metodológico fue de carácter mixto, y el tipo de estudio del tipo exploratorio-descriptivo-comparativo. A partir de éste diseño se desarrollaron tres estudios que abordaron distintos niveles de relación con la matemática: estrategias cognitivas, gestualidad y vivencias significativas de aprendizaje de la matemática escolar. La muestra estuvo constituida por 61 estudiantes, con distinto nivel de habilidad cuantitativa, que estaban iniciando su educación universitaria. Para recoger información se aplicó a nivel general una entrevista cognitiva que consideró cinco situaciones matemáticas a resolver por cada estudiante. Se construyeron escalas para evaluar estrategias holísticas y analíticas, una rúbrica para registrar gestualidad y lenguaje, y entrevistas abiertas cualitativas para indagar acerca de las vivencias de los estudiantes. Todos los instrumentos y procedimientos respetaron los criterios de validez y confiabilidad para la investigación científica.

Los resultados permiten afirmar la presencia de dos estilos de relación de los estudiantes con la matemática, el estilo *Analítico Acotado* y el estilo *Analítico Expandido*. Ambos confirman el papel del cuerpo en la construcción de significado. Se concluye que los estudiantes dan cuenta de una experiencia de relación particular, subjetiva y holística con la matemática, que se expresa a partir de la fisionomía de su gestualidad, tono corporal, uso y claridad del lenguaje matemático utilizado, velocidad y tono de la voz, lo que se relaciona a su vez con las experiencias significativas de aprendizaje de la matemática escolar, y el desempeño en el test de situaciones matemáticas a resolver. Los estilos dan cuenta de una experiencia articulada a partir de múltiples dimensiones subjetivas e intersubjetivas. Se discuten las implicancias para la enseñanza de la matemática, asociada al desarrollo de experiencias de aprendizaje que vayan más allá estrategias clásicas de enseñanza y evaluación, considerando como punto de partida la experiencia de aprendizaje e historia personal del aprendiz, luego, en el proceso de comprensión, el estímulo y desarrollo de la gestualidad de este en interacción con la del docente, así como el desarrollo de aproximaciones tanto analíticas como holísticas en la resolución de situaciones matemáticas.

ABSTRACT

Individuals develop a meaningful relationship with mathematics which is brought into existence from the union between mind and body, not mathematics itself. This relationship is the basis of this study; namely, to recognize embodied mathematics and in relationship to our human capabilities, cognitive processes and our social and cultural background. Learning mathematics is configured intersubjectively in a network of shared meanings, a relationship experience which does not reduce academic performance. The purpose of this study research was to understand and analyze the relationship experience first-year- college students have built with mathematics, which have developed different levels of quantitative ability, from the chosen cognitive strategies, expressed gestures and the meaningful experiences lived during their school age when solving mathematical situations in real life context.

At a general level, the study was conducted using a mixed methods design, the exploratory-descriptive-comparative type. From this design three studies were developed which focused on different levels of relationship with mathematics: cognitive strategies, gesture and meaningful school mathematics experiences. The sample was composed of 61 freshmen who presented different levels of quantitative ability.

The following instruments were considered for the development of the studies: a cognitive interview, which comprised five mathematical situations to be solved by each student. To assess holistic and analytic strategies a set of scales was designed and a rubric to register gesture and qualitative open interviews to know further details of the students experience. All instruments and procedures respect the validity and reliability criteria of scientific research.

The results allow the presence of two styles of relationship with mathematics: the *Analytical Restricted* style and the *Analytical Expanded* style. Both styles support the role of the body in the construction of meaning. It may be concluded that those students give account of a characteristic relationship experience, subjective and holistic with mathematics, which is expressed from the physiognomy of their gesture, corporal tone used and clarity of the language, tone of voice, which is related to the meaningful experience of learning school mathematics, and their performance in the mathematical situations to be solved. The styles show an articulated experience from multiple subjective and intersubjective dimensions. The implications of this study for mathematics teaching are discussed, which are also associated to the development of learning experiences which go beyond the classical teaching and assessment strategies, considering as a starting point the learning experience and learners' personal background, then in process of comprehension, the stimulus and their gesture development in interaction with teacher gesture, and the development of analytical and holistic approaches when solving mathematical situations.

INTRODUCCIÓN

La matemática es un riguroso medio para expresar el pensamiento, que permite traducir la complejidad del mundo en pautas manejables. Por tal motivo, abordar su estudio es importante en el área de la educación, especialmente cuando se intenta desarrollar su aprendizaje en todas las personas para que puedan aprovechar el potencial que tiene tanto en la comprensión de nuestro mundo circundante como en la toma de decisiones al resolver problemas en distintos contextos.

Es así, que se buscó profundizar en la relación que han construido con la matemática estudiantes que inician la educación universitaria, con distinto nivel de habilidad cuantitativa, a partir de una visión holística y articulada de las variadas dimensiones que configuran esta relación. Desde la perspectiva de la matemática corporeizada se ha planteado una investigación que considera a esta disciplina desde la complejidad mente-cuerpo, que a su vez está situada en estrecha relación con la historia social y cultura de quien la vive. La relación con la matemática se concibe como una construcción inseparable de quien percibe y de su relación con otros. Los otros son relevantes, en tanto se comparten experiencias que permiten interpretar y configurar una comprensión significativa del mundo.

El presente informe se estructura para dar cuenta de esta relación de los estudiantes con la matemática en cada etapa de la investigación. En la primera parte, la problematización pone de manifiesto la necesidad de establecer una relación directa entre cuerpo-mente-historia social y los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, vividos por los estudiantes en la etapa escolar. Todo lo anterior, desde una perspectiva articulada y no como una suma de partes. Los objetivos presentados en este apartado orientaron la construcción del marco teórico, que describe y explica las bases conceptuales de la perspectiva de la cognición corporeizada. Asimismo, se contextualiza la investigación sobre la matemática corporeizada y se describen las dimensiones que conformaron las experiencias vividas por los sujetos, como son las estrategias cognitivas (holísticas y analíticas), la gestualidad y las experiencias significativas en la construcción de la relación con la matemática.

Se presenta, además, la metodología general de la investigación que consideró la presentación del diseño y tipo de estudio, las características de los participantes y el setting utilizado para abordar los objetivos de investigación. Dado el foco en la comprensión y la perspectiva corporeizada utilizada, que considera como base la relación mente-cuerpo-mundo, fue necesario crear un dispositivo metodológico que implicó la realización de tres estudios. Estos últimos abordaron la identificación de las estrategias holística y analítica utilizadas, la gestualidad que expresan los estudiantes y los vivencias subjetivas en torno al proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en la etapa escolar.

Al mismo tiempo, en este apartado se describen las situaciones matemáticas que debieron responder los entrevistados, el proceso de validación de las mismas y el procedimiento de análisis de datos realizado. Si bien el propósito del estudio no consistía en medir a los estudiantes en cuanto a sus habilidades cuantitativas, se analizó el desempeño de estos en el test aplicado, a partir de cada ítem. En el análisis se pudo evidenciar el mejor desempeño obtenido por los estudiantes de Ingeniería por sobre los de Ciencias Sociales y Humanidades (en adelante Humanistas como nombre genérico). Además, se explicitó el modo de resolución de situaciones matemáticas declarado por los estudiantes y los errores más frecuentes en cada caso.

Con el propósito de describir cada estudio y su relación con los objetivos específicos, en la segunda parte del documento se presentan los tres estudios mencionados, de acuerdo a su cronología. En estos, se explicitan las decisiones metodológicas realizadas en cada caso, los participantes, los instrumentos de recolección de datos y los procedimientos y técnicas de análisis de la información, procedimientos de aplicación y resultados obtenidos.

En el estudio 1, referido a estrategias Holísticas y Analíticas fue un hallazgo el carácter analítico de los estudiantes sin distinción del área a la que pertenecían. En el estudio 2 referido a gestualidad, se hizo evidente la relación entre gesto, pensamiento y lenguaje. Lo más destacable fue evidenciar que a pesar de la baja gestualidad en cada grupo de estudiantes, esta se expresó de manera más definida, en cuanto a su morfología, y más abundante, en cuanto a su presencia acompañando el discurso, cuando los estudiantes presentan un mejor desempeño en el test de situaciones matemáticas aplicado, del tipo experto, como fue en el caso de los estudiantes de Ingeniería. Tal hecho se vio además complementado con un mayor uso, claridad y precisión del lenguaje y mayor seguridad tanto en el procedimiento como en la resolución. Se plantearon también en los resultados analizados implicancias del uso de la gestualidad en el contexto del aula.

El estudio 3 estuvo referido a vivencias significativas en la etapa escolar. Se analizaron aspectos relacionados con la disposición de los estudiantes, el aporte de la familia al aprendizaje de la matemática, experiencias escolares que favorecieron o dificultaron el aprendizaje de la matemática. Se presentan estrategias de estudio utilizadas por los mismos estudiantes. Se destacan las semejanzas y diferencias en la experiencia que reportan los estudiantes de la muestra en su proceso de aprendizaje de la matemática escolar, que se relaciona a su vez con sus desempeños en el test y en la prueba de selección universitaria (PSU) rendida. Fue positivo para la investigación conocer las experiencias de estudiantes con puntajes nacionales en la PSU de matemática, ya que en general los estudios abordan a aquellos estudiantes con dificultades.

Este estudio pudo concluir acerca de las particularidades de la experiencia vivida de los estudiantes en la etapa escolar, y aportó con aspectos de interés tanto para la enseñanza de la matemática en educación escolar como en los inicios de la etapa universitaria.

Finalmente, en la tercera parte del informe y como producto de la realización de los tres estudios se logra dar cuenta de la experiencia de relación de los estudiantes entrevistados con la matemática. Se analizaron las dimensiones significativas emergentes de cada estudio para relacionarlas entre sí y, de este modo, dar cuenta de la relación corporeizada de los estudiantes con la matemática como un todo. El surgimiento de dos estilos analíticos de relación, el estilo *Analítico Acotado* y el estilo *Analítico Expandido*, fue un hallazgo de importancia para la investigación, puesto que se pudo apreciar la manera en que la corporalidad logra revelar la relación de significados subjetivos que los estudiantes establecen con la matemática, aspecto discutido al final del informe.

PRIMERA PARTE: MARCO GENERAL DE LA INVESTIGACIÓN

Capítulo 1:

1.1 Antecedentes y problematización

La sociedad actual está planteando múltiples demandas a los individuos dadas las transformaciones que la globalización ha impulsado en los distintos ámbitos del quehacer humano (Urreiztieta, 2004). Nos encontramos en momentos de incertidumbre, un escenario en que las demandas a los individuos son múltiples y cambiantes, que exige de ellos el desarrollo de distintas capacidades (OCDE, 2006). La matemática se constituye, entonces, en un factor central para enfrentar estas demandas, al participar de gran parte de nuestra actividad diaria. Esta capacidad permite que las personas puedan analizar, razonar y comunicarse eficazmente cuando se plantean, formulan, resuelven e interpretan problemas matemáticos en diversas situaciones del mundo real en que se desenvuelven (OCDE, 2006).

Como un riguroso medio para expresar el pensamiento (Nesher, 2000), la matemática es un lenguaje que permite traducir la complejidad del mundo en pautas manejables. Esta “materia aparentemente árida, tiene una gran relevancia para las ideas filosóficas que constituyen el fundamento de la sociedad. Al aprender matemática, somos capaces de captar mejor nuestro entorno” (Cole, 1999, p.12), ya que esta “no consiste solamente en operar con números como en asumir un modo de pensamiento y plantear cuestiones que nos permitan dar la vuelta a las cosas para percibir el sentido de su verdadera naturaleza” (Cole, 1999, p.13).

Un entendimiento real de la matemática permite al sujeto comprender el mundo y sus transformaciones, como por ejemplo: los cambios de población, fluctuaciones en los precios, tasas de crecimiento; así como la multiplicidad de tareas que entrañan conceptos matemáticos de carácter cuantitativo, espacial y probabilístico, entre otros, constituyéndose en un aspecto de gran importancia para las personas, tanto en su rol de ciudadano común, como en su vida profesional presente y futura (Hilton, 2000; Mullis et al. 2003; OCDE, 2006).

La matemática provee de poder para la innovación y desarrollo para actuar en una economía tecnológica global (Steen, 1990), y se constituye en la base de lo que llamamos competencia cuantitativa, es decir, la “capacidad del individuo para identificar y entender la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios fundados, utilizar y relacionarse con la matemática de forma que se puedan satisfacer las necesidades de la vida de los individuos como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos” (OCDE,

2006, p.74). Es decir, la matemática se concibe desde la lógica de un conocimiento que puede ser utilizado para enfrentar diversas situaciones de la vida, lo que requiere de bases sólidas a nivel conceptual. Esta competencia cuantitativa, supone desarrollar en los estudiantes la capacidad de resolución de problemas, contar con un vocabulario especializado, terminología, entre otros, los que se combinan de modo creativo para responder a las exigencias del medio (OCDE, 2006).

Para las Ciencias Sociales y Ciencias Humanas, la matemática se constituye en un actor siempre presente. Además de las aplicaciones de la Teoría de Probabilidades y de la Estadística en la investigación experimental, por ejemplo, se emplean diversas técnicas matemáticas en Economía, estructuras algebraicas en Lingüística y Antropología, modelos matemáticos en teoría de la comunicación o análisis de correspondencia en sociología, entre otros (Heber, 1999; Peña, 2004).

Si bien la matemática es relevante en la vida de las personas, no es fácil desarrollar esta capacidad. Particularmente, cuando la relación con los números está trascendida por experiencias poco exitosas en la etapa escolar las que traen consigo una visión negativa de las matemáticas, dadas las dificultades que implica su aprendizaje (National Mathematics Advisory Panel, 2008) dejando lagunas que son acumulativas en la etapa escolar llegando a ser muy difíciles de superar en la educación superior (Hidalgo, Maroto & Palacios, 2005, Himmel, 2003). Aún más, las experiencias de enseñanza de la matemática nos indican que el énfasis todavía se encuentra centrado en el desarrollo de técnicas de carácter mecánicas, necesarias para superar exámenes diseñados con una intencionalidad fijada (Espinoza, Barbé y Gálvez, 2009; Hilton, 2000; Miranda, 2005).

Las experiencias desfavorables indicadas traen como consecuencia los bajos resultados académicos obtenidos por los estudiantes chilenos a nivel escolar (MINEDUC 2010; Mullis et al. 2003; Agencia Calidad de la Educación, enero 2013, 2015a, 2015b; OCDE, 2006, 2012). A nivel universitario, algunos estudios internacionales reflejan que los estudiantes de primer año de educación superior presentan problemas derivados de la falta de conocimientos y habilidades matemáticas, así como también, debilidades de comprensión lectora para poder afrontar con éxito los nuevos contenidos, entre otros (Sastre, Boubeé, Rey & Delorenzi, 2008).

Un estudio cualitativo que analizó las actitudes de 71 estudiantes de primer año de Educación Básica en la Universidad de Granada, concluyó que un 84,51% de estos presentan miedo a esta materia, no son partidarios de ampliar sus conocimientos matemáticos y, en general, se sienten incómodos al relacionarse con ella, atribuyendo estas emociones al proceso de aprendizaje escolar (Sánchez, Segovia & Miñán, 2011). Estudiantes y profesionales de las Ciencias Sociales tienden a prescindir de la matemática o evitarla al entenderla como un mero cálculo. Consideran más elegante un razonamiento en el que no intervengan los números (Corbalán, 1997), sin apreciar que la esencia misma de

la matemática se encuentra en el concepto de orden más que de número (Ibáñez, 1991).

Ante el desafío de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, las líneas de estudio han sido variadas, con el propósito de intervenir con estrategias y acciones que mejoren significativamente la comprensión de la matemática y, por ende, los desempeños de los estudiantes. Desde el National Council of Teachers of Mathematics, investigadores de la educación matemática en el mundo buscan respuestas a preguntas importantes, para mejorar la enseñanza de la matemática, el aprendizaje, el currículo y la evaluación (Stephan et al., 2015). La meta es trabajar para "asegurar que todos los estudiantes alcancen la competencia matemática y aumentar el número de estudiantes de todos los grupos raciales, étnicos, de género, y grupos socioeconómicos que alcanzan los más altos niveles de rendimiento en matemáticas" (National Council of Teachers of Mathematics, 2014, p. 61).

Se han estudiado los procesos cognitivos involucrados y los resultados de aprendizaje propiamente tales, incluyendo el estudio de variables motivacionales, sociales y efectivas, aspectos específicos de enseñanza y aprendizaje de distintos objetos y procesos matemáticos, entre otros (Agencia de la Calidad de la Educación, 2013; 2015a, 2015b; Araya, 2004; Araya et al., 2012; Bishop, 2000; Curry, Schmitt & Waldrom, 1996; Gal, Van Groenestijn, Manly, Schmitt, & Tout, 2003; Mullis et al. 2003; National Mathematics Advisory Panel, 2008; OCDE, 2003, 2006, 2012; Steen 1990, 2006). Sumado a lo anterior, se ha dado especial importancia a la comprensión de la matemática como objeto, ya que dicho entendimiento permitirá que los estudiantes puedan utilizar este conocimiento de modo flexible y adaptarse a nuevas situaciones y problemas (Hiebert et al., 1997; Marshall & Mickenberg, 1988; National Mathematics Advisory Panel, 2008; National Research Council, 2013; Nesher, 2000).

A nivel cognitivo, se han presentado posturas que señalan que las personas con baja habilidad matemática no utilizarían un razonamiento lógico deductivo o inductivo, ya que harían uso de estrategias heurísticas, atajos cognitivos que sacrificarían la precisión (Hofstadter, 1989a, 1989b; Paulos, 1990, 1993; Tversky & Kahnemann, 1982). Para otros, estas personas carecerían de habilidades matemáticas para poder manejar una situación o resolver problemas en un contexto real, ya que no lograrían responder a situaciones sobre ideas matemáticas que pueden representarse en un rango de formas (Gal et al., 2003). Lo anterior se daría ante la necesidad de activar un amplio rango de conocimientos, factores y procesos. No obstante, ciertos autores se oponen a estos últimos planteamientos y les asignan valor ecológico a los heurísticos como estrategias de pensamiento, un tipo de lógica psicológica para enfrentar los desafíos matemáticos (Gigerenzer, 2000).

Existe la creencia de que hay pocas personas con habilidades matemáticas de alto nivel, capaces de comprender la matemática y sus principios. Esta perspectiva se basa en una visión que limita la matemática a las capacidades de la mente y el cerebro humano, sin posibilidad de trascendencia (Lakoff & Núñez, 2000). Bajo la premisa de las habilidades

innatas, heredadas solo a algunos, la matemática ha sido entendida como objetiva, separada del cuerpo, independiente de quien la conoce. Se ha tomado una postura de estudio parcializada, absolutamente “descorporeizada” (Ibañez & Cosmelli, 2007), lo que ha llevado a seguir una lógica de enseñanza que pone el énfasis en el uso de fórmulas, ejercitación y cálculo. La enseñanza de la matemática, unidireccional, causal y lógica, no ha considerado la relación de significados que se construyen en la experiencia del sujeto, incluso desde los primeros años de la infancia (Lakoff & Núñez, 2000). Ha existido un énfasis en el modo tradicional, centrado en la resolución de lápiz y papel o explicaciones de pizarrón, el cual no ha permitido que los estudiantes realicen conexiones durables con sus experiencias sensoriales vividas en sus primeros años escolares, así como tampoco, desarrollen otras formas de expresión de su conocimiento y comprensión matemática. Por tanto, cualquier planteamiento algorítmico parece abstracto, sin fundamento y desprovisto de *sentido* (Radford & André, 2009).

La teoría corporeizada propuesta por Lakoff y Johnson (1980a; 1980b; 1999) surge con el propósito de superar la dicotomía mente–cuerpo. Se busca entender la mente y la forma en que se otorgará significado al mundo, al establecer una relación directa y determinante del cuerpo en la estructura conceptual del conocimiento. De este modo, se entiende que el conocimiento humano y la comprensión se producen gracias a estructuras de experiencias corporeizadas que se conectan por medio de nuestro aparato sensoriomotor.

En el ámbito de la matemática, Lakoff y Núñez (2000) plantean que la relación corporeizada se observa desde los primeros días de vida de los niños (Radford & André, 2009). Señalan la existencia de ciertas capacidades o habilidades numéricas no enseñadas que configuran la estructura de las ideas y el pensamiento matemático, junto a los procesos de desarrollo y procesos formales de conocimiento. En particular el proceso anterior sucedería gracias a las metáforas, entendidas como mecanismos de formación de esquemas y principios cognitivos universales que, a partir de la experiencia corporal, constituyen el sistema mental o conceptual, que determina la acción en el mundo (Lakoff & Johnson, 1980a, 1980b; 1999).

Otros estudios en la línea de la matemática corporeizada, también han realizado interesantes aportes, con implicancias no sólo a nivel de la psicología cognitiva sino en especial para la enseñanza de la matemática (Cosmelli, Soto-Andrade & Tanter, 2007; Font, Bolite & Acevedo, 2010; Núñez, Edwards & Matos, 1999; Rodd, 2000). Sin embargo, aún se observa en los estudios un marcado énfasis en separar las dimensiones que configuran al sujeto que aprende, como partes que coexisten de modo separado y no como una totalidad, articulada en una lógica de sentidos. Se deja incluso, en un segundo plano la dimensión social y las relaciones de significado que se construyen en la experiencia subjetiva de las personas, considerándolo más bien como un medio para el aprendizaje más que constituyente del sujeto que aprende como una totalidad.

En este contexto, el estudio de gestos ha tomado especial relevancia en el análisis de la relación mente–cuerpo, desde una perspectiva corporeizada. Como un elemento central del desarrollo humano, la gestualidad constituye la expresión corporeizada de la experiencia humana. En su relación con el pensamiento y el lenguaje, los gestos permiten dar cuenta de la experiencia vivida de los sujetos en su relación con el mundo (Bernardis & Gentilucci, 2006; Cornejo et al., 2009; Kendon, 2004; McNeill, 1992; Roth, 2001).

Pese a la importancia evidente, y el consenso del rol de los gestos en el aprendizaje y la enseñanza (Allibali et al., 2014; Cook, Mitchell & Goldin-Meadow, 2008; Goldin-Meadow & Wagner, 2005; Goldin-Meadow, 2006; Kim, Roth & Thom, 2011; Novack et al., 2014) el estudio corporeizado tampoco cuenta con evidencia suficiente respecto del uso intencionado de gestos a nivel de la enseñanza para favorecer la comprensión y el aprendizaje profundo de la matemática. Existe escasa evidencia acerca de cómo expresan los docentes sus ideas matemáticas y las relaciones entre ellas (Allibali & Nathan, 2012; Allibali et al., 2014), lo que se relaciona directamente con el nivel de comprensión que podrían alcanzar los estudiantes (Hiebert et al., 1997).

Sumado a lo anterior, la experiencia corporeizada, tal como plantea Varela (2000) considera la historia personal de quien vive en un mundo compartido con otros y que, a su vez, lo constituye a sí mismo como ser humano como una totalidad. Por tal razón, esta experiencia corporeizada no es algo que se restringe a la persona, sino que se vive con otros, con quienes se comparten experiencias que permiten interpretar y configurar nuestra comprensión significativa del mundo (Johnson, 1987; Varela, Thompson & Rosh, 2005).

A partir de lo anteriormente expuesto, se plantea que para comprender en profundidad la relación que los sujetos tienen con la matemática, su conocimiento y aprendizaje, se debe analizar esta relación desde la complejidad de su tridimensionalidad: corporal, psicológica y social como un todo, débilmente abordado a nivel empírico hasta ahora. No sólo con el fin de contribuir al conocimiento, sino que para aportar con aspectos que puedan iluminar la intervención en el aula escolar y universitaria, desde la perspectiva del sujeto que conoce y el objeto conocido como mutuamente interdependientes. La matemática sería, entonces, parte de la experiencia vivida de las personas, una experiencia de significados construidos a partir del sentido que da la comprensión de sus relaciones.

Desde esta perspectiva, es que se ha planteado la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué experiencia de relación han establecido con la matemática estudiantes que inician la educación universitaria, con tiene distinto nivel de habilidad cuantitativa?, y ¿cómo esta se manifiesta a partir de la gestualidad que expresan, la estrategia cognitiva elegida y las vivencias significativas en la etapa escolar, cuando enfrentan situaciones matemáticas de la vida cotidiana?

Para abordar dicha pregunta, se entiende la experiencia de relación con la matemática, desde la concepción de un entramado holístico de dimensiones que se articulan para expresar el significado que los individuos le dan a su relación con la matemática. Por ello, estas dimensiones se abordaron a partir de tres estudios: el primero consideró la identificación de las estrategias holística y analítica que eligen los estudiantes al resolver situaciones matemáticas, dado que los procesos cognitivos son aquellos que se focalizan en lo que las personas perciben, interpretan y piensan respecto de lo que les toca enfrentar, por lo que implica una elección subjetiva que se configura desde su propia experiencia. Nos interesó conocer qué elección realizan los estudiantes cuando enfrentan situaciones matemáticas para luego analizar cómo esta elección se articula con la gestualidad y la corporalidad.

En el entendido que la comprensión no se agota en la dimensión de la resolución de problemas, el segundo estudio abordó la gestualidad, capaz de expresar el pensamiento y conectarse con el lenguaje de los sujetos. Los gestos permiten dar cuenta de la experiencia vivida, por lo que nos interesó conocer esta experiencia entendida como una práctica social que se experimenta en la acción. El tercer estudio consideró la dimensión de las vivencias subjetivas presente en las experiencias de enseñanza y aprendizaje de la matemática en el contexto escolar, lo que permitió a través del discurso aproximarse a los significados construidos y darle sentido a la integralidad que constituye al ser humano como un todo.

Responder esta pregunta mediante la investigación planteada, permite aportar evidencia sustantiva a la investigación en el área y, al mismo tiempo, ser un aporte a la psicología cognitiva en su campo de estudio sobre estrategias cognitivas, gestos y pensamiento. Se espera contribuir a la educación en la enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar, en especial en el contexto del inicio o punto de partida de los estudiantes a la educación superior, donde la mayoría de estos deben enfrentar el desafío de cursos matemáticos, constituyéndose muchas veces en una experiencia que actualiza una relación vivida en la etapa escolar. Además, se espera que cada estudio en sí mismo (estrategias, gestos y vivencias subjetivas), sea un aporte tanto a la psicología educacional como a la educación en cuanto pueda entregar nuevas distinciones en cada ámbito así como una oportunidad para establecer relaciones interdisciplinarias futuras de estudio y comprensión.

1.2 Objetivos de Investigación

1.2.1 Objetivo General

Comprender y analizar la experiencia de relación que han establecido con la matemática estudiantes que inician la educación universitaria y que poseen distinto nivel de habilidad cuantitativa, a partir de la gestualidad expresada, la estrategia cognitiva elegida y las vivencias significativas en la etapa escolar, al resolver situaciones matemáticas de la vida cotidiana.

1.2.2 Objetivos Específicos

- i. Describir y comparar la estrategia cognitiva: holística y/o analítica, utilizada por estudiantes que inician la educación universitaria y que poseen distinto nivel de habilidad cuantitativa, al resolver situaciones matemáticas de la vida cotidiana.
- ii. Describir y comparar la gestualidad expresada por estudiantes que inician la educación universitaria y que poseen distinto nivel de habilidad cuantitativa, al resolver situaciones matemáticas de la vida cotidiana.
- iii. Describir y comparar las vivencias subjetivas e intersubjetivas de estudiantes que inician la educación universitaria y poseen distinto nivel de habilidad cuantitativa, en su aprendizaje de la matemática escolar.
- iv. Integrar las estrategias, holísticas y/o analíticas utilizadas por estudiantes que inician la educación universitaria para resolver situaciones matemáticas de la vida cotidiana, la gestualidad que expresan y las vivencias significativas en su etapa escolar, para dar cuenta de su experiencia de relación con la matemática.

1.3 Marco Teórico

1.3.1. Antecedentes acerca del estudio de la Matemática

El ser humano ha logrado su desarrollo y evolución gracias a su participación en la construcción del conocimiento. Dicho saber disponible ha sido el resultado de una integración entre un conocimiento no especializado, y otro obtenido mediante el método de la ciencia, puesto a prueba una y otra vez para enriquecerse y superarse a sí misma (Bunge, 2007). El carácter de la matemática corresponde a este último tipo de conocimiento, en tanto se ha desarrollado como ciencia formal, al seguir los patrones de racionalidad y objetividad (Bunge, 2007), y estudiar tanto las propiedades de ciertos objetos (los números, por ejemplo) como las teorías que se construyen a partir de los mismos (Marshall & Mickenberg, 1988).

En cuanto ciencia formal, la matemática se interesa por la estructura de las ideas (Bunge, 2007; Mankiewicz, 2005), siendo la “lógica” necesaria para el entendimiento matemático (Marshall & Mickenberg, 1988). Su racionalidad proveería de un orden para entender la realidad, la que se encontraría fuera de quien conoce, dando importancia a la “demostración de la verdad de las proposiciones de las teorías matemáticas” (Font, 2003, p.253) procedimiento que consiste en la demostración lógica de diversos axiomas.

La matemática es una creación intelectual que estructura el pensamiento y permite traducir la complejidad del mundo en pautas manejables, por lo que suele concebirse como el lenguaje de la ciencia (Boyer, 1999; Cole; 1999; Mankiewicz, 2005; Nesher, 2000). Como tal, el lenguaje matemático se forma a partir del lenguaje natural, y se enriquece agregando variables y simbología para facilitar su comprensión y operación (Marshall & Mickenberg, 1988). Tal visión ha inspirado toda la enseñanza de la matemática moderna, tanto en la enseñanza universitaria como no universitaria (Font, 2003). Desde esta perspectiva, se pone el acento en las deducciones lógicas y se cree que las dificultades que se producen en el aprendizaje de las matemáticas son causadas por la falta de un método matemático centrado en la deducción. La siguiente cita reafirma lo anterior: “básicamente, por las presentaciones defectuosas de la matemática tradicional (definiciones poco precisas, demostraciones poco rigurosas) que inducían en el alumno una concepción confusa de la matemática por la ausencia de una estructura deductiva rigurosa” (Font, 2003, p. 259).

No obstante, la visión platónica y cartesiana de la matemática enfocada en su objetividad, certeza y falibilidad ha sido debatida por múltiples perspectivas y distintos autores a lo largo del tiempo. Un ejemplo de ello, es el presentado por Husserl (1925/1992) quien argumenta que la matemática es “una técnica maravillosa que permite efectuar inducciones de una capacidad productora, de una probabilidad, precisión, calculabilidad, que antes ni siquiera podían ser sospechadas (...) un triunfo del espíritu humano” (p. 120). Sin embargo,

junto con esta afirmación el autor plantea que la matemática se aleja del hombre que actúa y conoce su mundo circundante, poniendo el énfasis en una racionalidad que se encuentra centrada en los objetos matemáticos en sí, por lo tanto fuera del sujeto.

Otra crítica proviene del teorema de incompletitud de Gödel que cuestionó el carácter absoluto de las verdades matemáticas, al plantear la existencia de verdades aritméticas no demostrables pero igualmente consistentes (Rodríguez, 1994). Tal conclusión permitió afirmar que el método axiomático, hasta ese momento validado, tenía limitaciones intrínsecas. Esto marcó un giro relevante al dar al conocimiento una oportunidad de abrirse al espacio de la incerteza y la incertidumbre, hecho que lleva a Lakatos (1978) a afirmar, por influencia del pensamiento Popperiano, que la matemática sería cuasi-empírica al igual que la Ciencia. Así, las verdades no deberían ser probadas para determinar su certeza absoluta sino su falibilidad o sus inconsistencias. Lo anterior implicó reconocer la existencia de problemas que no tienen solución, o pueden no tenerla, sino que se encuentran en el terreno de lo indecible (Stewart, 2009).

Wittgenstein (1987) por su parte, propone entender la teoría matemática no como un producto acabado sino como una práctica social en un doble sentido: es aprendida por alguien y, además, se encuentra formada por reglas que se siguen habitualmente. Aún más, el pensamiento matemático no sería algo que pasa en forma exclusiva en la mente. Al contrario, tiene sentido porque forma parte de lo que hemos vivido, es decir, “un paradigma ya presente en nosotros” (Wittgenstein, 1987, p.74).

Wittgenstein (1987) además, afirmó que la certeza y la necesidad de la matemática son derivadas de la aceptación de “reglas” o “juegos de lenguaje” que se ponen en acción en determinadas prácticas sociales, es decir, “lo que le da su importancia [a la regla] son los hechos de la vida cotidiana” (p.301). Para el autor, “las proposiciones matemáticas poseen la dignidad de una regla” (p.74), en tanto deben ser respetadas para asegurar su utilización correcta. La matemática “se mueve en las reglas de nuestro lenguaje” lo que le proporciona su solidez y privilegio en la sociedad. (p.74). La regla se demuestra en el uso cotidiano, y con esto se posibilita la aceptación de la misma y su utilización en situaciones similares. De esta manera, la regla aritmética que establece que $1 + 1$ son 2, no puede ser modificada por personas particulares u otras interpretaciones, ya que sería asumir una falla que viola las bases de dicha regla (Hofstadter, 2009). Tales planteamientos de Wittgenstein se alejan del logicismo planteado por Russell (1919), quien concebía la matemática y la lógica como una sola, la que se conectaba con el mundo real únicamente a partir de rasgos abstractos y generales (Gödel, 2006).

Entendemos la matemática, en el sentido de Heidegger (1975), como una manera de pensar sobre las “cosas”, a partir de nuestra experiencia, y no algo que se encuentra fuera de ella.

La matemática, más que ser un paréntesis que todo lo cierra (Corbalán, 1997), aportaría distinciones nuevas para la comprensión del mundo.

Aprender matemática por tanto, no solo implica resolver problemas, sino que requiere de la comprensión de los procesos y principios fundamentales que le son propios, para saber utilizarlos con flexibilidad en distintas situaciones (Gal et al., 2003; OCDE, 2006), además de considerar la experiencia de quien aprende y la relación que éste ha establecido con sus objetos para que pueda hacer sentido su aprendizaje (Hiebert et al., 1997). Se reconoce, de este modo, que el propósito de la matemática no es el cálculo de modo puro sino la comprensión de sus objetos, que son puestos en acción mientras se realiza el cálculo (Corbalán, 1997; Hiebert et al., 1997; Paulos, 1993; Stewart, 2009). Tal como señaló Wittgenstein (1987) “la matemática forma conceptos y los conceptos sirven para comprender” (p.364).

La matemática es la base para el desarrollo de habilidades cuantitativas, las que le permitirán a las personas desempeñarse en la vida cotidiana y enfrentar los retos de la globalización (OCDE, 2006; UNESCO, 2009). Dado que las competencias y habilidades matemáticas no son algo estático sino que se desarrollan durante toda la vida, y no dependen solamente de un conocimiento o de un contexto como es la escuela, el aprendizaje de estas considera tener presente al sujeto en toda su complejidad, reconociendo el espacio o medio social en que se desenvuelve (OCDE, 2006). Supone una combinación creativa de conocimientos, terminología, datos, procesos de las matemáticas, aplicar métodos, y contar con pensamiento crítico para lograr articular la matemática con el mundo real (Gal et al., 2003; OCDE, 2006).

En este contexto amplio de comprensión, es que se ha considerado de interés profundizar en la relación de la matemática con la cognición y las experiencias subjetivas, entendiendo la cognición como uno de los procesos de desarrollo humano a través del cual las personas adquieren conocimiento (Reed & Ellis, 2007).

1.3.2. Una aproximación desde la Psicología Cognitiva a la Cognición Corporeizada

La cognición, como objeto, ha sido estudiada a partir de múltiples perspectivas, evolucionando desde una mirada de mero reconocimiento y recuperación, a otra constructiva- reconstructiva, en que el conocimiento se produce a través de la interrelación entre la mente, el mundo físico y el mundo social, y cobran relevancia los procesos cognitivos involucrados (Estévez, 2002), más que los productos de la cognición.

La hipótesis de la corporeización surge en esta última perspectiva, instalada por Lakoff y Johnson (1999) como una nueva forma de entender la mente. Se constituye en una alternativa a la visión imperante hasta aquí desarrollada por el modelo computacional

(Newell & Simon, 1972) y el conexionismo, ambas perspectivas instaladas en la lógica de la “mente separada del cuerpo”, perspectiva propia del cognitvismo y alejada del contexto físico y social (Benjafield, 1997; Cosmelli, Soto-Andrade & Tanter, 2007; Fernández, 1988; Kronmüller y Cornejo, 2008; Varela, 2002, Varela et al., 2005). El computacionalismo, “intentó reducir el razonamiento humano a procesos formales de cómputo sobre representaciones residentes en la cabeza” (Ibañez & Cosmelli, 2007, p.10), por lo que “la percepción entendida en términos computacionales se volvió pasiva y en clara contradicción con la interacción natural entre percepción, ambiente y acción” (p.11).

Si bien bajo las reglas y conceptos del conexionismo y el modelo computacional se habían resuelto ciertos problemas básicos, sus métodos no pudieron ser extrapolados a la complejidad del mundo real (Bunge, 1988; Dreyfus & Dreyfus, 1988; Varela, 2000; Varela et al., 2005). En el decir de Varela (2000) “el mundo es demasiado rico como para que lo vivo posea una representación previa” (p. 45). En efecto, el principal problema tanto del computacionalismo como el conexionismo fue dejar de lado el mundo como tal. Ambas perspectivas hicieron prevalecer la idea de la cognición como una representación de un mundo externo que está dado de antemano, independiente de la experiencia y de la perspectiva del que conoce, es decir, el conocimiento estaría descorporeizado.

Según Varela (2000; 2002; Varela, Thompson & Rosch, 2005) mente–cuerpo-mundo constituyen un todo relacionado, es decir, una unidad y no un agregado de cualidades. En esta unidad se dan múltiples interacciones complejas simultáneas, que provocan el movimiento-acción del sistema para la organización permanente. Para Varela (2000) en esta red de interacciones se atribuye significado al entorno, proceso que acontece en cada momento de nuestras vidas y gracias a él constituimos el mundo como agentes situados.

Varela (2000) entiende que la entidad cognitiva tiene una perspectiva, es decir, dicha entidad se relaciona con el medioambiente mediante un proceso de formación de perspectiva que surge producto de la constante emergencia de características del propio agente, lo que conoce como “*estar situado*”. En este proceso, el agente busca constantemente mantener la coherencia del sistema. Los seres vivientes y sus respectivos mundos “se encuentran relacionados unos con otros *mediante especificaciones mutuas o codeterminaciones*” (Varela, 2002, p.110).

A nivel de la cognición humana, Varela (2000) plantea que el rol fundamental es *generar* significados, por lo que el conocimiento no sería algo dado de antemano, *pre-dado*, que puede ser representado. Al contrario, se entiende como una “emergencia encarnada”, es decir, el conocimiento se *activa o es traído* a un *primer plano* desde un contexto. La cognición, por tanto, sería aquel proceso que opera generalmente cuando no es fácil especificar todos los estados posibles de una situación o al realizar una tarea, ya que hasta

la acción cognitiva más simple supone distintos niveles de detalle que se funden en un trasfondo no específico (Varela, 2002; Varela et al., 2005).

El conocimiento activado se torna difícil de “empaquetar” en un conocimiento explícito, proposicional u objetivo, es decir, un “saber qué”, pues consiste en una *disposición o conocimiento práctico: un “saber cómo”*. Así, se basa en la acumulación de experiencias a partir de un gran número de casos que van constituyendo la historia social de quien lo vive y su entorno como un conocimiento vivido (Varela, 2000; Varela et al., 2005).

Dado lo anterior, es que entendemos que “el conocimiento depende de estar en un mundo inseparable de nuestro cuerpo, nuestro lenguaje, y nuestra historia social, es decir, de nuestra corporeización” (Varela et al., 2005, p. 176). La “acción corporeizada” en este sentido, comprende la cognición mucho más allá de la mera relación entre experiencia psicológica y procesos físicos. Se concibe dependiente de las “experiencias que son originadas por un cuerpo con diversas aptitudes sensorio motrices” (Varela, et al., 2005, p. 203), gracias a un sistema perceptivo que dialoga y se retroalimenta del sistema de movimiento. La percepción se encuentra encarnada en un contexto biológico, psicológico y cultural más amplio, entendido como una configuración de relaciones dadas en un mismo momento de la acción, las que nos constituyen como seres humanos en un todo integrado (Varela, 2000; Varela et al., 2005). Cuando percibimos nuestro mundo, que muchas veces damos por conocido, activamos modelos complejos de actividad sensorio-motriz, que nos permiten ir constituyendo dicho mundo¹.

Siguiendo esta línea de pensamiento, se puede afirmar que mente y cuerpo no son *dos* entidades separadas que se relacionan, sino que corresponden a dimensiones de un mismo sistema que son co-definidas en un todo integrado e indisoluble. Al igual que la relación entre conocedor y conocido, la mente-cuerpo, requiere de una especificación mutua o un co-origen dependiente (Varela, 2000; 2002; Varela et al., 2005). De este modo, la cognición está arraigada en la estructura de nuestra corporeización biológica, pero es vivida y experimentada dentro de un dominio de acción consensual e historia cultural, aspecto que nos permite dar sentido a nuestro mundo (modelos de experiencia corporeizada). Esto quiere decir que la cognición está unida a una historia que es vivida y que va abriéndose camino creativamente, al constituirse como una *acción efectiva*² (Varela, 2000; 2002).

¹ Ver la investigación sobre Color y Mundo percibido en Varela et al. 2005.

² Desde el enfoque enactivo, la cognición es enactuación de un mundo, es decir historia de acoplamiento estructural que enactúa o hace emerger un mundo. El concepto de Acoplamiento Estructural, dice relación con la capacidad de los sistemas vivientes para hacer emerger un dominio de significados a partir de la organización e historia del mismo sistema. En términos simples, que nuestra conducta cambia cuando aprendemos a afrontar nuevas condiciones y situaciones, lo que a su vez hace cambiar la forma en que percibimos nuestro mundo (Varela et al., 2005)

Como se aprecia, la perspectiva corporeizada considera una relación interdependiente del sujeto con el mundo, la que se nutre y le da sentido en la experiencia intersubjetiva de *estar* (Varela, 2000). Esto implica no sólo asumir que la realidad se construye inseparablemente desde la estructura de quien percibe, sino que también en la experiencia vivida con un “otro” como subjetividad semejante a la de uno. Tal experiencia corporeizada no es algo que se restringe a la persona, sino que se vive con otros, con quienes se comparten experiencias que permiten interpretar y configurar nuestra comprensión significativa del mundo (Johnson, 1987; Varela et al., 2005).

Lo anterior se relaciona con la concepción de que los fenómenos cognitivos son, al mismo tiempo, emocionales y afectivos, por lo tanto se establece una relación corporeizada con el “otro” a medida que se desarrolla un conocimiento de éste último: “*presencia encarnada, lugar y medio de un campo experiencial*” (Varela, 2000, p. 251). En este sentido, el cuerpo no sería concebido como una estructura física o ámbito de los procesos cognitivos, sino que una estructura vivida y centrada en la experiencia, biológica y fenomenológica (Merleau-Ponty, 1985).

Para Lakoff y Johnson (1999) la mente corporeizada es una forma de entender el procedimiento del sistema cognitivo y conceptual y, de este modo, comprender la forma en que se le atribuye significado al mundo. Se plantea una relación directa y determinante del cuerpo en la estructura conceptual del conocimiento y la mente (Lakoff & Johnson, 1999), lo que da lugar a entender que el significado, el pensamiento y el lenguaje emergen de la actividad corpórea. Asimismo, el razonamiento no sería una capacidad autónoma, separada e independiente de la experiencia corporal, ya que ambas estarían conectadas y se conformarían en un conjunto organizado (Johnson, 1987).

Para Lakoff & Johnson (1999) la mente y los sistemas conceptuales son moldeados por la experiencia corporal que les da significado. La construcción de “categorías”, por ejemplo, sería parte de nuestra experiencia corporeizada, debido a que son creaciones humanas que hacemos de modo consciente cuando pensamos, dada la relación que establecemos con el mundo en que vivimos. Se establece así una conexión natural entre el sistema corporal (básico) y la estructura del sistema conceptual. Nuestro conocimiento del mundo y de nosotros mismos no dependería de un concepto innato o a priori, sino que más bien de metáforas inconscientes. Estas últimas, entendidas como mecanismos de formación de esquemas y principios cognitivos universales que, a partir de la experiencia corporal, constituyen el sistema mental o conceptual y determinan la acción en el mundo (Lakoff & Johnson, 1980a, 1980b; 1999). El conocimiento humano y la comprensión se producirían, por lo tanto, gracias a estructuras de experiencia corporeizada y patrones de inferencia, en especial por medio de nuestro aparato sensorio motor que nos permite percibir, movernos y manipular.

Según los autores, los esquemas serían patrones abstractos de nuestra experiencia o cognición, que retienen en su estructura lo más característico y general de las experiencias particulares, motrices o perceptivas, tal como el patrón básico “origen – recorrido – meta”. Los esquemas son dinámicos, en tanto son aplicados a variadas experiencias particulares a las que se les atribuye significado, y pueden adaptarse o cambiar según la situación particular (Johnson, 1987). Desde esta mirada, se entiende la realidad para el ser humano como una red de significados, pensamiento y lenguaje, producto de la integración con la actividad corporal, la que, al mismo tiempo, está en interacción con el contexto o medioambiente (Lakoff & Johnson, 1999).

Es importante destacar que para Lakoff & Johnson (1999) la noción de lo “*cognitivo*” se usa en un sentido amplio para describir cualquier operación mental, en su mayoría no consciente. No obstante, también se utiliza para referirse a las estructuras que están involucradas en el lenguaje, el significado, la inferencia, la percepción, el sistema conceptual, el sistema sensorio motor y la razón. La cognición, desde la perspectiva de la mente corporeizada (*embodied mind*), por lo tanto, es dependiente de estar físicamente presente, característica que resultaría imposible para un modelo virtual (Cosmelli, Soto-Andrade & Tanter, 2007; Lakoff & Johnson, 1999).

Estudios en la línea de la cognición corporeizada han ratificado la relación mente–cuerpo–experiencia hasta aquí descrita, así como también la relación entre la acción corporeizada y el mundo cultural (Häfner, 2013; Louwense, 2008; Pagis, 2009). Esto, a partir de la relación lenguaje-pensamiento-entorno y sus consecuencias en el comportamiento humano; metáforas en lingüística cognitiva y la naturaleza corporeizada de la mente y el lenguaje (Gibbs, 1999, 2005). Desde la psicolingüística cognitiva se afirma que el conocimiento conceptual es corporeizado (Gallese y Lakoff, 2005). Sumado a ello, otros estudios sobre cognición cultural encarnada han afirmado que la representación psicológica que tenemos de los valores culturales y cosmovisiones morales determinan, de algún modo, el ser que encarna la posición que tomamos en el mundo social y en la relación con los demás (Leung, 2007).

Como se puede apreciar, el estudio de la cognición corporeizada no es un programa de investigación acabado. Existe acuerdo, sin embargo, en dos aspectos claves, por una parte que el conocimiento es mucho más que el resultado de mecanismos deductivos formales abstractos (Radford, Edwards & Arzarello, 2009) y por otra, en la necesidad que sigan surgiendo enfoques alternativos a las explicaciones materialistas o mentalistas al interior de las ciencias cognitivas, que no pierdan de vista al sujeto y su mundo (Ibañez & Cosmelli, 2007).

1.3.3. La experiencia en la matemática corporeizada

La perspectiva de la cognición corporeizada ha iluminado el estudio de la matemática, su conocimiento y comprensión. Si bien la matemática ha sido concebida como un conocimiento abstracto, objetivo y preciso, que parece trascender la naturaleza humana, los avances en ciencia cognitiva han resaltado que es un producto originado por la complejidad de nuestra unidad mente-cuerpo (Lakoff & Núñez, 2000). Tal convicción se ha dado producto de múltiples estudios en diversos campos, entre los que cuentan aquellos referidos al estudio de objetos matemáticos propiamente tales, como son: el uso frecuente de metáforas conceptuales en la enseñanza de la representación gráfica de funciones (Font, Bolite & Acevedo, 2010); metáforas y continuidad de funciones (Núñez, Edwards & Matos, 1999); continuidad en el ámbito del razonamiento y comprensión de la lógica deductiva de la matemática (Rodd, 2000); así como también, en el estudio de sistemas de modelamiento y comprensión a nivel informático (Cosmelli, Soto-Andrade & Tanter, 2007). El estudio de números y magnitudes (Plaisier & Smeets, 2011) y aquellos estudios relacionados con el cálculo infinitesimal, la teoría de hiperconjuntos y el álgebra abstracta; todo lo cual ha tenido el propósito de mostrar la naturaleza humana-corporal de las matemáticas (Lakoff & Núñez, 2000).

De los estudios de Lakoff & Núñez (2000) surge la “*matemática corporeizada*”. Desde esta perspectiva, el ser humano no se relaciona con la matemática en sí misma, sino que nace de la unión entre el cuerpo y la mente por medio de los sistemas conceptuales, en la cual el estudio de las metáforas corresponde a una parte central del pensamiento matemático (Núñez, s/a, 1995, 2008). De acuerdo a esta teoría, las propiedades matemáticas se construyen en base a las metáforas que acontecen en nuestra experiencia cotidiana con los objetos externos. Dentro de ellas se encuentran las propiedades de universalidad, precisión, consistencia, estabilidad, generalización y descubrimiento, los que en sí mismos también son características de la matemática.

Específicamente, la teoría de la matemática corporeizada o “*embodied mathematics*” se justifica en la concepción que la matemática es una empresa que surge desde actividades humanas básicas, que se encuentra en relación con la sociedad y cultura a la que pertenece. La precisión, característica propia de esta, se logra porque los seres humanos hacen distinciones muy claras y precisas entre objetos y categorías, por medio de la capacidad que tienen para simbolizar, lo que les permite representar ideas, operaciones y relaciones, así como permitir el cálculo. La estabilidad de la matemática en el tiempo sucede porque los seres humanos compartimos los mismos mecanismos cognitivos básicos, algunos innatos y otros no, así como aspectos relevantes de la estructura del cerebro y el cuerpo (Lakoff & Núñez, 2000). De hecho la simple numeración se construye dentro del cerebro humano, lo que permite que a temprana edad los seres humanos perciban el número de entidades pertenecientes a pequeñas colecciones al instante y con precisión (Lakoff & Núñez, 2000).

La matemática es, en este sentido, una extensión sistemática de los mecanismos de la cognición cotidiana, por lo que cualquier ajuste entre esta y el mundo estará mediada por las capacidades cognitivas humanas (Lakoff y Núñez, 2000). Para Lakoff & Núñez (2000), muchos de nuestros pensamientos y sistemas de conceptos matemáticos son parte del inconsciente cognitivo al que no es posible acceder fácilmente, por lo que se hace necesario un modelo que permita su comprensión. Los autores plantean que mucha de la matemática que utilizamos en la vida cotidiana se da sin que seamos capaces de explicar exactamente lo que entendemos, se trataría de una comprensión automática de carácter inconsciente, que tendría a la base mecanismos cognitivos conceptuales que son utilizados tanto en las situaciones ordinarias no matemáticas como en la matemática avanzada, esto es, esquemas de imagen, esquemas aspectuales, mezclas conceptuales y metáforas conceptuales.

Por lo tanto, cuando las personas están enfrentadas a un proceso de aprendizaje de la matemática, operarían mecanismos cognitivos, cerebrales y neurales propios a la naturaleza de lo que aprehendemos, que en la mayoría de los casos no son innatos, tal como es el caso de los conceptos abstractos, los que al operar adecuadamente provocan el aprendizaje.

A nuestro entender, por lo tanto, la matemática no sería algo objetivo y externo a los seres humanos, sino que se encontraría encarnada en ellos. Constituye un mundo de experiencias en el que nos situamos y desarrollamos, donde la matemática es el puente y camino universal para lograr el entendimiento de los principales aspectos del mundo natural. Desde una perspectiva corporeizada, la comprensión de la matemática supone reconocer que esta se encuentra encarnada y en relación con nuestras capacidades humanas y procesos cognitivos, al mismo tiempo que con nuestra historia social y cultural. Por lo tanto, los métodos de enseñanza tradicionales, descorporeizados (Ibañez & Cosmelli, 2007), con énfasis en el uso de fórmulas, unidireccional causal y lógico, no incluirían la relación de significados construidos en la experiencia cotidiana del sujeto.

Es, en este contexto, que se plantea la necesidad de profundizar en la relación de los sujetos con la matemática, desde la perspectiva de la cognición corporeizada. Se busca lograr una visión integradora de las dimensiones del sujeto, considerando tanto estrategias cognitivas, entendidas como procesos mentales, gestos y vivencias subjetivas de quien ha tenido una experiencia de conocimiento y aprendizaje de la matemática. Se espera ampliar el horizonte de comprensión desde el análisis de objetos particulares al entendimiento de la experiencia humana como un todo, sin dejar de lado el cuerpo y la historia vivida por cada sujeto.

1.3.4. Estrategias Holística y Analítica y su relación con la Matemática

Los procesos cognitivos son aquellos que se focalizan en “la manera en que las personas perciben, interpretan, recuerdan y piensan sobre los acontecimientos ambientales que experimentan” (Ormrod, 2005, p.177). En dichos procesos se encuentran las estrategias cognitivas, concebidas como habilidades de pensamiento que permiten enfrentar problemas. Involucran una serie de tácticas y procedimientos que no dependen de un contenido específico para su acción, es decir, serían “*libres de contenido*” (Arancibia, Herrera & Strasser, 2000; Gagné & Briggs, 1976).

De acuerdo a esta perspectiva, las estrategias cognitivas hacen referencia al “qué hacer” y “cómo hacerlo” y corresponden a mecanismos que relacionan procesos y estructuras. Al mismo tiempo, son heurísticos y dependen de la demanda o tipo de tarea que se le presenta al individuo (Estévez, 2002), por lo que no es posible referirse a estrategias correctas o incorrectas.

En la práctica cotidiana, los sujetos utilizan variadas estrategias para resolver los problemas que deben enfrentar, como lo indican los estudios de etnomatemática (Bishop, 2000; Nunes, Schliemann, Carraher, 1993) que han indagado la forma en que las culturas desarrollan el proceso de enseñanza y aprendizaje, a partir de las características particulares de sus territorios y dinámicas sociales. La matemática en este sentido, no es sólo un lenguaje científico o un sistema de conocimientos, sino también una manera de pensar, encarnada en la cultura de la educación matemática. Debido a que los procesos psicológicos, cuerpo y cultura social se influyen entre sí (Grossmann & Na, 2014), comenzaremos por abordar dos de las estrategias más conocidas en la resolución o procesamiento cognitivo de los sujetos: la estrategia holística y analítica.

La *estrategia holística* hace referencia a un modo de abordaje particular y específico que conduce al sujeto a enfrentar problemas o situaciones de modo sintético, frecuentemente intuitivo y creativo, capaz de asumir un procesamiento perceptivo-espacial. La estrategia holística tiene una mirada en el todo más que en las partes (Verfaillie, Huysegems, De Graef & Van Belle, 2014), por tanto, utilizar esta estrategia supone poner atención en el campo más que en los datos que lo componen. Se asumen causalidades complejas poniendo el foco en las interacciones (Choi, Koo y Choi, 2007; Nisbett, Peng, Choi & Norenzayan, 2001). El sujeto logra observar los fenómenos con movimiento, y se muestra abierto a aceptar diversas soluciones a un problema. En la estrategia holística no se sigue necesariamente un camino lógico, ya que la persona está abierta a caminos alternativos, los que son percibidos como igualmente correctos. Un componente importante es la imaginación interna, la que sucede por fuertes asociaciones con situaciones vividas (Borromeo, 2012). Además, esta estrategia posee un enfoque en la información contextual, en la atención visual y un énfasis en las explicaciones situacionales del comportamiento,

razonamiento dialéctico y relación centrada en la categorización de los objetos (Grossmann & Na, 2014).

La *estrategia analítica*, en cambio, es una forma de pensamiento que permite al sujeto resolver problemas siguiendo una serie de pasos o secuencia de datos en forma lineal, respetando el orden temporal y el uso de la lógica (Cornejo, Simonetti, Aldunate, Ibañez, López & Melloni, 2007). En dicha estrategia, se discriminan las partes que conforman el todo (Estévez, 2002) y se estimula un tipo de pensamiento reflexivo (Clariana, 1993) congruente, además de dar importancia a los datos como independientes del campo al que pertenecen (Grossmann & Na, 2014). Al hacer uso de esta estrategia difícilmente se visualizan distintos caminos posibles en la resolución, porque se está en búsqueda de patrones similares de cambio o estabilidad, según como se haya demostrado en el pasado (Choi, Koo y Choi, 2007). Esto implica que las personas que optan por esta estrategia, frecuentemente utilizan patrones conocidos para resolver las diversas situaciones y siguen esa ruta aunque lleguen a un resultado incorrecto o perciban inseguridad en el producto.

Existe acuerdo entre los investigadores del área en señalar que durante el proceso de cognición intervendrían ambas estrategias, tanto holísticas como analíticas (Ormrod, 2005), y ninguna estrategia tendría una ventaja inherente o absoluta sobre la otra. Las estrategias se reconocen en los distintos procesos y tareas de pensamiento y percepción, puesto que sus contribuciones tienen variaciones según las tareas demandadas (Estévez, 2002; Sergent & Bindra, 1981). La elección de una u otra estrategia por parte de los sujetos va a depender del tipo o naturaleza del estímulo que se presente o del propósito de la tarea. No existiría, así, una disposición a priori holística o analítica para enfrentar situaciones sean reales o ficticias (Ben Zur, 1998; Cornejo, et al, 2009; Ward & Scott, 1987).

Entendemos que ambas estrategias son dimensiones separadas que coexisten en el individuo (Nisbett et al., 2001), por lo que podrían presentarse del modo “analítico, no holístico y viceversa” (Choi, Koo y Choi, 2007). Los estudios de Luna & Ruiz (2001) muestran que en reconocimiento perceptual los objetos son inicialmente procesados de una manera holística. De esta manera, los atributos de los estímulos serían analizados y procesados posteriormente de forma analítica únicamente si la tarea particular lo exigiera.

En cuanto a las estrategias holísticas y analíticas y su relación con el aprendizaje, los estudios se han enfocado frecuentemente en la resolución de problemas y toma de decisiones (Ben Zur, 1998), estudios culturales (Choi, Koo y Choi, 2007; Grossmann & Na, 2014; Márquez & Ellwanger, 2014; Miyamoto, Nisbett & Yasuda, 2006; Nisbett et al., 2001), en reconocimiento y categorización perceptual (Cornejo, Simonetti, Aldunate, Ibañez, López & Melloni, 2007; Chen & Yeh, 2014; Fifié & Townsend, 2010; Luna-Blanco & Ruiz-Soler, 2001; Sergent & Bindra, 1981; Verfaillie, Huyssegems, De Graef & Van Belle, 2014; Ward & Scott, 1987), codificaciones y estrategias de procesamiento en

lectores expertos (Lachmann, Schmitt, Braet & Van Leeuwen, 2014; Lachmann & Van Leeuwen, 2014:), siendo ampliamente aceptado el impacto de dichas estrategias sobre las tareas cognitivas.

Choi, Koo y Choi (2007) realizaron estudios sobre las diferencias individuales en el pensamiento analítico versus holístico en estudiantes universitarios de distintas culturas pertenecientes a la carrera de medicina. En ellos encontraron que el patrón holístico de rendimiento estaba presente, en mayor medida, en los altos puntajes más que en los bajos puntajes obtenidos. En el ámbito escolar, los estudios de Stenberg (2002) y Stenberg & Grigorenko (2003) muestran que los altos puntajes en los test se relacionan directamente con las características de aquellos estudiantes que eligen un estilo de pensamiento analítico. Lo anterior, a su vez, se ve reforzado por el contexto escolar, puesto que el estilo analítico sería valorado por sus profesores.

Es así que en un gran número de actividades desarrolladas en la escuela, como el aprendizaje de la lectoescritura, la elaboración de conceptos y la resolución de problemas, entre otros, se trabaja recurriendo a un tipo de procesamiento de la información de carácter analítico secuencial, que se encuentra por sobre la estrategia holística. La primacía de la estrategia analítica obedece a la creencia de que ésta tendría un efecto positivo para el logro de las metas de aprendizaje (Clariana, 1993). Los estudios sobre reflexividad e impulsividad confirman, además, que la estrategia analítica es característica de los estudiantes más reflexivos, quienes poseen mayor motivación para la realización de tareas intelectuales de mayor dificultad (Clariana, 1993).

Respecto de la relación entre la matemática y la resolución de problemas, Cornejo et al. (2007) plantean que la estrategia analítica supone un modo lógico de resolución que atiende a los elementos de la situación y las relaciones entre ellos. Al contrario, la estrategia holística supone un modo de aproximación intuitivo, capaz de generar una impresión global del ítem evaluado y una interpretación pragmática del mismo. Los autores añaden que el tipo de estrategia implementada depende de la naturaleza de la tarea y las metas personales.

Si bien la estrategia holística parece más natural, la estrategia analítica es necesaria para resolver problemas que requieren precisión, explicitación de detalle en las respuestas y operaciones de cálculo (Yagoubi, Lemaire y Besson, 2003). Este sería el caso de variados problemas abstractos, típicamente científicos y de dominio matemático (Radford & André, 2009). La estrategia holística sería más adecuada, en cambio, para propósitos de aproximación o soluciones “rápidas y frugales” (Cornejo et al., 2007; Radford & André, 2009). En el caso de los expertos en resolución, se señala que estos son capaces de relacionar un problema particular con conceptos generales. Además, diseñan una estrategia global para resolver problemas y tienen presente distintas opciones, a medida que avanzan en la solución (Hunt & Ellis, 2007).

En el campo de la aritmética, Yagoubi, Lemaire & Besson (2003) señalan que las expresiones tales como: *calcular, determinar, detectar incongruencias, explicar*, estimularían una aproximación analítica a la situación. Al contrario, operaciones como *estimar y hacer sentido*, activarían una aproximación holística. En los casos de resolución de problemas por medio de la aproximación o las tareas de comparación numérica, se usarían ambos hemisferios de modo bilateral (Radford & André, 2009).

Cabe destacar que los estudios de Ispir, Ay & Saygi (2011), con estudiantes turcos de enseñanza media que se caracterizaban por tener alto rendimiento, alto sentido de logro y autorregulación, no se encontró un tipo de procesamiento o estilo dominante. Los autores sugieren continuar con estudios más detallados para encontrar mayores hallazgos.

En Chile, por otra parte, los estudios concluyen que existe una carencia en la práctica de buscar caminos alternativos de solución dentro de la sala de clases. Los estudiantes serían, fundamentalmente, entrenados para responder de una forma determinada, lo que a nivel cognitivo produce, entonces, un bloqueo en la búsqueda de soluciones alternativas a los problemas (Gálvez et al., 2010). Asimismo, se produciría un mayor riesgo de equivocaciones por parte de los estudiantes al olvidar los pasos de la secuencia establecida (Gálvez et al., 2010). Los estudios de Radford y André (2009) permiten afirmar que la enseñanza tradicional no va en la dirección de un crecimiento favorable de las funciones ejecutivas que sirven de fundamento al pensamiento matemático abstracto, lo que se asocia al procesamiento holístico.

1.3.5. Gestualidad y su relación con el pensamiento matemático

Como se ha señalado, la perspectiva corporeizada no constituye una suma de partes desarticuladas sino que por el contrario, constituye un todo relacionado donde los procesos cognitivos se encuentran conectados con la experiencia corporal vivida por el sujeto. De este modo, para entender dicha experiencia no basta con analizar las estrategias cognitivas utilizadas por los sujetos en distintos contextos, sino que también su gestualidad.

Los gestos constituyen un elemento central del desarrollo humano. Diversos autores reconocen su importancia para la comunicación y la relación presente con el pensamiento y las habilidades cognitivas (Bernardis & Gentilucci, 2006; Cornejo et al., 2009; Kendon, 2004; Lim et al., 2009; McNeill, 1992; Radford et al., 2009; Roth, 2001). Los gestos nos acompañan desde temprana edad y constituyen la expresión corporeizada de la experiencia humana, ya que incluso estarían presentes antes de la expresión verbal del pensamiento y se encontrarían, al igual que las palabras, entrelazados en una amplia red (Wittgenstein, 1987). De este modo, los gestos permiten dar cuenta de la experiencia vivida de los sujetos, por lo que podría considerarse como una práctica social que constituye una forma de estar en el mundo.

La gestualidad refiere a toda la corporalidad del sujeto. Sin embargo, dentro de las áreas de mayor estudio se encuentra la relación entre el uso de las manos y el pensamiento. Según McNeill (1992), los gestos son movimientos espontáneos e idiosincráticos de manos y brazos que acompañan el habla, por lo que se encuentran entrelazados fuertemente tanto con el lenguaje hablado, formando parte de un mismo sistema de comunicación, porque están vinculados a los mismos procesos de pensamiento (Bernardis & Gentilucci, 2006). Su estructura se caracteriza por una *fase de preparación para el gesto*, en la que se presenta una posición de descanso, movimiento y posterior descanso. Luego hay una *fase de cumbre-peak* llamada *golpe*, que es la parte principal en la cual la mano se mueve hacia atrás, desde la fase de preparación para terminar cerca del hombro. Por último, acontece *una fase de retracción*, en la que la mano vuelve a su posición de descanso. Debido a este proceso del gesto, se dice que es simétrico, así como también dinámico por naturaleza y libre. Al mismo tiempo, se revela la imagen idiosincrática del pensamiento (McNeil, 1992), lo que conduce a afirmar que gesto y lenguaje ayudan a desarrollarlo.

El gesto suele estar acompañado de la expresión para construir significado. Sin embargo, también puede complementarse o superponerse con el discurso para explicitar el recuerdo o determinada representación mental de quien habla en un momento determinado. Los gestos son globales y sintéticos, es decir, el todo determina el significado de las partes. Asimismo, no pueden ser combinados, ya que no existe una estructura jerárquica gestual, por lo que no pueden combinarse para formar un gesto más complejo (McNeill, 1992). Los gestos no tienen reglas formales respecto a cómo deben ser, lo que permite expresar aquellos aspectos de significado relevantes para el hablante. Al ser una creación espontánea, los gestos tienen un carácter individual y personal (McNeill, 1992), aunque también se acepta que puedan ser transformados por patrones culturales o códigos culturales socialmente compartidos (Kendon, 2004).

En cuanto a los tipos clásicos de gestos utilizados por los hablantes, McNeill (1992) destaca los gestos “*icónicos*”, que capturan aspectos del contenido semántico de lo dicho. Por ejemplo, mientras el gesto muestra: “la mano parece girar un objeto a través del aire”, el sujeto dice: “lo persigue de nuevo”. Los gestos “*rítmicos*” o “*beat*”: se observan como si acompañaran musicalmente a una melodía. La mano se mueve con la pulsación rítmica del discurso, por lo que presenta la misma forma independiente del contenido. En general, parece un vaivén de las manos o de los dedos de arriba hacia abajo o de adelante hacia atrás. El “*beat*” revela la concepción del hablante del discurso narrativo como un todo.

McNeill (1992), también destaca los gestos “*deíticos*”, *indexicales* o de señalamiento: indican entidades en el espacio conversacional, pero también podrían usarse cuando no existe nada por señalar. Se realizan usualmente con el dedo índice y se utilizan para indicar espacios presentes o ausentes; este tipo de gestos se incrementan linealmente y se correlacionan positivamente con el desarrollo del lenguaje y del discurso (Camaioni,

Aureli, Bellagamba & Fogel, 2003). Los gestos “*metafóricos*”, en tanto, son similares a los icónicos en lo pictórico, se diferencian en que el contenido o evento es abstracto más que concreto. Se hace referencia a imágenes visuales de objetos, espacios y movimientos, entre otros.

En un estudio con estudiantes de educación superior fueron descritos otros tipos de gestos (Volante, Huepe & Cornejo, 2009) llamados gestos automáticos, que corresponden con un discurso repetido y prácticamente sobreentendido. Los movimientos acompañan respuestas breves, que no poseen mayor explicación y con dificultad para comunicar lo que se hace. Otro tipo de gestos son los ejecutivos, focalizados en la tarea y con una alta coordinación entre rostro, mirada y mano. Son movimientos que acompañan respuestas rápidas, seguras y donde el entrevistado muestra dominio y control respecto a lo que hace y dice que hace.

Existirían dos enfoques teóricos acerca de la relación entre los gestos y el discurso (Roth, 2001). El primero de ellos plantea que los gestos van más allá de la expresión lingüística y no transmiten información semántica, como podrían ser los gestos de carácter espontáneos no interpretables que se realizan casi inconscientemente. Estos últimos no tienen una intención comunicativa, ni una relación con el pensamiento y el lenguaje, prueba de esto es que las personas suelen olvidar haberlos realizado (Ueda, 1998). El segundo enfoque, propone que los gestos y el discurso son parte de la misma estructura psicológica, constituyendo modalidades alternativas para expresar contenido semántico. Cuando los gestos reemplazan al discurso, configuran una estructura de lenguaje, del tipo palabra y oración, asumiendo una clara función comunicativa (Goldin-Meadow, 1999). No obstante, los gestos también pueden acompañar al discurso y tornarse análogos e imaginativos. Esto facilita la comprensión de aquello que se quiere expresar y aporta una dirección a la interpretación de una expresión, en especial cuando ésta es potencialmente ambigua (Cornejo et al., 2008).

Respecto del tipo de gesto que la gente produce de modo informal, éste involucra un movimiento de manos que no ha sido codificado, generado fugazmente durante el transcurso del discurso. Se dice que éste tiene el potencial de reflejar los pensamientos que no son examinados ni por el hablante ni por el oyente, y reflejan pensamientos que no son vistos en otras formas de comunicación más codificadas (Goldin-Meadow, 1999). En general, los gestos de carácter inconsciente e involuntario revelan conocimiento implícito del hablante, es decir, un conocimiento que aún no se verbaliza pero existe, y que desde esta posición puede apoyar el aprendizaje de estrategias explícitas (Broaders, Cook, Mitchell & Goldin-Meadow, 2007).

Es destacado el rol de los gestos simbólicos en el desarrollo del lenguaje. Cuando los gestos simbólicos son modelados, pueden ser un medio efectivo para avanzar a gestos más complejos (Goodwyn, Acredolo, & Brown, 2000). Sin embargo, una particularidad es que

el aumento de la palabra, hace que este tipo de gesto disminuya su presencia (Bernardis & Gentilucci, 2006).

Con relación a la importancia de los gestos en la comunicación, Goldin-Meadow (1999) afirma que el estudio de la comprensión de un concepto o contenido en escolares se puede realizar a partir de los gestos que éstos adoptan, ya que a partir de ellos podemos saber lo que están pensando cuando hablan. Los gestos son frecuentes cuando los escolares construyen explicaciones acerca de ciertos fenómenos en el momento, por lo que ayudan al estudiante a predecir, revisar y coordinar elementos de un modelo propio. Inclusive, los gestos pueden llegar a denotar cambio cognitivo, puesto que el gesto permite dar la señal de que un contenido específico se encuentra en el repertorio de aprendizaje del estudiante para ser aprendido (Goldin-Meadow, 1999; Goldin-Meadow & Singer, 2003; Goldin-Meadow & Wagner, 2005). Tal como señala la autora, los gestos no serían movimientos aleatorios, sino que revelarían creencias específicas sobre las tareas a desarrollar.

Con relación al estudio de los gestos y la matemática, los gestos aparecen vinculados al pensamiento desde los primeros aprendizajes de los números (Radford & André, 2009). Esto sucede cuando los niños comienzan a contar, tocar o indicar con gestos indicativos los objetos contados, porque estas acciones y gestos se encuentran mediados por una orientación en el espacio necesaria para mantener la cuenta, relación que se mantiene hasta la edad adulta (Imbo, Vandierendonck & Fias, 2011). De algún modo, tal hecho demuestra que “hay una relación muy estrecha entre la representación de las numerosidades que formamos en nuestro cerebro y las representaciones que formamos con nuestros dedos” (Radford & André, 2009). Misma situación pasa con la geometría, donde los gestos se convierten en formas constitutivas del conocimiento geométrico (Kim, Roth & Thom, 2011).

A partir del análisis de gestos en profesores y estudiantes en clases de matemática, los estudios de Alibali & Nathan (2012) han demostrado la manera en que los gestos hacen evidente lo encarnado del pensamiento matemático. Sus investigaciones han detectado tres formas en que estos actores utilizan recursos basados en el cuerpo como son: a) los gestos señaladores, que reflejan la puesta a tierra de la cognición en el entorno físico, b) los gestos representacionales, es decir, icónicos y metafóricos, al igual que gestos de representación mental, simulaciones de la acción y percepción, y por último, c) gestos metafóricos, que reflejan metáforas conceptuales centradas en el cuerpo.

Un aspecto de interés en el estudio de gestos y matemática es el concepto de *desajuste*, ocurrido al producirse información diferente entre discurso y gestos. Según Goldin-Meadow & Singer (2003) estos aparecen de forma espontánea cuando se está narrando o razonando sobre problemas matemáticos o de física. El hablante llevaría dos ideas distintas sobre el mismo problema, pero la explicación en la que los gestos son producidos viene

después del hecho. Las personas que realizan estos desajustes activan simultáneamente más de una idea no sólo cuando explican un problema matemático, sino que también cuando lo resuelven. Este fenómeno, sería algo propio de los aprendices y va desapareciendo en la medida que ocurre el desarrollo cognitivo. Se dice, entonces, que estos gestos son deseables, ya que pueden facilitar la comprensión de un mensaje hablado cuando lleva el mismo mensaje (Goldin-Meadow, 1999; Goldin-Meadow & Singer, 2003).

Goldin-Meadow et al. (2003), plantean que si los profesores se encuentran frente a un caso de desajuste en el aula, deberían ser capaces de reconocer los mensajes que los niños o niñas dan, tanto a nivel de discurso como por medio de los gestos. Se hace necesaria la presencia de un acompañamiento para superar tal desajuste, con la intención de que no afecte el aprendizaje de forma posterior.

Los gestos no sólo tienen la virtud de hacer evidente la comprensión que tiene el niño respecto de una tarea o problema, sino que también permiten cambiar la comprensión que se tiene de este (Novack & Goldin-Meadow, 2015) Además, tienen un rol en la elicitación del pensamiento del niño, lo que permite dar forma a esa comprensión (Goldin-Meadow, et al. 2003). Más aún, los gestos proveen de información valiosa de la zona de desarrollo próximo del niño, sobre un área o tipo de aprendizaje (Goldin-Meadow & Wagner, 2005).

En el contexto de gestualidad y resolución de problemas, los resultados de Francaviglia & Servidio (2011) muestran que los niños utilizan diferentes patrones de gestos para comunicar sus propias ideas matemáticas, lo que confirma no sólo que los gestos facilitan el aprendizaje de los conceptos matemáticos sino que mejoran sus estrategias cognitivas para la solución del problema. Los estudios de Logan, Lowrie & Diezmann (2014), con niños de primaria, plantean que los gestos pueden influenciar las representaciones y los procesos que tienen lugar en la mente de los estudiantes cuando participan en tareas espaciales. Tal comportamiento puede influir en las vías de razonamiento espacial, es decir, los estudiantes realizan un gesto para una tarea de mapeo específica, como un componente de su interpretación de la información y el procesamiento cognitivo desarrollado. En este estudio se observa que cuando la tarea matemática es desconocida o altamente exigente los gestos son más influyentes en el proceso de aprendizaje que cuando las tareas es de baja complejidad, donde los estudiantes disminuyen su gestualidad.

Desde el punto de vista de la enseñanza de la matemática, los estudios de Cook & Goldin-Meadow (2006) permiten afirmar que una estrategia es más efectiva cuando los gestos correctos, es decir, significativos, acompañan las explicaciones de los profesores en la resolución de problemas matemáticos. Esto, a su vez, permite que los niños sean capaces tanto de evidenciar su comprensión a partir del mismo gesto *imitado*, así como aumentar la gestualidad en sus explicaciones matemáticas. Se lograría de este modo una interacción significativa entre los actores del proceso de enseñanza-aprendizaje. Animar a los niños a realizar gestos, posibilita la creación de nuevas estrategias de resolución de problemas que

no se habían demostrado con anterioridad en los gestos habituales de los niños o en su modo de hablar, lo que podría revelar conocimiento implícito (Broaders, Cook, Mitchell & Goldin-Meadow, 2007).

En investigaciones con estudiantes de educación superior se descubrió que los gestos no solo permiten el aprendizaje de un conocimiento establecido, sino que constituyen una oportunidad para generar nuevo conocimiento matemático. Esto, a partir de la generación de espacios de creación de gestos espontáneos donde los estudiantes puedan demostrar su libertad de pensar por sí mismos cuando se enfrentan a tareas difíciles, solos o en compañía de otros. De esta manera, si los profesores son mediadores pueden realizar una sensibilización de la gestualidad como un recurso de aprendizaje útil. Esto es, entender los gestos como una herramienta que da sentido a las ideas nuevas (Allibali et al., 2014; Novack & Goldin-Meadow, 2015; Yoon, Thomas & Dreyfus, 2011). El modelaje por parte de los adultos consiste, entonces, en un elemento vital para que los niños utilicen los gestos como herramientas de comunicación y de aprendizaje (Farkas, 2007; Goodwyn, Acredolo, & Brown, 2000).

En consecuencia, el gesto parece ser un mejor predictor que el habla respecto del cambio duradero en los niños y, a la vez, una herramienta representacional efectiva para los estudiantes en cuanto la resolución de tareas matemáticas (Cook & Goldin-Meadow, 2006). El uso de los gestos es importante para el aprendizaje porque transmite información visoespacial, y se destacan diferentes aspectos de un problema. Al mismo tiempo, los estudios señalan que el uso de gestos favorece el recuerdo y la generalización, ya que por una parte los estudiantes recuerdan más fácilmente un problema matemático cuando acompañan con gestos su explicación acerca de la solución (Cook, Mitchell & Goldin-Meadow, 2008; Goldin-Meadow, 2006). Por otra parte, los sujetos aprenden los principios subyacentes de sus acciones en una tarea cuando los actos se interpretan simbólicamente a partir de los gestos, entendiendo que los gestos son más abstractos que la acción pero menos que el lenguaje (Cook & Goldin-Meadow, 2006; Novack, Congdon, Hemani-Lopez & Goldin-Meadow, 2014).

A partir de la evidencia presentada se puede concluir que el aprendizaje de la matemática se beneficia cuando participan los gestos, el lenguaje y el pensamiento (Allibali et al., 2014; Cook, Mitchell & Goldin-Meadow, 2008; Goldin-Meadow & Wagner, 2005; Goldin-Meadow, 2006; Novack et al. 2014; Novack & Goldin-Meadow, 2015). Aparicio & Cantoral (2006) afirman que el articular los gestos con lo discursivo, se convierten en una real oportunidad de aprendizaje en el aula. Los gestos nos dan evidencia de lo que los sujetos piensan, sus aproximaciones a la cultura, modos de resolver problemas en distintos contextos y se abre un mundo de posibilidades para la comprensión del mundo en que estamos insertos a partir de la interacción significativa con otros. Al mismo tiempo, el gesto

mejora el aprendizaje de conceptos abstractos y ayuda a consolidar el aprendizaje a través del tiempo (Cook, Duffy and Fenn, 2013; Cook, Mitchell and Goldin-Meadow, 2008).

Pese a lo anterior, aún las implicancias de los gestos para la enseñanza de la matemática es escasa, y falta mayor evidencia respecto de cuándo y cómo utilizar la gestualidad para favorecer el aprendizaje en esta área (Novack & Goldin-Meadow, 2015).

1.3.6. Vivencias significativas de aprendizaje de la matemática

Hiebert et al. (1997) han argumentado que para comprender realmente las cosas debemos ver cómo se relacionan o se conectan a otros elementos conocidos o construidos, tales como ideas, hechos, procedimientos, entre otros. En matemática, la comprensión de las relaciones es fundamental para que tenga sentido su aprendizaje. No obstante, la comprensión no debe ser entendida netamente a nivel cognitivo, sino como un conocimiento que lleva a la acción, una condición de posibilidad, un hacer con sentido (Dreyfus, 2003). A pesar de lo anterior, es muy común que los estudiantes confíen en el conocimiento generado a partir de estas conexiones, sin captar el verdadero sentido que estas tienen y como este sentido se traduce en la acción. Si se busca comprender cómo los estudiantes construyen su relación con la matemática y el significado que le otorgan a la experiencia de aprendizaje, se torna necesario profundizar en la red de relaciones que se articulan y dan sentido a la experiencia a nivel subjetivo e intersubjetivo (Bruner, 1998; Varela et al., 2005).

Para la ciencia cognitiva actual, el “significado” es entendido como una representación lingüística que es evocada siempre que ciertas formas lingüísticas son procesadas (Cornejo, Ibañez & López, 2008). El presente estudio, sin embargo, no suscribe a dicha mirada centrada en la relación construida por los estudiantes entre contenidos con determinadas construcciones lingüísticas. Al contrario, nos interesa el sentido y experiencia corporal del sujeto que comprende, es decir, el proceso de conocimiento y aprendizaje donde la mente, gestualidad e historia social se articulan para dar lugar a la acción (Varela et al., 2005).

La comprensión del significado se distancia de nociones reducidas al contenido semántico o a la representación y se entiende de un modo holístico, es decir, como una aproximación comprensiva a la experiencia vivida, que surge de la interacción entre el sujeto y el mundo (Bruner, 1998). Así entendido, el significado que el sujeto construye a partir de su historia, se relaciona con el sentido e involucramiento que pone a la acción y al contexto. Por este motivo, la historia de cada uno y el lenguaje son relevantes para comprender la construcción de significado.

Lenguaje y discurso aparecen como elementos preponderantes en el proceso de emergencia de la acción, ya que las relaciones que gobiernan nuestras vidas se encuentran definidas en

un mutuo acuerdo entre lo que hacemos y decimos. Lo anterior enfatiza la circularidad entre acción e interpretación. En este sentido, los relatos o narraciones de acontecimientos en que los sujetos participan como actores relevantes, revelan el pensamiento y la forma en que los sujetos comprenden el mundo y sus relaciones. La propia experiencia se llena de sentido a partir de un *yo narrativo* (Bruner, 1998; Vygotsky, 1995). Nuestra comprensión de mundo y lo que hacemos, se relaciona con aquello que hemos percibido de los distintos entornos en los que hemos estado. Así, el significado y sentido se encuentran interconectados con el medio social y la experiencia del sujeto que la ha vivido (Bronfenbrenner, 1987).

En este contexto, las relaciones de significado no son necesariamente conscientes para el sujeto, porque él podría no tomar la decisión de construir dichas relaciones de forma voluntaria. Por el contrario, podrían configurarse a pesar del sujeto porque han sido parte de su mundo vivido (Merleau-Ponty, 1985). En este sentido, se entiende que la realidad es dependiente de los significados que las personas le atribuyen, es decir lo que las personas hacen o dicen es el resultado de cómo estas comprenden y definen su mundo (Taylor & Bodgan, 1987). En el decir de McNeill, (1992) el estar conscientes de lo que hacemos no se refiere solamente a analizar algo con cuidado, sino que también implica un acto constructivo, expresado de distintas formas, tales como las declaraciones o conductas específicas, y aquellas que pueden ser interpretadas desde la totalidad de su actuar, considerando su discurso verbal, gestos y posturas corporales.

El significado emerge en la acción humana, la que puede ser elicitada al recordar la historia de enseñanza y aprendizaje vivida en interacción con otros (Bruner, 1998; Vygotsky, 1979, 1995). Dicho significado va más allá de la conducta o la acción propia, y se integra al contexto o ambiente en que se sitúa la acción. Si bien la historia tiene la particularidad de ser construida en función de cómo cada sujeto la interpreta y el sentido que tiene para ellos ésta se construye a partir de una comprensión que se edifica en una cultura compartida, propia de la sociedad a la que pertenece y al lugar que ocupa en ella (Bruner, 1998; 1987). Es así que la relación que las personas establecen con el mundo no es a través de lo que se piensa sino lo que las personas viven en su relación con otros (Merleau-Ponty, 1985).

El significado viene de la estructura cultural de la que somos parte, por lo que cobra especial relevancia la escuela y la familia, instituciones culturales donde se negocian y renegocian los significados e interpretaciones a nivel intersubjetivo (Bruner, 1998). En la escuela y la familia los sujetos se desarrollan, construyen significados en la interacciones con otros, profesores, compañeros, padres, hermanos, según corresponda, y se comunican a través del lenguaje, dando cuenta de la acción que realizan y el sentido de la misma (Bronfenbrenner, 1987; Bruner, 2000; Vygotsky, 1995).

La escuela, medio para la reflexión y el aprendizaje de la cultura, es el espacio donde los estudiantes aprenden a construir modelos explicativos para el ordenamiento de la experiencia y el conocimiento comprensivo de la matemática y la ciencia, entre otras disciplinas, lo que se inicia en el seno de la cultura a la que se pertenece (Bruner, 1987; Rico y Lupiáñez, 2008). En la escuela, el niño aprende a construir modelos de mundo que le permiten enfrentar la complejidad, y establecer modos de pensamiento. La escuela es un espacio para la experiencia, “para el crecimiento en nuestra comprensión del mundo” (Salinas, 2002, p.7). En el caso de la matemática, es importante que dicha disciplina no se encuentre alejada de la experiencia del sujeto, de su comprensión de mundo y de su experiencia cultural y social. Si se mantiene este alejamiento, el conocimiento se transforma en memorístico y sin sentido (Bruner, 1987).

La familia, por su parte, se constituye en el espacio de protección, desarrollo y cuidado por excelencia. Es un agente socializador con una reconocida importancia e influencia en el aprendizaje, desarrollo en general del proceso educativo de los niños, el rendimiento académico y la conducta escolar (Alcalay, Flores, Milicic, Portales & Torretti, 2003; Gubbins, 2012; Gubbins & Berger, 2002; Rivera & Milicic, 2006; Vygostky, 1979). La familia se constituye en el entorno donde los niños y niñas pueden interactuar cara a cara, siendo ellos mismos, por lo que tiene un significado especial para sus integrantes afectando su conducta y desarrollo humano (Bronfenbrenner, 1987; Bronfenbrenner & Morris, 2005).

Ambos contextos o entornos, son espacios de participación de los sujetos, donde la clave son las interrelaciones que se dan al interior de ellos y entre ellos. Tales relaciones se construyen de modo significativo para quienes las viven, afectando como se establece su relación con el mundo.

La perspectiva corporeizada se ubica en este escenario de complejidad. El sujeto interactúa con distintos objetos, entornos y fenómenos de la vida cotidiana. Asimismo, experimenta y se desenvuelve en un mundo de realidad que es inseparable de su corporalidad y vivencia un proceso intersubjetivamente válido por el sólo hecho de ser un sujeto que está en el mundo, brindado a él (Merleau-Ponty, 1985). De este modo, este estudio considera que para entender la relación corporeizada que establecen los estudiantes con la matemática, se requiere entender la red de relaciones que la conforman y los significados que se han construido en la experiencia de aprendizaje de la misma. La forma en que esta experiencia se manifieste será en un sentido amplio de la corporalidad del sujeto.

En acuerdo con Merleau-Ponty (1985) se plantea que, la condición de ser en el mundo debe ser entendida tanto desde la condición de procesos corporales, como desde la convicción de que la existencia se encuentra *ahí*. En este proceso, el medio ambiente y la percepción se encuentran interrelacionadas (Gibbs, 2005) al constituir un mundo de sentidos y significados vividos, siendo la percepción el trasfondo de todos los actos, donde el alma y

cuerpo se vuelven una unidad en un “aquí” y un “ahora”. El cuerpo-sujeto, por tanto, no es algo meramente físico que se entiende desde su fisiología o desde los procesos mentales o la racionalidad, sino que constituye un cuerpo vivido y su comprensión se logra en el acto de percibir (Merleau-Ponty, 1985).

La experiencia corporeizada, por lo tanto, se concibe como el origen del significado, y al mismo tiempo, como estructurada socialmente, al formar parte de la sociedad y su cultura (Gillespie & Zittoun, 2013). A partir de lo anterior, podemos indicar que se entenderá la “experiencia” en un sentido amplio (Johnson, 1987), que incluye tanto la dimensión perceptual, corporal, emocional, lingüística como histórica y social, que se combinan en complejas interacciones para conformar nuestra comprensión del mundo. En tanto, la experiencia de relación con la matemática es entendida en este mismo sentido pero como algo vivido no solo desde la perspectiva de un individuo, sino que en base a *un mundo compartido con otros*.

El conocimiento, por lo tanto, estará localizado en un cuerpo social y no individual (De Freitas & Sinclair, 2012), que se relaciona de modo intersubjetivo con el mundo al que pertenece. Dicho conocimiento se encarna y se expresa a través de los cuerpos (Kim, Roth & Thom, 2010), por lo que la relación corporeizada con la matemática es edificada y comprendida desde un espacio de interrelación entre cuerpo-mente-mundo, como partes que constituyen un todo inseparable. Estas partes son co-dependientes, y tanto su significado como su sentido se van configurando en la experiencia vivida y la historia social (Merleau-Ponty, 1985), a partir de un mundo que ha sido percibido por el sujeto.

En consecuencia, la tesis de esta investigación plantea: *el sujeto encarna y hace propia su experiencia vivida en el proceso de conocer y comprender el mundo, la ciencia y la matemática. El pensamiento, lenguaje y gestualidad serán partícipes del acoplamiento con el ambiente y la historia vivida, dando sentido/significado a esta relación.*

1.4 Marco metodológico general del estudio

1.4.1 Tipo de Investigación

La investigación abordó la relación de los estudiantes con la matemática, entendiendo esta última como una construcción que se inicia durante la etapa escolar y que se actualiza cuando estos se enfrentan a la matemática en su época universitaria (Dreyfus & Dreyfus, 1988). El estudio buscó comprender esta relación situando al sujeto –estudiante- en primera persona y consideró que la relación con la matemática se configura desde una experiencia corporeizada de relatos, gestos, postura corporal y vivencias subjetivas.

La matemática fue conceptualizada como un lenguaje necesario para el desarrollo de habilidades cuantitativas en la etapa escolar (Nesher, 2000). En el presente estudio se concibe, además, como una vía que permite alcanzar una comprensión holística del mundo en el que cada sujeto se encuentra situado (Cole, 1999; Corbalán, 1997). Asimismo, funciona como un medio a través del cual los sujetos pueden comprender, comunicarse y actuar tanto en la vida cotidiana (Bishop, 2000; De Corte y Verschaffel, 2003; Maier, 2003; OCDE, 2006, Steen, 1990; 2006) como en un ámbito específico del conocimiento, como lo es el campo científico.

El diseño metodológico utilizado fue mixto, de carácter exploratorio-descriptivo-comparativo. Dicho diseño no sólo guió la toma de decisiones para la recolección y el análisis de los datos, sino que también en la combinación de las aproximaciones cuantitativas y cualitativas de las distintas fases del estudio (Creswell & Plano, 2007). El abordaje cualitativo arrojó información de carácter abierta donde los sujetos expresaron su experiencia personal y particular, lo que permitió llegar a construir categorías significativas de sus relatos y gestos. El abordaje cuantitativo se utilizó al transformar el dato de naturaleza cualitativa en un número que representara una categoría nominal u ordinal, elemento que permitió realizar análisis estadísticos de carácter descriptivo. Ambas aproximaciones permitieron establecer comparaciones analíticas del tipo, comparación por diferencias entre grupos, explorando acerca del sentido o características de aquellas diferencias (Coller, 2000), lo que no descartó la posibilidad de encontrar similitudes, tal como se planteó en los objetivos de investigación. La selección del diseño mixto permitió que la información cualitativa fuese información de base o soporte para la construcción del dato cuantitativo en dos de los tres estudios que se desarrollaron en la investigación (Creswell & Plano, 2007), mientras que el tercer estudio fue abordado en forma completa por técnicas cualitativas.

El diseño en cuestión se definió producto de la naturaleza del objeto de estudio y, al mismo tiempo, al permitir un mejor entendimiento del problema de investigación. La pregunta de investigación hizo necesario que el estudio tuviera un carácter flexible y abierto a la

incorporación de aspectos o categorías emergentes. El estudio fue transversal, ya que se investigó a los sujetos en un corte temporal determinado.

Si bien se buscaba considerar el objeto de estudio como un todo, de modo holístico, se debió considerar en un primer momento el abordaje de las distintas dimensiones de modo separado. Esto es, se realizaron tres estudios donde cada uno abordara las particularidades y singularidades propias de las *estrategias cognitivas, la gestualidad y las vivencias subjetivas en el aprendizaje de la matemática escolar*, conforme a lo planteado en los objetivos específicos de la investigación:

Estudio 1: Describir y comparar la estrategia cognitiva: holística y/o analítica, utilizada por estudiantes que inician la educación universitaria y que poseen distinto nivel de habilidad cuantitativa, al resolver situaciones matemáticas de la vida cotidiana (Objetivo específico 1).

Estudio 2: Describir y comparar la gestualidad expresada por estudiantes que inician la educación universitaria y que poseen distinto nivel de habilidad cuantitativa, al resolver situaciones matemáticas de la vida cotidiana (Objetivo específico 2).

Estudio 3: Describir y comparar las vivencias subjetivas e intersubjetivas de estudiantes que inician la educación universitaria y que poseen distinto nivel de habilidad cuantitativa, en su aprendizaje de la matemática escolar (Objetivo específico 3).

Luego, a partir de la articulación de los tres estudios anteriormente mencionados, se buscó integrar las estrategias, holísticas y/o analíticas usadas por estudiantes que inician la educación universitaria para resolver situaciones matemáticas de la vida cotidiana, la gestualidad que expresan y las vivencias significativas en su etapa escolar, para dar cuenta de su experiencia de relación con la matemática, (objetivo específico 4), abordando así tanto el objetivo general como la pregunta de investigación que guio todo el trabajo de esta tesis doctoral.

A modo general, en la tabla 1 se presentan las dimensiones y categorías de análisis que consideró cada estudio para tener claridad sobre los alcances de la investigación. Algunas de ellas fueron predefinidas, como fue el caso del estudio 1 y otras emergentes (estudio 2 y 3). En todos los casos se consideró la evidencia teórica para su definición. El detalle de los estudios se presenta en la segunda parte de este informe.

Tabla 1
Tópicos abordados en los estudios

TÓPICOS	ESTUDIO 1 Estrategia Cognitiva	ESTUDIO 2 Gestualidad	ESTUDIO 3 Vivencias Subjetivas (dimensiones)
Categorías de análisis	Estrategia Holística	Postura Corporal	Disposición de los estudiantes ante la enseñanza y aprendizaje de la matemática.
	Estrategia Analítica	Movimiento de manos	Percepción del apoyo familiar para el aprendizaje de la matemática escolar.
	Estrategia Holística-Analítica	Características del discurso	Estrategias de estudio para el aprendizaje de la matemática.
	Estrategia Analítica-Holística	Seguridad en la resolución.	Experiencias escolares que favorecieron el aprendizaje de la matemática
		Claridad de la explicación y precisión en el lenguaje	Experiencias escolares que dificultaron/desfavorecieron el aprendizaje de la matemática
		Uso de Lenguaje Matemático	Motivos de elección de la carrera y su relación con la percepción acerca de la matemática.
		Seguridad en el procedimiento	
		Seguridad en el resultado	
		Seguridad en el procedimiento y en el resultado	

1.4.2 Participantes

La población de estudio fue integrada por estudiantes que se encontraban iniciando sus estudios universitarios en la Pontificia Universidad Católica de Chile durante el año 2010. La muestra total abordó a 61 estudiantes: 34 pertenecientes a carreras de Humanidades y Ciencias Sociales y 27 de Ingeniería. Todos los estudiantes habían ingresado por primera vez a la universidad y a la carrera elegida, además de haber rendido la Prueba de Selección Universitaria (PSU) el año anterior a la recogida de datos. El número de la muestra no fue predeterminado a priori, pero se buscó llegar a la saturación de las categorías (Kvale, 2011). La muestra buscaba lograr la mayor heterogeneidad y profundidad posible en la información del estudio.

Con el objeto de abordar grupos contrastantes, la selección de estudiantes consideró carreras de áreas disciplinares diferentes. La hipótesis que subyace a esta distinción señala que la relación establecida por los estudiantes con la matemática sería distinta, de acuerdo al área de conocimiento a la que pertenecen (Balatsoukas, O'Brien & Morris, 2011; De la Barrera, 2008; Fourez, 1997). Lo anterior permitió realizar las comparaciones analíticas esperadas.

Por una parte, se consideraron estudiantes pertenecientes a carreras de Humanidades y Ciencias Sociales, ya que en estas la formación o conocimiento matemático no es

considerado base o área prioritaria para su estudio, más allá de lo exigido a todos los estudiantes que ingresan a la universidad. Otro requisito consistió en que, a la fecha del trabajo de campo, los estudiantes no contaran en su currículum de primer semestre con una asignatura de contenido matemático. Las carreras consideradas en el estudio fueron, Letras Hispánicas y Letras Inglesas (20 participantes, 58.8% de la muestra de estudiantes Humanistas), Trabajo Social (6 participantes, 17.6% de la muestra de estudiantes Humanistas) y Educación Básica (8 participantes, 23.5% de la muestra de estudiantes Humanistas). Luego de la selección de los casos no se realizaron distinciones entre ellas, sino que se agruparon como una gran categoría denominada “carreras Humanistas”.

En cuanto a la carrera de Ingeniería, se consideraron como posibles unidades de análisis a todos los estudiantes recién ingresados al plan común. En esta área la habilidad matemática de los seleccionados es un requisito relevante para entrar a la carrera. Además, se consideró que en el currículum del primer semestre existiesen asignaturas matemáticas básicas de la formación científica.

Con el propósito que los estudiantes seleccionados presentaran diferencias en cuanto a sus habilidades cuantitativas, se consideró como referente junto con la carrera de procedencia el puntaje PSU matemática, ya que el promedio en esta prueba en ambos grupos es diferente y, en algunos casos, se ubican en los extremos respecto de sus elecciones por área de conocimiento (Balatsoukas, O'Brien & Morris, 2011; De la Barrera, 2008; Fourez, 1997). Se consideró la PSU como un antecedente que resulta confiable para aproximarse a hacer distinciones por áreas de conocimiento disciplinar ya que mide conocimientos y habilidades cognitivas propias de la resolución de problemas matemáticos establecidas en el currículum nacional (DEMRE).

El diseño muestral fue intencionado y tomó los siguientes criterios de selección:

- a. estudiantes que iniciaban su primer año de carreras Humanistas e Ingeniería;
- b. egresados del sistema escolar en semestre anterior al momento de la recogida de datos.
- c. ubicados a una desviación estándar sobre y bajo el promedio de su cohorte en la Prueba de Selección Universitaria de Matemática, con el objeto de lograr diferenciación entre los grupos. Este criterio se cumplió en el 58,8% de los estudiantes Humanistas y en un 62,96% de los estudiantes de Ingeniería. Producto de las dificultades para acceder a la muestra, el criterio se flexibilizó: llegó a dos desviaciones estándar sobre el puntaje promedio en el caso de Ingeniería, y una desviación estándar y media bajo el puntaje promedio en las carreras Humanistas. Como casos excepcionales, en Ingeniería se aceptaron cuatro casos en los que estuvieron a una desviación estándar y media sobre el promedio, por poseer puntaje

nacional. En Humanidades se aceptaron seis casos bajo el puntaje promedio, ubicados a cuatro unidades de desviaciones estándar.

d. estudiantes voluntarios de ambos sexos

La disponibilidad de los estudiantes para participar en el estudio fue dificultosa debido a que, por una parte, los estudiantes Humanistas presentaban resistencia a enfrentar una actividad que implicara el desarrollo de situaciones matemáticas. Por otra, los estudiantes de Ingeniería declaraban falta de tiempo para realizar una actividad fuera de su proceso académico, definido por ellos como altamente exigente y demandante.

En cuanto a las características generales de la muestra, la tabla n°2 permite observar que respecto al sexo de los estudiantes, la muestra tuvo un comportamiento sesgado, evidenciado por la preponderancia de mujeres en el caso de las carreras Humanistas (82%), y mayor representatividad de hombres en la carrera de Ingeniería (77,7%). Tal como se distribuye en la población general.

Tabla 2
Distribución de la Muestra por Sexo y Área de procedencia

Área	SEXO		Totales
	Hombre	Mujer	
Humanista	6	28	34
Ingeniería	21	6	27
Total	27	34	61

Se realizó un análisis de comparación de grupos con una sub muestra de 12 estudiantes por carrera (6 hombres y 6 mujeres en cada grupo), elegidos aleatoriamente para el caso en que el n del grupo era mayor a 6 estudiantes. Los resultados muestran que las variabilidades en la sub-muestra de comparación por área y género son muy diferentes (Anexo 1, ver estadísticos descriptivos y contraste de Levene), lo que tiene implicancias para el análisis debido a que no permite hacer comparaciones según sexo.

En cuanto a los resultados en la PSU Matemática (tabla 3), los estudiantes presentaron puntajes desde los 572 puntos en las carreras Humanistas hasta los 850 puntos en Ingeniería, según se observa en la Tabla 3. No obstante, tres casos del área Humanista de la muestra, específicamente las entrevistas n° 12, 16 y 41, alcanzan puntajes similares a los estudiantes de Ingeniería.

Tabla 3
Distribución de la Muestra por Área y Puntaje PSU

Área	PSU 572-660	PSU 661- 706	PSU 707-812	PSU 813 – 850	Total
Humanista	18	13	3	0	34
Ingeniería	0	0	13	14	27
Total	18	13	16	14	61

Los resultados PSU matemática de los estudiantes de la muestra general reportan una media de 810,33 puntos y una desviación estándar de 37,87 para los estudiantes de Ingeniería; y una media de 664,59 puntos, con una desviación estándar de 37,53 para los estudiantes Humanistas.

La Tabla 4 muestra la distribución por área de los estudiantes de acuerdo a la dependencia de los colegios. Según esto, los estudiantes su mayoría provienen de colegios particulares (67,2%) y, en menor medida, de colegios municipales (9,8%).

Tabla 4
Distribución de la Muestra por Área y Tipo de Colegio de Procedencia

Tipo de Colegio	Área de pertenencia		Total	
	Ingeniería	Humanista	F	%
Particular	24	17	41	67
Particular Subvencionado	1	10	11	18
Municipal	2	4	6	9,8
Sin respuesta		3	3	4,9
Total	27	31	61	100

1.4.3 Procedimiento de recolección de información e Instrumentos.

El levantamiento de información se realizó a través de entrevistas cognitivas, las que fueron aplicadas a los estudiantes en forma individual, mientras resolvían y explicaban en voz alta el proceso de resolución de cinco situaciones matemáticas que se les entregaron en papel al inicio de la entrevista. Las entrevistas se realizaron teniendo presente la necesidad de lograr un clima de confianza y empatía, para que los estudiantes pudiesen enfrentar la resolución sin apuros o temores.

Las entrevistas cognitivas permitieron acceder al proceso de pensamiento que desarrollaban los estudiantes al resolver situaciones matemáticas. El estudiante hacía explícito su proceso de forma oral, inmediatamente después de finalizar su respuesta escrita, lo que se conoce

como “*retrospective reports*³” (Ericsson & Simon, 1984). De este modo, se facilitó el acceso a la información aún disponible en la memoria de corto plazo del estudiante, mediante el rastreo y la verbalización. Para estimular dichos reportes, se utilizaron las siguientes preguntas: *¿cuéntame lo que hiciste? y/o ¿dime cómo lo resolviste?* Se puso énfasis en la importancia de recordar detalles, por lo que se pudo acceder a variadas descripciones y explicaciones sobre el contenido del pensamiento de los estudiantes durante su proceso de resolución de las situaciones matemáticas (Ericsson & Simon, 1984).

No fue posible disponer del mismo lugar para realizar todas las entrevistas. Sin embargo, todas ellas se realizaron en salas de reuniones que contaron con la privacidad y el silencio suficiente, lo que permitió llevar a cabo el proceso de recogida de datos según lo esperado.

En general, el espacio físico donde se llevaron a cabo las entrevistas se caracterizó por ser de adecuada luminosidad, tibio, libre de interrupciones. En el lugar se ubicaba un escritorio y, a un costado de éste, una cámara de video apoyada en un trípode. Al frente se encontraba el o la estudiante. La tesista se ubicaba a un costado para no interferir la filmación. En la mesa se colocaban las hojas de respuesta donde se encontraban las situaciones matemáticas a resolver, además de lápices, goma de borrar y grabadora, que sería utilizada con posterioridad al proceso de resolución de ítems. En todos los casos la tesista llegaba 15 minutos antes para preparar el lugar, ya que se debía conectar el equipo y probar el foco. Para configurar el espacio y poner a prueba los aspectos técnicos, se dedicó una sesión inicial de pilotaje del setting con un estudiante colaborador.

Una vez en la entrevista, la tesista procedía, en primer lugar, a explicar a los estudiantes el procedimiento que se llevaría a cabo, y el tiempo promedio que ocuparían. Luego se les solicitaba que leyeran un consentimiento informado, donde se explicaba nuevamente las características del estudio, riesgos y beneficios para el estudiante, el carácter confidencial de la información entregada por parte de este, lugar y tiempo involucrado, uso de los resultados y derecho de los participantes (en Anexo 2). Respecto del tiempo, se programó un margen amplio para asegurar que el proceso se llevara a cabo en forma tranquila y sin apuros.

Luego que los estudiantes leían el documento de consentimiento, y sólo si estaban de acuerdo, se les solicitaba que lo firmaran. En algunos casos los estudiantes pidieron mayor explicación acerca de las implicancias del estudio, la que fue entregada por la tesista. Todos los estudiantes firmaron dicho consentimiento sin inconveniente alguno, quedando una copia del documento en poder de la tesista.

³ En los reportes retrospectivos de procesos específicos, los sujetos actualizan la información que han rastreado y recuperado de los procesos cognitivos experimentados (Ericsson & Simon, 1984).

Al iniciar la entrevista, se les presentó a los estudiantes el set de situaciones matemáticas a resolver, una a una, en hoja tamaño carta (Anexo 3). Ellos debían resolverlas en forma escrita, y luego explicar en voz alta su proceso de resolución. La tesista realizaba preguntas para profundizar en la explicación oral de los estudiantes si era necesario, o respondía consultas de estos según correspondiera y no afectara la validez del procedimiento. Este formato se siguió para los 5 ítems seleccionados, registrando el proceso en una cámara de video Sony Handycam 200x Digital Zoom, modelo n°CCD-TR413 de alta definición con audio incluido. El registro de la grabación quedó guardado en CD para todos los videos. El corpus total de información para el análisis se encuentra conformado por 47 horas con 47 minutos de grabación.

El test utilizado en el estudio estuvo conformado por cinco situaciones matemáticas que fueron seleccionadas a partir de un instrumento construido con anterioridad por Marchant (2006), cuyo foco estaba puesto en el planteamiento de situaciones propias de la vida cotidiana⁴. La prueba MVC se evaluó en su dimensión psicométrica, con un alto nivel de consistencia interna estimado de $\alpha = .82$ a través del método de multipartición o Alfa de Cronbach. La prueba fue construida siguiendo el enfoque de medición referido a criterio, por lo que se evaluó, además, la dimensión edumétrica. Para dicho cálculo se utilizó el método Subkoviak, con un puntaje de $p_0 = .83$, lo que evidencia una alta probabilidad de que los puntajes que estén por sobre el puntaje de corte definido, sean clasificados en forma consistente. Para el cálculo de confiabilidad según el método señalado, fue necesario calcular el coeficiente Kuder y Richardson #20, de uso en variables dicotómicas, el que resultó ser consistente con una proporción de 0,819.

Sin embargo, las preguntas de la prueba MVC se encontraban en formato de selección múltiple, por lo que fue necesario modificar su formato y transformarlas a preguntas de respuesta abierta breve para que los estudiantes desarrollaran por sí mismos una solución escrita.

La selección de preguntas consideró que:

- los contenidos matemáticos correspondieran a los contenidos mínimos obligatorios para la enseñanza media chilena del sub-sector de matemática (Decreto Supremo del MINEDUC N°220, 1998).
- el contexto del ítem considerara una situación real, posible de observar en la vida cotidiana para los estudiantes.

⁴ Los Ítems son parte de la prueba MVC, construidos en la tesis de Magíster: *Estudio Descriptivo-Comparativo acerca del Numeralismo en adultos de Educación Superior Técnico Profesional*, realizada por M. Paola Marchant para optar al grado académico de Magíster en Psicología, mención Psicología Educacional el año 2006.

- el nivel de dificultad de los ítems (de acuerdo a la medición anterior) estuviera entre 10% y 20% de respuestas correctas para la categoría muy difícil, entre 20% y 40% para la categoría difícil y entre 40% y 60% de respuestas correcta para la categoría de mediana dificultad. Se descartaron aquellas preguntas que fueron contestadas por más del 60% de los entrevistados por considerarlas muy fáciles para la muestra seleccionada.

A partir de los criterios mencionados, se seleccionaron 11 preguntas (situaciones matemáticas) de un total de 37. Estas fueron sometidas a revisión de cuatro jueces expertos del área de la Matemática: dos ingenieros y dos matemáticos con orientación pedagógica. A ellos se les solicitó que recomendaran cinco preguntas que pudiesen evocar una explicación oral del proceso de resolución con una cantidad abundante de detalles en la respuesta, considerando el perfil de estudiantes de la muestra.

Sumado a lo anterior, los jueces reportaron otros criterios de selección en una entrevista individual posterior, tales como:

- Que la pregunta fuese motivante y/o desafiante.
- Que los contextos fuesen cercanos a los estudiantes.
- Que al menos una pregunta presentara una mediana complejidad para que los estudiantes del área Humanista, sobre todo aquellos con puntaje PSU más bajo, tuviesen una posibilidad de solucionarlo, con la intención de favorecer su disposición a contestar las preguntas restantes.
- Que las preguntas no fuesen de muy fácil resolución para los estudiantes de Ingeniería, ya que estos podrían perder su motivación al enfrentarlas y, por ende, afectar su disposición a participar en el proceso completo de recogida de información.

De 11 situaciones matemáticas analizadas en total, 5 de ellas fueron incluidas en el estudio: 3 de ellas contaron con el 100% de acuerdo de los jueces, una de ellas con el 75% y otra con el 50%. Esta última fue seleccionada de todos modos, considerando que el contenido abordado por el ítem era apropiado para los estudiantes humanistas ya que era de complejidad media.

En la Tabla 5 se presenta el comportamiento de las preguntas, luego de ser aplicadas en los grupos de la muestra.

Tabla 5
Comportamiento de las preguntas utilizadas en el estudio, comparando por áreas

N° del ítem	Contenido que evalúa el ítem (situación matemática)	Porcentajes de respuestas correctas		Dificultad ⁵	
		Humanista	Ingeniería	Humanista	Ingeniería
1	Número y Proporciones	64,7	70,4	Fácil	Fácil
2	Número y Proporciones	97,1	100	Muy Fácil	Muy Fácil
3	Estadística y Probabilidades	58,8	100	Mediana Dificultad	Muy Fácil
4	Formas y Espacio	14,7	74,1	Muy Difícil	Fácil
5	Álgebra y Funciones	35,3	88,9	Difícil	Muy Fácil
Total de estudiantes medidos		34	27		

Para asegurar la validez del diseño se consideraron los registros escritos de la resolución de las situaciones matemáticas, elaborado por los estudiantes en la hoja de respuesta. Se contrastaron en forma aleatoria algunos relatos verbales sobre el proceso de resolución con los datos presentados en las hojas de respuestas, encontrando consistencia entre ambos.

Además, se registró en un cuaderno de campo las impresiones de la investigadora durante el proceso de campo, tales como: la llegada de los estudiantes, la disposición de estos, sus temores, sus preguntas en el proceso de resolución por escrito, las explicaciones en voz alta y el cierre, lo que permitió contar con un material de gran valor para el estudio, en tanto logra dar cuenta de todo el proceso de recolección de información (en Anexo 4).

Si bien los participantes formaron parte de una experiencia estructurada de acuerdo a un setting predefinido y no en su contexto natural como hubiese sido una sala de clases, de todos modos hubo una aproximación importante a la realidad particular de los sujetos al tomar en consideración sus decisiones en la resolución de problemas y sus percepciones acerca del proceso de aprendizaje de la matemática. Este énfasis se pudo percibir en el aporte del diseño, el procedimiento de recogida de datos o mediante el análisis de los mismos.

1.4.4 Preparación del trabajo de campo

Los estudiantes entrevistados fueron contactados a través de la Dirección de Docencia de las respectivas carreras: Letras Hispánicas, Letras Inglesas, Trabajo Social, Educación General Básica e Ingeniería. Se envió una carta a cada Director de la unidad respectiva, en la cual se presentó el estudio y se les solicitó el acceso a los estudiantes para constituir la

⁵ Nivel de dificultad o facilidad: 0 a 20% de respuesta correctas (RC): muy difícil; 20% a 40% de RC: difícil; 40% a 60% de RC: mediana dificultad; 60% a 80% de RC: fácil; 80% a 100% RC muy fácil.

muestra (formato de carta en Anexo 5). Una vez confirmada la recepción de dicha carta por parte de la unidad, se concertaron entrevistas personales con cada Director de Docencia para entregar mayor detalle del estudio. Lo anterior permitió contar con las autorizaciones correspondientes y acordar la forma de tomar contacto con los posibles participantes. Gracias a los directores de cada unidad académica, se contó con las listas de los estudiantes y sus respectivos puntajes PSU Matemática, lo que permitió orientar las invitaciones hacia los propósitos del estudio.

El procedimiento propiamente tal consideró visitas a las salas de clases para poder invitar, resolver dudas y motivar a los estudiantes. Además, se enviaron cartas de invitaciones por correo electrónico, para establecer una relación más directa con estos (en Anexo 6).

La forma más efectiva de coordinación con los estudiantes fue a través de sus correos UC. Se acordó el día, hora y lugar de las entrevistas, y por esta vía se podían suspender las sesiones cuando los estudiantes presentaban alguna dificultad. En algunos casos los estudiantes entregaban la información de sus números celulares para hacer las coordinaciones correspondientes. Cuando los estudiantes se comprometían a participar del estudio, en su mayoría asistían a la entrevista llegando en forma puntual; cuando no podían asistir, avisaban con anterioridad, lo que favoreció el éxito del proceso.

1.4.5 Procedimiento general de análisis de datos

La perspectiva de análisis de los datos de toda la investigación fue siguiendo una lógica eminentemente inductiva en cada una de sus procesos. El conocimiento surgió a partir de procesos de interpretación y reflexión lo que favoreció la comprensión del fenómeno en forma progresiva y en profundidad (Valsiner, 2005).

Se utilizaron técnicas y procedimientos de análisis cualitativo y cuantitativo de carácter descriptivo. Para algunos análisis estadísticos se aplicaron técnicas de correlación y comparación de grupos no paramétricos. Para la validación de instrumentos se utilizó la técnica de componentes principales en la medida que el número de la muestra lo permitiera. El detalle de estos análisis se presentará en la segunda parte del informe en cada estudio.

1.5 Desempeño de los estudiantes en el Test

Si bien el conjunto de situaciones matemáticas no tenía como propósito principal la medición de habilidades cuantitativas en los estudiantes, sino más bien abordar las preguntas y objetivos de esta investigación, daremos cuenta del desempeño observado de modo general. Se explicitarán los resultados descriptivos del grupo de estudiantes en cada situación matemática medida, acompañados de evidencias gráficas de los aciertos y errores en los modos de resolución.

A nivel general, en la tabla 6 se observa que los estudiantes pudieron resolver la mayoría de los ítems. Los estudiantes de Ingeniería presentaron los mejores desempeños con un promedio de 4,3 respuestas correctas de un total de 5, versus los estudiantes Humanistas con un promedio de 2,7 respuestas correctas ($\chi^2 31,758$; $gl=5$; $p<0,000$). En efecto, los estudiantes de Ingeniería tuvieron en su mayoría entre 4 y 5 ítems correctos, mientras que los estudiantes Humanistas lograron entre 2 y 3 ítems correctos.

Tabla 6
Desempeño en los ítems por área

Área a la que pertenece	Puntaje	Cantidad de ítems correctos						Total
		0	1	2	3	4	5	
Ingeniería		0	0	0	3	12	12	27
	Humanista	1	2	10	15	4	2	34
Total		1	2	10	18	16	14	61

Nota: *Desempeño del estudiante en la medición

En cuanto a diferencias en el desempeño de los estudiantes, se puede afirmar que no existen diferencias significativas en el desempeño por colegio de procedencia, y existe una relación directa y positiva entre puntaje PSU y el desempeño en los ítems ($r=.786$; $p<0,01$). Es decir que a mayor puntaje en la PSU mayor es el desempeño de los estudiantes en las situaciones matemáticas evaluadas.

Si bien, no se realizaron análisis en cuanto al desempeño por sexo de los estudiantes de la muestra dada la distribución sesgada de la misma en este sentido, cabe destacar que los estudios OCDE 2012 reportan que las niñas parecen ser más fuertes en tareas de "planificación y ejecución", que miden cómo los estudiantes utilizan el conocimiento, y más débiles en la realización de tareas más abstractas de "representación y formulación". Ésta última apunta a cómo los estudiantes adquieren sus conocimientos. De acuerdo a investigaciones recientes, la tendencia de supremacía de hombres respecto de mujeres en matemática, se encuentra en proceso de cambio en algunos países (Agencia de la calidad de la Educación, enero 2013; OCDE, 2012).

A nivel de desempeños, se observa en la tabla 7 que el ítem 2 fue el que ambos grupos respondieron mayoritariamente en forma correcta, seguido por los ítems 3 y 5. Para los estudiantes de Ingeniería el ítem con menor cantidad de respuestas correctas fue el 1, y para los Humanistas fue el 4.

Tabla 7
Desempeño de los estudiantes por ítem

AREA	Item 1	Item 2	Item3	Item4	Item5
Ingeniería					
Correctos	19	27	27	20	24
Incorrectos	8	0	0	7	3
No responde					
Humanista					
Correctos	12	33	14	6	12
Incorrectos	21	1	19	17	21
No responde	1	0	1	11	1

1.5.1 Análisis de las respuestas por ítem

Ítem 1 (Números y Proporciones).

Situación problemática: “Se organiza un torneo de tenis donde participan 15 jugadores en total. Cada jugador que pierde un partido queda eliminado automáticamente del torneo. Cuando el número de jugadores es impar, el que no tiene pareja contra quien jugar avanza a la próxima ronda como si hubiese ganado el partido. Un deportista, que acaba de ganar el primer juego, se pregunta. ¿Cuál sería el número mínimo de partidos que debe ganar para ser campeón, sin considerar el que ya ganó?”

Para resolver este ítem los estudiantes requerían situarse en un contexto real de partido de tenis, siguiendo la lógica de eliminación por parejas para avanzar. Se debía considerar al jugador que ganó el primer partido para imaginar la trayectoria que llevaría y poder determinar la cantidad mínima de partidos que debería ganar, descontando el primero que había ganado.

Los que respondieron correctamente el ítem señalaron haber aplicado razonamiento matemático o uso de la lógica, más que cálculo para enfrentar su solución. Destacaron que esto habría sido una complicación ya que, desde su perspectiva, estarían más acostumbrados a calcular que a “*pensar matemáticamente*”, disociando ambos procesos. Se apoyaron en diagramas y esquemas como un medio que les permitió representar el problema, o hacerse una imagen de éste, argumentando:

“el dibujo es más cercano si las cosas son abstractas” (estudiante de ingeniería, caso 25)

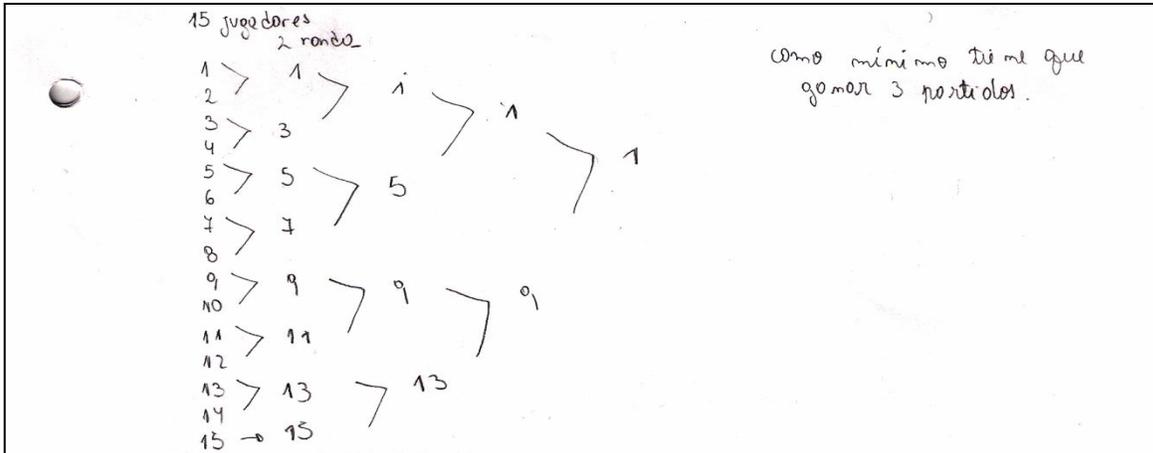


Figura 1. Ejemplo resolución correcta (Estudiante Caso 24)

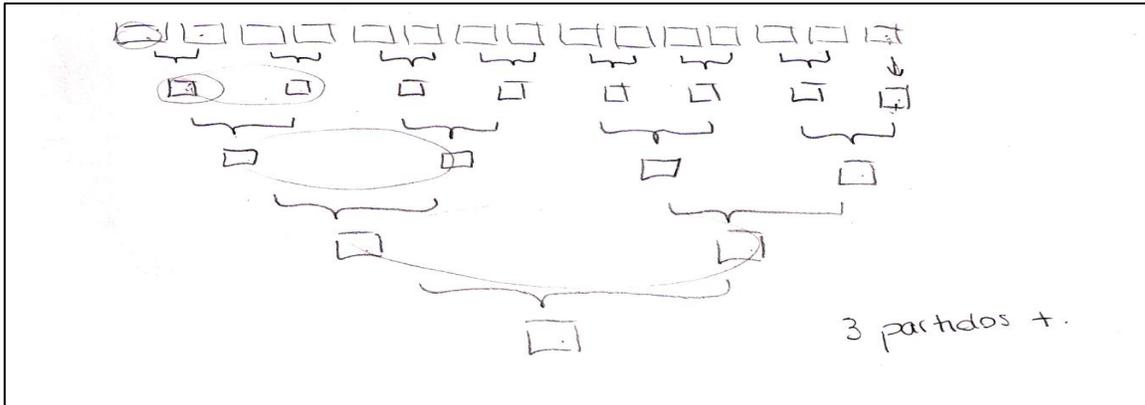


Figura 2. Ejemplo resolución correcta (Estudiante Caso 32)

No se apreciaron dificultades en torno a los contenidos abordados en el ítem. Sin embargo, se dieron algunas equivocaciones en el procedimiento de resolución de la situación matemática al “contar correctamente las etapas” o confusiones en torno al rol del “jugador libre”. En las figuras 3 y 4 se presentan evidencias para este tipo de error.

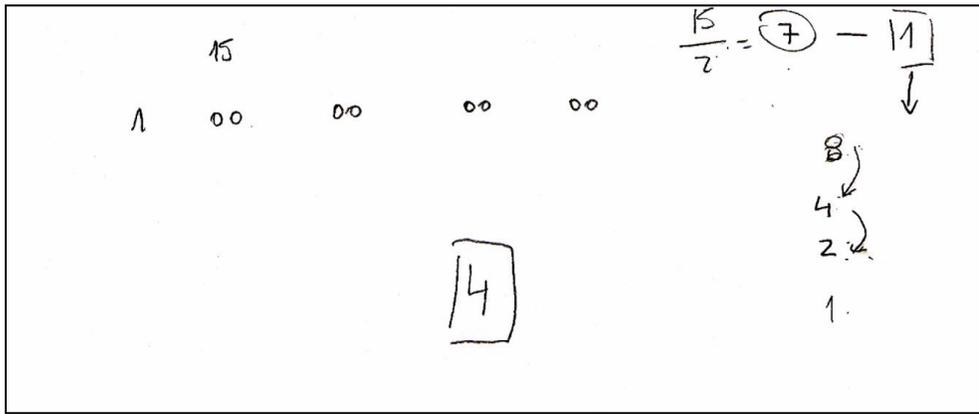


Figura 3. Olvidar descontar el primer partido (Estudiante Caso 60 Ingeniería)

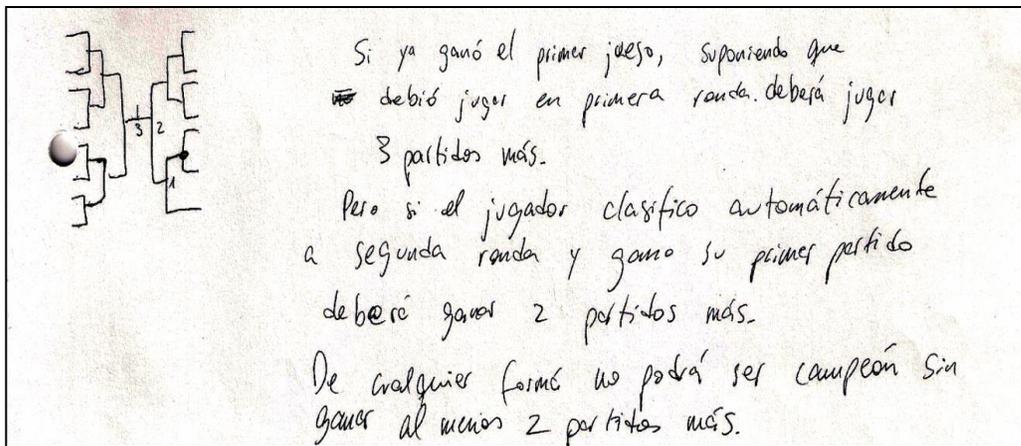


Figura 4. Confusión con el rol del jugador libre (Estudiante Caso 22 Ingeniería)

En otros casos, indicaron no saber cómo responder el ítem de forma matemática (Caso 57, Humanista) por lo que utilizaron esquemas para enfrentar su resolución. En la mayoría de los errores se observó dificultades en comprender lo que se les pedía, a pesar de que toda la información necesaria se encontraba en el enunciado de la situación problema. Las evidencias de tales errores están a continuación:

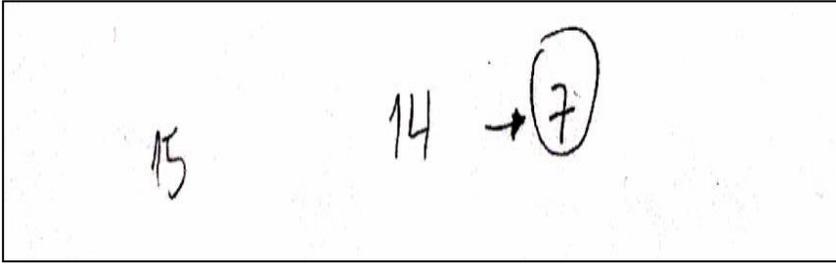


Figura 5. Error en el planteamiento del problema (Estudiante Caso 3 humanista)

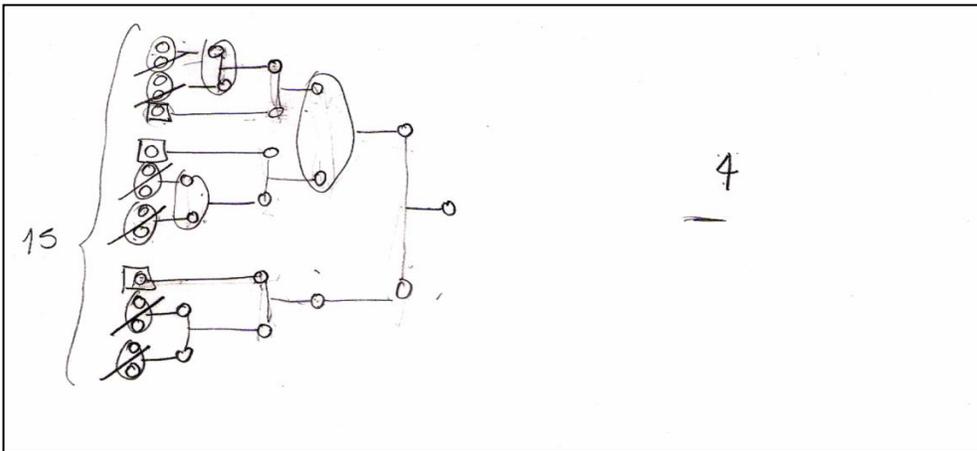


Figura 6. No se entiende lo que se pregunta (Estudiante Caso 7 humanista)

Los estudiantes comentaron que frecuentemente buscan la forma más fácil de resolver los problemas. Señalaron que un ítem es más fácil cuando se presenta una definición clara de lo que se espera en el enunciado, como por ejemplo, la realización de un cálculo. De acuerdo a lo señalado, la dificultad aumentaría si implica activar un proceso de pensamiento, ya que implicaría usar un análisis lógico en lugar de un cálculo directo.

Como ilustración de la explicación anteriormente indicada, se transcribe lo enunciado por Estudiantes de Ingeniería:

*“uno siempre tiende a usar la manera más simple de resolver un problema”
(Estudiante de Ingeniería, caso 19)*

“la percepción de error se siente cuando una pregunta es muy fácil y cuando es muy difícil” (Estudiante de Ingeniería, caso 17)

Ítem 2 (Números y Proporciones).

Situación problemática: “Un estudiante ingresa a una mueblería buscando un escritorio para su computador. El que más le gusta está rebajado en un 20%, lo que da un precio oferta de \$40.000; pero la oferta dura sólo esta semana. Si el estudiante no pudo reunir el dinero y sólo lo consiguió diez días más tarde. ¿Cuánto dinero pagó?”

De acuerdo a lo señalado con anterioridad, esta situación fue la de menor complejidad para los estudiantes en general. Sólo un Estudiante Humanista se equivocó en el “planteamiento matemático de la situación” y no la pudo resolver correctamente.

La mayoría de los estudiantes catalogaron este ítem como “pregunta PSU” (Prueba de Selección Universitaria), lo que facilitaba la resolución al ser algo conocido. Para ellos, el ítem correspondía a “puro cálculo” y esto le quitaba complejidad. El contenido no presentó mayor dificultad para los estudiantes, quienes como estrategia de resolución utilizaron la “regla de tres”. En un caso se utilizó la aproximación como estrategia de resolución (Caso 58, Estudiante Humanista).

A continuación se presenta evidencia de respuestas correctas e incorrectas:

The image shows a handwritten mathematical solution. At the top, a proportion is set up: $\frac{80}{40.000} = \frac{100}{x}$. Below this, the student has written $x = \frac{40.000 \cdot 100}{80} = 50.000$. There is a small '5.000' written above the fraction, and the original '80' in the denominator is crossed out and replaced with '50'.

Figura 7. Uso correcto de la regla de tres (Estudiante Caso 59, ingeniería)

The image shows handwritten work. On the left, '20%' is written. In the center, there is a table-like structure: '100 x' above '20 40.000'. Below this, the calculation $\frac{40.000 \cdot 100}{20}$ is written, with a '5' written above the '100' in the numerator. To the right of this calculation, the number '200.000' is written.

Figura 8. Sabe que tiene que aplicar la "regla de tres" pero no sabe cómo (Estudiante Caso 10, humanista)

Ítem 3 (Estadística y Probabilidades).

Situación problemática: “Un alumno de un colegio del Norte Grande de carácter subvencionado, desea acceder a una beca por excelencia académica. En el primer semestre ha rendido cuatro pruebas en la asignatura más difícil del nivel obteniendo un promedio de 6,4. Sin embargo debe obtener promedio a lo menos 6.6 para acceder a la beca. Si consideramos que sólo faltan dos pruebas más antes de finalizar el semestre ¿qué notas debería obtener en cada una para poder acceder con seguridad a la beca?”

Al igual que en la situación anterior, el 100% de los estudiantes de Ingeniería resolvieron el problema. En su explicación indicaron que era una situación conocida por ellos, tanto por la forma de resolver (práctica habitual del colegio y preparación PSU), como por el contenido del ítem. De todos modos, dijeron que se requería comprender primero el problema antes de aplicar un cálculo, tal como se aprecia en la siguiente afirmación.

“es importante comprender el problema y luego expresarlo matemáticamente (...) cuando uno enfrenta un problema se proyecta acerca de lo que se va a hacer, se ve si es factible desarrollarlo en pasos más largos o más cortos, se planifica la forma de abordarlo” (Estudiante de Ingeniería, caso 61)

Para resolver el ítem los estudiantes debieron plantear correctamente una ecuación, con una incógnita equivalente a las dos notas faltantes, aunque algunos utilizaron también el cálculo mental. La evidencia del planteamiento correcto se aprecia en la figura 9:

$$\begin{array}{r} 6,4 \cdot 4 \\ \hline 25,6 \\ 6,6 \cdot 6 \\ \hline 39,6 \\ -25,6 \\ \hline 14,0 \end{array}$$
$$\begin{aligned} 4 \cdot 6,4 + \frac{x_1 + x_2}{6} &= 6,6 \\ 25,6 + x_1 + x_2 &= 39,6 \\ x_1 + x_2 &= 14,0 \quad /:2 \\ \frac{x_1 + x_2}{2} &= 7,0 \end{aligned}$$

Figura 9. Procedimiento habitual con promedios (Estudiante Caso 56, Ingeniería)

Para algunas estudiantes Humanistas el ítem presentó mayor dificultad que el ítem 2. Dentro de los principales errores encontramos el “desconocimiento del procedimiento de resolución” y el “planteamiento de los términos de la ecuación”. Lo anterior se aprecia como debilidad tanto en el manejo del álgebra, como al operar con promedios. Si bien la mayoría sabía que debían hacer uso de promedios, no sabían cómo aplicarlo al caso para su

resolución. Algunas estudiantes manifestaron la dificultad que implican las situaciones de carácter abstracto, como catalogaron el problema mencionado.

En cuanto a las técnicas de resolución, los estudiantes Humanistas utilizaron frecuentemente la aproximación y el ensayo-error, lo que no les habría traído los resultados esperados. En opinión de algunos estudiantes de Ingeniería, la técnica de aproximación no sería lo suficientemente efectiva como para asegurar un resultado correcto, en especial cuando no existe un dominio real de los contenidos matemáticos. Las siguientes citas reafirman lo anterior:

“la estimación es para alguien que tiene experiencia, los que están aprendiendo deben hacer cálculo” (Estudiante de Ingeniería, caso 36)

“la estimación supone un conocimiento implícito (Estudiante de Ingeniería, caso 56)

A continuación se presentan algunos errores:

$$\frac{6.4 + x + y}{3} = 6.6$$

$$6.4 + x + y = 19.8$$

$$x + y = 13.4$$

$$\frac{6.4 + 7 + 6.4}{3} = 19.8$$

$$\frac{7 + 13.8}{3} = 6.6$$

Figura 10. Debilidad en el planteamiento matemático (Estudiante Caso 6, Humanista)

$$6.6$$

$$6.4$$

$$\frac{6.8}{200} = 0.034 \approx 0.03$$

$$6.6 \times 0.03 = 0.198 \approx 0.2$$

$$6.4 + 0.2 = 6.6$$

Figura 11. Uso de la aproximación sin resultado positivo (Estudiante Caso 21, Humanista)

Ítem 4 (Formas y Espacio).

Situación problemática: “Se desea llenar una piscina de agua que tiene 20 metros de diámetro y 10 de alto. Se quiere calcular el tiempo en que duraría llenar dicha piscina usando la manguera del jardín. Si la velocidad del flujo de agua de la manguera se mantiene constante y es de 5 metros cúbicos por minuto, ¿cuántas horas le llevaría a usted llenar su piscina circular hasta una profundidad de 4 metros?”

Este ítem fue el que presentó mayor dificultad para los estudiantes Humanistas, ya que solamente 6 casos lo respondieron en forma correcta. Los estudiantes señalaron tener una mala formación en geometría, contenido que catalogaron como difícil y débilmente logrado en el colegio. La principal dificultad fue, por una parte “no recordar la fórmula para calcular el área del círculo” (por ejemplo, caso 33), y por otra, errores en el “desarrollo de alguna etapa del algoritmo. Un ejemplo de ello fue el cálculo de volumen, que implicaba conocer la fórmula adecuada (Caso 21). Los estudiantes de Ingeniería, en cambio, tuvieron algunos errores menores de cálculos.

A continuación se presenta evidencia de respuestas correctas:

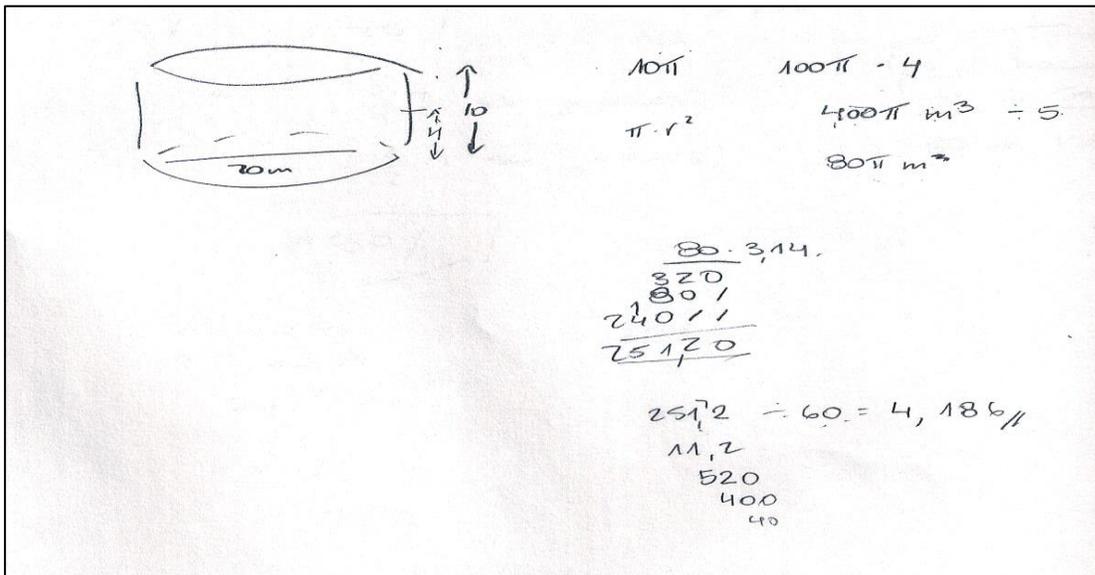


Figura 12. Horas para llenar la piscina (Estudiante Caso 60, Ingeniería)

En la figura 13 se evidencian errores de cálculo del ítem.

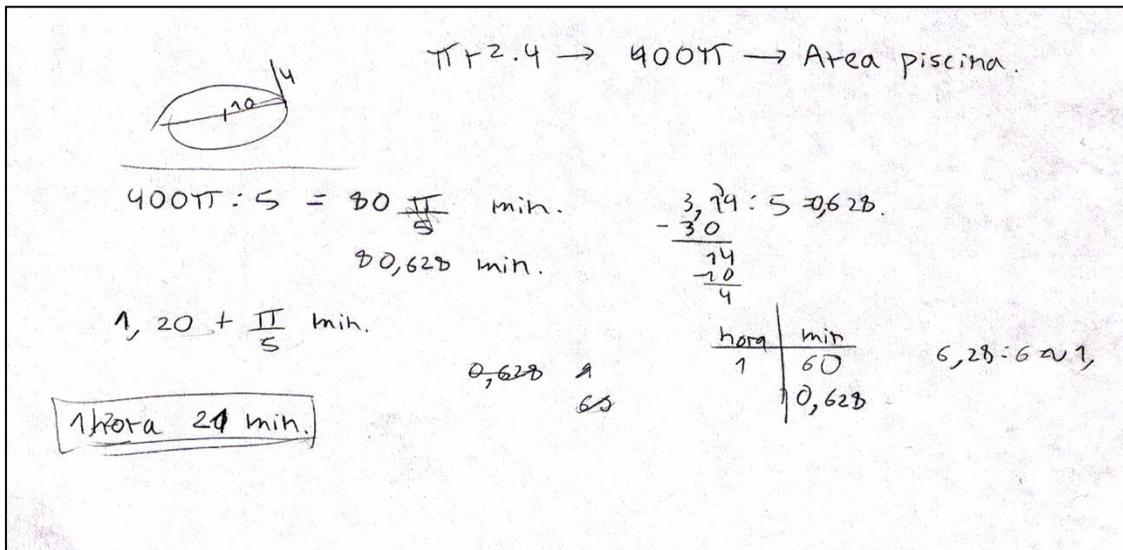


Figura 13. Error de cálculo (Estudiante Caso 38, Ingeniería)

Ítem 5 (Álgebra y Funciones).

Situación problemática: *En un sistema binominal la coalición A tiene un 50% de jóvenes entre sus militantes. La coalición B en cambio tiene un 25% de jóvenes. Si la coalición B es el doble de la coalición A, ¿qué porcentaje de jóvenes estima usted existen en ambas coaliciones?*

Al igual que en el ítem anterior, los estudiantes Humanistas presentaron mayores dificultades que los de Ingeniería para la resolución de este ítem. 12 estudiantes Humanistas lo respondieron en forma correcta, versus 24 de Ingeniería. Los principales errores se dieron al no entender el concepto de porcentaje y les resultó difícil establecer la ecuación, para luego operar con porcentajes.

De acuerdo a algunos estudiantes, este ítem requirió mayor capacidad de razonamiento que de cálculo. Utilizaron primero una imagen mental de la situación, usaron su intuición y, luego, plantearon la forma de resolución (caso 25, 33). En varios casos se realizó un esquema de proporciones que representara la situación problemática para llegar a su solución, como se aprecia en la figura 14.

Evidencia de resolución correcta se presenta a continuación:

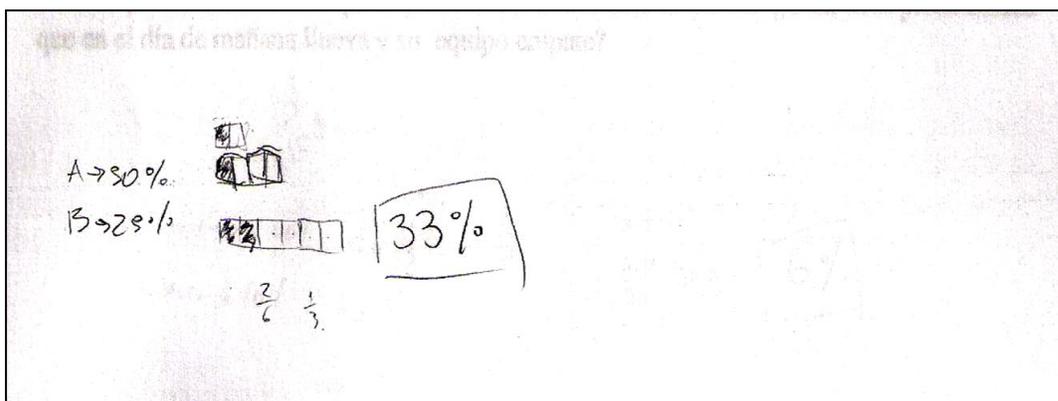


Figura 14. “Solución alternativa” (Estudiante Caso 14, Humanista)

En cuanto al planteamiento del ítem, la palabra “binominal” dificultó la resolución en dos casos (entrevista 26 y 41). Si bien la palabra formaba parte del contexto, hizo creer a los estudiantes Humanistas que el concepto era necesario para plantear la solución matemática.

En otros casos, se resolvió el ítem a través de la aproximación, al cambiar los conceptos abstractos por valores o números ficticios. Esta estrategia resultó ser efectiva para los estudiantes de Ingeniería, quienes pudieron operar de esta forma porque se presentaron pocos datos, de acuerdo a sus palabras. Los estudiantes reconocen que las letras permiten operar con mayor confianza, ya que constituyen una cantidad no determinada que puede utilizarse para todos los casos. Lo anterior no sucedería con los números, lo que haría más preciso el proceso de resolución mediante el uso de letras.

En esta situación matemática, se pudieron observar, las dificultades que tenían los estudiantes para utilizar distintas formas de representación matemática, para algunos el uso de letras parecía más rápido y preciso, sin embargo para otros, utilizar números para representar el ejercicio o esquemas, fue la única forma de aproximarse. Tal hecho indicaría, que para algunos estudiantes la forma de representación matemática se encuentra limitada a una sola, aquella que le permitió la comprensión en un momento dado (Dubal, 2004).

A continuación se presenta evidencia de algunos errores al enfrentar este ítem:

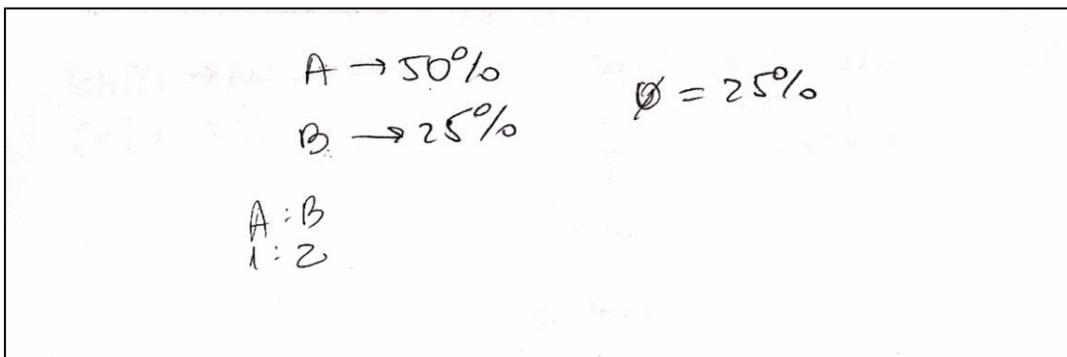


Figura 15. No entender el concepto de porcentaje (Estudiante Caso 13, Humanista)

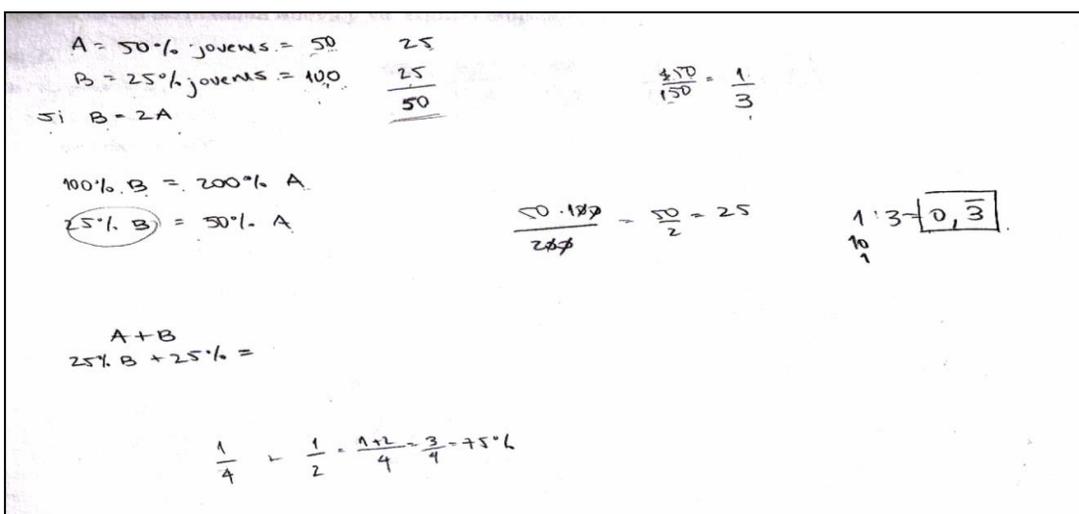


Figura 16. Dificultad para establecer la ecuación y operar con porcentajes (Estudiante Caso 41, Humanista)

1.5.2 Procedimientos de resolución y errores más frecuentes

Como se aprecia en la Tabla 8, el procedimiento de resolución más utilizado por los estudiantes es el cálculo. La única excepción se dio con el ítem 1, donde primó lo que se denominó como “el uso de la lógica”. Al mismo tiempo, se utilizaron esquemas o la visualización de una imagen o contexto de la situación. Lo enunciado guarda directa relación con las características de este ítem, capaz de propiciar vías de resolución alejadas del cálculo.

Otro aspecto importante de destacar fue el uso de la estimación, recurso importante de la cognición matemática, de gran utilidad para responder preguntas propias de la vida cotidiana (National Mathematics Advisory Panel, 2008). Si bien en este estudio los entrevistados utilizaron en ocasiones este recurso, es necesario indicar que se encuentra en estrecha relación con aspectos de la habilidad matemática, tales como la habilidad

aritmética, comprensión conceptual de los procedimientos de cálculo, entre otros. Lo señalado constituye un objetivo fundamental de la educación matemática contemporánea (National Mathematics Advisory Panel, 2008).

Tabla 8
Estrategias de resolución por área

Ítem	Contenido del ítem	Habilidad requerida para resolver el ítem	Estudiantes Ingeniería	f	Estudiantes Humanistas	F
1	Número y proporciones	Resolver problemas	Uso de la Lógica más que el cálculo	16	Uso de la lógica más que el cálculo	12
			Imaginar y recrear el contexto real de la situación	7	Imagen visual de la situación real	4
			Utilizar esquemas, modelar	16	Utilizar esquemas	12
2	Número y proporciones	Resolver problemas	Cálculos simples con matemática básica	3	Cálculos simples con matemática básica	1
			Regla de tres	25	Regla de tres	32
3	Estadística y probabilidades	Resolver problemas	Cálculo mental	2	Aproximación	1
			Plantear algoritmo y resolver la ecuación	27	Plantear algoritmo y resolver la ecuación	14
4	Formas y espacio	Resolver problemas	Comprobar el resultado	4		
			Cálculo del área y volumen	20	Cálculo del área y el volumen	6
			Utilizar esquema de la situación	12	Utilizar esquema de la situación	4
5	Álgebra y Funciones	Resolver problemas	Subrayar lo más importante	1		
			Sistema de ecuaciones	12	Sistema de ecuaciones	5
			Establecer relaciones y luego aproximación utilizando valores numéricos.	8	Establecer relaciones y luego aproximación utilizando valores numéricos.	6
			Esquema de proporciones	4	Esquema de proporciones	1
			Imagen mental	2		

f: cantidad de veces mencionada en la explicación de los estudiantes.

Dentro de los principales errores en la resolución de los ítems, se observan frecuentemente confusiones en el planteamiento del problema matemático y de cálculo, producto de un olvido o desconocimiento del procedimiento de solución por parte de los estudiantes Humanistas, versus ciertos errores de cálculo de los estudiantes de Ingeniería, tal como se aprecia en la Tabla 9.

Los errores de los estudiantes Humanistas se deben, por lo general, a una debilidad en el dominio de ciertos contenidos específicos, tales como geometría y porcentajes, y a las dificultades para aplicar álgebra en la resolución de problemas. En los estudiantes de Ingeniería se observan, en cambio, algunos errores en el cálculo de determinadas operatorias. Los estudiantes Humanistas, además, presentan una debilidad en el desarrollo del pensamiento matemático. Lo anterior se puede atribuir a una forma mecánica de resolver algoritmos o al no comprender en profundidad las lógicas que lo sustentan, lo que afecta la capacidad para aplicar el conocimiento en distintos contextos. Esto puede deberse tanto a dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático, como a la

enseñanza de la matemática escolar (Rico et al., 2000). Un ejemplo de ello consiste en el desarrollo de la habilidad de pensar siguiendo un razonamiento lógico, recurso importante para enfrentar la matemática que, no necesariamente se desarrolla en la escuela.

Tabla 9
Errores más frecuentes en la resolución, por área

Ítem	Contenido de ítem	Habilidad requerida para resolver el ítem	Estudiantes Ingeniería	f	Estudiantes Humanistas	F
1	Número y Proporciones	Resolver problemas	Error en el planteamiento del problema	0	Error en el planteamiento del problema	1
			Errores en el procedimiento de resolución para llegar al resultado (contar etapas,)	2	Errores en el procedimiento de resolución para llegar al resultado (contar etapas)	5
			Error en el procedimiento de resolución para llegar al resultado (confusión con el rol del jugador libre)	2	Error en el procedimiento de resolución para llegar al resultado (confusión con el rol del jugador libre)	0
			Error en el procedimiento de resolución para llegar al resultado (descontar el primer partido)	1	Error en el procedimiento de resolución para llegar al resultado (descontar el primer partido)	1
			No entendió lo que se le preguntaba, error de planteamiento matemático.	3	No entendió lo que se le preguntaba, error de planteamiento matemático.	6
2	Número y Proporciones	Resolver problemas	Planteamiento matemático	0	Planteamiento matemático	1
3	Estadística y Probabilidades	Resolver problemas	Planteamiento de los términos de la ecuación.	0	Planteamiento de los términos de la ecuación.	6
4	Formas y Espacio	Resolver problemas	Desconocimientos del procedimiento de resolución	0	Desconocimientos del procedimiento de resolución	7
			No recuerda la fórmula para calcular el área del círculo	1	No recuerda la fórmula para calcular el área del círculo	9
			Desconoce algoritmo de resolución	0	Desconoce algoritmo de resolución (sabe la fórmula)	2
			Confusión de conceptos (área y perímetro – confusión de esfera con cilindro – radio por diámetro)	1	Confusión de conceptos (área y perímetro – confusión de esfera con cilindro – radio por diámetro)	2
			Desconoce Fórmula y Algoritmo	0	Desconoce Fórmula y Algoritmo	3
5	Algebra y Funciones	Resolver problemas	Cálculo	4	Cálculo	1
			Desarrollo de alguna etapa del algoritmo (cálculo de volumen , tiempo de llenado)	1	Desarrollo de alguna etapa del algoritmo (cálculo de volumen, tiempo de llenado)	4
			No entiende el concepto de porcentaje	1	No entiende el concepto de porcentaje	9
			No entiende lo que se le pregunta	1	Error en establecer la ecuación	2
			Error en establecer la ecuación y en operar con porcentajes	1	Operar con porcentajes	3
			Error en establecer la ecuación y en operar con porcentajes	1	Error en establecer la ecuación y en operar con porcentajes	6
			Cálculo		Cálculo	1

Un aspecto relevante para este estudio es el valor que tuvo la explicación oral en el proceso de resolución de problemas en los estudiantes. En reiteradas ocasiones descubrieron sus propios errores y se rectificaron por el hecho de estar relatando en voz alta sus acciones y decisiones de resolución (Casos 2, 17, 19, 33, 42, 46, 50, 52, 56, 57). El aspecto señalado se enmarca en la capacidad de los sujetos para la auto-regulación o monitoreo del aprendizaje, como proceso metacognitivo (Garrett, Alman, Gardner & Born, 2007)

Durante la explicación de la resolución, tanto los estudiantes Humanistas como de Ingeniería mencionan un efecto “entrenamiento PSU” a la hora de enfrentar los ítems. Cuando los estudiantes reconocen un enunciado similar al de la Prueba de Selección Universitaria, sienten la confianza frente a cómo enfrentarlo. Sin embargo, el entrenamiento se tornaba en una dificultad cuando el ítem se distanciaba del modelo PSU y asume el formato de problema de la vida cotidiana (ejemplo el ítem 1). En este sentido, las posibilidades de encontrar un camino de solución y un resultado correcto se vieron disminuidas, al no contar con un repertorio mayor de respuestas. El fenómeno indicado sacó a relucir las imprecisiones y debilidades en el dominio de los contenidos y el desarrollo de las habilidades de resolución de problemas en los estudiantes de la muestra. Así como también, mostró el efecto del tipo de ítems en la resolución. Esto es cuando los problemas matemáticos no presentan o aparentan poseer una estructura matemática conocida, son los estudiantes quienes deben plantear o tratar de solucionar un problema introduciendo de forma satisfactoria la estructura matemática que corresponda (OCDE, 2006), lo que para algunos resulta una tarea de difícil solución.

Comprender las dificultades, patrones de error y obstáculos que presentan los estudiantes en el aprendizaje de la matemática, resulta relevante para la toma de decisiones de los profesores en el aula. Esto, con el objetivo de asegurar aprendizajes profundos y para el propio monitoreo de los aprendizajes de los estudiantes (Shepard, 2006; Rico et al., 2000). Variados son los errores en matemática que cometen los estudiantes, y estos pueden tener distintos orígenes, ya sea dificultades del propio sujeto, de su entorno, de los métodos de enseñanza, del currículum, entre otros. Lo cierto es, que los errores forman parte del proceso de construcción del conocimiento y constituyen tanto una oportunidad de aprendizaje como un motor de cambio (Luchini, Cuadrado & Tapia, 2006; Steuer, Rosentritt-Brunn & Dresel, 2013). Un entorno que no le permita a los estudiantes cometer errores, o un clima de aula percibido por estos como adverso al error, que no se encuentra al servicio del aprendizaje, la comprensión y el conocimiento, limita sus oportunidades de aprender (Stenberg & Grigorenko, 2003) existiendo un efecto directo en la adaptabilidad de los estudiantes a enfrentar sus errores, incluso por sobre su propio autoconcepto, motivación o las metas de aula establecidas (Steuer, Rosentritt-Brunn & Dresel, 2013).

SEGUNDA PARTE: PRESENTACIÓN DE LOS ESTUDIOS

En este apartado se presentarán los tres estudios mencionados en la metodología general, los cuales permitirán llegar a comprender la relación establecida por los estudiantes con la matemática a partir de su experiencia escolar. La descripción de los estudios considera sus respectivas particularidades metodológicas, así como la discusión de resultados con sus aportes a las áreas específicas del conocimiento a las que se vinculan.

CAPÍTULO 2

Estudio 1: Estrategias holística y analítica en la resolución de situaciones matemáticas

El propósito de este estudio es describir y comparar las estrategias holística y analítica utilizadas por estudiantes que inician la educación superior y que poseen distinto nivel de habilidad cuantitativa, al resolver situaciones matemáticas de la vida cotidiana.

2.1 Población y muestra

La población y muestra utilizada en este estudio corresponde a los 61 estudiantes de primer año de carreras Humanistas e Ingeniería entrevistados, cuya descripción se realizó en la metodología general de la investigación.

Los grupos están integrados por 34 estudiantes de carreras Humanistas y 27 estudiantes de Ingeniería.

2.2 Instrumentos de registro de observación

Se construyeron cuatro escalas, con diez ítems cada una: Escala Holística, Escala Analítica, Escala Holística-Analítica y Escala Analítica-Holística, con el objeto de registrar la selección y uso de estrategias cognitivas por parte de los estudiantes al enfrentar una situación matemática. Para la construcción de dichas escalas, se adoptó como supuesto que las estrategias no ocurrirían en forma pura en los sujetos, ya que pueden presentarse combinadas a partir del estímulo matemático utilizado para su activación (Luna-Blanco & Ruiz-Soler, 2001; Sergent & Bindra, 1981). El formato de las escalas se encuentra en el Anexo 7)

La validación de contenido de cada escala se realizó a partir del criterio de cinco jueces especialistas, en su mayoría psicólogos cognitivos que han tenido experiencia en el estudio, diseño o evaluación de indicadores asociados a este tipo de estrategias: cuatro docentes de la Escuela de Psicología de la Pontificia Universidad Católica de Chile y uno de ellos de la

Facultad de Educación de la misma institución. El procedimiento señalado permitió realizar importantes mejoras a cada escala, algunas correspondientes a ajustes menores, tales como redacción y precisión de lenguaje, y otras más significativas como la eliminación de nueve ítems. Estos últimos se reemplazaron con propuestas elaboradas por los propios especialistas. Sumado a ello, se pilotearon las escalas en dos casos de estudiantes con características similares a la muestra, quienes no fueron considerados en forma posterior. Lo anterior permitió ajustar los ítems de las escalas, tanto a nivel semántico, como en su precisión de sentido.

Los ítems construidos en cada escala debían contar con el acuerdo de, al menos, cuatro de los cinco jueces revisores, o tres de los cinco si el desacuerdo correspondía a cambios menores de redacción o precisión para ser considerados en su formato definitivo.

A posteriori, se realizó el estudio de confiabilidad de las Escalas por separado utilizando la técnica de análisis de Componentes Principales en la medida que las pruebas de esfericidad y el KMO lo permitieran. Tal como se aprecia en la Tabla 10, las Escalas Analítica y Analítica Holística fueron las que alcanzaron la mayor confiabilidad, seguida por la Escala Holística. Para el análisis de confiabilidad y los posteriores análisis del estudio, se eliminaron aquellos ítems con varianza 0.

Tabla 10
Resultados de Confiabilidad (α de Cronbach) por escala

Escalas	N° de Reactivos	α de Cronbach	N
Escala Holística	9	.686	61
Escala Analítica	9	.748	61
Escala Holística Analítica	8	.484	61
Escala Analítica Holística	8	.733	61

En cuanto a la Escala holística: el análisis de los supuestos arrojó un bajo KMO de 0.600. Sin embargo, la prueba de esfericidad fue significativa ($p= 0,000$; $X^2_{(36)}= 168,106$), por lo que se pudo realizar el análisis. Esta escala permitió observar dos componentes en su constructo (tablas 11 y 12) que cumplen con la regla de Kaiser y que, en conjunto, explican un 54,41% de varianza.

En la tabla 11 se puede observar que los elementos que conforman los componentes se agrupan en torno al procedimiento de resolución. Aquellos que presentan más peso factorial son: “No sigue claramente un orden o procedimiento metódico” y “Utiliza estrategias heurísticas para enfrentar la resolución del problema”. En cuanto al componente 2 (tabla

12), se caracteriza por la representación global del problema, tanto para plantear una idea, como en la detección de manera global de relaciones entre los componentes.

Ambos componentes presentan un peso relativamente similar, el componente 1 con un 28,71% de la varianza explicada y el componentes 2 con un 25,69%. Por lo mismo, podemos señalar que ambos se constituyen en sí mismos como ámbitos específicos de una aproximación holística, conforme al constructo.

Tabla 11

Análisis del componente 1 EH

Búsqueda de caminos alternativos a partir de la intuición.	Peso Factorial
No sigue claramente un orden o procedimiento metódico	0.832
Es intuitivo para llegar a la solución del problema, es decir, reconoce pistas para llegar a la solución.	0.779
Usa estrategias que conducen a resultados aproximados o estimados.	0.686
Utiliza estrategias heurísticas para enfrentar la resolución del problema, es decir, sigue un camino que no es lógico, y recurre a atajos que no necesariamente lo llevan a la solución correcta (pensamiento lateral).	0.823
Porcentaje de varianza común	28,71%

Tabla 12

Análisis del componente 2 EH

Representación global del problema	Peso Factorial
Plantea una idea global del problema, centra su atención en los estímulos como un todo, sin examinar las características una por una.	0.801
Detecta relaciones entre los elementos del problema a nivel global, lo que utiliza en su resolución.	0.753
Utiliza una imagen mental visual para representar el problema y enfrentar su resolución (se imagina el problema y parece que lo está mirando).	0.672
Utiliza dibujos o figuras para representar los conceptos involucrados en la situación problema.	0.587
Su respuesta es creativa y muestra flexibilidad y originalidad.	0.543
Porcentaje de varianza común	25,69%

Respecto de la Escala Analítica el análisis de los supuestos arrojó un buen KMO de 0.697 y una prueba de esfericidad significativa ($p= 0,000$; $X^2_{(45)} = 229,421$), lo que permitió realizar el análisis. La escala presenta un componente predominantemente analítico (Tabla 13) y un segundo componente, más bien indeterminado, que está focalizado en el cálculo (no se presenta tabla). Ambos cumplen con la regla de Kaiser y en conjunto explican un 52,41% de varianza.

En este componente analítico se destacan los siguientes elementos: “*Usa fórmulas y procedimientos matemáticos establecidos*”, “*Utiliza un procedimiento sistemático en la resolución del problema*” y “*Resuelve el problema atendiendo a los elementos de la*

situación y las relaciones entre ellos”. Los enunciados son característicos de un abordaje analítico en la resolución de problemas, tal como se afirma en la evidencia teórica (Cornejo et al., 2007; Grossmann & Na, 2014; Yagoubi, Lemaire y Beson, 2003).

Tabla 13
Análisis de componente Analítico

Analítico	Peso Factorial
Analiza los diferentes componentes de la situación problema mediante un proceso exhaustivo.	0,668
Usa fórmulas y procedimientos matemáticos establecidos.	0.818
Busca una respuesta determinada, encontrando una única solución a los problemas.	0.499
Utiliza un orden temporal de los datos en el proceso de solución del problema.	0.692
Utiliza un procedimiento sistemático en la resolución del problema.	0.724
Usa estrategias y procedimientos que aplicados correctamente conducen a un resultado preciso.	0.762
Resuelve el problema atendiendo a los elementos de la situación y las relaciones entre ellos.	0.479
Porcentaje de varianza común	38,49%

Las escalas combinadas, ya sean Holística-Analítica o Analítica-Holística, no presentaron suficiente varianza, por lo que no se realizó el análisis de Componentes Principales de estas por separado. No obstante, el análisis exploratorio de Componentes Principales de las Escalas Holística, Analítica y Holística Analítica juntas (la cuarta escala no presentó varianza suficiente para ser incorporada), permitió interpretar la existencia de dos componentes que explicarían un 43,174% de la varianza (KMO bueno de 0,707, y una prueba de esfericidad significativa a 0,000; $X^2_{(231)}=785,693$). El primer componente explica un 25,87% de la varianza común, y se presenta como un componente bipolar: en un extremo se ubica la escala analítica y en el extremo opuesto la escala holística. Si se considera que los pesos negativos corresponden a la escala holística y los positivos a la analítica, el componente se puede interpretar como un factor bipolar “Analítico-Holístico” (tabla 14). Esto reflejaría que, cuando un sujeto elige una estrategia analítica, tiende a utilizar menos la estrategia holística como forma de abordar una situación matemática del estudio. El análisis de correlación entre las escalas corroboró la relación inversa de la misma ($r = -,448$; $p < 0,000$).

Tabla 14

Análisis del componente bipolar

Analítico-Holístico	Peso Factorial
Analiza los diferentes componentes de la situación problema utilizando un proceso exhaustivo.	0.709
Usa fórmulas y procedimientos matemáticos establecidos.	0.819
Busca una respuesta determinada, encontrando una única solución a los problemas.	0.425
Utiliza un orden temporal de los datos en el proceso de solución del problema.	0.758
Utiliza un procedimiento sistemático en la resolución del problema.	0.656
Usa estrategias y procedimientos que, aplicados correctamente, conducen a un resultado preciso.	0.628
Resuelve el problema atendiendo a los elementos de la situación y las relaciones entre ellos.	0.410
No sigue claramente un orden o procedimiento metódico.	- 0.755
Es intuitivo para llegar a la solución del problema, es decir, reconoce pistas para llegar a la solución.	-0.772
Usa estrategias que conducen a resultados aproximados o estimados.	-0.593
Utiliza estrategias heurísticas para enfrentar la resolución del problema, es decir sigue un camino que no es lógico, y recurre a atajos que no necesariamente lo llevan a la solución correcta (pensamiento lateral).	-0.755
Utiliza la aproximación y el cálculo matemático como estrategias de resolución en forma conjunta, partiendo por la aproximación	-0.546
Porcentaje de varianza común.	25,87%

El segundo componente (Tabla 15) explica un 17,30% adicional de la varianza común y se puede interpretar como un componente “preferentemente Holístico”, ya que considera ítems de la Escala Holística y de la Escala Holística-Analítica. Al estimar el Alfa de Cronbach de esta escala, se obtuvo un valor de 0,726. Se evidencia una confiabilidad ligeramente mayor a la observada en las escalas por separado, lo que haría pensar que en conjunto constituyen una misma escala.

La evidencia teórica plantea que lo anterior se debe a que la elección de los estudiantes por la estrategia no sería pura, y más bien se tiende a marcar una preferencia dependiendo del tipo o naturaleza del estímulo (Ben Zur, 1998; Cornejo et al., 2009; Estévez, 2002; Omrod, 2005; Ward & Scott, 1987). En este sentido, la medición no consideró que los sujetos fuesen representados únicamente en una sola escala, ya que podían clasificarse en varias escalas a la vez (Tablas del análisis de componentes principales en Anexo 8).

Tabla 15

Análisis de componente con escalas integradas

Holística-Holística/analítica	Peso Factorial
Plantea una idea global del problema. Centra su atención en los estímulos como un todo, sin examinar las características una por una.	0.892
Detecta relaciones entre los elementos del problema a nivel global, lo que utiliza en su resolución.	0.670
Utiliza una imagen mental visual para representar el problema y así enfrentar su resolución (se imagina el problema y parece que lo está mirando).	0.629
Utiliza dibujos o figuras para representar los conceptos involucrados en la situación problema.	0.481
Su respuesta es creativa mostrando flexibilidad y originalidad	0.485
Inicialmente focaliza la atención en el contexto global del problema y, posteriormente, en el dato particular.	0.612
Utiliza una imagen visual para la comprensión y representación del problema y, posteriormente, realiza cálculos y/o operatoria para la solución.	0.285
Inicialmente aborda el problema en forma intuitiva y posteriormente utiliza razonamiento lineal para la resolución.	0.301
Representa el problema global con figuras o formas para luego realizar cálculos a partir de estas mismas.	0.295
Porcentaje de varianza común	17,302%

En síntesis, dado los análisis realizados se puede afirmar que de las cuatro escalas construidas solamente dos de ellas se relacionan directamente con la elección de los estudiantes, las escalas holística y analíticas, lo que daría cuenta de un modelo con dos dimensiones que pueden comportarse de modo independiente o combinado. Lo que debe ser considerado en futuras investigaciones respecto del uso de estas estrategias.

2.3. Procedimiento de registro de información

El desarrollo de este estudio consideró la información obtenida en las entrevistas cognitivas y el setting descrito con anterioridad en la metodología general (1.4.3). En lo específico, se utilizaron las explicaciones en voz alta que hicieron los estudiantes durante el proceso de resolución de las situaciones matemáticas.

2.4 Procedimiento y Técnica de análisis de datos.

Para llevar a cabo el análisis de las entrevistas se seleccionaron dos correctores con experiencia en análisis de videos en contextos de investigación. A ellos se les orientó y entrenó respecto del tipo de análisis que debían hacer y el uso de las escalas respectivas, monitoreando en forma permanente la calibración de sus criterios de análisis. Los correctores no tuvieron conocimiento inicial de la carrera de pertenencia de los estudiantes, lo que buscó asegurar la validez del diseño utilizado.

El proceso de análisis consideró, en un primer momento, un ejercicio de prueba y calibración con la entrega de un CD a los correctores, donde se encontraban grabadas dos entrevistas. En conjunto con la tesista, los correctores observaron el primer video sin hacer anotación alguna. Posteriormente estos debieron registrar la codificación en las escalas respectivas, en función de la explicación en voz alta dada por los estudiantes a partir del problema matemático. Con este trabajo se buscaba llegar a categorías consistentes sobre el desempeño de los sujetos.

El registro se aplicó en cada escala, partiendo por la Escala Holística, seguida por la Escala Analítica, la Escala Holística Analítica y la Analítica Holística. Una vez terminado dicho proceso de registro, los correctores compartieron sus resultados y desarrollaron un diálogo que les permitió tomar acuerdos y ajustar criterios para la emisión de sus juicios. El procedimiento fue observado por la tesista, quien únicamente respondió preguntas relativas al sentido de ciertos ítems de la escala, como ayuda para el registro y calibración de los correctores. Luego, con el objetivo de no contaminar el proceso, se entregó de forma aleatoria los videos a los correctores. Se siguió una secuencia de 10 videos con revisión individual de ellos y luego dos videos con revisión grupal como medio de calibración, siguiendo la lógica descrita con anterioridad, hasta finalizar el proceso de las 61 entrevistas. Cuando algún corrector tenía inseguridad para clasificar a los estudiantes en algún ítem, se revisaba en conjunto con el otro corrector y la tesista, quien actuaba como juez para dirimir algún desacuerdo. El proceso completo de análisis se realizó durante 3 semanas.

Cabe destacar que con el objeto de realizar los análisis en el menor tiempo posible los correctores no revisaron todos los videos individualmente. Es así que el corrector 1 analizó 28 videos por sí solo, y el corrector 2 revisó 21 videos. Adicionalmente, compartieron la revisión de 12 videos⁶ los que permitieron dar validez al proceso. La consistencia de los correctores en los videos analizados en forma conjunta fue de un 91% (ver tabla n°16).

⁶ En suma el corrector 1 revisó 40 videos (28 en forma individual y 12 colectivos) y el corrector 2 revisó 33 videos (21 videos en forma individual y 12 colectivos).

Tabla 16
Análisis de consistencia de los correctores

ENTREVISTA	EH	EA	EHA	EAH	Promedio
1	0,98	0,98	1	1	0,99
2	0,9	0,92	0,92	0,4	0,785
3	0,96	0,98	0,98	1	0,98
4	0,78	0,84	0,86	1	0,87
5	0,92	0,94	1	1	0,965
6	0,76	0,84	0,88	0,9	0,845
7	0,96	0,98	0,96	1	0,975
10	0,8	0,78	0,92	0,88	0,845
11	0,8	0,84	0,92	0,94	0,875
34	1	1	1	1	1
47	0,98	0,96	1	1	0,985
48	0,7	0,7	0,92	1	0,83
					0,91

Una vez que se encontraron analizados todos los videos en cada escala, se procedieron a registrar los resultados en una planilla Excel, y después se exportaron los datos al programa estadístico SPSS versión 15.0 (Statistical Package for the Social Sciences), con el objeto de realizar los análisis estadísticos descriptivos, chi cuadrado, comparación de grupos a nivel cualitativo y correlaciones bivariadas para categorías cualitativas. Algunos datos demográficos se cruzaron también con estos análisis.

2.5. Análisis de resultados del estudio 1

En cuanto a las estrategias holísticas y analíticas utilizadas por la muestra de estudiantes entrevistados y las diferencias o semejanzas en el tipo de estrategias que utilizan cuando resuelven situaciones matemáticas (objetivo específico i), a continuación se presentan los resultados obtenidos.

El estudio 1 permitió constatar que la estrategia analítica fue la más utilizada por los estudiantes entrevistados para resolver las diversas situaciones matemáticas ($x=35,61$; $DS=3,818$). La distribución de los datos reveló que éstos se encontraron muy próximos a la media, entre 31,79 y 39,42 puntos, a una unidad de desviación. El valor máximo logrado en la escala se encuentra a casi dos unidades de desviación (tabla 17).

En el caso de la escala holística, la dispersión de los datos es levemente mayor que la de la escala analítica, encontrándose la mayoría de estos entre 2,11 y 9,22 puntos a una unidad de desviación estándar de la media. El valor máximo obtenido en esta escala se encuentra a tres y media unidades de desviación estándar.

Tabla 17
Descriptivos de las Estrategias Cognitivas

		Escala Holística	Escala Analítica	Escala Holística Analítica	Escala Analítica Holística
N	Válidos	61	61	61	61
	Perdidos	0	0	0	0
Media		5,67	35,61	1,62	,52
Mediana		5,00	36,00	1,00	,00
Moda		5	36 ^a	0	0
Desv. típ.		3,558	3,818	1,593	1,192
Mínimo		0	24	0	0
Máximo		18	44	8	5

La selección de la estrategia analítica por parte de los estudiantes reflejó un modo de pensamiento donde el foco estaría puesto en las partes más que en el todo, secuencial, sigue un camino lógico. En esta estrategia, los estudiantes reconocieron preferentemente un camino posible de solución. De no ser encontrado, se truncaban las posibilidades de la mayoría de seguir un camino de solución posterior, tendiendo a abandonar la tarea (Choi, Koo & Choi, 2007; Cornejo et al., 2007). Solo en pocos casos los estudiantes volvieron a intentar una solución, y cambiaron de estrategia analítica a holística.

Tal decisión se apoyaría en que, para enfrentar una situación matemática es recomendable seguir una estrategia que, por una parte, favorezca el cálculo, la precisión, la representación formal externa y la explicitación de detalles (Borromeo, 2012; Cornejo, et al, 2007; Yagoubi, Lemaire y Besson, 2003); y por otra, sea un modo conocido por ellos, al que se han enfrentado en múltiples etapas de su vida escolar (Ormrod, 2005). Esta situación se pudo reconocer en los propios desempeños de los estudiantes, ya que el problema matemático de menor complejidad para la mayoría fue aquel que estimuló en mayor medida el uso de una estrategia analítica de solución. Dentro de las posibles razones, se encuentra la operatoria de cálculo exigida por el ítem y la familiaridad en la forma de resolución (Choi et al., 2007), caracterizada por los estudiantes como “estilo PSU”. En el mismo sentido, la situación considerada de mayor complejidad implicaba un dominio de contenido específico, geometría, para su resolución y mayor habilidad para efectuar el planteamiento matemático basado en el uso de fórmulas. Sin éstas últimas, era imposible resolver correctamente la situación.

Al comparar el uso de Estrategia Analítica por áreas a las que pertenecen los estudiantes, se pudo constatar que existieron diferencias estadísticamente significativas a favor del área de Ingeniería ($t_{(59)}=3,243$; $p=.002$), asumiendo varianzas iguales ($F_{(59)}=.777$; $p \geq .05$). Es así que, si bien la mayoría de los estudiantes prefirieron la estrategia analítica como un modo para enfrentar las situaciones matemáticas, serían los estudiantes de Ingeniería los que presentaron mayor preferencia por ésta.

Se estableció, además, una correlación directa y media entre Estrategia Analítica y desempeño de los estudiantes ($r = .374$; $p = .003$). Esto implica que, a un mayor uso por parte de los estudiantes de la Estrategia Analítica, mejores resultados obtuvieron. Con el resto de las escalas no existe correlación, exceptuando la Escala Analítica Holística, con la cual se da una correlación inversa y baja ($r = -.263$; $p = .041$). Sin embargo, tal evidencia debe ser analizada considerando el contexto de la muestra del estudio, en la cual los estudiantes de Ingeniería entrevistados en su mayoría son los que tienen mayores habilidades matemáticas (por ejemplo: PSU sobre 700). Además, serían los que utilizaron en mayor medida la estrategia analítica, a pesar de que ambos grupos fueron usuarios de la misma, lo que ameritaría seguir estudiando estas relaciones.

A partir de lo expuesto, se puede señalar que la propia naturaleza de la matemática, el contenido disciplinar y sus reglas estimularon el uso de Estrategias Analíticas, por lo que se constituye en un desafío mayor el estímulo de Estrategias Holísticas. Sumado a esto, existiría un “efecto entrenamiento”, que llevaría a los estudiantes a utilizar patrones conocidos de resolución de modo mecánico y limitaría el uso de variadas estrategias. Según De la Barrera (2008) el uso de la memoria y la valoración de la retención más que la comprensión serían propios de estudiantes que eligen una Estrategia Analítica. No obstante, en la presente investigación la caracterización previa sucede solamente cuando el desempeño en el test se encuentra disminuido.

Como ya se indicó, el ítem 2 fue aquel que estimuló mayor uso de estrategia analítica y se distinguió por presentar una situación de cálculo directo, de fácil operatoria, lineal y, según los mismos estudiantes, de resolución mecánica denominada como “estilo PSU”. De acuerdo a la teoría, el uso de la estrategia analítica trae consigo el uso de patrones conocidos de resolución, que siguen una determinada ruta o secuencia de datos (Clariana, 1993; Choi et al., 2007; Cornejo et al., 2007). Asimismo, el ítem 3 presentó características parecidas al ítem 2, por la familiaridad con el procedimiento, por el contenido y las propias características del ítem en cuanto a presentarse como un problema de cálculo matemático (Anexo 8).

Los estudiantes señalaron lo siguiente:

“me gustan las razones y proporciones, lo importante que los elementos estén donde tienen que estar” (caso 23, Humanista)

“sólo hay que saber utilizar la regla de tres para sacar el porcentaje” (caso 10, Humanista)

“seguir un procedimiento sistemático es más seguro” (caso 24, Humanista)

“la lógica se usa en el sentido del razonamiento, como recurso ante la falta de memoria”; “la lógica sirve para traducir la pregunta en números” (caso 29, Ingeniería)

Los ítems 3 y 4, en tanto, fueron los que estimularon en mayor medida a los estudiantes de Ingeniería a usar la comprobación como un medio para estar seguros de los resultados, a diferencia de los humanistas. Detrás de esta acción, se apreció una búsqueda por la precisión y la explicitación de detalles en las respuestas, lo que denota una Estrategia Analítica para resolver problemas (Radford & André, 2009; Yagoubi et al., 2003). En opinión de los estudiantes, cuando los ítems implicaban cálculo se veían estimulados a comprobar la secuencia de pasos utilizados para obtener el resultado, llegando, en ocasiones, a repetir mentalmente el procedimiento realizado.

Se destaca que la comprobación sería una característica de los estudiantes eficaces, quienes hacen uso de ella de forma periódica. Además, estos estudiantes comprenden y recuerdan lo escuchado en clases y toman medidas para remediar las dificultades de comprensión, lo que resulta consistente con el nivel de habilidad de los estudiantes de Ingeniería participantes de este estudio. No obstante, muchos estudiantes no controlan adecuadamente su comprensión, e ignoran el conocimiento que saben y no saben. Incluso, pueden creer que entienden un aspecto que, en realidad, han entendido mal, por lo que se dice que tienen la “ilusión de saber”. Los estudiantes previamente caracterizados tienden a dejar de estudiar muy pronto el material de clase y se sorprenden cuando los resultados en los exámenes son bajos (Hacker, Bol & Keener, 2008).

Un aspecto importante de reconocer consiste en el interés de algunos estudiantes de Ingeniería por resolver situaciones matemáticas desafiantes, que los hagan pensar (ejemplos: caso 27, 35, 38). De hecho, la teoría indica que la capacidad de reflexión y motivación por tareas intelectuales de mayor dificultad, además de altos puntajes en los test, son características de quienes utilizan la Estrategia Analítica (Clariana, 1993). Tal observación haría pensar que existen diferencias por área entre los estudiantes que eligen una Estrategia Analítica de resolución, aspecto que será retomado más adelante.

Como se ha señalado con anterioridad, la preferencia por una estrategia u otra depende del tipo y naturaleza del estímulo o tarea a enfrentar (Ben Zur, 1998; Cornejo, et al., 2007; 2009; Estévez, 2002; Sergent & Bindra, 1981; Ward & Scott, 1987), ya que ambas estrategias coexisten en el individuo (Nisbett et al., 2001; Ormrod, 2005). En este sentido, la situación que estimuló el uso de Estrategias Holísticas, fue aquella cuyo enunciado daba al estudiante un contexto familiar, propio de su vida cotidiana (por ejemplo: el deporte), con datos que invitaban a la representación pictórica para reflejar lo que se imaginaban internamente (Borromeo, 2012), lo que permitió utilizar un procesamiento perceptivo espacial para encontrar la solución (De la Barrera, 2008; Choi et al., 2007, Nisbett et al.,

2001). En general, los estudiantes usaron escasamente la Estrategia Holística, ya que solo se observaron en 4 casos.

Un ejemplo de esta situación correspondió a un estudiante de Ingeniería (caso 53), quien presentó el puntaje más alto en la Escala Holística para los ítems 1 (9 puntos de 10) y 5 (8 puntos de 10), y puntajes muy bajos en los ítems 2, 3 y 4, ya que recurrió a procedimientos propios de la escala analítica. En el ítem 1, el estudiante enfrentó la situación poniendo foco en el todo más que en las partes, y visualizó un partido de tenis y sus jugadores en la vida real (Borromeo, 2012). El participante dibuja un esquema del partido, para luego “ingeniárselas” para que el jugador realizara la mínima cantidad de partidos. Asimismo, en el ítem 5 realiza dos esquemas referidos a proporciones para llegar a la respuesta correcta, sin hacer cálculos matemáticos. El estudiante visualiza el todo mediante un procesamiento perceptivo-espacial que le facilita encontrar la solución (Choi et al., 2007; Nisbett et al., 2001).

El ítem 1 estimuló en mayor medida el uso de la Estrategia Holística en los estudiantes entrevistados, ya que presentaba una situación cotidiana vivida por ellos (Anexo 8). Al resolverlo, los estudiantes señalaban no tener la necesidad de utilizar “matemática” para su resolución, es decir, cálculos (OCDE, 2006). Al contrario, recurrían a la “lógica” entendida como un modo de pensar o un esquema mental. Esta afirmación pondría a la matemática, desde la perspectiva de los estudiantes, en el registro de la operatoria, el uso de la memoria, la costumbre, lo mecánico, y se encontraría menos conectada con procesos de pensamiento que participan en el cálculo y la matemática en general. Tal concepción reflejaría una distancia con la visión de la matemática para la comprensión (Corbalán, 1997), que implica comprender los objetos y relaciones para ponerlos a disposición de la comprensión del mundo y de su propia experiencia como sujeto activo en la sociedad, dándole sentido a su aprendizaje (Cole, 1999; National Research Council 2013; Nesher, 2000; OCDE, 2006, 2012; Paulos, 1993; Pecharromán, 2014; Stewart, 2009; UNESCO, 2009).

A continuación se muestran declaraciones de los estudiantes que revelan lo señalado con anterioridad:

*“Usé lógica, la matemática la asocio al cálculo y al número. Lo asocié a un torneo”
(Caso 53, Ingeniería)*

“No usé matemática, sino que más análisis” (Caso 52, Humanista)

“No utilicé formulas ni matemática, sino un esquema mental, lógica” (caso 14, Humanista)

“No usé mucha matemática, sino que usé esquemas, experiencia previa en campeonatos parecidos” (caso 54, Ingeniería)

“Pensé la situación real de cómo pasan las cosas en el tenis y esto me ayudó a resolver” (caso 2, Humanista)

“Utilicé un esquema de razonamiento porque no sabía cómo usar la matemática, o fórmulas” (caso 57, Humanista).

El segundo ítem que estimuló el uso de la Estrategia Holística fue el 4, relacionado a formas y espacios. En este caso se observó que, cuando en algunos estudiantes hacían uso de la Estrategia Analítica y ésta no les permitía encontrar la solución, procedían a cambiar de estrategia empleando la Holística (Anexo 8).

Según los autores, un aspecto característico del uso de la estrategia holística es la intuición (Bergson, 1966; Choi, Koo & Choi, 2007; Nisbett, Peng, Choi & Norenzayan, 2001), elemento recurrente en las dos situaciones del estudio en las que estudiantes fueron estimulados a utilizar esta estrategia. En el ítem 4, sin embargo, se observó un tipo de intuición que denominamos “por desconocimiento”. Algunos participantes analizaron el ítem en forma global y lo conectaron a un objeto de la vida real como una piscina, pero al desconocer la forma de resolución, no lograron llegar a un planteamiento matemático correcto.

Al igual como lo plantea la literatura especializada (National Mathematics Advisory Panel, 2008), se observó que quienes presentaron un mejor desempeño en las situaciones matemáticas fueron aquellos que buscaron distintos caminos de solución, operar con la intuición de modo correcto, elegir una determinada estrategia para resolver con más rapidez, motivación o eficiencia (Bruner, 1987). Por el contrario, quienes presentaron un débil desempeño en el test, prefirieron seguir un camino tradicional, focalizándose en las partes más que en el todo y siguiendo una lógica lineal de resolución. De esta manera, en caso de no encontrar el camino para resolver la situación matemática, serían incapaces de indagar otras formas o cambiar la estrategia utilizada. Los primeros tendrían mayor disposición a resolver tareas desafiantes que los segundos. Queda la interrogante sobre si es necesario tener un cierto nivel de dominio o habilidad matemática para elegir la estrategia holística como forma de procesamiento, a partir de una situación matemática que estimule tal estrategia.

Es necesario recordar que la Escala Analítica correlacionó en forma inversa y estadísticamente significativa con la Escala Holística ($r = -.448$; $p < 0,000$), lo que implica que si un estudiante optó por emplear preferentemente la Estrategia Analítica para resolver los problemas, usaría en menor medida la Estrategia Holística. A diferencia de lo esperado según la evidencia en investigación (Luna & Ruiz, 2001), los estudiantes mostraron un modo determinante en su elección y no uno combinado. La selección de estrategia se expresó, en su mayoría, como una categoría de tipo analítico-no holístico, y en pocos casos a la inversa (Nisbett et al., 2001). Lo anterior podría explicarse por variadas razones, por

una parte, las características de las situaciones matemáticas presentadas, en tanto los enunciados de las mismas podrían haber estimulado el uso de una Estrategia Analítica más que Holística (Yagoubi et al., 2003). Por otra parte, el setting de la entrevista cognitiva, se encontraba enmarcado en un contexto formal parecido al escolar, lo que podría haber orientado a los estudiantes a seguir este patrón. Además, hay factores que merecen ser tomados en consideración, como la orientación escolar actual acerca de la resolución de problemas, la que suele encontrarse focalizada en aplicaciones mecánicas (Espinoza, Barbé & Gálvez, 2009) y el entrenamiento de los estudiantes para responder de una forma determinada, sin dar lugar a caminos alternativos (Gálvez et al., 2010) lo que aleja a los estudiantes de la posibilidad de utilizar una estrategia holística.

Se torna necesario fomentar el uso de Estrategias Holísticas y Analíticas en conjunto a lo largo del proceso de enseñanza-aprendizaje, producto del énfasis otorgado en muchas escuelas al uso de Estrategias Analíticas. El foco suele encontrarse en el cálculo numérico y en el desarrollo de un pensamiento racional que tiene características determinadas: se estructura de forma lineal, sigue una secuencia de datos, posee determinado orden temporal y pone el énfasis en las partes más que en el todo.

Según las investigaciones en el área, la Estrategia Holística es relevante en el aprendizaje de la matemática escolar, especialmente para la enseñanza y aprendizaje de la geometría. El uso de la estrategia tiene la ventaja de favorecer el procesamiento perceptivo-espacial, puesto que posibilita que los estudiantes observen fenómenos con movimiento. Además, favorece la creatividad, la intuición en la resolución de problemas (Choi, Koo & Choi, 2007; Nisbett, Peng, Choi & Norenzayan, 2001) y el uso de la imaginación interna. Dicha imaginación realiza fuertes asociaciones con situaciones vividas (Borromeo, 2012; Grossmann & Na, 2014) lo que, ciertamente, favorece el aprendizaje contextualizado, necesario para dar sentido al aprendizaje de la matemática.

De este modo, se propone seguir desarrollando estudios y realizar intervenciones en escenarios auténticos, donde se levanten claves para el desarrollo de esta estrategia en la escuela. Sumado a esto, se propone estudiar su desarrollo en educación superior, espacio en el que la combinación del procesamiento holístico con el analítico, podría favorecer el aprendizaje de competencias profesionales de alto nivel cognitivo, como ya lo han demostrado diversos estudios en el área (Choi, Koo & Choi, 2007; Radfor & André, 2009; Rodríguez & Ricardo, 2007).

CAPÍTULO 3

Estudio 2: Gestualidad y resolución de problemas matemáticos en estudiantes de educación superior

El Estudio 2 buscó describir y comparar la gestualidad expresada por una muestra de estudiantes que inician la educación superior y que poseen distintos niveles de habilidad cuantitativa, al resolver situaciones matemáticas de la vida cotidiana.

El estudio asume que para entender la relación corporeizada establecida por los estudiantes no basta con el estudio de estrategias cognitivas que se encuentran ancladas en una lógica de procesamiento de la información, visión con el sesgo de entender el conocimiento como algo dado de antemano (Dreyfus & Dreyfus, 1988; Varela, 2000). Al contrario, una perspectiva desde la relación corporeizada requiere articular el estudio de estrategias con el análisis de gestos, debido a que la mente y sus procesos son moldeados por la experiencia corporal que le da significado (Lakoff & Johnson, 1999). Los gestos constituyen un elemento central del desarrollo humano y es reconocida su relación con el pensamiento y las habilidades cognitivas (Bernardis & Gentilucci, 2006; Cornejo et al., 2009; Kendon, 2004; McNeill, 1992; Roth, 2001)

3.1. Población y muestra

La población y muestra utilizada en este estudio fue la misma considerada en el estudio anterior (1), es decir, 61 estudiantes de primer año de carreras Humanistas e Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica de Chile en el año 2010. La distribución corresponde a 34 estudiantes de carreras Humanistas y 27 de Ingeniería. Todos los estudiantes se encontraban por primera vez en sus respectivas carreras y egresados del sistema escolar el año anterior a la recogida de los datos.

3.2. Instrumento de registro de información

Para abordar los objetivos de este estudio, se utilizó la información extraída de la entrevista cognitiva aplicada a cada estudiante y descrita con anterioridad en la metodología general (1.4.3). Se registró la gestualidad expresada por cada estudiante al explicar oralmente la resolución de situaciones matemáticas, a partir de una rúbrica con 4 categorías: **Postura Corporal, Movimiento de manos, Características del discurso y Seguridad** (en Anexo 9).

Las categorías indicadas en la rúbrica se construyeron de modo inductivo a partir del análisis interpretativo a seis estudiantes de la muestra, a partir de los videos obtenidos.

Estos casos fueron seleccionados de acuerdo a sus puntajes factoriales estandarizados (Componente 1: Analítico-Holístico), resultando ser quienes expresaron en mayor medida el uso de Estrategia Holística (Casos 48, 53 y 14) y Analítica (Casos 61, 47 y 41).

Se registró lo observado mediante videos que posteriormente fueron analizados mediante categorías generales, como gestualidad de manos y postura corporal, entre otras. Dichas categorías fueron destacadas por la literatura sobre gestualidad. Asimismo, emergieron otras categorías y subcategorías mediante los registros grabados, las que finalmente formaron parte de la rúbrica analítica.

En la mayoría de los casos los gestos están acompañados por el lenguaje verbal y ambos, frecuentemente, se encuentran entrelazados en una estructura común de significados (Camaioni et al., 2003; McNeill, 1992). Por este motivo, la rúbrica no consideró únicamente lo gestual e incorporó dos dimensiones: la forma en que se expresó la explicación de los estudiantes en el discurso y el uso del lenguaje matemático, con el objeto de explorar relaciones entre la gestualidad y este lenguaje disciplinar específico. Se definieron categorías y sub categorías para cada uno de los aspectos de la rúbrica, lo que permitió dar mayor riqueza a la descripción de la gestualidad de los estudiantes entrevistados (Ver Tabla 18).

La rúbrica se validó a nivel de contenido con tres jueces expertos, entre los cuales se encontraban dos especialista en evaluación y construcción de rúbricas y un especialista en análisis gestual. El proceso señalado permitió ajustar tanto la redacción, como la precisión de cada categoría, ya que se esperaba que cada criterio fuese excluyente entre sí y suficientemente específico para que los correctores pudiesen detectarlo sin dificultad en cada video. Posteriormente, se piloteó la rúbrica con cuatro casos de estudio, proceso que se realizó con el apoyo de dos correctores entrenados y con experiencia en análisis gestual, permitiendo realizar un nuevo ajuste de redacción y precisión de la misma.

Tabla 18

Categorías de la Rúbrica para el Análisis Gestual

Categoría Principal	Sub Categoría
Postura corporal	Tono corporal Conexión personal
Movimiento de las Manos	Tipos de Gestos Uso de las manos
Características del discurso	Velocidad y Tono Claridad de la explicación y precisión en el lenguaje Uso de Lenguaje Matemático
Seguridad en la resolución de la situación matemática.	Seguridad en el procedimiento Seguridad en el resultado Seguridad en el procedimiento y el resultado

La confiabilidad de la versión final de la rúbrica fue de $\alpha = .635$ (con ocho elementos), lo que hace referencia a una adecuada consistencia interna.

Con el objetivo de contar con mayor validez en el proceso, una vez aplicada la rúbrica se realizó el análisis de componentes principales (KMO de 0,619; prueba de esfericidad significativa, $\chi^2_{(21)}=105,473$; $p=.000$), lo que permitió determinar la existencia de dos componentes, que en su conjunto explica el 59,16% de la varianza (Gráfico 1). El primer componente asociado al **Discurso de los estudiantes** durante la explicación de la resolución matemática, explicó un 34,98% de la varianza. El componente 2, asociado a la **Gestualidad** propiamente tal, explicó un 24,17% de la varianza (en Anexo 10, análisis de componentes de las categorías de la rúbrica de gestos).

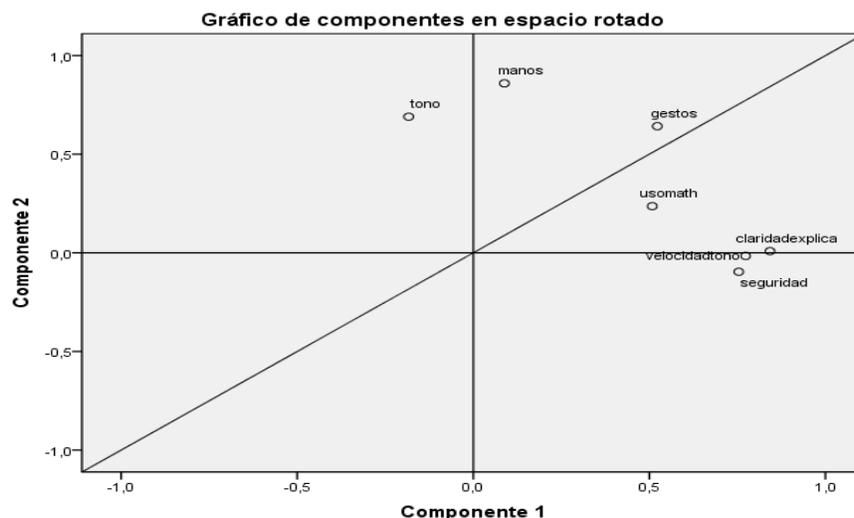


Gráfico 1: Análisis de componentes principales de Gestualidad

3.3. Procedimiento de registro de información

El desarrollo de este estudio consideró la información obtenida en las entrevistas cognitivas y el setting descrito con anterioridad en la metodología general. En lo específico, se utilizaron las imágenes y explicaciones en voz alta que hicieron los estudiantes durante el proceso de resolución de las situaciones matemáticas.

3.4. Procedimientos y técnicas de análisis de datos

Para llevar a cabo este segundo análisis, se procedió a entregar los videos a los correctores quienes revisaron y clasificaron los 61 Casos con la respectiva rúbrica. A diferencia del estudio anterior, en esta ocasión cada corrector solo analizó la explicación entregada por los estudiantes en el ítem 1. Ambos correctores revisaron la totalidad de videos.

Al igual que en el Estudio 1, se desarrolló un proceso de calibración y validación permanente del trabajo de los correctores. El análisis se desarrolló en el plazo de una semana y media, con revisiones intermedias en conjunto con la tesista, quien actuó como juez en el caso de posibles desacuerdos entre los correctores, y dirimió entre las alternativas seleccionadas.

La consistencia lograda entre los correctores fue de un 94% (sin considerar corrección por azar), lo que sumado al análisis Kappa de Cohen por categoría (todos los valores superiores a 0,750) dio cuenta de una alta fiabilidad del proceso. Así, se pudo continuar con los análisis y las comparaciones correspondientes a las categorías y sub categorías de cada una (tabla 19). Se registraron los datos en una base del programa SPSS, para llevar a cabo los análisis estadísticos descriptivos, tablas de contingencia para la comparación de grupos y correlaciones simple y múltiple para categorías cualitativas.

Tabla 19
Análisis Kappa de Cohen por categoría

Categoría Gestualidad	Valor Kappa de Cohen	Significatividad
Tono Corporal	0,773	0,000
Tipo de Gestos	0,900	0,000
Uso de las Manos	0,932	0,000
Velocidad y Tono	0,872	0,000
Claridad en la explicación y precisión en el lenguaje	0,970	0,000
Uso de lenguaje Matemático	0,788	0,000
Seguridad	0,838	0,000

Una vez que se encontraron analizados en cada escala todos los videos, se procedió a registrar los resultados en una planilla Excel, y después se exportaron los datos al programa estadístico SPSS (Statistical Package for the Social Sciences). En dicho programa, se realizaron los análisis estadísticos descriptivos, chi cuadrado, comparación de grupos a nivel cualitativo y correlaciones bivariadas para categorías cualitativas (en Anexo 11 se presentan los análisis descriptivos y de comparación por áreas).

3.5. Análisis de Resultados del estudio 2

A continuación se presentan los resultados obtenidos tanto respecto del tipo de gestualidad expresada por los estudiantes de la muestra como de las diferencias o similitudes por área al enfrentar situaciones matemáticas de la vida cotidiana (Objetivo específico ii).

Los gestos constituyen la expresión corporeizada de la experiencia humana. Al referirse a los gestos, la teoría les atribuye diversas dimensiones: se han entendido como una práctica social, además de un elemento central en el desarrollo humano y, también, una forma de

estar en el mundo (Wittgenstein, 1987). Uno de los consensos en el campo es la relación existente entre las manos y el pensamiento (McNeill, 1992), por lo que al referirse a la gestualidad es inevitable considerar las posturas corporales. Por este motivo, el estudio abordó la gestualidad principalmente centrada en las expresión de las manos y la postura corporal. En los siguientes apartados se presentarán resultados por categoría de gestos, relacionados con las Estrategias Holística y Analítica para distintos casos de estudiantes.

3.5.1 Categoría Postura Corporal

Sub categoría: Tono Corporal

La postura corporal se refiere a la posición que adopta el cuerpo en situaciones comunicativas, por lo que su propósito es expresar algo, transmitir actitudes, sentimiento y estados de ánimo (Pease & Pease, 2010). De esta manera, estudiar la postura en cuanto a la retroalimentación del cuerpo, enriquece el conocimiento de las interacciones sociales de los sujetos (Vinayagamoorthy, Brogni, Steed & Slater, 2006).

En esta categoría, los estudiantes expresaron en su mayoría un “*tono relajado*” al enfrentar la explicación de la situación matemática presentada, sin diferencias significativas por área. Luego, la postura “*tono normal*” fue representada, principalmente, por algunos estudiantes humanistas y en menor grado por ciertos casos de ingeniería (ver Gráfico 2).

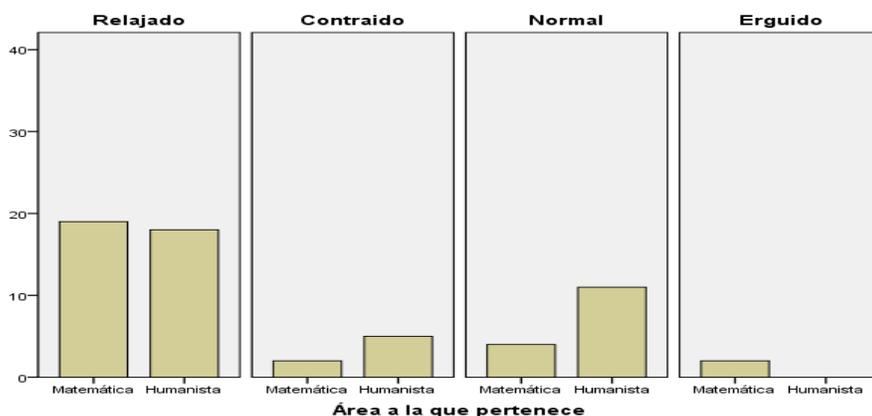


Gráfico 2: Tono Corporal por Área

a. *Tono relajado.*

El “*tono relajado*” se caracterizó de la siguiente manera: *Estudiante sentado, **cuerpo relajado**, tronco laxo en descanso, se encuentra inclinado hacia adelante, apoyándose casi por completo en la mesa (como si se acotase), cabeza y cara hacia abajo la mayoría del tiempo, mantiene una posición erguida solo en breves lapsos de tiempo. Hombros relajados.*

El tipo de postura señalado se considera de bajo involucramiento o compromiso con la tarea, ya que no tiene consecuencias ni efectos para ellos. Además, la inclinación hacia adelante suele interpretarse como un estado de simpatía con el interlocutor (Pease & Pease, 2010), lo que es positivo considerando que la tesista era alguien desconocido para los estudiantes.

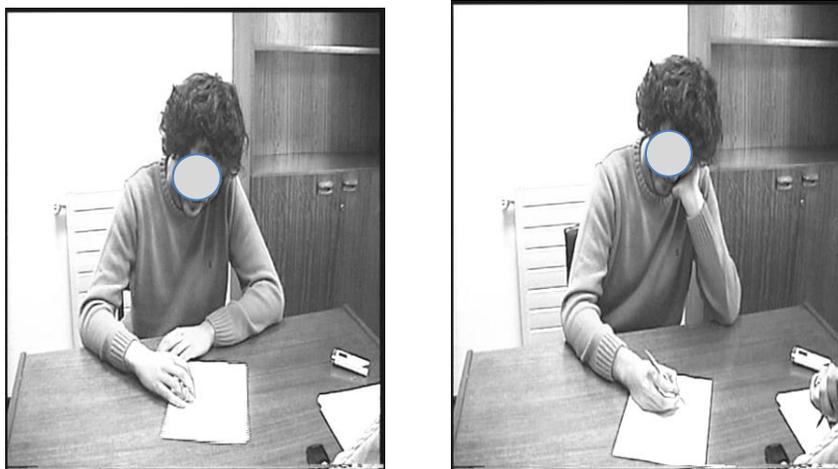


Figura 17: Caso Holístico (Ingeniería)

b. Tono contraído.

El “*tono contraído*” fue evidenciado en los estilos analíticos, representado con claridad en los estudiantes humanistas. Dicho tono se caracterizó como: *Estudiante sentado, cara al frente, cuerpo contraído hacia adentro (retraído sobre sí mismo) y adelante, con el tronco semi curvo y codos encima de la mesa. Hombros subidos, los brazos tienden a estar pegados al cuerpo, casi sin movimiento*



Figura 18: Caso Analítico (Letras)



Figura 19: Caso Analítico (Letras)

Generalmente, este tipo de postura con un brazo cruzado sobre el pecho y pegado al cuerpo refleja un estado defensivo del estudiante, que muestra inseguridad o nerviosismo (Pease & Pease, 2010). Sin embargo, la inclinación hacia adelante puede indicar que, a pesar de lo incómoda que pueda parecer la instancia, la presencia del interlocutor no es amenazante aspecto que favoreció el clima de la entrevista.

c. *Tono normal.*

El “*tono normal*” tuvo mayor frecuencia en algunos estudiantes humanistas, aunque sin diferencias significativas por área. Se caracterizó como: *Estudiante sentado, cara al frente, cuerpo normal hacia adelante; tronco erguido normal, brazos juntos encima de la mesa la mayoría del tiempo, sin mayor movimiento. Hombros en su posición normal, levemente cerca del cuerpo.*

En el análisis se observó que la disposición de los estudiantes estaba puesta en la explicación y su postura corporal la acompañaba. Fue característico que al utilizar mayor lenguaje en su resolución, mayor era el tiempo que el estudiante mantenía esta postura. Lo anterior refleja un cierto compromiso o involucramiento con la tarea, lo que se distingue de la postura relajada.



Figura 20: Caso Analítico (Ingeniería)



Figura 21: Caso Analítico (Humanista)

d. *Tono erguido.*

Una situación particular surge con el “*tono erguido*”, ya que fue representado únicamente por estudiantes de Ingeniería con procesamiento analítico. Esta subcategoría se caracterizó como: *Estudiante sentado, cara al frente, el cuerpo está erguido, el tronco recto, incluso ligeramente echado hacia atrás. Tronco y brazos extendidos se acercan y retiran de la mesa acompañando el habla, los brazos están en movimiento la mayoría del tiempo (despeja el espacio para moverse)*

Los estudiantes que expresaron un “*tono erguido*” solían utilizar en su explicación mayor lenguaje con contenido matemático, lo que demostraba dominio de la temática a resolver. Asimismo, se observa una postura que expresa seguridad y congruencia entre sus gestos, el lenguaje corporal y el lenguaje hablado. El aspecto indicado es relevante al estudiar el lenguaje del cuerpo ya que es esperable una parsimonia en la comunicación de los estudiantes, y permiten interpretar la veracidad o exactitud de sus actitudes (Bermeosolo, 2004; Pease & Pease, 2010).



Figura 22: Caso Analítico (Ingeniería)



Figura 23: Caso Analítico (Ingeniería)

Subcategoría: Conexión Personal

Esta categoría es entendida en el sentido que el sujeto se **visualiza dentro del problema descrito en la situación matemática**, es decir, el estudiante representa una imagen visual y toma una posición dentro de ella. Los gestos y/o discurso se encontrarían en función de la imagen representada.

Para el análisis de esta subcategoría se consideraron cuatro niveles: desde una posición absolutamente fuera de la situación representada en el ítem, hasta otra en la que el estudiante se posicionaba dentro. Los estudiantes, sin diferenciar por área, se ubicaron “Fuera del ítem” durante la resolución. Esto implica que observarían la situación matemática sin tomar una posición o “comprometerse físicamente” con la situación matemática (ver Gráfico 3), lo que resulta consistente con el estilo de procesamiento analítico utilizado por los estudiantes.

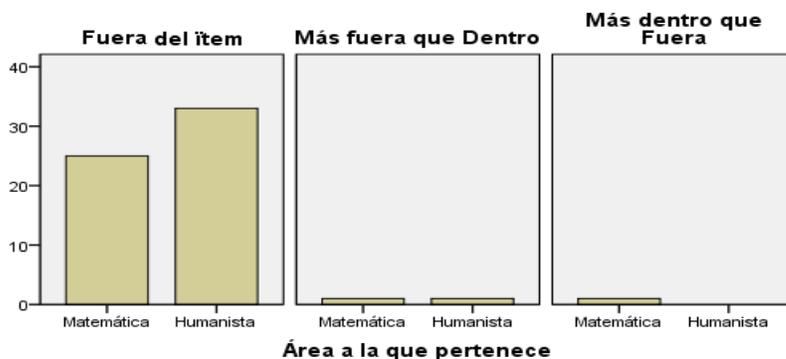


Gráfico 3: Conexión Personal por Área

3.5.2 Categoría Movimiento de las Manos

Subcategoría: Tipo de Gestos

Con el objeto de dar a los gestos un contexto más amplio y en la lógica de ir aproximando los resultados de los estudios para su integración posterior, se describirán los gestos en relación con los estilos de procesamiento holístico y analítico. Los indicadores de análisis utilizados fueron las siguientes:

- a. *Casi no realiza gestos y estos son **simples, laxos, espontáneos** (inconscientes), no asociados a objetos matemáticos (ejemplos: tomar la cara, el pelo u otra parte del cuerpo en forma repetida).*
- b. *Gestos con movimientos **simples, laxos, eminentemente indicativos** (se describe lo que se representa en el ítem mostrándolo con el dedo índice o con apoyo de un objeto), levemente asociado a objetos matemáticos, combinados con gestos espontáneos y/o gestos de golpeteos, que acompañan momentos de silencio, en los que puede estar pensando cómo explicar la solución o solamente en pausa.*
- c. *Realiza **gestos de acción, firmes, definidos, de carácter lineal** e indicativos, en los que prima la asociación con procesos matemáticos simples (por ejemplo: realiza dibujos, siguiendo un conteo, representando figuras o situaciones en el espacio, tales como "la mitad pasa y la otra no pasa", "eliminar sujetos", "sujetos que avanzan"). Puede combinar con gestos laxos sin contexto matemático.*
- d. *Abundantes **gestos, firmes y muy bien definidos (de control absoluto)**, referidos a procesos y conceptos matemáticos. En ocasiones utiliza **gestos ilustrativos (por ejemplo, con la mano en la cabeza señala estar pensando) y/o gestos icónicos** para representar figuras o símbolos.*

Como se puede apreciar en la gráfico 4, los estudiantes en su mayoría realizaron pocos gestos y fueron de carácter simple, laxos e indicativos. Luego, le siguen en menor medida gestos de acción, firmes, de tipo lineal e indicativos (77%), lo que evidencia una diferencia estadísticamente significativas de los Humanistas por sobre los estudiantes de Ingeniería ($X^2 = 10,384$; $gl=3$; $p < 0,05$). Esta escasa gestualidad sería consistente con la literatura, ya que si bien gesto y lenguaje van juntos durante todo el ciclo vital y participan en la construcción del pensamiento (Bernardis & Gentilucci, 2006; Cornejo, Simonetti, Ibáñez, Aldunate, Ceric, López, & Núñez, 2009; Goldin-Meadow, 1999; Imbo, Vandierendonck & Fias, 2011; Kendon, 2004; McNeill, 1992; Roth, 2001) desde los primeros años de vida de niños y niñas (Farkas, 2007; Radford & André, 2009), la gestualidad tenderían a disminuir cuando la palabra-lenguaje aumenta (Bernardis & Gentilucci, 2006; Capone & McGregor, 2004).

Pese a lo anterior, resulta interesante notar que la escasa gestualidad en los estudiantes de la muestra parecería estar relacionada con el desempeño de estos en las situaciones matemáticas, es decir, quienes presentaron un menor desempeño en el test dan cuenta de una gestualidad más reducida, caracterizada por gestos de carácter indicativo, simples y laxos; por otra parte, quienes presentaron un mejor desempeño en el test, expresan una gestualidad más definida, gestos de acción y control absoluto, relacionados a su vez en forma directa con el lenguaje matemático utilizado. Una posible explicación del menor uso de gestos y de lo reducido de la fisionomía de estos en los estudiantes de bajo desempeño en el test, es la posible carencia de referentes de significado a nivel disciplinar para dar lugar a la representación gestual, lo que no sucedería en otros contextos (Cornejo, et al, 2008; Farkas, 2007; Goldin – Meadow, 1999; Goldin-Meadow & Singer, 2003; Goldin-Meadow & Wagner, 2005). Por otra parte, influiría la falta de modelaje durante la etapa escolar en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. De acuerdo a la teoría, este es un aspecto importante para el desarrollo de la gestualidad, por lo que podría tener un efecto en la probabilidad de utilizarla como herramienta de comunicación (Cook & Goldin-Meadow, 2006; Farkas, 2007; Goodwyn, Acredolo, & Brown, 2000). Otra explicación plausible, de carácter más motivacional, es que para algunos estudiantes la tarea pudo ser percibida de baja complejidad y, por ende, no haber estimulado el uso de gestualidad (Logan, Lowrie & Diezmann, 2014).

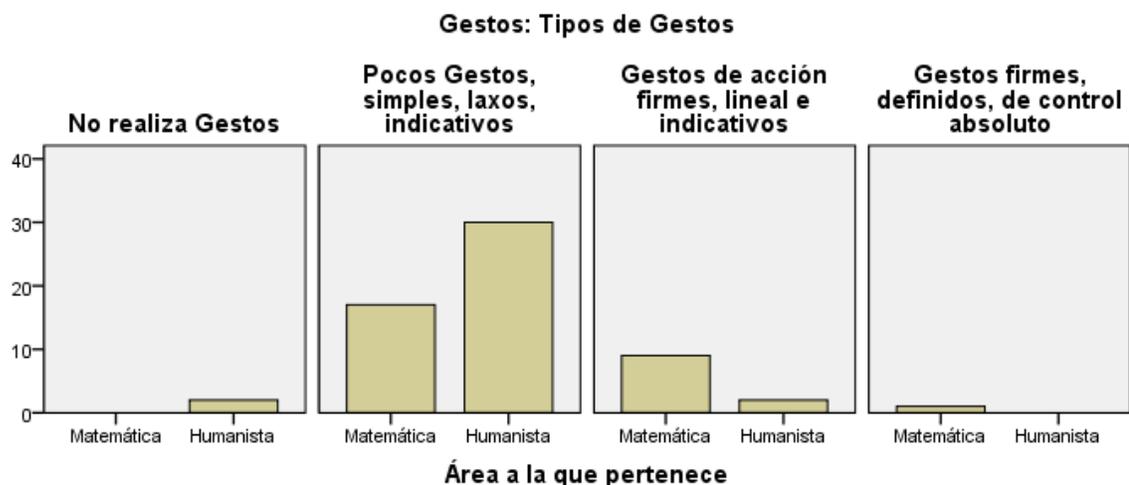


Gráfico 4: Tipo de Gestos por Área

Los gestos indicativos, “*deíticos*” o de señalamiento fueron los más utilizados por algunos estudiantes, al indicar entidades presentes en el espacio conversacional (McNeill, 1992). Este tipo de gestos fue utilizado para reflejar la “puesta a tierra” de la cognición en el entorno físico (Alibali et al., 2014). Se representaba, así, la descripción del proceso de

resolución en la hoja de respuesta, lo que refleja la lógica de los esquemas construidos para resolver los problemas (McNeill, 1992).

Una interpretación posible es que los gestos simples y laxos, frecuentemente expresados por los estudiantes humanistas, reflejan o comunican un “conocimiento impreciso de carácter implícito” (Goldin-Meadow, 1999). Por lo anterior, los estudiantes que disponían de un cierto dominio matemático, aunque fuese débil, se apoyaron del gesto indicativo como un medio significativo para acompañar su discurso. Además, hacían explícito el conocimiento disponible, al mostrar la secuencia de acción utilizada (Broaders et al., 2007).



Figura 24: Caso Analítico- Gesto Indicativo

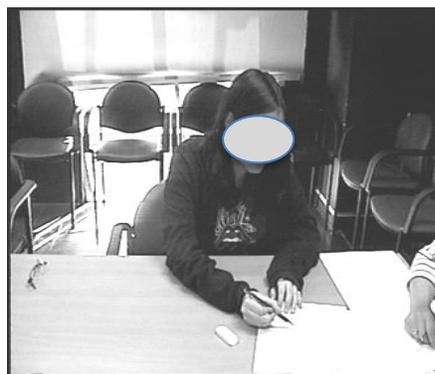


Figura 25: Caso Holístico – Gesto Indicativo

Los gestos de mayor elaboración fueron aquellos denominados “gestos de acción”, como se observa en el paso 3 de la siguiente secuencia de movimiento. Estos gestos presentaron una diferencia estadística a favor de los estudiantes de Ingeniería, quienes los usaron en mayor medida ($X^2=10.384$; $gl=3$; $p<0,05$). En este paso, el estudiante quiere reflejar la “eliminación directa”, por lo que una mano pasa sobre la otra en señal de cortar una secuencia, lo cual es consistente con el discurso. En el conjunto de pasos se visualiza la línea de pensamiento que sigue la explicación, en la que prima la asociación con procesos matemáticos simples en una situación matemática, es decir, el estudiante busca expresar lo que está pensando (Goldin-Meadow, 1999).

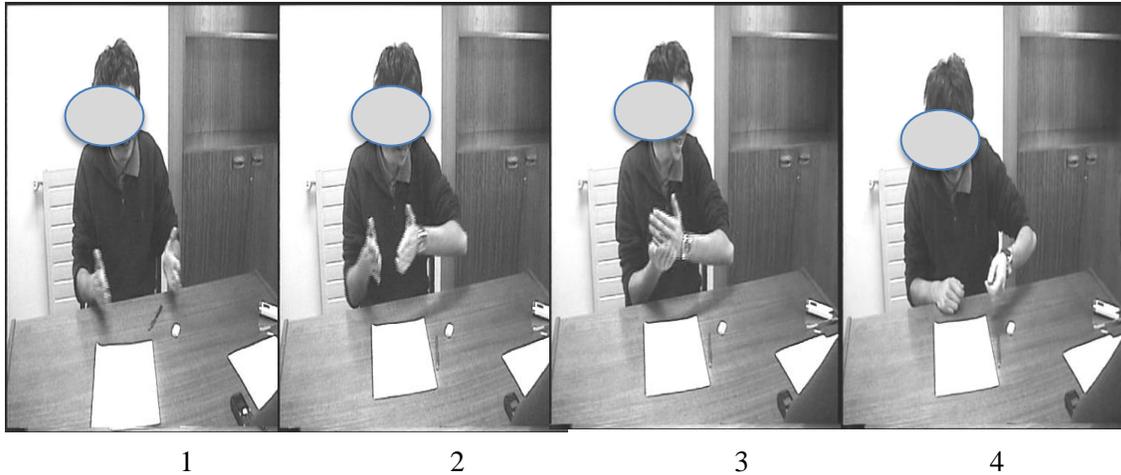


Figura 26: Caso Analítico: “Eliminación Directa”

Nota: Sentido de la secuencia fotográfica

La secuencia también puede reflejar una representación mental o una simulación de la acción, según Alibali et al. (2014), ya que el estudiante intenta transmitir el concepto abstracto de eliminación directa en un contexto de juego de tenis, donde un jugador gana y el otro queda eliminado. Se muestra, además, la línea de pensamiento lineal que sigue el estudiante. Termina en el paso 4 con la mano casi empuñada, en dirección hacia delante, con la vista focalizada en la acción, se indica al jugador que gana y se queda en el partido. Lo presentado anteriormente es consistente con su estilo analítico de procesamiento.

Los “gestos de control absoluto”, por su parte, se relacionaron al uso de conceptos matemáticos más específicos, tales como “dividir” y “agregar”. Se utilizaron, también, con una función de carácter ilustrativo, al reflejar lo que se está pensando sobre ciertas decisiones tomadas o alternativas de decisión. De este modo, los gestos se constituirían en una herramienta representacional efectiva para los estudiantes, en cuanto a la resolución de tareas matemáticas (Cook & Goldin-Meadow, 2006).



Figura 27: Gesto “dividir”, operación matemática (Caso Analítico)

Nota: Sentido de la secuencia fotográfica



A diferencia de los gestos anteriores, en este proceso gestual no se identificaría el concepto de “división” en un paso específico; se representa, en cambio, a partir de la secuencia de pensamiento. Las manos se encuentran abiertas y casi mirándose una a la otra a medida que se acercan progresivamente. Una diferencia con los “gestos de acción” se percibe en el proceso gestual, en el cual el concepto matemático es expresado paso a paso por el estudiante.

Una situación similar a la del concepto “división” ocurre con “agregar”. Como se observa, el alejamiento progresivo de las manos indica que se amplía un espacio que permite incorporar datos a la operación. En este caso, las manos se encuentran más bien cerradas, con los dedos tocándose como si tuviesen un objeto que se va moviendo, tal como se aprecia en la siguiente secuencia.



Figura 28: Gesto “agregar”, operación matemática

Nota: Sentido de la secuencia fotográfica



“Lo primero que hice fue pensar en dos opciones.....”.

Figura 29: Gesto ilustrativo: “pensando en dos opciones”

A partir de la expresión “pensando en dos opciones”, se realizan gestos que ilustran con claridad el proceso de pensamiento del estudiante, en tanto se refleja con consistencia la relación de las manos, la postura y el lenguaje.

Como se señaló con anterioridad, en la muestra se observó que la gestualidad se expresa de modo diferente cuando se encuentra relacionada con un mejor o peor desempeño de los estudiantes en el test de situaciones matemáticas ($r=.329$; $p=.010$), lo que a su vez se relaciona con el lenguaje utilizado, el que también puede variar de acuerdo al uso de conceptos matemáticos en la explicación.

Tanto los “gestos de acción” como los “gestos de control absoluto” o “ilustrativos”, buscaban facilitar la explicación para el interlocutor, al dar cuenta del nivel de comprensión de la resolución por parte del estudiante. Además, aportaban dirección a la interpretación de

una expresión (Goldin-Meadow, 1999), y confirman la relación directa entre discurso, gestos y pensamiento (Allibali et al., 2014; Cook, Mitchell and Goldin-Meadow, 2008; Goldin-Meadow and Wagner, 2005; Goldin-Meadow, 2006; Novack, et al. 2014).

Es importante resaltar que el uso de gestos a nivel escolar es de gran utilidad ya que no sólo es un medio de conocimiento de los estudiantes (Bermeosolo, 2004) sino que, en efecto, mejoran el aprendizaje de conceptos abstractos, por lo que si se favorece su uso en el aula, se logrará una mayor comprensión de dichos conceptos (Cook, Duffy & Fenn, 2013; Cook, Mitchell & Goldin-Meadow, 2008).

Subcategoría: Uso de Manos

Los resultados de esta categoría fueron analizados no sólo a partir de la frecuencia en el uso, sino que también considerando la función que se cumplía, es decir, si el movimiento acompañaba la explicación del estudiante y el modo en que se encontraba al hacer esto. Lo anterior se realizó con el objeto de integrar en los resultados un elemento específico, relativo a la importancia del uso de las manos, además de su relación idiosincrática con el pensamiento. De esta manera, no se consideró únicamente la dimensión gestual como un proceso general (McNeill, 1992).

Se consideraron los siguientes indicadores:

- a. No utiliza las manos en su explicación, manteniéndolas quietas. Suelen estar cerradas o empuñadas.*
- b. Una mano sigue el sentido de la explicación, mientras la otra se encuentra preferentemente pegada al cuerpo y cerrada.*
- c. Ambas manos participan en la explicación del procedimiento realizado y/o su resolución por separado, realizando movimientos distintos una de la otra. Manos abiertas y extendidas*
- d. Ambas manos participan al mismo tiempo en la explicación del procedimiento realizado y/o su resolución. Las manos están abiertas y extendidas*

Los análisis dan cuenta que los estudiantes utilizaron sus manos en la explicación, ya sea una de ellas (60,7%), o ambas en distinto sentido (34,4%). Como se aprecia en la tabla 20, este último caso es levemente superior en el caso de los estudiantes Humanistas a nivel de frecuencias, pero no en forma estadísticamente significativa.

Tal información complementa lo analizado con anterioridad, ya que las manos participaron como expresión del pensamiento en la explicitación de los estudiantes (MacNeill, 1992). La preferencia por el uso de una sola mano es coincidente con la mayoría de los gestos indicativos, laxos o simples realizados, donde una mano se mueve para acompañar el

discurso y la otra se mantiene sin movimiento. Sin embargo, también puede ocurrir que las manos no vayan en el sentido del discurso.

Tabla 20

Uso de manos por áreas

		Gestos: Uso de Manos			Total
		Utiliza una sola mano	Ambas manos en distinto sentido	Ambas manos en el mismo sentido	
Área a la que pertenece	Ingeniería	17	8	2	27
	Humanista	20	13	1	34
Total		37	21	3	61

3.5.3 Categoría Características del Discurso

Subcategoría: Velocidad y tono

A partir de la relación ya explicitada entre gesto y discurso (Allibali et al., 2014; Cook, Mitchell & Goldin-Meadow, 2008; Goldin-Meadow & Wagner, 2005; Goldin-Meadow, 2006; Novack et al., 2014) en este estudio se consideraron algunas subcategorías de interés que se presentan en distintos niveles de expresión, como por ejemplo la velocidad y el tono de la voz. En este sentido, la subcategoría abarcó desde un discurso suave, lento, que se interrumpe frecuentemente hasta un discurso fuerte, rápido y sin interrupciones. Los resultados muestran que un grupo no menor de estudiantes explicaron su resolución en un tono más bien fuerte, en tiempo normal y sin interrupciones (47,5%).

Sin embargo, se encontraron diferencias significativas por área a favor de Ingeniería ($t_{(59)}=2,344$; $p = .022$), asumiendo varianzas iguales ($F= 1,716$; $p = 0,195$), lo cual implica que estos estudiantes presentaron un discurso más fuerte y continuo que los estudiantes Humanistas. Al relacionar esta categoría con el desempeño de los estudiantes, se puede observar que la velocidad y tono es más fuerte y continuo en la explicación cuando el desempeño es más alto ($r=.370$; $p=.003$). Al contrario, mientras más débil es el desempeño el discurso se volvería más suave, lento y con pocas interrupciones.

Subcategoría: Claridad de la explicación y precisión en el lenguaje

Se consideraron distintos niveles de expresión, desde una explicación difusa, imprecisa, que no logra avanzar en la resolución del problema o no se entiende cómo llega al resultado; hasta aquella explicación clara, capaz de seguir una secuencia de resolución, que desarrolla una línea de pensamiento, y describe con detalle, paso a paso, las acciones realizadas.

Los resultados indican que los estudiantes desarrollaron una explicación clara, que sigue una secuencia lineal, describiendo la acción paso a paso (60,7%). No se encontraron

diferencias estadísticamente significativas entre los grupos. No obstante, se destaca que en la dimensión “Explicación poco clara con imprecisiones y vacíos”, el número de estudiantes Humanista dobla al número de estudiantes matemáticos (5/10) (Ver Anexo 9 los datos desagregados para cada categoría).

Subcategoría: Uso de lenguaje matemático

Se consideraron distintos niveles de expresión, desde el nulo uso de lenguaje matemático, es decir, sin palabras, ni conceptos ni teorías; hasta el nivel donde el estudiante utiliza lenguaje matemático en toda la explicación, en aspectos tales como: porcentajes, potencias, números, divisiones, combinatorias y operaciones básicas: suma, resta, entre otros.

Si bien los resultados indican que los estudiantes, en su mayoría, utilizan poco lenguaje matemático, éste se refiere preferentemente a conceptos aislados que son combinados con lenguaje informal y cotidiano (57,4%). Asimismo, un porcentaje no menor (32,8%) de los estudiantes humanistas utilizó conceptos simples que de igual modo les permitieron desarrollar la explicación del procedimiento matemático utilizado, sin diferencias estadísticamente significativas por área de procedencia.

Cabe destacar que solo estudiantes del área de Ingeniería (por ejemplo casos 38, 43, 56 y 61), utilizaron lenguaje matemático en toda la explicación (conceptos y procesos). Coincidentemente, este mismo grupo es quien tiene el nivel más alto de la rúbrica en “*velocidad y tono*”, “*claridad y precisión del discurso*” y el mejor desempeño en el test aplicado. Sumado a ello, tres estudiantes se aprecian muy “*seguros*”, tanto en el proceso como en el resultado en la situación matemática a resolver.

Al analizar la relación entre estas categorías se observó que la subcategoría “*velocidad y tono*” correlaciona de manera fuerte y directa con “*claridad y precisión del lenguaje*” ($r=.575$; $p=.000$); así como también, “*tipos de gestos*” correlaciona con “*claridad y precisión en el lenguaje*” ($r=.304$; $p=.017$). Existe, además, una correlación fuerte y directa ($r=.413$; $p= 0.001$) entre los “*tipos de gestos*” y “*el uso del lenguaje matemático*”, lo que permitiría afirmar a su vez una relación con el desempeño de los estudiantes en el test de situaciones matemáticas. Lo anterior, se expresaría no solamente en una gestualidad más definida, ya sea con gestos de acción o de control absoluto, sino que también con un discurso más fuerte, claro, donde se comunica un lenguaje matemático con mayor presencia de conceptos que dan cuenta de la comprensión.

Una interpretación posible sería indicar que un mayor grado de experticia en un área específica, como la matemática, se relaciona en forma directa con la gestualidad, la que cobraría un rol de mayor importancia como herramienta de comunicación, al acompañar el discurso y dar forma a la comprensión (Goldin-Meadow et al., 2003; MacNeill, 1992). De este modo, la gestualidad se constituye en una oportunidad para generar nuevo

conocimiento matemático en estudiantes de educación superior, en la que pueden demostrar su libertad de pensar por sí mismos al enfrentar tareas matemáticas de mayor complejidad (Yoon, Thomas & Dreyfus, 2011). Por otra parte, para aquellos que presentan menor experticia o una habilidad cuantitativa disminuida, la gestualidad se constituye en una oportunidad para ser aprovechada por los docentes como recurso de aprendizaje útil (Yoon et al., 2011) para dar sentido a las ideas actuales y desarrollar estrategias nuevas de resolución de problemas (Broaders et al., 2007; Allibali et al., 2014).

A continuación se presenta la tabla 21, que resume la posición de cada estudiante en la dimensión “Características del discurso” y sus determinadas sub-dimensiones, según el área a la que pertenecen.

Tabla 21

Dimensión “Características del Discurso” por área

Sub Categorías	Indicadores	Frecuencia	
		Humanistas	Ingeniería
Velocidad y Tono	Discurso, suave, lento, que se interrumpe frecuentemente	2	1
	Discurso suave, lento, sin interrupciones o muy pocas	12	2
	Discurso más fuerte que suave, en tiempo normal sin interrupciones	14	15
	Discurso fuerte rápido y sin interrupciones	6	9
Claridad de la explicación y precisión en el lenguaje	Explicación difusa imprecisa	3	0
	Explicación poco clara con imprecisiones y vacíos	10	5
	Explicación clara, es posible seguir la línea de pensamiento, algunos vacíos	3	3
	Explicación clara, sigue una secuencia lineal, describiendo sus acción paso a paso	18	19
Uso del lenguaje matemático	No usa lenguaje matemático	2	0
	Usa poco lenguaje matemático, sólo conceptos aislados combinando con lenguaje informal y cotidiano	21	14
	Usa conceptos simples, avanzando en la explicación de operaciones matemáticas	11	9
	Usa lenguaje matemático en toda la explicación (conceptos y procesos)	0	4

3.5.4 Categoría Seguridad en la Resolución

Como se ha señalado, el cuerpo y la gestualidad son herramientas de comunicación que transmiten actitudes, emociones, sentimiento y percepciones, sobre el mundo de significados y experiencia de los sujetos. Por este motivo, se consideró la percepción de seguridad que expresaron los estudiantes durante la explicación del procedimiento de resolución de la situación matemática, lo que resultó ser consistente con lo demostrado en las categorías anteriores. En lo específico, los resultados mostraron que en general los estudiantes fueron percibidos “seguros” para enfrentar las distintas situaciones matemáticas (62,3%), con un puntaje levemente superior en Ingeniería y estadísticamente significativo ($X_{(3)}=7.922$; $p<0,05$).

Al relacionar las categorías, Seguridad y Desempeño por área, se obtiene que éstas correlacionan de modo directo ($r=.357$; $p=.005$), es decir, los estudiantes que mostraron mayor seguridad en la explicación de su resolución, también fueron más efectivos en el resultado. Otro punto por destacar fue la seguridad mostrada, tanto en el procedimiento como en resultado, de los estudiantes de Ingeniería que respondieron la mayoría de los ítems correctos. Sólo tres casos demostraron mayor seguridad en el resultado, pero no en el procedimiento (ver Anexo 9). En cuanto a los estudiantes Humanistas, en varios casos (10) se expresaron seguros en el procedimiento, pero inseguros en el resultado (nivel 2), independiente de cuál fuera su desempeño. En este grupo se dieron cinco casos de alto desempeño, que presentaron un comportamiento de alta seguridad, similar a los estudiantes de Ingeniería (ver tabla 22).

Tabla 22

Dimensión “Seguridad en la resolución” por área

Dimensión	Indicadores	Frecuencia	
		Ingeniería	Humanista
Seguridad	Inseguro en el procedimiento y en el resultado	1	5
	Seguros en el procedimiento pero inseguros en el resultado	2	10
	Seguridad en el resultado pero menos en el procedimiento	3	2
	Seguro en el procedimiento y en el resultado	21	17
Total		27	34

En consecuencia, los estudiantes a nivel comparativo presentarían diferencias en cuanto a las siguientes categorías: Tipos de Gestos, Velocidad y Tono del discurso y Seguridad, pudiéndose ya en esta etapa evidenciar ciertos aspectos que caracterizarían la construcción particular de cada grupo en cuanto a su experiencia corporeizada con la matemática.

CAPITULO 4

Estudio 3: Vivencias significativas en el proceso de aprendizaje de la matemática escolar

Este estudio se plantea con el objetivo de describir y comparar las vivencias subjetivas e intersubjetivas de estudiantes que inician la educación universitaria y que poseen distinto nivel de habilidad cuantitativa, en su aprendizaje de la matemática escolar.

Como se planteó en la problematización y en el marco teórico, la experiencia corporeizada no es algo que se restringe a la persona, sino que es vivida con otros, con quienes se comparten experiencias que posibilitan la interpretación y configuración de nuestra comprensión significativa del mundo (Johnson, 1987; Varela, Thompson & Rosh, 2005). La experiencia considera la historia personal de quien vive en un mundo compartido con otros y, a su vez, dicha historia constituye al sujeto como ser humano (Varela, 2000). Producto de lo anterior, para comprender la relación que establecen los estudiantes con la matemática no se puede dejar fuera la historia vivida por estos, su mundo de relaciones que ha configurado tal relación de significados.

4.1 Población y muestra

A diferencia de los estudios 1 y 2, la muestra estuvo conformada por 59 estudiantes de primer año de carreras Humanistas e Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica de Chile del año 2010. La distribución corresponde a 32 estudiantes de carreras Humanistas y 27 de Ingeniería. Todos los estudiantes se encontraban por primera vez en sus respectivas carreras y con PSU rendida el año anterior a la recogida de datos. La diferencia de 2 estudiantes se debe a que no pudieron participar de todo el proceso de indagación por falta de tiempo.

4.2 Técnica de recolección de datos

Para el logro de los objetivos de este estudio, se utilizó como técnica de recolección de datos la **entrevista abierta focalizada** (Delgado & Gutiérrez, 1995). El tipo de entrevista seleccionada permitió generar un contexto flexible y cercano, necesario para ajustarse a la disponibilidad de tiempo y a las características de los entrevistados, lo que permitió el manejo adecuado de las situaciones de ansiedad, inseguridad y timidez de algunos estudiantes. Al no ser una entrevista estandarizada, se pudo desarrollar una conversación guiada por preguntas amplias, donde no fue pre determinada la redacción exacta, ni el orden de las preguntas.

Para su desarrollo, se construyó un guion de entrevista (en Anexo 12) el cual contenía una serie de tópicos generales que permitieron ir construyendo y reconstruyendo la experiencia vivida por los estudiantes en torno a la enseñanza aprendizaje de la matemática durante su etapa escolar. El guion se definió, por un lado, considerando referentes teóricos y, por otro, a partir de la información aportada en una entrevista de carácter exploratoria, realizada a dos estudiantes de la muestra.

El guion fue piloteado en dos casos: estudiantes voluntarios uno de cada área, que estaban realizando cursos de primer año, pero no egresados el semestre anterior al estudio. La aplicación permitió realizar ajustes menores, relativos al estilo de la interacción y foco en las preguntas, tales como: reducir la cantidad de comentarios por parte de la tesista, favorecer el desarrollo de introducciones cortas a las preguntas y el grado de concordancia entre el lenguaje del investigador y el del estudiante. Todo lo anterior con el propósito de asegurar el entendimiento de los conceptos.

Las dimensiones definidas fueron: (i) disposición de los estudiantes ante la enseñanza y aprendizaje de la matemática; (ii) percepción del apoyo familiar para el aprendizaje de la matemática, (iii) estrategias de estudio para el aprendizaje de la matemática; (iv) experiencias escolares que favorecieron el aprendizaje; (v) experiencias escolares que dificultaron el aprendizaje. Dichos tópicos fueron seleccionados considerando las variables que se encuentran presentes en la literatura asociada a los procesos de enseñanza, aprendizaje y evaluación de la matemática (Borromeo, 2012; Boyer, 1999; Bruner, 1998; Cole, 1999, Corbalán, 1997; De Corte & Verschaffel, 2003; National Mathematics Advisory Panel, 2008; Hiebert et al, 1997; Ormrod, 2005; Staarman & Mercer, 2010; Vass & Littleton, 2010; Vigotsky, 1995; entre otros). Sumado a esto, se incorporaron dos tópicos que surgieron de modo emergente: (vi) motivos de elección de la carrera y su relación con la percepción acerca de la matemática y la experiencia de preuniversitario. Este último fue integrado a las categorías asociadas a la experiencia escolar.

Tanto para el diseño y desarrollo de estas entrevistas abiertas focalizadas, como para las entrevistas cognitivas de los estudios de Estrategias Holística y Analítica como el estudio de Gestos, se consideraron los cuatro criterios de rigor básicos propuestos por Flick (2007):

- Ausencia de dirección: se evitó dirigir la resolución matemática y la posterior explicación. La investigadora participó estimulando a los estudiantes a tomar sus propias decisiones en el proceso de respuesta. Se hicieron preguntas para lograr una mayor explicación del proceso o la fundamentación del mismo. Al mismo tiempo, en la entrevista abierta se efectuaron preguntas, para que los estudiantes profundizaran en mayor medida los detalles de sus experiencias vividas. En todo momento se resguardó que prevaleciera el punto de vista del entrevistado.

- Amplitud: relacionado con el criterio anterior, en la instancia de la entrevista abierta se buscó asegurar que emergieran todos los aspectos de la experiencia vivida por el entrevistado. En el caso de la explicación en voz alta de la resolución matemática, se estimuló para que se lograra el mayor detalle posible. No obstante, en algunos casos esto se hizo dificultoso; para ciertos estudiantes de Ingeniería, particularmente en el ítem n°2, la solución era demasiado sencilla, por lo que era complejo explicar el procedimiento con mayor profundidad.
- Especificidad: se aplicó este criterio en la entrevista abierta focalizada, con la intención de que los estudiantes no se quedaran en apreciaciones generales o perdieran el foco de los elementos específicos que eran de interés de la investigación. Se estimuló el recuerdo de situaciones específicas de la etapa escolar, enseñanza básica y media en relación con la enseñanza y aprendizaje de la matemática. También, se incentivó a establecer relaciones entre hechos puntuales declarados por ellos, con sus significados o percepciones al respecto, tratando de no interferir con las respuestas de los estudiantes
- Profundidad y contexto personal: se estimuló que las respuestas entregadas por los estudiantes representaran sus propias percepciones, vivencias, formas de actuar, para lograr un “máximo de comentarios de revelación de sí mismos” (Flick, 2007, p.91). Esto, con la intención de concretar el objeto de estudio en las distintas instancias de recogida de datos, especialmente durante la entrevista abierta.

4.3 Procedimiento de registro de información

Una vez terminado el proceso de solución escrita de las situaciones matemáticas y la explicación en voz alta, los estudiantes participaron de la entrevista abierta focalizada realizada por la tesista. Dicha entrevista fue grabada en MP3, grabadora marca Panasonic RR-US510.

A partir del consentimiento informado de la grabación, las 58 entrevistas fueron transcritas de modo natural. Las transcripciones fueron realizadas por una colaboradora externa a la tesista con experiencia en este tipo de trabajo.

4.4 Procedimientos y técnicas de análisis de datos

Para enfrentar el análisis cualitativo de los datos de las entrevistas se recurrió, en primer lugar, a la selección del programa computacional denominado Atlas T (Computer Assisted Qualitative Data Analysis Software), el cual facilitó la organización, manejo e interpretación de los datos de las transcripciones. Este programa es recomendado para proceso de análisis con un corpus amplio de información, como este caso. Los datos se analizaron en función de sus similitudes al interior de cada grupo y las diferencias entre

grupos, Humanistas e Ingeniería, tanto en términos descriptivos como analíticos. Ello implicó analizar datos máximamente variados respecto de sus semejanzas (Flick, 2007).

Se realizó el análisis desde el nivel textual al nivel conceptual y viceversa en un proceso reiterado de citas y códigos, las que finalmente fueron configurándose en relaciones generales de primer nivel, representadas gráficamente, conforme al tipo de codificación abierta de la Teoría Fundamentada (Strauss & Corbin, 2002). Como resultado del análisis, se obtuvieron en forma inicial un total de 706 códigos (unidades básicas del análisis). Después de un proceso de refinación, interpretación y teorización, los códigos llegaron a 98, distribuidos en seis familias de códigos o agrupaciones, las que se representaron al final del análisis en diferentes dimensiones, categorías y sub categorías conceptuales. Dichas categorías constituyeron el nivel conceptual esperado y alcanzaron la redundancia, es decir, la información ya no arrojó nuevos datos diferentes a los ya señalados por los entrevistados, lo cual es conocido como saturación de la información (Flick, 2007).

Cada categoría se analizó, primero, en forma global y luego a nivel comparativo por áreas. En ambos casos se buscó máxima similitud entre categorías. Además, se realizaron comparaciones entre grupos, para lo cual se utilizaron tablas de contingencia y la estimación de Chi Cuadrado. Lo anterior fue una forma de validación de las relaciones entre categorías y conceptos que se construían en el ejercicio interpretativo, para hacer más preciso y parsimonioso dicho análisis. El tipo de análisis descriptivo señalado es el recomendado para categorías de carácter cualitativo (Ritchey, 2002) lo que facilitó la construcción de relaciones en torno a la experiencia significativa de los estudiantes en su etapa escolar con el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática. Las relaciones emergentes fueron consistentes al ser contrastadas con la teoría, lo que aporta distinciones que pueden enriquecer la perspectiva de los estudios en el área.

Se destaca, además, que la información obtenida en el proceso de resolución de las situaciones matemáticas, junto con la explicación oral de la misma, contribuyó a dar un contexto de realidad a los estudiantes, lo que les habría facilitado la reflexión y habría enriquecido sus narraciones en la entrevista posterior. De tal forma, se intentó asegurar la credibilidad de tales análisis.

4.5 Análisis de Resultados del estudio 3

Los datos se presentarán por dimensiones, categorías y sub categorías que emergieron a partir del análisis cualitativo. Se buscó comprender las vivencias de los estudiantes, para reconstruir desde sus perspectivas y relatos los acontecimientos, hechos e historia escolar. Asimismo, se puso énfasis en la comprensión de sentidos y significados que se fueron construyendo en la interacción con padres, familiares, profesores y compañeros en el

proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, diferenciándolos por área de estudio: Ingeniería y Humanista.

4.5.1 Dimensión 1: Disposición de los estudiantes ante la enseñanza y aprendizaje de la matemática

Una disposición es “una inclinación a enfrentar el aprendizaje y la resolución de problemas de una manera determinada. Las disposiciones no son accidentales sino intencionales y abarcan la cognición, la motivación y los rasgos de personalidad” (Ormrod, 2005, p. 532). Esta disposición se torna positiva al aprendizaje cuando los estudiantes viven experiencias que lo hacen sentirse parte de su proceso, tal como son las experiencias significativas de interacción con adultos o las que viven entre pares (Ormrod, 2005). También influyen la percepción de autoconfianza, autoeficacia y autoconcepto académico que los estudiantes tengan.

Cabe destacar que una disposición positiva de los estudiantes se fortalece cuando cuentan con fuertes lazos de apego generados por adultos significativos para ellos desde los primeros años de vida, así como cuando resuelven en forma satisfactoria los distintos desafíos que les toca enfrentar durante la vida y en especial en su experiencia escolar (National Mathematics Advisory Panel, 2008).

Los estudiantes de la muestra, sin distinción de área, expresaron una percepción de confianza más que de desconfianza en sus capacidades cuantitativas. Constituye un logro para ellos el haber obtenido un puntaje PSU en Matemática que les haya permitido ingresar a la carrera deseada. A pesar de lo anterior, los estudiantes de Ingeniería son quienes tienen una mayor *percepción de autoconfianza* en comparación con los Humanistas ($X^2_{(1)}=9,833$; $p<0,05$). Para algunos estudiantes, esto se explica por sus éxitos reiterados en resultados académicos en el área (National Mathematics Advisory Panel, 2008; Marsh & Retali, 2010), los que por una parte tendrían un componente de habilidad y, por otra, uno desarrollado por la experiencia escolar. La afirmación anterior sería consistente con autores que señalan que los logros en matemática de los estudiantes se encuentran fuertemente influenciados por rasgos personales y el medio ambiente (Byrne, Khlentzos, Olson & Samuelsson, 2010). En este sentido, resultan interesantes los resultados de investigaciones en las cuales se señala que los estudiantes que creen que el aprendizaje de las matemáticas está fuertemente relacionado con la capacidad innata, muestran una menor persistencia en las tareas complejas, que los estudiantes que creen que el esfuerzo es más importante (National Mathematics Advisory Panel, 2008).

Los estudiantes de ambas áreas que, en general, declararon autoconfianza en sus habilidades matemáticas, destacaron además otros rasgos característicos en ellos, los que se catalogaron en las siguientes subcategorías: “*Perseverantes y con fuerza de voluntad*”, lo que resulta consistente con las investigaciones que plantean que el esfuerzo personal tiene

un efecto significativo en la mejora del desempeño en matemática (National Mathematics Advisory Panel, 2008). “Pragmáticos”, en la opinión de algunos estudiantes de Ingeniería esta subcategoría explicaría en parte también su efectividad con la matemática, diferenciándose en este aspecto de los Humanistas ($X^2_{(1)}=7,916$; $p=0,005$). Al contrario, quienes expresaron menor grado de autoconfianza, percibirían la matemática como un “Obstáculo a superar”, sentimiento que relacionarían con la “Frustración ante el fracaso”, “Falta de concentración” y “Disgusto por memorizar”. A continuación se presentan opiniones de los estudiantes que reflejan lo señalado con anterioridad:

“O sea, yo recuerdo que siempre en el curso era la que mejor le iba en matemática y en séptimo mi profesora era súper mala y al final terminaba yo con una compañera explicándole los ejercicios” (Estudiante de Ingeniería, caso 5).

“Si era.. yo, yo lloraba porque no entendía algo, y yo lloraba y lloraba, “no entiendo, no entiendo!” era.. no ese, ese fue un período mal” (Entrevistada Humanista, caso 13).

“Lo más difícil de aprender.. es un asunto que a mí me complica más aprenderme fórmulas de memoria, geometría podría ser, pero las fórmulas de geometría” (Entrevistado Humanista, caso 23).

“Como que no, eso también afecta al gusto y cariño que uno tiene con la materia, entonces como que uno dice: “ah, a lo mejor soy mala pa’ eso” “a lo mejor no sé” o “a lo mejor no me gusta cómo piensan las matemáticas” (Entrevistada Humanista, caso 49)

Estos sentimientos de éxito o fracaso que constituyen experiencias vividas por los estudiantes, son los que precisamente influyen en su interés o valoración de la matemática como área de aprendizaje. Los estudiantes podrían llegar a convencerse de una falta de habilidad como profecía autocumplida al experimentar una y otra vez errores o fracasos, que muchas veces podrían haber sido superados con una adecuada mediación, volveremos a este punto más adelante.

En la categoría **Valoración de la matemática** se dieron dos sub-categorías que reflejaron posiciones opuestas, por una parte “Desagrado con la matemática y sus conceptos” y, por otra, “Amigos de la Matemática”. Sin distinciones por área, ambos grupos de estudiantes señalaron sentir interés por la matemática, e incluso algunos de ellos expresaron “gusto” por llegar a resultados. Sin embargo, expresan con claridad que “la facilidad y el entendimiento llevan al gusto” (sub categoría) (Hidalgo, Maroto & Palacios, 2005; National Mathematics Advisory Panel, 2008). De esta manera, 11 estudiantes de la muestra que

expresaron no sentir interés por la matemática y sus conceptos (sin diferencias entre grupos), al mismo tiempo señalaron sentir desconfianza en sus capacidades. Frente a esto, atribuyen a la perseverancia y al esfuerzo personal los resultados positivos que pudieron alcanzar en la etapa escolar y en la PSU, especialmente en el caso de los estudiantes Humanistas.

“No sé, es que siempre fue como, como un ramo más dinámico, como que me gustaba pensar más los ejercicios y eso, no quiere decir que sea una experta, pero me gusta (Entrevistada Humanista, caso 57).

“Pero después, en la media, entre octavo básico y primero medio, empezamos a ver varias materias que me entretenían, como productos notables o cosas así que a mí me entretenían, o sea eran cosas que siempre definen, por uno a veces dice: “sí, claro”, algo como la matemática que la relacionan como algo fácil de hacer, yo de ahí la empecé a ver así, como algo que era entretenido, no como algo que tenía que ser un pérdida de tiempo” (Entrevistado Humanista, caso 30)

“Sí, pero nunca he requerido mucha asistencia porque siempre ha sido mi facilidad la matemática” (Estudiante de Ingeniería, caso 54)

Según los entrevistados, lograr ser “Amigos de la matemática”, habría sido una buena forma de enfrentar las dificultades que provenían de su estudio y aprendizaje de la disciplina.

Otra categoría que se reveló vinculada a la disposición hacia la matemática fue **Creencias acerca de la naturaleza de la matemática**. Aquí se levantaron concepciones tales como: “Orientación al entendimiento y razonamiento de las ideas matemáticas”, “Desarrollo de una forma lógica de pensar científico”, “Orientación al resultado”, “Aprender matemática es ejercitar”. Es decir, se cree que esta es una práctica concreta, que se enfrenta resolviendo ejercicios, y por otra parte, que la matemática es abstracta y se relaciona con el desarrollo del pensamiento.

Siguiendo esta misma línea, los estudiantes en general considerarían que la forma de aproximarse a ella sería dando valor a la comprensión de sus conceptos, teorías y axiomas para ser efectivos en el logro de los resultados, aspecto reconocido como primordial para la enseñanza y el aprendizaje efectivo de la matemática (National Mathematics Advisory Panel, 2008; Hiebert, et al, 1997; Nesher, 2000; OCDE, 2006, 2012). Sin embargo, cuando tienen que tomar una opción para enfrentar la solución de un problema particular los estudiantes de Ingeniería, a diferencia de los Humanistas, dan mayor valor a la comprensión y razonamiento de los conceptos y procesos involucrados en el problema, que

al resultado ($X^2_{(1)}=9,826$; $p=0,02$), lo que es consistente con su creencia o preconcepción de la matemática. De esta forma, se confirma que para los futuros ingenieros lo importante de la matemática correspondería a comprender sus conceptos y relaciones, más que memorizar fórmulas. Ante esto, añaden que no son buenos para memorizar, pero que saben desde donde vienen las cosas y así pueden encontrar un camino de solución, sin necesidad de aprender solamente la mecánica.

En sus palabras,

“Yo igual creo que es como una forma de ver la matemática, como que aprender matemática tení que ejercitar no ma” (Entrevistado Humanista, caso 8)

“Los que tienen un conocimiento más avanzado en matemática comprenden qué significa lo que se hace. La gente con la matemática está tratando de armar un puzzle para llegar a los resultados. El que comprende, no está tratando de armar un puzzle sino que ideando un puzzle para que otra persona lo haga” (Estudiante de Ingeniería, Caso 17)

“La gente que comprende la matemática puede utilizar diversos caminos para llegar al resultado y lograr el resultado correcto, la solución” (Estudiante de Ingeniería, caso 17)

Este foco en la comprensión los lleva, según ellos, a elegir qué camino tomar al enfrentar un problema, optar entre una vía rápida o lenta, emplear el cálculo mental o esquemas, recurrir a la aproximación o el cálculo, entre otros. Si bien los estudiantes humanistas reconocen el valor de la comprensión, a la hora de resolver un problema ponen el foco en llegar a un resultado de todas formas. Esto se explicaría al encontrar con frecuencia colegios que recurren a la enseñanza de ciertos conceptos mediante su definición, y se pasa por alto la comprensión del mismo o cómo puede ser usado en contextos reales (Ormrod, 2005)

Los estudiantes, en general, consideran que la matemática es *“Entretenida y útil para la vida”* (22 casos), y sólo un pequeño grupo de estudiantes humanistas encuentra que son *“Aburridas y sin utilidad”* (6 casos).

“(…) me aburren, como que es muy fome, muy cuadrado” (Entrevistada Humanista, caso 8)

“No siento que en la vida me llegaba mucho las matemáticas, habían cosas que a nosotros nos enseñaban y yo sentía que no servían de nada para

futuro... eh no sé, polinomio y cosas así esas cosas, como que no”
(Entrevistada Humanista, caso 24)

En consecuencia, se aprecia en general una disposición positiva e interés de los estudiantes entrevistados por la matemática (datos desagregados en Anexo 13). Se asocia la facilidad con sentimientos de autoeficacia y expresan autoconfianza en sus capacidades. Los estudiantes valoran tanto la comprensión de los conceptos matemáticos como el logro en los resultados, y sostienen como creencia que la matemática desarrolla el pensamiento lógico científico e implica resolver problemas. Lo que es consistente con lo planteado en PISA, al señalar que “en la práctica es poco probable que dicha competencia (cuantitativa) se ejerza o se ponga en práctica si el individuo no posee un cierto grado de seguridad en sí mismo, curiosidad, sentimientos de interés y relevancia o el deseo de realizar y comprender temas de contenido matemático” (OCDE, 2006, p.75).

Al comparar a los estudiantes entre áreas de estudio, se aprecian ciertas diferencias a destacar. Los de Ingeniería presentan una mayor percepción de autoconfianza en sus habilidades matemáticas que los Humanistas, mejor desempeño en los ítems y ponen especial acento en la comprensión de esta disciplina, más que en los procedimientos y los resultados. Consistente con la evidencia que reconoce la relación positiva entre resultados en matemática y autoconcepto o autoeficacia (Marsh & Retali, 2010). Aquellos estudiantes Humanistas que declaran desconfianza o dudas sobre sus capacidades consistentemente poseen bajos desempeños en los ítems tal como ha sido evidenciado en las investigaciones en el área (National Mathematics Advisory Panel, 2008).

Es frecuente encontrar estudiantes que en el sistema escolar tuvieron pobres resultados, también tengan baja percepción de autoeficacia acerca de su capacidad para aprender en el contexto académico (National Mathematics Advisory Panel, 2008). Incluso creen que son incapaces de aprender, hagan lo que hagan (Ormrod, 2005). Estos sentimientos de incompetencia en los estudiantes hacen que disminuya su interés y motivación por aprender un determinado tema o área de estudio en el futuro (National Mathematics Advisory Panel, 2008).

Dado lo anterior, resulta relevante que los estudiantes reciban mensajes estimulante por parte de sus profesores y adultos significativos, críticas constructivas respecto de sus producciones o trabajos, generando oportunidades de aprendizaje que promuevan el gusto por aprender en un espacio de confianza. Así como también, que tengan experiencias positivas y enriquecedoras del aprendizaje, ya que incluso más allá del estilo de enseñanza del profesor, la experiencia vivida en su globalidad tiene un efecto en la disposición de los estudiantes a aprender matemática (Pampaka et al., 2012).

4.5.2 Dimensión 2: Percepción del apoyo familiar durante el aprendizaje de la matemática escolar

A modo descriptivo, señalamos que la mayoría de los padres de los entrevistados son profesionales (66%), y un 13% habría alcanzado la enseñanza técnica superior en forma completa (datos desagregados en Anexo 14). La tabla 23, muestra las áreas profesionales donde se desempeñan.

Tabla 23
Profesión o actividad de los Padres

Áreas profesionales o actividad.	Padres	Madres
Ingeniería	22	5
Administración y Contabilidad	7	8
Informática	6	6
Salud	4	8
Artes	4	1
Humanidades y Pedagogía	3	11
Ciencias sociales y Jurídicas	1	3
Fuerzas Armadas	1	0
Sin profesión	9	2
Dueñas de Casa	0	13
Sin dato	4	4
Total	61	61

En lo particular, los padres de los estudiantes de Ingeniería y Humanistas son profesionales que trabajan en áreas de la ingeniería, administración, contabilidad e informática. En el caso de las madres de los estudiantes de Ingeniería que trabajan fuera del hogar, se desempeñan en áreas de las humanidades, pedagogía, salud, administración, contabilidad e informática, mientras que las madres de los estudiantes Humanistas, son en su mayoría dueñas de casa.

Como resultados de las entrevistas, los estudiantes reportan que hay padres “*Con Habilidad Matemática*” y otros “*Sin Habilidad Matemática*”. Asimismo, algunos se encuentran dentro de la categoría “Apoya y estimula el aprendizaje de la matemática” y otros “No apoya en matemática”. Los estudiantes entrevistados, en general, tienen la percepción de que sus padres tienen mayor habilidad matemática que sus madres, quienes adicionalmente no tendrían gusto por la matemática. Lo anterior se vio en especial en los estudiantes Humanistas, diferenciándose de los de Ingeniería en forma estadísticamente significativa ($X^2_{(1)}=5,255$; $p<0,05$), lo que refleja un cierto sesgo de género en esta materia bajo la creencia que las matemática son propias de un mundo masculino (Mukhopadhyay, 2004).

Los estudiantes expresan que fueron sus madres quienes les ayudaron a estudiar en los primeros años de escolarización, pero a medida que fueron avanzando, comenzaron a estudiar solos. A pesar de lo anterior, llama la atención que los estudiantes Humanistas, a diferencia de los estudiantes de Ingeniería, son los que más recurrieron al “Apoyo familiar” para estudiar matemática o resolver dudas en torno a ésta durante la enseñanza media ($X^2_{(1)}=3,882$; $p<0,05$). Entre las personas a las que más recurrieron solicitando apoyo, se encuentran el padre y/o hermanos mayores con habilidades o gusto por la matemática. Algunas de las estudiantes señalaron que gracias a este apoyo pudieron entender muchos de los problemas y aspectos teóricos asociados a la matemática.

En sus palabras:

“Mi mamá me motivaba con la matemática, porque no quería que yo pasara el sufrimiento que ella pasó de no entender nada de matemáticas. Ella era como la que me... En cambio, mi papá no porque trabajaba mucho y no tenía tiempo, y por el lado de mi papá mi abuelo igual, mi abuelo igual como que también tenía esa misma lógica y la instaló a mi papá y a mis hermanos, porque yo no la tengo” (Estudiante humanista, caso 3).

“Mi papá, como que iba con el ejercicio y le decía “sabes que no entiendo nada”, y él decía “Mira en este ejercicio te equivocaste en este concepto porque mira revisemos esto, esto se hace así de tal forma blah blah blah, y esto es por esto” y me explicaba como bien profundo en realidad, igual sabe harto”(Entrevistada Humanista, caso 19)

En el caso de los estudiantes de Ingeniería, los relatos indican que usualmente no recurrían a su grupo familiar para solicitar ayuda, al no necesitarlo. Agregan que, de haber necesitado ayuda, en general sus padres, especialmente el padre, no tenían tiempo para ayudarlos por sus extensos horarios de trabajo.

De acuerdo a las palabras de los estudiantes:

“Porque mi mamá siempre estuvo en mi casa, siempre estaba con ella, mi papá llegaba más tarde del trabajo, y llegaba a acostarnos a todos” (Estudiante de Ingeniería, caso 60)

“No sé. Bueno, igual mi papá siempre ha llegado tarde. Ahora no llega tarde, pero siempre llegó a las ocho, como algo así. Como que yo esté “papá, papá, papá” [él decía] no, entonces yo creo que por ahí va. Además yo aprendí por mi cuenta. No, en realidad yo aprendí por mucho tiempo porque ponía atención en clases y con eso tenía de sobra” (Entrevistado de Ingeniería, caso 27)

“no, en eso como que nunca se metieron mucho, tampoco son tan matemáticos, yo creo que algo incidió eso, a lo más me dijo que prefería que entrara a Derecho antes que Letras. Derecho no tiene muchas matemáticas más que Letras, no más que nada me dijeron que me tirara a lo que me gustaba y las matemáticas no son tan fuertes en mi casa tampoco eran tan apreciadas” (Estudiante Humanista, caso 4)

Una posible explicación de una participación menos presente de los padres en este caso, podría corresponder al nivel de autonomía que familias en este contexto pueden haber incentivado en ellos, como valor para enfrentar las decisiones de la vida futura (Grolnick, 2009; Gubbins, 2014; Hill & Tyson, 2009). La evidencia teórica muestra que el status socioeconómico y cultural de estas familias de padres profesionales, que han privilegiado colegio particulares para sus hijos, tienden estimular el desarrollo cognitivo cultural, el auto-control y la autonomía de sus hijos, a diferencia de familias en desventaja quienes privilegian por sobre todo la satisfacción de necesidades básicas (Gubbins, 2014). Se valora que los estudiantes aprendan a pedir a ayuda cuando se ven enfrentados a un problema que no comprenden, aspecto que sus madres incentivan durante las distintas etapas de desarrollo.

Es relevante señalar la importancia de la participación de los adultos (padres – profesores) en el proceso de aprendizaje de los estudiantes (Murillo & Roman, 2011; UNESCO, 2015). Ellos transmiten a los niños y niñas las diversas maneras en las que su cultura interpreta y responde al mundo. De este modo, los estudiantes pueden desarrollar los conocimientos, habilidades y formas de pensar propias de su cultura, así como también, explorar por ellos mismos o con sus pares, incrementando su aprendizaje a través de la construcción de significados compartidos de forma activa (Bronfenbrenner, 1987, Bronfenbrenner & Morris, 2005; Bruner, 1987; Staarman & Mercer, 2010; Vass & Littleton, 2010). Con el apoyo de adultos en los primeros momentos, como un tipo de “andamiaje”, los estudiantes de la muestra pudieron realizar tareas cada vez más difíciles y favorecer su aprendizaje (Vigostky, 1995). La teoría indica que se aprende menos cuando se realizan las tareas solos (Ormrod, 2005).

Generalmente, los estudiantes señalaron que la disposición en torno a la matemática en sus hogares no era ni favorable ni desfavorable. Indicaban que *no era un tema*, ya que la preocupación se encontraba en cumplir todas las exigencias escolares y rendir en forma exitosa en la Prueba de Selección Universitaria. Tal situación descrita, parece ser diferente a lo vivido por las familias asiáticas, donde la matemática es un aspecto que se valora y enfatiza a nivel cultural (Miller, Kelly & Zhou, 2005).

4.5.3 Dimensión 3: Estrategias de estudios para el aprendizaje de la matemática

A partir del análisis realizado de las entrevistas, se puede interpretar que hay una serie de aspectos comunes en la forma que los participantes estudiaron matemática en su etapa escolar (datos desagregados en Anexo 15). Así, la expresión más representativa de estas estrategias se pueden apreciar en las siguientes categorías: *“Estudio a solas”*, *“Lectura y revisión de materia de clases, con guías”*, *“Ejercitar durante la clase y fuera de ella”*; *“Crear un método personal efectivo”*, *“Indagar información en internet”*, ya sea buscando ejercicios nuevos, o explicaciones a contenidos no resueltos en clases. Reconocen, además, que una forma efectiva de estudiar es *“Enseñar a un(unos) par(es)”*, puesto que para ello no sólo necesitan entender con claridad los conceptos, sino que también requieren explicarlos a otros estudiantes que presentan algún tipo de dificultad en esta asignatura.

En menor medida, se busca *“Memorizar fórmulas y propiedades”*, así como *“Estudiar clase a clase”*, aunque reconocen que se debería estudiar en forma permanente. En general los estudiantes de ambas áreas señalaron estudiar poco fuera del aula, únicamente motivados por las evaluaciones, es decir por el logro de objetivos de rendimiento (motivación extrínseca). Lo anterior resulta consistente con las investigaciones que reflejan que la correlación entre motivación intrínseca y rendimiento en matemática y ciencias es inversa en la medida que los estudiantes progresan en la escuela (National Mathematics Advisory Panel, 2008). Respecto de la categoría *“Comprender la lógica de los problemas, sus conceptos y aplicación”*, se puede señalar que, si bien ambos grupos consideran este aspecto importante, existe una leve diferencia a favor de los estudiantes de Ingeniería, quienes la utilizan en mayor medida como base para el aprendizaje, tal como se señaló con anterioridad.

“Claro, yo me acuerdo que a medida que dictaba yo iba procesando lo que ella iba diciendo, que a mí se me ocurre que muchos compañeros no hacían, simplemente repetían las palabras, pero yo como que procesaba, incluso me acuerdo de hasta haber corregido, cambiado con mis palabras lo que ella dictaba” (Entrevistado de Ingeniería, caso 56)

“Si uno realmente quiere aprender matemática y hacer algo realmente útil con ella, no sirve saber que haciendo esto, esto y esto otro me va a dar un

resultado, por ejemplo cuando sucede con gráficos cuando uno empieza a sacar los valores, dependientes, puntos, uno a veces los saca porque sí, pero entender por qué sucede esto y tratar de acercarlo un poco más a la vida real y es ahí donde entra la física que usa la matemática para explicar fenómenos naturales eh::: uno entiende mucho mejor matemática, no es que saber que funciona porque sí, y creo que esa es la manera en que uno debería aprender matemática, entenderlo, hacer ejercicios y tratar de ver si tiene alguna aplicación real en la vida” (Entrevistado de Ingeniería, caso 17).

En esta línea, se sabe que muchos estudiantes no controlan adecuadamente su comprensión, ignorando lo que saben y lo que no saben e incluso puede que crean que entienden algo, lo que en realidad han entendido mal, como fue el caso de algunos estudiantes humanistas. Lo anterior los lleva a dejar de estudiar el material de clases muy pronto y se sorprenden cuando los resultados en los exámenes son bajos (Hacker et al., 2008).

Algunos estudiantes, sin distinción de carrera, indicaron que como apoyo a su aprendizaje recurrieron a profesores particulares. Unos pocos lo hicieron durante la educación básica y, otros, para aspectos específicos durante la enseñanza media. En el caso de los estudiantes de Ingeniería, este apoyo fue utilizado en la preparación de la PSU.

Algunas categorías que presentaron diferencias significativas por grupos fueron “*Estudiar con compañeros*” y “*Reconocimiento de errores y debilidades*”. La primera estrategia les habría ayudado a los humanistas a superar las dificultades, tanto en la resolución, como en la comprensión de conceptos, diferenciándose de los de Ingeniería ($\chi^2_{(1)}=4,489;p<0,05$). Esta estrategia se reconoce, de todos modos, como positiva para ambos grupos tanto fuera como dentro del aula, ya que a partir de esta interacción es que los estudiantes tuvieron la oportunidad no sólo de desarrollar su propio entendimiento sino que además de construir significados compartidos de forma activa (Bruner, 1998; Staarman & Mercer, 2010; Vass & Littleton, 2010; Vygotsky, 1979).

La exploración, el debate en grupos pequeños hace que los estudiantes se sientan implicados y les permite desplegar una variedad de pensamientos y utilizar distintos tipos de conocimiento e ideas. Así también, aprenden diferentes conductas y formas de resolver situaciones matemáticas cuando observan a otros realizarlas, lo que contribuye a enfrentar los problemas futuros de manera independiente. Tal como se señala en Ormrod (2005) “con frecuencia los estudiantes aprenden con más eficacia habilidades académicas cuando los modelos no sólo demuestran cómo hacer algo, sino también cómo pensar sobre ese algo” (p.153). Potenciar el trabajo colaborativo entre estudiantes es una estrategia eficaz para el desarrollo de la metacognición (Pérez de Albéniz, Escolano, Pascual, Lucas y Sastre, 2015).

La segunda categoría, “*Reconocimiento de errores*”, sería una estrategia propia de los estudiantes de Ingeniería, es decir, estos estudiantes tenderían a trabajar con sus propios errores y sobre estos mejorar sus aprendizajes ($\chi^2_{(1)}=5,107;p=0,024$).

En general, se aprecia que los estudiantes que cuentan con mayor habilidad matemática, y han logrado aprendizajes profundos, duraderos y eficaces se caracterizan por establecer metas, elegir las estrategias de aprendizaje que pueden ayudar a conseguir las metas y evaluar los resultados de los propios esfuerzos. Asimismo, pueden controlar su propia motivación y emociones (Baxter & Glaser (1998). La capacidad de autorregulación les posibilita establecer metas más altas para sí mismos, lograr mejores y más significativos aprendizajes y tener un mejor rendimiento en clases (National Mathematics Advisory Panel, 2008). El proceso indicado se logra de modo gradual, a partir de un acompañamiento más presente en los primeros años y más periférico en la medida que van creciendo. Un puente adecuado para llegar a un aprendizaje autorregulado sería el aprendizaje corregulado, en el que participan adultos y otros niños, compartiendo la responsabilidad de dirigir el aprendizaje (Ormrod, 2005; Vygotsky, 1979). Los estudios en resolución de problemas matemáticos han demostrado que los expertos resolutores sólo emprenden la ejecución cuando han analizado suficientemente la situación hasta llegar a comprenderla, lo que evidencia su autorregulación (Whitebread & Pino, 2010).

Concordante con los datos expuestos, De la Barrera (2008), a partir de sus investigaciones con estudiantes de educación superior del área de las ciencias humanas, señala que existiría mayor uso de estrategias más bien superficiales de aprendizaje, como las nemotecnias y una valoración mayor a la retención que a la comprensión. Lo anterior se diferencia de Ingeniería, donde se habría encontrado un estilo elaborativo, mayor desarrollo de habilidades de carácter tipo perceptivo-espacial, intuitivo, concreto, dominante en actividades divergentes, con cierto emprendimiento y creatividad.

Así como es sabido que una percepción positiva de autoeficacia es relevante para enfrentar procesos de aprendizaje exitosos (Marsh & Retali, 2010; Omrod, 2005), y que ésta se fortalece cuando recibimos mensajes estimulantes por parte de los demás y/o críticas constructivas respecto del trabajo, cuando realizan trabajos colaborativos en grupos efectivos, o cuando sus amigos y compañeros parecidos a ellos son exitosos. No obstante, se afecta negativamente la percepción de autoeficacia, cuando los estudiantes no reciben estímulo, son receptores de mensajes destructivos o cuando les entregan más ayuda de la que realmente necesitan. En este último caso, el mensaje sería contraproducente al transmitir al estudiante que no es capaz de realizar la actividad por sí mismo. Las siguientes dimensiones reflejan la experiencia de los estudiantes entrevistados en torno a aspectos que configuraron su historia personal.

4.5.4 Dimensión 4: Experiencias escolares que favorecieron el aprendizaje de la matemática

Esta dimensión se configuró a partir de dos categorías importantes: “*Rasgos y características de los profesores de matemática*” y “*Metodologías de enseñanza utilizadas en el aula*”. En cada una de estas categorías se revelaron una serie de sub categorías, dentro de las cuales las más representativas se señalan a continuación (datos desagregados en Anexo 16).

Respecto de la primera categoría, “*Rasgos y características de los profesores de matemática*”, la mayoría de los estudiantes distinguen la “*Preocupación por el aprendizaje de sus estudiantes*”, lo que se refleja en que el profesor conoce a sus estudiantes y se adapta a ellos; “*Con conocimiento profundo y eficaz de la matemática*”, lo que lo hace creíble frente a sus estudiantes, ya que no cae en imprecisiones; “*Disposición hacia el otro sin creerse superior*”, “*Ordenado y metódico*”, “*Exigente y con carácter*”. Este último punto es relevado por los estudiantes de Ingeniería, para quienes un profesor o profesora exigente es valorado y positivo, es decir, no los intimida.

Existen dos sub categorías que presentaron diferencias estadísticamente significativas por grupo a favor de los estudiantes de Ingeniería, estas corresponden a “*Estimula la superación y el autoaprendizaje*”, lo que se reconoce cuando el profesor es capaz de desafiar a sus estudiantes con problemas de mayor exigencia ($\chi^2_{(1)}=5,748;p<0,05$) y “*Es respetado por sus estudiantes, manteniendo una relación cercana*” ($\chi^2_{(1)}=4,515;p<0,05$). En este sentido, se puede interpretar que los estudiantes de Ingeniería se vieron expuestos en mayor medida a este tipo de experiencias positivas que los Humanistas. Algunas de sus expresiones que apoyan estos resultados se presentan a continuación.

“Él logró que todos subieran sus puntajes, o sea, los del grupo bajo, los trabajó psicológicamente en el sentido que ellos pueden, los motivó. Le hizo creer que podían” (Entrevistado de Ingeniería, caso 26).

“Pero, e igual que acá como te iba [la profesora] integrando toda la materia, entonces como que la materia se iba acumulando y que en el fondo te hacía como que en una prueba igual te hacían ejercicios que igual podías hacer, pero tenías que pensarlo bien, qué es lo que sabes o lo que no sabes o lo que podí saber, entonces son desafiantes, no son ni difíciles ni fáciles...” (Entrevistado de Ingeniería, caso 37).

En cuanto a la categoría “*Metodologías de enseñanza utilizadas en el aula*”, los estudiantes destacan los siguientes aspectos: “*Ejercitar tanto en la clase como en casa, con ejercicios fáciles y difíciles*”, “*Explicación de forma contextualizada*”, “*Explicación de conceptos,*

ejercicios, retroalimentación”, *“Cumplir con los contenidos del programa”*. Todo lo anterior habría sido parte de la experiencia que favoreció, según los estudiantes, el aprendizaje de la matemática.

Aquellas sub categorías que presentaron diferencias estadísticas entre Ingeniería y Humanista en cuanto a la Metodología utilizada fueron, *“Foco en la comprensión de la lógica matemática, desarrollando habilidades de pensamiento”* ($\chi^2_{(1)}=4,511;p<0,05$), y *“Explicación de los errores y orientación de cómo superarlos”* ($\chi^2_{(1)}=4,800;p<0,05$). Estas experiencias positivas fueron mayormente vividas por Ingenieros que por Humanistas. Los primeros destacaban que sus profesores ponían el foco en que ellos comprendieran el problema que debían enfrentar, y no sólo aprendieran la mecánica de resolución. Además, resaltaron la retroalimentación de sus errores, como forma de mejorar su comprensión y efectividad.

En consistencia con las investigaciones en el área, se refuerza la idea de que una percepción positiva de los errores se traduce a su vez en un positivo “clima de errores” en el aula, favoreciendo la motivación, la autoregulación y el aprendizaje (Steuer, Rosentritt-Brunn & Dresel, 2013). En este sentido, es valorada la evaluación formativa como una oportunidad para que los profesores puedan detectar las fuentes de errores conceptuales y de procedimiento de los niños en las áreas de contenido que están enseñando, para así lograr la comprensión y desarrollo de estos (National Mathematics Advisory Panel, 2008; Shepard, 2006). Al mismo tiempo, se vislumbra como una oportunidad para que los estudiantes puedan autorregularse, tendiendo a su vez efectos positivos en su disposición y motivación al aprendizaje (Clark, 2012).

La experiencia de los estudiantes, se puede observar en las siguientes expresiones.

“Eh:: la profe era súper teórica, o sea, pasaba bien las definiciones, con letras, números y esas cuestiones, esa típica cosa que lo escribe y no entiende na'a y se demora como una hora cuando lo explica, pero en el fondo uno entiende así, como el número, el núcleo y después se pone hacer ejercicios, pero primero, la definición, y lo que me gustaba, que lo demostraba todo, o sea, uno sabía de dónde salían las cosas” (Entrevistado de Ingeniería, caso 61)

“Nos enseñó que las derivadas pueden ser usadas, por ejemplo, otra vez, para maximizar el volumen de un tarro, por ejemplo el tarrito de leche condensada Nestlé es el cilindro que ocupa menos lata, y que con el mayor volumen posible, por eso mismo lo tienen patentado, entonces uno con la matemática podía sacar cosas útiles para uso cotidiano, ahí uno empezó a darse cuenta que estudiar nada más y hacer ejercicios no era

necesariamente aprender, que aprender es algo que va mucho más allá, que plantea una asimilación de lo que uno está estudiando” (Entrevistado de Ingeniería, caso 17)

“Y él iba puesto por puesto, y el que tenía duda, preguntaba y si veía que uno estaba trancado, -“pero ¿qué te pasa?”- “no, es que no puedo hacer esto”- y explicaba uno por uno. Y después hacía ejercicios todos en la pizarra” (Entrevistado de Ingeniería, caso 36).

Una sub categoría que presentó diferencias significativas a favor de los humanistas fue *“Enseñanza personalizada”* ($\chi^2_{(1)}=5,138;p<0,05$). Esto refleja que los estudiantes Humanistas consideraron positivo el apoyo focalizado, reconociendo sus buenas experiencias en este sentido.

“..usaba ejemplos gráficos, te explicaba en la pizarra, te dibujaba, por ejemplo cuando vimos geometría te explicaba los ángulos, te explicaba por qué, qué es un ángulo recto, de forma mucho más lenta y calmada, no tan masiva en una sala de clases con treinta chicos y un profesor solo para una clase en que un cuarto entiende y el resto (está durmiendo)(...), entonces ahí aprendías bien, o sea, y cosas que nunca aprendí en el colegio” (Estudiante Humanista, caso 3).

“y claro era como bien maternal, como que iba persona por persona, y se preocupaba y siempre decía, a mí me preocupa mucho que alguien no entienda, y no voy avanzar hasta que tengan más menos el mismo nivel” (Entrevistada Humanista, caso 16)

En general, la mayoría de los estudiantes comentó que la experiencia de preparación a la PSU, mediante preuniversitarios o profesores particulares, tuvo un énfasis en la ejercitación mecánica, resolución de guías y resolución de dudas focalizada en la efectividad de un resultado. Sin embargo, añaden que fue una buena experiencia, puesto que se trabajaba en forma personalizada, en grupos pequeños, con el acompañamiento más directo de un profesor o profesora, lo que les habría ayudado a lograr su propósito de ingresar a la universidad. De hecho, en algunos casos los estudiantes comentaron que fue, precisamente, con el profesor o profesora del preuniversitario con quien lograron entender contenidos y relaciones, que no habían logrado en el colegio.

“Yo tomé un año, yo me tomé un de preuniversitario y ahí ahí aprendí, irónicamente toda la matemática que no aprendí en toda la enseñanza media y cómo la aprendí...” (Estudiante Humanista, caso 3)

“O sea, daban la guía, uno la resolvía, y después si uno tenía dudas de una materia o alguna pregunta, habían módulos extras que uno podía ir a preguntarle al profesor (...)Y en clase también, si uno no alcanzaba la clase podía ir después, cosas así, y era mucho más ordenado, mucho más esquemático, y::: las pruebas eran como realistas, no eran muy difíciles o muy fáciles por eso creo que me fue mejor” (Entrevistada Humanista, caso 13).

Como sabemos, lo ideal en este sentido es que los estudiantes dispongan de una sensación de confianza, que les haga tener claridad sobre aquello que son capaces de hacer y de lo que no. El profesor contribuye a que enfrenten los desafíos, sin sobre ni subestimar sus capacidades (Ormrod, 2005).

4.5.5 Dimensión 5: Experiencias escolares que dificultaron el aprendizaje de la matemática

Al igual que la dimensión 4, esta dimensión se configuró a partir de las siguientes categorías: *“Rasgos y características de los profesores de matemática”* y *“Metodología de enseñanza aplicada en aula”* (datos desagregados en Anexo 17).

De acuerdo a la primera categoría, las subcategorías más representativas son: *“Profesor rígido que impone el orden”*, *“Bajas expectativas y nivel de exigencia a sus estudiantes”*. Estos serían, según los estudiantes, aspectos negativos en su proceso de aprendizaje escolar, lo apoyan las siguientes expresiones.

“Sí, en el ramo de matemáticas, entonces te dividían en grupo, el grupo uno, están todos, por ejemplo, los que se manejan en matemática al revés y al derecho y por ende ellos tienen una mejor calidad de aprendizaje, los del medio ya no son ni chicha ni limonada y el grupo bajo no ven todos los contenidos que ven el grupo uno y dos y van a ritmo como, igual rápido, pero es como ya el profesor: ah ya este el grupo que a todos les cuesta matemática, no se esfuerzan tanto porque ya a todos les cuesta, entonces ya como que estén ahí y así fue” (Entrevistado Humanista, caso 3)

“Sí. Eso, asumían que uno ya sabía y si uno de repente le preguntaba las cosas como más básicas, la base de la materia, si uno de repente le preguntaba ¿por qué era así?.. Porque él lo decía no más, no había una explicación más atrás (Estudiante Humanista, caso 46).

“Sí, me acuerdo que una vez estábamos en clases y yo le dije “profe, sabe que no entiendo el problema” y me lo explicó, me dijo “¿entendiste?,” no,

no entendí”, pero “cómo es tan tonta”, me dijo así y yo le dije ya, como que, “ya, si entendí” y al final nunca entendí pero era como para que no me retara” (Estudiante Humanista, caso 26)

Las sub categorías que evidencian una experiencia negativa vivida por los estudiantes Humanistas fueron “*Profesor arrogante, se cree superior, no se atribuye responsabilidad por el fracaso de sus estudiantes*” ($\chi^2_{(1)}=7,606;p=.006$). En los estudiantes de Ingeniería, se destaca la sub categoría “*Débil manejo de contenidos, no da confianza*” ($\chi^2_{(1)}=4,800;p=.028$). Este aspecto evidencia una de sus principales experiencias negativas. Para ambos grupos, esta característica es de gran importancia, señalando que cuando un profesor se equivoca en la explicación y/o desarrollo de algún ejercicio, esto significaba que ya no se puede confiar en el dominio conceptual que posee.

“Era muy despectiva, muy discriminadora, entonces, ella consideraba que la gente que no sabía matemática, nada, no valía nada. Entonces, para ella la matemática era todo y mis compañeros humanistas eh:: y odiaban las matemáticas, tenían muchos rojos en matemáticas los discriminaba” (Entrevistado Humanista, caso 10)

“..., hombre muy desagradable porque llegaba y te decía: es que el problema es súper fácil es que lo debería hacer en dos segundos, y como que te estresaba y entonces, claro uno al final en esa clase al final terminaban yendo cinco personas porque las personas se salían de ésta clase porque éste tipo les decía que si no te iba bien en la PSU matemáticas ibas a terminar barriendo en la calle, te decía eso...” (Estudiante Humanista, caso 4)

“O sea, tal vez ella no dudaba de sus propios conocimientos pero hacía que nosotros estudiantes sí dudáramos de sus conocimientos, entonces uno al estar bajo una figura de la cual duda de su propio conocimiento matemático y a la cual dudas en preguntarle etc., no aprendes, incluso se dan estos dos casos que el nivel de la clase comparado con el nivel de la prueba era muy distante” (Estudiante de Ingeniería, caso 17).

En cuanto a la categoría Metodología de enseñanza las experiencias desfavorables o negativas, se evidencia en las siguientes sub categorías: “*Foco en la ejercitación y en el resultado*” más que en el aprendizaje, “*Énfasis en pasar materia*”, “*Estilo centrado en el pizarrón*”, “*Evaluación sin relación con la enseñanza*”, “*Explicaciones poco claras, no considera el ritmo de aprendizaje de los estudiantes*”.

“Además en tercero y cuarto medio te hacen un curso que es de PSU, que es súper fácil la verdad, proporciones, porcentajes. Estos ejercicios son muy

estilo PSU, así eran todos. Era como ya, resuélvelo rápido y eso importa en la PSU, no importa pensar” (Estudiante de Ingeniería, caso 43)

“Sí, sí po’. Él sabía mucho, como que... si uno le ponía el ejercicio más difícil, lo resolvía al tiro, sabía mucho, pero no sabía cómo explicarte, cómo había hecho ese ejercicio, como que lo tenía en su mente y no lo podía sacar..” (Estudiante Humanista, caso 52)

La comparación entre estudiantes Humanistas y de Ingeniería muestra diferencias estadísticamente significativas en las siguientes sub categorías, *“Hace la clase para los que entienden, discriminando a los más débiles”* ($\chi^2_{(1)}=6,345;p<.05$). Así, en variadas ocasiones los estudiantes humanistas reportaron faltas de respeto hacia ellos por parte de sus profesores. Otra subcategoría es *“No explica el porqué de las cosas, la lógica de los conceptos y sus relaciones”* ($\chi^2_{(1)}=4,489;p<.05$), los temas se verían por separado sin hacer una articulación explícita entre ellos. Algunos estudiantes señalan que se debería *“ir más allá de la PSU”*, y no sólo focalizarse en la preparación a esta prueba, sino en la comprensión real de la matemática.

“a mí me costaban igual las matemáticas en el colegio, era como simplista, porque siempre me ha pasado que tenía un problema con las matemáticas, era que no la veíamos en conjunto, o sea, la veía como la factorización, las funciones, pero no era una cuestión unitaria, entonces como que uno no tiene una mentalidad matemática”. (Estudiante Humanista, caso 2).

“Yo siento que en el colegio no era como una visión como holística del tema, era como una visión muy parcelada y muy como funcional y que no me despertó ninguna pasión” (Estudiante Humanista, caso 2)

“Sí, sí ahí yo tuve muchos profesores que hacían los ejercicios como si nosotros lo estuviéramos entendiendo, entonces se ponía en el pizarrón y decía bueno esto es esto porque claro porque esto es esto y lo daba por hecho que entendíamos todo” (Estudiante Humanista, caso 12).

En consecuencia, los estudiantes están de acuerdo en que un profesor poco motivado, que no le preocupa el aprendizaje de todos sus estudiantes, afecta de modo significativo el aprendizaje de la matemática y la relación que se establece con ella. Su opinión es consistente con la experiencia que aún se aprecia en la práctica de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. La resolución de problemas ha sido una cuestión reducida a problemas estandarizados trabajados como una simple aplicación de técnicas enseñadas (ya sea las aritméticas o las algebraicas), por lo que algunos estudiantes afectados en forma negativa a diferencia de otros más afortunados, han desarrollado un aprendizaje

memorístico más que comprensivo (Espinoza, Barbé & Gálvez, 2009). Se observa la aplicación de un modelo tradicional basado en la exposición y ejemplificación de los conceptos y técnicas, a partir de una práctica rutinaria. Exceso de formalización y falta de conexión con la realidad. Ante la dificultad de enseñar conceptos geométricos abstractos, por ejemplo, se observa la reducción de la geometría a los aspectos de cuantificación (cálculos de superficies y volúmenes o medida de ángulos), o simplemente relegar los temas de geometría para el año siguiente una y otra vez.

Se observa que los estudiantes no están acostumbrados a buscar caminos alternativos de solución, sino que más bien, pareciera entrenárseles para responder de una sola forma, bloqueando a nivel cognitivo la búsqueda de soluciones alternativas a los problemas (Gálvez et al, 2010). Así también, existe mayor riesgo que los estudiantes cometan errores u olviden pasos de la secuencia establecida (Gálvez et al., 2010). Es más, la teoría indica que “la enseñanza tradicional no va en la dirección de un crecimiento favorable de las funciones ejecutivas que sirven de fundamento al pensamiento matemático abstracto” (Radfor & André, 2009)

La preparación de examen y “el aprendizaje de técnicas para la superación del mismo, diseñados con una intencionalidad fija, hace que la matemática actúe como un filtro negativo bloqueando el progreso de la vida de aquellos que no aprueban el examen” (Hilton, 2000, p.79). De esta manera, se disminuyen las posibilidades de comprender la matemática en su contexto global y, a su vez, lograr una comprensión del mundo en que estamos insertos.

4.5.6 Dimensión 6: Motivos de la Elección de Carrera

Esta dimensión presentó tres categorías emergentes, que también podrían relacionar la experiencia escolar con el aprendizaje de la matemática. Estas categorías vienen a representar los motivos de elección que expresaron los estudiantes (datos desagregados en Anexo 18).

- ***Habilidad y gusto por el área***, sin distinción por carrera (13 estudiantes de Ingeniería y 12 Humanistas). Los estudiantes manifestaron que más allá de sus habilidades, ellos habrían elegido su carrera desde siempre, dada su inclinación a un área del conocimiento que concordaba con sus intereses. En este sentido, la pregunta que surge para la tesista es si este interés se encuentra mediado o no por una habilidad que, al parecer, se vive como experiencia positiva o negativa desde los primeros años de la escolaridad, haciéndose más permanente en la medida en que los estudiantes avanzan en sus distintas etapas.

- ***Características propias de la carrera***, esta categoría se encuentra más presente en el relato de los estudiantes de Ingeniería, que los Humanistas ($\chi^2_{(1)}=26,019$; $p=.000$). Los futuros Ingenieros destacan de su carrera aspectos como la diversidad del campo laboral (13 casos), lo que les permitiría ser la puerta de entrada para explorar otras cosas, herramientas que entrega (4 casos), tranquilidad económica (4 casos) y la posibilidad de ayudar a otros (1 caso).
- ***Vocación***, esperamos que esta categoría fuese la más importante en esta dimensión, pero no fue tan representativa de los estudiantes (16 casos). Cabe destacar que fueron los Humanistas, diferenciándose de los de Ingeniería ($\chi^2_{(1)}=6,454$; $p<0.05$) quienes le dieron mayor valor. Llama la atención que sólo el 26% del total de estudiantes entrevistados declararon que eligen su carrera por vocación.

4.5.7 Síntesis del análisis cualitativo comparado por área

Del análisis e interpretación de los datos recogidos, se puede afirmar que los estudiantes Humanistas se diferencian significativamente de los de Ingeniería por haber tenido, en primer lugar, experiencias positivas en cuanto a la interacción productiva con sus pares, lo que en muchos casos les permitió vivir experiencias de colaboración y apoyo efectivo para sortear las barreras y limitaciones del aprendizaje en el área. En segundo lugar, una enseñanza personalizada ya sea con profesores o familiares, lo que permitió focalizar el aprendizaje en sus propias necesidades y estilos de aprendizaje.

Al mismo tiempo, se señalan experiencias desfavorables, caracterizadas por una interacción negativa con sus profesores, centradas en la arrogancia, la discriminación, la falta de oportunidades de aprendizajes para todos, y debilidades en la capacidad de sus profesores para mediar entre los saberes propios de la disciplina, la matemática, y los recursos de sus estudiantes. Se privilegian explicaciones centradas en la resolución y el cálculo matemático más que en la comprensión de sus relaciones. A pesar de lo declarado por los estudiantes, se plantea la duda respecto de si la experiencia vivida, influyó en la decisión vocacional de estos a pesar de no ser declarada por ellos.

El siguiente esquema representa estas relaciones.



Figura 30: Vivencias significativas de los estudiantes del área humanista en su proceso de aprendizaje de la matemática, en la etapa escolar

Al contrario, los estudiantes de Ingeniería se diferencian significativamente de los Humanistas, por haber tenido experiencias de aprendizaje más favorables que, junto a sus resultados exitosos en la etapa escolar, reforzaron la autoconfianza en sus capacidades y la decisión de prestar mayor atención a la comprensión y razonamiento matemático, en desmedro del aprendizaje memorístico o al cálculo sin sentido. Se valora el error como oportunidad de aprendizaje en cuanto estrategia de estudio a nivel personal, lo que fue reforzado por sus profesores a nivel de aula. Los estudiantes tuvieron experiencias favorables con profesores que estimularon la superación, inspiraron respeto dado el foco permanente en la comprensión de la lógica matemática y los desafiaron. Pese a lo anterior reconocen en su historia a profesores que no contaron con el conocimiento disciplinar esperado.

En opinión de los estudiantes, estas experiencias positivas no habrían influenciado su elección de carrera.

El presente esquema refleja las relaciones descritas

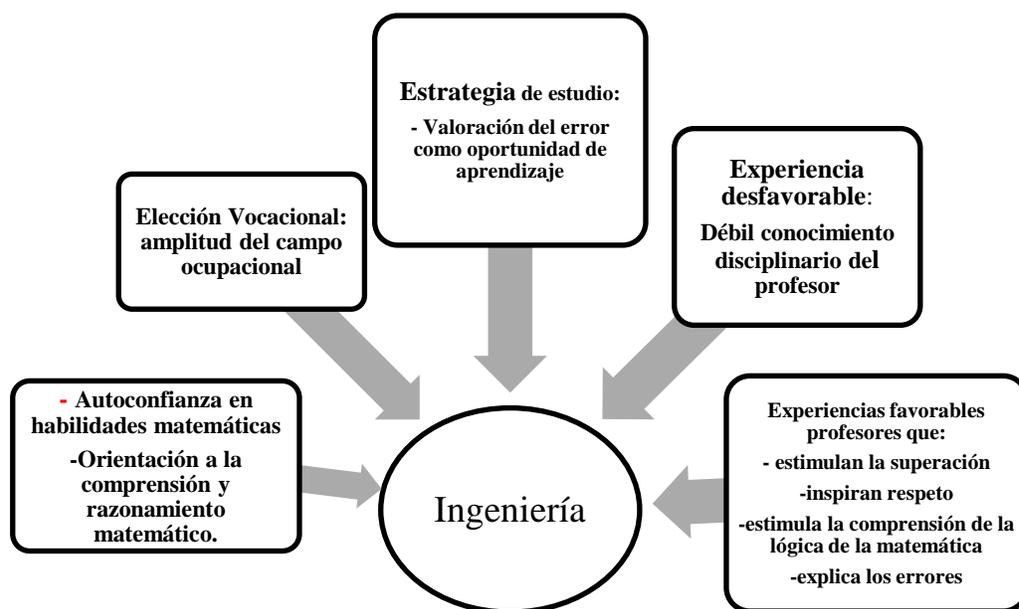


Figura 31: Vivencias significativas de los estudiantes del área ingeniería en su proceso de aprendizaje de la matemática, en la etapa escolar

En síntesis, se afirma que dada la experiencia escolar de los estudiantes de la muestra existirían diferencias en las vivencias subjetivas de estos en el aprendizaje de la matemática, que se expresa a partir de relaciones multidimensionales propias de la historia de los estudiantes, como son: la disposición al aprendizaje de la matemática, el apoyo

familiar, las estrategias de estudio y las experiencias favorables y desfavorables del aprendizaje de la matemática en la escuela. Las diferencias en las vivencias escolares de los estudiantes, consideran además, aspectos personales propios de estos, tales como provenir en su mayoría de colegios de dependencia particular y particular subvencionada, hijos de padres profesionales, que eligieron la carrera y la universidad en la que estudian.

Dentro de las experiencias que pueden a llevar a establecer una relación positiva y constructiva para el aprendizaje de la matemática, se concluye que, **a nivel personal**, resulta importante el apoyo familiar o de adultos significativos, en especial para estudiantes cuyo centro de interés no se encuentra en la matemática y sus conceptos, ya sea porque ha tenido resultados pocos exitosos o porque no es un contenido atractivo para ellos. La colaboración entre pares, la enseñanza personalizada y el foco en la comprensión más que en el cálculo, también resultan ser estrategias que favorecen el aprendizaje para los estudiantes. **En el aula**, que el profesor tenga un dominio experto del contenido, en la enseñanza de dicho contenido, y que sea capaz de argumentar sus decisiones de manera efectiva, es destacado de manera especial por quienes presentaron un nivel mayor de desempeños. Por otra parte, para quienes presentaron un nivel más disminuido, que el profesor crea en sus estudiantes y oriente la enseñanza a todos sin diferencias de ningún tipo, se valora de manera muy especial (ver figura 32).



Figura 32: Síntesis acerca de las vivencias significativas de los estudiantes en el aprendizaje de la matemática escolar

TERCERA PARTE: UN MODELO DE RELACIÓN CON LA MATEMÁTICA

Capítulo 5

El presente capítulo tiene como propósito responder a la pregunta y objetivo general de la investigación, esto es, Comprender y analizar la experiencia de relación que han establecido con la matemática estudiantes que inician la educación universitaria y que poseen distinto nivel de habilidad cuantitativa, a partir de la gestualidad expresada, la estrategia cognitiva elegida y las vivencias significativas en la etapa escolar, al resolver situaciones matemáticas de la vida cotidiana. Para ello, se presentarán la metodología utilizada y los resultados particulares de esta etapa.

5.1 Población y Muestra

Tal como se ha planteado en los estudios 1, 2 y 3, la población y la muestra estuvo compuesta por estudiantes que inician su primer semestre, de carreras Humanistas (34 casos) e Ingeniería (27 casos) de la Pontificia Universidad Católica. Participaron del estudio 27 hombres y 34 mujeres, provenientes en su mayoría de colegios particulares pagados, con puntajes PSU que varían entre 572 y 707 puntos los estudiantes humanistas, y entre 740 y 850 puntos, los estudiantes de ingeniería.

5.2 Instrumento de registro de datos

Alineado con el objetivo general de la investigación, el propósito de esta etapa fue articular e interrelacionar las dimensiones abordadas en los estudios de Estrategias Holística y Analítica, Gestualidad y el estudio de Significados Subjetivos a partir de las Vivencias en la Etapa Escolar, por esto, no se consideraron nuevos instrumentos de registro de información. Se trabajó con los datos, categorías y subcategorías que surgieron de los análisis respectivos, los cuales se presentan en la tabla 24.

Tabla 24

Categorías y sub categorías significativas de los tres estudios

ESTUDIO 1		ESTUDIO 2		ESTUDIO 3	
Estrategia Cognitiva		Gestualidad		Significados Subjetivos	
				Dimensiones	Categorías - Sub categorías
Estrategia Holística	Postura corporal	Tono corporal	Conexión personal	Disposición de los estudiantes ante la enseñanza y aprendizaje de la matemática.	Percepción de autoconfianza en las habilidades matemáticas*
					Orientado al entendimiento y razonamiento de las ideas matemáticas*
Estrategia Analítica	Movimiento de manos	Tipo de gestos	Uso de las manos	Percepción del apoyo familiar para el aprendizaje de la matemática escolar. Estrategias de estudio utilizadas por los estudiantes para el aprendizaje de la matemática.	Familiar apoya estudio de la matemática*
		Características del discurso			Velocidad y tono
		Claridad de la explicación y precisión en el lenguaje		Experiencias escolares que favorecieron el aprendizaje de la matemática	Profesor que estimula la superación y el autoaprendizaje, desafiándolos y premiándolos* Profesor que gana el respeto de sus estudiantes, manteniendo una relación cercana* Profesor enfatiza la comprensión de la lógica matemática, desarrollando habilidades de pensamiento* Profesor que explica los errores y orienta como superarlos* Enseñanza personalizada*
		Uso de Lenguaje Matemático		Experiencias escolares que dificultaron/desfavorecieron el aprendizaje de la matemática	Profesor arrogante, que se cree superior y no asume responsabilidad por el fracaso de sus estudiantes* Profesor con débil manejo de contenidos, no da confianza* Profesor realiza la clase para los que entienden, discriminando a los más débiles o con menor habilidad* Profesor no explica el porqué de las ideas, la lógica de los conceptos y sus relaciones*
	Seguridad en la resolución	Seguridad Procedimiento	Seguridad en el resultado	Motivos de elección de la carrera y su relación con la percepción acerca de la matemática.	Características propias de la carrera* Vocación por la carrera*

Nota: * Categoría que presentó diferencias estadísticas por área

5.3. Procedimiento y técnicas de análisis de datos

El desafío de esta etapa de la investigación fue llegar a articular el entramado de categorías y subcategorías que permitiera llegar a dar cuenta de la relación corporeizada que los estudiantes de la muestra han configurado con la matemática, para ello se recurrió a tres técnicas de análisis estadístico: Chi Cuadrado, Correlaciones no paramétricas y Análisis de Conglomerado Jerárquico.

Cada técnica permitió explorar las relaciones entre las categorías que emergieron de cada estudio realizado, así como también las semejanzas y diferencias entre grupos. En específico, el análisis de conglomerado de tipo jerárquico permitió agrupar variables, en este caso categorías, en función de las diferencias entre elementos comparados. Esto ayudó a determinar el número óptimo de categorías para cada grupo. Para el análisis se utilizó el Método Ward, porque es el método de menor pérdida de información en la fusión de dos elementos (Hair, Anderson, Tatham & Black, 2001; Pardo & Ruiz, 2002). En cada paso se unen los conglomerados, procedimiento que reduce el incremento de la suma de cuadrados de las distancias intra-grupos.

La medida para cuantificar la distancia entre los elementos fue la frecuencia basada en el estadístico Chi Cuadrado de independencia, debido a la naturaleza cualitativas/catóricas de los datos. El estadístico nombrado es una medida de disimilitud y pone el énfasis sobre el grado de diferencia o lejanía existente entre los datos, debido a que la magnitud depende del tamaño muestral. Para desarrollar el análisis se estandarizaron los valores de las categorías o variables en el análisis estadístico, porque existían diferencias de puntuación entre ellas.

Siguiendo la misma lógica de construcción de los estudios anteriores, el primer paso de articulación se realizó considerando las categorías y sub-categorías de los estudios de Estrategias y Gestos. Del estudio de estrategias el análisis de conglomerado realizado consideró solamente la categoría Analítica, debido a que los resultados arrojaron que en su mayoría los estudiantes eligieron esta estrategia para enfrentar la resolución de situaciones matemáticas. La estrategia holística se vio débilmente representada en la muestra de estudiantes. Respecto del estudio de gestos, se consideraron todas las categorías y sub categoría ya que a partir de los resultados se constata que en su totalidad emergieron de la gestualidad de los sujetos entrevistados.

El segundo paso en este proceso de articulación se realizó incorporando en el análisis las categorías y subcategorías que mostraron diferencias estadísticamente significativas entre los grupos de estudiantes del tercer estudio referido a describir y comparar las vivencias significativas acerca del proceso de aprendizaje de la matemática vivenciado por

estudiantes de la muestra. Para ello se volvió a realizar un análisis de conglomerado, en esta oportunidad considerando todas las categorías mencionadas con anterioridad.

Junto a los análisis de conglomerado se realizaron correlaciones y comparaciones de grupos (la matriz de distancias y dendrograma, en anexos 19). Todos los análisis descritos se realizaron con el programa estadístico SPSS (Statistical Package for the Social Sciences) versión 15.

5.4 Resultados del estudio

Los resultados se presentarán según la lógica en la que se articularon los estudios de estrategia, gestos y significados subjetivos en el proceso de aprendizaje de la matemática en la etapa escolar, para dar cuenta de la interrelación entre ellos.

5.4.1 Articulación de los estudios Estrategia y Gestos

El análisis de conglomerados permitió determinar y diferenciar la existencia de dos grupos. El primero, caracterizado por aspectos asociados a la gestualidad propiamente tal y la estrategia analítica (ver tabla 25). En el segundo, en cambio, se concentran aquellas categorías correspondientes a las características del discurso empleado y la percepción de seguridad (Matriz de distancia y Dendograma en anexo 19)

Al analizar el comportamiento de las categorías del primer grupo, se observó la existencia de diferencias estadísticamente significativas en la categoría Tipo de gestos ($X^2 = 10,384$; $gl=3$; $p < 0,05$). Los estudiantes Humanistas habrían expresado gestos simples de carácter lineal e indicativos en su explicación, a diferencia de los estudiantes de Ingeniería, quienes se habrían caracterizado por gestos indicativos, de acción y control absoluto. Tal observación permitió determinar la existencia de dos grupos al interior de este conglomerado, cada uno representado por las áreas de la muestra correspondiente.

Tabla 25
Conglomerados Estrategia y Gestos

Grupo 1: Gestualidad – Analíticos	Grupo 2: Discurso- Seguridad
<ul style="list-style-type: none"> a. Escala Analítica b. Postura Corporal: Conexión personal c. Tipo de gestos * d. Uso del Lenguaje Matemático e. Uso de Manos 	<ul style="list-style-type: none"> a. Velocidad y tono * b. Claridad y precisión en el lenguaje c. Seguridad *

Nota: *presenta diferencias estadísticamente significativas entre grupos

Luego, al analizar la relación que tenía la categoría *Tipo de gesto* con el resto de las categorías, se observó que esta tenía una correlación fuerte y directa con la categoría *Uso del lenguaje* ($r=.413$; $p=0,001$) y con *Claridad y precisión en el lenguaje* ($r=.304$; $p=.017$). A su vez, *Claridad y precisión en el lenguaje* presentó una correlación fuerte y directa con *Velocidad y tono* ($r=.575$; $p=.000$).

En un proceso reflexivo e interpretativo de los resultados obtenidos, lo anterior, permitió llegar a determinar la presencia de dos estilos analíticos de relación con la matemática, los que coincidentemente parecen representar a cada grupo de los estudiantes de la muestra. Por una parte, aquel construido por los estudiantes Humanistas y por otra, un estilo basado en la experiencia de los estudiantes de Ingeniería.

El primer estilo analítico o ***Estilo Analítico Acotado***, presenta una relación que se expresa a nivel corporal con una postura relajada. Denota un bajo involucramiento con la tarea, como la mayoría de la muestra, y toma posición fuera del ítem, es decir, la situación matemática no los estimula a imaginarse dentro de la situación como algo vivido por ellos en la vida cotidiana. Al contrario, el problema es entendido como un ejercicio a resolver, y dan importancia a los datos como independientes del campo al que pertenecen (Grossmann & Na, 2014). Asimismo, la gestualidad se expresa mayoritariamente a través de gestos indicativos, señalando entidades presentes en el espacio conversacional (McNeill, 1992), por lo que se establece una relación directa de la cognición en el entorno físico (Allibali et al., 2014). Esto se refleja en un movimiento vertical que va desde el ojo a la mano, acompañando la explicación del procedimiento de resolución, paso a paso, según el registro escrito de carácter analítico construido por ellos.

El conocimiento disponible de los estudiantes se hace explícito (Broaders et al., 2007) acompañado por un escaso uso de lenguaje matemático, lo que se observa en relación con la baja gestualidad expresada por los mismos, que considera la utilización preferente de una mano en su explicación. El uso de ambas manos por parte de los estudiantes no necesariamente ocurre en coordinación con el discurso. Mientras una mano acompaña la explicación con gestos indicativos y evidencia una relación idiosincrática con el pensamiento (McNeill, 1992); la otra realiza gestos laxos, que se aprecian como involuntarios, los que según investigaciones en el área podrían estar revelando un conocimiento implícito (Cook et al., 2008). Este tipo de manifestaciones, sin embargo, son más difíciles en su interpretación directa con el pensamiento.

Se presenta un discurso, fuerte, claro, sin interrupciones, incluso cuando se desconoce la forma de resolución, o se tiene un desempeño matemático disminuido. Se puede interpretar que la fuerza y claridad del tono de la voz, no siempre es evidencia de un dominio y precisión conceptual en torno a un objeto determinado.

El segundo estilo o *Estilo Analítico Expandido*, expresa una relación donde, si bien se comparten algunos aspectos señalados en el *Estilo Analítico Acotado*, tales como posición fuera del ítem y escaso uso de manos, se observan diferencias en cuanto a la relación con el tipo de gesto expresado. En este caso, los gestos de acción efectuados son de carácter más definido, los que se expresan en relación con la explicación en voz alta del proceso de resolución llevado a cabo, es decir, la expresión corporeizada se muestra entrelazada con el lenguaje a través de Gestos de acción o Control Absoluto (McNeill, 1992). También se observan gestos de carácter lineal e indicativos, donde prima la asociación con procesos matemáticos simples. Hay, también, una relación directa de la cognición con el entorno físico en que se desempeña (Allibali et al., 2014), lo que se expresa en gestos tales como: indicar la presencia de dibujos en el espacio conversacional (McNeill, 1992), indicar los pasos a seguir en un conteo, representar figuras o situaciones en el espacio, tales como "la mitad pasa y la otra no pasa", "eliminar sujetos", "sujetos que avanzan". En estos casos se aprecia con claridad que los estudiantes quieren expresar con su gestualidad aquello que están pensando, sin desajustes entre gestos y discurso (Allibali & Nathan, 2012; Allibali et al., 2014; Cook et al., 2008; Goldin-Meadow, 1999; Goldin-Meadow & Wagner, 2005; Goldin-Meadow, 2006; Novack et al., 2014).

El discurso es fuerte, rápido y continuo, y se demuestra seguridad tanto en el procedimiento como en el resultado, lo que parece relacionarse directamente con la mayor efectividad que se logra al enfrentar las situaciones matemáticas. En la figura 33, se representan gráficamente las relaciones antes descritas, y las interacciones que se producen para cada estilo de relación expresada por los estudiantes.

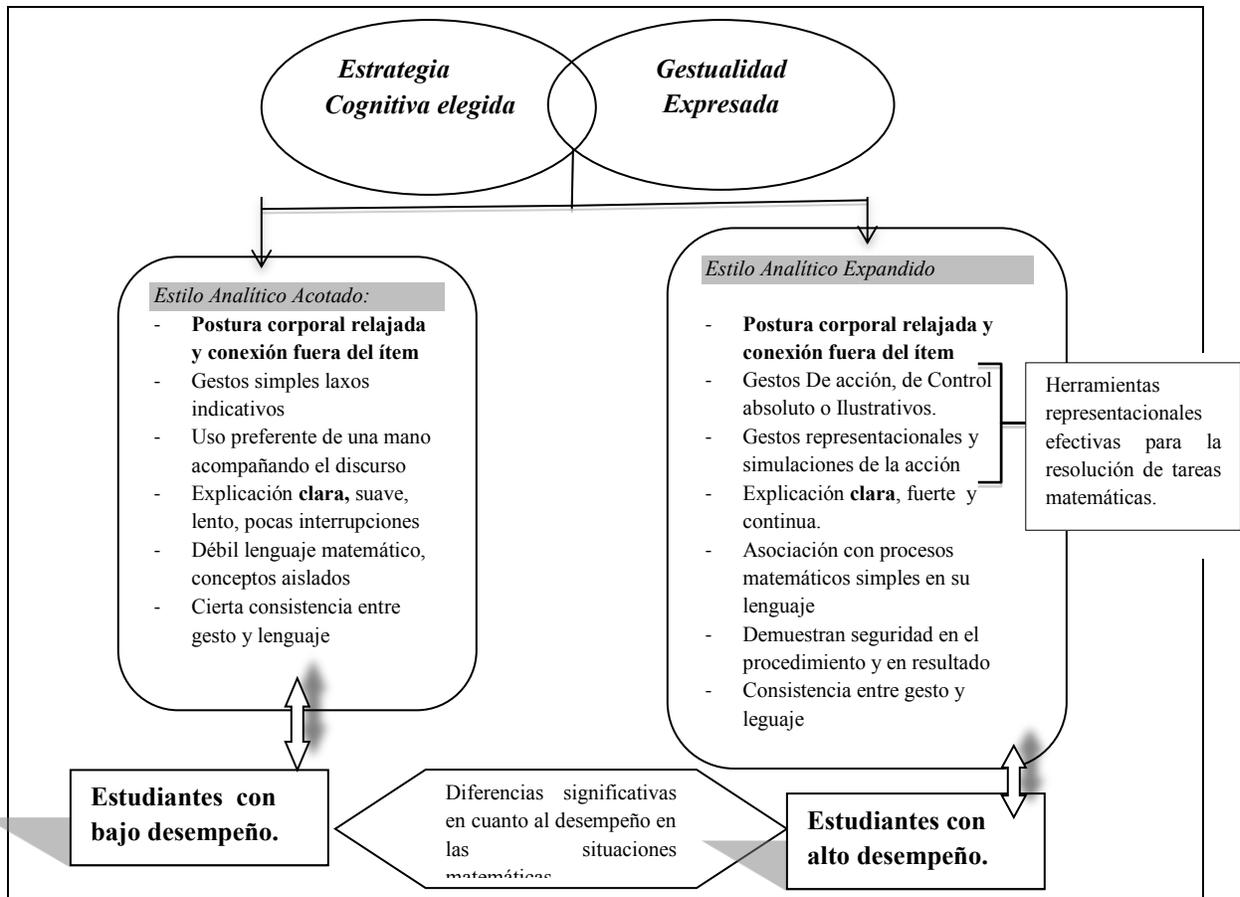


Figura 33. Relación entre la Estrategia Analítica y Gestualidad

5.4.2 Articulación de los estudios sobre estrategias, gestos y vivencias significativa

Se pudo determinar la existencia de tres conglomerados a partir del análisis realizado a las categorías y sub categorías de los tres estudios, es decir, estrategia analítica, categorías de gestualidad y categorías estadísticamente significativas del estudio de 3 (vivencias subjetivas acerca del proceso de aprendizaje de la matemática en la etapa escolar). En la Tabla 26 se presenta la solución más representativa de lo anterior.

Tal como se puede apreciar, en el primer conglomerado o grupo 1 se concentran todas las categorías de gestos y la estrategia analítica como modo de abordaje de las situaciones matemáticas. Asimismo, los conglomerados 2 y 3 se diferencian en la experiencia que los estudiantes de las distintas áreas han vivido en su proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática. En el conglomerado 2 o grupo 2 todas las categorías presentan diferencias estadísticamente significativas con frecuencias más altas en los estudiantes Humanistas. En el conglomerado 3 o grupo 3, en cambio, todas las categorías presentan diferencias estadísticamente significativas con frecuencias más altas en los estudiantes de Ingeniería.

Tabla 26

Conglomerados Estrategia, Gestos y Experiencias Significativas

Grupo 1: Analítico Gestual	Grupo 2: Analítico-Humanista	Grupo 3: Analítico-Ingeniero
Agrupa		
a. Escala Analítica	a. Explicación personalizada	a. Profesor se gana el respeto de sus estudiantes, manteniendo una relación cercana.
b. Postura Corporal: Conexión personal	b. Elección de carrera por vocación	b. Elección por las características propias de la carrera.
c. Tipo de gestos *	c. Profesor arrogante y no asume la responsabilidad por el fracaso de sus estudiantes.	c. Profesor con débil manejo de contenido, no da confianza.
d. Uso del Lenguaje Matemático	d. Profesor realiza la clase para los que entienden, discriminando a los más débiles o con menor habilidad.	d. Profesor que estimula la superación y el autoaprendizaje, desafiándolos y premiándolos.
e. Uso de Manos	e. Profesor no explica el porqué de las ideas, la lógica de sus conceptos y relaciones.	e. Profesor que explica los errores, orienta como superarlos.
f. Velocidad y tono*	f. Estudio con compañeros	f. Percepción de autoconfianza en las habilidades matemáticas.
g. Claridad y precisión en el lenguaje	g. [Analítico-holístico]	g. Orientado al entendimiento y razonamiento de las ideas.
h. Seguridad*		
i. Al profesor le importa el aprendizaje de sus estudiantes.		

Considerando que el grupo 2 y el grupo 3 del análisis de conglomerado muestra diferencia entre los estudiantes Humanistas e Ingeniería en el mismo sentido que se interpretó al articular la estrategia analítica con las categorías de gestos, es decir, se plantean estilos que diferencian la relación con la matemática de unos y otros estudiantes de la muestra, se consideró adecuado articular las categorías del primer conglomerado (grupo 1 de la tabla 26) con los grupos 2 y 3. De este modo, a la interpretación ya realizada de los dos estilos

analíticos de relación, estilo *Analítico Acotado* y estilo *Analítico Expandido*, se conectan los resultados de este nuevo análisis, lo que se configuraría de la siguiente manera:

La relación que los estudiantes han establecido con la matemática correspondería a un estilo *Analítico Expandido* (ver figura 34) cuando se vivencian experiencias que favorecen el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Los estudiantes que presentan este estilo habrían sido desafiados y estimulados por sus profesores a la superación y el autoaprendizaje de modo constante, estableciéndose relaciones de respeto y cercanía entre estos. Se valora el dominio de contenido matemático por parte del profesor, perdiendo valoración este de sus estudiantes cuando se presentan errores evidentes en sus explicaciones. Tal aspecto es percibido como especialmente negativo por quienes viven la experiencia de este estilo de relación, lo que afecta la confianza en las competencias del profesor.

Los estudiantes de este estilo, valoran por sobre otras dimensiones, el dominio matemático, la precisión y la capacidad de demostrar teoremas o conceptos matemáticos que posibiliten la comprensión y el aprendizaje profundo. Esto, se presenta en relación directa con la expresión de gestos de acción y de control en este grupo y en el procedimiento analítico de resolución, lo que se suma a la relación con lo que podría denominarse la naturaleza propia de la matemática, en la que se destaca la abstracción, coherencia y solidez formal. Este último concepto, entendido como aquel que aporta “rigor al resto de las disciplinas, al establecer criterios de veracidad para sus juicios y métodos de verificación” (Rico y Lupiáñez, 2008, p.42).

Los estudiantes que vivencian un estilo *Analítico Expandido*, se focalizan preferentemente en la comprensión y el razonamiento como estrategia de aprendizaje, constituyéndose esta visión en una oportunidad para incrementar el conocimiento de la matemática y sus relaciones. La afirmación es coherente con la creencia de que la matemática tiene la capacidad de desarrollo del pensamiento y la acción simbólica. Sumado a ello, tiene la potencialidad de ser un medio fundante del conocimiento de otras disciplinas (Rico y Lupiáñez, 2008).

Otro aspecto que se aprecia en este estilo, es la percepción de autoconfianza para resolver situaciones matemáticas y la seguridad demostrada tanto en el procedimiento como en los resultados. El estilo es consistente con la expresión corporal comunicada, tanto a nivel de gestos como posturas, en tanto denota parsimonia en la expresión global del sujeto (Pease & Pease, 2010). Como señala Bruner (1987), “el análisis y el sentido de la capacidad propia para aplicar procedimientos analíticos aumenta la confianza de quien soluciona los problemas” (p.98).

ESTILO ANALÍTICO EXPANDIDO

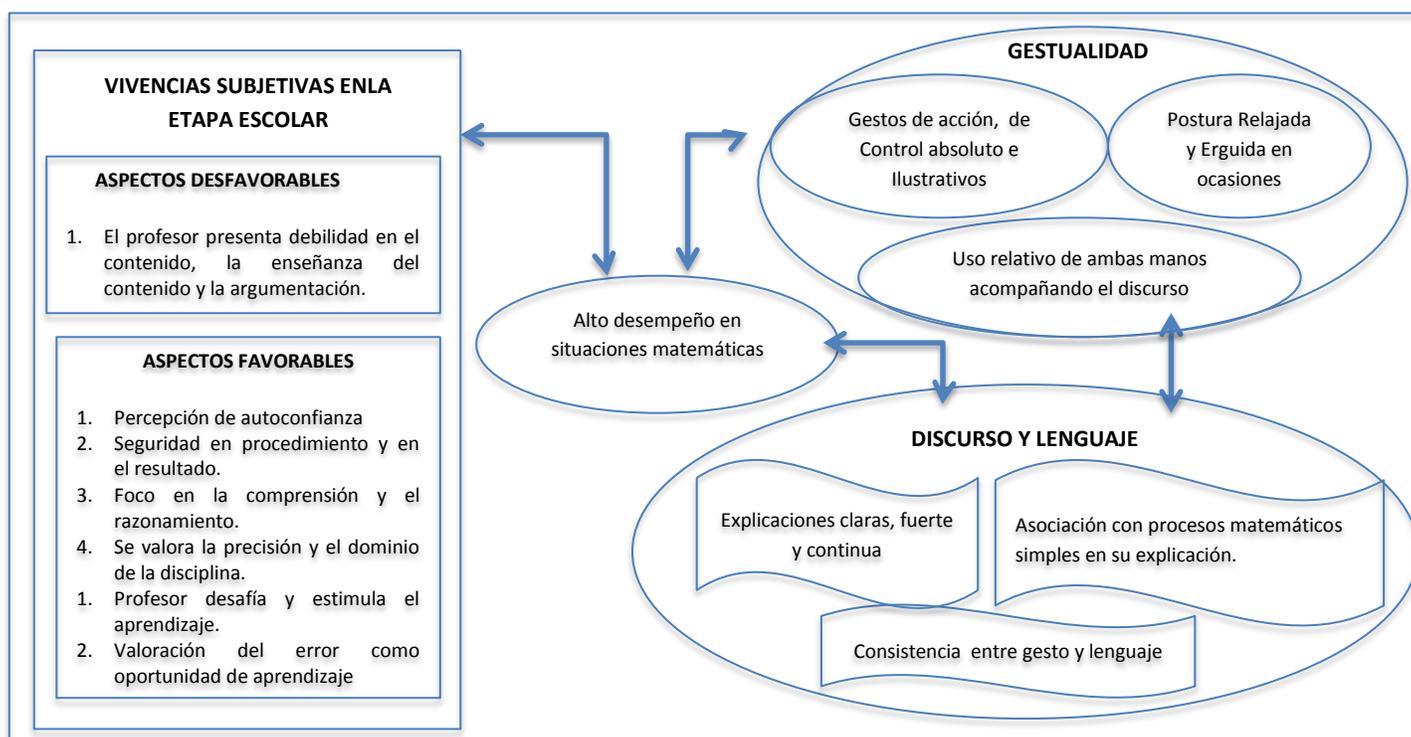


Figura 34: Relaciones del estilo *Analítico Expandido*

Por otra parte, quienes vivenciaron un estilo *Analítico Acotado* (ver figura 45), habrían configurado una relación menos positiva que aquellos que conforman el estilo *Analítico Expandido*, en el discurso de los estudiantes se releva la presencia de conductas arrogantes de algunos profesores, sin atribución de responsabilidad personal por el fracaso de sus estudiantes. Se declara una focalización en los más talentosos discriminando a los más débiles.

En variadas ocasiones los estudiantes del estilo *Analítico Acotado*, manifestaron que sus profesores no habrían explicado el porqué de las soluciones matemáticas ni realizado demostraciones, argumentando que no eran necesarias para resolver los problemas planteados. Este último aspecto es compartido a nivel cualitativo con algunos estudiantes que vivenciaron el *Estilo Analítico Expandido*, y coherente con las investigaciones en el área, que dan cuenta de las serias dificultades que aún persisten en la enseñanza de la matemática escolar para lograr que los profesores expliquen y demuestren con claridad contenidos matemáticos más complejos (Espinoza, Barbé & Gálvez, 2009; Gálvez et al., 2010; Hilton, 2000; Radfor & André, 2009).

experiencia corporeizada es algo que se vive en relación con otros, con quienes se comparten experiencias que permiten interpretar y configurar nuestra comprensión significativa del mundo (Johnson, 1987; Varela et al., 2005).

Quienes experimentaron el *estilo Analítico Acotado* y en general en el caso de los estudiantes Humanistas entrevistados, ser apoyado por un otro significativo, ya sea familiar o su grupo de pares, fue un hecho que acompañó sus años de formación de la matemática escolar. Habrían centrado en esta compañía las confianzas para superar las dificultades o simplemente enfrentar el aprendizaje de manera colaborativa. Se observa que estas relaciones, ya sea de su entorno familiar, escolar o el profesor particular, fueron incidiendo en su comprensión y desarrollo, a lo largo de sus años de estudio (Bronfenbrenner, 1987; Bronfenbrenner & Morris, 2005; Bruner, 1987; Vygotsky, 1995).

Por otra parte, los estudiantes de Ingeniería, asociados al *estilo Analítico Expandido*, destacaron el rol de sus madres en los primeros años escolares en el contexto de la formación de hábitos, para posteriormente seguir sus estudios solos. Otra minoría consideró que la estrategia de enseñar a otros, sus compañeros, pudo haber sido provechosa tanto desde el punto de vista de la colaboración como también un beneficio personal para reforzar sus aprendizajes.

El diálogo entre los más experimentados y los menos experimentados habría ayudado a los estudiantes a comprender sus puntos de vista y la naturaleza de sus significados (Bruner, 1987; Vygotsky, 1995). El nivel de dominio matemático del grupo de estudiantes de Ingeniería, habría hecho menos necesario establecer relaciones con los pares para efectos de preparar una prueba o simplemente estudiar, por tal razón es que se aprecia que el trabajo colaborativo no habría sido intencionado en el contexto escolar, o si lo fue, no parece haber sido significativo para ellos.

Consistente con las investigaciones en el área (Alcalay et al., 2003; Berger & Gubbins, 2002; Gubbins, 2011; Rivera & Milicic, 2006), la relación con la familia durante los años escolares se constituye en un aporte significativo para los aprendices. La relación de los estudiantes de la muestra con la madre en los primeros años de vida es señalada como de importancia para generar hábitos, reforzar la autoestima y el desarrollo de la autoconfianza, lo que habría incidido en su desarrollo académico (Berger & Gubbins, 2002).

5.5 Discusión

En base a la evidencia presentada, esta investigación ha podido abordar en profundidad un objeto de estudio complejo que consideró distintos niveles y dimensiones para llegar a responder tanto la pregunta como los objetivos de investigación. En lo específico, y tal como se ha señalado con anterioridad, fue necesario realizar tres estudios, referidos a las estrategias cognitivas, holística y analítica, gestualidad y vivencias subjetivas de los estudiantes.

Para lograr estos propósitos fue necesario explorar, en primer lugar, cada uno de los estudios por separado para luego, en un segundo lugar, articularlos en una totalidad. La decisión de abordar la investigación desde una perspectiva multinivel, obedece a la convicción que para comprender un objeto de estudio en profundidad, desde la perspectiva corporeizada, es necesario asumir la unión mente-cuerpo-mundo como un todo relacionado; una unidad y no un agregado de cualidades (Lakoff & Johnson, 1999; Varela, 2000; 2002; Varela, Thompson & Rosch, 2005).

5.5.1 Dimensiones del estudio: estrategia cognitiva elegida, gestualidad expresada y vivencia significativa en la etapa escolar.

Los resultados del estudio en la dimensión **estrategia cognitiva utilizada** muestran que la mayoría de los estudiantes eligió la estrategia analítica para resolver problemas matemáticos. En un comienzo, se tuvo como expectativa que el fenómeno mencionado ocurriría en los estudiantes de Ingeniería, pero no en los Humanistas. Sin embargo, la investigación permitió revelar que tanto las características del estímulo (Ben Zur, 1998; Cornejo et al., 2007; 2009; Estévez, 2002; Sergent & Bindra, 1981; Ward & Scott, 1987), como la naturaleza particular de la matemática, las reglas que la componen y las características del contexto de aprendizaje de los estudiantes, configuraron un modo analítico de aproximarse a la resolución de problemas. Esta estrategia, posee un énfasis en el cálculo, la precisión, la representación formal externa y la explicitación de detalles, la linealidad en la secuencia de datos y el uso de patrones conocidos tanto en la resolución como en los contextos de aplicación (Borromeo, 2012; Choi et al., 2007; Clariana, 1993; Cornejo et al., 2007; Yagoubi et al., 2003).

El perfil analítico de los estudiantes se expresó en forma robusta en las decisiones de resolución, la gestualidad, el sentido de su discurso, las evidencias pictóricas y simbólicas de sus respuestas y las vivencias significativas relatadas. Estas últimas reflejan, concordantemente, cómo los estudiantes se relacionan en la actualidad con la matemática a partir de experiencias que se configuraron a lo largo de su historia.

La estrategia holística, en tanto, fue poco elegida por los estudiantes para resolver las situaciones matemáticas. Una posible explicación, sería la influencia de la cultura existente

en la enseñanza de la matemática escolar, la que pondría énfasis en los datos más que en el todo, siguiendo una secuencia lineal de resolución y apelando a patrones conocidos de resolución. Otra explicación plausible, sería el tipo de situación matemática abordada, ya que aquel ítem que estimuló en mayor medida el uso de estrategia holística fue el que consideró un contexto cotidiano o real, el que aparentemente no parecía poseer una estructura matemática conocida, llevando a los estudiantes a tratar de buscar la forma de solución. Este tipo de ítem significó para algunos una tarea difícil de enfrentar ya que no implicaba procesos mecánicos de resolución a lo que estaban acostumbrados. (OCDE, 2006).

Quienes utilizaron la estrategia holística se situaron a ellos mismos dentro de la situación (Borromeo, 2012). Lo anterior se identifica con el uso de un tipo de abordaje perceptivo espacial que pone el foco en el todo más que en las partes, elemento característico de este tipo de estrategia (Choi et al., 2007; Nisbett et al., 2001). Los estudiantes identificaron este tipo de esquemas mentales para encontrar la solución como “uso de la lógica” o de “una forma de pensar que no es matemática”, debido a que para algunos la matemática sería una disciplina que implica solamente cálculos y desarrollo de algoritmos, que se encuentran fuera del sujeto. El alcance de la matemática se reduciría a la comprensión de objetos específicos, sin visualizar el amplio campo de conocimiento que supone su estudio y las relaciones entre sus objetos.

De este modo, parece relevante potenciar en los estudiantes el uso de ambas estrategias, para lograr una comprensión profunda de la matemática que permita situarla en un campo de acción y aprovechar las potencialidades que tiene para comprender el mundo que los rodea. Al potenciar lo anterior, se lograría un mayor sentido al aprendizaje de los estudiantes. La estrategia analítica favorece la resolución de problemas, el uso de la lógica y sitúa el foco en los elementos y las relaciones entre ellos (Cornejo et al., 2007). La mencionada estrategia se torna necesaria para resolver problemas que requieren precisión, explicitación de detalle en las respuestas y operaciones de cálculo (Radford & André, 2009; Yagoubi, Lemaire y Besson, 2003). La estrategia holística, en cambio, favorece el procesamiento perceptivo espacial lo que permite observar fenómenos en movimiento, además de la creatividad, la intuición en la resolución de problemas (Choi, Koo & Choi, 2007; Nisbett, Peng, Choi & Norenzayan, 2001) y el uso de la imaginación interna, al realizar asociaciones con situaciones vividas (Borromeo, 2012; Grossmann & Na, 2014). Así, la combinación de los abordajes analítico y holístico favorecerá el desarrollo de competencias profesionales de alto nivel cognitivo (Choi, Koo & Choi, 2007; Radford & André, 2009; Rodríguez & Ricardo, 2007).

Respecto de la dimensión **gestualidad que expresan los estudiantes de la muestra**, los resultados evidencian una vez más la relación entre gesto – pensamiento – lenguaje (Bernardis & Gentilucci, 2006; Cornejo et al., 2009; Goldin-Meadow, 1999; Imbo, Vandierendonck & Fias, 2011; Kendon, 2004; McNeill, 1992; Roth, 2001). En general, los

estudiantes realizaron pocos gestos, de carácter simple, laxos e indicativos, aspecto consistente con la literatura que indica que si bien, gesto y pensamiento van juntos durante todo el ciclo vital, tal gestualidad disminuiría al aparecer el lenguaje (Bernardis & Gentilucci, 2006; Capone & MacGregor, 2004; Farkas, 2007; Radford & André, 2009). Estudios en el área, indican que los niños presentan una baja gestualidad al desempeñar tareas matemáticas de razonamiento espacial (Logan, Lowrie & Diezmann, 2014), caracterizada por gestos espontáneos, que no acompañan el habla, representados por pequeños movimientos indicativos de las manos o los brazos a menudo dirigidas a un artefacto, lo que es coincidente con los estudios de Núñez (2004) en matemática corporeizada.

Por otra parte, los resultados de este estudio evidenciaron, que la gestualidad de los estudiantes entrevistados parece relacionada con su desempeño matemático, debido a que quienes expresaron gestos más definidos en cuanto a su fisionomía, del tipo “gestos de acción” o “control absoluto”, fueron aquellos que obtuvieron un mejor nivel de habilidad matemática, lo que estaría dando cuenta de un repertorio mayor de referentes de significado asociados al conocimiento matemático para la representación gestual, lo que no sucedería en otros contextos (Cornejo et al, 2008; Farkas, 2007; Goldin – Meadow, 1999; Goldin-Meadow & Singer, 2003; Goldin-Meadow & Wagner, 2005).

Ocurre una situación similar con las características propias del discurso y la seguridad con la que enfrentan la explicación. Esto, porque aquellos estudiantes que presentaron un mejor desempeño matemático, fueron quienes al mismo tiempo presentaron un discurso más fuerte y continuo en su explicación, con mayor seguridad tanto en el procedimiento como en el resultado y un mayor uso de lenguaje matemático. Se concluye, entonces, que el nivel de desempeño en la resolución de situaciones matemáticas está relacionado con la morfología que asume la gestualidad expresada, la que cobra un rol de mayor importancia como herramienta de comunicación, al acompañar el discurso y dar forma a la comprensión (Goldin-Meadow et al., 2003; MacNeill, 1992).

La estimulación de la gestualidad en los niños y jóvenes es de gran importancia en el contexto escolar, no solo como medio de conocimiento (Bermeosolo, 2004), sino que también, como herramienta representacional efectiva para la resolución de tareas matemáticas (Cook & Goldin-Meadow, 2006) y medio para mejorar la comprensión y por tanto el aprendizaje de conceptos abstractos (Cook, Duffy & Fenn, 2013; Cook, Mitchell & Goldin-Meadow, 2008).

La gestualidad se convierte, de este modo, en una oportunidad para ser aprovechada por los docentes como recurso de aprendizaje útil (Yoon et al., 2011) para dar sentido a las ideas actuales y desarrollar estrategias nuevas de resolución de problemas (Allibali et al., 2014; Broaders et al., 2007). Para ello se hace necesario que los profesores modelen el uso de la

gestualidad en sus estudiantes (Cook & Goldin-Meadow, 2006; Farkas, 2007; Goodwyn, Acredolo & Brown, 2000) y los desafíen con tareas que estimulen el uso de la explicación en voz alta utilizando la gestualidad en estas (Logan, Lowrie & Diezmann, 2014). Lo anterior permitirá reconocer cómo progresa el aprendizaje de los conceptos matemáticos y sus relaciones, para luego retroalimentar en forma efectiva con el objetivo de avanzar a la mejora de los mismos.

Se torna necesario realizar un cambio en la cultura de la enseñanza de la matemática, frecuentemente asociada a un campo de abstracción donde el estudiante resuelve por escrito problemas matemáticos a través de guías o formatos de prueba y el profesor explica haciendo uso de una pizarra en la que se plantean algoritmos, esquemas, gráficos y fórmulas.

En la dimensión **Vivencias significativas del aprendizaje de la matemática escolar**, los resultados mostraron clara diferencia en la experiencia vivida por área. Mientras la mayoría de los estudiantes de Ingeniería visualizan su proceso de aprendizaje como positivo tanto por sus resultados como por la experiencia vivida con sus profesores, algunos estudiantes Humanistas, por el contrario, lo vivenciaron con dificultad. Los logros obtenidos durante la etapa escolar no siempre fueron lo esperado, lo que los llevó a enfrentar este desafío con sacrificio y esfuerzo. Según ellos, en muchos casos debieron sortear comportamientos, estrategias de enseñanza y evaluación implementadas que no necesariamente ponían el foco en el aprendizaje o en las distintas formas de aprender. Pese a lo anterior, la disposición a la matemática de los estudiantes de la muestra en general es positiva, y describen sentimientos de autoconfianza, curiosidad, gusto e interés por esta disciplina. Asimismo, expresan sentimiento de perseverancia y fuerza de voluntad para superar las dificultades, lo que se constituye en una oportunidad para el aprendizaje de la matemática en educación superior (National Mathematics Advisory Panel, 2008; OCDE, 2006; Ormrod, 2005).

Los aspectos favorables y desfavorables expresados en torno al aprendizaje de la matemática, se relacionan principalmente con la experiencia escolar y muestran que aún se aprecia una concepción de la matemática como algo que ocurre fuera del sujeto que aprende. La resolución de problemas se ha tendido a reducir a problemas estandarizados que son trabajados como una aplicación mecánica de técnicas, sin explicación del fundamento que se encuentra a la base de tales soluciones, ya sean aritméticas o algebraicas, así como también escasas demostraciones que ayuden a la comprensión de la matemática y sus procesos, llevando a los estudiantes a desarrollar aprendizajes memorísticos más que comprensivos (Espinoza et al., 2009). Los aspectos indicados reflejarían la aplicación de un modelo más bien tradicional basado en una práctica rutinaria de exposición y ejemplificación de conceptos y técnicas, exceso de formalización y falta de conexión con la realidad, ante la dificultad de enseñar conceptos abstractos.

En sus primeros años de estudio en la educación superior los estudiantes deben sortear las diversas dificultades conformadas durante la etapa escolar, las que podrían constituirse en potenciales barreras de entrada al aprendizaje de contenidos matemáticos, dado que esta experiencia escolar se actualiza cuando los estudiantes vuelven a enfrentar problemas matemáticos (Hidalgo, Maroto & Palacios, 2005; Himmel, 2003). Si a lo anterior, se suma una enseñanza tradicional de la matemática que enfatiza “pasar contenidos”, el uso de fórmulas, de carácter unidireccional, causal y lógico, es decir absolutamente descorporeizada (Ibáñez y Cosmelli, 2007), los efectos pueden resultar muy dañinos e incluso los puede llevar, como ha sido en muchos casos, a desertar del sistema (Himmel, 2003; Hidalgo, Maroto & Palacios, 2005).

Un aspecto a destacar es el foco en la comprensión que declaran la mayoría de los estudiantes de la muestra, lo que va en sintonía con la orientación actual de la enseñanza de la matemática (Hiebert, et al, 1997; National Mathematics Advisory Panel, 2008; Nesher, 2000; OCDE, 2006, 2012). Pese a esta declaración, son los estudiantes de Ingeniería quienes parecen más consistentes con lo declarado, puesto que sin quitar importancia al cálculo y a la resolución de algoritmos, declaran que el camino es “comprender luego resolver”. A diferencia de esto, los estudiantes Humanistas valoran la comprensión pero su foco está en la resolución y el cálculo. El énfasis señalado en los resultados más que en la comprensión de los conceptos y procedimientos matemáticos, pondría en evidencia una finalidad práctica del aprendizaje de la matemática escolar, donde el “aprobar el curso” se constituye en la meta a lograr para seguir avanzando a la etapa siguiente. La finalidad social de la matemática sería valorada declarativamente por estos estudiantes, pero no se aprecia una comprensión del verdadero alcance de la misma en las decisiones futuras de la vida cotidiana (Rico y Lupiáñez, 2008).

Los elementos mencionados plantean la siguiente pregunta: ¿acaso los profesores de matemática en la escuela ponen el acento en la resolución cuando los estudiantes presentan menor habilidad cuantitativa o será que los mismos estudiantes ponen dicho acento cuando no logran comprender los conceptos? Pareciera que ambos escenarios no son excluyentes, lo que da lugar a una nueva pregunta sobre el tipo de estrategias utilizadas por los profesores para incentivar la comprensión de la matemática en todos sus estudiantes y no sólo en los más hábiles.

Los estudiantes necesitan conocer cómo desarrollar nuevos métodos para enfrentar nuevos tipos de problemas y aprender maneras flexibles para pensar matemáticamente. Se requiere aprender matemática poniendo el foco en la comprensión más que en el resultado, lo que permitirá usar este conocimiento de modo flexible, adaptarse a nuevas situaciones y utilizar los aprendizajes en nuevos contextos, al encontrar sentido a su aprendizaje (Hiebert et al., 1997; Lakoff & Núñez, 2000; National Mathematics Advisory Panel, 2008). A partir de los resultados de este estudio, se destaca el aprendizaje en grupos pequeños y el trabajo

colaborativo entre pares, como estrategia que potencia a los estudiantes para el aprendizaje en un amplio rango de posibilidades y contextos (Omrod, 2005; Pérez de Albéniz et al., 2015).

Otro aspecto relevante que se concluye a partir de los resultados de la investigación, es el rol de los padres y adultos significativos en el aprendizaje de la matemática escolar. Fue de importancia para los estudiantes, en especial para los Humanistas, contar con un soporte afectivo y emocional brindado por una persona que cree en sus capacidades, sin importar cuantas veces se equivoquen, a quien le preocupa el aprendizaje y el desarrollo de estos como personas. Dicho apoyo fue fundamental para sentar las bases de la autoconfianza en las primeras etapas de su desarrollo, aspecto que contribuyó a enfrentar situaciones de mayor dificultad, confusión o desconocimiento.

La investigación confirma, la responsabilidad de la familia y los adultos significativos en el proceso de aprendizaje de los estudiantes y refuerza que la escuela no es la única responsable de prepararlos para enfrentar el aprendizaje. Aún más, es la familia la encargada de brindar las bases y el soporte necesario para que los estudiantes puedan desarrollarse en forma autónoma y segura en el futuro (Gubbins, 2014; Hill & Tyson, 2009; Murillo & Roman, 2011; UNESCO, 2015). Para ello, es necesario apoyar a las familias que no cuentan con los recursos para brindar dicho soporte a sus hijos en la etapa escolar e incentivar a aquellas que si los tienen. Si bien los tiempos pueden ser escasos para los padres trabajadores, el apoyo e involucramiento de ellos es fundamental en los logros académicos de los hijos (Gubbins, 2014; Hill & Tyson, 2009; Murillo & Román, 2011; UNESCO, 2015).

En la misma línea, el estudio da cuenta de un aparente sesgo de género que se reproduce en las familias de los estudiantes de la muestra: pareciera que las madres, en tanto mujeres, no constituyeron un apoyo validado para el estudio de la matemática, ya que la mayoría de los estudiantes recurren a sus padres o hermanos para esta labor cuando así lo requieren. Sorprende que esta percepción ya se encontrara instalada en los estudiantes en la etapa escolar, lo que amerita ser abordado en profundidad en estudios posteriores. Lo señalado precisa mayor desarrollo, especialmente al percatarse que la brecha entre los logros en matemática de niños y niñas comienza a acortarse (Agencia de la calidad de la Educación, enero 2013; OCDE, 2012).

5.5.2 Experiencia de relación con la matemática, desde una perspectiva corporeizada.

El propósito de este trabajo de investigación fue profundizar en la comprensión de la relación que han establecido con la matemática estudiantes que inician la educación superior, con distinto nivel de habilidad cuantitativa, a partir de la estrategia cognitiva elegida, la gestualidad expresada y las vivencias significativas en la etapa escolar de un modo articulado y holístico, es decir, no como una suma de partes. Por tal motivo, una vez

que se logró comprender cada dimensión en profundidad fue necesario articular dichas dimensiones para dar sentido a esta relación como una totalidad.

Los resultados obtenidos configuraron dos estilos de relación analítica de los estudiantes entrevistados. Uno de ellos denominado estilo *Analítico Acotado*, por su carácter restringido no sólo en cuanto a la gestualidad que expresan, caracterizada preferentemente por gestos indicativos, simples y laxos, sino también respecto del escaso uso del lenguaje matemático, la velocidad y tono del discurso. Dichos elementos fueron apreciados en relación con restringidas oportunidades de aprendizaje vividas en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática, y el menor desempeño obtenido en las situaciones matemáticas que debieron resolver. El otro estilo, *Analítico Expandido*, se caracterizó por su naturaleza expresiva y abierta de la gestualidad, con gestos de acción y control absoluto que se constituyen en herramientas representacionales efectivas del proceso de resolución, un discurso claro, fuerte y continuo que da cuenta de la seguridad y dominio matemático. Además, el estilo se enmarca en un contexto de autoconfianza y oportunidades de aprendizaje favorables vividas en el proceso de formación de la matemática escolar.

Ambos estilos, más allá de sus propias características, lograron dar evidencia de las relaciones que los estudiantes construyen en su vida con distintos objetos de conocimiento, en este caso la matemática. El proceso indicado acompaña el aprendizaje y se expresa de manera holística en un modo de resolver problemas, una forma de hablar, una gestualidad, un tono corporal y una experiencia significativa de sí mismos y de su relación con otros, sean personas individuales o grupos de una manera particular.

A partir de los resultados se pudo constatar que cada uno de estos estilos analíticos se actualizan cada vez que los estudiantes se encuentran frente al objeto que media esta construcción y son posibles de ser observados en toda su dimensionalidad: corporal, cognitiva, en el lenguaje, en la disposición hacia la matemática y sus decisiones estratégicas. Se considera, además, que estos estilos son particulares a cada objeto de conocimiento, por lo que quien expresa un estilo de relación *Analítico Acotado*, en matemática podría expresar un estilo *Analítico Expandido* en lenguaje o ciencia. De este modo, la relación establecida con la matemática sería construida en la interacción del sujeto y su mundo, que en sí misma constituyen un todo inseparable (Merleau- Ponty, 1985).

Se considera además que los estilos de relación diferenciados por grupos no son excluyentes de otras experiencias compartidas entre los estudiantes. Así, si bien existen aspectos que se visualizan como particulares entre ellos, también hay experiencias que fueron edificadas en la relación con otros y forman parte de una realidad compartida en el mundo educativo o familiar, es decir estructuradas socialmente (Gillespie & Zittoun, 2013). Finalmente, los estilos también obedecerían a estilos de enseñanza y aprendizaje definidos por la propia disciplina y socialmente arraigados en la cultura en que estas se insertan y desarrollan.

De acuerdo a lo señalado, la experiencia se vive de forma corporeizada cuando la gestualidad y la cognición, en tanto estrategias de pensamiento, lenguaje y vivencias subjetiva, se conectan en una relación interdependiente que posibilita la comprensión de la misma (Häfner, 2013; Lakoff & Johnson, 1999; Louwerse, 2008; Pagis, 2009; Varela et al., 2005).

Una relación directa se encontró entre cada estilo analítico de relación con el desempeño de los estudiantes en el test de situaciones matemáticas que debieron resolver. Es así que, un mejor desempeño de los estudiantes asociado a un estilo *Analítico Expandido*, se encuentra relacionado al tipo de gestualidad que expresan, al lenguaje y estilo del discurso, la postura corporal, la percepción de autoconfianza, la precisión en el modo de resolución, las estrategias de estudio, la disposición general, entre otros. Al contrario, el estilo de relación *Analítico Acotado* se relaciona directamente con quienes reportan un nivel de desempeño menor en el test aplicado en la investigación, lo que se expresa también en las dimensiones estudiadas y adquieren particularidades propias de quien ha vivido una experiencia más restringida en su relación con la matemática. Es decir, tal como plantea Kim, Roth & Thom (2010) el conocimiento se encarna y se expresa a través de los cuerpos.

De este modo se puede afirmar, que las dimensiones del sujeto se encuentran comunicadas de modo articulado mediante la interacción entre objetos, entornos y fenómenos de la vida cotidiana, y se desenvuelven en un mundo de realidad que es inseparable de su corporalidad e intersubjetividad (Merleau-Ponty, 1985). Lo anterior, permite hipotetizar que la elección de carrera o la búsqueda de un entorno afín a los intereses de los estudiantes son procesos influenciados por esta relación construida, y no sólo atribuibles a aspectos vocacionales o características propias de la profesión.

Se constata, así, que los gestos cobran un rol de importancia como herramienta de comunicación al acompañar al discurso y dar forma a la comprensión (Goldin-Meadow et al, 2003; MacNeill, 1992) a partir de un guion conocido, propio de quien puede o no dominar previamente la tarea (Volante, Huepe y Cornejo, 2009). La expresión de la gestualidad también constituye una oportunidad para que el profesor exprese a sus estudiantes el conocimiento y comprensión que posee de la matemática, transformándose en una herramienta potente para el aprendizaje.

Las investigaciones han demostrado que mientras mayor gestualidad se utiliza en la enseñanza más profundo es el aprendizaje y comprensión de los estudiantes (Allibali & Nathan, 2012; Allibali et al., 2014). De este modo, se revela la importancia de que los estudiantes puedan expresar cómo construyen su conocimiento en toda su complejidad desde sus primeras aproximaciones al aprendizaje. Sumado a ello, los profesores requieren generar los espacios para que estas experiencias se muestren en la sala de clases y, al mismo tiempo, brindar oportunidades para que los estudiantes expresen su propio mundo

subjetivo a través de la gestualidad, postura corporal, lenguaje y estrategias de resolución, y así expresar su comprensión particular de la matemática.

Las estrategias enunciadas pueden ser un aporte a la construcción de una relación positiva e integradora con el mundo vivido por los estudiantes, en especial cuando estos deban enfrentar la matemática en la educación superior. La resignificación de una relación medianamente positiva en la etapa escolar, como sucedió con los Estudiantes Humanistas en esta investigación, puede ser una puerta de entrada a experiencias enriquecedoras y constructivas en el aprendizaje de la matemática en la universidad debido a que las experiencias positivas del aprendizaje tienen un efecto en la disposición de los estudiantes a aprender matemática (Pampaka et al., 2012)

Un aspecto de importancia para esta investigación, es la valoración del error otorgada por quienes pertenecen al estilo Analíticos Expandido, entendido como un medio para el aprendizaje. El error da cuenta de la necesidad de los estudiantes de una retroalimentación efectiva centrada en explicaciones y demostraciones que posibiliten la comprensión profunda, para avanzar en el desarrollo del conocimiento. Se concibe el error como una oportunidad de aprendizaje y no como un hecho negativo asociado a una sanción punitiva. Los elementos mencionados constituyen una responsabilidad relevante en matemática, dado que es una disciplina fundante de otros conocimientos en una multiplicidad de disciplinas e instala las bases para enfrentar la Educación Superior.

Como se ha demostrado, un mayor nivel de habilidad matemática también se sostiene sobre aspectos significativos de la propia experiencia de los estudiantes. Por ejemplo, la cercanía con el profesor o la presencia de un profesor que los desafía, que cree en ellos, que construye a partir de sus errores y los estimula a superarse. Por lo tanto, se hace necesario que este tipo de relación no sólo sea característico de un estilo de estudiantes, sino de todos quienes emprenden el desafío de estudiar cualquier ámbito, en especial lo relacionado con lo numérico, la geometría, la física o la estadística, ya sea en el contexto escolar como en educación superior.

Se constata en la investigación que la experiencia de relación con la matemática no corresponde a una dimensión solamente individual, expresada por el estudiante al dar cuenta del conocimiento, habilidad de la matemática, experiencia de aprendizaje y comprensión. Al contrario, involucra la interacción con la familia, pares y profesores, lo que podría entenderse como una relación que se construye desde el propio individuo hacia su entorno y personas significativas. Sumado a lo anterior, existe una dimensión colectiva, construida a partir de patrones culturales propios de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, capaces de influenciar al individuo en las relaciones que va construyendo en su historia evolutiva. Lo anterior implica construir desde el entorno y su ambiente hacia el individuo. En este sentido de interacción recíproca, se evidencia un proceso complejo, que

no admite una linealidad o supremacía de relaciones, entendida como una por sobre las otras.

Es fundamental resignificar aquellos aspectos que fueron desfavorables en la construcción de una relación más bien restringida con la matemática, que limitó las posibilidades entregadas por esta disciplina para relacionarse con el mundo en su complejidad. Se erige el desafío de cambiar el mensaje social imperante que levanta un discurso negativo sobre la relación de los sujetos con la matemática, en cuanto a la materia en sí misma o las habilidades de las personas en torno a ella. Se suelen conocer casos de profesores y padres que indican no tener capacidades para la matemática o señalar lo anterior a otros, como si el conocimiento fuese algo que acontece en la mente o como si dicha condición no pudiera ser modificada. En el estudio se ha demostrado la complejidad que supone aprender matemática en el contexto escolar, y por ende, la necesidad de modificar las mencionadas creencias con el apoyo de personas significativas para los estudiantes, con la intención de no perpetuar dichas nociones en ellos.

De este modo, se concluye que el mundo vivido por los estudiantes en la etapa escolar es inseparable de su corporalidad (Lakoff & Núñez, 2000; Merleau-Ponty, 1985). Esta experiencia corporeizada, estructurada socialmente, se configuró como una red compleja de interacciones que permitieron comprender las relaciones establecidas no sólo a nivel individual, sino como una experiencia compartida con otros (Leung, 2007; Johnson, 1987; Varela et al., 2005). Las estrategias cognitivas, la gestualidad y las experiencias significativas vivenciadas por los estudiantes en la etapa escolar corresponden a dimensiones de una realidad que interactúa armoniosamente para dar cuenta de una relación que, como se señaló con anterioridad, se actualiza día a día en el marco de las experiencias de los sujetos (Varela et al., 2005)

Los cuerpos de los estudiantes encarnan un conocimiento matemático, que ciertamente hace necesario mayor investigación, así como también, desarrollar formas estratégicas para entender el rol del cuerpo en el desarrollo del conocimiento (Kim, Roth & Thom, 2010).

Este entramado de relaciones complejas se construye de modo individual-social, e involucra una comprensión significativa y holística de la experiencia del sujeto (Häfner, 2013; Louwerse, 2008; Pagis, 2009; Varela et al., 2005). Se edifica, así, un conocimiento particular, abstracto y formalizado como es la matemática, encarnada en la cognición, la gestualidad, el lenguaje y la historia vivida. La interrelación entre cuerpo-mente-mundo constituye un todo inseparable, un acoplamiento significativo que debería orientar la enseñanza de la matemática escolar y, al mismo tiempo, la propia comprensión de quien aprende. Como se ha apreciado, el conocimiento matemático se revela en instancias que van más allá de una prueba de papel y lápiz, sino que en experiencias reales donde el estudiante es parte con su propia corporalidad.

5,6 Conclusiones de la investigación.

Finalmente, para responder a la pregunta de investigación que guio la tesis, esto es: ¿Qué experiencia de relación han establecido con la matemática estudiantes que inician la educación universitaria, con distinto nivel de habilidad cuantitativa?, y ¿cómo esta se manifiesta a partir de la gestualidad que expresan, la estrategia cognitiva elegida y las vivencias significativas en la etapa escolar, cuando enfrentan situaciones matemáticas de la vida cotidiana?, se presentan las principales conclusiones de cada estudio y luego del modelo general.

Estudio 1: se buscó describir y comparar la estrategia cognitiva: holística y/o analítica, utilizada por estudiantes que inician la educación universitaria y que poseen distinto nivel de habilidad cuantitativa, al resolver situaciones matemáticas de la vida cotidiana (objetivo 1). A partir de los resultados se concluye que la estrategia elegida por la mayoría de los estudiantes al resolver situaciones matemáticas, es la estrategia analítica, sin distinción por área, presentándose ciertas características particulares en esta elección, así como también respecto de la estrategia holística, menos elegida. Conclusiones específicas se describen a continuación:

- a. Si bien, casi la totalidad de los estudiantes de la muestra eligieron la estrategia analítica para resolver las situaciones matemáticas, los resultados evidencian que la elección de tal estrategia se encontraría relacionada con el nivel de desempeño de los estudiantes por área.

Es así, que quienes presentan mejor desempeño matemático no sólo son quienes utilizan en mayor medida la estrategia analítica, sino que también, pueden llegar a utilizar estrategias combinadas y son capaces de elegir una u otra estrategia en función de las características del ítem y el nivel de dificultad de este. Por el contrario, quienes presentan menor nivel de desempeño, suelen elegir solamente un camino analítico de solución, de carácter lineal, que se ve interrumpido si no se cuenta con los conocimientos apropiados para continuar.

- b. El uso o elección de una estrategia cognitiva, ya sea holística o analítica, por parte de los estudiantes al resolver situaciones matemáticas, no se encuentra dada a priori, sino que tiene directa relación con el contenido de la pregunta, el tipo de problema matemático que se presenta, sea este de carácter cotidiano o de cálculo directo, y la experiencia de aprendizaje escolar.
- c. Se evidenció una fuerte influencia de la formación escolar en matemática para el uso de estrategias analíticas más que holísticas por parte de los estudiantes.

Estudio 2: se buscó describir y comparar la gestualidad expresada por estudiantes que inician la educación universitaria y que poseen distinto nivel de habilidad cuantitativa, al resolver situaciones matemáticas de la vida cotidiana (objetivo 2). Este objetivo ha sido cumplido conforme a la evidencia presentada, entregando distinciones acerca de la gestualidad expresada, el tono corporal, uso de las manos y conexión personal, lo que se relacionó a su vez con el discurso y lenguaje utilizado, y la percepción de seguridad ya sea en el procedimiento como en el resultado. Conclusiones específicas se presentan a continuación:

- a. Los registros evidencian que la gestualidad en el contexto de la explicación de un proceso de resolución matemático, si bien constituye una forma de comunicación relevante para dar cuenta de la presencia y nivel de comprensión de los aprendizajes, se encuentra aun escasamente utilizada por los estudiantes, debido a que esta no fue suficientemente estimulada en su proceso de formación escolar, donde primaron los formatos tradicionales, donde se utilizan medios de representación formales, así como también, el uso de patrones comunes de resolución.
- b. La gestualidad expresada por los estudiantes adquiere una fisionomía que si bien puede presentar algunos rasgos comunes, como es el uso de gestos *indicativos*, presenta diferencias significativas por área. Se destaca en los estudiantes Humanistas un mayor uso de gestos simples y laxos, donde predomina una mano en la explicación, a diferencia de los estudiantes de Ingeniería donde se observaron *gestos de acción o de control absoluto*, mostrándose en ambas áreas una relación directa con el lenguaje matemático utilizado.
- c. La gestualidad presentó una relación directa con el desempeño de los estudiantes en las situaciones matemáticas, se puede afirmar que la gestualidad se expresaría de un modo particular en cuanto a su fisionomía al estar acompañada de mayor o menor dominio matemático, dada la disponibilidad de referentes de significado que permitan dar forma a la comprensión.
- d. Los datos muestran también cierta relación entre gestualidad y estrategia holística, en el sentido que ambas ponen énfasis en la globalidad de un problema, en especial cuando se cuenta con un dominio matemático que permite utilizar la intuición, la aproximación y el pensamiento abstracto en la comprensión de un objeto matemático.

- e. Si bien la postura corporal de los estudiantes en general se mostró con un *tono relajado*, fueron los estudiantes con mejor desempeño matemático quienes asumen una *tono erguido* en la explicación, así como también un discurso más fuerte y continuo y expresaron mayor seguridad tanto en el procedimiento como en el resultado.

Estudio 3: el propósito de este estudio fue describir y comparar las vivencias subjetivas e intersubjetivas de estudiantes que inician la educación universitaria y que poseen distinto nivel de habilidad cuantitativa, en su aprendizaje de la matemática escolar (objetivo 3). A partir de los resultados obtenidos se pudo concluir que las vivencias de los estudiantes en el proceso de aprendizaje de la matemática fueron configurando un entramado de dimensiones y sub-dimensiones que cobran sentido y significado en la propia historia de estos.

La disposición de los estudiantes al aprendizaje de la matemática, el apoyo de adultos significativos, las estrategias de estudio elegidas, las experiencias de aprendizaje vividas, tanto favorables como desfavorables durante la etapa escolar, fueron articulando un modo de relación que adquiere particularidades según la experiencia vivida, marcando diferencias por área, Humanista e Ingeniería. Conclusiones específicas se describen a continuación:

- a. A nivel personal, la evidencia refuerza la idea que el soporte emocional recibido por un adulto significativo, sea este un miembro de la familia o un profesor particular, resulta relevante para apoyar el proceso de enseñanza de aprendizaje de los estudiantes, en especial cuando estos presentan dificultad en el aprendizaje de la matemática escolar. La colaboración entre pares generó experiencias productivas de aprendizaje y brindó apoyo afectivo para enfrentar las tareas de mayor complejidad.
- b. La evidencia analizada da cuenta que cuando los estudiantes presentan algunas dificultad para entender los procesos recurren al cálculo como vía de resolución rápida, provocando un aprendizaje superficial. En este contexto el conocimiento obtenido muchas veces no puede ser recuperado o si se logra recuperar en parte no permite lograr resultados positivos en la resolución de problemas.
- c. A nivel de la docencia y el proceso de enseñanza y aprendizaje en el aula, se concluye que existen diferencias en cuanto a la importancia que los estudiantes dan a ciertos aspectos del proceso de la enseñanza de la matemática. Si bien por una parte, los estudiantes de Ingeniería valoran la capacidad de argumentación, el dominio conceptual y didáctico del profesor como un aspecto necesario para dar validez a lo enseñado y al que enseña, por otra parte, los estudiantes Humanistas, valoran de manera especial que el profesor *crea en sus estudiantes*, sin hacer diferencias en cuanto a las capacidades o los resultados obtenidos por estos, dando

variadas oportunidades para que todos aprendan, demostrando cercanía y estimulando el aprendizaje.

El cuarto objetivo específico a abordar, refiere a la integración entre las estrategias, holísticas y/o analíticas usadas por estudiantes que inician la educación universitaria, en la resolución de situaciones matemáticas, la gestualidad que expresan y las vivencias significativas en la etapa escolar, para dar cuenta de su experiencia de relación con la matemática. El logro de este objetivo permitió afirmar la existencia de un entramado de relaciones que se configuran de manera articulada, y que a su vez presentan un modo particular y en relación con el desempeño en la resolución de situaciones matemáticas, lo que constituye un punto de partida para desarrollos didácticos futuros.

Finalmente, para dar cuenta del objetivo general y la pregunta de investigación, se concluye la presencia de dos estilos de relación con la matemática, estilo *Analítico Acotado* y estilo *Analítico Expandido*, que expresan dos configuraciones de experiencia que se fueron construyendo en el devenir de la historia vivida por los estudiantes.

Respecto del estilo *Analítico Acotado*, se caracteriza por un bajo desempeño matemático que se encuentra en relación con la gestualidad, la que se expresa de un modo simple y laxo en cuanto a su fisionomía, y que a su vez se relaciona con un tipo de discurso más bien restringido en cuanto al uso del lenguaje matemático, tono y velocidad, lo que se relaciona con una vivencia acotada en cuanto a las oportunidades de aprendizaje brindadas en el contexto escolar, tanto en cuanto a la relación con los profesores como en el propio proceso de enseñanza aprendizaje, debiendo considerar diversas estrategias y apoyo emocional para enfrentar los desafíos que se presentan.

Respecto del estilo *Analítico Expandido*, se caracteriza por un desempeño matemático alto que se encuentra en relación con una gestualidad definida, expresada en la fisionomía de los gestos de acción o de control absoluto, que se manifiestan a partir del uso preferente de ambas manos, las que van en relación con un discurso fuerte y continuo, y una postura corporal erguida. Lo anterior, es expresión a su vez de una historia vivida enriquecida con diversas oportunidades de aprendizaje, las que no estuvieron ausente de aspectos desfavorables, pero que gracias a la autoconfianza, el esfuerzo y la seguridad personal permitió cumplir las metas.

Ambos estilos dan cuenta de cómo la corporalidad, en sus múltiples dimensiones se constituye en la manifestación expresa de las experiencias vividas por los sujetos, dando sentido y significado a las relaciones que de estas emergen. Estrategias cognitivas, gesto, discurso, lenguaje e historia escolar de aprendizaje de la matemática, van configurando una experiencia de relación subjetiva y particular, susceptible de ser reconocida en un espacio de interacción con otros, ya que no se vive de modo individual. Lo anterior, no sólo constituye un oportunidad para el desarrollo de estrategias específicas aplicadas a contextos

de aprendizaje en el aula, sino también una oportunidad de futuras investigaciones que permitan descubrir otros campos donde estas relaciones se den.

5.7 Aportes, proyecciones y limitaciones de la investigación.

Aportes y proyecciones

La presente investigación realiza variados aportes, entre los que se cuenta la configuración de una perspectiva holística para comprender la experiencia de relación corporeizada de los estudiantes con la matemática. Se logra configurar un modelo integrado de categorías de análisis que en su conjunto articulan distintas dimensiones de la experiencia de los sujetos, avanzando en un análisis complejo de la realidad más que la observación de partes. La evidencia teórica anterior a esta tesis ha considerado la relación mente, cuerpo y lenguaje en forma sistemática, manteniendo la dimensión de experiencia subjetiva en una posición más bien restringida al ambiente o contexto, ya sea en el plano cognitivo o como antecedente. La perspectiva anterior parecía insuficiente en una aproximación a la comprensión de una experiencia corporeizada, entendida esta desde una totalidad donde se articulan múltiples dimensiones.

El estudio, además, logra dar cuenta de tres fenómenos que en sí mismos constituyen un área de conocimiento en el campo de la matemática. En cuanto a las estrategias cognitivas, la evidencia sobre su vínculo con el aprendizaje se ha centrado mayoritariamente en el estudio de los hemisferios del cerebro o al reconocimiento y categorización perceptual, estudios culturales, estrategias de procesamiento, y en menor medida en resolución de problemas y toma de decisiones. Esta investigación no es sólo un aporte al estudio de la estrategia analítica en sí misma, sino que deja preguntas planteadas para futuras investigaciones en cuanto a cómo la utilización de estrategias holísticas en relación con la gestualidad podría influir positivamente en el aprendizaje de la matemática escolar y en la educación superior.

Es necesario seguir investigando acerca de los contextos específicos y tipos de problemas que pudiesen favorecer en mayor medida el uso de esta estrategia acompañada de gestos en contextos de aprendizaje, debido a que la elección de esta estrategia está relacionada tanto con el contenido como con el tipo de estímulo al que se enfrentan los estudiantes. Por otra parte la gestualidad reduce la carga cognitiva de estos.

A nivel gestual, las investigaciones con estudiantes en educación superior son escasas, en especial cuando se busca analizar experiencias en el comienzo de la educación superior. La mayoría de los estudios se encuentran centrados en el desarrollo de la gestualidad en niños en diversas etapas del desarrollo, por lo que el presente estudio se presenta como un aporte para la psicología cognitiva y el estudio de gestos.

A nivel de vivencias subjetivas, la literatura es amplia en cuanto a actitudes, motivaciones, disposición, estrategias de enseñanza y evaluación en matemática en los distintos niveles. Sin embargo, es escasa frente a cómo abordar estos fenómenos desde la comparación entre estudiantes con distintas habilidades cuantitativa en educación superior. Por otra parte, a pesar de contar con una variada literatura, el estudio logra rescatar aspectos poco conocidos o, que en otros casos, se encuentran débilmente sistematizados, como es la experiencia de aprendizaje de estudiantes que tienen un alto nivel de habilidad matemática en cuanto a su proceso de enseñanza y aprendizaje, una vez finalizada la etapa escolar.

Respecto de la estrategia metodológica, la investigación hace un aporte en cuanto a la aplicación de un modelo multinivel integrativo que puede ser aplicado a otras áreas de conocimiento con un enfoque Mixto. En la línea de los instrumentos de registro de información, se logra contar con indicadores validados para evaluar procesamiento analítico y holístico en estudiantes de educación superior, y por otra, se desarrolla una rúbrica validada para evidenciar gestualidad en la resolución de situaciones matemáticas, integrando aspectos del discurso y percepción de seguridad.

Un aspecto destacable, que debiese ser reforzado en futuras investigaciones y en la enseñanza de la matemática en los primeros años de la educación superior, es la “explicación en voz alta”. Este elemento tuvo efectos muy positivos no sólo para reflejar el proceso de pensamiento de los estudiantes y llegar a las comprensión de sus decisiones matemáticas en el procedimiento y solución, sino también tuvo un efecto en el proceso metacognitivo del estudiante cuando estos al verbalizar su proceso detectaban sus errores y corregían el camino de solución sin intervención de un tercero. Esta visualización cognitiva no se habría logrado si la tesista sólo hubiese retirado las hojas con las respuestas de los estudiantes.

En cuanto al proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar, los resultados del estudio 2, referido a gestualidad en la resolución matemática, permite por una parte, reconocer el escaso uso de los gestos en la enseñanza y evaluación de la matemática en escuelas chilenas y por otra, se constituye en una evidencia importante y punto de partida para la implementación de estudios pilotos en el área. Asimismo, a partir de los resultados específicos por estudio y en el análisis global de la presente investigación, es posible plantear aplicaciones prácticas tales como:

- a. Incorporar en los diagnósticos que se realizan al inicio de una unidad o un curso de matemática, aspectos asociados a las vivencias significativas de aprendizaje de esta en la etapa escolar, avanzando más allá de la medición de habilidades o manejo de contenidos. Estas vivencias, darán cuenta de barreras, disposiciones, experiencias favorables y desfavorables de los estudiantes, que se actualizarán al momento de verse enfrentados nuevamente con dicho contenido, por lo que reconocer tales

aspectos será relevante para que el profesor pueda ajustar su enseñanza y evaluación (Shepard, 2006).

- b. Reconocer en el proceso de enseñanza de la matemática, el tipo de postura corporal y patrones de gestos que se encuentren asociados a ciertos contenidos matemáticos específicos, como es el conocimiento geométrico (Kim, Roth & Thom, 2011), permitiría no sólo dar cuenta de la comprensión actual que pueden tener los estudiantes acerca de ciertos contenidos (Bermeosolo, 2004; Cook, Duffy & Fenn, 2013; Cook, Mitchell & Goldin-Meadow, 2008), del cambio en el nivel conocimientos (Novack & Goldin-Meadow, 2015), del conocimiento implícito que generalmente se expresa primero a nivel gestual, y como punto de partida para lograr nuevos conocimientos (Allibali et al., 2014; Broaders et al., 2007). Así también, se podrá tener acceso a la disposición de los estudiantes al aprendizaje, permitiendo al profesor tomar decisiones para lograr mayor involucramiento.

- c. Para la resolución de problemas de la vida cotidiana, se sugiere estimular el uso de la estrategia holística y la gestualidad, en la interacción de los estudiantes con los docentes, en contextos de explicación en voz alta (Logan, Lowrie & Diezmann, 2014). Lo anterior, permitiría lograr mayor comprensión de ciertos contenidos de carácter abstracto, debido a que el uso de gestos disminuye la carga cognitiva para los estudiantes (Cook & Goldin-Meadow, 2006; Novack, Congdon, Hemani-Lopez & Goldin-Meadow, 2014), así como la estrategia holística favorece la intuición, creatividad, la aproximación y el pensamiento global (Choi, Koo & Choi, 2007; Nisbett, Peng, Choi & Norenzayan, 2001).

- d. En contextos de evaluación para el aprendizaje, el uso de la gestualidad en la explicación oral, cuando se resuelven problemas matemáticos y estadísticos en educación superior, constituye una evidencia sustantiva para ser utilizada en contextos de evaluación formativa, y menos amenazadora que las estrategias tradicionales que consideran pruebas escritas, o guías de resolución individual, como medios de representación formales, los que si bien son efectivos para mostrar una forma de entender el conocimiento de los estudiantes, se tornaría limitado. Así también, la interacción con gestos entre grupos de pares en contextos de aprendizaje, enriquecerá la comunicación de saberes, y generará un clima más positivo para el aprendizaje.

Limitaciones

Esta tesis enfrentó el desafío de construir paso a paso una metodología que permitiera comprender el fenómeno de estudio en su globalidad, lo que constituyó una dificultad al tener que articular dimensiones investigadas por separado en el pasado, sin un dispositivo metodológico previo sino que fue construido en el devenir de esta investigación.

Una limitación que incide en los resultados de esta investigación, es la distribución de la muestra, en cuanto a la heterogeneidad del grupo Humanista versus la homogeneidad del grupo de Ingeniería. Ya que al considerar como un todo a los estudiantes de las tres carreras, no se logra dar cuenta de posibles particularidades propias del perfil de estudiante que ingresa estas. Por otra parte, la distribución sesgada de la muestra en cuanto al sexo de los estudiantes, no permite realizar análisis que arrojen diferencias o semejanzas en cuanto a la experiencia de relación matemáticas entre hombres y mujeres por área.

Junto a lo anterior, se reconoce que el setting y procedimiento de recogida de datos, que implicó al estudiante encontrarse en una situación conocida y familiar al contexto escolar, como es un escritorio, un profesor y situaciones matemáticas a resolver, pudo influir en la elección de estrategia analítica por sobre la estrategia holística estimulando la orientación a patrones conocidos de resolución. Tal como plantea Bronfenbrenner (1987) el ambiente del estudio podría haber influenciado la experiencia vivida por los sujetos, ya que estos se encuentran en permanente conexión.

Relacionado con el punto anterior, se plantea que los enunciados de las situaciones matemáticas utilizadas pudieron intencionar la forma de responder de los estudiantes, producto de su formato no auténtico. Esta limitación pudo afectar en forma especial el estudio de las estrategias holística y analítica, aunque las primeras hayan sido menos utilizadas en general por los estudiantes.

En este mismo sentido cabe destacar, que otra limitación de la investigación, tiene relación con los ítems utilizados en el proceso de recolección de datos, dado que a pesar de haber sido sometidos a procesos de validación de expertos matemáticos para su selección, solo uno de estos ítems respondió de manera adecuada a las características de un ítem de vida cotidiana, lo que pudo incidir en los resultados de la investigación tanto en cuanto a la selección de la estrategia cognitiva elegida como en la gestualidad expresada.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Agencia de la Calidad de la Educación (2013). Resultados TIMSS 2011 Chile. Estudio Internacional de Tendencia en Matemáticas y Ciencias. International Study Center. Lynch School of Education. Boston College. Recuperado de [http://www.mineduc.cl/usuarios/acalidad/doc/201301151653440.Informe_Resultados_TIMSS_2011_Chile_\(10-01-13\).pdf](http://www.mineduc.cl/usuarios/acalidad/doc/201301151653440.Informe_Resultados_TIMSS_2011_Chile_(10-01-13).pdf)
- Agencia de la Calidad de la Educación. (2015a) Informe Técnico SIMCE 2013. Gobierno de Chile. Recuperado de <http://www.agenciaeducacion.cl/>
- Agencia de la Calidad de la Educación. Presentación (2015b) Resultados SIMCE 2014. Gobierno de Chile. Recuperado de http://archivos.agenciaeducacion.cl/resultados2014/Presentacion_Entrega_Resultados_2014.pdf
- Alcalay, L., Flores, A., Milicic, N., Portales, J. & Torretti, A. (2003). Familia y Escuela. ¿Una Alianza Posible? Una mirada desde la Perspectiva de los Estudiantes. *Psykhé*, 12(2), 101-110
- Allibali, M. & Nathan, M. (2012). Embodiment in Mathematics Teaching and Learning: Evidence from Learners' and Teachers' Gestures. *Journal of the Learning Sciences*, 21(2), 247-286. DOI: 10.1080/10508406.2011.611446
- Allibali, M., Nathan, M., Wolfram, M., Church, B., Jacobs, S., Johnson, C., & Knuth, E. (2014). How Teachers Link Ideas in Mathematics Instruction Using Speech and Gesture: A Corpus Analysis. *Cognition and instruction*, 32(1) 65-100.
- Aparicio, E. & Cantoral, R. (2006). Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. *Relime*, 9(1), 7-30
- Arancibia, V., Herrera, P., Strasser, K. (2000). Psicología de la Educación. Santiago, Chile: Ed. Alfaomega.
- Araya, R. (2004). *Inteligencia Matemática*. Chile: Editorial Universitaria.
- Araya, R., Plana, F., Dartnell, P., Soto-Andrade, J., Luci, G; Salinas, E. & Araya, M., (2012). Estimation of teacher practices based on text transcripts of teacher speech using a support vector machine algorithm. *British Journal of Educational Technology*, 43(6), 837-846
- Balatsoukas, P., O'Brien, A. & Morris, A., (2011). The effects of discipline on the application of learning object metadata in UK higher education: the case of the Jorum repository. *Information Research*, 16(3), Paper 481.
- Baxter, G., & Glaser, R. (1998). Investigating the cognitive complexity of science assessments. *Educational Measurement: Issues and Practices*, 17(3), 37-45.
- Ben Zur, H. (1998). Dimensions and Patterns in Decision-making Models and the Controlled/Automatic Distinction in Human Information Processing. *European Journal of Cognitive Psychology*, 10(2), 171-189.
- Benjafield, J. (1997). *Cognition*. (2° Ed). New Jersey: Prentice Hall.

- Berger, C. & Gubbins V. (2002). Hacia Una Alianza Efectiva entre Familias y Escuelas. *Revista Persona y Sociedad*, 16(3), 71-86
- Bergson, H. (1966). *Introducción a la Metafísica: La intuición filosófica*. Buenos Aires: Editorial Siglo Veinte.
- Bermeosolo, J. (2004). *Psicología del Lenguaje. Fundamentos para Educadores y Estudiantes de Pedagogía*. Santiago: Ediciones Universidad Católica de Chile.
- Bernardis, P. & Gentilucci, M. (2006). Speech and gesture share the same communication system. *Neuropsychologia*, 44(2), 178-190.
- Bishop, A. (2000). Enseñanza de las matemáticas: ¿cómo beneficiar a todos los alumnos?. En Gorgorió i Solá, N. & Deulofeu Piquet, J. (Coords.). *Matemáticas y educación : retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp.35-56). España: Ed. Graó.
- Borromeo, R. (2012). Mathematical Thinking Styles and Their Influence On Teaching And Learning Mathematics. 12th International Congress on Mathematical Education
- Boyer, C. (1999). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Editorial
- Bravo, D. & Contreras, D. (2001). *Competencias Básicas de la Población Adulta*. Santiago de Chile: Andros Impresores.
- Broaders, S., Cook, S., Mitchell, Z. & Goldin-Meadow, S. (2007). Making Children Gesture Brings Out Implicit Knowledge and Leads to Learning. *Journal of Experimental Psychology*, 136(4), 539-550.
- Bronfenbrenner, U. (1987). *La Ecología del Desarrollo Humano. Cognición y desarrollo humano*. España: Ediciones Paidós Ibérica S.A
- Bronfenbrenner, U. & Morris, P. (2005). The Bioecological Model of Human Development. En Bronfenbrenner, U. (Ed.) *Making human beings human: bioecological perspectives on human development* (pp. 793- 828). Thousand Oaks: Sage.
- Bruner, J. (1987). *La importancia de la educación*. España: Ediciones Paidós Ibérica S.A
- Bruner, J. (1998). *Actos de significado*. Madrid: Alianza.
- Bruner, J. (2000). *La educación, puerta de la cultura*. Madrid: Ed. Visor.
- Bunge, M. (1988). *El Problema Mente-Cerebro. Un Enfoque Psicobiológico*. (2da edición). Madrid: Editorial Tecnos, S.A.
- Bunge, M. (2007). *La Investigación Científica* (4ta edición). Barcelona: Siglo XXI Editores
- Byrne, B., Khlentzos, D., Olson, R & Samuelsson, S. (2010). Evolutionary an Genetic Perspective on Educational Attainment. En Littleton, K., Wood, C. & Staarman, J. (Eds.) *International Handbook of Psychology in Education*. (pp. 3-33). UK: Emerald Group.
- Camaioni, L., Aureli, T., Bellagamba, F. & Fogel, A. (2003). A longitudinal examination of the transition to symbolic communication in the second year of life. *Infant and Child Development*, 12, 1-26.
- Capone, N. & McGregor, K. (2004). Gesture development: A review for clinical and research practices. *Journal of Speech, Language and Hearing Research*, 47, 173-186.

- Chen, YC & Yeh, SL. (2014). Binding radicals in Chinese character recognition: Evidence from repetition blindness. *Journal of Memory and Language*, 78, 47-63.
- Choi, I., Koo, M. & Choi, J. (2007). Individual Differences in Analytic Versus Holistic Thinking. *Personality and Social Psychology Bulletin*, 33(5), 691-705
- Clariana, M. (1993). Reflexividad – Impulsividad y estrategias cognitivas. *Revista de Psicología general y aplicada*, 46(2), 209-212.
- Clark, I. (2012). Formative Assessment: Assessment Is for Self-regulated Learning. *Educational Psychology Review*, 24(2), 205–249.
- Cole, K. (1999). *El Universo y la taza de té. Las matemáticas de la verdad y la belleza*. Madrid: Ediciones Grupo Zeta.
- Coller, X. (2000). Estudio de casos. Madrid, CIS (Colección Cuadernos Metodológicos, nº 30).
- Cook, S. & Goldin-Meadow, S. (2006). The Role of Gesture in Learning: ¿Do Children Use Their Hands to Change Their Minds?. *Journal of Cognition and development*, 7(2), 211-232.
- Cook, S., Duffy, R. & Fenn, R. (2013). Consolidation and Transfer of Learning After Observing Hand Gesture. *Child Development*, 84(6), 1863-1871
- Cook, S., Mitchell, Z., & Goldin-Meadow, S. (2008). Gesturing makes learning last. *Cognition*, 106(2), 1047-1058
- Corbalán, F. (1997). *La Matemática aplicada a la vida cotidiana*. Barcelona: Ed. Graó.
- Cornejo, C., Simonetti, F., Aldunate, N., Ibáñez, A., López, V., & Melloni, L. (2007). Electrophysiological evidence of different interpretative strategies in irony comprehension. *Journal of Psycholinguistic Research*, 36, 411–430.
- Cornejo, C., Ibáñez, I., López, V. (2008). Significado, Contexto y Experiencia: evidencias conductuales y electrofisiológicas del holismo del significado. En Kronmüller, E.; Cornejo, C. (Eds.). *Ciencias de la Mente Aproximaciones desde Latinoamérica* (pp. 211-240). Santiago: J.C Sáez Editor.
- Cornejo, C., Simonetti, F., Ibáñez, A., Aldunate, N., Ceric, F., López, V. & Núñez, R. (2009). Gesture and metaphor comprehension: Electrophysiological evidence of cross-modal coordination by audiovisual stimulation. *Brain and Cognition*, 70(1), 42-52.
- Cosmelli, D., Soto-Andrade, J. & Tanter, E. (2007). Programming Paradigms and Mind Metaphors: Convergence and Cross-fertilization in the Study of Cognition. *Biological Research*, 40(4), 503-515.
- Creswell, J. & Plano, V. (2007). *Designing and Conducting Mixed Methods Research*. United Kingdom: Sage Publications.
- Curry, D., Schmitt, D. & Waldron, S. (1996). *A Framework for adult Numeracy standards: The Mathematical Skills and Abilities Adults Needs To be Equipped for the future*. Recuperado de http://adulnumeracynetwork.org/files/Framework_AdultNumeracyStandards.pdf

- De Corte, E., & Verschaffel, L. (2003). El desarrollo de habilidades de autorregulación en la solución de problemas matemáticos. *Pensamiento Educativo*, 32(15), 286 – 305.
- De Freitas, E. & Sinclair, N. (2012). Diagram, gesture, agency: theorizing embodiment in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 80, 133-152
- Delgado, J.M. & Gutiérrez, J. (1995). *Métodos y técnicas cualitativas de investigación en CCSS*. Madrid: Síntesis.
- De la Barrera, M. (2008). Estilos y Estrategias de Aprendizaje, Procesamiento Hemisférico y Rendimiento Académico en Alumnos Univesitarios. *Revista Digital Universitaria*, 9(5), 1-12.
- Dreyfus, H. & Dreyfus, S. (1988). Fabricar una mente versus modelar el cerebro: la inteligencia artificial se divide de nuevo. En Graubard, R. (Ed). *El nuevo debate sobre inteligencia artificial* (pp. 25-58). Barcelona: Gedisa.
- Dreyfus, H. (2003). *Ser-en-el-Mundo. Comentarios a la División I de Ser y Tiempo de Martin Heidegger*. Santiago de Chile: Cuatro Vientos.
- Dubal, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*: Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.
- Ericsson, K. & Simon. H. (1984). *Protocol Analysis. Verbal Reports as Data*. United States of América: The MIT Press.
- Espinoza, L., Barbé, J. & Gálvez, G. (2009). Estudio de Fenómenos Didácticos Vinculados a la Enseñanza de la Aritmética en la Educación Básica Chilena. *Enseñanza de las ciencias*, 27(2), 157-168.
- Estévez, E. (2002). *Enseñar a Aprender. México*: Editorial Paidós
- Farkas, CH. (2007). Comunicación gestual en la Infancia Temprana: Una revisión de su desarrollo, relación con el lenguaje e implicancias de su intervencion. *Psykhé*, 16(2), 107-115
- Fernández, J. (1988). El Conexionismo. *Aldaba*, 11, 25–40.
- Fifié, M. & Townsend, J. (2010). Information-Processing Alternatives to Holistic Perception: Identifying the Mechanisms of Secondary-Level Holism Within a Categorization Paradigm. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 36(5), 1290–1313.
- Flick, U. (2007). *Introducción a la investigación cualitativa*. (2da Edición). Madrid: Ediciones Morata
- Font, V. (2003). Matemática y Cosas. Una Mirada desde la Educación Matemática. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10(2), 249-279.
- Font, V., Bolite, J. & Acevedo, J. (2010). Metaphors in mathematics classrooms: analyzing the dynamic process of teaching and learning of graph functions *Educational Studies in Mathematics*, 75, 131-152.
- Fourez, G. (1997). *Alfabetización Científica y Tecnológica. Acerca de las finalidades de la enseñanza de las ciencias*. Buenos Aires: Ediciones Colihue.

- Francaviglia, M., & Servidio, R. (2011). Gesture as a cognitive support to solve mathematical problems. *Psychology*, 2(2) 91-97.
- Gagné, R. & Briggs, L. (1976). *La Planificación de la enseñanza*. México: Trillas.
- Gal, I., Van Groenestijn, M., Manly, M., Schmitt, M. & Tout, D. (2003). *Adult numeracy and its assessment in the ALL survey: A conceptual framework and pilot result*. Recuperado de http://www.fi.uu.nl/nl/wiki/mbo/raamwerk_mbo/20051215_all_framework_numeracy_framework.pdf
- Gálvez, G., Cosmelli, D., Cubillos, L., Leger, P., Mena, A., Tanter, É., Flores, X., Luci, G., Montoya, S. & Soto-Andrade, J. (2010). Estrategias cognitivas para el cálculo mental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14(1), 9-40.
- Gallese, V. & Lakoff, G. (2005). The brain's concepts: The role of the sensory-motor system in conceptual knowledge. *Cognitive Neuropsychology*, 21(0), 1-25.
- Garrett, J., Alman, M., Gardner, S., and Born, C. (2007). Assessing Students' Metacognitive Skills. *American Journal of Pharmaceutical Education*, 71(1), 1-7.
- Gigerenzer, G. (2000). *Adaptive Thinking. Rationality in the real world*. Oxford: University Press.
- Gibbs, R. (1999). Taking Metaphor out of our Heads and Putting it into the cultural world. En Gibbs, R. & Steen, G. (Eds.). *Metaphor in Cognitive Linguistics*, (p. 145 -167). Amsterdam: John Benjamins Publishing Company.
- Gibbs, R. (2005). *Embodiment and Cognitive Science*. USA: Cambridge University Press.
- Gillespie, A. & Zittoun, T. (2013). Meaning making in motion: Bodies and minds moving through institutional and semiotic structures. *Culture & Psychology*, 19(4), 518-532.
- Gödel, K. (2006). La lógica matemática de Russell. *Revista Teorema*, 25(2), 2006, 113-137.
- Goldin-Meadow, S. (1999). The role of gesture in communication and thinking. *Trends in Cognitive Sciences*, 11(3), 419- 429
- Goldin-Meadow, S. & Singer, M. (2003). From Children's Hands to Adults' Ears: Gesture's Role in the Learning Process. *Developmental Psychology*, 39(3), 509-520.
- Goldin-Meadow, S. & Wagner, S. (2005). How our hands help us learn. *Trends in Cognitive Sciences*, 9(5), 234-241
- Goldin-Meadow, S. (2006). Talking and Thinking with our Hand. *Current Directions in Psychological Science*, 15(1), 34-39.
- Goodwyn, S., Acredolo, L. & Brown, C. (2000). Impact of symbolic gesturing on early language development. *Journal of Nonverbal Behavior*, 24, 81-103.
- Gorgorio, N., Deulofeu, J., Bishop, A., Abreu, G., Balacheff, N., Clements, K., Dreyfus, T., Goffree, F., Hilton, P., Nesher, P., & Ruthven, K. (2000). *Matemáticas y Educación: retos y cambios desde una perspectiva internacional*. Barcelona: Editorial GRAÓ
- Grolnick, W. (2009). The role of parents in facilitating autonomous self-regulation for education. *Theory and Research in Education*, 7(2), 164-173

- Grossmann, I. & Na, J. (2014). Research in culture and psychology: past lessons and future challenges. *Interdisciplinary Reviews-Cognitive Science*, 5(1), 1-14.
- Gubbins, V. (2011). Familia y Escuela: Tensiones, reflexiones y propuestas. *Docencia*, 46, 64-73.
- Gubbins, V. (2014). Estrategias Educativas de Familias de Clase Alta. Un estudio exploratorio. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 19(63), 1069-1089.
- Hacker, D. J., Bol, L., & Keener, M. C. (2008). Metacognition in education: A focus on calibration. En J. Dunlosky, & R. Bjork (Eds.), *Handbook of Memory and Metacognition* (pp. 429-456). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Häfner, M. (2013). When Body and Mind Are Talking. Interoception Moderates Embodied Cognition. *Experimental Psychology*, 60(4), 255-259
- Hair, F., Anderson, R., Tatham, R. & Black, W. (2001). *Análisis Multivariante*. 5ta. Ed. Madrid: Prentice Hall
- Heber J. (1999). *La matemática y sus relaciones con otros campos del conocimiento*. Venezuela: Universidad de Zulia
- Heidegger, M. (1975). *La Pregunta por la cosa*. Buenos Aires: Alfa
- Hidalgo, S., Maroto, A. & Palacios, A. (2005). El perfil emocional matemático como predictor de rechazo escolar: relación con las destrezas y los conocimientos desde una perspectiva evolutiva. *Educación Matemática*, 17 (2), 89-116.
- Hiebert, J., Carpenter, T., Fennema, E., Fuson, K., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A., Human, P & Liguist, M. (1997). *Making sense: teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Hill, N. & Tyson, D. (2009). Parental Involvement in Middle School: A Meta-Analytic Assessment of the Strategies That Promote Achievement. *Developmental Psychology*, 45(3), 740-763
- Hilton, P. (2000). Necesidad de Una Reforma En Gorgorió i Solá, N. & Deulofeu Piquet, J. (Coords.). *Matemáticas y educación: retos y cambios desde una perspectiva internacional* (p.79-90). Barcelona: Ed. Graó
- Himmel, E. (2003). Evaluación de Aprendizajes en la Educación Superior: una reflexión necesaria. *Revista Pensamiento Educativo*, 33 (10), 199-211.
- Hofstadter, D. (1989). *Gödel, Escher, Bach un Eterno y Grácil Bucle*. Barcelona: Tusquets Editores.
- Hunt, R. & Ellis, H. (2007). *Fundamentos de Psicología Cognitiva*. México: El Manual Moderno
- Husserl, E. (1925/1992). *Invitación a la fenomenología*. Barcelona: Ediciones Paidós.
- Ibañez, J. (1991). *El Regreso del Sujeto. La investigación social de segundo orden*. Chile: Editorial Amerinda.
- Ibañez, A. & Cosmelli, D. (2007). Dinámica, intencionalidad y corporeización de la mente. Pasos hacia la comprensión de los límites y posibilidades de los nuevos enfoques de la cognición. En Ibañez, A. & Cosmelli, D. (Eds.). *Nuevos enfoques de la cognición*.

- Redescubriendo la dinámica de la acción, la intención y la intersubjetividad.* (pp. 9-25). Santiago, Chile: Ediciones Universidad Diego Portales.
- Imbo, I., Vandierendonck, A., and Fias, W. (2011). Passive hand movements disrupt adults' counting strategies, *Frontiers in Psychology*, 2(201), 1-5
- Ispir, O., Ay, Z., Saygi, E. (2011). High Achiever Students' Self Regulated Learning Strategies, Motivation towards Mathematics, and their Thinking Style. *Egitim Ve Bilim-Education and Science*. 36(162), 235-246
- Johnson, M. (1987). *The Body in the Mind: The Bodily Basis of Meaning, Imagination, and Reason*. Chicago: University of Chicago Press
- Kendon, A. (2004). *Gesture. Visible Action as Utterance*. United Kingdom: Cambridge University Press
- Kim, M., Roth, WM & Thom, J. (2010). Children's Gestures and the Embodied Knowledge of Geometry. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9(1), 207-238.
- Kronmüller, E. & Cornejo, C. (2008). La pregunta por la mente: Las ciencias cognitivas después del cognitivismo. En Kronmüller, E. & Cornejo, C. (Eds.). *Ciencias de la Mente Aproximaciones desde Latinoamérica*. (pp. 13-25). Santiago, Chile: J.C Sáez Editor.
- Kvale, S. (2011). *La entrevista en investigación cualitativa*. Madrid: Morata, S.L.
- Lachmann, T. & Van Leeuwen, C. (2014). Reading as functional coordination: not recycling but a novel synthesis. *Frontiers in psychology*, 5(1046).
- Lachmann, T., Schmitt, A., Braet, W., and Van Leeuwen, C. (2014). Letters in the forest: global precedence effect disappears for letters but not for non-letters under Reading-like conditions. *Frontiers in psychology*, 5(705)
- Lakatos, I. (1978). *Pruebas y Refutaciones. La Lógica Del Descubrimiento Matemático*. Madrid: Alianza Editorial.
- Lakoff G. & Johnson, M. (1980a). *Metaphors we live by*. Chicago: University of Chicago Press.
- Lakoff G. & Johnson, M. (1980b). Conceptual Metaphors in everyday Language. *The Journal of Philosophy*, 77(8), 453-486.
- Lakoff, G. & Johnson, M. (1999). *Philosophy in the flesh: The embodied mind and its challenge to Western thought*. New York: Basic Books.
- Lakoff, G. & Núñez, R. (2000). *Where Mathematics comes from. How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Editorial Basic Book.
- Leung, Ka. (2007). *Embodied cultural cognition: ¿How culture is carried by our bodily experiences?* (Tesis de Doctorado). University of Illinois at Urbana-Champaign, Illinois, USA.
- Lim, V., Wilson, A., Hamm, J., Phillips, N., Iwabuchi, S., Corballis, M., Arzarello, F., and Thomas, M. (2009). Semantic processing of mathematical gestures. *Brain and Cognition*, 71(306-312).

- Logan, T., Lowrie, T. and Diezmann, CM. (2014). Co-thought gestures: Supporting students to successfully navigate map tasks. *Educational Studies in Mathematics An International Journal*, 87(1), 87-102.
- Louwerse, M. (2008). Embodied relations are encoded in language. *Psychonomic Bulletin & Review*, 15(4), 838-844.
- Luchini, G., Cuadrado, B. y Tapia, L. (2006). *Errorar no es siempre un error: un estudio de los errores y dificultades en el aprendizaje de la matemática de niños y jóvenes estudiantes, propuestas para los docentes*. Santiago, Chile: Fundar
- Luna-Blanco R. & Ruiz-Soler, M. (2001). Factores intrasujeto implicados en la percepción de la señalización vertical: procesamiento holístico y analítico. *Psicothema*, 13(1), 141-146.
- Maier, S. (2003). Numeracy in the Newsroom: A case study of mathematical competence and confidence [version electrónica]. *Journalism and Mass Communication Quarterly: ProQuest Education Journals*, 80(4), 921-936.
- Mankiewicz, R. (2005). *Historia de las matemáticas. Del cálculo al caos*. Barcelona: Ed. Paidós.
- Márquez, R. & Ellwanger, J. (2014). Independent and interdependent self-construals do not predict analytic or holistic reasoning, *Psychological reports*. 115(1), 326-338.
- Marsh, H. W & Retali, K (2010). Academic Self-Concept: The Role of Positive Self-Beliefs in Educational Psychology. En Littleton, K., Wood, C. & Staarman, J. (Eds.) *International Handbook of Psychology in Education*. (pp. 499-533). UK: Emerald Group.
- Marshall, V. & Mickenberg, I. (1988). *Algebra: Introducción a los Fundamentos de la Matemática*. Santiago de Chile: Pontificia Universidad Católica de Chile
- McNeill, D. (1992). *Hand and Mind. What Gestures reveal about Thought*. Chicago: University of Chicago Press.
- Merleau-Ponty, M. (1985). *Fenomenología de la Percepción. (Trad. Jem Cabanes)*. Barcelona: Editorial Planeta-Agostini
- Miller, K.F., Kelly, M., & Zhou, X. (2005). Learning mathematics in China and the United States: Cross-cultural insights into the nature and course of preschool mathematical development. In J.I.D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (pp. 163- 177). New York: Psychology Press.
- Mill, J.S (1882). *A System of Logic, Ratiocinative and Inductive: Being a connected view of the principles of evidence and the methods of scientific investigation* (8th edition). New York: Harper & Brothers Publishers.
- MINEDUC (2008). *Marco para la Buena Enseñanza*. Recuperado de <http://www.docentemas.cl/docs/MBE2008.pdf>
- MINEDUC (2010). *Resultados Nacionales SIMCE 2010. Informe de Resultados Nacionales Ministerio de Educación Unidad de Currículum y Evaluación*. Recuperado de www.simce.cl
- Miranda, M. (2005). Educación escolar y educación superior. Un diálogo necesario para

- construir relaciones sistémicas. *Educación Superior y Mundo Escolar*, 1, 17-26.
- Miyamoto, Y., Nisbett, R. & Masuda, T. (2006). Culture and the Physical Environment Holistic Versus Analytic Perceptual Affordances. *Psychological Science*, 17(2), 113-119.
- Mukhopadhyay, C. (2004). A Feminist Cognitive Anthropology: The Case of Women and Mathematics. *Ethos*, 32(4), 458-492.
- Mullis, I., Martin, M., Smith, T., Garden, R., Gregory, K., González. E., Chrostowski, S. y O'Connor, K. (2003). *Estudio Internacional de Tendencias en Matemática y Ciencias. Marcos teóricos y especificaciones de evaluación de TIMSS 2003*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Recuperado de http://www.iea.nl/fileadmin/user_upload/Publications/Electronic_versions/TIMSS_2003_Framework_Spanish.pdf
- Murillo, F. & Román, M. (2011). ¿La Escuela o la Cuna? Evidencias sobre su aportación al redimienno de los estudiantes de América Latina. Estudio multinivel sobre la estimación de los efectos escolares. *Revista de curriculum y formación del profesorado*. 15(3), 27-50.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to action: Ensuring mathematical success for all*, Reston.
- National Mathematics Advisory Panel (2008). *Foundations for Success: The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel*, U.S. Department of Education: Washington, DC. Recuperado de <http://www2.ed.gov/about/bdscomm/list/mathpanel/report/final-report.pdf>
- National Research Council (2013). *The Mathematical Sciences in 2025*. Washington, D.C.: The National Academies Press. Recuperado de http://www.math.utk.edu/~vasili/refs/Papers/NAS13.math_in_2025.pdf
- Newell, A. & Simon, H. (1972). *Human Problem Solving*. Englewood Cliffs, N.J: Prentice-Hall.
- Nesher, P. (2000). Posibles relaciones entre lenguaje natural y lenguaje matemático. En Gorgorió, N., Deulofeu, J., Bishop, A. (Coords), *Matemáticas y Educación: retos y cambios desde una perspectiva internacional*, (pp. 109-123). Barcelona: Editorial Grao
- Nisbett, R., Peng, K., Choi, I. & Norenzayan, A. (2001). Culture and Systems of Thought: Holistic Versus Analytic Cognition. *Psychological Review*, 108(2), 291-310.
- Novack, M., Congdon, E., Hemani-Lopez, N., & Goldin-Meadow, S. (2014). From Action to Abstraction: Using the Hands to Learn Math. *Psychological Science*. 25(4), 903-910.
- Novack, M., & Goldin-Meadow, S. (2015). Learning from Gesture: How Our Hands Change Our Minds. *Educational Psychology Review*. New York: Springer. 27(405-412)
- Núñez, R. (1995). ¿What Brain for God's-Eye? Objectivism, Biological Naturalism and Searle. *Journal of Consciousness Studies*, 2(2), 149-166.

- Núñez, R. (2000). *Mathematical idea analysis: What embodied cognitive science can say about The human nature of mathematics*. Recuperado de http://www.cogsci.ucsd.edu/~nunez/web/PME24_Plenary.pdf
- Núñez, R. (2004). Do real numbers really move? The embodied cognitive foundations of mathematics. In F. Lida, R. Pfeifer, L. Steels, & Y. Kuniyoshi (Eds.), *Embodied artificial intelligence* (pp. 54–73). New York: Springer.
- Núñez, R. (2008). Investigar la mente en América Latina. En Kronmüller, E. & Cornejo, C. (Eds.). *Ciencias de la Mente Aproximaciones desde Latinoamérica*. (pp. 7-11). Santiago, Chile: J.C Sáez Editor.
- Núñez, R., Edwards, L., & Matos, J. (1999). Embodied Cognition as Grounding for Situatedness and Context in Mathematics Education, *Educational Studies in Mathematics*, 39, 45-65.
- Nunes, T., Schliemann, A. D., & Carraher, D. W. (1993). *Street mathematics and school mathematics*. Cambridge University Press
- Ormrod, J. (2005). *Aprendizaje Humano* (4ta edición). España: Pearson Prentice Hall.
- OECD (2003). *The PISA 2003 Assessment Frame Work: mathematics, reading, science and problem solving knowledge and skill*. Recuperado de <http://www.ince.mec.es/pub/marcoteoricopisa2003.pdf>.
- OECD (2006). *PISA 2006. Marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura. Programa para la evaluación Internacional de alumnos*. Recuperado de <http://www.oecd.org/pisa/39732471.pdf>
- OECD (2012). *PISA 2012. Results in Focus What 15-year-olds know and what they can do with what they know*. Recuperado de <http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/pisa-2012-results-overview.pdf>
- Pagis, M. (2009). Embodied Self-Reflexivity. *Social Psychology Quarterly*, 72(3), 265-283.
- Pampaka, M., Williams, J., Hutcheson, G., Wake, G., Black, L., Davis, P., & Hernández-Martinez, P. (2012). The association between mathematics pedagogy and learners' dispositions for university study. *British Educational Research Journal*, 38(3), 473-496
- Pardo, A & Ruiz, M. (2002). *SPSS11 Guía para el análisis de datos*. Madrid: McGraw Hill.
- Paulos, J. (1990). *El Hombre Anumérico: El analfabetismo matemático y sus consecuencias*. Barcelona: Tusquets Editores
- Paulos, J (1993). *Más allá de los números. Meditaciones de un matemático*. Barcelona: Tusquets Editores.
- Pease, A & Pease, B (2010). *El Lenguaje del Cuerpo. Como interpretar a los demás a través de sus gestos*. Barcelona: Editorial Amat.
- Pecharromás, C. (2014). El aprendizaje y la comprensión de los objetos matemáticos desde una perspectiva ontológica. *Educación Matemática*, 26(2), 111-133
- Peña, D. (2004). *Las matemáticas en las Ciencias Sociales*. Universidad Carlos III de Madrid. Recuperado de

<http://www.encuentrosmultidisciplinares.org/Revistan%C2%BA23/Daniel%20Pe%C3%Bl%20S%C3%A1nchez%20de%20Rivera.pdf>

- Pérez de Albéniz, A., Escolano, E., Pascual, M., Lucas B. & Sastre, S. (2015). Metacognición en un proceso de aprendizaje autónomo y cooperativo en el aula universitaria. *Contextos Educativos*, 18, 95-108
- Plaisier, M. & Smeets, J. (2011). Number magnitude to finger mapping is disembodied and topological. *Experimental Brain Research*, 209(3), 395-400.
- Radford, L. & André, M. (2009). Cerebro, Cognición y Matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 12(2), 215-250.
- Radford, L., Edwards, L., and Arzarello, F. (2009). Introduction: beyond words. *Educational Studies in Mathematics*. New York: Springer. 70(91-95)
- Reed H. & Ellis, H. (2007). *Fundamentos de Psicología Cognitiva*. México: Editorial Manual Moderno
- Rico, L. & Lupiáñez, J. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Editorial Alianza
- Rico, L., Castro, E., Castro, E., Coriat, M., Marín, A., Puig, L., Sierra, M. & Socas, M. (2000). *La Educación matemática en la enseñanza secundaria*. (2da E.) ICE Universidad de Barcelona: Editorial Horsori.
- Ritchev, F. (2002). *Estadística para las Ciencias Sociales. El potencial de la imaginación estadística*. México: McGraw-Hill
- Rivera, M. & Milicic, N. (2006). Alianza Familia-Escuela: Percepciones, Creencias, Expectativas y Aspiraciones de Padres y Profesores de Enseñanza General Básica. *Psyche*, 15(1), 119-135
- Rodd, M. (2000). On Mathematical Warrants: Proof Does Not Always Warrant, and a Warrant May Be Other Than a Proof. *Mathematical Thinking and Learning*, 2(3), 221-244.
- Rodríguez, F. (1994). *Kurt Gödel: Ensayos Inéditos*. Barcelona: Mondadori.
- Rodríguez, M & Ricardo, L. (2007). El Modelo Holístico para el proceso de enseñanza-aprendizaje de Geometría en Arquitectos de la Escuela Cubana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(3), 421-461.
- Roth, W.M (2001). Gestures: Their role in Teaching and Learning. *Review of Educational Research*, 71(3), 365-392.
- Russell, B. (1919). *Introduction to Mathematical Philosophy*. London: Editorial G. Allen and Unwin.
- Salinas, D. (2002). *¡Mañana Examen! La Evaluación entre la Teoría y la Realidad*. Barcelona: Editorial Grao.
- Sánchez, J., Segovia, I. & Miñán, A. (2011). Exploración de la ansiedad hacia las matemáticas en los futuros maestros de educación primaria. *Revista de currículum y formación del profesorado*, 15(3), 297-312.
- Sastre, P., Boubée, C., Rey, G., & Delorenzi, O. (2008). La comprensión: proceso lingüístico y matemático. *Revista Iberoamericana de Educación*, 46(8), 1-9.

- Sergent, J. & Bindra, D. (1981). Differential Hemispheric Processing of Faces: Methodological Considerations and Reinterpretation. *Psychological Bulletin*, 89(3), 541-554.
- Shepard, L. (2006). La Evaluación en el Aula. En Brennan, R. (Ed.), *Educational Measurement*, (pp. 623-646). Rowman & Littlefield Publishers.
- Staarman, J. K & Mercer, N (2010). The Guide Construction of Knowledge: Talk between Teachers and Students. En Littleton, K., Wood, C. & Staarman, J. (Eds.) *International Handbook of Psychology in Education*. (pp. 75-104). UK: Emerald Group.
- Steen, L. (1990). Numeracy. *A contribution on quantitative literacy in a special issue of "daedalus" devoted to "Literacy in America"*. Recuperado de <http://www.stolaf.edu/people/steen/papers/numeracy.html>
- Steen, L. (2006). *Quantitative Literacy: Why Numeracy matters for schools and college*. The Mathematics Association of America. Recuperado de <http://www.maa.org/features/QL.html>.
- Stenberg, R. (2002). Raising the Achievement of all Students: Teaching for Successful Intelligence. *Educational Psychology Review*, 14(4), 383-393.
- Stenberg, R & Grigorenko, E. (2003). Teaching for Successful Intelligence: principles, Procedures, and Practices. *Journal for the Education of the Gifted*. 27(2-3), 207-228.
- Stephan, M., Chval, K., Wanko, J., Civil, M., Fish, M., Herbel-Eisenmann, B., Konold, C. & Wilkerson, T. (2015). Grand Challenges and Opportunities in Mathematics Education Research. *Journal of research in mathematics education*, 46(2), 134-146.
- Steuer, G., Rosentritt-Brunn, G. and Dresel, M., (2013). Dealing with errors in mathematics classrooms: Structure and relevance of perceived error climate. *Contemporary Educational Psychology*, 38, 196-210.
- Stewart, I. (2009). *Historia de las matemáticas en los últimos 10.000 años*. Barcelona: Crítica.
- Strauss, A. & Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada*. Bogotá, Colombia: Ed. Universidad de Antioquia.
- Stuart Mill, J. (1882). *A System of Logic, Ratiocinative and Inductive, Being a Connected View of The Principles of Evidence, And the Methods Scientific Investigation*. New York: Harper & Brothers, Publishers.
- Taylor, S.J. & Bogdan, R. (1987). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. Barcelona: Paidós
- Tversky, A & Kahneman, D. (1982). *Judgment Under uncertainty: Heuristics and Biases*. Nueva York: Cambridge University Press.
- Ueda, H. (1998). Semántica de los Gestos Españoles. *Lingüística Hispánica*, 20. Recuperado de <http://lecture.ecc.u-tokyo.ac.jp/~cueda/kenkyu/higengo/semges.pdf>.
- UNESCO (enero 2009). *Aportes para la enseñanza de la Matemática. Segundo Estudio*

- Regional Comparativo y Explicativo. Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación.* Santiago Chile. Recuperado de <http://unesdoc.unesco.org/images/0018/001802/180273s.pdf>.
- UNESCO (julio 2015). *Informe de Resultados: Factores Asociados que explican diferencias de logros académicos entre alumnos y escuela. Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo (TERCE).* Recuperado de <http://www.unesco.org/new/fileadmin/MULTIMEDIA/FIELD/Santiago/pdf/Cuadernillo2.pdf>
- Urreiztieta, M. (2004). La sociología interpretativa: globalización y vida cotidiana. *Espacio Abierto*, 13(3), 457-470.
- Valsiner, J. (2005). *Culture and Human Development*. London: Sage
- Varela, F. (2000). *El Fenómeno de la Vida*. Chile: Ediciones Dolmen S.A
- Varela, F. (2002). *Conocer. Las Ciencias Cognitivas: Tendencias y perspectivas. Cartografía de las ideas actuales*. Barcelona: Editorial Gedisa
- Varela, F., Thompson, E. & Rosh, E. (2005). *De cuerpo presente. Las ciencias cognitivas y la experiencia humana*. España: Editorial Gedisa
- Vass, E. & Littleton, K (2010). Peer Collaboration and Learning in the Classroom. En Littleton, K., Wood, C. & Staarman, J. (Eds.) *International Handbook of Psychology in Education*. (pp. 105-135). UK: Emerald Group.
- Verfaillie, K., Huysegems, S., De Graef, P., & Van Belle, G. (2014). Impaired holistic and analytic face processing in congenital prosopagnosia: Evidence from the eye-contingent mask/window paradigm. *Visual Cognition*, 22, 503-521.
- Vinayagamoorthy, V., Broni, A., Steed, A. & Slater, M. (2006). The role of posture in the communication of affect in an immersive virtual environment. *In proc. VRCIA'06: ACM international conference on Virtual reality continuum and its applications*, New York, NY, USA, 2006, pp 229–236.
- Vygotsky, L. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. México: Editorial Crítica.
- Vygotsky, L. (1995). *Pensamiento y lenguaje. Cognición y desarrollo humano*. Buenos Aires: Paidós
- Volante, P., Huepe, D., & Cornejo, C (2009). Significado, desempeño y logro estudiantil en tareas instruccionales cotidianas. *Educação e Pesquisa*, 35(2), 381-397.
- Ward, T. & Scott, J. (1987). Analytic and Holistic modes of learning family-resemblance concepts. *Memory & Cognition*, 15(1), 42-54.
- Whitebread, D. & Pino, D. (2010). Metacognition. Self-Regulation and Meta-Knowing. En Littleton, K., Wood, C. & Staarman, J. (Eds.) *International Handbook of Psychology in Education*. (pp. 673 -711). UK: Emerald Group.
- Wittgenstein, L. (1987). *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

- Yagoubi, R., Lemaire, P. & Besson, M. (2003). Different brain mechanisms mediate two strategies in arithmetic: evidence from Event-Related brain Potentials. *Neuropsychologia*, 41, 855-862.
- Yoon, C., Thomas, M., & Dreyfus, T. (2011). Gestures and insight in advanced mathematical thinking. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 42(7), 891-901.