PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA

MODELO ESTOCÁSTICO DE LLUVIA-ESCORRENTÍA UTILIZANDO TEORÍA DE COLAS

DANIEL JAÉN SARMIENTO

Tesis para optar al grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Profesor Supervisor:
BONIFACIO FERNÁNDEZ LARRAÑAGA

Santiago de Chile, (Septiembre, 2012)

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA

MODELO ESTOCÁSTICO DE LLUVIA-ESCORRENTÍA UTILIZANDO TEORÍA DE COLAS

DANIEL JAÉN SARMIENTO

Tesis presentada a la Comisión integrada por los profesores:

BONIFACIO FERNÁNDEZ LARRAÑAGA

JORGE ALFREDO GIRONÁS LEÓN

JOSÉ PEDRO PRINA PACHECO

JUAN CARLOS MUÑOZ ABOGABIR

Para completar las exigencias del grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Santiago de Chile, (Septiembre, 2012)

A la Virgen María, a mamá y papá.

AGRADECIMIENTOS

A Dios y la Virgen María por ser la luz y la esperanza que guían mi vida.

A mi mamá y mi papá, por su amor, por su apoyo y por la confianza depositada en mí durante el periodo de estudio del Magister.

A mis hermanas Pamela y Rocío, por los ánimos, por los consejos y porque, a pesar de la distancia, estuvieron a mi lado en todo momento.

A mi profesor supervisor Bonifacio Fernández por su guía, por las ideas, por el apoyo, por la paciencia y por ayudarme a conseguir los objetivos planteados.

A los profesores Jorge Alfredo Gironás León, José Pedro Prina Pacheco y Juan Carlos Muñoz Abogabir por participar como miembros de mi comisión y por sus valiosas aportaciones para el desarrollo de este trabajo.

A los profesores de la Facultad de Ingeniería de la Universidad, por sus enseñanzas y por su experiencia compartida durante mis años de estudios.

A mis amigos y compañeros del departamento de postgrado, por creer en mí, por apoyarme incondicionalmente, por los momentos de alegría y por las lindas experiencias vividas.

Finalmente, todo mi agradecimiento a la Pontificia Universidad Católica y al Departamento de Ingeniería Hidráulica y Ambiental por brindarme la oportunidad de estudiar y pertenecer a tan excelente institución.

ÍNDICE GENERAL

Pág.

ÍNDICE DE TABLAS

Pág.

ÍNDICE DE FIGURAS

Pág.

RESUMEN

Se plantea un modelo estocástico de aplicación del proceso de lluvia escorrentía mediante la teoría de colas como una alternativa a los modelos existentes actualmente. A partir de datos de información meteorológica de lluvias medidas en distintas estaciones, como Santiago en Quinta Normal y Chillán en la Facultad de Ingeniería Agrícola de la Universidad de Concepción, se caracteriza la lluvia en unidades equivalentes de precipitación. Estas constituyen la variable de excitación del modelo. Se desarrolla el modelo estocástico utilizando la teoría de colas, mediante la cual se emula el comportamiento del proceso de lluvia-escorrentía como la atención de clientes (en este caso, las unidades equivalentes de precipitación), para lo cual se interpreta la cuenca como una serie de servidores de atención que representan cada uno de los procesos involucrados en el proceso hidrológico, es decir, la infiltración, la evapotranspiración, la percolación y el escurrimiento superficial. Simultáneamente, el mismo registro de lluvias es analizado mediante el modelo de simulación HEC-HMS (U.S. Army Corps of Engineers, EE.UU.). Después de un análisis de sensibilidad, se comparan ambos resultados, obteniéndose un buen ajuste. Además se calculan parámetros propios de la teoría de colas como la probabilidad y rendimiento de procesos como la evaporación, infiltración y percolación.

ABSTRACT

We propose a stochastic model for the application of rainfall-runoff process using queuing theory as an alternative to currently existing models. Using data of meteorological information measures in various stations, as in Quinta Normal, Santiago and the Faculty of Agricultural Engineering, University of Concepción, Chillán, rain is characterized in equivalent units of precipitation. These constitute the variable of excitation of the model. A stochastic model is developed using queuing theory, by which emulates the behavior of the rainfall-runoff process and the attention of customers (in this case, the equivalent units of precipitation), for which the basin is interpreted as a series of care servers representing each of the processes involved in the hydrological process, i.e., infiltration, evapotranspiration, percolation and runoff. Simultaneously, the same record rainfall is analyzed through the simulation model HEC-HMS (U.S. Army Corps of Engineers, USA). After a sensitivity analysis, we compare both results and find a good fit. Besides queuing theory´s own parameters as probability and yield of processes such as evaporation, infiltration and percolation, are calculated.

1. INTRODUCCIÓN

Existen variedad de modelos analíticos que se aproximan a la solución del problema hidrológico de determinar el comportamiento estadístico de las variables hidrológicas de una cuenca, como la escorrentía, infiltración, evapotranspiración, percolación, etc. a partir de las características de las lluvias y las propiedades de la cuenca. Uno de los primeros intentos corresponde a Eagleson (1972), quien desarrolla un modelo que asume la independencia entre los elementos constituyentes de un evento de tormenta (duración, volumen, intensidad) y considera una infiltración constante. Díaz-Granados et al. (1984), igualmente consideran la independencia entre elementos, pero utiliza como método de infiltración la ecuación de Philip. Guo y Adams (1998a,b) utilizan la distribución exponencial para representar los elementos de una tormenta y la ecuación de Horton como método de infiltración. Zegpi y Fernández (2010), incluyen la dependencia entre las propiedades para lo cual caracterizan las lluvias mediante funciones de probabilidad conjunta bivariadas del volumen y la duración; y estiman la infiltración de la misma manera que Guo y Adams (1998a,b). Todos los modelos mencionados anteriormente necesitan de los parámetros geomorfológicos y características meteorológicas de la cuenca y han sido aplicados preferentemente a cuencas urbanas.

Desde hace tiempo se reconoce que la mayoría de los fenómenos hidrológicos en la naturaleza son procesos estocásticos (Yevjevich, 1972), cuya aleatoriedad y evolución en el tiempo y el espacio, juegan un rol muy importante cuando se los quiere representar mediante modelos matemáticos. En particular la generación de flujos en cuencas urbanas se debe a la lluvia producida por tormentas que se comportan como un proceso estocástico cuyas características de precipitación, duración, intensidad y tiempo entre tormentas, son variables aleatorias con alto grado de dependencia temporal y espacial. Y por lo tanto el escurrimiento resultante es de característica estocástica, y su aleatoriedad debe ser tomada en cuenta en el dimensionamiento de las obras de drenaje.

Yevjevich (1972), afirma que un uso simultáneo de métodos determinísticos y estocásticos, de análisis y descripción de procesos hidrológicos en la naturaleza, es necesario para producir la información más práctica y científica para hidrología en general, y para el desarrollo, conservación y control del agua como recurso en particular. Es por eso que persiste el interés en el desarrollo e investigación de métodos estocásticos de lluvia-escorrentía que puedan reproducir el comportamiento de los procesos involucrados, y brindar resultados que representen su aleatoriedad. Sin embargo los modelos de teoría de colas no son habituales a pesar de su gran desarrollo y aplicación en sistemas en los cuales la aleatoriedad y la dependencia son relevantes.

Para el análisis de un proceso de lluvia-escorrentía, existen variedad de modelos, para los cuales, la lluvia como elemento de entrada del sistema, básicamente es caracterizada de las siguientes maneras (Palynchuk et al., 2008):

- **Series continuas.** Registros históricos de lluvias en intervalos de una hora o menores.
- **Eventos independientes de tormenta.** Los cuales son obtenidos de los registros históricos de lluvias mediante métodos de separación de tormenta, que garantizan su independencia.
- **Eventos extremos de tormenta reales.** Eventos mayores de tormenta históricos que son analizados como eventos extremos.
- **Tormentas de diseño.** Construidas para determinados periodos de retorno a partir de las Curvas IDF, Intensidad Duración y Frecuencia.

La gran cantidad de información que contienen las series de datos meteorológicos usualmente se acostumbra resumir en curvas tipo IDF, Intensidad Duración Frecuencia, o en tormentas de diseño para diferentes periodos de retorno. Los modelos de lluvia-escorrentía más simples, que calculan los caudales a partir de estas tormentas o, en algunos casos, a partir de eventos extremos de tormenta reales, obtienen resultados para condiciones poco frecuentes (Zegpi, 2008) y las condiciones habituales son rara vez o nunca consideradas.

Hoy en día están empezando a emplearse modelos computacionales de simulación continua alimentados por toda la serie meteorológica disponible. Lo que permitiría calibrar los resultados contra las medidas actuales de escurrimiento si se tuvieran (Palynchuk et al., 2008). Existen también los modelos analíticos, los cuales se basan en el comportamiento estadístico de las tormentas. Las características de las tormentas son analizadas y ajustadas a funciones de distribución de probabilidad (PDF - *probability density functions*).

Entre las aplicaciones más evidentes de estos modelos está el drenaje urbano de aguas lluvias, motivado porque el crecimiento y desarrollo de una urbanización trae consigo impactos en las condiciones naturales de la zona donde está asentada. Entre estos se pueden contar el aumento del volumen de agua escurrida, erosión del lecho del cauce original del río, y el lavado y transporte de agentes contaminantes (Guo & Adams, 1998a). En el caso de las cuencas urbanas, la descripción de ellas puede ser muy detallada y además interesa conocer el efecto sobre la hidrología de las modificaciones que puedan hacerse a estos parámetros, manteniendo las condiciones meteorológicas de las tormentas. El diseño de sistemas de drenaje, se aborda habitualmente con las siguientes etapas (Adams et al., 1986): a) selección, análisis de datos meteorológicos, b) aplicación de un modelo de transformación lluvia-escorrentía, c) diseño de los elementos requeridos por el sistema, d) control del caudal de salida. La determinación de caudales y volúmenes de agua generados por la lluvia en cuencas urbanas es muy importante para el diseño de estructuras de retención, infiltración y encauzamiento. Debido a esto, surge la necesidad de tener al alcance modelos de simulación de tormentas que tomen en cuenta la variabilidad de mismas, incluyendo no solo los eventos extraordinarios sino también los más frecuentes que tienen gran impacto en los sistemas receptores, la vegetación y el funcionamiento de las ciudades.

Por otra parte la ecohidrología ha puesto de relieve el interés por cuencas naturales de tamaño reducido, en las cuales interesa conocer el efecto de modificaciones ya sean antrópicas o naturales sobre la vegetación y el ecosistema de la cuenca, identificando los fenómenos meteorológicos e hidrológicos que pueden ser relevantes en estas modificaciones (Rodríguez-Iturbe & Porporato, 2005). A todo esto se agrega la preocupación por las consecuencias del calentamiento global, por lo cual desde el punto de vista hidrológico resulta necesario disponer de herramientas que permitan visualizar los efectos de cambios climáticos en la atmosfera, precipitación y temperatura, sobre el comportamiento del agua en el suelo y el subsuelo.

Además desde el punto de vista de la modelación se propone aplicar modelos estocásticos típicos de la ingeniería industrial a fenómenos hidrológicos, entre ellos los que se derivan de la teoría de colas.

Un sistema de colas, puede ser descrito como clientes que llegan para ser atendidos por un determinado servicio, que esperan por el servicio si este no es inmediato, y que, si tuvieron que esperar, van dejando el sistema después de ser atendidos (Gross et. al, 2008). La teoría de colas fue desarrollada para introducir modelos que puedan predecir el comportamiento de sistemas que intentan proveer un servicio para demandas que surjan al azar. Los primeros problemas estudiados por medio de la teoría de colas fueron aquellos que involucraban la congestión del tráfico telefónico (Gross et. al, 2008). El estudio de aplicaciones por medio de la teoría de colas, a pesar de haber sido en sus inicios más o menos lento, comenzó a acelerarse en la mitad del siglo XX, y desde entonces se han desarrollado muchos trabajos al respecto (Gross et. al, 2008).

Actualmente, la teoría de colas es usada extensamente en ingeniería industrial en problemas de maximización de eficiencia de plantas (Arnold et. al, 1988). Existe, sin embargo, el interés de representar por medio de la teoría de colas, el comportamiento de los componentes del proceso de lluvia-escorrentía en cuencas urbanas. Este tipo de modelos parece muy atractivo para fines de planificación de cuencas considerando la calidad del servicio frente a diferentes escenarios hidrológicos.

Algunos investigadores usaron la teoría de colas para su aplicación en determinados fenómenos hidrológicos. Langbein (1958) propuso un método para determinar la cantidad de almacenamiento remanente para regular los caudales, basado en la analogía con la teoría de colas. En este modelo la afluencia de agua representa la llegada de clientes, el desagüe de agua representa la partida de los clientes después de ser atendidos y el agua embalsada representa una cola de clientes. Fiering (1961) con un análisis parecido, propuso la aplicación de la teoría de colas junto con técnicas de simulación de Monte Carlo para la solución del problema de selección del diseño óptimo para un embalse multi-propósito. Arnold et. al. (1988) realizó una modelación hidrológica de una cuenca pequeña mediante un modelo computacional de simulación de redes basado en la teoría de colas. Para ello representa a la lluvia como cliente, y el suelo como el servidor, la partida de clientes sería la escorrentía superficial. En este trabajo, los clientes son definidos como 1 mm de agua y se modela un evento representado por su distribución de probabilidades. El modelo no fue probado extensivamente, fue aplicado solamente a una cuenca; sin embargo prueba que la teoría de colas es capaz de simulaciones realistas.

La hipótesis de este trabajo es que la aplicación de un modelo estocástico de lluvia-escorrentía utilizando la teoría de colas, permite la obtención de la función de distribución de probabilidad del caudal de escorrentía y de otros parámetros hidrológicos, es decir, un espectro de resultados posibles bajo condiciones reales; y facilita la planificación y visualización de los efectos del desarrollo de soluciones en zonas urbanas, o cuencas de poca extensión, dependiendo de las condiciones climáticas reales, sin necesidad de tener que desarrollar un proyecto con información a detalle. Adicionalmente, se demuestra que la teoría de colas, además de su aplicación primaria de maximización de eficiencia, es un método que también puede adecuarse a la modelación de fenómenos físicos de pequeña envergadura y en zonas puntuales.

A partir de datos de información meteorológica de lluvias medidas en distintas estaciones, como Santiago en Quinta Normal y Chillán en la Facultad de Ingeniería Agrícola de la Universidad de Concepción, se caracterizará la lluvia en unidades equivalentes de precipitación. Estos constituirán la variable de excitación del modelo. Se desarrollará el modelo estocástico utilizando la teoría de colas, mediante la cual se intentará emular el comportamiento del proceso de lluvia-escorrentía como la atención de clientes, para lo cual se interpretará el suelo como una serie de servidores de atención que representarán cada uno de los procesos involucrados en la precipitación y escurrimiento, es decir, la infiltración, la evapotranspiración, la percolación y el escurrimiento superficial. Simultáneamente, el mismo registro de lluvias será analizado mediante un modelo de simulación simple y universalmente empleado como el modelo computacional HEC-HMS (U.S. Army Corps of Engineers, EE.UU.). Finalmente se compararán y discutirán los resultados de ambos métodos de análisis hidrológico.

Los resultados que se espera obtener a partir de la aplicación del modelo estocástico son, la función de distribución de probabilidad (pdf) del caudal de escorrentía, así como parámetros propios de la teoría de colas como la probabilidad y rendimiento de procesos como la evaporación, infiltración y percolación, que sean en alguna medida comparables con el caudal calculado por medio del modelo computacional HEC-HMS.

2. OBJETIVOS

2.1 Objetivo General

El objetivo general de esta tesis consiste en proponer y aplicar un modelo estocástico para el proceso de lluvia-escorrentía mediante la teoría de colas como una alternativa a los modelos existentes actualmente, que permita capturar la variabilidad y comportamiento estocástico de los procesos involucrados.

2.2 Objetivos específicos

Dentro de los objetivos específicos se encuentran: 1) proveer lineamientos para cuantificar los efectos aleatorios del clima sobre el escurrimiento principalmente en cuencas simples, 2) desarrollar la aplicación temporal de la modelación basada en teoría de colas, 3) analizar el orden y la importancia que tienen los procesos que participan en la conversión de lluvia a escurrimiento, especialmente las propiedades climáticas de cada zona y del suelo, y 4) determinar ventajas y desventajas en comparación a otros enfoques de modelación disponibles.

3. MODELO ESTOCÁSTICO DE LÍNEA DE ESPERA

El uso de teoría de colas para modelar los procesos de retención, almacenamiento, infiltración y escurrimiento en una cuenca, requiere vincular las propiedades físicas hidrológicas de la precipitación y el suelo con el modelo matemático. A continuación se detallan algunos enfoques para abordar estas relaciones.

3.1 Elementos del sistema de espera

Un sistema de espera tiene básicamente dos elementos para representar a los dos actores principales del ciclo hidrológico: el agua de lluvia, representada por las tormentas, como cliente en todos los casos; y dependiendo de la etapa, los proceso hidrológicos en la cuenca (la evapotranspiración, la infiltración, almacenamiento en la zona no saturada y evaporación) como servidores.

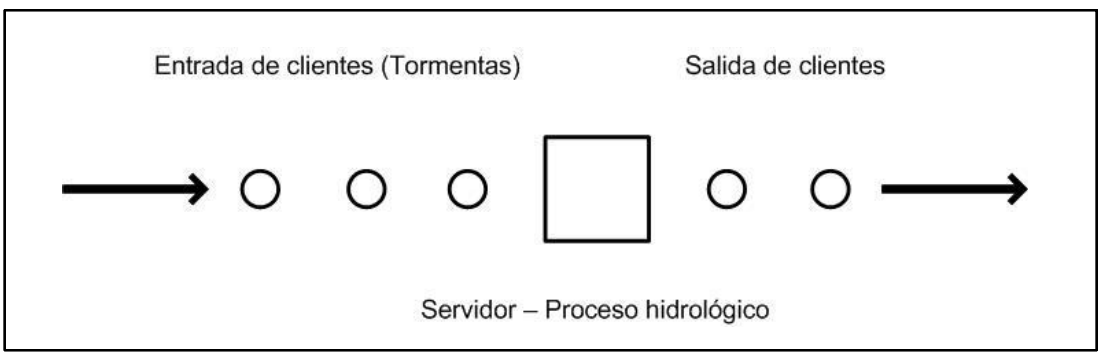

Figura 3-1: Representación gráfica de un sistema hidrológico de línea de espera.

3.1.1 Clientes

Están representados por el agua de lluvia de cada tormenta caracterizada en unidades equivalentes de lluvia (ue). Bajo un determinado patrón, llegan al sistema para ser atendidos por un servidor, y de acuerdo a las características impuestas al sistema, estos forman una cola y pueden dejar el sistema después de ser atendidos o rechazados.

3.1.2 Servidor

El servidor está representado por un proceso hidrológico en la cuenca analizada, y por las propiedades inherentes al mismo. El servidor está asignado a un determinado proceso hidrológico para el cual, dependiendo del servicio, atención o rechazo, el agua puede cambiar su manera de escurrir o tomar diferentes direcciones después de su atención para completar el ciclo hidrológico. En el presente trabajo los procesos hidrológicos representados por un servidor son: evapotranspiración, infiltración, almacenamiento en la zona no saturada y evaporación del agua del suelo.

3.2 Características del sistema de espera

De acuerdo a Gross et al. (2008), son seis los elementos que describen un sistema de espera. Los que son analizados de acuerdo a las condiciones de cada proceso hidrológico en el presente trabajo:

1) Patrón de llegada del agua de lluvia.
2) Patrón de servicio.
3) Disciplina de la cola.
4) Capacidad del sistema.
5) Número de canales de servicio en paralelo.
6) Número de etapas de servicio.

3.2.1 Patrón de llegada del agua de lluvia

El patrón de llegada del agua de lluvia es estocástico, en el cual el tiempo entre llegadas de los clientes, se representa por una distribución de probabilidad que lo describe de forma adecuada, además se considera estacionario, es decir no cambia en el tiempo.

Restrepo y Eagleson (1982) probaron que el tiempo entre tormentas para una amplia variedad de series en diferentes zonas geográficas, se distribuye exponencialmente.

Basado en este sustento, para el presente trabajo las llegadas de las lluvias seguirán una distribución exponencial, lo que resulta ventajoso, dada la relación que tiene esta distribución con el proceso Poisson.

3.2.2 Patrón de servicio

También es necesaria una distribución de probabilidad para describir los tiempos de atención que brinda el servidor al agua de lluvia. Al igual que el patrón de llegada, el patrón de servicio es estacionario.

En el presente trabajo, el patrón de servicio está gobernado por una tasa constante del proceso hidrológico involucrado. Incluso si esta tasa es alta, es muy posible que clientes se queden esperando en la cola.

3.2.3 Disciplina de la cola

Se refiere a la manera en que el agua es atendida a medida que llega al servidor. Se trabaja con la más común, que se adapta perfectamente a las condiciones de llegada: FCFS (*first come, first served*) que significa “primero en llegar, primero en ser atendido”.

3.2.4 Capacidad del sistema

Se refiere a la limitación física que tiene un sistema de colas, es decir si la longitud de la cola alcanza cierto valor, ya no se permite entrar a más clientes (agua de lluvia) hasta que haya espacio disponible. Los clientes rechazados, aportan a los diferentes tipos de escurrimiento considerados. Este tipo de sistemas de colas, se denominan comúnmente como “situaciones de colas finitas” (Gross et. al, 2008). Desde el punto de vista hidrológico, la capacidad del sistema está relacionada con el almacenamiento máximo.

Resumiendo los procesos mencionados hasta el momento; la reacción del cliente al entrar al sistema determinará el comportamiento que toma el agua al entrar en interacción con el servidor (evapotranspiración, infiltración o almacenamiento en la zona no saturada y evaporación del agua del suelo). En este caso el agua no tiene otra opción que quedarse una vez haya llegado al sistema, donde, dependiendo de su tasa de llegada y la tasa de atención, se formará una cola de clientes que corresponde a un almacenamiento (intercepción, encharcamiento, saturación o evaporación desde el suelo), y finalmente, del servidor depende si el agua es rechazada (precipitación neta, escurrimiento superficial o aporte al flujo superficial) o atendida (agua evaporada, agua infiltrada o agua que aporta al acuífero).

La distribución de probabilidad para la longitud de la cola, o del agua almacenada en cada etapa, es el resultado de los procesos de llegada y servicio; los que generalmente, aunque no universalmente, se asumen independientes mutuamente (Gross et. al, 2008).

3.2.5 Número de canales de servicio en paralelo

Como en este caso el único servidor es el suelo, solo habrá un canal de servicio. Sin embargo pueden concebirse extensiones a cuencas más complejas, con suelos de distintas propiedades que pueden organizarse como servidores en paralelo.

3.2.6 Número de etapas de servicio

Se refiere a las etapas por las que tiene que pasar un cliente a lo largo de un canal de servicio, puede representar los procesos por los que tiene que pasar el agua de lluvia (cliente), evapotranspiración, infiltración, almacenamiento en la zona no saturada y evaporación del agua del suelo, hasta abandonar completamente el sistema, en este caso, hasta salir de la cuenca, ya sea como escurrimiento a la salida, percolación profunda o evaporación a la atmósfera.

3.3 Notación

La teoría de colas tiene un sistema de notación estándar descrito por símbolos que representan una etapa, si es que el sistema tiene varias. Según Gross et. al, (2008), una cola se identifica como:

A/B/X/Y/Z

Donde:
A = Distribución de probabilidad del tiempo entre llegadas
B = Distribución de probabilidad que describe el patrón de servicio
X = Número de canales de servicio en paralelo
Y = Restricción de la capacidad del sistema
Z = Disciplina de la cola

Como se expuso anteriormente, la distribución de probabilidad tanto de los tiempos de llegada del agua al sistema como los tiempos de servicio del proceso hidrológico tomado en cuenta, siguen una distribución exponencial; o de manera equivalente, que tanto el patrón de llegada del agua como el patrón de servicio están representados por un proceso Poisson (proceso de nacimiento y muerte), comúnmente llamados markovianos debido a la característica "sin memoria" de la distribución exponencial. Hay solo un canal de servicio. En cuanto a la capacidad del sistema, a lo largo del presente trabajo se analiza tanto como infinita ($Y=\infty$) como con una restricción ($Y=K$) determinada a partir de las características propias del proceso hidrológico involucrado. Finalmente, para todos los casos la disciplina de la cola es siempre FCFS. Por lo tanto, la notación de los sistemas hidrológicos analizados a continuación será la siguiente:

M/M/1/Y/FCFS

Cabe mencionar que dado que la disciplina de cola más comúnmente analizada es FCFS, cuando esta es usada se omite de la notación. Lo mismo ocurre cuando la capacidad del sistema es infinita (Y=∞). Entonces típicamente se referirán como M/M/1 o M/M/1/K.

3.4 Proceso de nacimiento y muerte de las lluvias

La gran mayoría de modelos que se usan en teoría de colas están basados en el proceso de nacimiento y muerte el cual es específico de una cadena de Markov en tiempo continuo. Consiste en un conjunto de estados que describen la población de clientes en un sistema {0, 1, 2,…}. La transición entre estados ocurre mientras los clientes entran o salen del estado actual, siendo el nacimiento la llegada de un nuevo cliente al sistema y la muerte la salida de un cliente del sistema después de ser atendido.

La distribución de probabilidad del tiempo que falta para el próximo nacimiento (llegada de un cliente) es exponencial con parámetro λ_n. Asimismo, la distribución de probabilidad del tiempo que falta para la próxima muerte (salida de un cliente) es exponencial con parámetro μ_n (Figura 3-2).

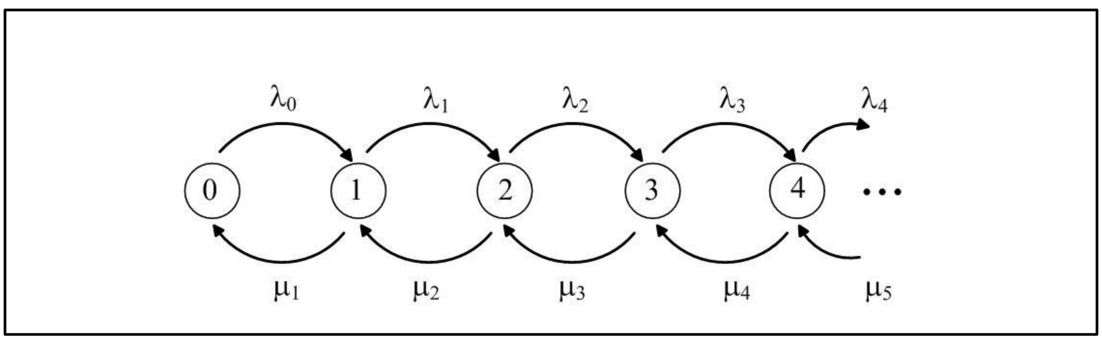

Figura 3-2: Transición en un proceso de nacimiento y muerte

Resumiendo, al observar la Figura 3-2, se ve que el cambio de estado, es decir el cambio de número de ue´s (de una a una) en el sistema, se da de acuerdo a λ_n constante, si entra una ue; y la tasa de servicio se da de acuerdo a μ_n constante. Si hay "n" ue´s en el sistema, el tiempo hasta la siguiente llegada tendrá una distribución exponencial con valor esperado $1/\lambda_n$, y es independiente del tiempo hasta una nueva partida, el que tiene una distribución exponencial con valor esperado $1/\mu_n$.

Estos modelos tienen una entrada Poisson y un tiempo de servicio exponencial. Como se mostrará más adelante, se asume que la distribución de los tiempos entre llegadas de agua será exponencial, al igual que los tiempos de servicio de los procesos hidrológicos considerados; por lo que el análisis de la llegada de las lluvias sería Markoviano, confirmándose que sigue un proceso de nacimiento y muerte.

Se sabe que una tasa es la llegada o salida de elementos por unidad de tiempo. Ahora, tomando en cuenta la teoría de cadenas de Markov en tiempo continuo, para cualquier par de estados i y j, se define la siguiente ecuación:

$$q_{ij} = v_i \cdot p_{ij} \tag{3.1}$$

Donde,

q_{ij} = Tasas de transición instantánea. Tasa a la cual el proceso realiza una transición del estado i al estado j (cuando está en el estado i).

v_i = Tasa a la cual el proceso realiza una transición a cualquier otro estado, cuando se encuentra en el estado i.

p_{ij} = Probabilidad de que la transición a una tasa v_i sea al estado j, estando en el estado i.

Entonces, siguiendo con el análisis de la Figura 3-2:

$$v_0 = \lambda_0 \tag{3.2}$$

$$v_i = \lambda_i + \mu_i \qquad i > 0 \tag{3.3}$$

$$p_{01} = 1 \tag{3.4}$$

$$p_{i,i+1} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i} \qquad i > 0 \qquad (3.5)$$

$$p_{i,i-1} = \frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i} \qquad i > 0 \qquad (3.6)$$

La probabilidad de que una cadena de Markov en tiempo continuo, este en el estado j después de un tiempo t, generalmente converge a un valor límite. Suponiendo que este límite existe y que es independiente del estado inicial, se le llama P_j:

$$P_j = \lim_{t\to\infty} P_{ij}(t) \qquad (3.7)$$

Además aplicando la condición de balance (en el largo plazo) de tasas de entrada y salida (Gross et. al, 2008), se tiene:

$$v_j \cdot p_j = \sum_{k\neq j} q_{kj} \cdot p_k \qquad (3.8)$$

Para todos los estados j. Adicionalmente se debe cumplir que:

$$\sum_j P_j = 1 \qquad (3.9)$$

Donde,
p_j = Probabilidad límite.

La definición de la probabilidad límite p_j para el caso de teoría de colas, es equivalente a decir que es igual a la fracción de tiempo en el largo plazo en el cual hay j unidades equivalentes de agua (ue) en el sistema de línea de espera (Gross et. al, 2008).

En consecuencia analizando la ecuación (3.8), los términos a la izquierda, corresponden a la tasa a la cual el proceso deja el estado j; y los términos a la derecha corresponden a la tasa a la cual el proceso entra en el estado j.

A partir de las ecuaciones (3.2) a (3.6) y de la Figura 3-2, se tiene:

Estado 0:

$$\lambda_0 \cdot p_0 = \mu_i \cdot p_1 \tag{3.10}$$

Estado n:

$$(\lambda_n + \mu_n) \cdot p_n = \lambda_{n-1} \cdot p_{n-1} + \mu_{n+1} \cdot p_{n+1} \tag{3.11}$$

La resolución de las ecuaciones (3.10) y (3.11) permite obtener dos relaciones, las que serán importantes para los sistemas de línea de espera analizados más adelante (Gross et. al, 2008).

La primera relación es la ecuación para la obtención de la fracción del tiempo en el cual hay n unidades equivalentes de agua (ue) en el sistema:

$$p_n = \frac{\lambda_{n-1} \cdot \lambda_{n-2} \cdots \lambda_0}{\mu_n \cdot \mu_{n-1} \cdots \mu_1} \cdot p_0 \qquad (n \geq 1) \tag{3.12}$$

Que también puede ser representada de la siguiente manera:

$$p_n = p_0 \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \tag{3.13}$$

La última relación es la fracción del tiempo en el cual las unidades equivalentes (ue) que llegan son directamente atendidas, es decir el sistema está vacío, en espera de un nuevo cliente.

$$p_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}\right)^{-1} \tag{3.14}$$

Generalmente, en la mayoría los sistemas de teoría de colas, al igual que en el presente caso, las tasa de llegada al sistema de los clientes λ_n (n = 0, 1, 2,…) y la tasa de servicio μ_n (n = 1, 2, 3,…) asumen valores constantes; es decir, $\lambda_n = \lambda$ y $\mu_n = \mu$ para todo n.

Adicionalmente, es importante mencionar que existe una medida de la congestión de tráfico que existe para un sistema de colas de c servidores:

$$\rho = \frac{\lambda}{c \cdot \mu} \tag{3.15}$$

Donde,
ρ = Intensidad de tráfico.

En el caso del presente trabajo c = 1, por lo que:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \tag{3.16}$$

Cuando $\rho > 1$, es decir $\lambda > \mu$, y el sistema de colas no tiene una restricción K. la tasa de entrada de los clientes al sistema será mayor a la tasa de servicio, por lo que la cola crecerá hacia el infinito y nunca asumirá un estado estacionario. Por lo tanto, para sistemas que no tienen una restricción K, $\rho < 1$, si se quieren obtener resultados para un estado estacionario a lo largo del tiempo.

Esta regla no aplica para sistemas con una restricción K, puesto que una vez que el sistema alcanza K número de clientes, los siguientes en llegar después del K-ésimo cliente son rechazados, de esta forma manteniéndose siempre el estado estacionario.

Entonces, después de las dos últimas definiciones, concernientes a las tasas de entrada de clientes λ y de servicio μ constantes; y a la intensidad de tráfico. Las ecuaciones (3.13) y (3.14) serán:

$$p_n = p_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = p_0 \cdot \rho^n \qquad (3.17)$$

y,

$$p_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right)^{-1} = (1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n)^{-1} \qquad (3.18)$$

Finalmente, reemplazando la ecuación (3.18) en (3.17) se tiene,

$$p_n = \rho^n \cdot (1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n)^{-1} \qquad (3.19)$$

Es a partir de esta ecuación que se calculan los parámetros principales del sistema de teoría de colas analizado en el presente trabajo.

3.5 Sistema M/M/1/K – Caso general

La razón por la que se analiza este sistema en particular, es porque sus características son ideales para representar la interacción del agua de lluvia con los procesos hidrológicos mencionados. Un sistema M/M/1/K, comúnmente llamado cola con truncamiento, es un sistema de un servidor, cuya atención sigue una distribución exponencial; y para el que los clientes a ser atendidos, llegan de acuerdo a una distribución exponencial. Al mismo tiempo, el sistema tiene una restricción K que está determinada por la capacidad máxima del sistema.

En la Figura 3-3 se muestra el esquema del sistema estocástico M/M/1/K en su forma general, los clientes (agua de lluvia) P_T, tienen una tasa de llegada exponencial λ, serán atendidos por un servidor (proceso hidrológico determinado) a una tasa μ, se formará una cola (L_q); al alcanzar el máximo valor de capacidad del sistema K, los clientes serán rechazados por el sistema (P_r) a una tasa λ_r. Los clientes atendidos (P_{ef}) abandonan el sistema a una tasa λ_{ef}.

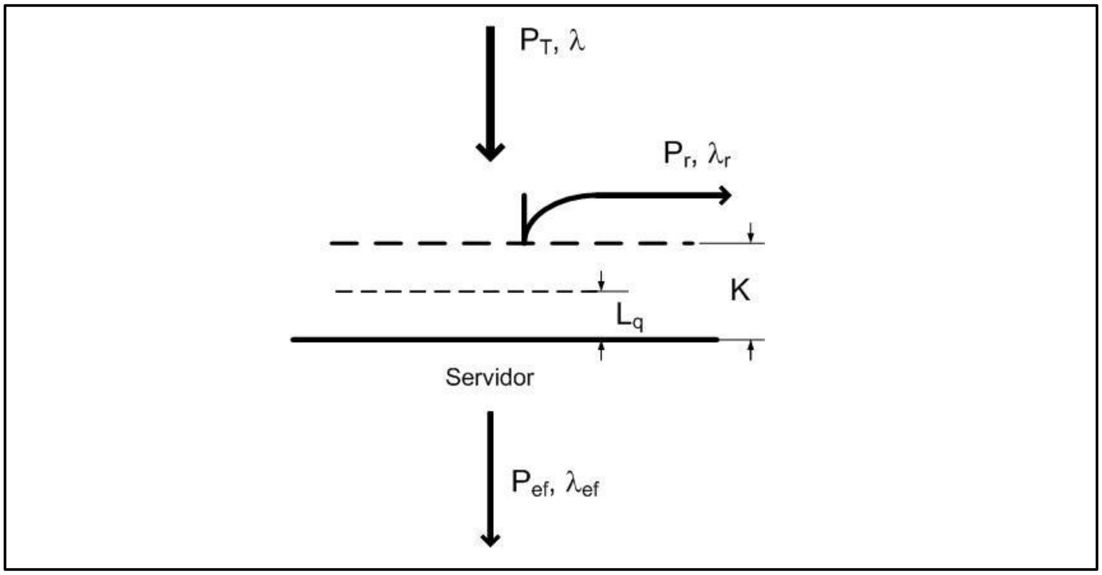

Figura 3-3: Sistema estocástico de línea de espera M/M/1/K

La forma en que trabaja el sistema M/M/1/K se explica mediante las cinco gráficas que representan las series de tiempo de cada una de las variables mostradas en la Figura 3-4; primero, los clientes (precipitación) P_T, llegan con una tasa λ en pulsos de igual tamaño (denominados ue); a continuación el servidor (proceso hidrológico determinado previamente), atiende a los pulsos a una tasa de servicio μ; en la tercera gráfica se muestra los clientes que entran en servicio y que forman la cola, una vez que se llega al máximo de la capacidad K, el resto son rechazados; en la cuarta gráfica se muestran los clientes que son rechazados por el sistema (P_r) a una tasa λ_r, finalmente, la última gráfica muestra los clientes (P_{ef}) que dejan el sistema después de ser atendidos a una tasa λ_{ef}. Para efectos de claridad, en la primera gráfica de la Figura 3-4, los pulsos que llegan a ser atendidos están diferenciados por un punto, el resto de los pulsos conforman los clientes rechazados.

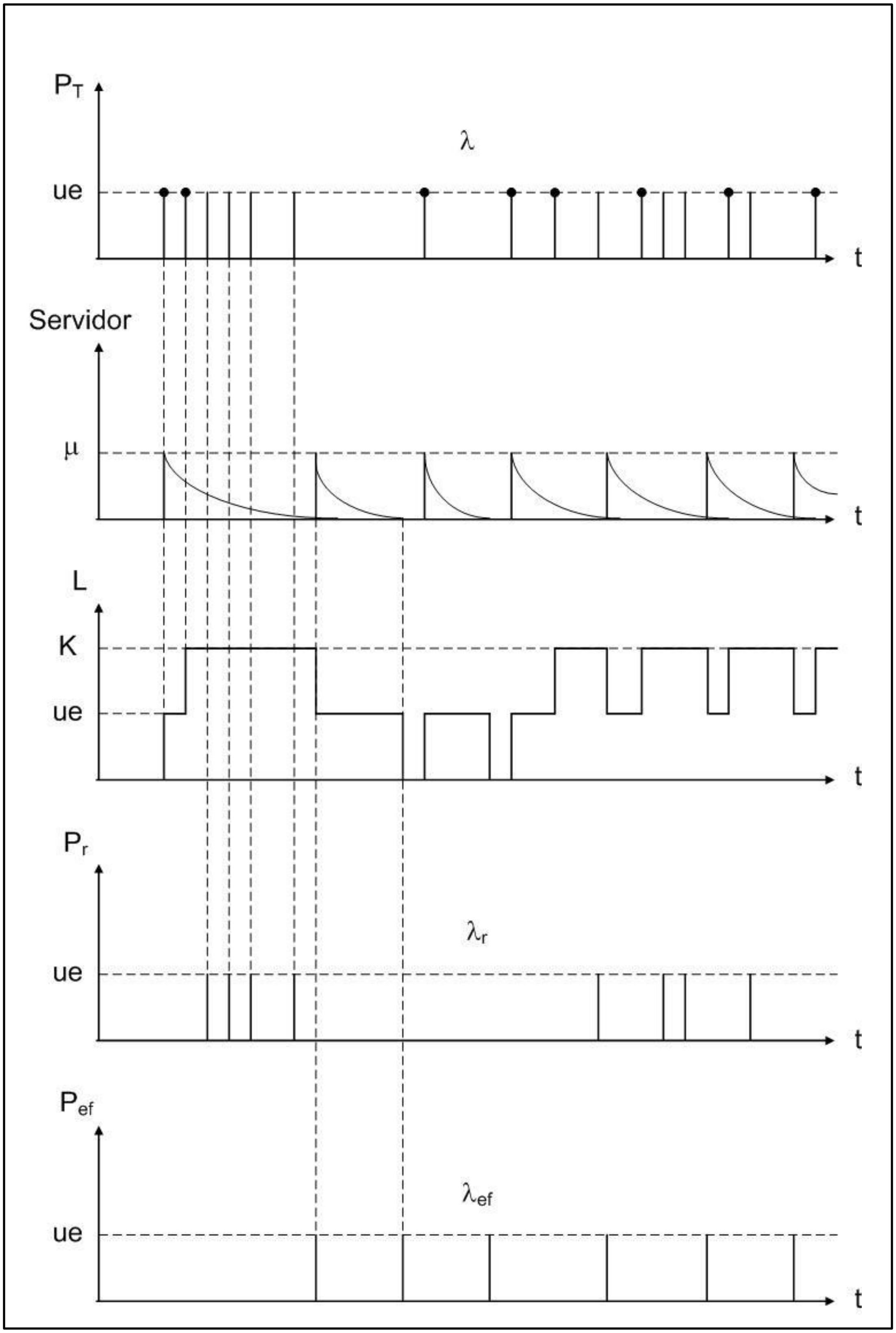

Figura 3-4: Entradas y salidas. Sistema M/M/1/K

Con la aplicación del modelo de teoría de colas, se calculan las tasas de salida λ_r y λ_{ef}. Se calcula la fracción de tiempo en el cual hay "n" clientes en el sistema p_n ($n \geq 0$); y las probabilidades de que al llegar un cliente encuentre "n" en el sistema, q_n ($n \geq 0$). Finalmente se calculan los llamados parámetros de desempeño, el valor esperado de clientes en el sistema L, el valor esperado de clientes en la cola L_q, el valor esperado del tiempo de duración de todo el proceso W, y el valor esperado del tiempo de espera de clientes en la cola W_q. Cada uno de estos parámetros tiene una definición física de acuerdo al proceso hidrológico que se analiza y esta será explicada más adelante.

3.5.1 Parámetros de entrada y atención del sistema de espera

En el sistema M/M/1/K, la llegada de clientes sigue una distribución exponencial, con tasa de llegada λ:

$$a(t) = \lambda \cdot e^{\lambda \cdot t} \tag{3.20}$$

Donde,

$a(t)$ = Distribución de los tiempos entre llegadas de los clientes.

λ = Tasa de llegada de los clientes (1/hr).

Al mismo tiempo, los tiempos de servicio siguen una distribución exponencial:

$$b(t) = \mu \cdot e^{-\mu \cdot t} \tag{3.21}$$

Donde,

$b(t)$ = Distribución de los tiempos de servicio.

μ = Tasa de servicio del proceso (1/hr).

Además, la cantidad de clientes en el sistema estará restringida por una capacidad máxima K del sistema.

Finalmente, hay que tomar en cuenta que un sistema de teoría de colas con tasas de llegada y de servicio exponenciales (markovianas) y constantes, es un proceso de nacimiento y muerte, en el presente sistema con λ ($n \geq 0$) y μ ($n \geq 1$) sin importar el número de clientes en el sistema (Gross et. al, 2008).

3.5.2 Parámetros p_n y q_n

p_n es la fracción de tiempo en el cual hay "n" clientes en el sistema; y adicionalmente se define q_n, como la probabilidad de que al llegar un cliente encuentre "n" en el sistema.

Para obtener los parámetros p_n, se resuelve la ecuación (3.19) determinada para el proceso de nacimiento y muerte (punto 3.4). En el presente caso la sumatoria es hasta K en lugar de infinito:

$$p_n = \rho^n \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{K} \rho^n\right)^{-1} \qquad (0 \leq n \leq K) \qquad (3.22)$$

Si se tiene la progresión geométrica:

$$\sum_{n=1}^{K} \rho^n = \left[\sum_{n=0}^{K} \rho^n\right] - 1 = \begin{cases} \frac{(1-\rho^K)\cdot\rho}{1-\rho} & (\rho \neq 1) \\ K & (\rho = 1) \end{cases} \qquad (3.23)$$

Reemplazando la ecuación (3.23) en (3.22) y resolviendo, se tiene finalmente:

$$p_n = \begin{cases} \frac{(1-\rho)\cdot\rho^n}{1-\rho^{K+1}} & (\rho \neq 1) \\ \frac{1}{K+1} & (\rho = 1) \end{cases} \qquad (0 \leq n \leq K) \qquad (3.24)$$

La ecuación (3.24), es la ecuación general para el cálculo de p_n en un sistema M/M/1/K.

Gross et. al, (2008), deducen la fórmula para q_n. Se parte del hecho de que
$q_n \equiv$ Probabilidad{n en el sistema/una llegada está por ocurrir}:

$$q_n = \frac{p_n}{1-p_K} \qquad (n \leq K-1) \tag{3.25}$$

De donde p_n y p_K se calculan de la ecuación (3.24).

3.5.3 Parámetros de salida del sistema

Una fracción p_K de las llegadas no se une al sistema porque llega a él cuando ya no hay espacio, y son rechazadas. Por lo tanto la tasa real de llegadas que efectivamente se unen al sistema para ser atendidas debe ser ajustada. Es posible entonces definir la tasa efectiva de llegada y de salida, dado que dichas tasas pueden ser dependientes de la probabilidad de estado del sistema (Gross et. al, 2008):

Tasa de llegada efectiva λ_{ef}:

$$\lambda_{ef} = \sum_{n=0}^{K-1} \lambda \cdot p_n = \lambda \cdot p_0 \cdot \left[\sum_{n=0}^{K-1} \rho^n\right] \tag{3.26}$$

Resolviendo la ecuación (3.26) se tiene:

$$\lambda_{ef} = \lambda \cdot (1 - p_K) \tag{3.27}$$

Tasa de partida λ_d:

$$\lambda_d = \sum_{n=1}^{K} \mu \cdot p_n = \mu \cdot p_0 \cdot \left[\sum_{n=1}^{K} \rho^n\right] \tag{3.28}$$

Y su solución:

$$\lambda_d = \mu \cdot (1 - p_0) \tag{3.29}$$

Reemplazando los valores de la ecuación (3.24) para p_0 y p_K, en las ecuaciones (3.28) y (3.29), se puede comprobar que:

$$\mu \cdot (1 - p_0) = \lambda \cdot (1 - p_K) \tag{3.30}$$

Es decir, que la tasa efectiva de entrada al sistema λ_{ef} es igual a la tasa de partida λ_d.

Finalmente, la tasa de los clientes rechazados λ_r será:

$$\lambda_r = \lambda - \lambda_{ef} = \lambda \cdot p_K \tag{3.31}$$

De las ecuaciones anteriores, se deduce que la probabilidad de que se puedan aceptar nuevos usuarios, es decir la fracción de tiempo durante el cual el sistema no estará a capacidad completa, es:

$$p_{libre} = 1 - p_K \tag{3.32}$$

3.5.4 Parámetros de desempeño

El valor esperado del número de clientes en la cola L_q es (Gross et. al, 2008):

$$L_q = E[N_q] = \sum_{n=2}^{K} (n-1) \cdot p_n \tag{3.33}$$

Tomando en cuenta la ecuación (3.17) y resolviendo:

$$L_q = p_0 \cdot \sum_{n=2}^{K} (n-1) \cdot \rho^n = \rho^2 \cdot p_0 \cdot \sum_{n=2}^{K} (n-1) \cdot \rho^{n-2} \tag{3.34}$$

Haciendo el cambio de variable: m = n – 1:

$$L_q = \rho^2 \cdot p_0 \cdot \sum_{m=1}^{K} m \cdot \rho^{m-1} \tag{3.35}$$

Si se tiene la progresión geométrica:

$$\sum_{m=1}^{K} m \cdot \rho^{m-1} = \begin{cases} \frac{1-\rho^K - K\cdot(1-\rho)\cdot\rho^{K-1}}{(1-\rho)^2} & (\rho \neq 1) \\ \frac{1}{2} \cdot K \cdot (K-1) & (\rho = 1) \end{cases} \tag{3.36}$$

Reemplazando la ecuación (3.36) y (3.24) para p_0 en (3.35); y resolviendo, se tiene finalmente:

$$L_q = E[N_q] = \begin{cases} \frac{\rho^2\cdot[1-\rho^K - K\cdot(1-\rho)\cdot\rho^{K-1}]}{(1-\rho^{K+1})\cdot(1-\rho)} & (\rho \neq 1) \\ \frac{K\cdot(K-1)}{2\cdot(K+1)} & (\rho = 1) \end{cases} \tag{3.37}$$

La ecuación (3.37), es la ecuación general para el cálculo de L_q en un sistema M/M/1/K.

Para el cálculo del número de clientes en el sistema L, Gross et. al, (2008) deducen la siguiente fórmula, para cualquier sistema:

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} \tag{3.38}$$

Sin embargo, la tasa de llegada al sistema fue ajustada, por lo que la fórmula (3.38) debe ser ajustada con el resultado obtenido de la fórmula (3.27):

$$L = L_q + \frac{\lambda_{ef}}{\mu} = L_q + \frac{\lambda \cdot (1 - p_K)}{\mu} = L_q + \rho \cdot (1 - p_K) \tag{3.39}$$

Lo que de acuerdo a la ecuación (3.30) también es igual a:

$$L = E[N] = L_q + (1 - p_0) \tag{3.40}$$

Los valores esperados de tiempos de permanencia, tanto en el sistema W, como en la cola W_q, se calculan por medio de la fórmula de Little (Gross et. al, 2008):

$$L = \lambda \cdot W \tag{3.41}$$

Por lo que el valor esperado de tiempo de permanencia en el sistema W, es:

$$W = E[T] = \frac{L}{\lambda_{ef}} = \frac{L}{\lambda \cdot (1 - p_K)} \tag{3.42}$$

Y el valor esperado de tiempo de permanencia en la cola W_q, es:

$$W_q = E[T_q] = \frac{L_q}{\lambda_{ef}} = \frac{L - \rho \cdot (1 - p_K)}{\lambda \cdot (1 - p_K)} = W - \frac{1}{\mu} \tag{3.43}$$

Las ecuaciones mostradas son generales para el cálculo de los parámetros de desempeño en un sistema M/M/1/K. El significado físico de cada uno de estos será explicado durante el análisis de cada proceso hidrológico.

3.5.5 Distribución acumulada del tiempo de espera Wq(t)

Para tener más información sobre la naturaleza del tiempo de espera, se puede determinar la función de distribución acumulada (CDF - *cummulative distribution function*).

Se designa por Tq como la variable aleatoria "tiempo ocupado en la cola" en estado estacionario y $W_q(t)$ representa su función de distribución acumulada. Se sabe que q_n es la probabilidad de que al llegar un cliente encuentre "n" en el sistema justo antes de su llegada. Entonces,

$$W_q(0) = P\{sistema\ est\acute{e}\ vac\acute{\imath}o\ ante\ una\ llegada\} \tag{3.44}$$

$$W_q(0) = P\left(T_q \leq 0\right) = P\left(T_q = 0\right) = q_0 \tag{3.45}$$

Para calcular $W_q(t)$ para $t > 0$, se acepta el hecho de que si a la llegada de un cliente, existen n en la cola, para que éste entre en servicio en un tiempo entre 0 y t, todos los clientes anteriores deberían haber sido servidos en t. Dada la característica sin memoria del servicio, la distribución del tiempo requerido para que se complete el servicio a n clientes es independiente del tiempo de la llegada actual.

Entonces, considerando a $W_q(t)$ como la probabilidad de que el tiempo de espera de un cliente, para ser servido, sea menor o igual a t:

$$\begin{aligned} W_q(t) &= W_q(0) + \sum_{n=1}^{K-1} P\{n\ servicios\ completados \leq t/encuentra\ "n"\ a\ su\ llegada\} \cdot q_n \\ &= P\left(T_q \leq t\right) \end{aligned} \tag{3.46}$$

Gross et. al, (2008), deducen la fórmula (3.46) y llegan al siguiente resultado general:

$$W_q(t) = 1 - \sum_{n=1}^{K-1} q_n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\mu \cdot t)^i \cdot e^{-\mu \cdot t}}{i!} \tag{3.47}$$

En la Tabla 3-1 se muestran los resultados útiles para el presente trabajo que se obtienen de un sistema M/M/1/K, cada uno de los parámetros expresados tiene su significado físico para cada proceso hidrológico, este será analizado a detalle más adelante en este documento.

Tabla 3-1: Parámetros de cálculo del sistema M/M/1/K – Forma general.

Parámetro	**Fórmula**	**Descripción**
ρ	$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$	Intensidad de tráfico.
p_n	$p_n = \begin{cases} \frac{(1-\rho)\cdot\rho^n}{1-\rho^{K+1}} & (\rho \neq 1) \\ \frac{1}{K+1} & (\rho = 1) \end{cases}$	Para ($0 \leq n \leq K$). Fracción de tiempo en el cual hay “n” clientes en el sistema.
p_{libre}	$p_{libre} = 1 - p_K$	Fracción de tiempo durante el cual el sistema no estará a capacidad completa.
q_n	$q_n = \frac{p_n}{1 - p_K}$	Para ($n \leq K - 1$). Probabilidad de que al llegar un cliente encuentre “n” en el sistema.
λ_{ef}	$\lambda_{ef} = \lambda \cdot (1 - p_K)$	Tasa de partida.
λ_r	$\lambda_r = \lambda - \lambda_{ef} = \lambda \cdot p_K$	Tasa de rechazo.

Tabla 3-1: (Continuación).

L_q	$L_q = \begin{cases} \dfrac{\rho^2 \cdot [1 - \rho^K - K \cdot (1-\rho) \cdot \rho^{K-1}]}{(1-\rho^{K+1}) \cdot (1-\rho)} & (\rho \neq 1) \\ \dfrac{K \cdot (K-1)}{2 \cdot (K+1)} & (\rho = 1) \end{cases}$	Valor esperado del número de clientes en la cola.
L	$L = L_q + \rho \cdot (1 - p_K)$	Valor esperado del número de clientes en el sistema.
W	$W = E[T] = \dfrac{L}{\lambda_{ef}} = \dfrac{L}{\lambda \cdot (1 - p_K)}$	Valor esperado de tiempo de permanencia en el sistema
W_q	$W_q = E[T_q] = \dfrac{L_q}{\lambda_{ef}} = \dfrac{L - \rho \cdot (1 - p_K)}{\lambda \cdot (1 - p_K)} = W - \dfrac{1}{\mu}$	Valor esperado de tiempo de permanencia en la cola
$W_q(t)$	$W_q(t) = 1 - \sum_{n=1}^{K-1} q_n \sum_{i=0}^{n-1} \dfrac{(\mu \cdot t)^i \cdot e^{-\mu \cdot t}}{i!}$	Función de distribución acumulada del tiempo de permanencia en la cola.

4. PROCESOS HIDROLÓGICOS. TEORÍA DE COLAS

Aunque existen variedad de modelos de teoría de colas que pueden ser considerados para la representación del proceso de lluvia-escorrentía; y que podrían tal vez representar mejor la llegada de las lluvias; se utiliza una cola M/M/1/K, porque las restricciones que se pueden imponer a la misma resultan necesarias para poder modelar con mejor aproximación el proceso hidrológico. Puesto que, dado que la precipitación actúa como cliente, son varios los procesos que pueden ser interpretados como servidor o como restricción respectivamente. Como ejemplo, en el caso de la infiltración, el suelo actúa como servidor, y la restricción es el máximo volumen de almacenamiento superficial, esta es necesaria, pues una vez rebasada esta, el agua, rechazada por el sistema, fluirá como escurrimiento superficial. Es así que en el presente trabajo, se consideran tres sistemas que actúan como colas M/M/1/K cada uno, y los mismos contienen procesos hidrológicos que actuarán tanto como servidor como restricción, asemejándose así lo más posible al fenómeno físico que se quiere representar: el proceso de lluvia-escorrentía.

Se considera que el proceso de llegada de las unidades equivalentes de precipitación es Poisson, debido a la siguiente razón: Eagleson (1972), después de analizar registros de precipitación de varias regiones de los Estados Unidos, llego a la conclusión de que a pesar de que el proceso Poisson considera la llegada de pulsos de duración nula con una tasa λ, este proceso matemático puede acercarse lo suficiente a emular la llegada de la precipitación, mientras los pulsos de llegada de la precipitación (unidades equivalentes) no se traslapen unos con otros durante su llegada. Esta misma consideración se toma en cuenta para el presente trabajo.

Además, por las razones expuestas anteriormente y porque de esta manera se facilita el uso de un solo sistema de colas para todo los procesos hidrológicos, se asume que las unidades equivalentes ue, que salen después de ser atendidas inicialmente en un sistema, llegan al siguiente sistema de acuerdo a un proceso Poisson. En otras palabras se asume que el agua representada en unidades equivalentes, al llegar a ser atendida por cada uno de los procesos hidrológicos tomados en cuenta en este trabajo, sigue un proceso Poisson. Si el servidor se encuentra lleno, el modelo se aproximará mejor, pues, bajo esta condición la tasa sale a intervalos exponenciales.

Se asume, además, que los tiempos de atención de los procesos hidrológicos que actúan como servidores, siguen una distribución exponencial. Debido a la poca información disponible de estos procesos hidrológicos, se considera que la distribución exponencial podría representar bien su variabilidad al considerar los tiempos de atención.

Debido a las consideraciones anteriores, se asume que el escurrimiento superficial, saldrá del sistema de colas siguiendo un proceso Poisson, y finalmente este será analizado mediante el proceso estocástico de shot-noise.

El proceso de shot-noise analiza la llegada de clientes que siguen un proceso Poisson. Se utiliza este proceso puesto que de su análisis, se determinan los parámetros para una distribución Gamma, la cual es la misma que siguen generalmente tienen los caudales (Ven Te Chow, 1994). El resultado final del sistema completo considerando los procesos de teoría de colas y shot-noise, será la función de distribución de los caudales.

A continuación se desarrolla un modelo estocástico de teoría de colas para representar el proceso de lluvia-escorrentía en una cuenca. En primer lugar se propone un método para caracterizar las tormentas a partir de un registro de precipitaciones con intervalos de tiempo cortos (10 o 15 minutos), de manera que puedan ser analizadas como clientes que entran a un servicio. Así la precipitación estará caracterizada como pulsos de 1 mm que entran a un sistema de colas a una tasa λ_0 estacionaria.

Después se analiza por separado cada uno de los procesos que intervienen en el ciclo hidrológico, representándolos por medio de un sistema estocástico de teoría de colas. Al igual que en el proceso real, estos modelos serán dependientes entre sí, por medio de la tasa de llegada de clientes al servidor de la cola. Se analizan tres sistemas de teoría de colas: el primero, de intercepción y evapotranspiración; el segundo, de infiltración y almacenamiento superficial; y el tercero, de almacenamiento en el suelo y evaporación. Y además se muestran dos sistemas de análisis de resultados: escurrimiento superficial y escurrimiento subterráneo. En la Figura 4-1 se muestran todos los sistemas analizados en el presente trabajo y la relación entre ellos.

Del análisis de cada sistema se podrán obtener resultados, que reflejen el proceso de lluvia-escorrentía analizado por medio del proceso estocástico de teoría de colas. Tales como tasas de salida del sistema, fracción de tiempo de espera, probabilidad de que al llegar una unidad de agua encuentre “n” en el sistema, parámetros de desempeño propios del sistema de colas analizado y función de distribución acumulada del tiempo de espera.

Finalmente aplicando a los caudales una condición de escurrimiento con el proceso de shot-noise (Ross, 1983), se obtienen el valor esperado, la varianza y la covarianza de los caudales del escurrimiento superficial y del escurrimiento subterráneo.

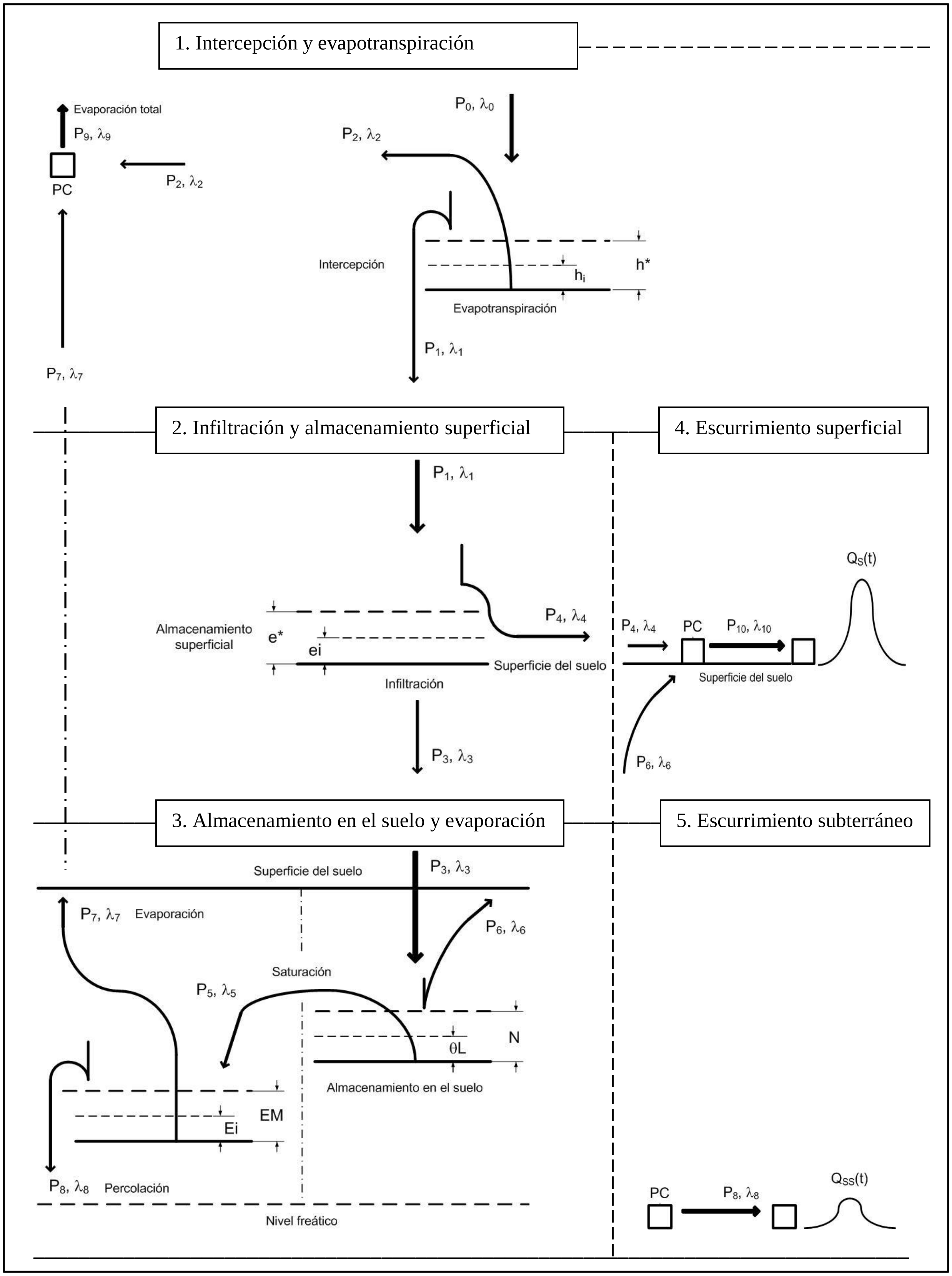

Figura 4-1: Sistemas estocásticos del modelo de lluvia-escorrentía

4.1 Precipitación. Caracterización de tormentas

Para desarrollar un modelo estocástico de lluvia-escorrentía, normalmente se cuenta con un registro continuo de precipitación expresado como volumen de precipitación caída a intervalos de una hora o menores. Es de interés analizar y caracterizar dicho registro para poderlo expresar como parámetro de entrada al modelo estocástico de teoría de colas. Si se acumula la serie de precipitación, se obtendría un gráfico como el de la Figura 4-2, con valores no decrecientes en función del tiempo.

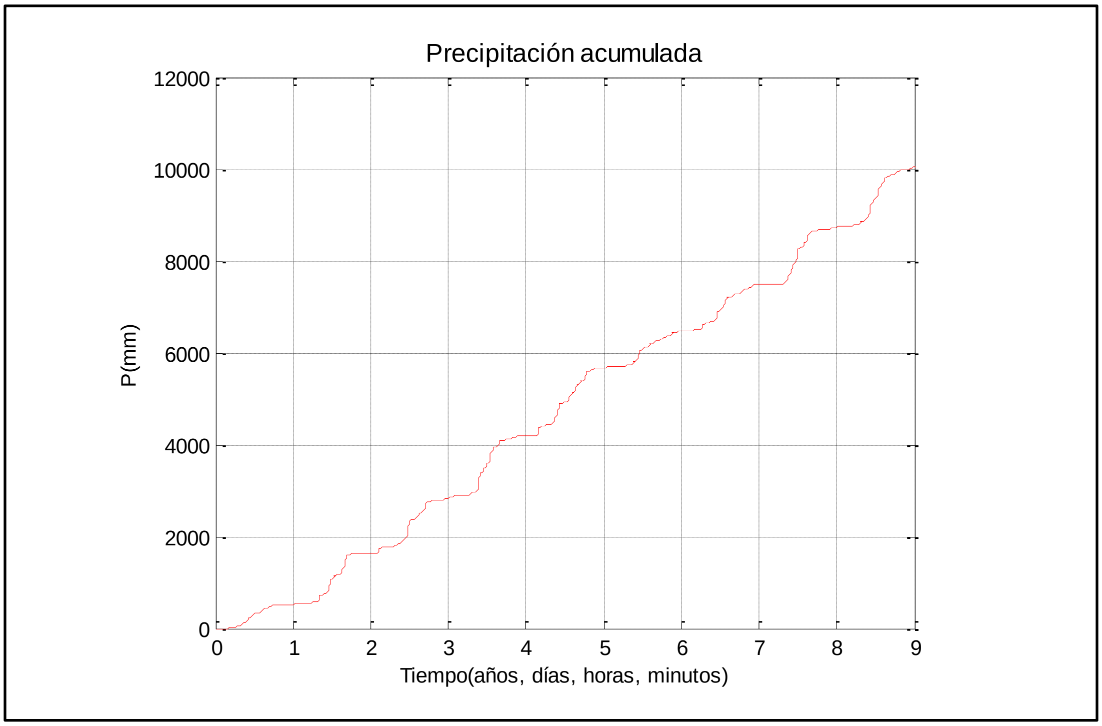

Figura 4-2: Registro de precipitación acumulada

En la Figura 4-2 se observa que la curva de precipitación acumulada presenta una forma casi escalonada, cuando se observa este comportamiento en algunos registros de precipitación significa que las temporadas seca y lluviosa están bien definidas a lo largo del año hidrológico. Este es el caso de los registros de precipitaciones en Chile; presentándose la temporada lluviosa en invierno y la temporada seca en verano. En este caso el proceso de llegada de la precipitación no es permanente y permite la periodicidad típica de los climas semiáridos a templados en temporada seca.

Es por eso que si la curva de precipitación presenta estas características, del registro se separa la temporada seca, dejando solamente los datos pertenecientes a la temporada lluviosa, que será la más crítica, y durante la cual, la llegada de precipitaciones puede considerarse permanente. Este tratamiento al registro de precipitación, "suavizará" la curva de precipitación acumulada, como muestra la Figura 4-3.

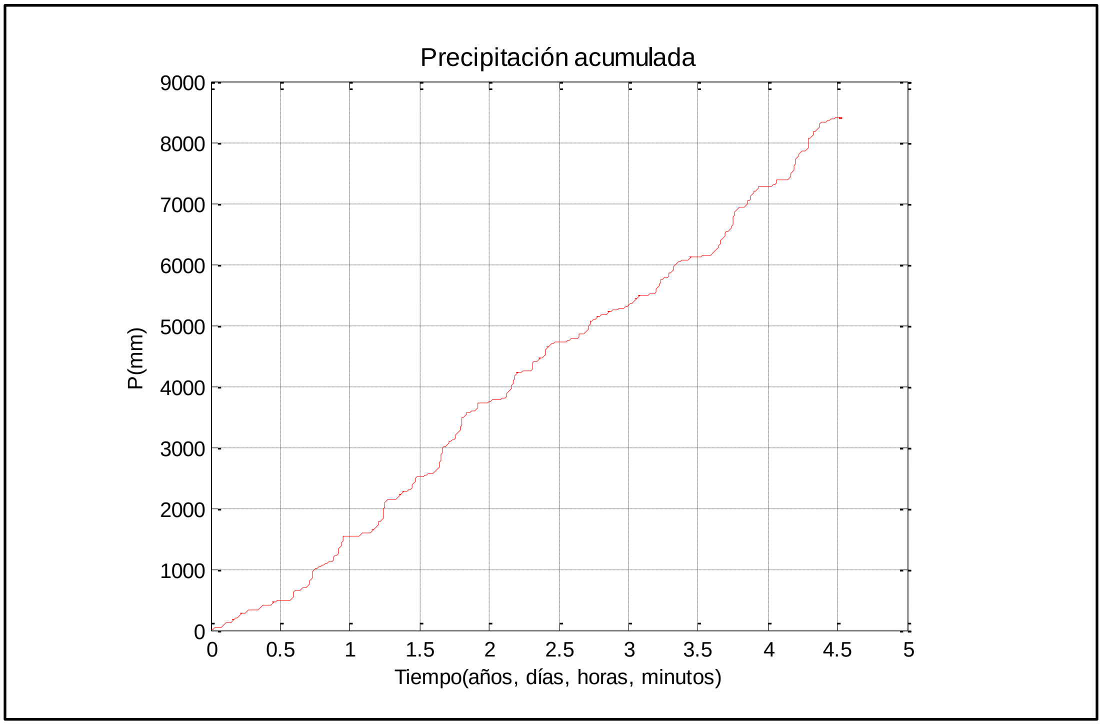

Figura 4-3: Registro de precipitación acumulada, solo temporadas lluviosas

Finalmente, después de realizado este tratamiento al registro de precipitación acumulada, y dado que la lluvia es representada como el cliente a ser atendido por un sistema de teoría de colas, debe ser caracterizada de acuerdo a las condiciones que tienen clientes típicos para estos modelos.

El primer punto que se debe tomar en cuenta a la hora de aplicar el modelo estocástico, es que la teoría de colas no discrimina a los clientes de un sistema de acuerdo a su tamaño o cualquier otra característica que lo diferencie del resto de la población; absolutamente todos los clientes son tomados como unidades iguales que de acuerdo a una distribución de probabilidad, entran a un sistema para ser atendidos. Es por esta razón que la precipitación es caracterizada como entidades de agua de igual tamaño, que llegan de acuerdo a una distribución para ser atendidos; estas entidades son llamadas "unidades equivalentes de precipitación (ue)". Es decir, debido a que la teoría de colas asume que todos los clientes son iguales, se determina una cantidad de precipitación que es la misma en todos los clientes; en el presente trabajo, estas unidades equivalentes de precipitación son de 1 mm (1 ue = 1 mm). Para ello, del registro de precipitación acumulada, se determina el tiempo entre llegadas (TEL) de cada "ue". Es decir que, del registro de precipitación acumulada, se calcula el tiempo que pasa entre cada incremento de un milímetro. El procedimiento se observa en el esquema de la Figura 4-4.

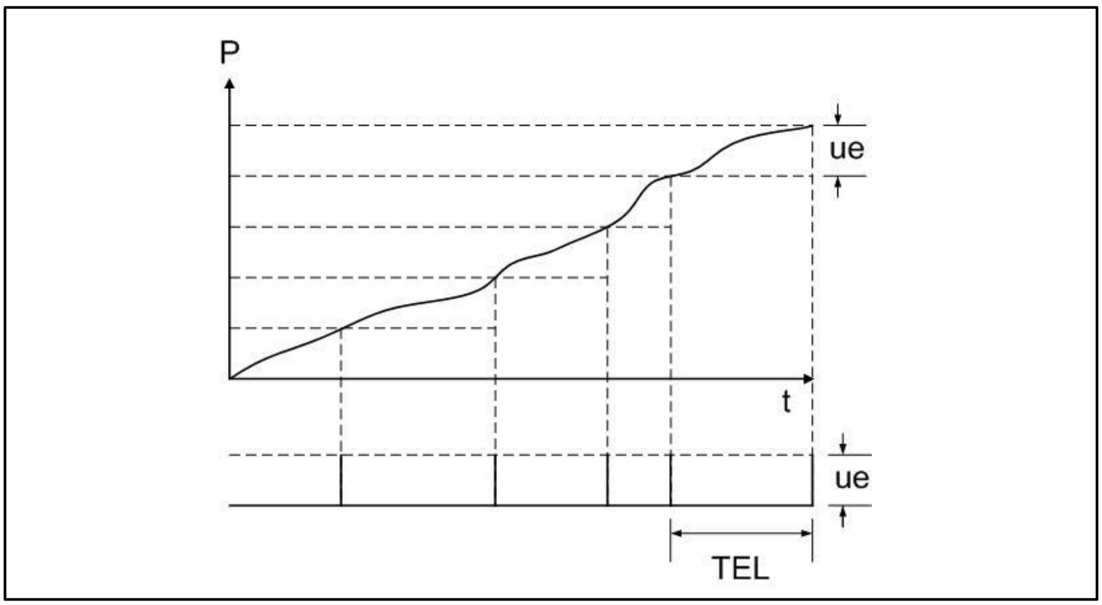

Figura 4-4: Esquema de tiempo entre llegadas de unidades equivalentes de lluvia

A partir de esta serie de tiempo entre llegadas de ue´s y su función de distribución de probabilidades, se determinan los datos de entrada al modelo.

4.1.1 Comportamiento exponencial de los tiempos entre llegada (TEL)

Como se mencionó anteriormente, Restrepo y Eagleson (1982) probaron que el tiempo entre tormentas para una amplia variedad de series en diferentes zonas geográficas, se distribuyen exponencialmente; sin embargo el parámetro que se toma en cuenta en el presente trabajo es el tiempo entre llegadas de incrementos de ue´s de 1 mm (TEL).

Una característica que deben tener los clientes al entrar a un sistema de línea de espera es su independencia; las que según un criterio expresado por Restrepo y Eagleson (1982) se cumple para las precipitaciones. El proceso Poisson describe la llegada de eventos que son instantáneos, que no tienen duración. Además se comprobó que la distribución de los intervalos entre llegadas Poisson se distribuye exponencialmente:

$$f_T(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} \qquad t \geq 0 \tag{4.1}$$

Donde,

λ = Tasa de llegada promedio de las unidades equivalentes (ue) – (1/hr).

Un proceso de renovación que tiene tiempos entre llegadas distribuidas de acuerdo a la distribución exponencial, es un proceso Poisson. El proceso de Poisson es un proceso de conteo que describe la llegada aleatoria de eventos instantáneos que son identificados como pulsos, y cuyas duraciones son cero. Para estos eventos, la distribución de los tiempos entre llegadas es usualmente exponencial (Restrepo-Posada y Eagleson, 1982). Se sabe además, que para eventos de duración cero, la distribución exponencial (ecuación 4.1) es una condición suficiente para asegurar la independencia de llegadas sucesivas. Sin embargo el proceso Poisson es solo un concepto matemático y no se puede esperar que un fenómeno real pueda estar exactamente de acuerdo con este

(Restrepo-Posada y Eagleson 1982). En el presente caso las duraciones de la acumulación de unidades equivalentes de lluvia (ue) son finitas. Pero considerando que las ue´s no se traslapan, el proceso Poisson puede aún aproximar la serie natural. Y a pesar que el origen de esta distribución es arbitraria para el verdadero proceso de Poisson (debido a que las ue´s no serían instantáneas), se puede esperar que el tiempo entre llegadas (TEL) se distribuya exponencialmente.

Los tiempos entre llegadas se miden en cada instante en que se acumula una unidad equivalente de precipitación (ue), lo que se podría equiparar a decir que se miden en cada instante en que se completa una ue. Esta afirmación equivale a despreciar la duración que tarda en acumularse la ue deseada; sin embargo le estaría dando a la serie la característica de pulso necesaria para ser modelada como una llegada de clientes.

En resumen, se asume que los tiempos entre llegada (TEL) de las unidades equivalentes de precipitación (ue), se distribuyen exponencialmente, lo que asegura que estas son independientes y que su llegada es descrita por un proceso Poisson.

Finalmente, para asegurar un mejor ajuste de la serie de TEL a la distribución exponencial, se realiza una optimización matemática de la misma por medio del método de los mínimos cuadrados ajustando la tasa de llegada promedio de las ue; obteniéndose una tasa corregida λ_0. Al realizar este procedimiento, se tendría que $\lambda_0 > \lambda$, lo cual significa que estaríamos acortando la media de los TEL; lo cual sería el caso más crítico para la modelación. Esta tasa λ_0, es el parámetro de entrada al modelo estocástico de teoría de colas.

4.2 Intercepción y Evapotranspiración – Sistema M/M/1/h*

Cuando ocurre el fenómeno de precipitación, no toda el agua que precipita llega a alcanzar la superficie del terreno. Una parte del agua es retenida (agua de intercepción por la vegetación) y vuelve a evaporarse. El agua interceptada se consume en la transpiración de las plantas, este fenómeno es menos importante cuantitativamente que la evaporación de la zona no saturada del suelo pero puede ser relevante en zonas densamente vegetadas. Los fenómenos de transpiración y evaporación son difíciles de separar, y es por ello por lo que se utiliza el término evapotranspiración (E) para englobar ambos términos.

Recordando, un sistema M/M/1/K, tiene un servidor, cuya atención sigue una distribución exponencial; y para el que los clientes a ser atendidos, llegan también de acuerdo a una distribución exponencial. Al mismo tiempo, el sistema tiene una restricción que está determinada por la capacidad máxima del sistema. En este sistema, el cliente es el agua de lluvia representada por las unidades equivalentes ue; el servidor es el fenómeno de la evapotranspiración desde la vegetación, y la restricción representa la capacidad máxima de intercepción por parte de la vegetación.

Los fenómenos de intercepción y evapotranspiración, forman parte del subsistema de agua atmosférica (Chow et. al, 2008) y pueden ser representados por un sistema M/M/1/K de teoría de colas. Este es el primer sistema del modelo estocástico de lluvia-escorrentía. Figura 4-5.

Como se puede ver en la Figura 4-5, la precipitación P_0, caracterizada en ue´s tiene una tasa de llegada exponencial λ_0, y es “atendida” por el proceso de evapotranspiración (E) a una tasa μ_1. Se forma una cola, es decir, hay intercepción (hi) por parte de la vegetación; al alcanzar el máximo valor de intercepción del sistema $K = h^*$, el agua es rechazada por el sistema (P_1) a una tasa λ_1, y sigue su camino al siguiente sistema sobre la superficie del suelo en el cual es atendida por la infiltración. El agua atendida o retenida por la vegetación, es el agua evaporada (P_2) la cual deja el sistema a una tasa λ_2.

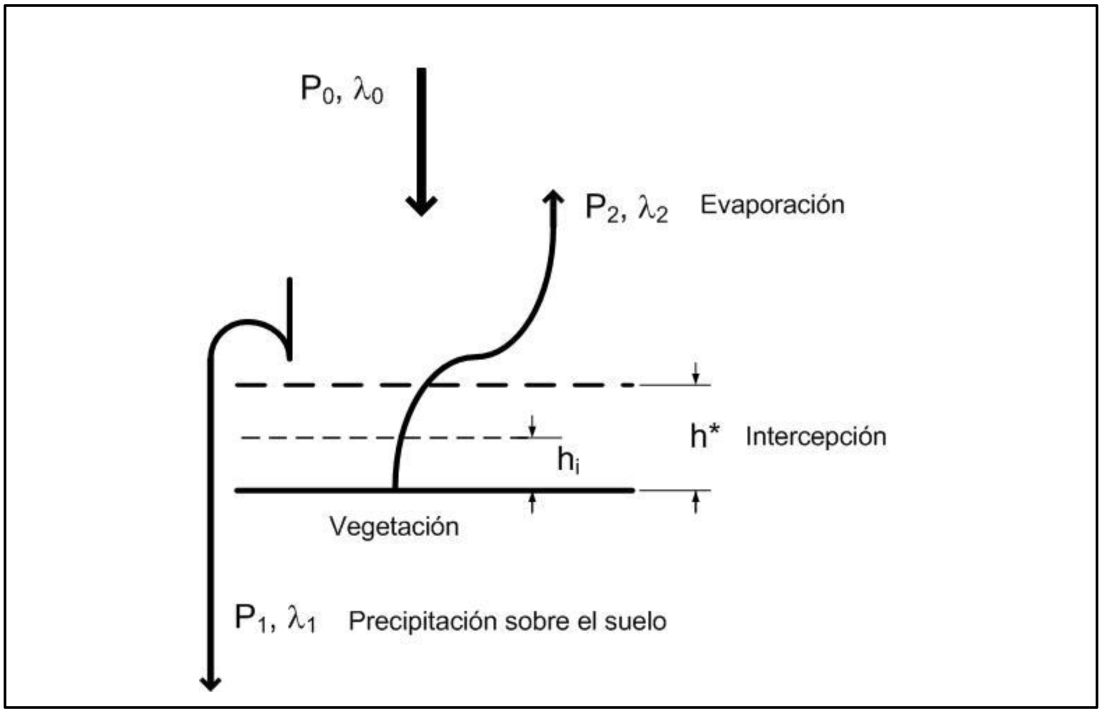

Figura 4-5: Intercepción y evapotranspiración – Sistema M/M/1/h*

La forma en que trabaja el modelo es igual a la explicada mediante las cinco gráficas mostradas en la Figura 3-4; en primer lugar, la precipitación P_0, llega con una tasa λ_0 en pulsos de tamaño ue; a continuación el proceso de evapotranspiración E, "atiende" a los pulsos a una tasa de servicio μ_1; en la tercera gráfica están las ue que entran en servicio y que son interceptadas, además de su variación de acuerdo a las tasas de llegada y de servicio de las mismas, una vez que se llega al máximo de la capacidad K=h*, el resto de las ue son rechazadas; en la cuarta gráfica se muestran las ue que son rechazadas por el sistema (P_1) a una tasa λ_1, son estas ue las que irán al siguiente sistema; finalmente, la última gráfica muestra las ue evaporadas (P_2) que dejan el sistema después de ser atendidas a una tasa λ_2. Para efectos de claridad, en la primera gráfica de la Figura 3-4, los pulsos que llegan a ser atendidos están diferenciados por un punto, después del proceso estos formarán el agua evaporada; el resto de los pulsos forman el agua rechazada, es decir la precipitación que no es interceptada y que continúa su curso hasta la superficie del suelo.

Con la aplicación del modelo de teoría de colas, se calculan las tasas de salida λ_1 y λ_2. Se calcula también la fracción de tiempo en el cual hay "n" mm de agua interceptada y evaporándose en el sistema $p1_n$ ($n \geq 0$); y las probabilidades de que al llegar el agua encuentre "n" mm de agua precipitada en estado de intercepción, $q1_n$ ($n \geq 0$). Finalmente se calculan los llamados parámetros de desempeño, el valor esperado de agua en todo el sistema, es decir agua interceptada (cola) más agua evaporándose (en servicio) L_1; el valor esperado de agua interceptada hi, el valor esperado del tiempo de duración de todo el proceso, es decir el tiempo que le toma al agua en llegar, ser interceptada y evaporarse W_1; y el valor esperado del tiempo de duración del agua en estado interceptado W_{q1}.

4.2.1 Parámetros de entrada y atención del sistema de espera

Como se discutió en el punto 4.1.1 la llegada de las ue´s de agua sigue una distribución exponencial, con tasa de llegada λ_0;

$$a(t) = \lambda_0 \cdot e^{-\lambda_0 \cdot t} \tag{4.2}$$

Donde,

$a(t)$ = Distribución de los tiempos entre llegadas de las unidades equivalentes.

λ_0 = Tasa de llegada de la precipitación (1/hr).

Al mismo tiempo se asume que el fenómeno de la evapotranspiración desde la vegetación sigue una distribución exponencial, o de manera equivalente la tasa de servicio de la evapotranspiración sigue una distribución Poisson. Esto permite aprovechar la característica "sin memoria" del proceso.

Normalmente se tiene un dato de evapotranspiración, el cual se convierte en el valor esperado de atención. Pero si se tiene una población de datos de evapotranspiración en una cuenca pequeña para un mismo intervalo de tiempo, es posible que haya cierta dispersión, algunos valores mayores y otros menores. Entonces teniendo en cuenta la evapotranspiración real como la tasa media durante cierto tiempo de observación y asumiendo que este es un dato aleatorio, el proceso Poisson podría predecir el grado de dispersión alrededor del valor de ocurrencia conocido. Y dado que el tiempo entre estas ocurrencias se distribuye exponencialmente:

$$b(t) = \mu_1 \cdot e^{-\mu_1 \cdot t} \tag{4.3}$$

Donde,

$b(t)$ = Distribución de los tiempos de servicio del proceso de evapotranspiración

μ_1 = Tasa de servicio del proceso de evapotranspiración (1/hr).

La tasa de servicio se calcula a partir de un dato conocido de evapotranspiración (E), de la siguiente manera:

$$\mu_1 = \frac{E}{V(ue)} \tag{4.4}$$

Donde,

E = Evapotranspiración real (mm/hr).

V(ue) = Valor de una unidad equivalente de precipitación (mm).

Recordando que en el presente trabajo los clientes son las unidades equivalentes de lluvia ue, el "peso" de cada una es:

$$V(ue) = 1 \text{ mm} \tag{4.5}$$

Además, la restricción K = h* sobre la capacidad del sistema, es el máximo valor de agua interceptada:

$$h^* = \frac{I}{V(ue)} \qquad I \geq 2 \cdot V(ue) \tag{4.6}$$

Donde,
h* = Capacidad máxima de intercepción, en ue´s.
I = Altura de agua interceptada (mm)

Finalmente, debe tomarse en cuenta que un sistema de teoría de colas con tasas de llegada y de servicio exponenciales (markovianas) y constantes, es un proceso de nacimiento y muerte, en el presente sistema con λ_0 ($n \geq 0$) y μ_1 ($n \geq 1$) sin importar el número de ue´s en el sistema (Gross et. al, 2008).

4.2.2 Parámetros $p1_n$ y $q1_n$

Recordando que $p1_n$, es la fracción de tiempo en el cual hay "n" ue´s involucradas en el sistema; y $q1_n$, es la probabilidad de que al llegar una ue´s encuentre "n" mm de agua interceptada; ambas para el sistema de intercepción y evapotranspiración. En este caso $p_n = p1_n$ y $q_n = q1_n$.

En el punto 3.5 ya se realizaron los cálculos de los parámetros para la forma general, por lo que a continuación se reemplazan los datos para el sistema de intercepción y evapotranspiración, M/M/1/h* en algunas ecuaciones importantes de la forma general.

En la ecuación (3.16), para los valores λ_0 y μ_1, se tiene:

$$\rho_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} \tag{4.7}$$

Usando los valores ρ_1 y h*, se tiene la fracción de tiempo en el cual hay "n" ue´s involucradas en el sistema de intercepción y evapotranspiración.

De otra manera y dado que V(ue) = 1 mm, se tiene la fracción de tiempo en el cual hay "n" mm de agua interceptada por la vegetación y evaporándose a través de la misma:

$$p1_n = \begin{cases} \frac{(1-\rho_1)\cdot\rho_1^n}{1-\rho_1^{h^*+1}} & (\rho_1 \neq 1) \\ \frac{1}{h^*+1} & (\rho_1 = 1) \end{cases} \qquad (0 \leq n \leq h^*) \qquad (4.8)$$

Y la ecuación para obtener la probabilidad de que al llegar el agua encuentre "n" mm de agua interceptada por la vegetación:

$$q1_n = \frac{p1_n}{1-p1_{h^*}} \qquad (n \leq h^* - 1) \qquad (4.9)$$

Donde $p1_n$ y $p1_{h^*}$ se calculan de la ecuación (4.8).

4.2.3 Parámetros de salida del sistema

Al igual que en el caso anterior, en el punto 3.5 ya se realizaron los cálculos de los parámetros para la forma general, por lo que a continuación se reemplazan los datos para el sistema de intercepción y evapotranspiración, M/M/1/h*.

De la ecuación (3.27) se obtiene la tasa del agua que se evapora después de pasar por el proceso de intercepción y evapotranspiración:

$$\lambda_2 = \lambda_0 \cdot (1 - p1_{h^*}) \qquad (4.10)$$

Reemplazando $p1_{h^*}$ de (4.8) en (4.10):

$$\lambda_2 = \begin{cases} \lambda_0 \cdot \left(1 - \frac{(1-\rho_1)\cdot\rho_1^{h^*}}{1-\rho_1^{h^*+1}}\right) & (\rho_1 \neq 1) \\ \lambda_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{h^*+1}\right) & (\rho_1 = 1) \end{cases} \qquad (0 \leq n \leq h^*) \qquad (4.11)$$

De la ecuación (3.31) se obtiene la tasa del agua que es rechazada por el sistema y que continuará su camino hasta la superficie del suelo.

$$\lambda_1 = \lambda_0 - \lambda_2 = \lambda_0 \cdot p1_{h^*} \qquad (4.12)$$

Reemplazando $p1_{h^*}$ de (4.8) en (4.12):

$$\lambda_1 = \begin{cases} \lambda_0 \cdot \left(\frac{(1-\rho_1)\cdot\rho_1^{h^*}}{1-\rho_1^{h^*+1}}\right) & (\rho_1 \neq 1) \\ \lambda_0 \cdot \left(\frac{1}{h^*+1}\right) & (\rho_1 = 1) \end{cases} \qquad (0 \leq n \leq h^*) \qquad (4.13)$$

De la ecuación (3.32) se obtiene la fracción del tiempo durante el cual la intercepción no alcanza su máximo valor h*:

$$p1_{libre} = 1 - p1_{h^*} \qquad (4.14)$$

Reemplazando $p1_{h^*}$ de (4.8) en (4.14):

$$p1_{libre} = \begin{cases} 1 - \frac{(1-\rho_1)\cdot\rho_1^{h^*}}{1-\rho_1^{h^*+1}} & (\rho_1 \neq 1) \\ 1 - \frac{1}{h^*+1} & (\rho_1 = 1) \end{cases} \qquad (0 \leq n \leq h^*) \qquad (4.15)$$

4.2.4 Parámetros de desempeño

Se reemplazan los parámetros para el sistema de intercepción y evapotranspiración, M/M/1/h* en las ecuaciones importantes de la forma general, punto 3.5.

De la ecuación (3.37) se obtiene el valor esperado de agua interceptada hi:

$$hi = E\left[N_q\right] = \begin{cases} \frac{\rho_1^2\cdot\left[1-\rho_1^{h^*}-h^*\cdot(1-\rho_1)\cdot\rho_1^{h^*-1}\right]}{\left(1-\rho_1^{h^*+1}\right)\cdot(1-\rho_1)} & (\rho_1 \neq 1) \\ \frac{h^*\cdot(h^*-1)}{2\cdot(h^*+1)} & (\rho_1 = 1) \end{cases} \tag{4.16}$$

De la ecuación (3.39) se obtiene el valor esperado de agua en todo el sistema L_1, es decir, agua interceptada (cola) más agua evaporándose (en servicio):

$$L_1 = hi + \rho_1 \cdot (1 - p1_{h^*}) \tag{4.17}$$

De la ecuación (3.42) se obtiene el valor esperado del tiempo de duración de todo el proceso W_1, es decir, el tiempo que le toma al agua en llegar, ser interceptada y evaporarse:

$$W_1 = E[T] = \frac{L_1}{\lambda_0\cdot(1-p1_{h^*})} \tag{4.18}$$

De la ecuación (3.43) se obtiene el valor esperado del tiempo que permanece el agua en estado interceptado antes de evaporarse W_{q1}.

$$W_{q1} = E\left[T_q\right] = W_1 - \frac{1}{\mu_1} \tag{4.19}$$

4.2.5 Distribución acumulada del tiempo de espera $W_{q1}(t)$

Esta fue calculada para la forma general en el punto 3.5. A continuación se reemplazan los parámetros para el sistema de intercepción y evaporación, M/M/1/h*. Siendo $W_{q1}(t)$ la probabilidad de que el tiempo de duración del agua en estado de intercepción, sea menor o igual a t, de acuerdo a la ecuación general (3.47) se tiene:

$$W_{q1}(t) = 1 - \sum_{n=1}^{h^*-1} q1_n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\mu_1 \cdot t)^i \cdot e^{-\mu_1 \cdot t}}{i!} \tag{4.20}$$

En la Tabla 4-1 se muestran los resultados útiles para el presente trabajo que se obtienen del sistema de intercepción y evapotranspiración M/M/1/h*.

Tabla 4-1: Sistema de intercepción y evapotranspiración - M/M/1/h*.

Parámetro	**Fórmula**	**Descripción**
ρ_1	$\rho_1 = \dfrac{\lambda_0}{\mu_1}$	Intensidad de tráfico. Razón entre la tasa de llegada de la lluvia y la atención de la evapotranspiración.
$p1_n$	$p1_n = \begin{cases} \dfrac{(1-\rho_1)\cdot\rho_1^n}{1-\rho_1^{h^*+1}} & (\rho_1 \neq 1) \\ \dfrac{1}{h^*+1} & (\rho_1 = 1) \end{cases}$	Para (0 ≤ n ≤ h*). Fracción de tiempo en el cual hay “n” mm de agua interceptada por la vegetación y evaporándose a través de la misma.
$p1_{libre}$	$p1_{libre} = \begin{cases} 1 - \dfrac{(1-\rho_1)\cdot\rho_1^{h^*}}{1-\rho_1^{h^*+1}} & (\rho_1 \neq 1) \\ 1 - \dfrac{1}{h^*+1} & (\rho_1 = 1) \end{cases}$	Fracción del tiempo durante el cual la intercepción no alcanza su máximo valor h*.
$q1_n$	$q1_n = \dfrac{p1_n}{1-p1_{h^*}}$	Para (n ≤ h* – 1). Probabilidad de que al llegar el agua encuentre “n” mm de agua interceptada por la vegetación.
λ_2	$\lambda_2 = \begin{cases} \lambda_0 \cdot \left(1 - \dfrac{(1-\rho_1)\cdot\rho_1^{h^*}}{1-\rho_1^{h^*+1}}\right) & (\rho_1 \neq 1) \\ \lambda_0 \cdot \left(1 - \dfrac{1}{h^*+1}\right) & (\rho_1 = 1) \end{cases}$	T asa del agua que se evapora después de pasar por el proceso de intercepción y evapotranspiración.
λ_1	$\lambda_1 = \begin{cases} \lambda_0 \cdot \left(\dfrac{(1-\rho_1)\cdot\rho_1^{h^*}}{1-\rho_1^{h^*+1}}\right) & (\rho_1 \neq 1) \\ \lambda_0 \cdot \left(\dfrac{1}{h^*+1}\right) & (\rho_1 = 1) \end{cases}$	Tasa del agua que es rechazada por el sistema y que continuará su camino hasta la superficie del suelo, sin ser interceptada.

Tabla 4-1: (Continuación)

hi	$\begin{cases} \dfrac{\rho_1^2 \cdot \left[1 - \rho_1^{h^*} - h^* \cdot (1-\rho_1) \cdot \rho_1^{h^*-1}\right]}{\left(1-\rho_1^{h^*+1}\right) \cdot (1-\rho_1)} & (\rho_1 \neq 1) \\ \dfrac{h^* \cdot (h^*-1)}{2 \cdot (h^*+1)} & (\rho_1 = 1) \end{cases}$	Valor esperado de agua interceptada.
L_1	$L_1 = hi + \rho_1 \cdot (1 - p_{h^*})$	Valor esperado de agua interceptada (cola) más agua evaporándose (en servicio).
W_1	$W_1 = E[T] = \dfrac{L_1}{\lambda_0 \cdot (1 - p_{h^*})}$	Valor esperado del tiempo que le toma al agua en llegar, ser interceptada y evaporarse.
W_{q1}	$W_{q1} = E\left[T_q\right] = W_1 - \dfrac{1}{\mu_1}$	Valor esperado del tiempo que permanece el agua en estado interceptado antes de evaporarse.
$W_{q1}(t)$	$W_{q1}(t) = 1 - \sum_{n=1}^{h^*-1} q1_n \sum_{i=0}^{n-1} \dfrac{(\mu_1 \cdot t)^i \cdot e^{-\mu_1 \cdot t}}{i!}$	Probabilidad de que el tiempo de duración del agua en estado de intercepción, sea menor o igual a t.

4.3 Infiltración y almacenamiento superficial – Sistema M/M/1/e*

En un evento de lluvia, una vez ocurrido el fenómeno de precipitación, y que una parte del agua haya sido retenida por la vegetación y después se haya evaporado; el resto, que es rechazado por la intercepción alcanza la superficie del terreno. Esta agua pasa por un nuevo proceso hidrológico. Del agua que alcanza la superficie del terreno, una parte se infiltra a cierta tasa, llegando a penetrar la superficie del terreno a través de los poros y fisuras del suelo o las rocas, rellenando de agua el medio poroso. Cuando la tasa de llegada del agua es superior a la tasa de infiltración, se produce un almacenamiento superficial quedando parte del agua retenida sobre el suelo, charcas, estanques, lagos y embalses. Esta agua retenida, inicialmente ni se infiltra ni genera escurrimiento. Y finalmente, luego que las depresiones se han llenado se inicia el escurrimiento superficial, es decir parte del agua circula sobre la superficie y se concentra en pequeños cursos de agua, que luego se reúnen en arroyos y más tarde desembocan en los ríos (escurrimiento superficial).

Recordando el sistema M/M/1/K, es un sistema de un servidor, cuya atención sigue una distribución exponencial; y para el que los clientes a ser atendidos, llegan también de acuerdo a una distribución exponencial. El sistema tiene una restricción que está determinada por la capacidad máxima del sistema. En este sistema, el cliente será el agua de lluvia que llega al suelo representada por las unidades equivalentes ue; el servidor será el fenómeno de la infiltración, y la restricción representa la capacidad máxima de almacenamiento superficial.

Los fenómenos de infiltración y almacenamiento superficial, forman parte de los subsistemas de agua subsuperficial y superficial respectivamente (Chow et. al, 2008) y pueden ser representados por un sistema M/M/1/K de teoría de colas. Este es el segundo sistema del modelo estocástico de lluvia-escorrentía. En la Figura 4-6 se muestra el esquema del sistema estocástico que representa a los procesos hidrológicos mencionados.

Después de abandonar el primer sistema; como se puede ver en la Figura 4-6, las ue´s (P_1) llegan al sistema con una tasa de llegada exponencial λ_1, y son “atendidas” por el proceso de infiltración (f) a una tasa μ_2. Dependiendo de la capacidad del suelo se forma una cola, es decir, habrá almacenamiento superficial (ei). Al alcanzar el máximo valor de almacenamiento superficial del sistema $K = e^*$, el agua es rechazada por el sistema (P_4) a una tasa λ_4, y sigue su camino como escurrimiento superficial. El agua atendida o encharcada, es el agua infiltrada (P_3) la cual, a una tasa λ_3 continúa su camino hacia el almacenamiento en el suelo.

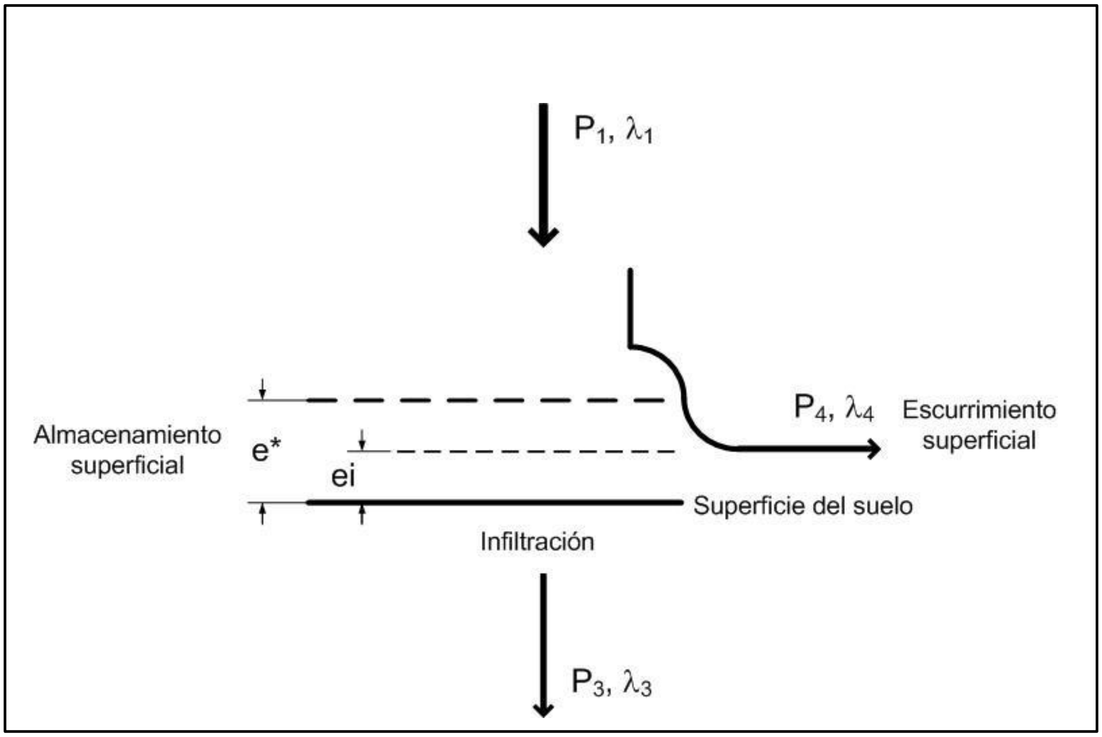

Figura 4-6: Infiltración y almacenamiento superficial – Sistema M/M/1/e*

Nuevamente, la forma en que trabaja el modelo es igual a la explicada mediante las cinco gráficas mostradas en la Figura 3-4, en primer lugar, el agua que llega del primer sistema P_1, llega con una tasa λ_1 en pulsos de tamaño ue; a continuación el proceso de infiltración f, "atiende" a los pulsos a una tasa de servicio μ_2; en la tercera gráfica se muestra las ue que entran en servicio y que quedan como almacenamiento superficial, además de su variación de acuerdo a las tasas de llegada y de servicio de las mismas, una vez que se llega al máximo de la capacidad de almacenamiento superficial e*, el resto de las ue son rechazadas; en la cuarta gráfica se muestran las ue que son rechazadas por el sistema (P_4) a una tasa λ_4, estas ue forman el flujo superficial; finalmente, la última gráfica muestra las ue infiltradas (P_3) que dejan el sistema después de ser atendidas a una tasa λ_3, son estas ue las que infiltran hasta el siguiente sistema, almacenamiento en el suelo.

Con la aplicación del modelo estocástico de teoría de colas para un sistema M/M/1/K, se calculan las tasas de salida λ_3 y λ_4. Se calcula también la fracción de tiempo en el cual hay "n" mm de agua infiltrándose y encharcándose $p2_n$ ($n \geq 0$); y las probabilidades de que al llegar el agua encuentre "n" mm de agua encharcada, $q2_n$ ($n \geq 0$). Finalmente se calculan los parámetros de desempeño, el valor esperado de agua en el sistema, es decir, el agua encharcada (cola) más el agua infiltrándose (en servicio) L_2, el valor esperado de agua encharcada ei, el valor esperado del tiempo de duración de todo el proceso, es decir, el tiempo que le toma al agua en encharcarse y después infiltrarse W_2, y el valor esperado del tiempo de duración del agua encharcada, es decir, como almacenamiento superficial W_{q2}.

4.3.1 Parámetros de entrada y atención del sistema de espera

Después del proceso seguido en el primer sistema (intercepción y evapotranspiración), y después de abandonar el mismo, una parte de las ue´s se dirige a la superficie del suelo su llegada sigue una distribución exponencial, con tasa de llegada λ_1;

$$a(t) = \lambda_1 \cdot e^{-\lambda_1 \cdot t} \tag{4.21}$$

Donde,

$a(t)$ = Distribución de los tiempos entre llegadas de las unidades equivalentes.

λ_1 = Tasa de llegada de las ue´s provenientes del primer sistema de intercepción y evapotranspiración (1/hr).

Se asume que el proceso de atención de la infiltración sigue una distribución exponencial, y así volver a emplear de la característica "sin memoria" del proceso Poisson. Asumiendo también que el valor de infiltración es aleatorio, cuyo grado de dispersión alrededor del valor de ocurrencia conocido podría ser predicho por el proceso Poisson.

Entonces el tiempo entre estas ocurrencias, agua infiltrada como ue´s consecutivas, se distribuye exponencialmente:

$$b(t) = \mu_2 \cdot e^{-\mu_2 \cdot t} \qquad (4.22)$$

Donde,

$b(t)$ = Distribución de los tiempos de servicio del proceso de infiltración

μ_2 = Tasa de servicio del proceso de infiltración (1/hr).

La tasa de servicio se calcula a partir de un dato conocido de infiltración (f), de la siguiente manera:

$$\mu_2 = \frac{f}{V(ue)} \qquad (4.23)$$

Donde,

f = Valor conocido de infiltración (mm/hr).

V(ue) = Valor de una unidad equivalente de precipitación (mm).

Recordando siempre que el “peso” de cada ue es: V(ue) = 1 mm.

Además, la restricción K = e* sobre la capacidad sobre el suelo, es el máximo valor de almacenamiento superficial:

$$e^* = \frac{VE}{ue} \qquad I \geq 2 \cdot V(ue) \qquad (4.24)$$

Donde,

e* = Capacidad máxima de almacenamiento superficial, como altura de agua en ue.

VE = Altura máxima de agua encharcada (mm)

4.3.2 Parámetros $p2_n$ y $q2_n$, de salida y de desempeño

Estos parámetros, al igual que en el anterior sistema, tienen una interpretación física, donde $p2_n$, es la fracción de tiempo en el cual hay "n" ue´s involucradas en el sistema; y $q2_n$, es la probabilidad de que al llegar el agua encuentre "n" ue´s de agua encharcada; ambas para el sistema de infiltración y almacenamiento superficial ($p_n = p2_n$ y $q_n = q2_n$).

En el punto 3.5 ya se realizaron los cálculos de los parámetros para la forma general, por lo que a continuación se reemplazan los datos para el sistema de infiltración y almacenamiento superficial, M/M/1/e* y los resultados se presentan de manera resumida en la Tabla 4-2.

Tabla 4-2: Sistema de infiltración y escurrimiento superficial - M/M/1/e*.

Parámetro	Fórmula	Descripción
ρ_2	$\rho_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2}$	Intensidad de tráfico. Razón entre la tasa de llegada de agua al suelo y la atención por infiltración.
$p2_n$	$p2_n = \begin{cases} \frac{(1-\rho_2)\cdot\rho_2^n}{1-\rho_2^{e^*+1}} & (\rho_2 \neq 1) \\ \frac{1}{e^*+1} & (\rho_2 = 1) \end{cases}$	Para ($0 \leq n \leq e^*$). Fracción de tiempo en el cual hay "n" mm de agua encharcada e infiltrándose en el suelo
$p2_{libre}$	$p2_{libre} = \begin{cases} 1 - \frac{(1-\rho_2)\cdot\rho_2^{e^*}}{1-\rho_2^{e^*+1}} & (\rho_2 \neq 1) \\ 1 - \frac{1}{e^*+1} & (\rho_2 = 1) \end{cases}$	Fracción del tiempo durante el cual el almacenamiento superficial no alcanza su máximo valor e*
$q2_n$	$q2_n = \frac{p2_n}{1 - p2_{e^*}}$	Para ($n \leq e^* - 1$). Probabilidad de que al llegar el agua encuentre "n" mm de agua encharcada.

Tabla 4-2: (Continuación)

λ_3	$\lambda_3 = \begin{cases} \lambda_0 \cdot \left(\frac{(1-\rho_1)\cdot\rho_1^{h^*}}{1-\rho_1^{h^*+1}}\right)\cdot\left(1-\frac{(1-\rho_2)\cdot\rho_2^{e^*}}{1-\rho_2^{e^*+1}}\right) & (\rho_1,\rho_2 \neq 1) \\ \lambda_0 \cdot \left(\frac{1}{h^*+1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{e^*+1}\right) & (\rho_1,\rho_2 = 1) \end{cases}$ Tasa del agua que se infiltra, y que continúa su camino al siguiente sistema en el suelo.	
λ_4	$\lambda_4 = \begin{cases} \lambda_0 \cdot \left(\frac{(1-\rho_1)\cdot\rho_1^{h^*}}{1-\rho_1^{h^*+1}}\right)\cdot\left(\frac{(1-\rho_2)\cdot\rho_2^{e^*}}{1-\rho_2^{e^*+1}}\right) & (\rho_1,\rho_2 \neq 1) \\ \lambda_0 \cdot \left(\frac{1}{h^*+1}\right)\cdot\left(\frac{1}{e^*+1}\right) & (\rho_1,\rho_2 = 1) \end{cases}$ Tasa del agua que es rechazada por el sistema y que continuará su camino como escurrimiento superficial.	
ei	$\begin{cases} \frac{\rho_2^2\cdot\left[1-\rho_2^{e^*}-e^*\cdot(1-\rho_2)\cdot\rho_2^{e^*-1}\right]}{\left(1-\rho_2^{e^*+1}\right)\cdot(1-\rho_2)} & (\rho_2 \neq 1) \\ \frac{e^*\cdot(e^*-1)}{2\cdot(e^*+1)} & (\rho_2 = 1) \end{cases}$	Valor esperado de agua en la superficie.
L_2	$L_2 = ei + \rho_2\cdot(1-p2_{e^*})$	Valor esperado de agua encharcada (cola) más agua infiltrándose (en servicio).
W_2	$W_2 = E[T] = \frac{L_2}{\lambda_1\cdot(1-p2_{e^*})}$	Valor esperado del tiempo que le toma al agua en llegar, encharcarse e infiltrarse.
W_{q2}	$W_{q2} = E\left[T_q\right] = W_2 - \frac{1}{\mu_2}$	Valor esperado del tiempo que permanece el agua encharcada o en la superficie del suelo.
$W_{q2}(t)$	$W_{q2}(t) = 1 - \sum_{n=1}^{e^*-1} q2_n \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(\mu_2\cdot t)^i\cdot e^{-\mu_2\cdot t}}{i!}$	Probabilidad de que el tiempo de duración del agua en estado encharcado, sea menor o igual a t.

4.4 Almacenamiento en el suelo y evapotranspiración – Sistema M/M/1/K

Después de ocurrido el fenómeno de la precipitación, la parte del agua de lluvia que logra llegar a la superficie, puede convertirse en flujo superficial o infiltrarse en el suelo y moverse a través de él como flujo no saturado. El agua infiltrada puede percolar profundamente para recargar el agua subterránea o se desliza hacia ríos para formar la escorrentía superficial. Generalmente en un suelo se consideran dos dominios del agua: la zona no saturada, que todavía tiene algunos de sus poros ocupados por aire y donde se acumula el agua antes de evaporarse o percolar; y la zona saturada, que está a mayor profundidad y cuyo medio poroso está lleno de agua. Estas dos zonas están separadas teóricamente por el nivel freático, el cual es la superficie libre de la zona saturada, donde el agua se encuentra a presión atmosférica. Es en la zona no saturada donde ocurren los procesos que se analizan a continuación. Luego de la infiltración el agua en el suelo continúa moviéndose en función de las propiedades del suelo, siendo las más importantes, la porosidad (η) y la conductividad hidráulica (C), la cual representa la mayor o menor facilidad con que el medio deja pasar el agua a través de él por unidad de área transversal en la dirección del flujo. Al mismo tiempo al infiltrarse el agua, va variando el contenido de humedad (θ) de la misma. Cuando el contenido de humedad iguala a la porosidad, el suelo se satura temporalmente y el agua emerge para convertirse en flujo superficial. Parte del agua que satura temporalmente el medio se evapora a medida que el suelo se seca y el resto percola para recargar la zona saturada y así contribuir al flujo subterráneo.

Lo procesos analizados en el presente sistema, forman parte del subsistema de agua subsuperficial (Chow et. al, 2008) y pueden ser representados por dos sistemas M/M/1/K de teoría de colas. El cliente será el agua infiltrada representada por las unidades equivalentes ue; los servidores serán la conductividad hidráulica primero y la evaporación del suelo después, y las restricciones serán la porosidad y la evaporación potencial respectivamente. Este es el tercer sistema del modelo estocástico de lluvia-escorrentía. En la Figura 4-7 se muestra el esquema del sistema estocástico que representa a los procesos hidrológicos mencionados.

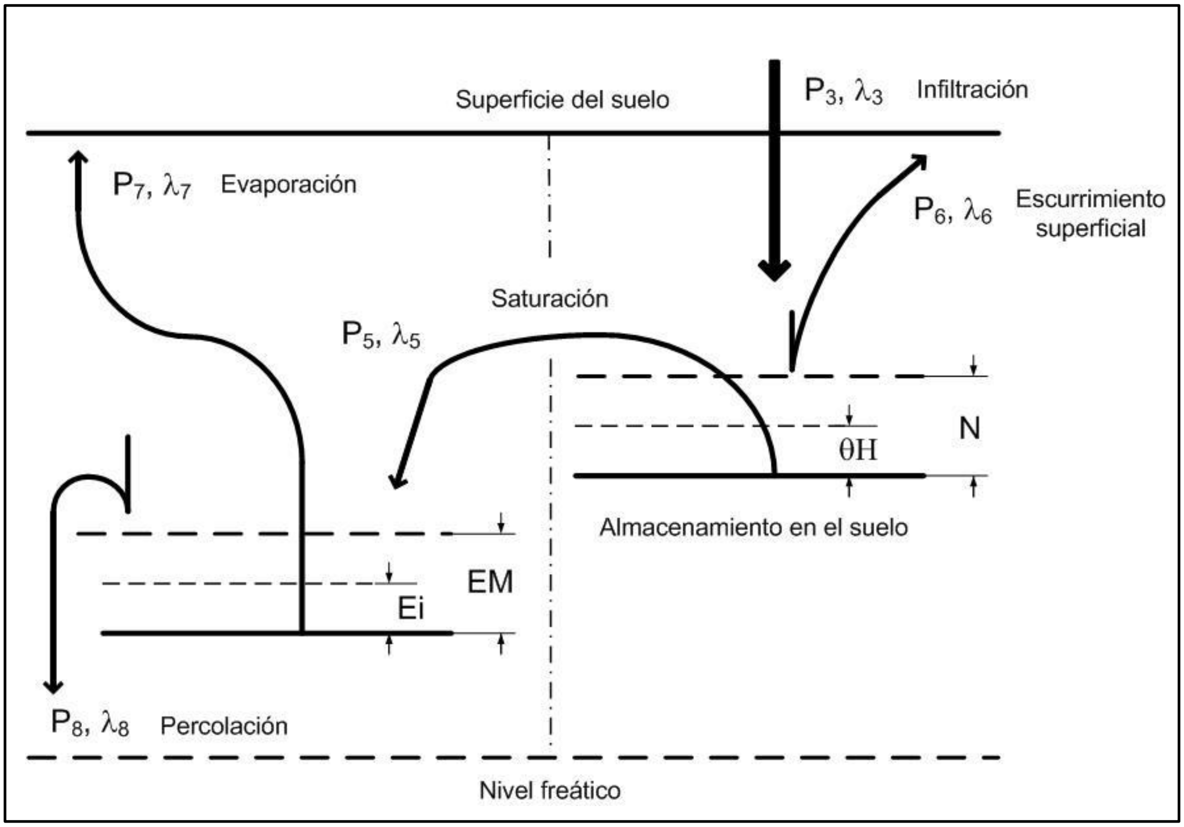

Figura 4-7: Almacenamiento en el suelo – Sistemas M/M/1/N,EM

Después de abandonar el segundo sistema, como se puede ver en la Figura 4-7, las ue´s (P_3) llegan a este con una tasa de llegada exponencial λ_3, estas serán "atendidas" por la conductividad hidráulica (C) a una tasa μ_3, se formará una cola, es decir, aumentará el contenido de humedad θH en el suelo; al alcanzar el máximo valor de almacenamiento del suelo del sistema K = N, el agua será rechazada por el sistema (P_6) a una tasa λ_6, y emergerá como flujo superficial. El agua atendida, será el agua almacenada en el suelo (P_5) la cual, a una tasa λ_5 llena los poros vacíos de la zona no saturada, saturándola temporalmente. Estas ue´s (P_5) serán "atendidas" en un nuevo sistema por la evaporación de agua desde el suelo (EV) a una tasa μ_4, se formará una cola, es decir, agua dispuesta a evaporarse (Ei); al alcanzar el valor máximo K = EM, el agua será rechazada por el sistema (P_8) a una tasa λ_8, y percolará para contribuir con el flujo subterráneo. El agua atendida (P_7) se evapora del suelo a una tasa λ_7.

La forma en que trabaja el modelo se explica a partir de las Figuras 4-8 y 4-9, mediante las diez gráficas mostradas; en la Figura 4-8, el agua que llega del segundo sistema por el proceso de infiltración, P_3, llega con una tasa λ_3 en pulsos de tamaño ue; a continuación la conductividad hidráulica C, "atiende" a los pulsos a una tasa de servicio μ_3; el agua va rellenando los poros del suelo, en la tercera gráfica se muestra las ue que entran en servicio y que quedan como contenido de humedad por el espesor del estrato θH, además de su variación de acuerdo a las tasas de llegada y de servicio de las mismas; una vez que se llega al máximo del contenido de humedad N, el resto de las ue son rechazadas; en la cuarta gráfica se muestran las ue que son rechazadas por el sistema (P_6) a una tasa λ_6. Estas ue emergen como flujo superficial; finalmente, la última gráfica muestra las ue que ocupan los poros de la zona saturada (P_5) a una tasa λ_5. Son estas ue las que serán atendidas por la evapotranspiración en el suelo y la percolación profunda.

En la Figura 4-9, el agua que llena los poros de la zona saturada P_3, llega con una tasa λ_5; a continuación la evapotranspiración de agua en el suelo EV, "atiende" a los pulsos a una tasa de servicio μ_4; en la tercera gráfica se muestra las ue que entran en servicio dispuestas a evaporarse; una vez que se llega al valor máximo de evapotranspiración EM, el resto de las ue son rechazadas; en la cuarta gráfica se muestran las ue que son rechazadas por el sistema (P_8) a una tasa λ_8. Estas ue percolan para recargar el flujo subterráneo; finalmente, la última gráfica muestra las ue que se evaporan (P_7) a una tasa λ_7.

Para efectos de claridad, en las primeras gráficas de las Figuras 4-8 y 4-9, los pulsos que llegan a ser atendidos están diferenciados por un punto.

Con la aplicación del modelo estocástico de teoría de colas para un sistema M/M/1/K, se calculan las tasas de salida λ_5, λ_6, λ_7 y λ_8. Se calcula también la fracción de tiempo en el cual hay "n" mm de agua involucrada en los sistemas de almacenamiento y evapotranspiración $P3_n$ y $p4_n$ ($n \geq 0$) respectivamente; e igualmente las probabilidades de que al llegar el agua encuentre "n" mm de agua, $q3_n$ y $q4_n$ ($n \geq 0$). Y se calculan los parámetros de desempeño en ambos casos, el valor esperado de agua en el sistema L_3 y L_4, el valor esperado de contenido de humedad en el largo plazo θ, el valor esperado del agua que se evapora Ei, el valor esperado del tiempo de duración de todo el proceso $W_3 + W_4$; el valor esperado del tiempo de duración del agua como contenido de humedad en la zona no saturada W_{q3}, y el valor esperado del tiempo de duración del agua en el suelo antes de evaporarse completamente W_{q4}.

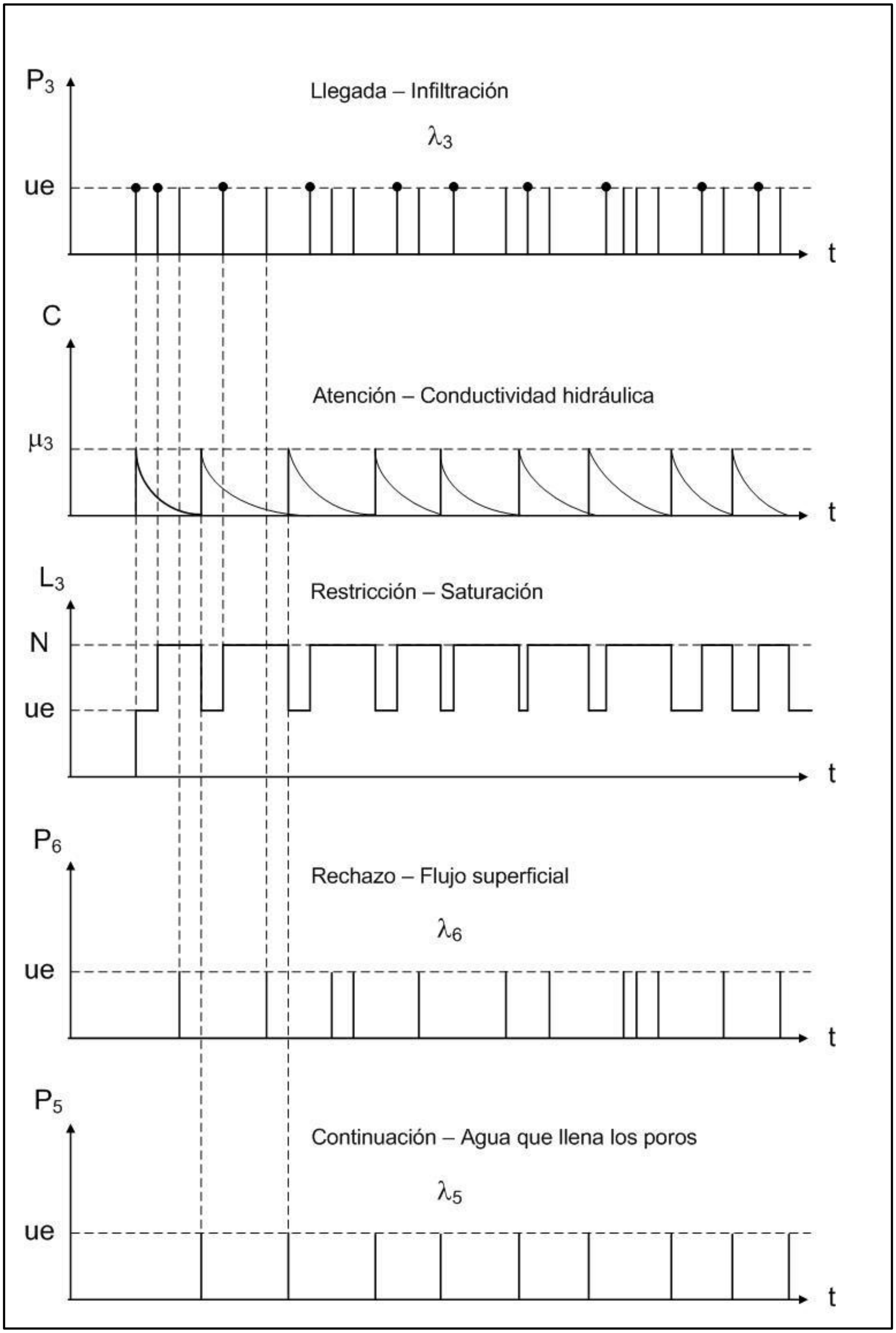

Figura 4-8: Entradas y salidas. Proceso de almacenamiento en el suelo.

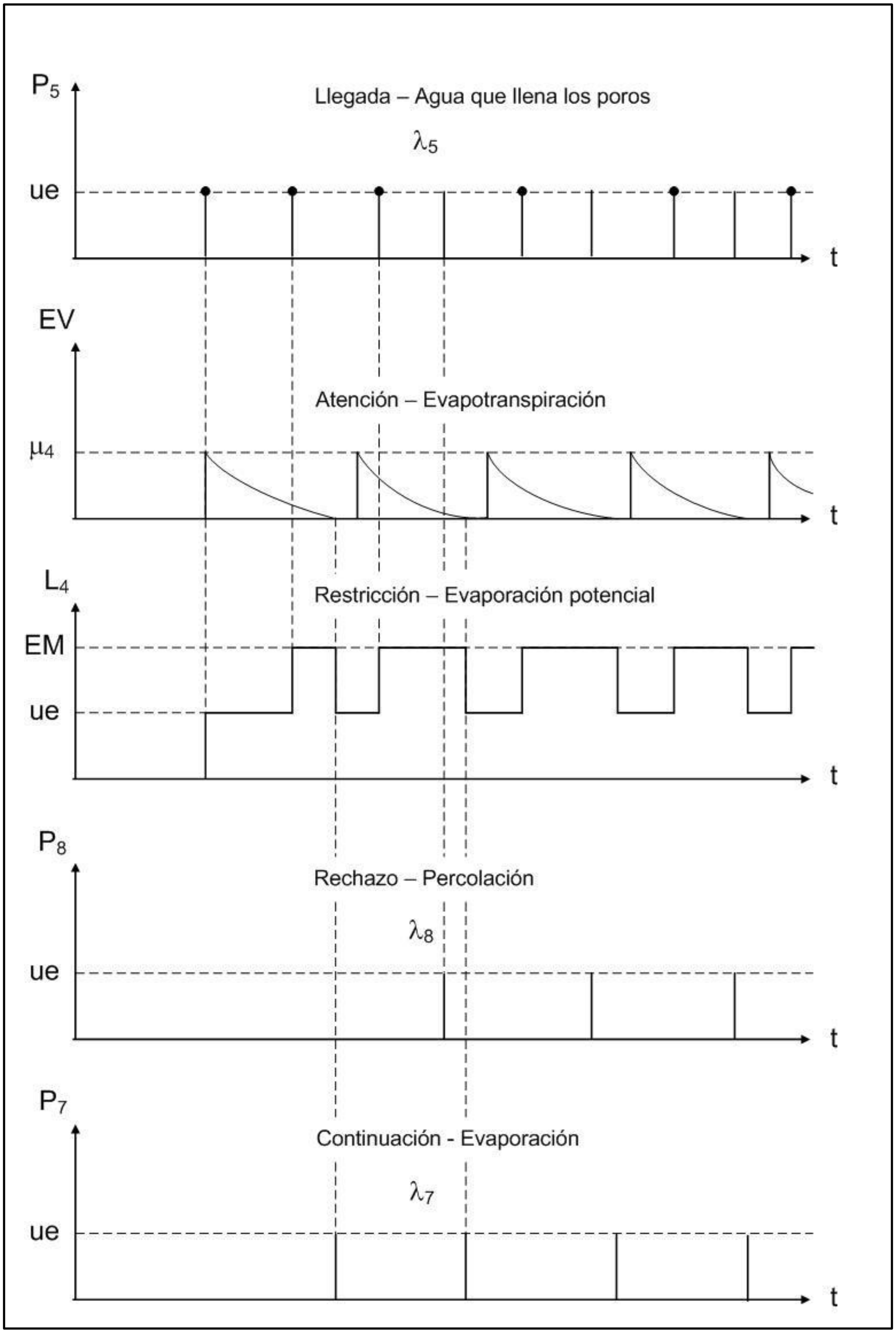

Figura 4-9: Entradas y salidas. Proceso de evaporación del agua en el suelo.

4.4.1 Parámetros de entrada y atención. Almacenamiento en el suelo.

Después de haber abandonado el segundo sistema (infiltración y almacenamiento superficial), una parte de las ue´s se dirige al presente sistema. Su llegada al interior del suelo por infiltración sigue una distribución exponencial, con tasa de llegada λ_3, de manera similar a los casos anteriores:

$$a(t) = \lambda_3 \cdot e^{-\lambda_3 \cdot t} \tag{4.25}$$

Donde,

$a(t)$ = Distribución de los tiempos entre llegadas de las unidades equivalentes.

λ_3 = Tasa de llegada de las ue´s provenientes del segundo sistema por infiltración (1/hr).

Se asume que el proceso de atención de la conductividad hidráulica es aleatorio, y el grado de dispersión alrededor del valor de ocurrencia conocido podría ser predicho por el proceso Poisson. Entonces el tiempo entre estas ocurrencias se distribuiría exponencialmente:

$$b(t) = \mu_3 \cdot e^{-\mu_3 \cdot t} \tag{4.26}$$

Donde,

$b(t)$ = Distribución de los tiempos de servicio del proceso de incorporación del agua en el suelo.

μ_3 = Tasa de servicio del proceso de incorporación del agua en la zona no saturada del suelo (1/hr).

Como se sabe, el "peso" de cada ue es: V(ue) = 1 mm.

La tasa de servicio se calcula a partir de un dato conocido de conductividad hidráulica del suelo (C) de la cuenca analizada, de la siguiente manera:

$$\mu_3 = \frac{C}{V(ue)} \tag{4.27}$$

Donde,
C = Valor conocido de conductividad hidráulica del suelo (mm/hr).
V(ue) = Valor de una unidad equivalente de precipitación (mm).

Además, la restricción K = N sobre la capacidad del sistema, es el máximo valor de contenido de humedad en un estrato de espesor L del suelo:

$$N = \eta \cdot L \tag{4.28}$$

Donde,
N = Capacidad máxima de contenido de humedad en el suelo.
η = Porosidad (mm^3/mm^3).
L = Volumen de sección unitaria y espesor de estrato L (mm).

Esta restricción parte del razonamiento que la porosidad es la relación de volumen de vacíos y el volumen de sólidos, la multiplicar esta relación por el espesor del estrato, estamos diciendo que el contenido de agua máximo para un suelo de superficie unitaria y largo L, es $\eta \cdot L$.

4.4.2 Parámetros $p3_n$ y $q3_n$, de salida y desempeño. Almacenamiento en el suelo

Estos parámetros, al igual que en los sistemas pasados, tienen una interpretación física, donde $p3_n$, es la fracción de tiempo en el cual hay "n" ue´s involucradas en un estrato de espesor L; y $q3_n$, es la probabilidad de que al llegar el agua encuentre "n" ue´s de agua almacenándose en un suelo de espesor L; ambas para el proceso de almacenamiento del último sistema ($p_n = p3_n$ y $q_n = q3_n$).

Dado que el sistema de colas presente es igual al de la forma general mostrado en el punto 3.5 (M/M/1/K), para estimarlo se reemplazan los valores propios del proceso de almacenamiento en el suelo, en este caso para el sistema M/M/1/e*.

La definición de tasas de salida para el caso general de un sistema M/M/1/K, fueron calculadas en el punto 3.5; de manera que para su estimación se ajustan los valores de los parámetros al sistema de almacenamiento en el suelo, M/M/1/N

Similarmente se calculan los parámetros de desempeño, θH, L_3, W_3 y W_{q3}.

4.4.3 Parámetros de entrada y atención. Evapotranspiración

Después del proceso de almacenamiento en el suelo, empieza el proceso de evaporación del agua del suelo, su llegada a este sistema sigue una distribución exponencial, con tasa de llegada λ_5, similar a los casos anteriores

$$a(t) = \lambda_5 \cdot e^{-\lambda_5 \cdot t} \tag{4.29}$$

Al igual que en el proceso de almacenamiento en el suelo, se asume que el proceso de atención de la evapotranspiración sigue también una distribución exponencial:

$$b(t) = \mu_4 \cdot e^{-\mu_4 \cdot t} \tag{4.30}$$

La tasa de servicio se calcula a partir de un dato conocido de evapotranspiración (EV), de la siguiente manera:

$$\mu_4 = \frac{EV}{V(ue)} \tag{4.31}$$

Donde,

EV = Valor conocido de evapotranspiración (mm/hr).

V(ue) = Valor de una unidad equivalente de precipitación (mm).

Como se sabe, el "peso" de cada ue es: V(ue) = 1 mm.

Además, la restricción K = EM sobre la capacidad del sistema, es el máximo valor de evapotranspiración o evapotranspiración potencial:

$$EM = \frac{EP}{ue} \tag{4.32}$$

Donde,

EM = Capacidad máxima de evaporación

EP = Evaporación potencial (mm)

4.4.4 Parámetros $p4_n$ y $q4_n$, de salida y desempeño. Evapotranspiración

La interpretación que se hace de estos parámetros es la siguiente: $p4_n$, es la fracción de tiempo en el cual hay "n" ue´s involucradas en el sistema; y $q4_n$, es la probabilidad de que al llegar el agua encuentre "n" ue´s evaporándose del suelo; ambas para el proceso de evaporación del último sistema ($p_n = p4_n$ y $q_n = q4_n$).

Dado que el sistema de colas presente es igual al anterior (M/M/1/K), para estimarlo se reemplazaran los valores propios del proceso de almacenamiento en el suelo, en las ecuaciones calculadas de forma general en el punto 3.5, en este caso para el sistema M/M/1/EM.

La definición de tasas de salida para el caso general de un sistema M/M/1/K, fueron calculadas en el punto 3.5; a continuación ajustamos los valores de los parámetros al sistema de evaporación del agua del suelo, M/M/1/EM.

Similarmente se calculan los parámetros de desempeño, Ei, L_4, W_4 y W_{q4}.

Finalmente, el valor esperado del tiempo que permanece el agua en la zona no saturada del suelo será:

$$W_{NS} = W_3 + W_4 \tag{4.33}$$

En las siguientes tablas se muestran los resultados útiles para el presente trabajo que se obtienen del sistema de almacenamiento en el suelo y evapotranspiración. Tabla 4-3 para M/M/1/N y Tabla 4-4 para M/M/1/EM.

Tabla 4-3: Sistema de almacenamiento en el suelo y evapotranspiración - M/M/1/N. Almacenamiento en el suelo.

Parámetro	**Fórmula**	**Descripción**
ρ_3	$\rho_3 = \dfrac{\lambda_3}{\mu_3}$	Intensidad de tráfico.
$p3_n$	$p3_n = \begin{cases} \dfrac{(1-\rho_3)\cdot\rho_3^n}{1-\rho_3^{N+1}} & (\rho_3 \neq 1) \\ \dfrac{1}{N+1} & (\rho_3 = 1) \end{cases}$	Para $(0 \leq n \leq N)$ Fracción de tiempo en el cual hay “n” mm de agua almacenándose en el suelo, evaporándose y/o percolando
$p3_{libre}$	$p3_{libre} = \begin{cases} 1-\dfrac{(1-\rho_3)\cdot\rho_3^N}{1-\rho_3^{N+1}} & (\rho_3 \neq 1) \\ 1-\dfrac{1}{N+1} & (\rho_3 = 1) \end{cases}$	Fracción del tiempo durante el cual el almacenamiento en el suelo no alcanza su máximo valor N.
$q3_n$	$q3_n = \dfrac{p3_n}{1-p3_N}$	Para $(n \leq N-1)$. Probabilidad de que al llegar el agua encuentre “n” mm de agua almacenándose en el suelo.
λ_5	$\lambda_5 = \begin{cases} \lambda_0\cdot\left(\dfrac{(1-\rho_1)\cdot\rho_1^{h^*}}{1-\rho_1^{h^*+1}}\right)\cdot\left(1-\dfrac{(1-\rho_2)\cdot\rho_2^{e^*}}{1-\rho_2^{e^*+1}}\right)\cdot\left(1-\dfrac{(1-\rho_3)\cdot\rho_3^N}{1-\rho_3^{N+1}}\right) & (\rho_i \neq 1) \\ \lambda_0\cdot\left(\dfrac{1}{h^*+1}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{e^*+1}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{N+1}\right) & (\rho_i = 1) \end{cases}$ i = 1, 2, 3, 4. Tasa del agua que se almacena en el suelo.	
λ_6	$\lambda_6 = \begin{cases} \lambda_0\cdot\left(\dfrac{(1-\rho_1)\cdot\rho_1^{h^*}}{1-\rho_1^{h^*+1}}\right)\cdot\left(1-\dfrac{(1-\rho_2)\cdot\rho_2^{e^*}}{1-\rho_2^{e^*+1}}\right)\cdot\left(\dfrac{(1-\rho_3)\cdot\rho_3^N}{1-\rho_3^{N+1}}\right) & (\rho_i \neq 1) \\ \lambda_0\cdot\left(\dfrac{1}{h^*+1}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{e^*+1}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{N+1}\right) & (\rho_i = 1) \end{cases}$ i = 1, 2, 3, 4. Tasa del agua que es rechazada por el sistema y que emergerá como escurrimiento superficial.	
θH	$\begin{cases} \dfrac{\rho_3^2\cdot[1-\rho_3^N - N\cdot(1-\rho_3)\cdot\rho_3^{N-1}]}{(1-\rho_3^{N+1})\cdot(1-\rho_3)} & (\rho_3 \neq 1) \\ \dfrac{N\cdot(N-1)}{2\cdot(N+1)} & (\rho_3 = 1) \end{cases}$	Valor esperado de agua almacenada en el suelo por espesor de estrato θH.

Tabla 4-3: (Continuación).

L_3	$L_3 = \theta H + \rho_3 \cdot (1 - p_N)$	Valor esperado de agua en la zona no saturada (cola) más agua que se evapora y/o percola (en servicio):
W_3	$W_3 = E[T] = \dfrac{L_3}{\lambda_3 \cdot (1 - p_N)}$	Valor esperado del tiempo que le toma al agua en llegar, ocupar la zona no saturada y evaporarse y/o percolar.
W_{q3}	$W_{q3} = E[T_q] = W_3 - \dfrac{1}{\mu_3}$	Valor esperado del tiempo que permanece el agua almacenándose en el suelo.
$W_{q3}(t)$	$W_{q3}(t) = 1 - \sum_{n=1}^{N-1} q3_n \sum_{i=0}^{n-1} \dfrac{(\mu_3 \cdot t)^i \cdot e^{-\mu_3 \cdot t}}{i!}$	Probabilidad de que el tiempo de duración del agua en estado almacenado en la zona no saturada del suelo, sea menor o igual a t

Tabla 4-4: Sistema de almacenamiento en el suelo y evapotranspiración - M/M/1/EM. Evapotranspiración.

<table>
<tr><th>Parámetro</th><th>Fórmula</th><th>Descripción</th></tr>
<tr><td>ρ_4</td><td>$$\rho_4 = \frac{\lambda_5}{\mu_4}$$</td><td>Intensidad de tráfico.</td></tr>
<tr><td>$p4_n$</td><td>$$p4_n = \begin{cases} \dfrac{(1-\rho_4)\cdot\rho_4^n}{1-\rho_4^{EM+1}} & (\rho_4 \neq 1) \\ \dfrac{1}{EM+1} & (\rho_4 = 1) \end{cases}$$</td><td>Para (0 ≤ n ≤ EM). Fracción de tiempo en el cual hay “n” mm de agua evaporándose y percolando.</td></tr>
<tr><td>$p4_{libre}$</td><td>$$p4_{libre} = \begin{cases} 1-\dfrac{(1-\rho_4)\cdot\rho_4^{EM}}{1-\rho_4^{EM+1}} & (\rho_4 \neq 1) \\ 1-\dfrac{1}{EM+1} & (\rho_4 = 1) \end{cases}$$</td><td>Fracción del tiempo durante el cual la evaporación del agua en el suelo no alcanza su máximo valor EM.</td></tr>
<tr><td>$q4_n$</td><td>$$q4_n = \frac{p4_n}{1-p4_{EM}}$$</td><td>Para (n ≤ EM – 1). Probabilidad de que al llegar el agua encuentre “n” mm de agua evaporándose en el suelo.</td></tr>
<tr><td colspan="3">$$\lambda_7 = \begin{cases} \lambda_0\cdot\left(\dfrac{(1-\rho_1)\cdot\rho_1^{h^*}}{1-\rho_1^{h^*+1}}\right)\cdot\left(1-\dfrac{(1-\rho_2)\cdot\rho_2^{e^*}}{1-\rho_2^{e^*+1}}\right)\cdot\left(1-\dfrac{(1-\rho_3)\cdot\rho_3^{N}}{1-\rho_3^{N+1}}\right)\cdot\left(1-\dfrac{(1-\rho_4)\cdot\rho_4^{EM}}{1-\rho_4^{EM+1}}\right) & (\rho_i \neq 1) \\ \lambda_0\cdot\left(\dfrac{1}{h^*+1}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{e^*+1}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{N+1}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{EM+1}\right) & (\rho_i = 1) \end{cases}$$
i = 1, 2, 3, 4.
Tasa del agua que se evapora en el suelo.</td></tr>
<tr><td colspan="3">$$\lambda_8 = \begin{cases} \lambda_0\cdot\left(\dfrac{(1-\rho_1)\cdot\rho_1^{h^*}}{1-\rho_1^{h^*+1}}\right)\cdot\left(1-\dfrac{(1-\rho_2)\cdot\rho_2^{e^*}}{1-\rho_2^{e^*+1}}\right)\cdot\left(1-\dfrac{(1-\rho_3)\cdot\rho_3^{N}}{1-\rho_3^{N+1}}\right)\cdot\left(\dfrac{(1-\rho_4)\cdot\rho_4^{EM}}{1-\rho_4^{EM+1}}\right) & (\rho_i \neq 1) \\ \lambda_0\cdot\left(\dfrac{1}{h^*+1}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{e^*+1}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{N+1}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{EM+1}\right) & (\rho_i = 1) \end{cases}$$
i = 1, 2, 3, 4.
Tasa del agua que es rechazada por el sistema y que percolará para recargar el escurrimiento subterráneo.</td></tr>
</table>

Tabla 4-4: (Continuación)

Ei	$\begin{cases} \dfrac{\rho_4^2 \cdot [1-\rho_4^{EM} - EM \cdot (1-\rho_4) \cdot \rho_4^{EM-1}]}{(1-\rho_4^{EM+1}) \cdot (1-\rho_4)} & (\rho_4 \neq 1) \\ \dfrac{EM \cdot (EM-1)}{2 \cdot (EM+1)} & (\rho_4 = 1) \end{cases}$	Valor esperado de agua en el suelo que se evapora.
L_4	$L_4 = Ei + \rho_4 \cdot (1 - p_{EM})$	Valor esperado de agua en la zona no saturada (cola) más agua que se evapora (en servicio).
W_4	$W_4 = E[T] = \dfrac{L_4}{\lambda_5 \cdot (1 - p_{EM})}$	Valor esperado del tiempo que le toma al agua en llegar, ocupar la zona no saturada y evaporarse.
W_{q4}	$W_{q4} = E\left[T_q\right] = W_4 - \dfrac{1}{\mu_4}$	Valor esperado del tiempo que permanece el agua evaporándose.
W_{NS}	$W_{NS} = W_3 + W_4$	Valor esperado del tiempo que permanece el agua en la zona no saturada del suelo.
$W_{q4}(t)$	$W_{q4}(t) = 1 - \sum_{n=1}^{EM-1} q4_n \sum_{i=0}^{n-1} \dfrac{(\mu_4 \cdot t)^i \cdot e^{-\mu_4 \cdot t}}{i!}$	Probabilidad de que el tiempo de duración del agua en la zona no saturada antes de evaporarse, sea menor o igual a t

4.4.5 Evaporación Total

Finalmente se puede determinar la tasa total de la evaporación λ_9, la cual es la adición de la tasa de evaporación a través de la vegetación λ_2, determinada en el punto 4.2 y la tasa de evaporación del agua desde el suelo λ_7, determinada en el punto 4.4:

$$\lambda_9 = \lambda_2 + \lambda_7 \tag{4.34}$$

Reemplazando λ_2 y λ_7 en (4.34):

$$\lambda_9 = \begin{cases} \lambda_0 \cdot \left\{1 - \left(\frac{(1-\rho_1)\cdot\rho_1^{h^*}}{1-\rho_1^{h^*+1}}\right)\cdot\left[1-\left(1-\frac{(1-\rho_2)\cdot\rho_2^{e^*}}{1-\rho_2^{e^*+1}}\right)\cdot\left(1-\frac{(1-\rho_3)\cdot\rho_3^{N}}{1-\rho_3^{N+1}}\right)\cdot\left(1-\frac{(1-\rho_4)\cdot\rho_4^{EM}}{1-\rho_4^{EM+1}}\right)\right]\right\} \\ \lambda_0 \cdot \left\{1-\left(\frac{1}{h^*+1}\right)\cdot\left[1-\left(1-\frac{1}{e^*+1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{N+1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{EM+1}\right)\right]\right\} \end{cases}$$

$$\lambda_9 = \begin{cases} para\ (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4 \neq 1) \\ para\ (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4 = 1) \end{cases} \tag{4.35}$$

4.5 Escurrimiento superficial

Hasta ahora se analizaron una serie de procesos hidrológicos por los que el agua de lluvia pasa, y si no se evapora puede terminar como escorrentía superficial para luego descargar sobre los ríos; o puede terminar como escorrentía subterránea, la que se deslizará lentamente para emerger en manantiales o también descargar sobre los ríos. En el fondo a partir de las propiedades de la lluvia y las características del suelo se ha estimado la precipitación efectiva, la que escurre de manera inmediata, considerando los procesos de abstracción típicos de una cuenca.

Con el análisis del escurrimiento superficial, finalmente se puede dar una descripción completa de todos los procesos hidrológicos considerados en una cuenca típica. Después de que precipita el agua de lluvia, una parte es interceptada por la vegetación y posteriormente se evapora; el resto llega a la superficie del suelo, una parte se infiltra en el suelo y otra se almacena en la superficie y otra escurre como flujo superficial; del agua que infiltra, una parte se almacena en la zona no saturada del suelo, saturándola temporalmente, y posteriormente evaporándose en el suelo o percolando para recargar al flujo subterráneo; la otra parte emerge a la superficie uniéndose al flujo superficial. El escurrimiento superficial forma parte del subsistema del agua superficial (Chow et. al, 2008).

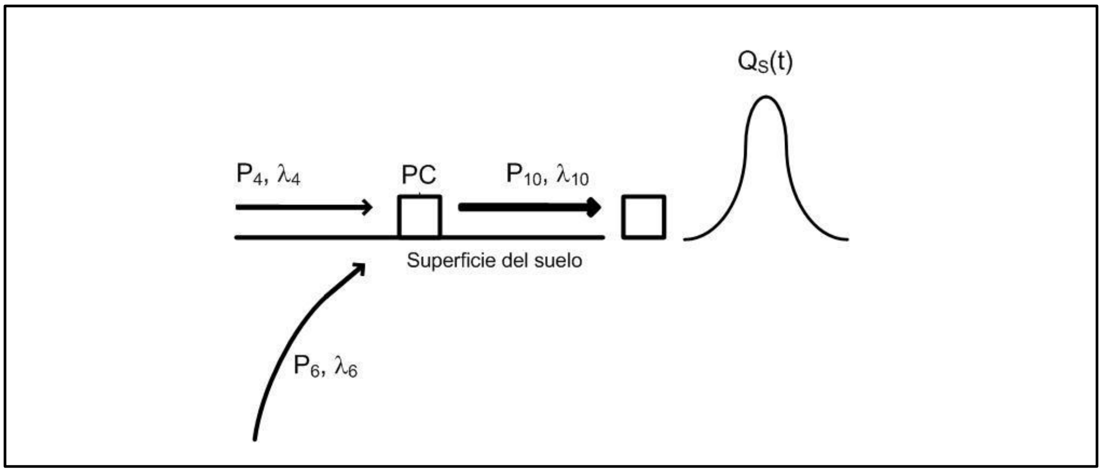

Figura 4-10: Conformación del proceso de precipitación efectiva que genera el escurrimiento Superficial

Como se explicó anteriormente, las ue´s que conforman la precipitación efectiva que da origen al flujo superficial provienen de dos sistemas: son rechazadas del sistema de infiltración y almacenamiento superficial; y, emergen desde el sistema de almacenamiento en el suelo. Se muestra en la Figura 4-10, el esquema de la conformación del flujo superficial en un punto de control (PC), a partir de los flujos obtenidos en los dos sistemas mencionados.

4.5.1 Parámetros de entrada del escurrimiento superficial

Los parámetros de entrada a este sistema final son los resultantes del sistema de infiltración y almacenamiento superficial λ_4, y del sistema de almacenamiento en el suelo y evapotranspiración λ_6; que fueron calculados en los puntos 4.3 y 4.4 respectivamente.

Aquí llegan ue´s con tasas dadas por:

$$\lambda_4 = f(\lambda_0, \lambda_1) \tag{4.36}$$

$$\lambda_6 = f(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_3) \tag{4.37}$$

Y recordando sus ecuaciones de las tablas 4-2 y 4-3:

$$\lambda_4 = \begin{cases} \lambda_0 \cdot \left(\frac{(1-\rho_1)\cdot\rho_1^{h^*}}{1-\rho_1^{h^*+1}}\right) \cdot \left(\frac{(1-\rho_2)\cdot\rho_2^{e^*}}{1-\rho_2^{e^*+1}}\right) & (\rho_1, \rho_2 \neq 1) \\ \lambda_0 \cdot \left(\frac{1}{h^*+1}\right) \cdot \left(\frac{1}{e^*+1}\right) & (\rho_1, \rho_2 = 1) \end{cases} \tag{4.38}$$

$$\lambda_6 = \begin{cases} \lambda_0 \cdot \left(\frac{(1-\rho_1)\cdot\rho_1^{h^*}}{1-\rho_1^{h^*+1}}\right) \cdot \left(1 - \frac{(1-\rho_2)\cdot\rho_2^{e^*}}{1-\rho_2^{e^*+1}}\right) \cdot \left(\frac{(1-\rho_3)\cdot\rho_3^{N}}{1-\rho_3^{N+1}}\right) & (\rho_1, \rho_2, \rho_3 \neq 1) \\ \lambda_0 \cdot \left(\frac{1}{h^*+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{e^*+1}\right) \cdot \left(\frac{1}{N+1}\right) & (\rho_1, \rho_2, \rho_3 = 1) \end{cases} \tag{4.39}$$

4.5.2 Parámetro de salida del sistema superficial

Para la determinación de la tasa de salida λ_{10}, del escurrimiento superficial P_{10} resultante de la aplicación del modelo, se emplea una propiedad del modelo Poisson, que dice que la adición de dos proceso Poisson independientes, es otro proceso Poisson cuya tasa es la suma de las tasas de los dos proceso anteriores.

Basado en ello, en la Figura 4-10, se tiene en un punto de control PC, que como P_4 y P_6 son cada uno un proceso Poisson; y, que P_4 y P_6 son variables aleatorias independientes, entonces, $P_9 = P_4 + P_6$, es un proceso Poisson con tasa:

$$\lambda_{10} = \lambda_4 + \lambda_6 \tag{4.40}$$

$$\lambda_{10} = \begin{cases} \lambda_0 \cdot \left(\frac{(1-\rho_1)\cdot\rho_1^{h^*}}{1-\rho_1^{h^*+1}}\right)\cdot\left[\frac{(1-\rho_2)\cdot\rho_2^{e^*}}{1-\rho_2^{e^*+1}}+\frac{(1-\rho_3)\cdot\rho_3^{N}}{1-\rho_3^{N+1}}-\left(\frac{(1-\rho_2)\cdot\rho_2^{e^*}}{1-\rho_2^{e^*+1}}\right)\cdot\left(\frac{(1-\rho_3)\cdot\rho_3^{N}}{1-\rho_3^{N+1}}\right)\right] \\ \lambda_0 \cdot \left(\frac{1}{h^*+1}\right)\cdot\left[\frac{1}{e^*+1}+\frac{1}{N+1}-\left(\frac{1}{e^*+1}\right)\cdot\left(\frac{1}{N+1}\right)\right] \end{cases}$$

$$\lambda_{10} = \begin{cases} para\ (\rho_1, \rho_2, \rho_3 \neq 1) \\ para\ (\rho_1, \rho_2, \rho_3 = 1) \end{cases} \tag{4.41}$$

4.5.3 Caudal superficial Q(t)

Para la determinación del caudal de salida de la cuenca, se puede emplear el proceso estocástico conocido como shot-noise. Según Ross (1983), y asociándolo al presente trabajo, su descripción para la forma general es la siguiente: como las unidades equivalentes de agua del flujo superficial, ocurren de acuerdo a un proceso Poisson con una tasa λ; $R_i \geq 1$, es una variable aleatoria que representa el “valor” de cada ue, y está asociada a la i-ésima ue.

Se asume que estos valores son aditivos y también se supone que estos decrecen a lo largo del tiempo a una tasa exponencial. Por lo tanto se tendría el valor del caudal en un tiempo t Q(t):

$$Q(t) = \sum_{i=0}^{N(t)} R_i \cdot e^{-\alpha\cdot(t-S_i)} \tag{4.42}$$

Donde,

N(t) = Número de ue´s de precipitación efectiva hasta el tiempo t

R_i = Valor de las i-ésima ue

S_i = Tiempo de las i-ésima ue

α = Constante que determina la tasa exponencial de decrecimiento (1/hr).

El concepto que está detrás de la constante exponencial de decrecimiento α, es el de un embalse lineal, en el cual la tasa de salida de caudal en un momento dado es proporcional al almacenamiento en ese mismo momento.

Un embalse lineal es aquel cuyo almacenamiento esta linealmente relacionado con su caudal de salida mediante una constante de almacenamiento CK, que bien podría ser la inversa de α:

$$V = CK \cdot Q = \frac{1}{\alpha} \cdot Q \tag{4.43}$$

Donde,

V = Almacenamiento en un momento dado (m^3).

CK = Constante de almacenamiento (hr).

Q = Caudal de salida en un momento dado (m^3/hr).

En un hidrograma, cuando la lluvia disminuye o cesa, después que el caudal haya alcanzado su máximo valor, se inicia la recesión, la cual culmina cuando la escorrentía regresa a la tasa mínima o flujo base. Usualmente las curvas de recesión toman la forma de decaimiento exponencial (Chow et. al, 2008), y la constante de decrecimiento tiene directa influencia sobre esta.

Sin embargo dado que desconocemos los valores de V y Q, para el caso del escurrimiento superficial, se asume que ambos son iguales. Obteniéndose $\alpha = 1$.

Se llama a Q(t), ($t \geq 0$) un proceso shot-noise, cuando R_i, ($i \geq 1$), se asumen que son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas, y además son independientes del proceso Poisson (N(t), $t \geq 0$). Este proceso shot-noise, además goza de la propiedad Markoviana característica de la distribución exponencial que dice que un estado futuro solo depende del presente y no así del pasado.

Ross (1983), a partir de probabilidades condicionales de N(t) y el cálculo de la función generadora de momentos de Q(t), obtuvo los momentos de Q(t), los cuales son, para la forma general:

El valor esperado de Q(t),

$$E[Q(t)] = \frac{\lambda \cdot E[R] \cdot (1 - e^{-\alpha t})}{\alpha} \tag{4.44}$$

La varianza de Q(t),

$$Var[Q(t)] = \frac{\lambda \cdot E[R^2] \cdot (1 - e^{-2\alpha t})}{2\alpha} \tag{4.45}$$

Y la covarianza

$$Cov\big(Q(t), Q(t+s)\big) = e^{-\alpha s} \cdot Var[Q(t)] = \frac{e^{-\alpha s} \cdot \lambda \cdot E[R^2] \cdot (1 - e^{-2\alpha t})}{2\alpha} \tag{4.46}$$

Además, a partir de la función generatriz de momentos deducida por Ross (1983) se calcula el tercer momento:

$$\mu_3[Q(t)] = \frac{\lambda}{\alpha} \cdot E[R^2] \cdot (1 - e^{-2\alpha t}) \cdot \left(1 + \frac{\lambda}{2\alpha} \cdot E[R] - \frac{3\lambda}{2\alpha} \cdot E[R] \cdot (1 - e^{-\alpha t})\right) + \frac{\lambda \cdot E[R^3] \cdot (1 - e^{-3\alpha t})}{3\alpha} \tag{4.47}$$

A partir del cual se calcula la asimetría γ:

$$\gamma = \frac{\mu_3[Q(t)]}{Var[Q(t)]^{3/2}} \tag{4.48}$$

Finalmente, en base a los parámetros del sistema de escurrimiento superficial del presente trabajo y remplazándolos en las ecuaciones de la forma general se tiene:

Para $E[R] = E[R^2] = E[R^3] = 1$; debido a que todas las ue´s tienen un valor de 1 mm. El valor esperado del caudal superficial Q(t):

$$E[Q(t)] = \frac{\lambda_{10} \cdot (1-e^{-\alpha t})}{\alpha} \tag{4.49}$$

La varianza de Q(t):

$$Var[Q(t)] = \frac{\lambda_{10} \cdot (1-e^{-2\alpha t})}{2\alpha} \tag{4.50}$$

La covarianza:

$$Cov\big(Q(t), Q(t+s)\big) = e^{-\alpha s} \cdot Var[Q(t)] = \frac{e^{-\alpha s} \cdot \lambda_{10} \cdot (1-e^{-2\alpha t})}{2\alpha} \tag{4.51}$$

El tercer momento:

$$\mu_3[Q(t)] = \frac{\lambda_{10}}{\alpha} \cdot (1 - e^{-2\alpha t}) \cdot \left(1 + \frac{\lambda_{10}}{2\alpha} - \frac{3\lambda_{10}}{2\alpha} \cdot (1 - e^{-\alpha t})\right) + \frac{\lambda_{10} \cdot (1-e^{-3\alpha t})}{3\alpha} \tag{4.52}$$

Como se desea obtener los resultados para el largo plazo y en estado estacionario, calculando para t = ∞, y reemplazando λ_{10} de (4.41) en las ecuaciones, se tiene:

El valor esperado del caudal superficial Q(t):

$$E[Q(t=\infty)] = \begin{cases} \dfrac{\lambda_0}{\alpha} \cdot \left(\dfrac{(1-\rho_1) \cdot \rho_1^{h^*}}{1-\rho_1^{h^*+1}}\right) \cdot \left[\dfrac{(1-\rho_2) \cdot \rho_2^{e^*}}{1-\rho_2^{e^*+1}} + \dfrac{(1-\rho_3) \cdot \rho_3^{N}}{1-\rho_3^{N+1}} - \left(\dfrac{(1-\rho_2) \cdot \rho_2^{e^*}}{1-\rho_2^{e^*+1}}\right) \cdot \left(\dfrac{(1-\rho_3) \cdot \rho_3^{N}}{1-\rho_3^{N+1}}\right)\right] \\ \dfrac{\lambda_0}{\alpha} \cdot \left(\dfrac{1}{h^*+1}\right) \cdot \left[\dfrac{1}{e^*+1} + \dfrac{1}{N+1} - \left(\dfrac{1}{e^*+1}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{N+1}\right)\right] \end{cases}$$

$$E[Q(t=\infty)] = \begin{cases} para\ (\rho_1, \rho_2, \rho_3 \neq 1) \\ para\ (\rho_1, \rho_2, \rho_3 = 1) \end{cases} \tag{4.53}$$

La varianza de Q(t):

$$Var[Q(t=\infty)] = \begin{cases} \dfrac{\lambda_0}{2\alpha}\cdot\left(\dfrac{(1-\rho_1)\cdot\rho_1^{h^*}}{1-\rho_1^{h^*+1}}\right)\cdot\left[\dfrac{(1-\rho_2)\cdot\rho_2^{e^*}}{1-\rho_2^{e^*+1}}+\dfrac{(1-\rho_3)\cdot\rho_3^{N}}{1-\rho_3^{N+1}}-\left(\dfrac{(1-\rho_2)\cdot\rho_2^{e^*}}{1-\rho_2^{e^*+1}}\right)\cdot\left(\dfrac{(1-\rho_3)\cdot\rho_3^{N}}{1-\rho_3^{N+1}}\right)\right] \\ \dfrac{\lambda_0}{2\alpha}\cdot\left(\dfrac{1}{h^*+1}\right)\cdot\left[\dfrac{1}{e^*+1}+\dfrac{1}{N+1}-\left(\dfrac{1}{e^*+1}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{N+1}\right)\right] \end{cases}$$

$$Var[Q(t=\infty)] = \begin{cases} para\ (\rho_1,\rho_2,\rho_3 \neq 1) \\ para\ (\rho_1,\rho_2,\rho_3 = 1) \end{cases} \tag{4.54}$$

Debido al tamaño de las ecuaciones, a partir de ahora se muestran en función de λ_{10}. La covarianza:

$$\mathrm{Cov}\big(Q(t),Q(t+s)\big) = \frac{e^{-\alpha s}\cdot\lambda_{10}}{2\alpha} \tag{4.55}$$

El tercer momento:

$$\mu_3[Q(t=\infty)] = \frac{4\lambda_{10}}{3\alpha} - \frac{\lambda_{10}^2}{\alpha^2} \tag{4.56}$$

Asimetría γ:

$$\gamma = (4\alpha - 3\lambda_{10})\cdot\sqrt{\frac{8}{9\alpha\lambda_{10}}} \tag{4.57}$$

4.6 Escurrimiento subterráneo

El escurrimiento subterráneo es el movimiento lateral del agua que ocupa la zona saturada del suelo y que es alimentada por el agua que percola desde la zona no saturada del suelo, su movimiento es mucho más lento que el del flujo superficial. De acuerdo con el análisis realizado al sistema de almacenamiento en el suelo y evaporación, existe una parte de agua que percolará para recargar el flujo subterráneo.

Asumiendo para efectos de análisis, que la tasa a la que el agua percola es igual a la tasa a la que el flujo subterráneo se mueve lateralmente, es posible encontrar el valor de caudal máximo subterráneo $Q_s(t)$, suponiendo que este actúa como un embalse que descarga lentamente de acuerdo a lo que recibe.

4.6.1 Caudal subterráneo $Q_s(t)$

Se asume la tasa de percolación como la tasa de flujo subterráneo, esta es la tasa λ_8, calculada en el punto 4.4 del sistema de almacenamiento en el suelo y evaporación, y dada por:

$$\lambda_8 = f(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_3, \lambda_5) \tag{4.58}$$

Y recordando su ecuación:

$$\lambda_8 = \begin{cases} \lambda_0 \cdot \left(\frac{(1-\rho_1)\cdot\rho_1^{h^*}}{1-\rho_1^{h^*+1}}\right)\cdot\left(1-\frac{(1-\rho_2)\cdot\rho_2^{e^*}}{1-\rho_2^{e^*+1}}\right)\cdot\left(1-\frac{(1-\rho_3)\cdot\rho_3^{N}}{1-\rho_3^{N+1}}\right)\cdot\left(\frac{(1-\rho_4)\cdot\rho_4^{EM}}{1-\rho_4^{EM+1}}\right) & (\rho_1,\rho_2,\rho_3,\rho_4 \neq 1) \\ \lambda_0 \cdot \left(\frac{1}{h^*+1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{e^*+1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{N+1}\right)\cdot\left(\frac{1}{EM+1}\right) & (\rho_1,\rho_2,\rho_3,\rho_4 = 1) \end{cases} \tag{4.59}$$

En base a este parámetro λ_8 y recordando que $E[R] = E[R^2] = E[R^3] = 1$, debido a que todas las ue´s tienen un valor de 1 mm; de las ecuaciones de la forma general, se determinan las ecuaciones de caudal subterráneo. A partir de la ecuación (4,44) se tiene, el valor esperado del caudal subterráneo $Q_s(t)$:

$$E[Q_s(t)] = \frac{\lambda_8\cdot(1-e^{-\alpha_s t})}{\alpha_s} \tag{4.60}$$

A partir de la ecuación (4,45), se tiene la varianza de $Q_s(t)$:

$$Var[Q_s(t)] = \frac{\lambda_8 \cdot (1-e^{-2\alpha_s t})}{2\alpha_s} \tag{4.61}$$

A partir de la ecuación (4,51), la covarianza:

$$Cov\big(Q_s(t), Q_s(t+s)\big) = e^{-\alpha_s s} \cdot Var[Q_s(t)] = \frac{e^{-\alpha_s s} \cdot \lambda_8 \cdot (1-e^{-2\alpha_s t})}{2\alpha_s} \tag{4.62}$$

A partir de la ecuación (4.52), el tercer momento:

$$\mu_3[Q_s(t)] = \frac{\lambda_8}{\alpha_s} \cdot (1-e^{-2\alpha_s t}) \cdot \left(1 + \frac{\lambda_8}{2\alpha_s} - \frac{3\lambda_8}{2\alpha_s} \cdot (1-e^{-\alpha_s t})\right) + \frac{\lambda_8 \cdot (1-e^{-3\alpha_s t})}{3\alpha_s} \tag{4.63}$$

Tomando en cuenta las condiciones de decrecimiento de un embalse lineal para flujo subterráneo, el cual puede considerarse como la parte baja de la curva de recesión del caudal. Dada la ecuación (4.43), asumimos que en el caso de flujo subterráneo, el almacenamiento es el doble que el caudal. Obteniéndose un valor de partida $\alpha_s = 0.5$

Como se desea obtener los resultados para el largo plazo y en estado estacionario, calculando para $t = \infty$, y reemplazando λ_8 en las ecuaciones, se tiene:

El valor esperado del caudal subterráneo $Q_s(t)$:

$$E[Q_s(t=\infty)] = \begin{cases} \dfrac{\lambda_0}{\alpha_s} \cdot \left(\dfrac{(1-\rho_1) \cdot \rho_1^{h^*}}{1-\rho_1^{h^*+1}}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{(1-\rho_2) \cdot \rho_2^{e^*}}{1-\rho_2^{e^*+1}}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{(1-\rho_3) \cdot \rho_3^{N}}{1-\rho_3^{N+1}}\right) \cdot \left(\dfrac{(1-\rho_4) \cdot \rho_4^{EM}}{1-\rho_4^{EM+1}}\right) \\ \dfrac{\lambda_0}{\alpha_s} \cdot \left(\dfrac{1}{h^*+1}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{e^*+1}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{N+1}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{EM+1}\right) \end{cases}$$

$$E\big[Q_s(t=\infty)\big] = \begin{cases} para\ (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4 \neq 1) \\ para\ (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4 = 1) \end{cases} \tag{4.64}$$

La varianza de Q(t):

$$Var[Q_s(t=\infty)] = \begin{cases} \dfrac{\lambda_0}{2\alpha_s}\cdot\left(\dfrac{(1-\rho_1)\cdot\rho_1^{h^*}}{1-\rho_1^{h^*+1}}\right)\cdot\left(1-\dfrac{(1-\rho_2)\cdot\rho_2^{e^*}}{1-\rho_2^{e^*+1}}\right)\cdot\left(1-\dfrac{(1-\rho_3)\cdot\rho_3^{N}}{1-\rho_3^{N+1}}\right)\cdot\left(\dfrac{(1-\rho_4)\cdot\rho_4^{EM}}{1-\rho_4^{EM+1}}\right) \\ \dfrac{\lambda_0}{2\alpha_s}\cdot\left(\dfrac{1}{h^*+1}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{e^*+1}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{N+1}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{EM+1}\right) \end{cases}$$

$$Var\left[Q_s(t=\infty)\right] = \begin{cases} para\ (\rho_1,\rho_2,\rho_3,\rho_4 \neq 1) \\ para\ (\rho_1,\rho_2,\rho_3,\rho_4 = 1) \end{cases} \qquad (4.65)$$

A partir de ahora se muestran en función de λ_8. La covarianza:

$$\mathrm{Cov}\big(\mathrm{Q_s(t)},\mathrm{Q_s(t+s)}\big) = \frac{\mathrm{e}^{-\alpha_s \mathrm{s}}.\lambda_8}{2\alpha_s} \qquad (4.66)$$

El tercer momento:

$$\mu_3[\mathrm{Q_s}(t=\infty)] = \frac{4\lambda_8}{3\alpha_s} - \frac{\lambda_8^2}{{\alpha_s}^2} \qquad (4.67)$$

Asimetría γ:

$$\gamma_s = (4\alpha_s - 3\lambda_8)\cdot\sqrt{\frac{8}{9\alpha_s\lambda_8}} \qquad (4.68)$$

4.7 Caudal Total Q^T(t)

El gasto total a la salida de la cuenca corresponde a la suma del escurrimiento superficial y el escurrimiento subterráneo.

$$E[Q^T(t)] = E[Q(t)] + E[Q_s(t)] \qquad (4.69)$$

5. APLICACIÓN DEL MODELO ESTOCÁSTICO Y COMPARACIÓN

A continuación se implementa el modelo estocástico de lluvia-escorrentía desarrollado en el presente trabajo. Se utilizan como ejemplo dos cuencas urbanas: Chillán en la VIII Región y Santiago de Chile en la Región Metropolitana. Se utilizan ambas cuencas por la disponibilidad de información, y porque los resultados obtenidos mediante el presente modelo pueden ser comparados con los resultados obtenidos de la modelación de ambas cuencas mediante otro enfoque.

Para el análisis de la cuenca de Chillán, se utiliza la información disponible en el trabajo de Zegpi (2008), y además se comparan los resultados con el mismo. En el caso de Santiago, la cuenca a analizar se encuentra específicamente en la comuna de La Reina, y se utiliza la información disponible en los trabajos de González (2008) y Zegpi (2008), tanto para la modelación como para la comparación de resultados.

González (2008), realizó un análisis sobre la ciudad de Santiago, y modeló el sistema de drenaje de la comuna de La Reina con el programa SWMM-UC, considerando eventos de lluvias aisladas, obteniendo un caudal máximo de salida.

Zegpi (2008), considerando eventos independientes de tormentas, realizó un análisis sobre Santiago y Chillán, utilizando un modelo hidrológico para cuencas urbanas basado en un desarrollo matemático y utilizando cópulas, obteniendo también un caudal máximo a la salida de las cuencas. Comparó sus resultados, con los resultados obtenidos por González (2008) para Santiago; y con los resultados obtenidos por MOP (2007) de la modelación de la red drenaje con el programa XP SWMM-32 de la empresa CAICE para eventos de lluvias de diseño, para Chillán.

La información disponible para ambas cuencas es bastante detallada en los dos trabajos mencionados, están disponibles la mayoría de los parámetros necesarios para la aplicación del modelo; sin embargo, debido a falta de información sobre los parámetros de la zona no saturada del suelo (porosidad η y conductividad hidráulica c) se asumen estos como los característicos de suelos arcillosos.

En cuanto a la precipitación, para la ciudad de Chillán se cuenta con el registro de precipitación cada 15 minutos de la estación pluviométrica del Campus Chillán de la Universidad de Concepción del periodo 1998-2006 (facilitada por el profesor José Luis Arumí de la Universidad de Concepción). Para la cuenca urbana de Santiago, se utiliza el registro de la estación de Quinta Normal, que consiste en precipitación cada 10 minutos para el periodo 1917-1960.

5.1 Caracterización de tormentas

Se analizan 2 series de precipitación, cuyas características se muestran en la Tabla 5.1:

- Santiago, Región Metropolitana, Chile.
- Chillán, VIII Región del Biobío, Chile.

Tabla 5-1: Características de las series de precipitación analizadas

Lugar	**Santiago**	**Chillán**
Periodo de Registro	1917 - 1960	1998 - 2006
Periodo de Registro (años)	44	9
Intervalo de Registro (min)	10	15

A continuación, se muestra la curva de precipitación acumulada de los registros completos de las cuencas de Chillán y Santiago. Figura 5-1.

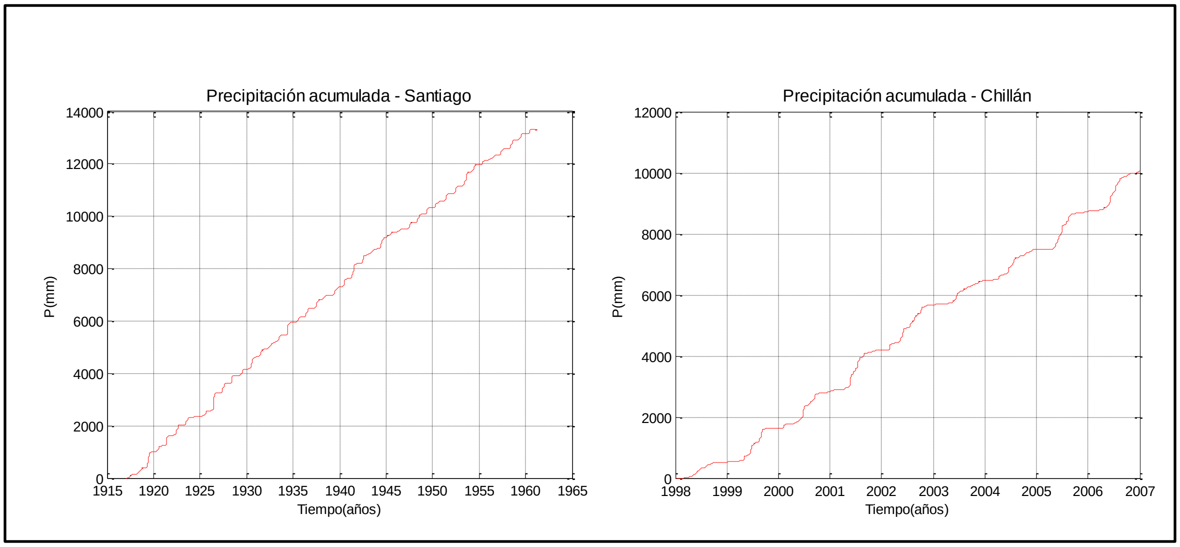

Figura 5-1: Precipitación acumulada del registro completo.

Ambas curvas de precipitación acumulada, presentan una característica escalonada, lo que demuestra temporadas seca y lluviosa bien definidas a lo largo del año hidrológico.

A los registros de precipitación se les realiza un tratamiento, separando la temporada seca de la temporada lluviosa, que será la más crítica. Figura 5.2.

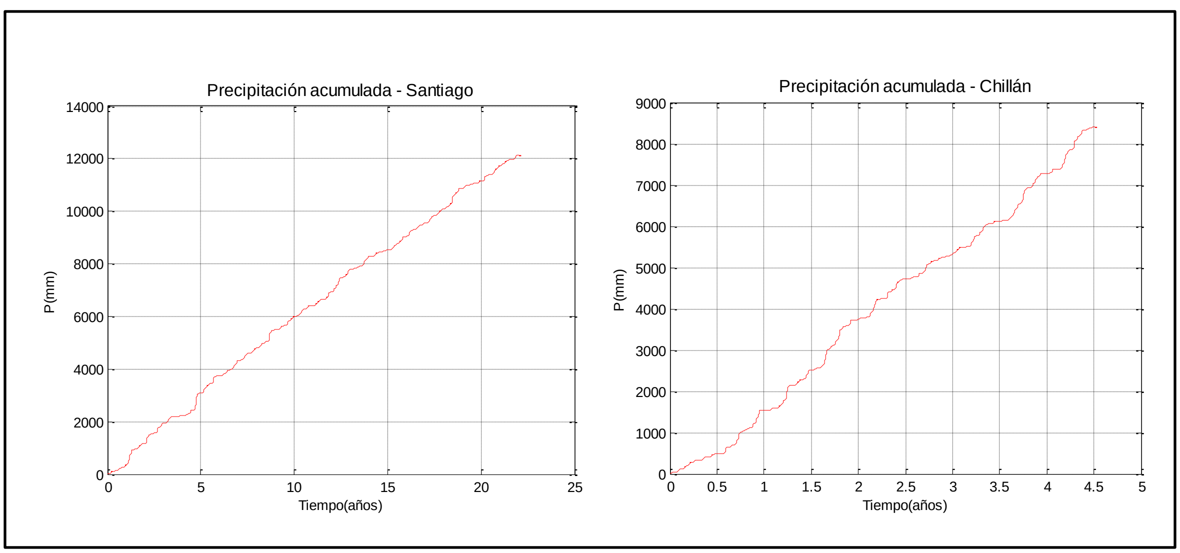

Figura 5-2: Precipitación acumulada del registro de temporadas lluviosas.

Como se puede ver, la curva de precipitación acumulada se “suavizó”. Adicionalmente, de las gráficas mostradas en las Figuras 5.1 y 5.2, se puede claramente observar que durante la temporada lluviosa, cae más del 80% de la precipitación acumulada durante el año hidrológico.

Se trabaja a partir del registro de precipitación de temporadas lluviosas, de este registro se calculan los tiempos entre llegadas (TEL) de ue = 1 mm.

La serie de TEL, es ajustada a una distribución exponencial por las razones explicadas en el punto 4.1.1. Finalmente, para asegurar un mejor ajuste de la serie de TEL a la distribución exponencial, se realiza una optimización matemática de la misma por medio del método de los mínimos cuadrados ajustando la tasa de llegada promedio de las ue; obteniéndose una tasa corregida λ_0.

En la Tabla 5-2, se muestran los resultados del ajuste final de TEL y λ_0 para las cuencas de Chillán y Santiago. Y en la Figura 5-3, se muestra el ajuste exponencial de ambas después del tratamiento descrito anteriormente.

Tabla 5-2: Tiempo entre llegadas (TEL) de unidades de lluvia (ue) de 1 milímetro.

Lugar	**Santiago**	**Chillán**
TEL promedio (hr)	0.609	0.462
λ_0 (1/hr)	1.641	2.165

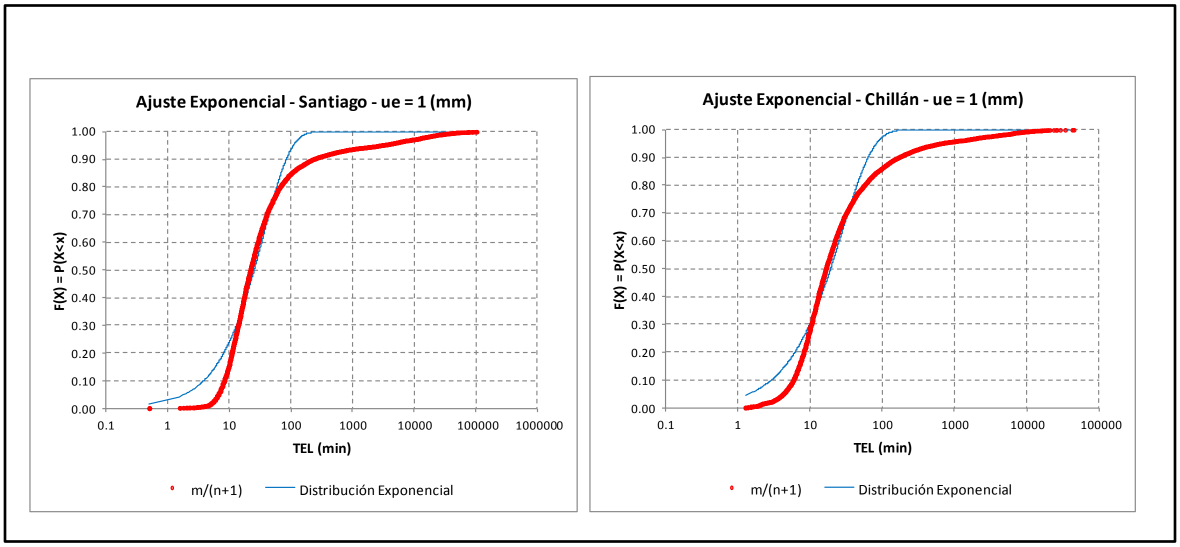

Figura 5-3: Ajuste exponencial de las series de TEL

Como se puede observar, la duración promedio de los tiempos entre llegadas de 1 mm (TEL), es de 36.6 minutos para Santiago y 27.7 minutos para Chillán. Para estos tiempos, se puede ver que la serie se ajusta lo suficiente a la distribución exponencial.

El valor de λ_0, de la Tabla 5-2, es el dato de entrada del modelo estocástico de lluvia-escorrentía.

5.2 Características y parámetros de las cuencas de estudio

Las cuencas de Santiago y Chillán, tomadas en cuenta para este trabajo, fueron también modeladas en otros trabajos (González, 2008; y Zegpi, 2008). El interés, por lo tanto, en modelar estas cuencas, aparte de la información disponible, es la posibilidad de comparar los resultados obtenidos de la aplicación del presente modelo con los resultados obtenidos en los trabajos mencionados.

En el caso de Chillán, de acuerdo a Zegpi (2008), la cuenca en estudio se encuentra en un sector de la ciudad que presenta un uso preponderantemente urbano con aproximadamente un 50 % de superficie impermeable. La Figura 5-4 muestra su ubicación. La Figura 5.5 muestra el detalle de la cuenca modelada por Zegpi (2008).

Figura 5-4: Chillán – Ubicación de la cuenca urbana en Google Earth.
Fuente: Zegpi (2008)

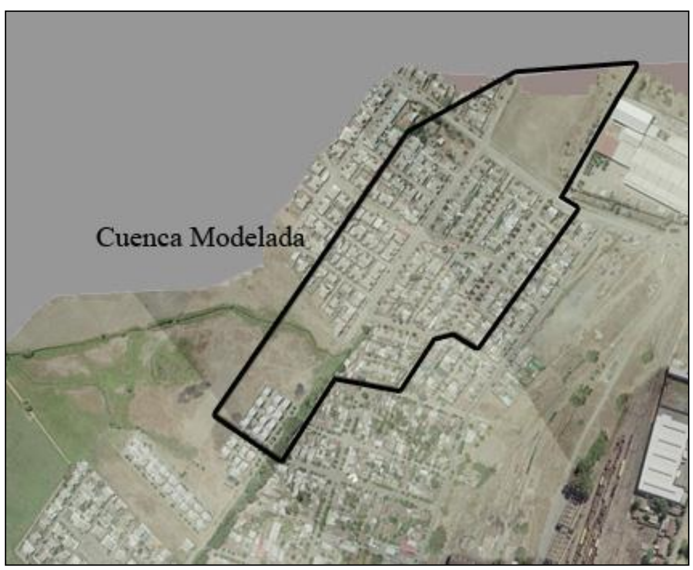

Figura 5-5: Chillán – Cuenca urbana.
Fuente: Zegpi (2008)

En cuanto a Santiago, González (2008) realizó el análisis de una cuenca urbana localizada específicamente en la comuna de La Reina que de acuerdo a la clasificación de uso de suelos corresponde a un sector urbano con densidad media. La Figura 5-6 muestra su ubicación. La Figura 5-7 muestra el detalle de la cuenca modelada por González (2008).

Figura 5-6: Santiago – Ubicación de la cuenca urbana en Google Earth.
Fuente: González (2008)

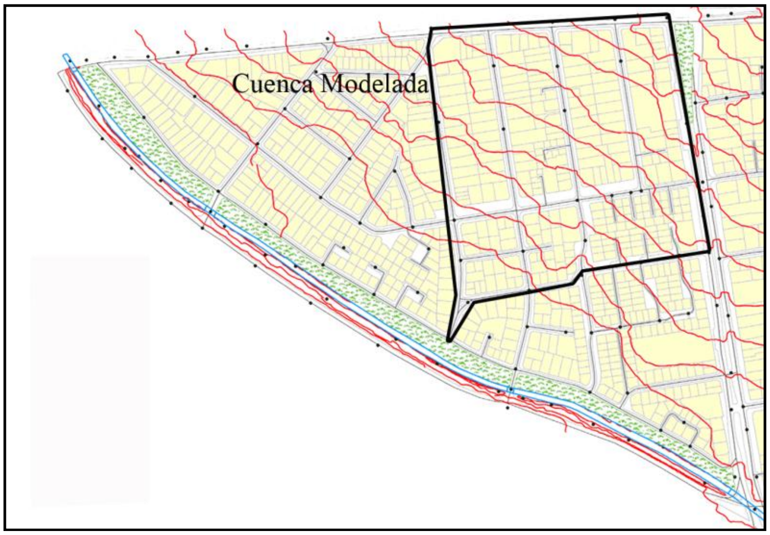

Figura 5-7: Santiago – Cuenca urbana.
Fuente: González (2008)

Se debe mencionar que el modelo analítico de Zegpi (2008), e igualmente el modelo SWMM usado por González (2008); se basan en zonas permeables e impermeables. Por lo tanto, la información que disponen es para ambas características de una cuenca. Para el presente trabajo, esta información se pondera de acuerdo al porcentaje de zonas impermeables que tienen ambas cuencas. Santiago (80% de área impermeable) y Chillán (50% de área impermeable). Adicionalmente, al no tenerse información de los parámetros de la zona no saturada del suelo, se asumen de un suelo arcilloso que sería el peor de los casos.

En la Tabla 5-3, se muestran la información de los parámetros que corresponden a los datos de entrada del modelo analítico. Para las cuencas de Santiago y de Chillán.

Tabla 5-3: Parámetros de entrada del modelo analítico – Santiago y Chillán.

Descripción	**Variable**	**Unidad**	**Santiago**	**Chillán**
Área	A	ha	14	10
Tasa de llegada	λ_0	1/hr	1.641	2.165
Evapotranspiración	E	mm/hr	0.263	0.178
Altura de agua interceptada	I	mm	2.000	2.000
Infiltración	f	mm/hr	1.000	1.880
Altura máxima de agua encharcada	VE	mm	2.700	2.000
Conductividad hidráulica del suelo	K	mm/hr	0.300	0.300
Porosidad	η	-	0.475	0.475
Evaporación del agua del suelo	EV	mm/hr	0.263	0.178
Evaporación potencial	EP	mm	2.000	2.000
Tasa de decrecimiento - flujo superficial	α	-	1.000	1.000
Tasa de decrecimiento - flujo subterráneo	β	-	0.500	0.500

Los parámetros de evapotranspiración y evaporación desde el suelo, son iguales debido a la dificultad que se tiene para separar la evaporación de la transpiración y se tomó el dato para cultivos de referencia del Instituto de Desarrollo Agropecuario (INDAP). Los parámetros de infiltración y altura máxima encharcada fueron tomados del trabajo de Zegpi (2008). Los parámetros de conductividad hidráulica del suelo y porosidad se toman de los valores propios de suelos arcillosos.

5.3 Resultados

A continuación se presentan los resultados de la aplicación del modelo estocástico a las cuencas de Santiago y Chillán descritas anteriormente. Se muestran los resultados de la aplicación del modelo a todos los procesos considerados de acuerdo a la Figura 4-1.

5.3.1 Parámetros de entrada y atención

En la Tabla 5-4 se muestran los valores de los parámetros de entrada y atención del sistema de espera.

Tabla 5-4: Parámetros de entrada y atención del sistema de espera.

Descripción	Variable	Unidad	Santiago	Chillán
Sistema de intercepción y evapotranspiración				
Tasa de entrada - P_0	λ_0	1/hr	1.641	2.165
Tasa de servicio de la evapotranspiración	μ_1	1/hr	0.263	0.178
Capacidad máxima de intercepción	K=h*	-	2.000	2.000
Intensidad de tráfico	ρ_1	-	6.231	12.198
Sistema de infiltración y almacenamiento superficial				
Tasa de entrada - P_1	λ_1	1/hr	1.383	1.989
Tasa de servicio de la infiltración	μ_2	1/hr	1.000	1.880
Máximo almacenamiento superficial	K=e*	-	2.700	2.000
Intensidad de tráfico	ρ_2	-	1.383	1.058
Sistema de almacenamiento en el suelo y evapotranspiración				
Tasa de entrada - P_3	λ_3	1/hr	0.835	1.288
Tasa de servicio del suelo	μ_3	1/hr	0.300	0.300
Máximo contenido de humedad*L	K=N	-	475	475
Intensidad de tráfico	ρ_3	-	2.783	4.294
Tasa de entrada - P_5	λ_5	1/hr	0.300	0.300
Tasa de servicio de la evaporación	μ_4	1/hr	0.263	0.178
Máximo valor de evaporación	K=EM	-	2.000	2.000
Intensidad de tráfico	ρ_4	-	1.139	1.690

Se puede observar que el valor de la intensidad de tráfico ρ para ambas cuencas es mayor a 1, en todos los procesos hidrológicos, esto representaría colas infinitas en sistemas de espera sin restricción, pero no representa mayor problema en el sistema analizado puesto que cada proceso tiene una restricción.

5.3.2 Parámetros p_n y q_n

En la Tabla 5-5, se muestran los valores calculados de los parámetros p_n, además de p_K.

Tabla 5-5: Parámetros p_n y q_n.

	Santiago		Chillán	
Sistema de intercepción y evapotranspiración				
Descripción	**n (mm)**	**$p1_n$**	**n (mm)**	**$p1_n$**
Fracción de tiempo en el cual hay "n" mm de agua interceptada por la vegetación y evaporándose a través de la misma.	**0**	0.022	**0**	0.006
	1	0.135	**1**	0.075
	2	0.843	**2**	0.919
Para n = h*	**h***	0.843	**h***	0.919
Sistema de infiltración y almacenamiento superficial				
Descripción	**n (mm)**	**$p2_n$**	**n (mm)**	**$p2_n$**
Fracción de tiempo en el cual hay "n" mm de agua encharcada e infiltrándose en el suelo	**0**	0.165	**0**	0.315
	1	0.228	**1**	0.333
	2	0.316	**2**	0.352
Para n = e*	**e* = 2.7**	0.396	**e* = 2**	0.352
Sistema de almacenamiento en el suelo y evapotranspiración				
Descripción	**n (-)**	**$p3_n$**	**n (-)**	**$p3_n$**
Fracción de tiempo en el cual hay "n" contenido de humedad en la zona no saturada del suelo.	**0.468**	0.000	**0.468**	0.000
	0.469	0.001	**0.469**	0.000
	0.470	0.004	**0.470**	0.001
	0.471	0.011	**0.471**	0.002
	0.472	0.030	**0.472**	0.010
	0.473	0.083	**0.473**	0.042
	0.474	0.230	**0.474**	0.179
	0.475	0.641	**0.475**	0.767
Para n = N	**N/L**	0.641	**N/L**	0.767
Descripción	**n (mm)**	**$p4_n$**	**n (mm)**	**$p4_n$**
Fracción de tiempo en el cual hay "n" mm de agua evaporándose y percolando	**0**	0.291	**0**	0.180
	1	0.331	**1**	0.305
	2	0.378	**2**	0.515
Para n = EM	**EM = 2**	0.378	**EM = 2**	0.515

En la Tabla 5-6, se muestran los valores calculados de los parámetros q_n.

Tabla 5-6: Parámetros q_n.

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Santiago</td><td colspan="2">Chillán</td></tr>
<tr><td colspan="5">Sistema de intercepción y evapotranspiración</td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td>n (mm)</td><td>$q1_n$</td><td>n (mm)</td><td>$q1_n$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Probabilidad de que al llegar el agua encuentre “n” mm de agua interceptada por la vegetación.</td><td>0</td><td>0.138</td><td>0</td><td>0.076</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0.862</td><td>1</td><td>0.924</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">Sistema de infiltración y almacenamiento superficial</td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td>n (mm)</td><td>$q2_n$</td><td>n (mm)</td><td>$q2_n$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Probabilidad de que al llegar el agua encuentre “n” mm de agua encharcada.</td><td>0</td><td>0.274</td><td>0</td><td>0.486</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0.378</td><td>1</td><td>0.514</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">Sistema de almacenamiento en el suelo y evapotranspiración</td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td>n (-)</td><td>$q3_n$</td><td>n (-)</td><td>$q3_n$</td></tr>
<tr><td rowspan="9">Probabilidad de que al llegar el agua encuentre “n” contenido de humedad en la zona no saturada del suelo.</td><td>0.468</td><td>0.001</td><td>0.468</td><td>0.000</td></tr>
<tr><td>0.469</td><td>0.004</td><td>0.469</td><td>0.001</td></tr>
<tr><td>0.470</td><td>0.011</td><td>0.470</td><td>0.002</td></tr>
<tr><td>0.471</td><td>0.030</td><td>0.471</td><td>0.010</td></tr>
<tr><td>0.472</td><td>0.083</td><td>0.472</td><td>0.042</td></tr>
<tr><td>0.473</td><td>0.230</td><td>0.473</td><td>0.179</td></tr>
<tr><td>0.474</td><td>0.641</td><td>0.474</td><td>0.767</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td>n (mm)</td><td>$q4_n$</td><td>n (mm)</td><td>$q4_n$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Probabilidad de que al llegar el agua encuentre “n” mm de agua evaporándose en el suelo</td><td>0</td><td>0.467</td><td>0</td><td>0.372</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0.533</td><td>1</td><td>0.628</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

De la tabla 5-5, se observa que para Santiago, solo un 2.2% del tiempo no existe intercepción, y que por el contrario el 84.3% del tiempo la vegetación está a su capacidad máxima de intercepción. En el caso de Chillán, la intercepción es más efectiva, ocupando un 91.9% del tiempo con la vegetación a capacidad máxima de intercepción, contrario a solo un 0.06% del tiempo sin intercepción.

Igualmente, se observa que para Santiago, un 16.5% del tiempo no existe encharcamiento, y que el 39.6% del tiempo la superficie del suelo está a su máxima capacidad de encharcamiento. En el caso de Chillán, el 31.5% del tiempo no existe encharcamiento, y la cuenca está a su máxima capacidad de encharcamiento el 35.2% del tiempo.

Además, se observa que existe una probabilidad nula de que el suelo este totalmente seco durante una tormenta, lo cual resulta totalmente lógico, de hecho lo que se puede observar para ambas cuencas (pues ambas tienen el mismo tipo de suelo, y por lo tanto los mismos parámetros), es que en todo momento el contenido de humedad varía entre 0.468 y 0.475, con una probabilidad más alta de que sea 0.474. Además se puede concluir que en Santiago, el suelo estará saturado el 64.1% del tiempo, y en Chillán el 76.7% del tiempo. Y finalmente, se observa que para Santiago, durante un 29.1% del tiempo no existe evaporación. Lo mismo para Chillán durante un 18% del tiempo.

Se determina además, la fracción del tiempo durante el cual la intercepción no alcanza su máximo valor K, Tabla 5-7.

Tabla 5-7: Parámetro p_{libre}.

Descripción	**Variable**	**Unidad**	**Santiago**	**Chillán**
Sistema de intercepción y evapotranspiración				
Fracción del tiempo durante el cual la intercepción no alcanza su máximo valor h*	$h*$	mm	2.000	2.000
	$\mathbf{p1}_{\mathbf{libre}}$	-	0.157	0.081
Sistema de infiltración y almacenamiento superficial				
Fracción del tiempo durante el cual el encharcamiento no alcanza su máximo valor	$e*$	mm	2.700	2.000
	$\mathbf{p2}_{\mathbf{libre}}$	-	0.604	0.648
Sistema de almacenamiento en el suelo y evapotranspiración				
Fracción del tiempo durante el cual el almacenamiento en el suelo no alcanza su máximo valor N	N/L	mm	0.475	0.475
	$\mathbf{p3}_{\mathbf{libre}}$	-	0.359	0.233
Fracción del tiempo durante el cual la evaporación del agua en el suelo no alcanza su máximo valor EM	EM	mm	2.000	2.000
	$\mathbf{p4}_{\mathbf{libre}}$	-	0.622	0.485

Se puede ver que solo el 15.7% del tiempo la vegetación no ocupa su capacidad máxima de intercepción en Santiago y el 8.1% en Chillán.

Además, la mayoría del tiempo ambas cuencas no están a su capacidad máxima de almacenamiento superficial. Eso quiere decir que a pesar de un gran porcentaje de impermeabilidad en las cuencas urbanas, la infiltración aún es relevante. Por los valores mostrados en la tabla se puede observar que el suelo estará saturado la mayor parte del tiempo.

5.3.3 Parámetros de salida

En la Tabla 5-8, se muestran los parámetros de salida de los procesos hidrológicos considerados.

Tabla 5-8: Parámetros de salida.

Descripción	**Variable**	**Unidad**	**Santiago**	**Chillán**
Sistema de intercepción y evapotranspiración				
Agua que precipita al suelo	λ_1	1/hr	1.383	1.989
Tasa de agua que se evapora	λ_2	1/hr	0.258	0.176
Sistema de infiltración y almacenamiento superficial				
Tasa del agua que se infiltra	λ_3	1/hr	0.835	1.288
Tasa de escurrimiento superficial	λ_4	1/hr	0.548	0.700
Sistema de almacenamiento en el suelo y evapotranspiración				
Agua que se almacena en el suelo	λ_5	1/hr	0.300	0.300
Agua que emerge como escurrimiento	λ_6	1/hr	0.535	0.988
Agua que se evapora del suelo	λ_7	1/hr	0.187	0.145
Agua que percola a la zona saturada	λ_8	1/hr	0.113	0.155
Evaporación total				
Evaporación total	λ_9	1/hr	0.444	0.322
Escurrimiento superficial total				
Escurrimiento superficial total	λ_{10}	1/hr	1.083	1.689
Escurrimiento subterráneo				
Escurrimiento subterráneo	λ_8	1/hr	0.113	0.155

La tasa total de la evaporación λ_9, la cual es la adición de la tasa de evaporación a través de la vegetación λ_2, y la tasa de evaporación del agua desde el suelo λ_7.

Por su parte, la tasa total de escurrimiento superficial que es la suma de la tasa de escurrimiento superficial del sistema de infiltración y almacenamiento superficial λ_4, y la tasa del agua que es rechazada por un suelo saturado del sistema de almacenamiento en el suelo λ_6. Finalmente se asume la tasa de percolación como la tasa de flujo subterráneo λ_8.

5.3.4 Parámetros de desempeño

Los parámetros de desempeño se muestran en la Tabla 5-9.

Tabla 5-9: Parámetros de desempeño.

Descripción	Variable	Unidad	Santiago	Chillán
Sistema de intercepción y evapotranspiración				
Valor esperado de agua en todo el sistema - agua interceptada (cola) + agua evaporándose (en servicio)	L_1	mm	1.821	1.912
Valor esperado de agua interceptada (cola)	hi	mm	0.843	0.919
Valor esperado del tiempo que le toma al agua en llegar, ser interceptada y evaporarse.	W_1	hr	7.070	10.841
Valor esperado del tiempo de duración de intercepción	W_{q1}	hr	3.272	5.207
Sistema de infiltración y almacenamiento superficial				
Valor esperado de agua en todo el sistema – agua encharcada(cola) + agua infiltrándose (en servicio)	L_2	mm	1.685	1.037
Valor esperado de agua encharcada (cola)	ei	mm	0.850	0.352
Valor esperado del tiempo que le toma al agua en llegar, encharcarse e infiltrarse	W_2	hr	2.018	0.805
valor esperado del tiempo que permanece el agua encharcada	W_{q2}	hr	1.018	0.273

Tabla 5-9: Continuación.

Descripción	Variable	Unidad	Santiago	Chillán
Sistema de almacenamiento en el suelo y evapotranspiración				
Valor esperado de agua en la zona no saturada (cola) más agua que se evapora y/o percola (en servicio), por espesor de estrato (1 m)	L_3	mm	474.439	474.696
Valor esperado de contenido de humedad (cola)	θ	-	0.473	0.474
Valor esperado del tiempo que le toma al agua en llegar, ocupar la zona no saturada y evaporarse y/o percolar	W_3	hr	1581.464	1582.321
Valor esperado del tiempo que permanece el agua almacenada en el suelo	W_{q3}	hr	1578.130	1578.988
Valor esperado de agua en todo el sistema - agua en la zona no saturada (cola) más agua que se evapora (en servicio):	L_4	mm	1.087	1.335
Valor esperado de agua del suelo que se evapora (cola)	Ei	mm	0.378	0.515
Valor esperado del tiempo que le toma al agua en llegar, ocupar la zona no saturada y evaporarse	W_4	hr	5.820	9.173
Valor esperado del tiempo de duración de la evaporación desde el suelo	W_{q4}	hr	2.022	3.540

De la Tabla 5-9, para una tormenta bajo las características del registro modelado, se puede esperar que en todo momento el valor de agua interceptada sea de 0.843 mm y 0.919 mm para Santiago y Chillán respectivamente. Y que en todo momento el tiempo de duración del agua en estado interceptado por la vegetación es de 3.272 horas para Santiago y 5.207 horas para Chillán.

Además, se puede esperar que en todo momento el valor de agua encharcada sea de 0.850 mm y 0.352 mm para Santiago y Chillán respectivamente. Y que en todo momento el tiempo de duración del agua en estado encharcado es de 1.018 horas para Santiago y 16.38 minutos para Chillán.

Adicionalmente se observa que la duración del agua en la zona no saturada del suelo, es decir el tiempo que le toma al suelo secarse es de alrededor de 2 meses para ambas cuencas.

5.3.5 Distribución acumulada del tiempo de espera

Sobre el tiempo de duración de la intercepción se puede obtener más información, a continuación se muestra la distribución acumulada del tiempo de duración del agua en estado de intercepción $W_{q1}(t)$. Figura 5-8.

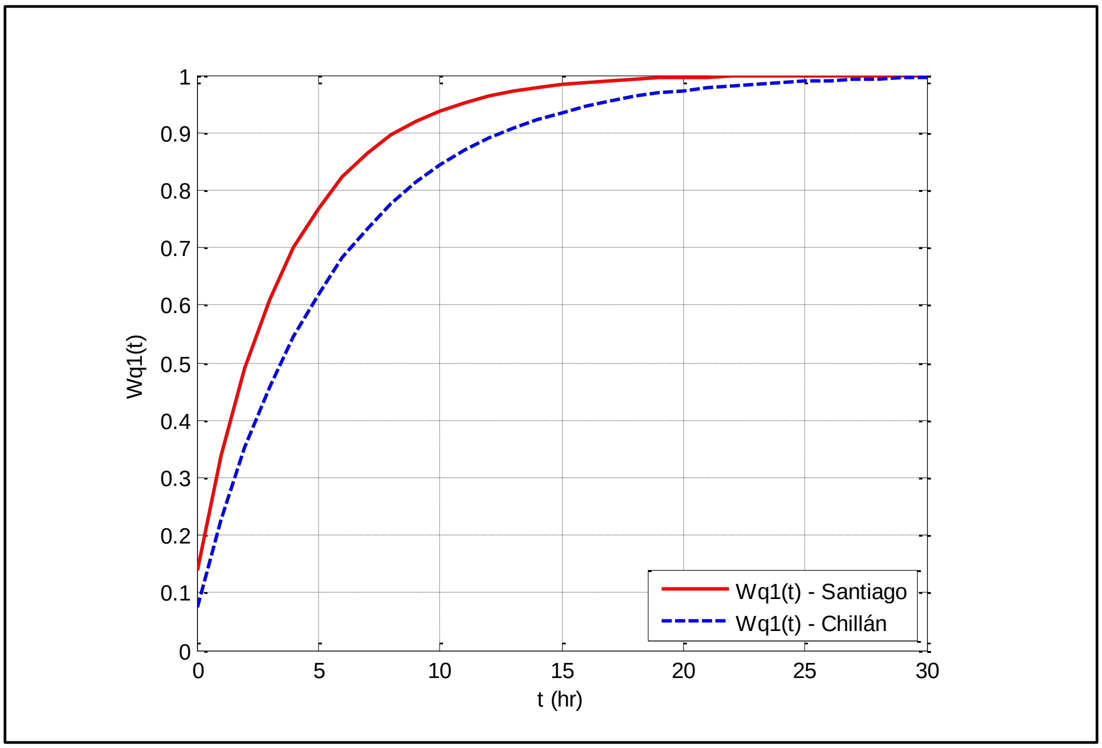

Figura 5-8: Distribución acumulada del tiempo de intercepción.

De las Figura 5-8 se puede observar que la razón por la que no comienzan en cero es porque existe una probabilidad no negativa de que a su llegada el agua encuentre la vegetación “seca”.

Esta figura sirve para determinar la probabilidad de que el tiempo de duración de la intercepción sea menor a cierto tiempo t. Por ejemplo la probabilidad de que el tiempo que dure el agua interceptada sea menor a 24 horas es 0.998 para Santiago y 0.987 para Chillán. Igualmente, la probabilidad de que durante una tormenta no exista intercepción porque la vegetación está ya saturada es de 0.138 para Santiago y 0.076 para Chillán.

A continuación se muestra la distribución acumulada del tiempo de duración del agua en estado encharcado sobre el suelo $W_{q2}(t)$. Figura 5-9.

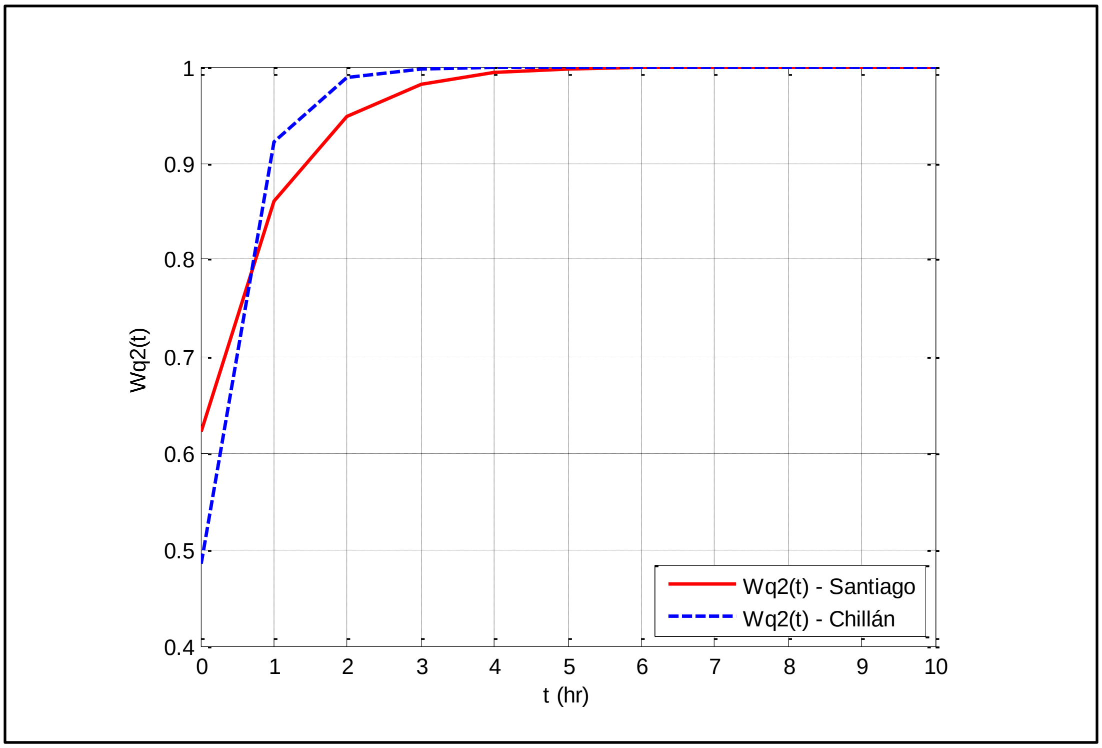

Figura 5-9: Distribución acumulada del tiempo de encharcamiento.

Con la Figura 5-9, se puede determinar la probabilidad de que el tiempo de duración de encharcamiento sea menor a cierto tiempo t. Por ejemplo la probabilidad de que el tiempo que dure el agua encharcada sea menor a 10 horas es 0.999 para Santiago y 1.000 para Chillán. Igualmente, la probabilidad de que durante una tormenta no exista encharcamiento es de 0.622 para Santiago y 0.486 para Chillán.

A continuación se muestra la distribución acumulada del tiempo de duración del agua en la zona no saturada antes de evaporarse $W_{q4}(t)$. Figura 5-10.

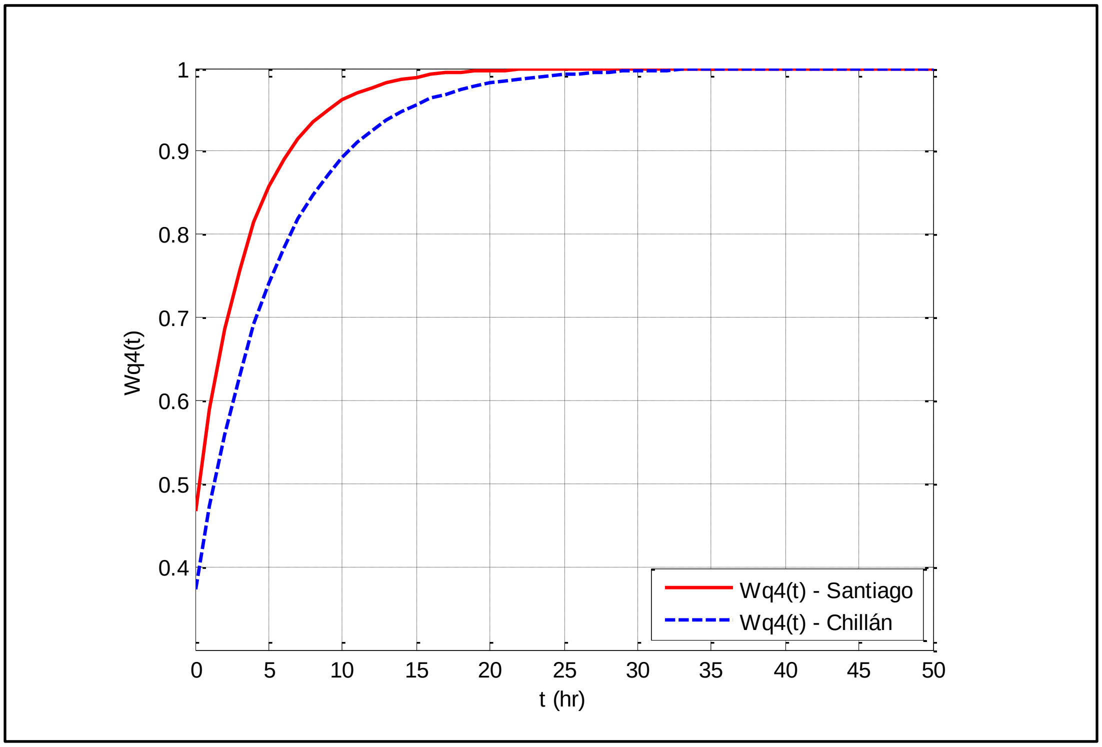

Figura 5-10: Distribución acumulada del tiempo de permanencia en el suelo.

Finalmente con la Figura 5-10 se determina la probabilidad de que el tiempo de duración de la evaporación desde el suelo sea menor a cierto tiempo t. Por ejemplo la probabilidad de que el tiempo que dure el agua en la zona no saturada antes de evaporarse completamente sea menor a 24 horas es 0.999 para Santiago y 0.991 para Chillán.

5.3.6 Escurrimiento superficial

Los parámetros obtenidos de acuerdo al proceso de shot-noise, del valor esperado, la varianza y el coeficiente de asimetría del caudal superficial Q(t), son resultados para el largo plazo y en estado estacionario, calculando para $t = \infty$. Tabla 5-10.

Tabla 5-10: Parámetros del escurrimiento superficial.

Descripción	Variable	Unidad	Santiago	Chillán
Constante exponencial de decrecimiento	α	-	1.000	1.000
Valor esperado del caudal superficial	E[Q(t)]	mm/hr	1.083	1.689
Varianza	Var[Q(t)]	mm/hr	0.542	0.844
Coeficiente de asimetría	γ	-	0.680	-0.773

Además, se tiene la covarianza Cov(Q(t), Q(t+s)), para $t = \infty$. Figura 5-11.

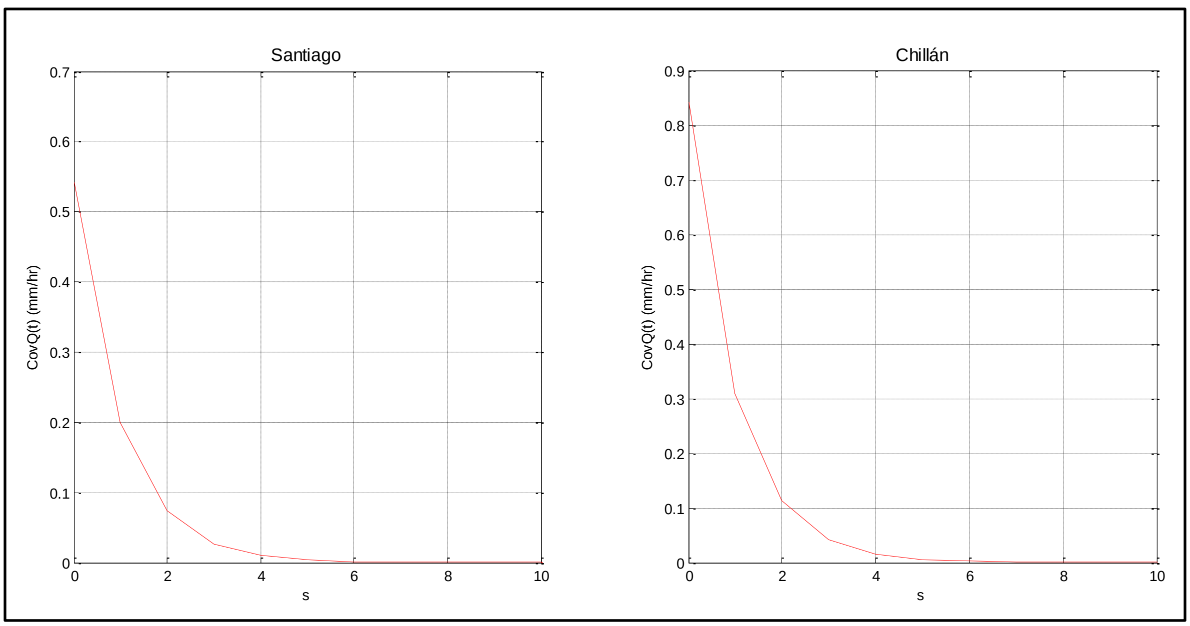

Figura 5-11: Covarianza del escurrimiento superficial.

Generalmente, los caudales siguen una distribución Gamma de 3 parámetros, por lo tanto a partir de los datos de la Tabla 5-10, se determina la función densidad de probabilidades f(x) y la función distribución acumulada F(x). Los resultados se muestran en las Figuras 5-12 para Santiago y 5-13 para Chillán.

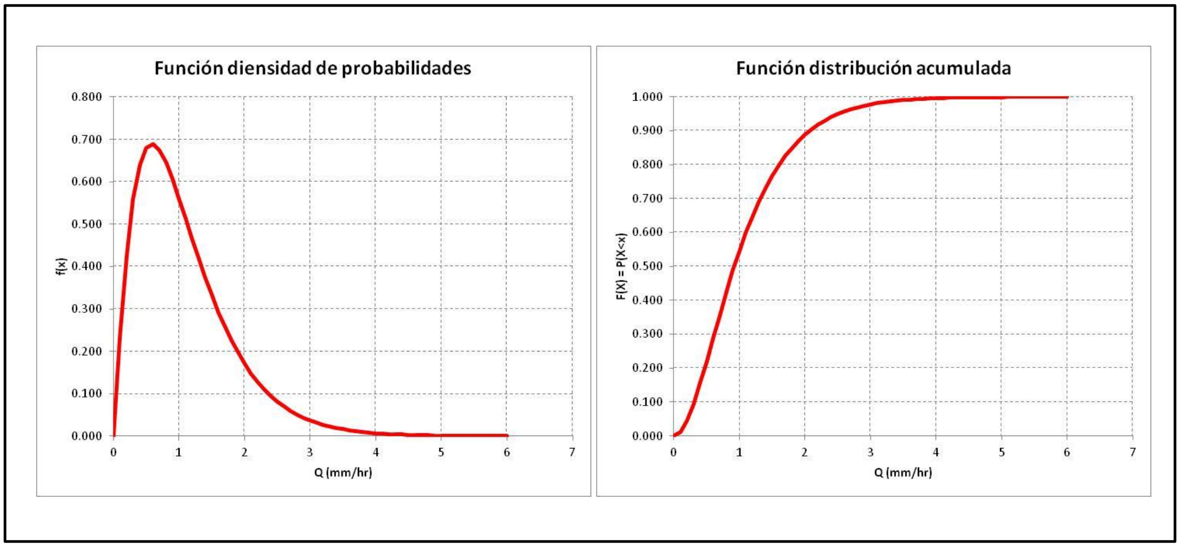

Figura 5-12: Distribución Gamma del escurrimiento superficial. Santiago.

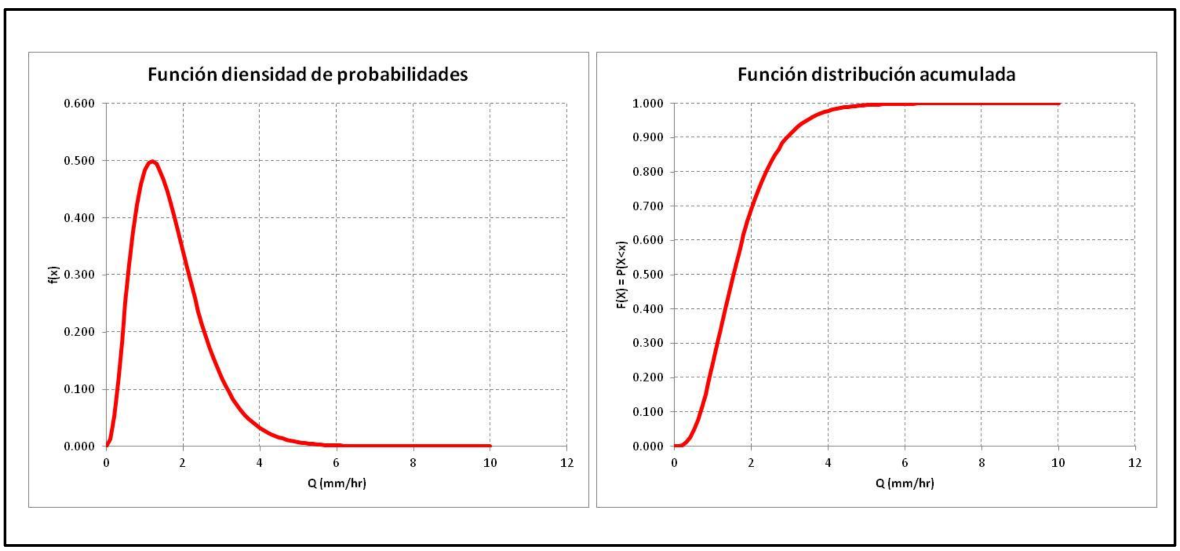

Figura 5-13: Distribución Gamma del escurrimiento superficial. Chillán.

5.3.7 Escurrimiento subterráneo

Los parámetros obtenidos de acuerdo al proceso de shot-noise, son resultados para el largo plazo y en estado estacionario, calculando para $t = \infty$. Tabla 5-11.

Tabla 5-11: Parámetros del escurrimiento subterráneo.

Descripción	Variable	Unidad	Santiago	Chillán
Constante exponencial de decrecimiento	α_s	-	0.500	0.500
Valor esperado del caudal subterráneo	$E[Q_s(t)]$	mm/hr	0.227	0.309
Varianza	$Var[Q_s(t)]$	mm/hr	0.113	0.155
Coeficiente de asimetría	γ	-	6.577	5.212

Además, se tiene la covarianza $Cov(Q_s(t), Q_s(t+s))$, para $t = \infty$. Figura 5-16

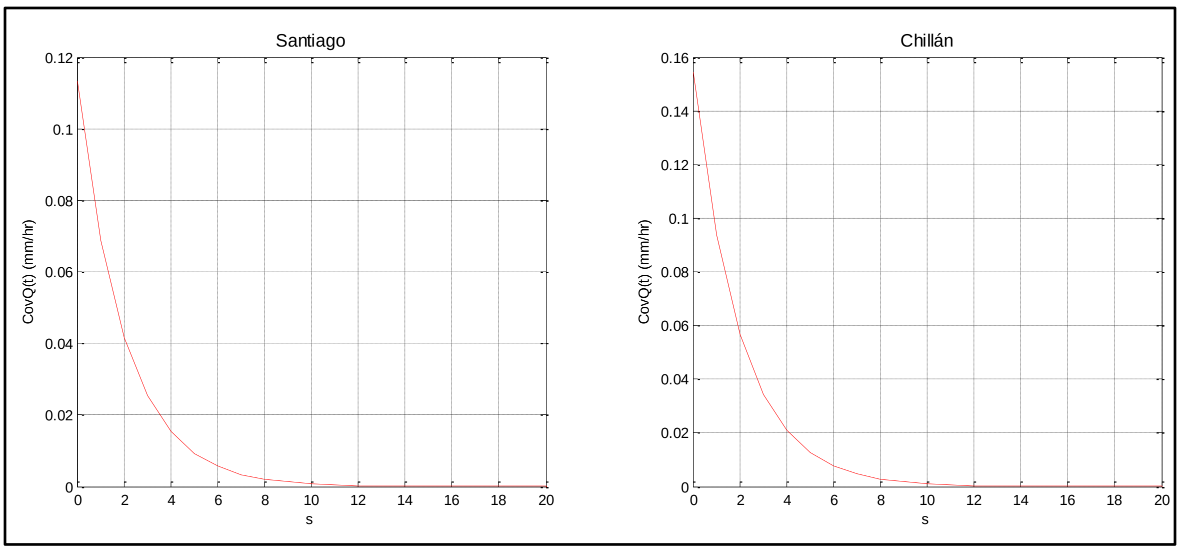

Figura 5-14: Covarianza del escurrimiento subterráneo.

Se asume que el caudal subterráneo, al igual que el caudal superficial, sigue una distribución Gamma de 3 parámetros, Por lo tanto a partir de los datos de la Tabla 5-12, se determina la función densidad de probabilidades f(x) y la función distribución acumulada F(x). Los resultados se muestran en las Figuras 5-17 para Santiago y 5-18 para Chillán.

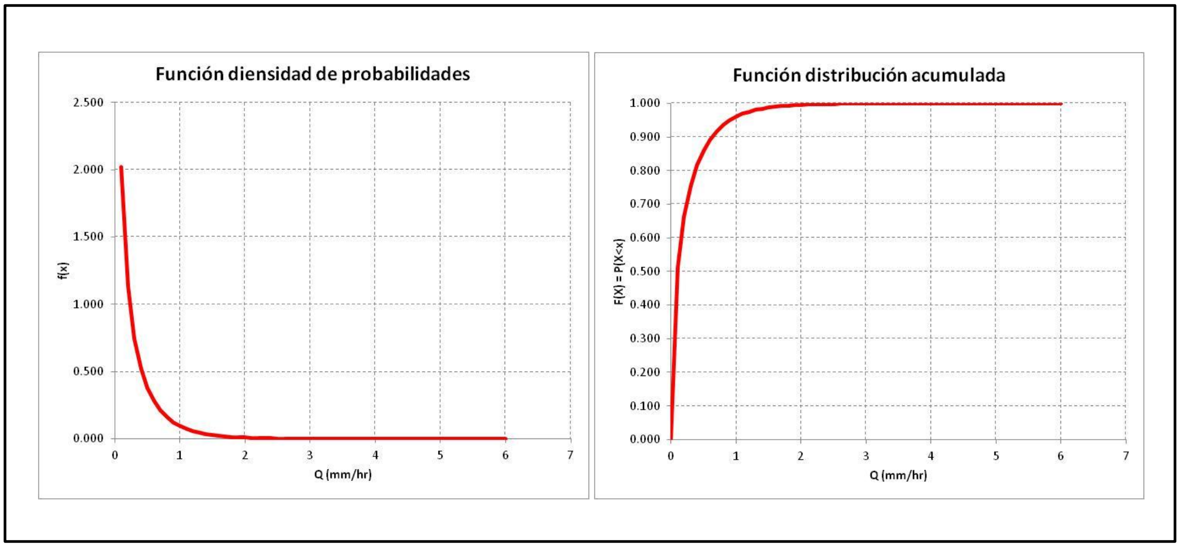

Figura 5-15: Distribución Gamma del escurrimiento subterráneo. Santiago.

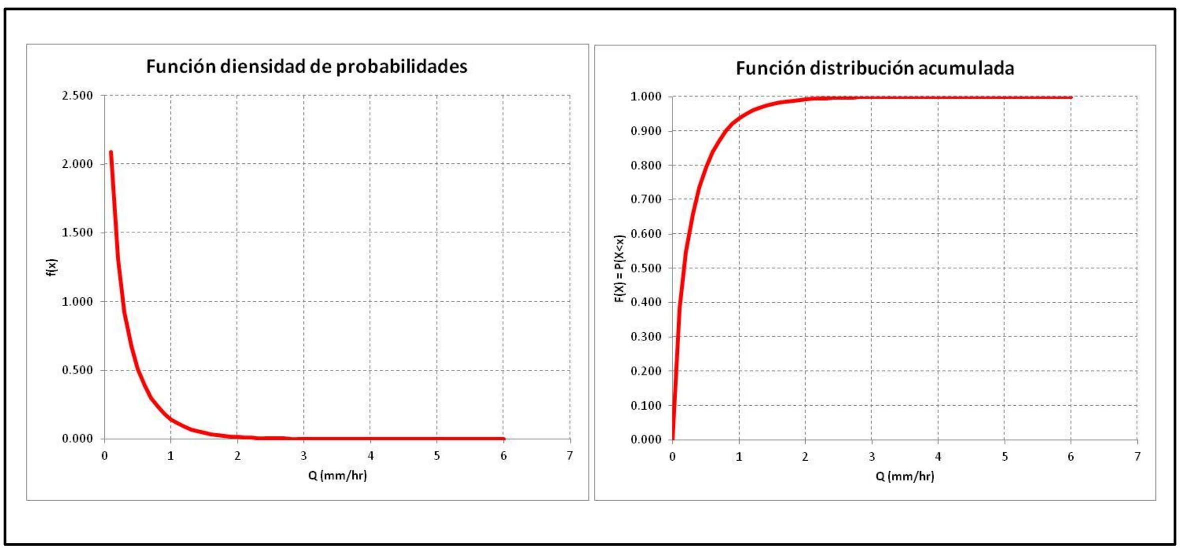

Figura 5-16: Distribución Gamma del escurrimiento subterráneo. Chillán.

Las curvas de frecuencia obtenidas se presentan en términos de periodo de retorno T, cuya relación con función distribución acumulada F(x) se mostró en la ecuación (5.1).

Las Figuras 5-19 y 5-20 muestran las curvas T vs Q(t) obtenidas para la cuencas de Santiago y Chillán respectivamente.

5.4 Modelo Computacional HEC-HMS – Análisis de Sensibilidad

Finalmente, con los registros completos de precipitación y para los parámetros indicados en la Tabla 5-3, se realizó una simulación con el modelo HEC-HMS.

Además, para el flujo superficial, se realizó unos análisis de sensibilidad de dos variables: infiltración y tasa de decrecimiento exponencial, para ser comparados con los resultados obtenidos con el modelo computacional.

En las Figuras 5-19 y 5-20 se muestran la función distribución acumulada de los resultados del modelo HEC-HMS, su ajuste a la distribución Gamma y el análisis de sensibilidad realizado con los resultados del modelo de teoría de colas para diferentes valores del coeficiente de decrecimiento exponencial α.

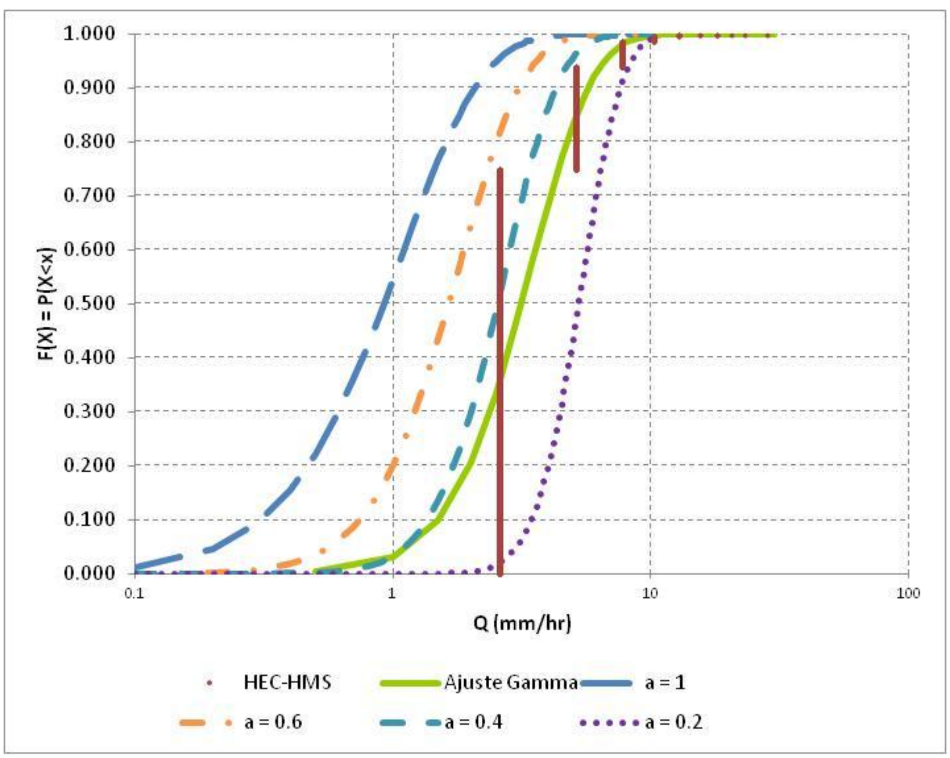

Figura 5-17: Sensibilidad del escurrimiento superficial al coeficiente de decrecimiento exponencial α. Santiago.

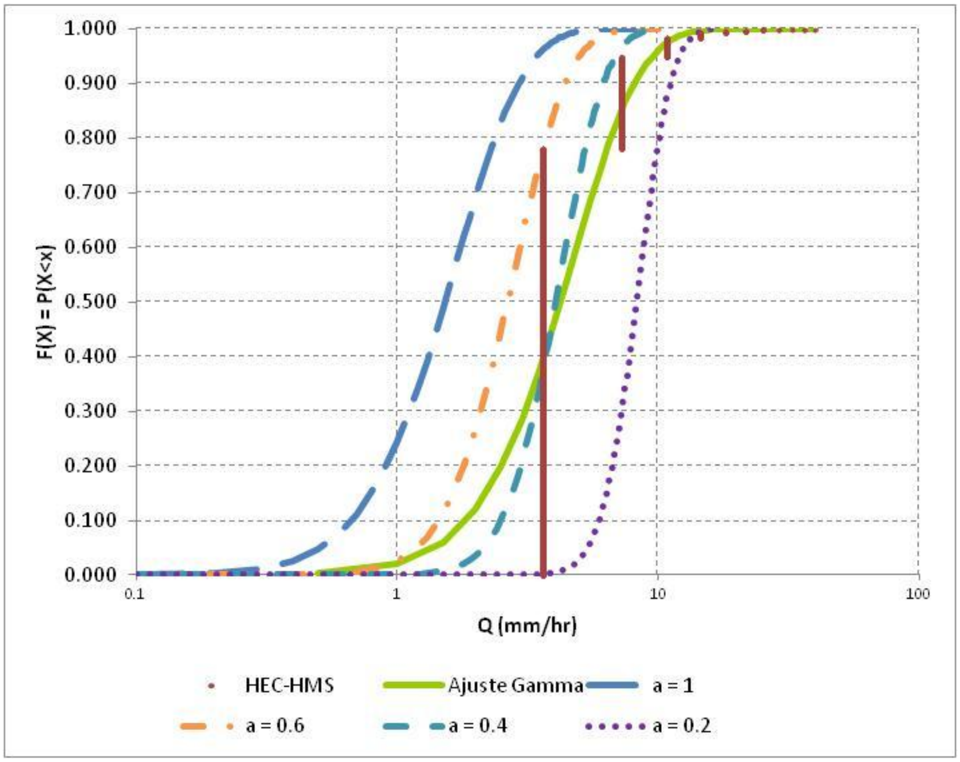

Figura 5-18: Sensibilidad del escurrimiento superficial al coeficiente de decrecimiento exponencial α. Chillán.

Finalmente se realiza un análisis de sensibilidad igual al anterior, pero para una fracción de área impermeable del 100% para ambas cuencas urbanas. Figuras 5-19 y 5-20.

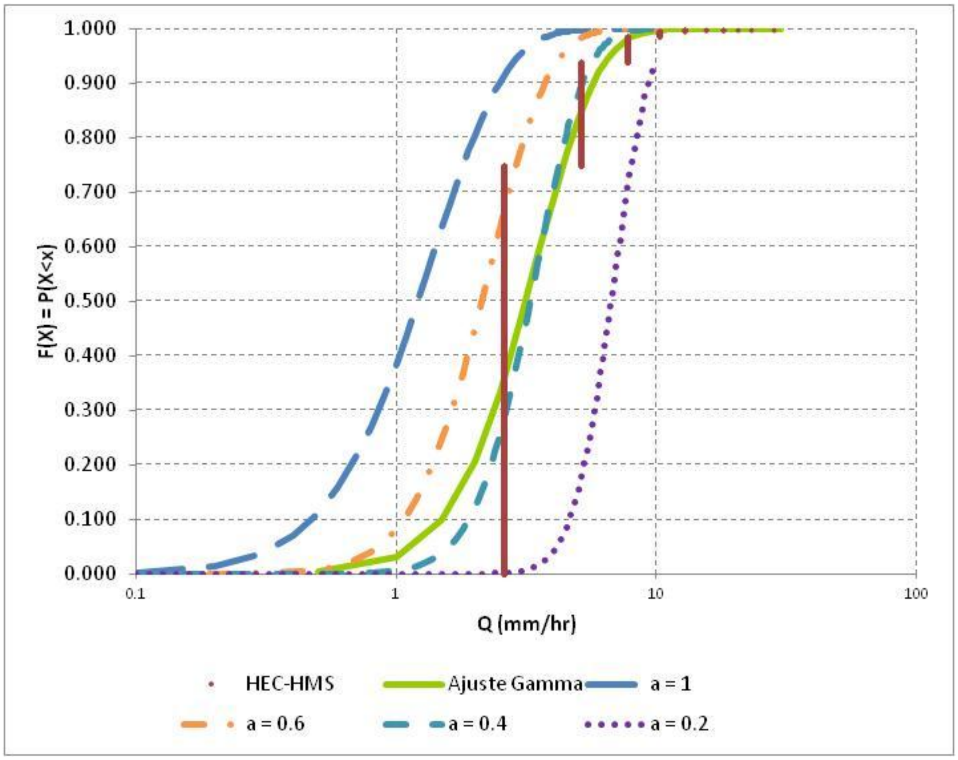

Figura 5-19: Sensibilidad del escurrimiento superficial al coeficiente de decrecimiento exponencial α. 100% de área impermeable. Santiago.

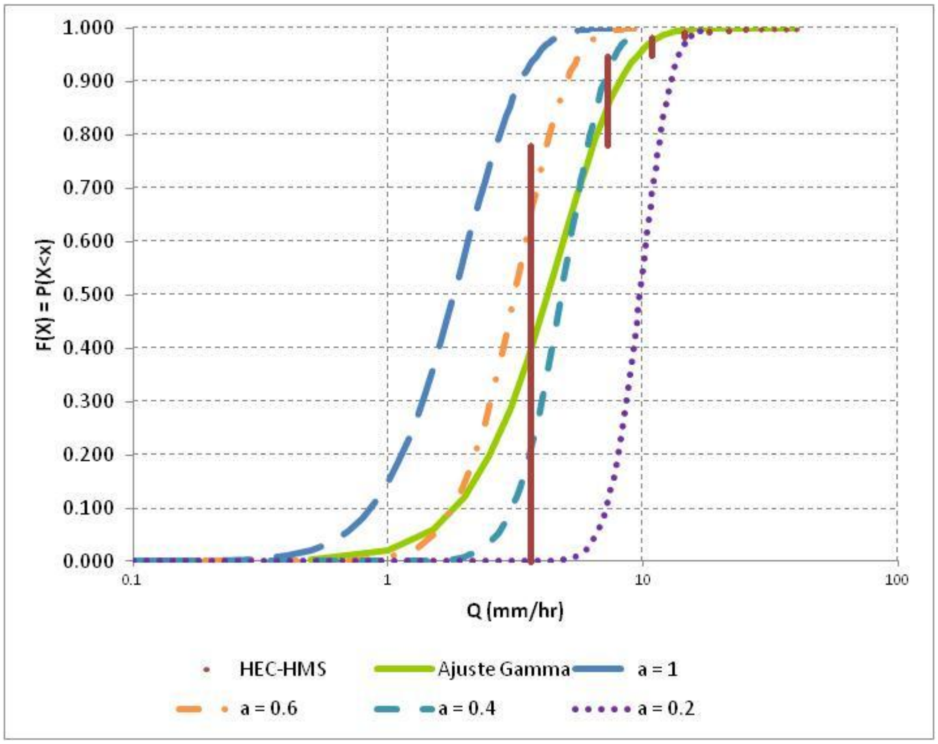

Figura 5-20: Sensibilidad del escurrimiento superficial al coeficiente de decrecimiento exponencial α. 100% de área impermeable. Chillan.

6. CONCLUSIONES

La aplicabilidad de la teoría de colas a fenómenos físicos como la precipitación, resulta un campo poco explorado y atractivo para el desarrollo de modelos analíticos de aplicabilidad simple.

En este trabajo se propuso un modelo estocástico para estimar la función de distribución del escurrimiento superficial en una cuenca simple como respuesta a una precipitación continua. Este se desarrolló aplicando la teoría de colas a fenómenos físicos importantes como son los procesos hidrológicos que ocurren en una cuenca durante la precipitación. El modelo se evaluó en dos cuencas urbanas de la República de Chile, cada una con un registro de precipitación propio. Para ambos casos se ajustó el resultado a una distribución Gamma de 2 parámetros.

Además del escurrimiento superficial, se obtienen como resultados parámetros que reflejan las condiciones de cada proceso hidrológico de la cuenca estudiada durante la precipitación. Por el carácter puntual del modelo, es aplicable a cuencas pequeñas preferentemente urbanas. La alta gama de resultados que presenta el modelo y las posibilidades que brinda, especialmente en el caso de encharcamiento, permite una mejor interpretación de sus resultados a la hora de diseñar estructuras de infiltración o retención.

Evidentemente, la característica exponencial que asume el modelo analizado para la precipitación es algo que se debe tomar en cuenta con mucho cuidado.

Los resultados que se obtuvieron de la aplicación del modelo, se compararon con los obtenidos por medio del modelo computacional HEC-HMS. Se observó que el modelo de caudales presenta sensibilidad a la infiltración y al coeficiente de decrecimiento exponencial. Mientras la infiltración afecta más a la varianza, el coeficiente de decrecimiento exponencial afecta más a la media.

El desarrollo de modelos de simulación de lluvia escorrentía por medio del método de la teoría de colas resulta una alternativa atractiva cuando se quiere obtener parámetros que representen las condiciones en las que entra una cuenca bajo una precipitación. Los resultados obtenidos presentan órdenes de magnitud razonables.

Para el desarrollo de proyectos que contemplen soluciones de drenaje, el modelo representa una buena alternativa pues permite evaluar el trabajo de la cuenca bajo diferentes casos de impermeabilidad, tipos de suelo e intercepción. Incluso permite formar una idea del aporte de agua al flujo subterráneo y la tasa de evaporación que tiene la precipitación.

Además, un futuro desarrollo permitirá: 1) estimar los efectos de diferentes enfoques de gestión y desarrollo sobre el comportamiento de los caudales en cuencas urbanas, 2) considerar modelos matemáticos más complejos en su desarrollo que permitan considerar otras distribuciones para la llegada de la lluvia y la atención de los procesos hidrológicos, 3) entender conceptualmente el efecto de la variabilidad meteorológica y de los procesos involucrados en su comportamiento.

REFERENCIAS

Adams, B. J., Fraser, H. G., Howard, C. D. D. & Hanafy, M. S. (1986). Meteorological data analysis for drainage system design. *Journal of Environmental Engineering*, *112*, (5), 827-848.

Arnold, J. & Williams, J. (1988). Hydrologic modeling using a simulation language based on queueing theory. *Journal of the American Water Resources Association*, *24*, (4), 861-868.

Chow, V. T., Maidment, D. R. & Mays, L. W. (1994). *Hidrología Aplicada*. Santafé de Bogotá, Colombia: McGraw-Hill Book Company, Inc.

Díaz-Granados, M. A., Valdés, J. B. & Bras, R. L. (1984). A physically based flood frequency distribution. *Water Resources Research*, *20*, (7), 995-1002.

Disney, R. L. & Kiessler, P. C. (1987). *Traffic Processes in Queueing Networks. A Markov Renewal Approach*. EE.UU.: The Johns Hopkins University Press.

Eagleson, P. S. (1972). Dynamics of flood frequency. *Water Resources Research*, *8*, (4), 878-898.

Fiering, M. B. (1961). Queuing theory and simulation in reservoir design. *Journal of the Hydraulics Division*, *87*, (6), 39-69.

Gross, D., Shortle, J., Thompson, J. & Harris, C. (2008). *Fundamentals of Queueing Theory* (4a ed.). EE.UU.: John Wiley & Sons, Inc.

González, V. B. (2008). *Modelación de aguas lluvias urbanas a escala municipal*. Memoria para optar al título de Ingeniero Civil de Industrias, con Diploma en Ingeniería Hidráulica. Pontificia Universidad Católica. Santiago, Chile.

Guo, Y. P. & Adams, B. J. (1998a). Hydrologic analysis of urban catchments with event-based probabilistic models - 1. Runoff volume. *Water Resources Research*, *34*, (12), 3421-3431.

Guo, Y. P. & Adams, B. J. (1998b). Hydrologic analysis of urban catchments with event-based probabilistic models - 2. Peak discharge rate. *Water Resources Research*, *34*, (12), 3433-3443.

Jaén Sarmiento, D. & Fernández Larrañaga, B. (2011, Octubre). *Estimación del Tiempo Mínimo entre Tormentas*. Ponencia presentada en el XX Congreso Chileno de Ingeniería Hidráulica. Santiago, Chile.

Kleinrock, L. (1975). *Queueing Systems. Volume I: Theory*. EE.UU.: John Wiley & Sons, Inc.

Kleinrock, L. (1976). *Queueing Systems. Volume II: computer applications*. EE.UU.: John Wiley & Sons, Inc.

Langbein, W. B. (1958). Queuing theory and water storage. *Journal of the Hydraulics Division*, *84*, (5), 1-24.

Medhi, J. (1991). *Stochastic Models in Queueing Theory*. EE.UU.: Academic Press, Inc.

MOP (2007). Consultoría DP.Ll-27. *Estudio de la factibilidad y diseño detallado del mejoramiento del canal de la luz en Chillán, VIII Región. Etapa 2. Estudios básicos*. Tomo I. Ministerio de Obras Públicas. Santiago, Chile.

Palynchuk, B. & Guo, Y. (2008). Threshold analysis of rainstorm depth and duration statistics at Toronto, Canada. *Journal of Hydrology*, *348*, (3-4), 535-545.

Restrepo-Posada, P. J. & Eagleson, P. S. (1982). Identification of independent rainstorms. *Journal of Hydrology*, *55*, (1-4), 303-319.

Rodríguez-Iturbe, I. & Porporato, A. (2004). *Ecohydrology of Water-Controlled Ecosystems*. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

Ross, S. M. (1983). *Stochastic Processes*. EE.UU.: John Wiley & Sons, Inc.

Saaty, T. L. (1961). *Elements of Queueing Theory. With Applications*. EE.UU.: McGraw-Hill Book Company, Inc.

Takács, L. (1962). *Introduction to the Theory of Queues*. EE.UU.: Oxford University Press, Inc.

Yevjevich, V. (1972). *Probability and Statistics in Hydrology*. Fort Collins, Colorado, EE.UU.: Water Resources Publications.

Zegpi Sepúlveda, M. (2008). *Modelo Analítico para el Comportamiento Hidrológico de Cuencas Urbanas*. (Tesis de magíster). Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile.

Zegpi Sepúlveda, M. & Fernández Larrañaga, B. (2010). “Hydrological model for urban catchments – analytical development using copulas and numerical solution”. Hydrological Sciences Journal 55(7), 1123-1136.