



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

CONTROL PREDICTIVO HÍBRIDO PARA FLOTACIÓN DE MINERALES

EDUARDO IGNACIO PUTZ DE LA FUENTE

Tesis presentada a la Dirección de Investigación, Innovación y Postgrado
como parte de los requisitos para optar al grado de
Magister en Ciencias de la Ingeniería

Profesor Supervisor:

ALDO CIPRIANO ZAMORANO

Santiago de Chile, Agosto 2014

© MMXIV, EDUARDO IGNACIO PUTZ DE LA FUENTE



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

CONTROL PREDICTIVO HÍBRIDO PARA FLOTACIÓN DE MINERALES

EDUARDO IGNACIO PUTZ DE LA FUENTE

Miembros del Comité:

ALDO CIPRIANO ZAMORANO

JOSÉ RICARDO PÉREZ CORREA

FERNANDO ROMERO ESPINOSA

JUAN YIANATOS BERNARDINO

BONIFACIO FERNÁNDEZ LARRAÑAGA

Tesis presentada a la Dirección de Investigación, Innovación y Postgrado
como parte de los requisitos para optar al grado de
Magister en Ciencias de la Ingeniería

Santiago de Chile, Agosto 2014

© MMXIV, EDUARDO IGNACIO PUTZ DE LA FUENTE

A mi esposa Mariana

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi agradecimiento al Profesor Aldo Cipriano por entregarme la oportunidad de realizar esta tesis de magister bajo su dirección. Destaco su disponibilidad y apoyo durante todo el desarrollo del programa, cualidades que han sido fundamentales para llevar a buen término este trabajo de investigación.

También agradezco el apoyo incondicional de mi esposa Mariana, su paciencia y confianza. A mis padres, Eduardo y Jacqueline, por sus sabios consejos, generosidad y apoyo en todo momento. De igual forma, agradezco a todas las personas que colaboraron conmigo en este trabajo, con ideas, información y consejos.

Finalmente, agradezco a FONDECYT por el financiamiento otorgado al proyecto de investigación N° 1120047 y a CONICYT por el apoyo económico brindado durante mi estudio de postgrado, a través de la beca de magister nacional.

INDICE GENERAL

AGRADECIMIENTOS	IV
INDICE DE FIGURAS	VII
INDICE DE TABLAS	IX
RESUMEN	X
ABSTRACT	XI
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Introducción	1
1.2. Descripción del problema	3
1.3. Objetivos	6
1.3.1. Objetivo general	6
1.3.2. Objetivos específicos	6
1.4. Organización de la tesis	6
2. MODELO DINÁMICO HÍBRIDO	7
2.1. Introducción	7
2.2. El proceso de flotación de minerales	7
2.3. Variables del proceso	9
2.4. Modelación de una celda de flotación	10
2.4.1. Estado del arte	10
2.4.2. Modos de operación	11
2.4.3. Modelo dinámico híbrido	12
2.5. Resultados de simulación	19
2.5.1. Planta bajo análisis	19
2.5.2. Calibración del modelo	20
2.5.3. Resultados	21

3. IDENTIFICACIÓN DE MODELOS HÍBRIDOS	24
3.1. Introducción	24
3.2. Identificación de modelos híbridos	24
3.2.1. Modelos <i>piecewise affine</i>	24
3.2.2. Método de identificación basado en <i>clustering</i>	26
3.3. Aplicación a flotación de minerales	27
3.3.1. Metodología de identificación	28
3.3.2. Resultados de validación	32
4. CONTROL PREDICTIVO HÍBRIDO	44
4.1. Introducción	44
4.2. Control predictivo híbrido basado en modelos	45
4.3. Aplicación a flotación de minerales	48
4.3.1. Estado del arte	48
4.3.2. Objetivo de la estrategia de control	50
4.3.3. Formulación del modelo de predicción	51
4.3.4. Estrategia de control	55
4.4. Resultados de simulación	56
4.5. Propuesta de arquitectura para implementación	63
5. CONCLUSIONES	64
5.1. Conclusiones del trabajo de tesis	64
5.2. Futuras líneas de investigación	66
BIBLIOGRAFIA	67
ANEXO A. Calibración del simulador dinámico híbrido	72
ANEXO B. Publicación AUTOMINING 2012	75
ANEXO C. Publicación MMM 2013	84
ANEXO D. Publicación en evaluación revista Minerals Engineering	91

INDICE DE FIGURAS

1.1. Planta de flotación de minerales	4
2.1. Esquema de una celda de flotación de mineral	8
2.2. Modos de operación de una celda de flotación, donde $[\delta_1^i \delta_2^i]$	12
2.3. Comportamiento de la tasa de flotación para primera clase	15
2.4. Configuración de la línea de flotación bajo análisis	19
2.5. Resultados de simulación para primera celda de flotación	22
2.6. Resultados de simulación para línea de flotación	23
3.1. Simulación de la línea de flotación para obtención de datos entrada-salida . . .	29
3.2. Ejemplo de variaciones en las entradas del simulador	30
3.3. Señales de identificación para el nivel de pulpa en celda 1 modo 1	33
3.4. Señales de identificación para el nivel de pulpa en celda 1 modo 2	34
3.5. Señales de validación para el nivel de pulpa en celda 1	35
3.6. Señales de validación para el nivel de pulpa en banco 1	36
3.7. Señales de validación para el nivel de pulpa en banco 2	38
3.8. Señales de validación para la ley de cola final	39
3.9. Diagrama de flujo para simulación de modelos híbridos de predicción	40
3.10. Resultados de predicción de los modelos híbridos identificados	41
4.1. Jerarquía de sistemas de control aplicados a flotación de minerales	49
4.2. Sistema de control HMPC aplicado a una línea de flotación	50
4.3. Resultados de simulación estrategia HMPC aplicada a una línea de flotación .	58
4.4. Modos de operación celdas de flotación y controlador predictivo híbrido . . .	59
4.5. Ley de concentrado versus recuperación de mineral bajo estrategia HMPC . . .	60

4.6. Resultados de simulación comparación entre estrategias MPC y HMPC	61
4.7. Propuesta de arquitectura para implementación estrategia HMPC	63

INDICE DE TABLAS

2.1. Datos industriales utilizados en la calibración del simulador dinámico híbrido	20
3.1. Modelos híbridos identificados	42
3.2. Error RMS resultados de predicción	43
4.1. Variables del controlador predictivo híbrido	51
4.2. Parámetros de diseño Controlador Predictivo Híbrido	56
4.3. Error RMS controlador MPC y HMPC	62

RESUMEN

La minería es el sector de mayor actividad en la economía nacional, posicionando a Chile como el mayor productor y exportador de cobre a nivel mundial. Sin embargo, aún existen grandes desafíos que buscan mitigar el aumento en los costos de la energía y la disminución de las leyes de mineral, así como la promoción de nuevas tecnologías. Bajo este contexto, las tecnologías de automatización se presentan como una alternativa viable y necesaria para aumentar la productividad y confiabilidad de los procesos que forman parte de este negocio. Por otra parte, el interés en desarrollar estrategias de control para procesos de gran escala ha llevado a formular nuevas metodologías que consideren el comportamiento global de un proceso industrial, facilitando el diseño, validación y evaluación de estrategias de control avanzado de mayor complejidad. Una de estas metodologías es el control predictivo híbrido, el cual utiliza un modelo dinámico del proceso caracterizado por variables continuas, discretas y reglas lógicas.

En este trabajo se formula una estrategia de control predictivo híbrido para una planta de flotación de minerales, válida para una línea compuesta por celdas y bancos bajo diferentes modos de operación. Para cumplir este objetivo, primero se desarrolla un simulador dinámico híbrido fenomenológico de una línea de flotación, el cual es calibrado mediante datos pertenecientes a una planta industrial. Posteriormente, se formula una metodología de identificación de modelos híbridos global, a partir de datos entrada-salida generados desde el simulador, obteniendo modelos lineales bajo una estructura PWARX, para ser utilizados como modelos de predicción en la estrategia de control. Finalmente, se comprueba que el controlador predictivo híbrido diseñado permite mantener la ley de mineral del flujo de cola de una línea de flotación en un valor de referencia, variando sus modelos de predicción de acuerdo a la condición de operación en la cual se encuentre el proceso.

Palabras Claves: Flotación de Minerales, Sistemas Híbridos, Identificación de Sistemas, Control Predictivo Híbrido.

ABSTRACT

Mining is one of the most important sectors in the national economy, positioning Chile as the largest producer and exporter of copper worldwide. However, there are still major challenges that seek to mitigate the increase in energy costs, decreases in ore grades and promotion of new technologies. In this context, automation technologies are presented as a feasible option and necessary to increase the productivity and reliability of the processes which are part of this business. Moreover, the interest in developing control strategies for large-scale processes has led to formulated new methodologies considering the global behavior of an industrial process, facilitating the design, validation and evaluation of more complex advanced control strategies. One of these methodologies is the hybrid predictive control, which uses a dynamic model of the process characterized by continuous and discrete variables, with logical rules.

In this work, a hybrid predictive control strategy is formulated for a mineral flotation plant, available for a line formed by cells and banks under different operating modes. To achieve this aim, first a phenomenological hybrid dynamic simulator of a flotation line is developed, which is calibrated using data from an industrial plant. Subsequently, a methodology for identifying global hybrid models is formulated from input-output data generated by the simulator, obtaining linear models under a PWARX structure to be used as predictive models in the control strategy. Finally, it is proved that the hybrid predictive controller designed can control the ore grade in the flow tail of a flotation line, varying their prediction models in accordance to the operating condition in which the process is located.

Keywords: Froth Flotation, Hybrid Systems, System Identification, Hybrid Model Predictive Control.

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Introducción

En la actualidad, Chile es el mayor productor de cobre a nivel mundial y es el principal referente en este ámbito en América Latina. A nivel económico, la minería es el sector que más ha aportado al Producto Interno Bruto Nacional (PIB) y dicho metal comprende más de la mitad de las exportaciones del país. Sin embargo, aún existen grandes desafíos que buscan mitigar los altos costos de la energía y afrontar la disminución en las leyes de mineral valioso, junto a promover la innovación tecnológica y la inversión en exploraciones de nuevos yacimientos (Mac-Lean, 2013).

La minería del cobre consta de varias etapas que permiten procesar el mineral de interés y la disposición de éstas depende de las condiciones del yacimiento bajo explotación. Debido a la antigüedad de los yacimientos de Chile, la principal fuente de cobre a nivel nacional corresponde a minerales sulfurados y sus principales etapas de procesamiento consideran la extracción, conminución, clasificación, separación y refinación. De estas etapas, una de las más importantes y complejas es la flotación de minerales, la cual se caracteriza por ser el proceso de separación sólido-líquido más común en la gran minería y cuyo objetivo es incrementar la concentración de la mena con la mayor selectividad posible. Adicionalmente, el proceso de flotación se compone por las etapas *rougher*, *scavenger*, *regrinding* y *cleaner*, las cuales permiten bajo una adecuada estrategia de operación obtener un producto final con recuperaciones y leyes de mineral rentables (Wills & Napier-Munn, 2006).

Por otra parte, los continuos avances tecnológicos en la industria minera del cobre y especialmente en automatización, permiten afirmar que las estrategias de Control Predictivo o *Model Predictive Control* (MPC) son una herramienta viable y vanguardista para afrontar las nuevas problemáticas de este sector industrial (Cortés et al., 2008) (Gatica et al., 2009). Una estrategia MPC contempla la utilización de un modelo dinámico del proceso, con el fin de predecir el efecto de las acciones de control futuras, mediante la minimización de una función objetivo sujeta a restricciones de operación.

Recientemente, diversas estrategias MPC se han aplicado en diferentes etapas del proceso productivo del cobre. Muchas de ellas permiten controlar ciertos procesos únicamente bajo condiciones de operación bien acotadas, siendo necesario disponer de sistemas de control de apoyo y habitualmente bajo una estructura de control jerárquica, por ejemplo, sistemas de control avanzado basados en metodologías MPC, los cuales generan las señales de referencia para controladores convencionales del tipo Proporcional, Integral y Derivativo (PID) calibrados para una única condición de operación o también basados en sistemas expertos formulados gracias al conocimiento adquirido a lo largo de los años (Shean & Cilliers, 2011).

Sin embargo, las exigencias en la producción del mineral de interés junto al continuo avance tecnológico hacen altamente necesario mejorar los niveles de confiabilidad de las plantas industriales, maximizando los niveles de producción y evitando condiciones de operación desfavorables. En este ámbito, en la última década la formulación de sistemas híbridos ha tomado amplia fuerza, permitiendo modelar procesos cuya evolución en el tiempo dependen de variables tanto continuas como discretas. Estas últimas, junto a la utilización de reglas lógicas, permiten reproducir cambios instantáneos en las dinámicas del sistema bajo estudio, siendo posible utilizar un mismo modelo para caracterizar diferentes condiciones de operación de un proceso.

El presente proyecto de tesis propone el estudio de una nueva metodología de Control Predictivo Híbrido o *Hybrid Model Predictive Control* (HMPC) aplicada a una planta de flotación de minerales bajo diferentes condiciones de operación. Primero, se desarrollará un modelo dinámico híbrido para una línea de flotación, calibrado mediante datos industriales. Su objetivo será representar el comportamiento dinámico de la planta bajo diferentes escenarios y permitir la generación de datos del tipo entrada-salida para las variables más preponderantes del sistema. A continuación, se planteará una metodología de identificación de modelos híbridos lineales para su utilización en estrategias de control optimizante. Finalmente, se formulará una metodología de control HMPC centralizada, demostrando que una adecuada metodología de control permite situar la planta en una región de operación óptima.

1.2. Descripción del problema

Una planta de flotación de minerales es un sistema compuesto por diversos equipos de procesamiento, situados en diferentes líneas de producción o circuitos y que cumplen tareas específicas de acuerdo a la etapa a la que pertenecen. Dependiendo de las condiciones de operación de la planta cada circuito puede permanecer abierto o cerrado, mediante la utilización de actuadores discretos que corresponden a válvulas de dos posiciones. Además, ciertos equipos disponen de actuadores continuos representados por válvulas controladas y bombas que operan bajo velocidad variable, gracias a la utilización de variadores de frecuencia. La figura 1.1 presenta el esquema general de una planta de flotación de minerales considerando todas sus etapas y la disposición habitual de los actuadores mencionados.

La primera etapa, llamada flotación *rougher*, está compuesta por celdas agrupadas en bancos, diseñados para separar la mena de la ganga mediante el uso de reactivos y la adición de burbujas de aire desde la parte inferior de cada celda. El mineral concentrado rebosa por la parte superior de la celda y es transportado a una etapa posterior, mientras que la ganga es eliminada a través del flujo de salida o también llamado cola.

La segunda etapa, llamada *regrinding*, permite clasificar el mineral concentrado mediante la utilización de una batería de hidrociclones. En este equipo se procede a separar el mineral que cumple un determinado valor de granulometría, para ser enviado hacia una siguiente etapa, mientras que el concentrado restante, el cual no cumple esta condición, es nuevamente liberado gracias a la utilización de molinos de bolas. La descarga del molino es almacenada en un pozo de pulpa, cuyo flujo de salida es ingresado nuevamente a la batería de hidrociclones para ser reclasificado. Si en esta segunda clasificación el mineral no logra superar el umbral del hidrociclón, éste seguirá ingresando al molino de bolas, recibiendo este flujo el nombre de carga circulante.

La tercera etapa, llamada *cleaner*, utiliza columnas de flotación para realizar una separación exhaustiva del mineral de interés. Gracias a los mayores tiempos de residencia del mineral en estos equipos y a sus características particulares se obtiene un concentrado con leyes de mineral que permiten su comercialización.

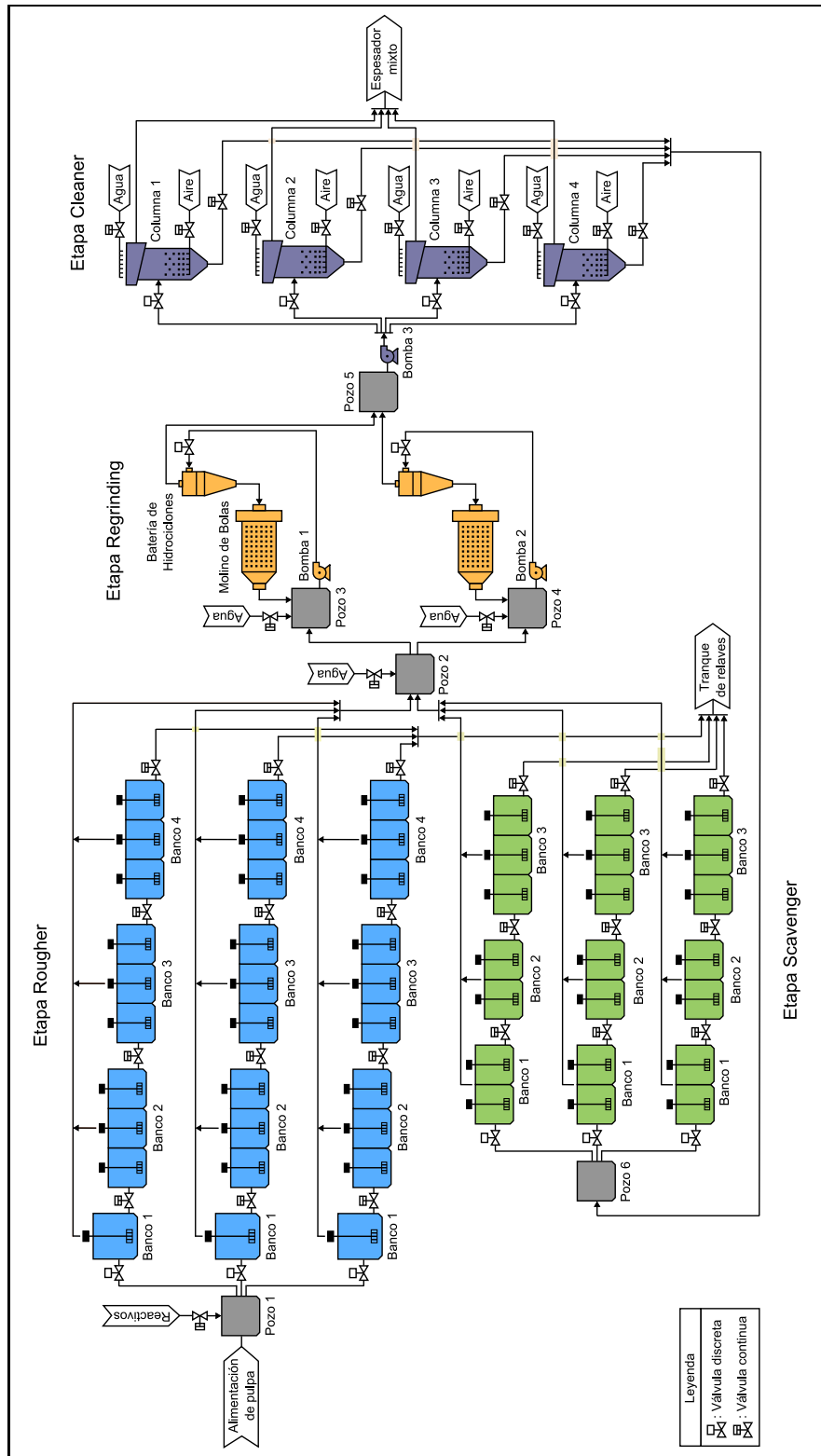


FIGURA 1.1. Planta de flotación de minerales

A continuación, el concentrado que no logró flotar en las columnas sigue a una cuarta etapa, llamada *scavenger*, la cual permite recuperar la mayor cantidad de mineral valioso posible, para ingresar nuevamente a la etapa de *regrinding*. Los flujos de cola de las etapas *rougher* y *scavenger* son descartados, siendo depositados finalmente en tranques de relave.

La figura 1.1 permite apreciar la complejidad en la aplicación de una estrategia de control global a una planta de flotación de minerales, donde cada etapa del proceso presenta objetivos de control diferentes. Por otra parte, la aplicación de estrategias de Control Predictivo a procesos de gran escala implica un considerable esfuerzo en su formulación, debido a la necesidad de disponer de modelos dinámicos válidos para las diferentes condiciones de operación junto a predecir el comportamiento de las variables de mayor relevancia del proceso. Esta última característica permite afrontar este tipo de problemas mediante la utilización de sistemas híbridos, los cuales definen modelos lineales diferentes para cada condición de operación. De esta forma, los esfuerzos en la formulación de metodologías de control se ven reducidos y a su vez se aumenta la robustez del controlador diseñado.

Debido a la complejidad de afrontar el diseño de una metodología de control global, este trabajo de tesis se centra en el diseño de una metodología centralizada para una línea de flotación, calibrada mediante datos pertenecientes a una planta de flotación *rougher* industrial. Cabe mencionar, que cada celda puede disponer de un número determinado de condiciones de operación, las cuales dependerán de los niveles de pulpa y alturas de espuma de cada una de ellas. Adicionalmente, las condiciones de operación de una línea dependerán del número de combinaciones posibles de las condiciones de operación de las celdas que la conforman. Esta particularidad se presenta como uno de los principales desafíos en el diseño de una estrategia de Control Predictivo Híbrido dada la considerable interacción que existe entre las celdas que conforman una línea de flotación. De esta forma, la identificación de modelos híbridos se transforma en una etapa clave en el proceso de diseño, teniendo como objetivo identificar modelos que permitan capturar el mayor número de combinaciones de operación posibles, dado un conjunto de datos entrada-salida.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

El objetivo general del proyecto de tesis es desarrollar una metodología de Control Predictivo Híbrido para una planta de flotación de minerales considerando diferentes condiciones de operación.

1.3.2. Objetivos específicos

Los objetivos específicos necesarios para el desarrollo de este proyecto de tesis son los siguientes:

- Formular un modelo con características dinámicas e híbridas para una planta de flotación de minerales, específicamente celdas de flotación.
- Determinar diferentes condiciones de operación válidas para una celda de flotación de minerales y un conjunto de ellas.
- Desarrollar una metodología de identificación de modelos híbridos lineales mediante datos entrada-salida.
- Generar una metodología basada en HMPC para flotación de minerales.

1.4. Organización de la tesis

El presente trabajo de tesis se encuentra estructurado en capítulos, cuyos principales contenidos se indican a continuación. En el capítulo 2 se describe el modelo dinámico híbrido formulado para una celda de flotación de minerales, presentando las condiciones de operación detectadas y las variables del modelo en particular. El capítulo 3 detalla la metodología utilizada para la identificación de modelos híbridos, mediante datos entrada-salida. El capítulo 4 presenta los fundamentos de la metodología HMPC y los resultados de su aplicación a una línea de flotación, junto a recomendaciones para su implementación en una planta industrial. Finalmente, el capítulo 5 presenta conclusiones generales y posibles futuras líneas de investigación.

2. MODELO DINÁMICO HÍBRIDO

2.1. Introducción

El interés en disponer de herramientas que permitan modelar y predecir el comportamiento de las variables claves de un proceso industrial, satisfaciendo objetivos tales como apoyar la toma de decisiones, optimizar la producción y disponer de plataformas que permitan diseñar y validar estrategias de control, ha llevado a desarrollar nuevas metodologías de modelación que permitan dar respuesta a estas interrogantes.

En el presente capítulo se realiza una descripción general del proceso de flotación de minerales junto a la formulación de un modelo dinámico híbrido válido para una celda y un conjunto de ellas. Adicionalmente, se detalla la integración de este modelo en una línea de producción, cuyas celdas han sido calibradas mediante datos pertenecientes a la etapa *rougher* de una planta industrial. De esta forma, se obtiene un simulador dinámico híbrido apto para ser utilizado en el diseño y validación de metodologías de control aplicadas a flotación de minerales.

2.2. El proceso de flotación de minerales

La flotación es un proceso físico-químico ampliamente utilizado en la industria de procesamiento de minerales, el cual permite separar los minerales sulfurados de interés del resto de minerales que conforman la mayor parte de la roca original. Esta tarea se logra gracias a la característica de hidrofobicidad de las partículas de mineral, las cuales mediante el uso de reactivos (colectores, espumantes, depresantes y aditivos), se adhieren selectivamente a burbujas de aire (Wills & Napier-Munn, 2006).

El proceso de flotación se inicia recibiendo la pulpa proveniente desde la etapa de molienda, en la cual se incorporan los reactivos necesarios para una correcta separación. A continuación, esta pulpa ingresa a un conjunto de estanques conectados en serie, denominados celdas de flotación. A cada estanque se agrega aire a través de su eje central o impulsor, tal como se aprecia en la figura 2.1.

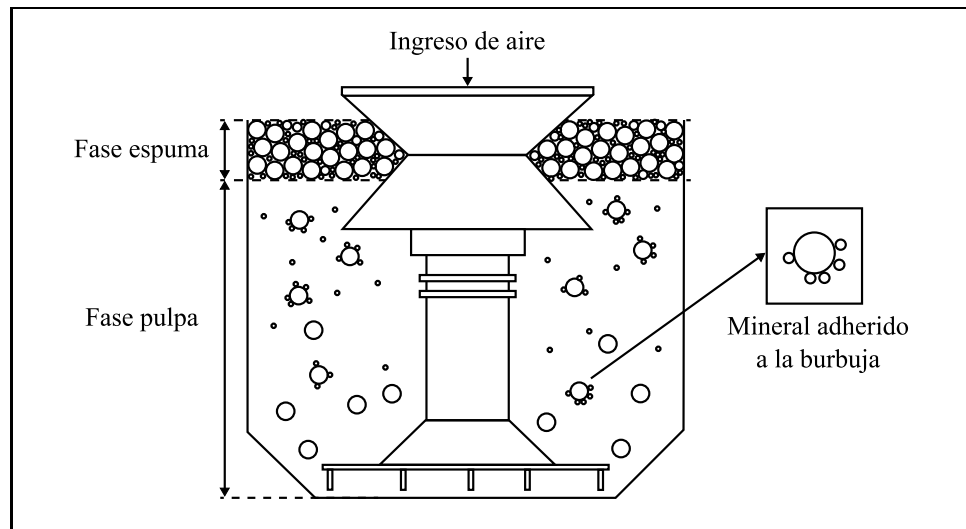


FIGURA 2.1. Esquema de una celda de flotación de mineral

Este aire ingresa a la fase pulpa desde la parte inferior generando burbujas, las cuales suben y se acumulan en la parte superior de la celda. A lo largo de esta trayectoria, las partículas de mineral se adhieren a las burbujas y son concentradas en la parte superior, recibiendo el nombre de fase espuma. Cabe mencionar que la celda se mantiene en una continua agitación, con el fin de evitar posibles embancamientos.

La acumulación de mineral en la parte superior del equipo recibe el nombre de concentrado, el cual rebosa por el borde de la celda ingresando a canaletas que lo conducen a etapas posteriores. La pulpa restante es reprocesada en otras celdas, donde este flujo recibe el nombre de cola y es evacuado por el fondo de la celda. Finalmente, cabe señalar que un aspecto clave para llevar a cabo satisfactoriamente este proceso de separación, es la presencia de una interfaz pulpa-espuma, como se aprecia en la figura 2.1.

El proceso de flotación se repite en varios ciclos, donde el conjunto de etapas y sus respectivos equipos permiten obtener un producto con altas recuperaciones y leyes de mineral económicamente rentables. Por ley se entiende a la razón porcentual entre el flujo másico de mineral y el flujo másico total de sólido. De manera similar, la recuperación corresponde a una medida de eficiencia del proceso de flotación, siendo definida como la razón porcentual entre el flujo másico de mineral contenido en el concentrado y el flujo másico de mineral contenido en la alimentación (Yianatos, 2005).

En un proceso de flotación es posible encontrar diferentes circuitos de concentración, cuyas configuraciones dependen de diversas características, tales como el tipo de mineral a ser flotado, su granulometría y ley (Yianatos, 2005). Debido a estos motivos, en la industria de procesamiento de minerales se encuentran diferentes configuraciones adaptadas a las condiciones propias de cada yacimiento, como diversos equipos a lo largo del proceso. Las principales etapas corresponden a *rougher*, *scavenger*, *regrinding* y *cleaner*, las cuales son comunes a todo proceso de flotación. Por otra parte, la etapa *rougher* dispone de equipos de mayor capacidad, debido a los altos flujos de pulpa que transporta y al ser la primera etapa del proceso de flotación. En cambio, las etapas posteriores *regrinding*, *scavenger* y *cleaner* cuentan con equipos de menor capacidad dado que los flujos de concentrado son considerablemente menores.

2.3. Variables del proceso

La flotación es un proceso altamente complejo, con comportamientos no lineales, retardos de tiempos entre equipos, perturbaciones asociadas a las condiciones del mineral y un importante número de variables que aun no son posibles de medir y modelar. Adicionalmente, la flotación se ve afectada por comportamientos cuyas dinámicas están interconectadas, por ejemplo variaciones en el flujo de aire afectan al tamaño de las burbujas, a la velocidad de adhesión de partículas de mineral, a la altura de espuma, etc (Shean & Cilliers, 2011).

Teniendo en cuenta las dificultades mencionadas, Cortés et al. (2008) definen las siguientes variables medibles en un proceso de flotación:

- Niveles de pulpa y altura de espuma en celdas o bancos.
- Flujos de pulpa y leyes de mineral en la alimentación, concentrado y cola.
- Flujos de aire inyectados en celdas y columnas.
- Flujos de agua de lavado en columnas.
- Flujos de agua en pozos distribuidores (etapa *regrinding*).
- Velocidades de espuma en celdas.
- Tasas de adición de reactivos.

La medición de cada una de estas variables y la ubicación en planta de cada sensor asociado varía respecto a la configuración de la planta bajo análisis y a las características del sistema de control que está disponga.

De manera similar, Cortés et al. (2008) definen como perturbaciones críticas en un proceso de flotación, las siguientes:

- Variaciones en el flujo másico de sólido en la alimentación.
- Variaciones en la granulometría del mineral.
- Variaciones en el porcentaje de sólido en la alimentación.
- Variaciones en las leyes del mineral en la alimentación.

En consecuencia, Wills & Napier-Munn (2006) establecen que las variaciones asociadas a estas variables deben ser rápidamente detectadas, con el fin de definir procedimientos de operación que permitan operar el proceso de flotación satisfactoriamente.

2.4. Modelación de una celda de flotación

2.4.1. Estado del arte

A la fecha, se han desarrollado diversos modelos dinámicos en la búsqueda de poder representar el comportamiento de una celda de flotación o de un conjunto de ellas. Los modelos más simples corresponden a los utilizados para evaluar estrategias de control basadas en niveles de pulpa de una celda o también llamados de una fase, destacándose los trabajos de Stenlund & Medvedev (2002) y Kämpjärvi & Jämsä-Jounela (2003).

Un segundo grupo de modelos corresponden a los basados en condiciones mineralógicas, formulados a través de un balance de mineral al interior de una celda. En este grupo se pueden encontrar los basados en una fase, destacándose los trabajos de Casali et al. (2002) y Sbarbaro et al. (2008). Adicionalmente, se han desarrollado modelos que permiten representar el comportamiento e interacción entre las dos fases presentes en una celda, destacándose los trabajos de Pérez-Correa et al. (1998), Rojas & Cipriano (2010) y Bascur (2010).

Recientemente se han realizado nuevos esfuerzos con el fin de desarrollar modelos más complejos, destacándose el trabajo de Ortiz & Toro (2013), el cual propone modelar una celda a través de un balance de aire en cada fase, para su posterior aplicación en entrenamiento de operadores. No obstante, los modelos mencionados únicamente permiten representar el comportamiento dinámico de una celda de flotación bajo un solo modo de operación, restringiendo su aplicación en el diseño y validación de metodologías de control.

2.4.2. Modos de operación

Un sistema híbrido es un sistema dinámico heterogéneo cuyo comportamiento es determinado mediante la interacción entre dinámicas continuas, dinámicas discretas y reglas lógicas (Paoletti et al., 2007). Las dinámicas continuas y discretas son representadas a través de variables pertenecientes a un conjunto continuo y discreto, respectivamente. Adicionalmente, las reglas lógicas permiten establecer diferentes modos de operación, cuya evolución en el tiempo es determinada mediante el uso de variables lógicas auxiliares (Bemporad & Morari, 1999). Su utilización permite generar cambios instantáneos en los componentes continuos del sistemas, los cuales generalmente son representados por ecuaciones diferenciales.

La particularidad de este tipo de sistemas es su versatilidad al permitir representar dinámicas no lineales y procesos que involucren transiciones entre diferentes condiciones de operación. Estas característica son muy comunes en plantas de procesamiento de minerales, especialmente en celdas de flotación. En consecuencia, cada celda se modela utilizando dos variables lógicas auxiliares δ_1^i y δ_2^i , cuya evolución en el tiempo es determinada según las siguientes dos reglas lógicas:

$$\delta_1^i = \begin{cases} 1 & \text{si } h_p^i \leq h_{max}^i \\ 0 & \text{si } h_p^i > h_{max}^i \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\delta_2^i = \begin{cases} 1 & \text{si } h_p^i + h_e^i > h_{max}^i \\ 0 & \text{si } h_p^i + h_e^i \leq h_{max}^i \end{cases} \quad (2.2)$$

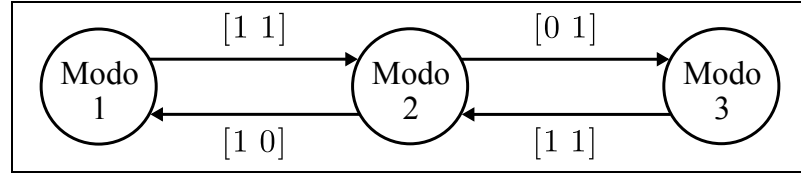


FIGURA 2.2. Modos de operación de una celda de flotación, donde $[\delta_1^i \ \delta_2^i]$.

Donde el superíndice $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ indica el número de celda, h_p^i el nivel de pulpa, h_e^i la altura de espuma y h_{max}^i la altura máxima disponible de una celda. Los subíndices p y e indican si la variable corresponde a la fase pulpa o espuma, respectivamente. La figura 2.2 muestra la evolución de los tres modos de operación definidos para una celda de flotación, los cuales son: (1) operación con presencia de fase pulpa y espuma, pero sin rebose de concentrado desde la parte superior de la celda, (2) operación normal con presencia de fase pulpa y espuma, con rebose de concentrado desde la parte superior de la celda y (3) rebose de la fase pulpa a través de la parte superior de la celda, con ausencia de fase espuma.

Cabe señalar, que una celda de flotación puede disponer de otros modos de operación adicionales a los definidos en este trabajo de investigación, cuya elección dependerá del grado de complejidad y propósito para el cual el modelo dinámico híbrido desee ser desarrollado, por ejemplo, cambios en el flujo de aire inyectado a la celda, apertura y cierre de líneas de producción en paralelo, entre otros.

2.4.3. Modelo dinámico híbrido

El proceso de flotación de minerales puede caracterizarse con diferentes niveles de detalle, dependiendo de la aplicación y del propósito para el cual éste desea ser utilizado. Además, si se considera la complejidad del proceso físico-químico que toma parte al interior de una celda, se hace necesario realizar diferentes balances volumétricos y másicos que permitan representar su comportamiento dinámico.

Este trabajo integra dos modelos dinámicos, ambos basados en un balance de masa, donde el primero permite modelar el comportamiento del mineral al interior de cada una de las fases de la celda, y el segundo permite modelar el comportamiento de la fase pulpa y de los flujos asociados a ella.

2.4.3.1. Modelación del mineral

El modelo mineralógico desarrollado por Pérez-Correa et al. (1998) permite representar el comportamiento de una celda de flotación de minerales a través de la interacción entre dos fases: pulpa y espuma. Además, considera los flujos volumétricos y másicos de alimentación, concentrado y cola. El modelo dinámico híbrido se ha desarrollado en base a los siguientes supuestos, válidos para los tres modos de operación establecidos:

- El mineral a flotar corresponde a calcopirita (CuFeS_2) y se encuentra clasificado en dos clases, una de mineralogía alta y otra baja (ganga).
- Cada fase al interior de la celda de flotación se encuentra perfectamente mezclada; de esta forma las concentraciones en las fases pulpa y espuma son iguales a las concentraciones en los flujos de cola y concentrado, respectivamente.
- La transferencia de mineral entre las fases pulpa y espuma ocurre en ambas direcciones, dependiendo de la tasa de flotación en la pulpa (α_p) y la tasa de drenaje (α_e) en la espuma.
- Se considera un número de r granulometrías de mineral diferentes.
- Existe una inyección constante de aire al interior de la celda de flotación (autoaspirantes).
- La sección transversal de la celda de flotación es constante.

Mediante la aplicación de un balance de masas para cada una de las fases (pulpa y espuma) y considerando los tres modos de operación establecidos en la figura 2.2, se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales que permiten representar el comportamiento del mineral al interior de una celda de flotación:

$$\dot{m}_p^{ijk} = M_f^{ijk} + \alpha_e^{ijk} m_e^{ijk} - \left[\alpha_p^{ijk} + \frac{Q_t^i}{V_p^i} \right] m_p^{ijk} \quad (2.3)$$

$$\dot{m}_e^{ijk} = \alpha_p^{ijk} m_p^{ijk} - \left[\alpha_e^{ijk} + \frac{Q_c^i}{V_e^i} \right] m_e^{ijk} \quad (2.4)$$

Donde:

- m_p^{ijk}, m_e^{ijk} : masa de mineral contenido en las fases pulpa y espuma.
- $\alpha_p^{ijk}, \alpha_e^{ijk}$: tasas de flotación y drenaje de mineral contenido en las fases pulpa y espuma.
- M_f^{ijk} : flujo másico de mineral en la alimentación.
- Q_t^i, Q_c^i : flujos volumétricos de pulpa en la cola y concentrado.
- V_p^i, V_e^i : volúmenes totales de las fases pulpa y espuma.

En estas ecuaciones, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ es el número de celda, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ es el número de clase y $k \in \{1, 2, \dots, r\}$ es el número de granulometría del mineral. Las tasas α_p^{ijk} y α_e^{ijk} dependen de los flujos de dosificación de colector y espumante:

$$\alpha_p^{ijk} = a^{ijk}Q_{col}^3 + b^{ijk}Q_{col}^2 + c^{ijk}Q_{col} + \alpha_{col}^{ijk} \quad (2.5)$$

$$\alpha_e^{ijk} = d^{ijk}Q_{col} + e^{ijk}Q_{esp} + \alpha_{esp}^{ijk} \quad (2.6)$$

Donde $a^{ijk}, b^{ijk}, c^{ijk}, d^{ijk}, e^{ijk}, \alpha_{col}^{ijk}$ y α_{esp}^{ijk} son variables de ajuste del modelo, calibradas mediante datos industriales. Adicionalmente, Q_{col} y Q_{esp} corresponden a los flujos de dosificación de colector y espumante incorporados a la entrada del proceso de flotación. La figura 2.3 muestra el comportamiento de la tasa de flotación para la primera clase en función de la dosificación de colector, según ecuación (2.5). La tasa de drenaje puede calcularse a partir de la tasa de flotación, para cada clase.

Los volúmenes de las fases pulpa y espuma son los siguientes:

$$V_p^i = A^i h_p^i (1 - \epsilon_p^i) \quad (2.7)$$

$$V_e^i = A^i h_e^i (1 - \epsilon_e^i) \quad (2.8)$$

Donde V_p^i y V_e^i son los volúmenes de las fases pulpa y espuma de la celda i , respectivamente. Las variables ϵ_p^i y ϵ_e^i corresponden a los *holdup* de aire en cada una de las fases mencionadas y A^i es el área de la celda.

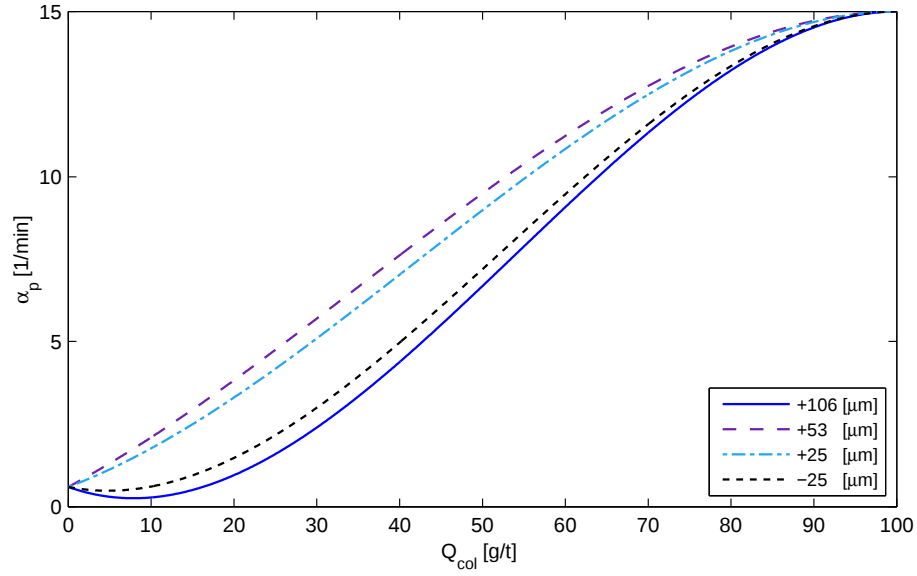


FIGURA 2.3. Comportamiento de la tasa de flotación para primera clase

2.4.3.2. Modelación del nivel de pulpa

El modelo hidráulico desarrollado por Kämpjärvi & Jämsä-Jounela (2003) permite representar el nivel de pulpa al interior de una celda, mediante la realización de un balance de masa total y definiendo una variación lineal entre la densidad y la masa de sólido. Considerando que la altura de espuma es despreciable al compararse con el nivel de pulpa (Sbarbaro et al., 2008) y teniendo en cuenta los tres modos de operación definidos previamente en la figura 2.2, se obtiene la siguiente ecuación diferencial que permite representar el nivel de pulpa al interior de una celda de flotación:

$$\dot{h}_p^i = \frac{1}{A^i} (Q_f^i - Q_t^i - Q_c^i) \delta_1^i \quad (2.9)$$

Donde:

- h_p^i : nivel de pulpa al interior de la celda.
- Q_f^i : flujo volumétrico de pulpa en la alimentación.
- Q_t^i, Q_c^i : flujos volumétricos en la cola y concentrado, respectivamente.
- δ_1^i : variable auxiliar asociada a la regla lógica definida por ecuación (2.1).
- A^i : área de la celda.

De acuerdo al modelo hidráulico desarrollado por Stenlund & Medvedev (2002), el flujo volumétrico de pulpa en la cola se deriva de leyes físicas basadas en el principio de Torricelli. Además, considerando un modelo lineal para la válvula de control v^i , situada a la salida de la celda, el flujo de cola para una celda i es el siguiente:

$$Q_t^i = \alpha_t^i v^i \sqrt{h_p^i - h_p^{i+1} + \Delta h^i} \quad (2.10)$$

Donde:

- α_t^i : constante de balance a ser calibrada mediante datos industriales.
- v^i : valor de apertura de la válvula de control.
- h_p^{i+1} : nivel de pulpa de la celda siguiente.
- Δh^i : caída hidráulica entre dos celdas consecutivas.

Es posible apreciar que el flujo volumétrico en la salida de la última celda de una línea de flotación debe modelarse considerando $h_p^{i+1} = 0$. Además, el flujo volumétrico de pulpa en la alimentación de la celda siguiente corresponde al flujo volumétrico en la cola de la celda precedente, es decir $Q_f^{i+1} = Q_t^i$.

El flujo volumétrico de concentrado de una celda se modela como una función lineal del nivel de pulpa, altura de espuma y altura máxima disponible de una celda (Bascur, 2010). Teniendo en cuenta los tres modos de operación definidos en la figura 2.2, el flujo volumétrico de concentrado es el siguiente:

$$Q_c^i = \alpha_c^i (h_p^i + h_e^i - h_{max}^i) \delta_1^i \delta_2^i + (Q_f^i - Q_t^i) (1 - \delta_1^i) \quad (2.11)$$

Donde:

- α_c^i : constante de balance a ser calibrada mediante datos industriales.
- h_e^i : altura de espuma.
- h_{max}^i : altura máxima disponible para una celda.
- δ_2^i : variable auxiliar asociada a la regla lógica definida por ecuación (2.2).

Las variables auxiliares δ_1^i y δ_2^i permiten variar el flujo de concentrado en función del nivel de pulpa h_p^i y altura de espuma h_e^i , definiendo el modo de operación de la celda. Por otra parte, la altura de espuma puede considerarse constante (Barrera & González, 1993), como una función del flujo de aire y dosificación de espumante (Barbian et al., 2003) o como la diferencia entre la altura máxima de la celda y el nivel de pulpa (Sbarbaro et al., 2008). A la fecha no existen mayores desarrollos en la modelación de esta variable, por lo cual en el estudio de simulación realizado se considera constante.

2.4.3.3. Modelación de condiciones mineralógicas

Las variables que permiten caracterizar el desempeño del proceso de flotación se obtienen combinando los modelos dinámicos mineralógico e hidráulico. Por lo tanto, los flujos másicos de cola y concentrado, válidos para los tres modos de operación definidos en la figura 2.2, son los siguientes:

$$M_t^{ijk} = \frac{Q_t^i}{V_p^i} m_p^{ijk} \quad (2.12)$$

$$M_c^{ijk} = \frac{Q_c^i}{V_e^i} m_e^{ijk} \quad (2.13)$$

Donde M_t^{ijk} y M_c^{ijk} son los flujos másicos de mineral en la cola y concentrado para una celda i , clase j y granulometría k , respectivamente. En consecuencia, las leyes de cobre en la cola y concentrado para una celda i , las cuales dependen dinámicamente de las ecuaciones diferenciales (2.3), (2.4) y (2.9), son las siguientes:

$$l_t^i = l_{cu} \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^r M_t^{ijk} l_{cp}^j}{\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^r M_t^{ijk}} \quad (2.14)$$

$$l_c^i = l_{cu} \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^r M_c^{ijk} l_{cp}^j}{\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^r M_c^{ijk}} \quad (2.15)$$

Donde:

l_t^i, l_c^i : leyes de cobre en la cola y concentrado.

l_{cp}^j : ley de calcopirita asociada a cada clase, calibrada mediante datos industriales.

l_{cu} : ley de cobre en una molécula de calcopirita, aproximadamente 34.61 %.

La ley de concentrado final de una línea de flotación se obtiene considerando la suma de todos los flujos de concentrado de las celdas o bancos que forman parte de la línea. Además, su evolución en el tiempo depende dinámicamente de las ecuaciones diferenciales (2.3), (2.4) y (2.9) pertenecientes al modelo dinámico de cada celda o banco. Por lo tanto, la ley de concentrado final se define como:

$$l_c = l_{cu} \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^r M_c^{ijk} l_{cp}^j}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^r M_c^{ijk}} \quad (2.16)$$

La ley de cola final de una línea de flotación corresponde a la ley de cola de la última celda o banco de la línea, es decir $l_t = l_t^n$. Finalmente, la recuperación de mineral se obtiene dividiendo el total de cobre fino en el concentrado por el total de cobre fino en la alimentación. Además, considerando que $l_c \gg l_t$ se puede obtener la siguiente ecuación que permite calcular la recuperación de mineral de una línea:

$$R = 100 \left(1 - \frac{l_t}{l_f} \right) \quad (2.17)$$

Donde R es la recuperación de mineral y l_f es la ley de mineral en la alimentación de la línea. Esta ecuación también puede emplearse para calcular la recuperación de una celda o banco, utilizando las leyes de mineral correspondientes. Cabe mencionar, que si bien las ecuaciones (2.12), (2.13), (2.14), (2.15), (2.16) y (2.17) son válidas sólo bajo condiciones de estado estacionario, no obstante serán utilizadas para representar el comportamiento mineralógico del proceso de flotación en condiciones dinámicas, según lo han propuesto Barrera & González (1993), Pérez-Correa et al. (1998) y Rojas & Cipriano (2010).

2.5. Resultados de simulación

2.5.1. Planta bajo análisis

La figura 2.4 muestra la configuración e instrumentación habitual de una línea de flotación *rougher*, la cual consiste en un conjunto de celdas conectadas en series y agrupadas en bancos. Cada celda y banco dispone de una válvula de control en el flujo de cola y presenta un salto hidráulico respecto del siguiente equipo, con el fin de asegurar el sentido del flujo de pulpa a través de la línea.

Los flujos de concentrado de cada celda convergen a una canaleta común, la cual permite agrupar estos flujos individuales en un único flujo de concentrado final para ser enviado a una etapa posterior de *regrinding*. Por otra parte, el flujo de cola corresponde al flujo de la última celda de la línea, el cual se envía a piscinas de decantación, con el fin de recuperar la mayor cantidad de agua para su reutilización en el proceso. La pulpa restante de esta etapa de filtrado y que dispone de un mayor porcentaje de sólidos, es enviada a tranques de relave.

La instrumentación considera sensores de flujo y analizadores de ley instalados en la alimentación, cola y concentrado final de la línea. Adicionalmente, mediante sensores de nivel es posible conocer el nivel de la fase pulpa en cada celda o banco, el cual junto con la válvula de control situada en el flujo de cola, permiten configurar un lazo de control regulatorio.

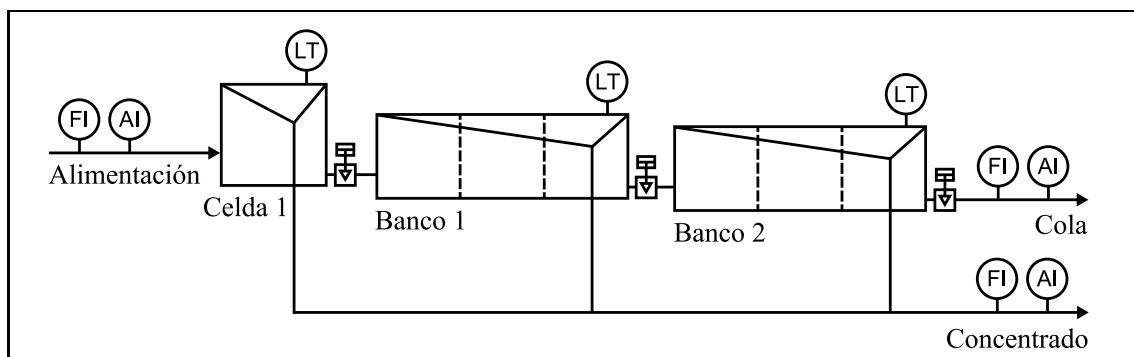


FIGURA 2.4. Configuración de la línea de flotación bajo análisis

2.5.2. Calibración del modelo

La calibración del modelo se realizó utilizando datos provenientes de un balance mineralógico en estado estacionario de una línea de la etapa *rougher* de una planta de flotación industrial, la cual dispone de una configuración 1-3-3, siendo el volumen de la primera celda 127.4 m³ y las celdas restantes 85 m³. Las constantes de equilibrio se obtienen igualando a cero las ecuaciones diferenciales (2.3), (2.4) y (2.9), es decir:

$$\dot{m}_p^{ijk} = 0 \quad \wedge \quad \dot{m}_e^{ijk} = 0 \quad \wedge \quad \dot{h}_p^i = 0 \quad (2.18)$$

De esta forma, es posible obtener las constantes de balance α_t^{ijk} y α_c^{ijk} junto a las tasas de flotación y drenaje α_p^{ijk} y α_e^{ijk} , respectivamente. La tabla 2.1 presenta los principales datos de calibración.

TABLA 2.1. Datos industriales utilizados en la calibración del simulador dinámico híbrido

Variable	Unidad	Celda 1		Banco 1		Banco 2		Total
		Clase 1	Clase 2	Clase 1	Clase 2	Clase 1	Clase 2	
M_f	ton/min	0.42	12.68	0.25	12.36	0.11	12.06	-
M_t	ton/min	0.25	12.36	0.11	12.06	0.03	11.90	-
M_c	ton/min	0.17	0.32	0.14	0.29	0.08	0.16	1.17
Q_f	m ³ /min	43.85		42.79		39.79		-
Q_t	m ³ /min	42.79		39.79		37.53		-
Q_c	m ³ /min	1.06		3.00		2.26		6.32
l_f	%	0.92		0.58		0.30		-
l_t	%	0.58		0.30		0.12		-
l_c	%	9.51		8.66		8.82		9.05
A	m ²	29		55		55		-
h_{max}	m	4.6		4.6		4.6		-
Δh	m	1		1		1		-
v	%	50		50		50		-
ϵ_p	%	5		5		5		-
ϵ_e	%	80		80		80		-
h_p	m	4.15		4.37		4.45		-
h_e	m	0.55		0.33		0.25		-

De manera similar, mediante la realización de un balance general de la planta y utilizando las leyes de mineral de alimentación, concentrado y cola definidas en tabla 2.1, se obtienen las leyes de calcopirita l_{cp}^j para cada una de las clases $j = \{1, 2\}$, cuyos valores en este trabajo son $l_{cp}^1 = 78,85 \%$ y $l_{cp}^2 = 0,15 \%$. Finalmente, las constantes que permiten representar los efectos generados por los reactivos dosificados en la alimentación del proceso, se calculan a partir de los valores de las tasas de flotación y drenaje, además de considerar las curvas definidas en la figura 2.3, de acuerdo a Pérez-Correa et al. (1998).

2.5.3. Resultados

Considerando la planta de flotación de la figura 2.4 junto al modelo dinámico híbrido de una celda formulado en la sección 2.4.3. y la metodología de calibración presentada en la sección 2.5.2., se desarrolló un simulador dinámico híbrido utilizando el software Matlab/Simulink®. El objetivo de este simulador es disponer de una plataforma calibrada, la cual permita diseñar y validar estrategias de control híbridas. Además, dada la no linealidad de la planta, las ecuaciones diferenciales (2.3), (2.4) y (2.9) se resolvieron mediante el método de Runge-Kutta-Fehlberg con un paso de 0.001 min (Mathews & Fink, 2004).

La figura 2.5 presenta los resultados de simulación para la primera celda de la línea, bajo cambios en la válvula de salida y variaciones en el flujo de alimentación. Adicionalmente, la ley de alimentación es considerada una perturbación. Los resultados permiten apreciar el comportamiento del modelo, visualizando las variaciones en el nivel de pulpa de la celda, las cuales repercuten en presencia y ausencia de flujo de concentrado (cambia el modo de operación de la celda). Además, se observa que en una situación de ausencia de concentrado, la ley de cola converge a la ley de alimentación. Cabe mencionar, que la altura de espuma y las referencias de dosificación de reactivos fueron consideradas constantes.

La figura 2.6 permite apreciar el desempeño global de la línea visualizando las variaciones en la recuperación final del mineral, bajo cambios en el porcentaje de apertura de las válvulas de salida. Además, se visualizan los cambios en los modos de operación de cada celda, apreciando el considerable número de combinaciones posibles y la alta complejidad al abordar la identificación y control de este proceso.

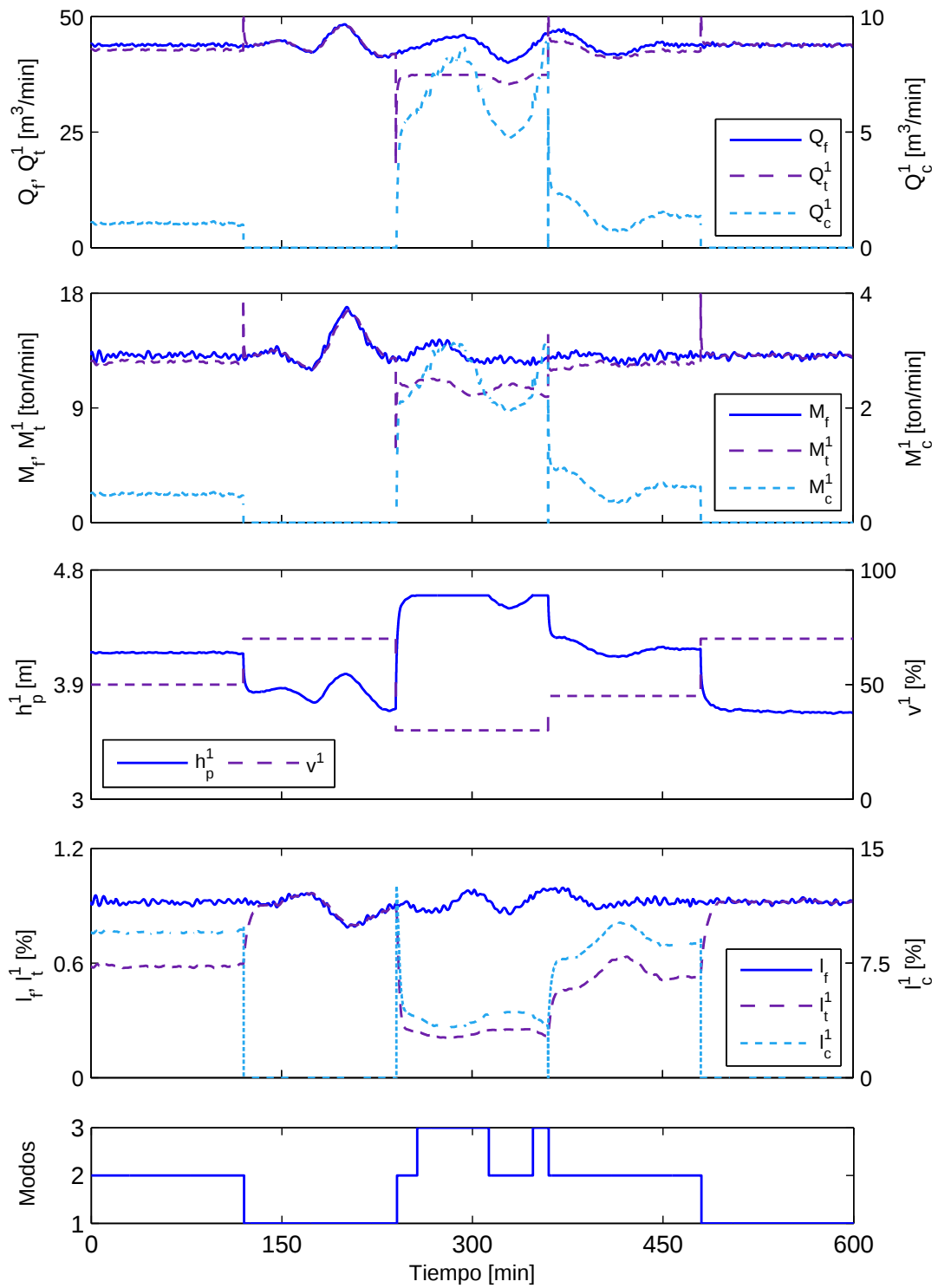


FIGURA 2.5. Resultados de simulación para primera celda de flotación, cuyos modos son: (1) ausencia de concentrado, (2) operación normal y (3) rebose de pulpa.

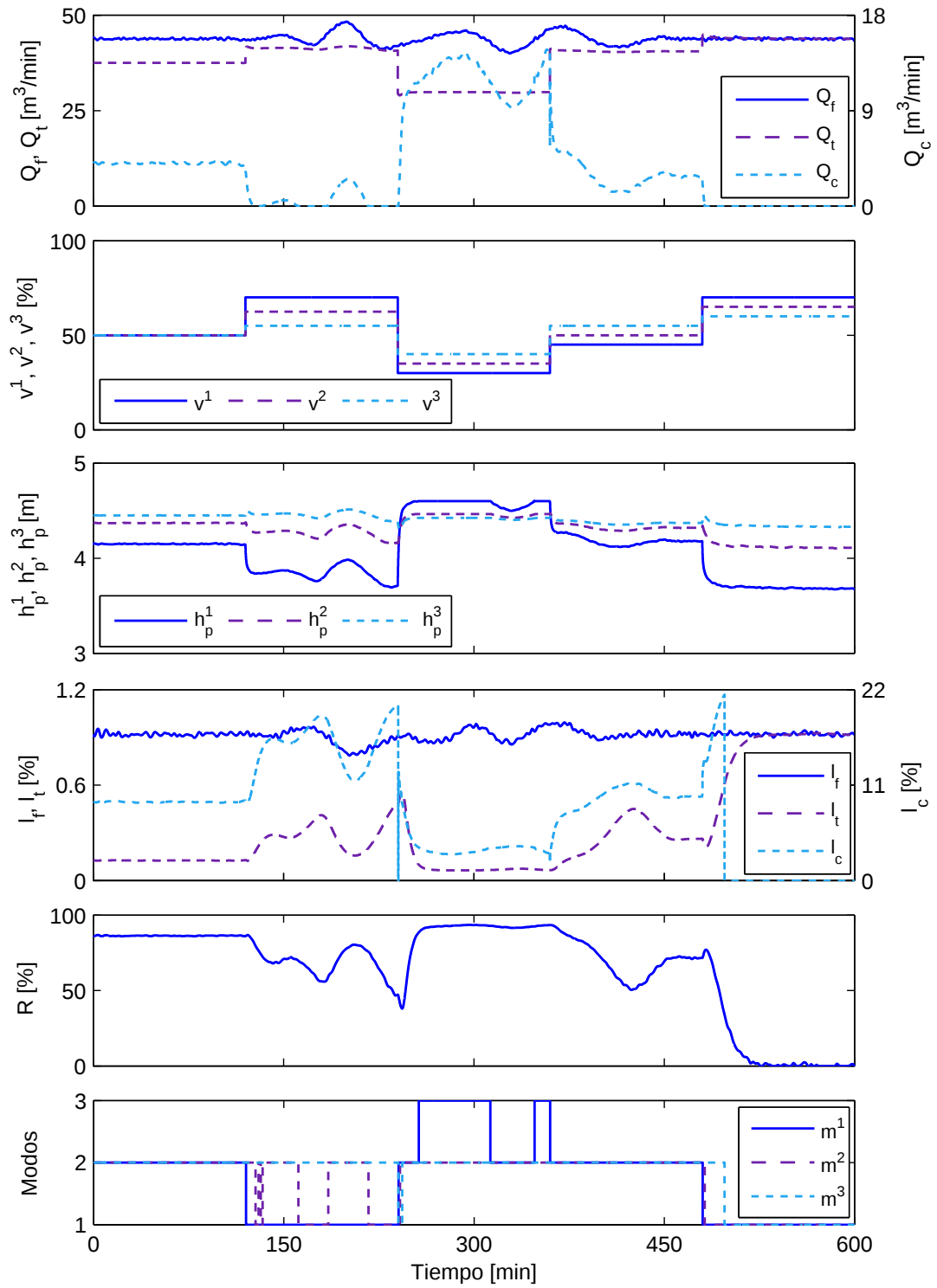


FIGURA 2.6. Resultados de simulación para línea de flotación, cuyos modos por celda son: (1) ausencia de concentrado, (2) operación normal y (3) rebose de pulpa.

3. IDENTIFICACIÓN DE MODELOS HÍBRIDOS

3.1. Introducción

En la actualidad, las dos estructuras más comunes para la aplicación de sistemas híbridos corresponden a modelos *PieceWise Affine* (PWA), los cuales permiten aproximar dinámicas no lineales a través de modelos lineales en distintos modos de operación, y los modelos *Mixed Logical Dynamics* (MLD) cuya parte continua se describe mediante dinámicas lineales y su parte discreta a través de reglas lógicas (Paoletti et al., 2007). Ambos modelos son equivalentes, existiendo diversas metodologías para llevar una estructura PWA a una MLD, o viceversa. Esta última característica, junto a la mayor simplicidad en la etapa de formulación de modelos PWA, los ha situado como una herramienta viable para la identificación de modelos híbridos a partir de datos de entrada-salida (Paoletti et al., 2007).

En el presente capítulo se formula una metodología de identificación válida para una línea de flotación de minerales, considerando la planta definida en la figura 2.4 y los diferentes modos de operación posibles. Los datos de entrada-salida de las principales variables del proceso se generan mediante el simulador dinámico híbrido desarrollado, con el fin de identificar modelos híbridos que posteriormente se utilizarán para diseñar estrategias de control optimizante. Cabe mencionar, que la formulación de una metodología de identificación híbrida aplicada a un proceso de flotación es una tarea compleja, debido a la propia configuración de la planta, la cual considera un conjunto de celdas conectadas en serie con el consiguiente acoplamiento de los flujos de pulpa asociados.

3.2. Identificación de modelos híbridos

3.2.1. Modelos *piecewise affine*

Dado un conjunto de datos del tipo entrada-salida, los cuales pertenecen a un proceso cuya evolución en el tiempo permite su representación a través de dinámicas no lineales o híbridas, Bemporad et al. (2005) define un modelo *PieceWise AutoRegresive eXogenous* (PWARX) en la forma:

$$y(k) = \begin{cases} \theta_1 \begin{bmatrix} x(k) \\ 1 \end{bmatrix} + e(k) & \text{si } x(k) \in \mathcal{X}_1 \\ \vdots \\ \theta_s \begin{bmatrix} x(k) \\ 1 \end{bmatrix} + e(k) & \text{si } x(k) \in \mathcal{X}_s \end{cases} \quad (3.1)$$

Donde $x(k) \in \mathbb{R}^n$ es el vector regresor, el cual depende únicamente de n_a salidas y n_b entradas pasadas:

$$x(k) = \begin{bmatrix} y(k-1) & \cdots & y(k-n_a) & u^\top(k-1) & \cdots & u^\top(k-n_b) \end{bmatrix}^\top \quad (3.2)$$

Adicionalmente, $u(k) \in \mathbb{R}^p$ es el vector de entradas, $y(k) \in \mathbb{R}$ es la variable de salida y $e(k) \in \mathbb{R}$ corresponde al error en cada instante k . El vector de parámetros asociado a cada submodelo ARX se representa mediante $\theta_{\lambda(k)}$ con $\lambda(k) \in \{1, \dots, s\}$ el estado discreto (o modo) y s el número total de submodelos. El vector regresor pertenece a una región poliédrica $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^n$, la cual recibe el nombre de conjunto regresor con $n = n_a + p \cdot n_b$. El mecanismo de conmutación se define utilizando una partición poliédrica $\{\mathcal{X}\}_{i=1}^s$ contenida en $\mathcal{X}$ y cuyo estado discreto $\lambda(k)$ está dado por:

$$\lambda(k) = i \Leftrightarrow x(k) \in \mathcal{X}_i \quad (3.3)$$

Donde $i \in \{1, \dots, s\}$ y $\{\mathcal{X}\}_{i=1}^s$ es una partición completa de $\mathcal{X}$.

Por lo tanto, para un modelo PWARX definido por las ecuaciones (3.1), (3.2) y (3.3) el problema de identificación se formula de la siguiente forma: dado un conjunto de N pares de datos de entrada-salida $(y(k), u^\top(k))$ con $k \in \{1, \dots, N\}$, se desea estimar el modelo de orden n_a y n_b , el número de submodelos s , el vector de parámetros θ_i y las regiones $\mathcal{X}_i$ con $i \in \{1, \dots, s\}$.

Este problema de identificación puede abordarse mediante diferentes metodologías (Paoletti et al., 2007), destacándose el procedimiento basado en *Clustering* formulado por Ferrari-Trecate et al. (2003), la estrategia propuesta por Vidal (2004) basada en la resolución del problema de identificación a través de su formulación como un problema algebraico geométrico y el procedimiento *Bounded-Error* desarrollado por Bemporad et al. (2005). Actualmente, se encuentra disponible para Matlab® el *Hybrid Identification Toolbox* (HIT) desarrollado por Ferrari-Trecate (2005), el cual utiliza el procedimiento basado en *Clustering*. Cabe mencionar, que los otros dos procedimientos no disponen de *toolbox* que permitan su rápida aplicación, por lo cual se decidió utilizar el *software* HIT y su procedimiento asociado, el cual es válido si los parámetros n_a , n_b y s del modelo son constantes.

3.2.2. Método de identificación basado en *clustering*

El procedimiento de identificación basado en agrupamiento de datos o *Clustering-Based Procedure*, aprovecha el hecho de que el espacio del modelo PWA es lineal localmente. Además, si los datos de entrada-salida fueron generados por un modelo de la forma (3.1), existirán grupos de vectores regresores vecinos, los cuales pertenecen a una misma región. De esta forma, los vectores de parámetros a ser calculados para cada uno de estos pequeños grupos deberán contener al vector de parámetros del submodelo asociado. Finalmente, la información de estos submodelos se obtiene realizando un agrupamiento (*clustering*) de los vectores de parámetros locales. Este procedimiento ha sido ampliamente estudiado en los trabajos desarrollados por Ferrari-Trecate et al. (2001), Ferrari-Trecate et al. (2003) y Paoletti et al. (2007).

A continuación se detalla el procedimiento basado en *Clustering* (Paoletti et al., 2007):

- Regresión local: Para $k = \{n, \dots, N\}$ se construye un conjunto de datos locales $\mathcal{C}_k$ a través de la colección de datos $(y(k), x(k))$ y los $c - 1$ vectores regresores $x(j)$ más cercanos a $x(k)$, según norma euclidiana. El parámetro c , que define la cardinalidad de los subespacios, se mantiene fijo durante todo el procedimiento. Posteriormente, mediante mínimos cuadrados se calcula el vector local de parámetros θ_k^{LS} para cada conjunto $\mathcal{C}_k$.

- Construcción de los vectores característicos: Cada dato $(y(k), x(k))$ se mapea en el vector característico:

$$\xi_k = [(\theta_k^{LS})^\top m_k^\top]^\top \quad (3.4)$$

donde $m_k = \frac{1}{c} \sum_{(y,x) \in \mathcal{C}_k} x$ es el centro de $\mathcal{C}_k$.

- *Clustering*: Los vectores característicos se agrupan en s grupos $\{\mathcal{F}_i\}_{i=1}^s$ aplicando el algoritmo *K-means* (Paoletti et al., 2007) y asignando valores de confianza apropiados a cada vector característico.
- Estimación de parámetros: Como el mapeo de los datos en los vectores característicos es una función biyectiva, los vectores de datos están clasificados en *clusters* $\{\mathcal{D}_i\}_{i=1}^s$ según la regla:

$$(y(k), x(k)) \in \mathcal{D}_i \Leftrightarrow \xi_k \in \mathcal{F}_i \quad (3.5)$$

Finalmente, el vector de parámetros θ_i para cada *cluster* $\mathcal{D}_i$ se obtiene mediante mínimos cuadrados.

Esta estrategia necesita que las dimensiones del modelo n_a y n_b junto al número de submodelos s se mantengan fijos durante todo el procedimiento. Por otra parte, la variable c es el principal parámetro de sintonía del método y los modelos identificados consideran entradas múltiples y salida única, o *Multiple Input Single Output* (MISO).

3.3. Aplicación a flotación de minerales

A continuación, se describe la metodología de identificación desarrollada para obtener modelos híbridos a partir de datos entrada-salida de una planta de flotación de minerales, cuya generación de datos y validación se llevó a cabo utilizando el simulador dinámico híbrido descrito en el capítulo 2. Como se indicó en la introducción, el interés en aplicar modelos híbridos se debe a la necesidad de robustecer el diseño y aplicación de estrategias de control optimizante al proceso de flotación, siendo necesario disponer de modelos dinámicos que permitan capturar el comportamiento del proceso considerando diferentes condiciones de operación.

3.3.1. Metodología de identificación

La flotación de minerales sigue considerándose un proceso altamente complejo y cuyo comportamiento aún no ha sido comprendido cabalmente (Shean & Cilliers, 2011). Además, debido a la configuración en cascada de las celdas y bancos que conforman una línea, el comportamiento dinámico del proceso es altamente no lineal, dificultando considerablemente el proceso de identificación. Como se ha indicado, cada celda o banco de flotación puede presentar tres modos de operación: (1) ausencia de concentrado, (2) operación normal y (3) rebose de pulpa (ver figura 2.2). Teniendo en cuenta que los modelos a identificar se utilizarán en la formulación de un controlador predictivo optimizante, resulta conveniente simplificar su estructura, por ejemplo, considerando solo dos modos de operación. Esto es factible, dado que el tercer modo ocurre únicamente cuando el nivel de pulpa supera la altura máxima de una celda o banco, lo cual puede ser considerado como una restricción de operación en el problema de optimización asociado a la estrategia de Control Predictivo, mediante la inecuación $h_p^i \leq h_{max}^i$ con $i = \{1, 2, 3\}$. De esta forma, solo los dos primeros modos de operación serán considerados en el proceso de identificación.

De acuerdo a la instrumentación disponible en la planta de flotación bajo simulación y considerando que los modelos de predicción deberán permitir un adecuado control del proceso, se identificarán los parámetros asociados a los modelos del nivel de pulpa de la primera celda y bancos de la línea (h_p^1 , h_p^2 y h_p^3), junto a la ley de mineral en el flujo de cola final (l_t), con el objetivo de poder minimizar el error entre ésta variable y su señal de referencia. La figura 3.1 presenta los datos de entrada, correspondientes al flujo de alimentación de la línea (Q_f) y a las válvulas de control de cada celda o banco (v^1 , v^2 y v^3), las cuales varían de acuerdo a una secuencia preestablecida que permite considerar la totalidad de combinaciones posibles entre las válvulas de control. Adicionalmente, se presentan las mediciones en los niveles de pulpa de cada celda o banco y ley de cola, cuyas variaciones son generadas por la secuencia establecida en las variables de entrada. Para esta simulación se utilizó un tiempo de muestreo de 0.5 min sobre un tiempo de simulación de 1250 min, generando un total de 2500 datos entrada-salida a utilizarse en el proceso de identificación.

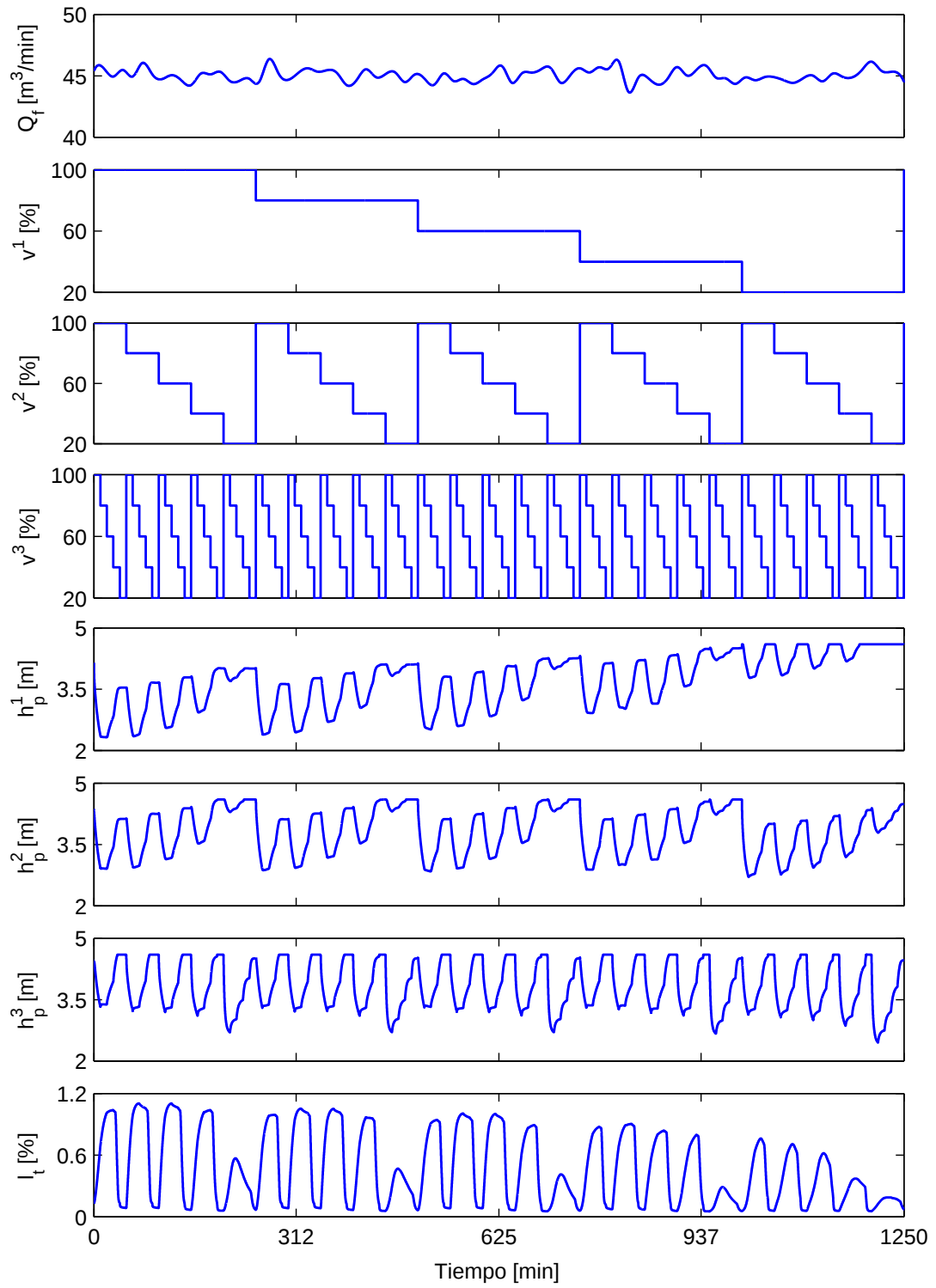


FIGURA 3.1. Simulación de la línea de flotación para obtención de datos entrada-salida

La metodología considera seis pasos, entre ellos la definición de: los rangos del flujo de alimentación Q_f , de las válvulas de control v^1 , v^2 y v^3 , de los modos de operación y la generación de datos entrada-salida para el proceso de identificación. Esta metodología es válida para una línea de flotación, siendo ejemplificada mediante la identificación de los parámetros asociados al modelo del nivel de pulpa de la primera celda (ver figura 2.4).

Los pasos de esta metodología son los siguientes:

- (1) Definir el rango de operación del flujo de alimentación Q_f , que será una secuencia de escalones decrecientes, siendo τ_1 la duración de cada uno de estos escalones.
- (2) En cada escalón de Q_f , cuya duración es τ_1 , variar la posición de las válvulas de control de la celda y bancos de la línea, estableciendo una secuencia de escalones decrecientes para cada válvula, cuyas duraciones corresponden a τ_2 para cada escalón de v^1 , τ_3 para cada escalón de v^2 y τ_4 para cada escalón de v^3 , como se aprecia en la figura 3.2.

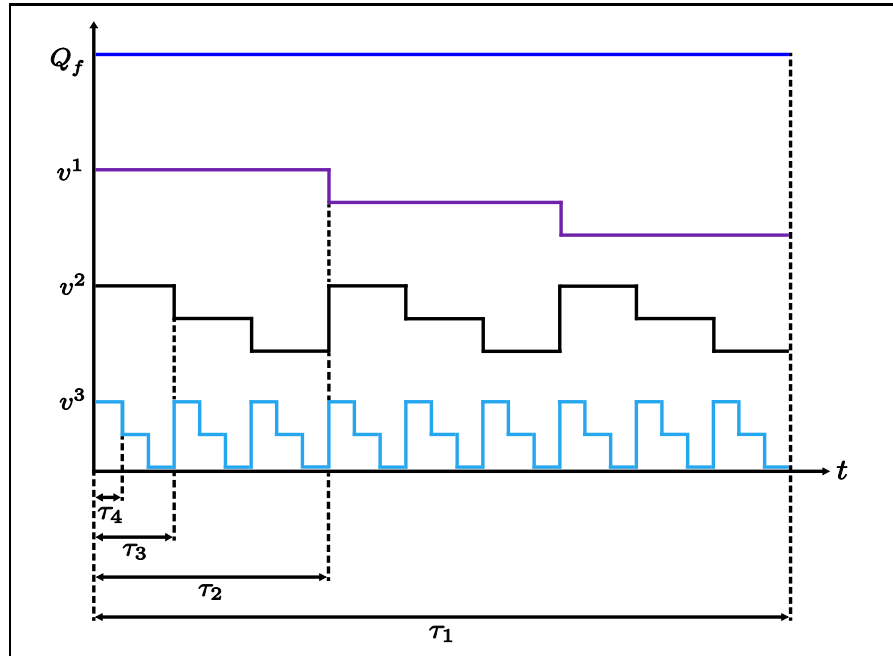


FIGURA 3.2. Ejemplo de variaciones en las entradas del simulador

- (3) Considerando constante la altura de espuma h_e^i , definir un nivel de pulpa h_p^i , en el cual la celda o banco inicie su operación normal:

$$h_p^i \leq h_{max}^i - h_e^i \quad (3.6)$$

Por lo tanto, definiendo $h_m^i = h_{max}^i - h_e^i$ con $i = \{1, 2, 3\}$, el primer modo ocurre cuando $h_p^i \leq h_m^i$ (ausencia de concentrado) y el segundo modo cuando $h_p^i > h_m^i$ (operación normal).

- (4) Utilizando el simulador dinámico híbrido, ajustar manualmente las magnitudes previamente definidas para los escalones de las válvulas de control, con el objetivo de operar cada celda y banco de la línea en un modo de operación independiente. Este paso se justifica debido al considerable número de combinaciones posibles entre los modos de operación de los equipos de la línea. Por lo tanto, para operar la celda o banco en el primer modo se debe abrir su válvula de control, aumentando el flujo de cola. De manera contraria, para operar la celda en el segundo modo, se debe cerrar su válvula de control, permitiendo el rebose de concentrado. Este efecto también puede ser logrado variando el valor de los escalones de las válvulas de control de las celdas y bancos restantes; o también, variando el valor de los escalones del flujo de alimentación.
- (5) Simular el proceso, considerando las entradas Q_f , v^1 , v^2 y v^3 previamente ajustadas, en un horizonte de tiempo $n\tau_1$, siendo n el número de escalones del flujo de alimentación (ver figura 3.2). La simulación permite obtener un conjunto de datos entrada-salida para cada modo de operación, considerando como salidas los niveles de pulpa h_p^1 , h_p^2 y h_p^3 , y la ley de cola final l_t (ver figura 3.1).
- (6) Utilizando el *software* HIT, identificar los parámetros correspondientes al modelo *Auto Regressive eXogenous* (ARX) asociado a cada modo de operación, de acuerdo a la estructura definida en ecuación (3.1).

Cabe mencionar, que al definir una secuencia de apertura para las válvulas de control de acuerdo a la figura 3.2, se asegura considerar la mayor cantidad de combinaciones posibles y a su vez, captar los efectos que estas causan en las variables de salida del sistema. Además, como se mencionó previamente, la identificación considera el procedimiento basado en *Clustering* y los parámetros asociados a cada modo se identifican de manera independiente; para mas detalles sobre este procedimiento se recomienda consultar el trabajo de Paoletti et al. (2007).

3.3.2. Resultados de validación

A continuación, se presentan las estructuras propuestas para los modelos híbridos correspondientes a los niveles de pulpa de la primera celda y bancos de la línea, junto a la ley de cola final. Además, con el objetivo de ejemplificar la metodología descrita en la sección 3.3.1, se describen los resultados de identificación y validación para la primera celda; y los resultados de validación para los bancos y ley de cola final, los cuales permiten apreciar el buen desempeño de los modelos identificados.

3.3.2.1. Nivel de pulpa celda inicial

De acuerdo a la metodología propuesta en la sección 3.3.1, a cada modo de operación se le asocia un conjunto de parámetros bajo una estructura híbrida, tal como se aprecia en las ecuaciones (3.7) y (3.8). Además, el cambio de modo de operación se gatilla a través de la función de parámetros híbrida $\theta^1(k)$, la cual contiene los parámetros identificados previamente y asociados a cada modelo ARX.

$$h_p^1(k) = \theta^1(k) \begin{bmatrix} h_p^1(k-1) & Q_f(k-1) & v^1(k-1) & h_p^2(k-1) & 1 \end{bmatrix}^\top \quad (3.7)$$

$$\theta^1(k) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \theta_1^1 & \theta_2^1 & \theta_3^1 & \theta_4^1 & \theta_5^1 \end{bmatrix} & \text{si } h_p^1(k-1) \leq h_m^1 \\ \begin{bmatrix} \theta_1^2 & \theta_2^2 & \theta_3^2 & \theta_4^2 & \theta_5^2 \end{bmatrix} & \text{si } h_p^1(k-1) > h_m^1 \end{cases} \quad (3.8)$$

Donde:

- h_p^1 : nivel de pulpa al interior del primer banco.
- Q_f : flujo volumétrico de pulpa en la alimentación de la línea.
- v^1 : valor de apertura de la válvula de control del primer banco.
- h_p^2 : nivel de pulpa al interior del segundo banco.
- h_m^1 : nivel de pulpa límite para el primer banco.
- $\theta^1(k)$: función híbrida que define el vector de parámetros 1 para un instante k .
- θ_i^1, θ_i^2 : parámetros correspondientes al modo 1 y 2, con $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

La figura 3.3 muestra las señales de identificación para el modo 1 del nivel de pulpa de la primera celda, bajo variaciones en la válvula de control v^1 . El resto de las variables de entrada del modelo corresponden al flujo de alimentación Q_f y al nivel de pulpa del banco siguiente h_p^2 , cuyas variaciones también afectan al nivel de pulpa de la primera celda.

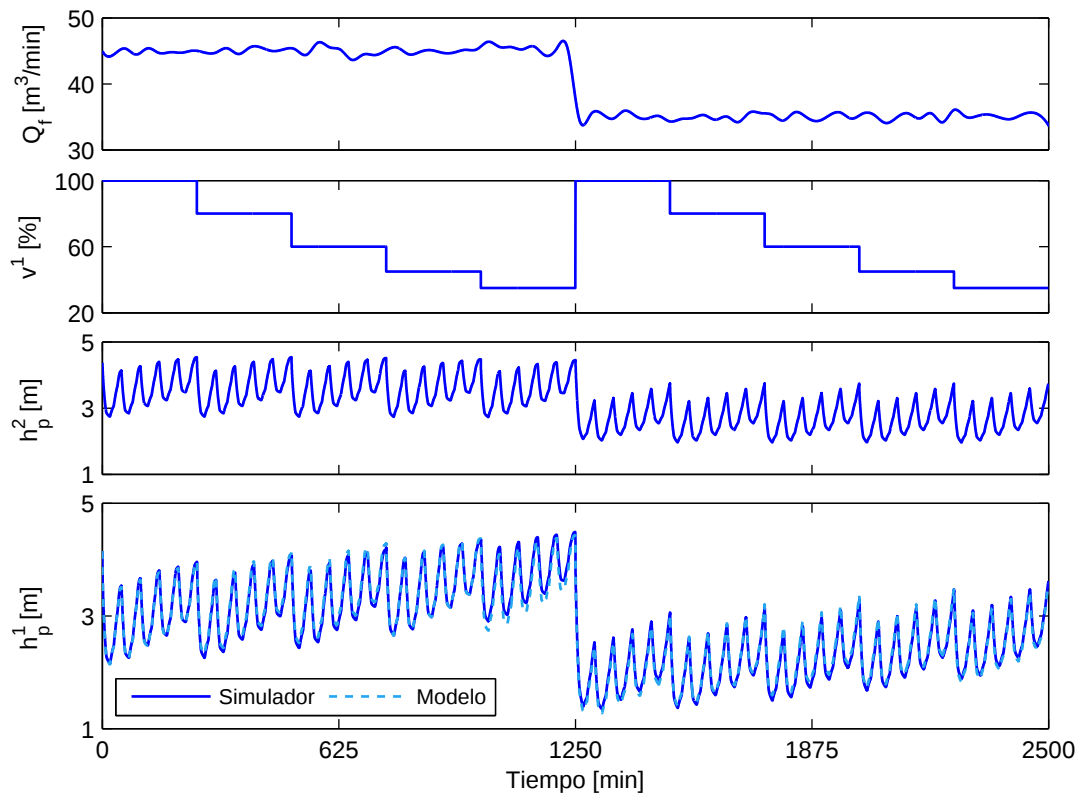


FIGURA 3.3. Señales de identificación para el nivel de pulpa en celda 1 modo 1

La figura 3.4 muestra las señales de identificación para el modo 2 del nivel de pulpa de la primera celda, bajo variaciones en la válvula de control v^1 . Las variables de entrada restantes del modelo corresponden a las definidas en la ecuación (3.7). Adicionalmente, en ambos gráficos es posible apreciar las distintas dinámicas que gobiernan a cada modo de operación, las cuales son gatilladas por la presencia o ausencia de flujo de concentrado desde la celda. La metodología propuesta también se utiliza para obtener los modelos híbridos correspondientes a los niveles de pulpa de las bancos h_p^2 y h_p^3 , y la ley de cola final l_t . Cabe señalar, que la ley de alimentación l_f se considera una perturbación medida, tanto en el proceso de identificación como de validación.

La figura 3.5 presenta los resultados de validación para el modelo híbrido identificado, considerando variaciones en el flujo de alimentación y cambios en el valor de apertura de la válvula de control, bajo un horizonte de tiempo de 600 min.

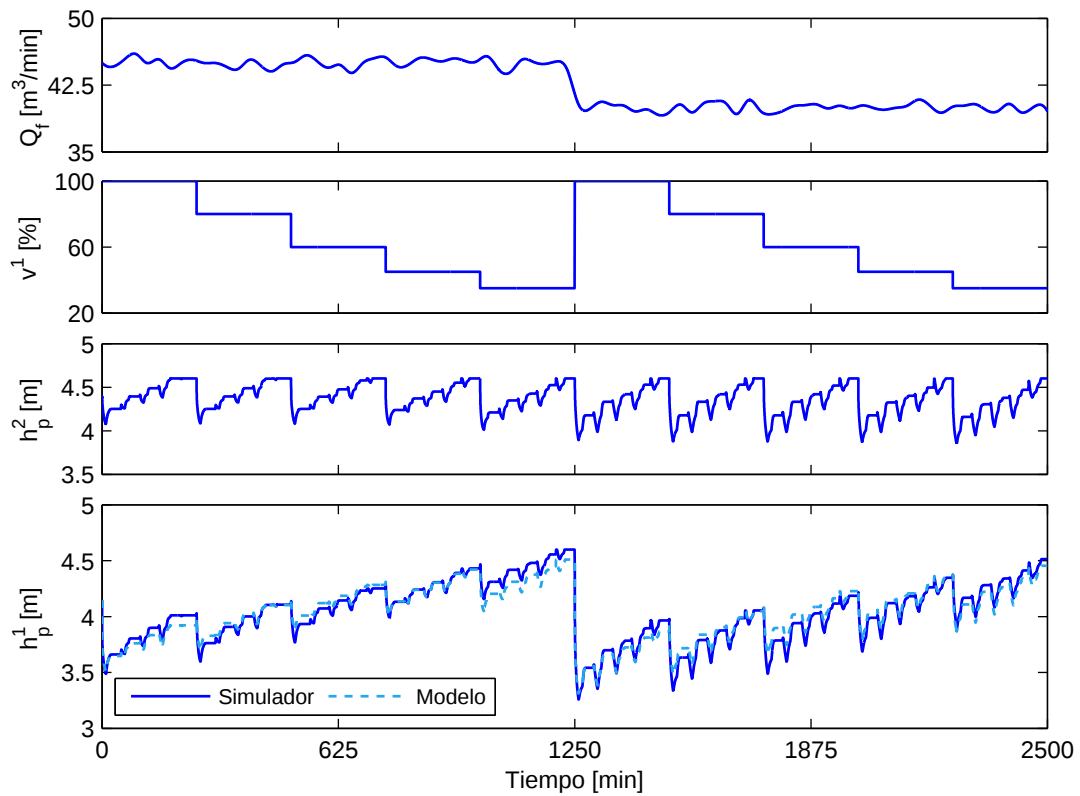


FIGURA 3.4. Señales de identificación para el nivel de pulpa en celda 1 modo 2

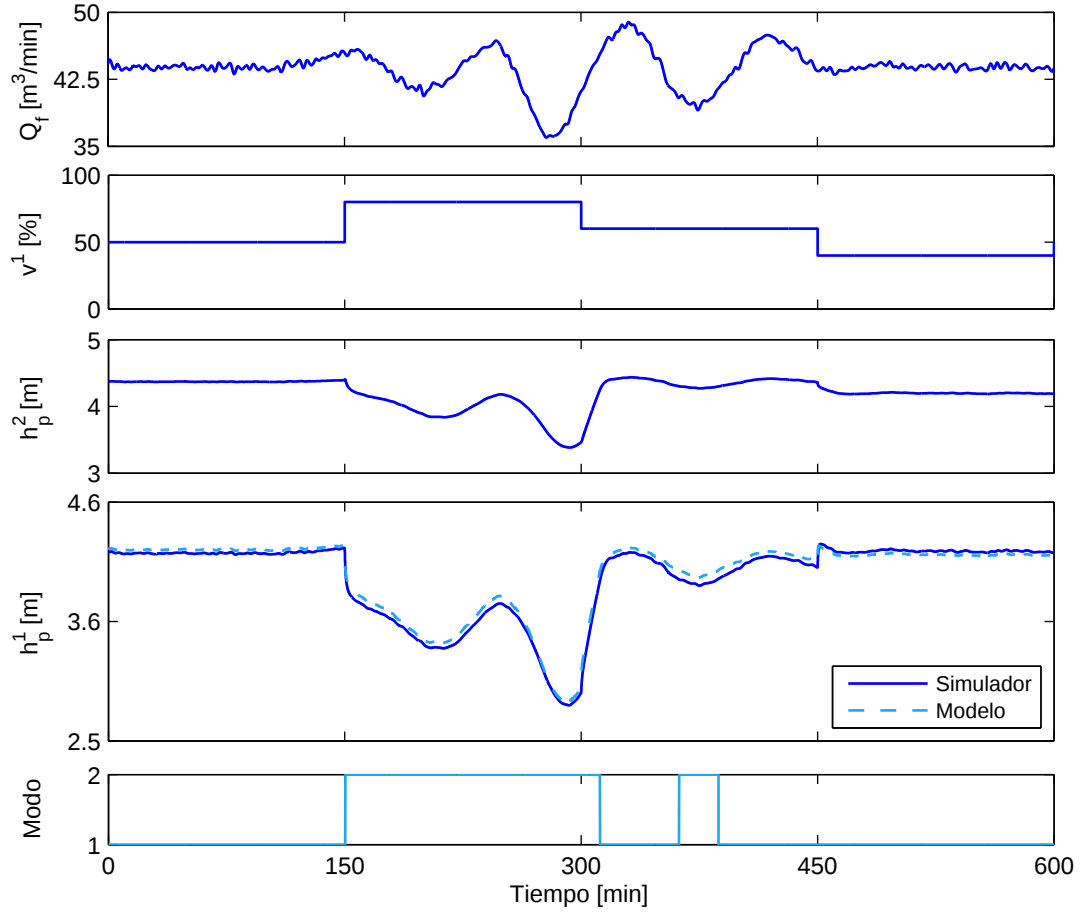


FIGURA 3.5. Señales de validación para el nivel de pulpa en celda 1

3.3.2.2. Nivel de pulpa celdas intermedias

El nivel de pulpa de una celda intermedia depende de los cambios en los niveles de pulpa de las celdas colindantes, dificultando su proceso de identificación. Las ecuaciones (3.9) y (3.10) presentan la estructura híbrida del modelo identificado. Además, la figura 3.6 muestra que el modelo híbrido es válido en un horizonte de tiempo de 600 min.

$$h_p^i(k) = \theta^i(k) \begin{bmatrix} h_p^i(k-1) & h_p^{i-1}(k-1) & v^{i-1}(k-1) & v^i(k-1) & h_p^{i+1}(k-1) & 1 \end{bmatrix}^T \quad (3.9)$$

$$\theta^i(k) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \theta_1^1 & \theta_2^1 & \theta_3^1 & \theta_4^1 & \theta_5^1 & \theta_6^1 \end{bmatrix} & \text{si } h_p^i(k-1) \leq h_m^i \\ \begin{bmatrix} \theta_1^2 & \theta_2^2 & \theta_3^2 & \theta_4^2 & \theta_5^2 & \theta_6^2 \end{bmatrix} & \text{si } h_p^i(k-1) > h_m^i \end{cases} \quad (3.10)$$

Donde:

- $h_p^i, h_p^{i-1}, h_p^{i+1}$: nivel de pulpa del banco i , $i - 1$ e $i + 1$, respectivamente.
- v^i, v^{i-1} : valor de apertura de la válvula de control del banco i e $i - 1$.
- h_m^i : nivel de pulpa límite para el banco i .
- $\theta^i(k)$: función híbrida del vector de parámetros i para un instante k .
- θ_i^1, θ_i^2 : parámetros asociados al modo 1 y 2, con $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$.

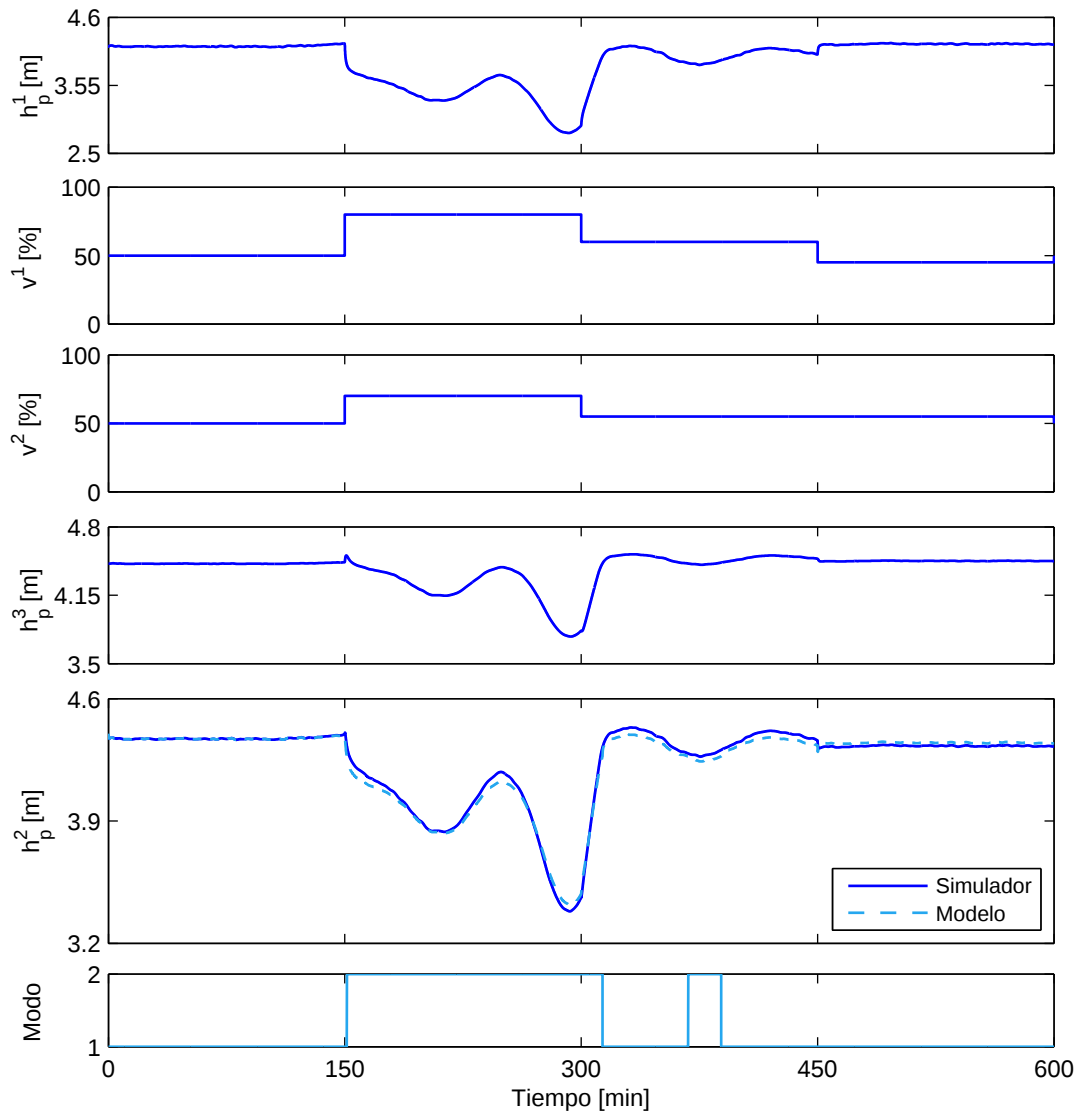


FIGURA 3.6. Señales de validación para el nivel de pulpa en banco 1

3.3.2.3. Nivel de pulpa celda final

El nivel de pulpa de la celda final de una línea de flotación, depende solamente de la posición de la válvula de control y del nivel de pulpa del banco o celda precedente. Por lo tanto, las ecuaciones (3.11) y (3.12) presentan la estructura híbrida del modelo identificado, donde el cambio de modo de operación se gatilla a través de la función de parámetros híbrida $\theta^n(k)$, la cual contiene los parámetros identificados previamente para cada modelo.

$$h_p^n(k) = \theta^n(k) \begin{bmatrix} h_p^n(k-1) & h_p^{n-1}(k-1) & v^{n-1}(k-1) & v^n(k-1) & 1 \end{bmatrix}^T \quad (3.11)$$

$$\theta^n(k) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \theta_1^1 & \theta_2^1 & \theta_3^1 & \theta_4^1 & \theta_5^1 \end{bmatrix} & \text{si } h_p^n(k-1) \leq h_m^n \\ \begin{bmatrix} \theta_1^2 & \theta_2^2 & \theta_3^2 & \theta_4^2 & \theta_5^2 \end{bmatrix} & \text{si } h_p^n(k-1) > h_m^n \end{cases} \quad (3.12)$$

Donde:

- h_p^n, h_p^{n-1} : nivel de pulpa del banco n y $n-1$, respectivamente.
- v^n, v^{n-1} : valor de apertura de la válvula de control del banco n e $n-1$.
- h_m^n : nivel de pulpa límite para el banco n .
- $\theta^n(k)$: función híbrida del vector de parámetros n para un instante k .
- θ_i^1, θ_i^2 : parámetros asociados al modo 1 y 2, con $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$.

De manera similar, la figura 3.7 presenta las señales de validación para el modelo formulado correspondiente al nivel de pulpa del segundo y último banco. Adicionalmente, es posible apreciar que el modelo de predicción es robusto bajo variaciones en las válvula de control, las cuales corresponden a las principales variables manipuladas en una planta de flotación. Cabe mencionar, que los valores límites para el nivel de pulpa de cada celda h_m^i con $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ pueden variar para cada banco. En este trabajo de investigación, los puntos de operación para el nivel de pulpa junto a las alturas de espuma fueron definidas con valores diferentes (ver tabla 2.1), con el fin de asemejar el simulador dinámico híbrido a una condición de operación real de una planta industrial.

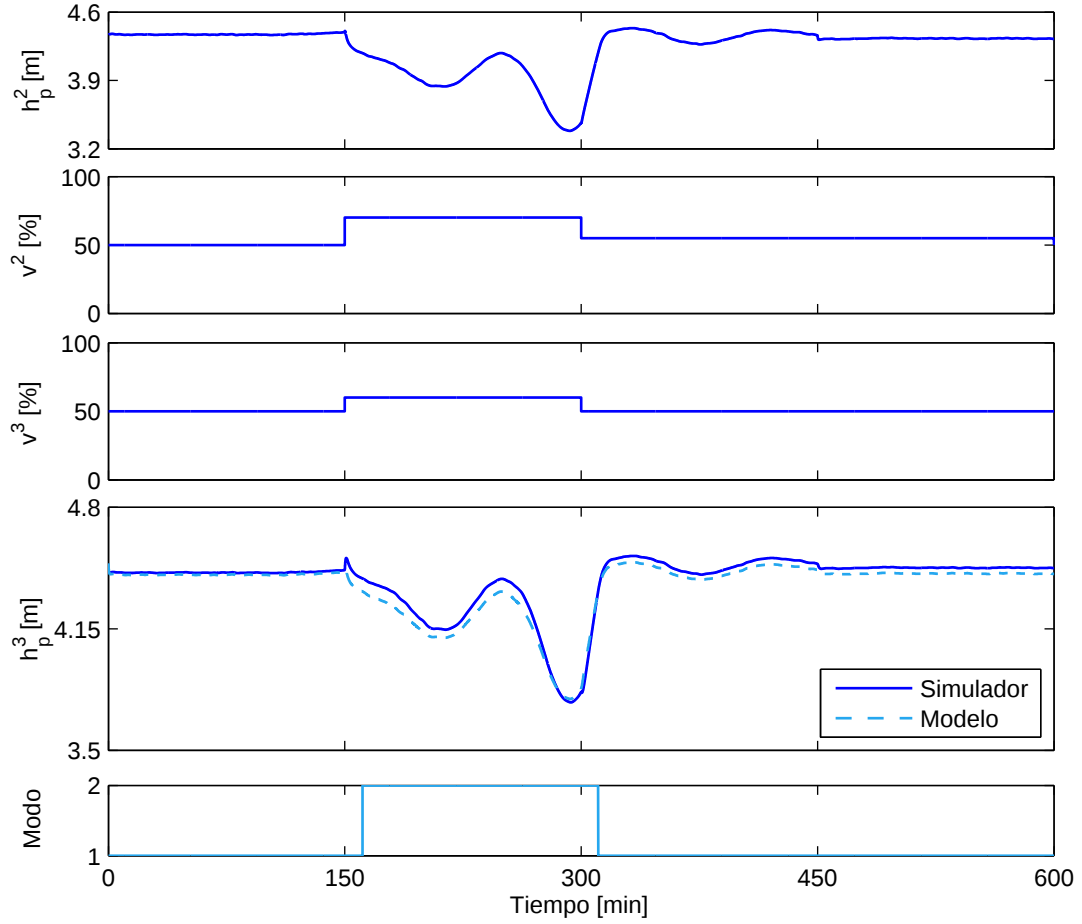


FIGURA 3.7. Señales de validación para el nivel de pulpa en banco 2

3.3.2.4. Ley de cola final

La ley de cola final depende de los rendimientos individuales de cada celda o banco de una línea de flotación, además de la ley de mineral en la alimentación. Las ecuaciones (3.13) y (3.14) presentan la estructura híbrida del modelo identificado. La figura 3.8 confirma que el modelo híbrido es válido en un horizonte de tiempo de 600 min.

$$l_t(k) = \theta_t(k) \begin{bmatrix} l_t(k-1) & l_f(k-1) & h_p^1(k-1) & h_p^2(k-1) & \cdots & h_p^n(k-1) & 1 \end{bmatrix}^T \quad (3.13)$$

$$\theta_t(k) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \theta_1^1 & \theta_2^1 & \cdots & \theta_n^1 & \theta_{n+1}^1 & \theta_{n+2}^1 \end{bmatrix} & \text{si } l_t(k-1) \leq l_{tm} \\ \begin{bmatrix} \theta_1^2 & \theta_2^2 & \cdots & \theta_n^2 & \theta_{n+1}^2 & \theta_{n+2}^2 \end{bmatrix} & \text{si } l_t(k-1) > l_{tm} \end{cases} \quad (3.14)$$

Donde:

l_t, l_f : ley de cola y alimentación de la línea de flotación.

h_p^i : nivel de pulpa asociado al banco i , con $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

l_{tm} : valor de ley de cola límite.

$\theta_t(k)$: función híbrida del vector de parámetros para un instante k .

θ_i^1, θ_i^2 : parámetros asociados al modo 1 y 2, con $i \in \{1, 2, \dots, n+2\}$.

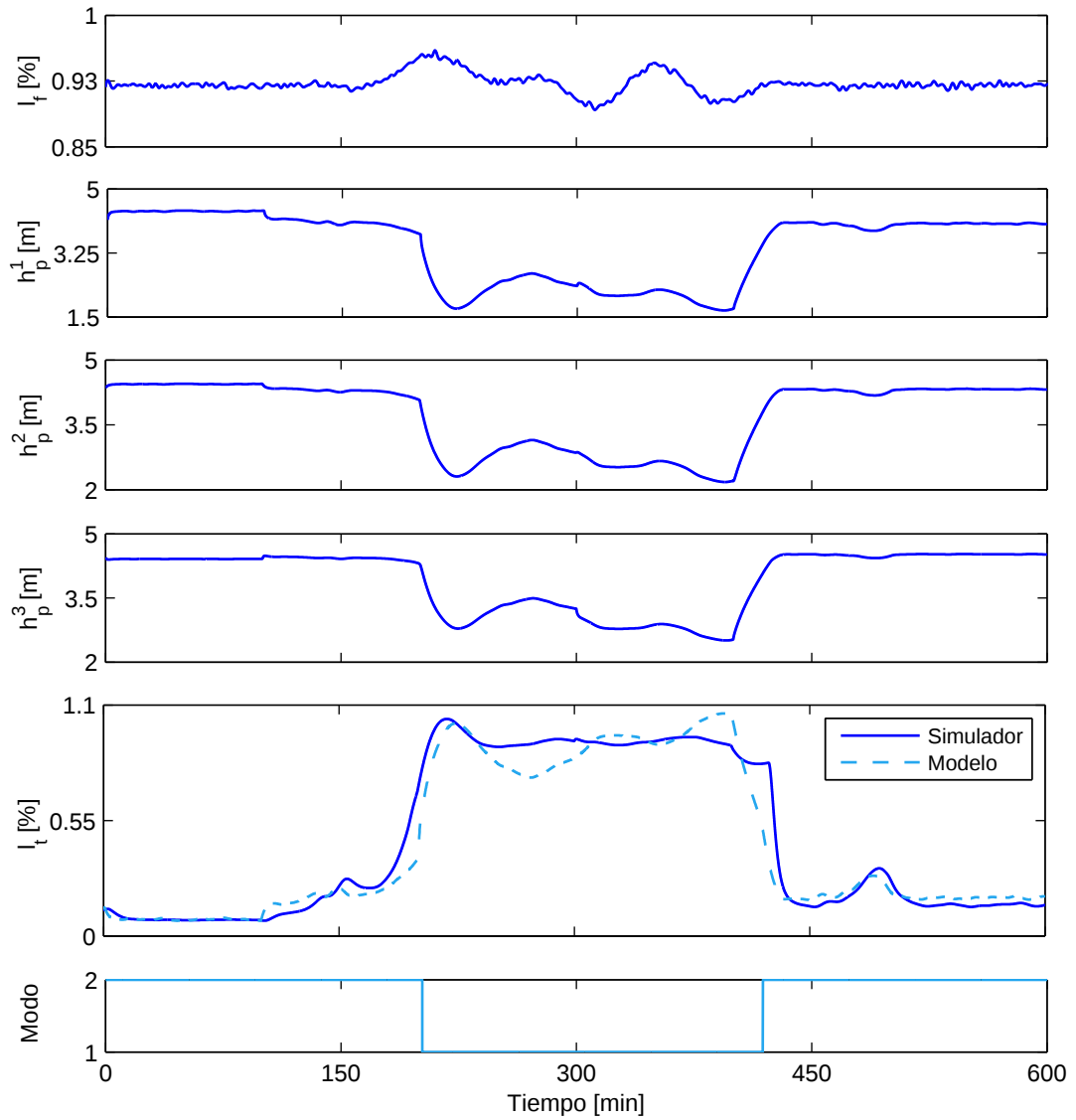


FIGURA 3.8. Señales de validación para la ley de cola final

3.3.2.5. Validación como modelos de predicción

Dado que los modelos híbridos identificados se utilizarán en la estructura de un controlador predictivo, se validará su capacidad de predicción, de acuerdo al diagrama de flujo presentado en la figura 3.9, donde $y(k)$ es la variable de salida, $u_j(k)$ con $j \in \mathbb{N}$ las variables de entrada, θ^1 y θ^2 los vectores de parámetros identificados para cada modo de operación, $\bar{y}$ el valor límite, h el tiempo de muestreo, n el número de pasos entre dos predicciones consecutivas, N el horizonte de simulación e i una variable auxiliar.

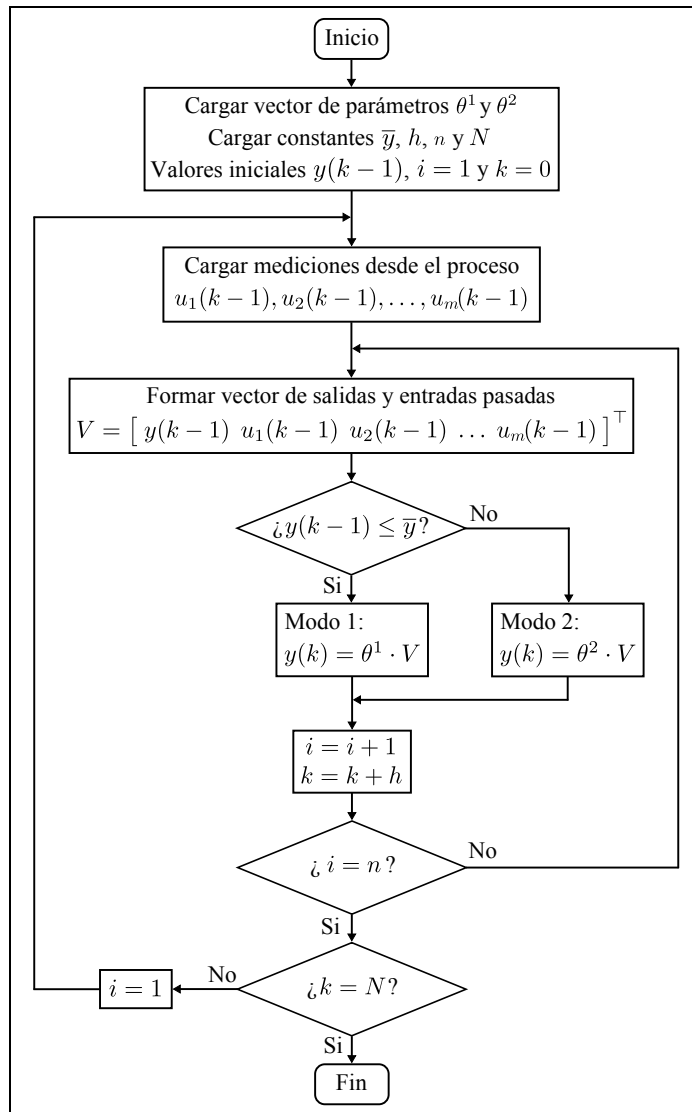


FIGURA 3.9. Diagrama de flujo para simulación de modelos híbridos de predicción

La figura 3.10 presenta los resultados de simulación que permiten apreciar el buen desempeño en la predicción de los niveles de pulpa y ley de cola final, bajo un horizonte de simulación $N = 600$ min. Las predicciones fueron realizadas considerando un tiempo de muestreo $h = 0.1$ min y un número de $n = 30$ pasos entre dos predicciones consecutivas, lo cual equivale a 3 min. Este tiempo es similar al horizonte de predicción a utilizar en el diseño de la estrategia de Control Predictivo. Cabe mencionar, que las entradas $u_j(k)$ se consideran constantes a lo largo del horizonte de predicción, según figura 3.9.

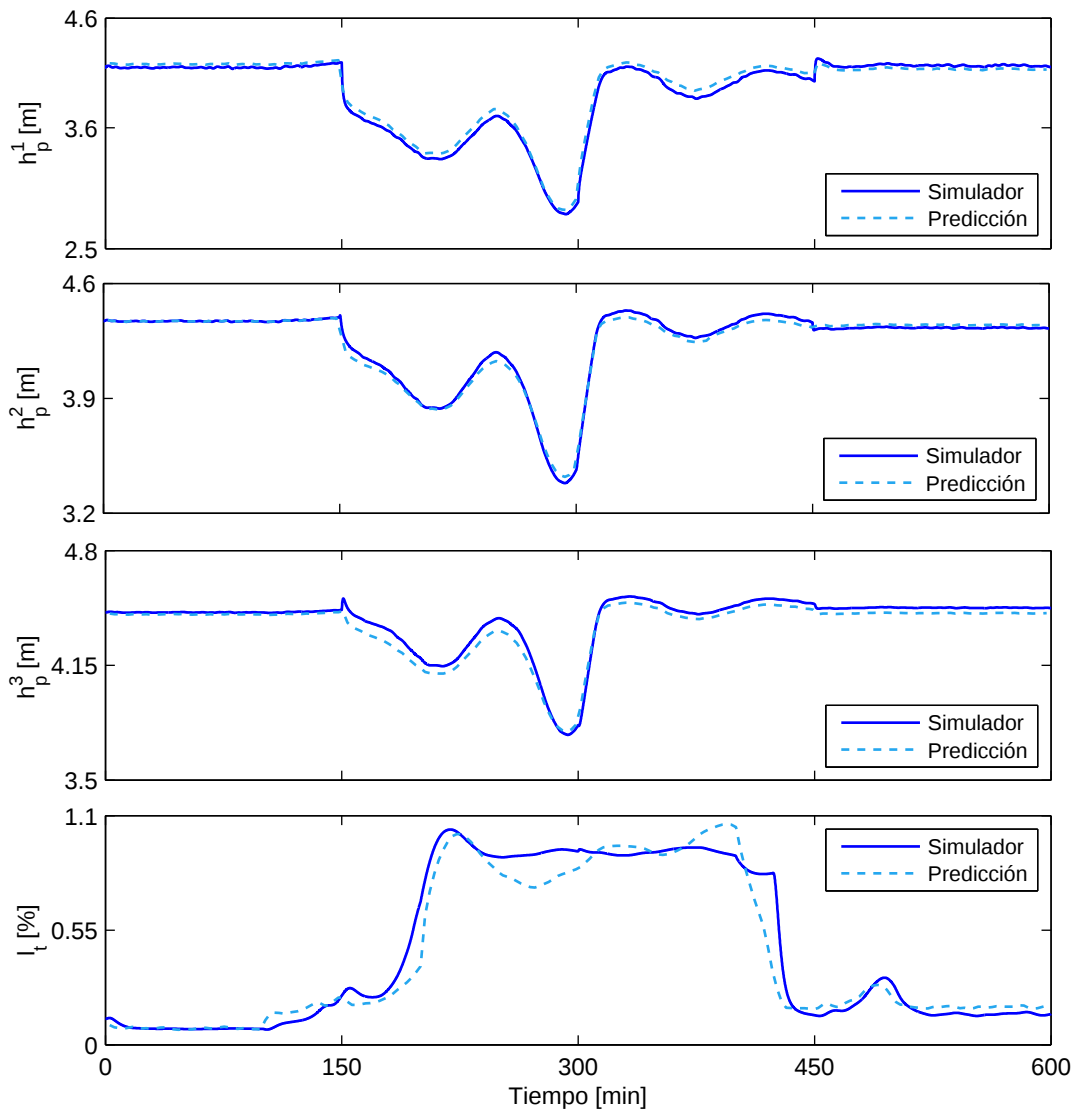


FIGURA 3.10. Resultados de predicción de los modelos híbridos identificados

3.3.2.6. Modelos híbridos identificados

La tabla 3.1 presenta los parámetros identificados para cada uno de los modelos híbridos, correspondientes a los niveles de pulpa de la celda y bancos de la línea de flotación y a la ley de cola final, de acuerdo a figura 2.4. Cabe mencionar, que la principal dificultad en el proceso de identificación radica en el alto nivel de acoplamiento existente entre los diferentes bancos y en los efectos provocados en la modificación del valor de apertura de las válvulas de control. Esta última condición genera cambios en las constantes de tiempo de cada celda o banco, siendo necesario disponer de metodologías de identificación que permitan robustecer los resultados de los modelos. En consecuencia, la metodología desarrollada permite afrontar este tipo de problemas y obtener resultados válidos para su utilización como modelos de predicción.

Posteriormente, los modelos se integrarán en un modelo híbrido general bajo una estructura de múltiples entradas y múltiples salidas, o también llamada *Multiple Input Multiple Output* (MIMO) para su utilización en el diseño y validación de estrategias de control optimizante.

TABLA 3.1. Modelos híbridos identificados

Modelo	Modo	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	h_m [m]	l_{tm} [%]
h_p^1	1	0.580	0.007	-0.396	0.417	-0.145	-	4.05	-
	2	0.645	0.004	-0.321	0.279	0.254	-		
h_p^2	1	0.579	0.085	0.122	-0.341	0.335	0.082	4.27	-
	2	0.379	0.268	0.213	-0.306	0.075	1.315		
h_p^3	1	0.506	0.356	0.262	-0.435	0.713	-	4.35	-
	2	0.709	0.166	0.172	-0.290	0.624	-		
l_t	1	0.865	0.040	-0.043	-0.022	-0.029	0.387	-	0.5
	2	0.828	0.003	-0.014	-0.013	-0.007	0.243		

Finalmente, la tabla 3.2 presenta la raíz cuadrada del error cuadrático medio o *Root Mean Square Error* (RMSE) de los resultados de predicción visualizados en las figuras 3.10. Se aprecia que los valores medios son pequeños en comparación a los rangos asociados a cada una de las variables.

TABLA 3.2. Error RMS resultados de predicción

Modelo PWARX	h_p^1 [m]	h_p^2 [m]	h_p^3 [m]	l_t [%]
Máx	4.2	4.37	4.52	1.04
Mín	2.28	2.92	3.30	0.06
Error RMS	0.0417	0.0441	0.0497	0.0901

4. CONTROL PREDICTIVO HÍBRIDO

4.1. Introducción

El Control Predictivo basado en Modelos o *Model Predictive Control* (MPC) corresponde a un conjunto de estrategias de control que utilizan un modelo del proceso para obtener la señal de control mediante la minimización de una función objetivo. Los principales elementos comunes a todo controlador predictivo son el modelo de predicción, una función objetivo que se minimiza, un horizonte de control finito y deslizante para la obtención de la señal de control y la repetición de este procedimiento en cada instante de muestreo. Este tipo de controladores ha mostrado ser una estrategia de control con un sinnúmero de aplicaciones exitosas en procesos industriales (Camacho & Bordons, 2004).

Por otra parte, los continuos avances en automatización de procesos industriales han llevado a formular nuevas técnicas de modelación que permitan incluir variables tanto continuas como discretas, junto a eventos que determinen cambios en las diferentes dinámicas que gobiernan a un mismo proceso. Este tipo de representación recibe el nombre de modelación híbrida y ha sido ampliamente estudiada en la última década (Camacho et al., 2010). Bajo este contexto, Bemporad & Morari (1999) formularon una metodología de Control Predictivo Híbrido basado en Modelos o *Hybrid Model Predictive Control* (HMPC) considerando variables continuas, discretas y reglas lógicas, mediante la utilización de un modelo de predicción bajo una estructura *Mixed Logical Dynamics* (MLD) y la minimización de la función objetivo como un problema *Mixed Integer Quadratic Programming* (MIQP) incluyendo restricciones de operación.

El presente capítulo describe la aplicación de una estrategia HMPC a una línea de flotación de minerales con el objetivo de controlar la ley de cola final y mantener los niveles de pulpa en rangos de operación adecuados. Además, se presentan los resultados de simulación que permiten comprobar el buen funcionamiento del control predictivo híbrido y se detalla una propuesta de implementación para la estrategia diseñada.

4.2. Control predictivo híbrido basado en modelos

Una estrategia de Control Predictivo Híbrido basado en Modelos o *Hybrid Model Predictive Control* (HMPC) utiliza un modelo híbrido de la planta, caracterizado por comportamientos dinámicos y reglas lógicas, con el fin de predecir el efecto de las acciones de control futuras a ser minimizadas mediante una función objetivo sujeta a restricciones de operación. De acuerdo a Bemporad & Morari (1999) el modelo híbrido de un controlador predictivo debe ser diseñado bajo una estructura *Mixed Logical Dynamics* (MLD), considerando variables continuas, discretas e inecuaciones bajo una representación en espacio de estados. Un modelo MLD se describe en forma completa por:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B_1u(k) + B_2\delta(k) + B_3z(k) \\ y(k) &= Cx(k) + D_1u(k) + D_2\delta(k) + D_3z(k) \\ E_2\delta(k) + E_3z(k) &\leq E_1u(k) + E_4x(k) + E_5 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Donde t es un entero,

$$x = \begin{bmatrix} x_c \\ x_l \end{bmatrix} \quad x_c \in \mathbb{R}^{n_c}, x_l \in \{0, 1\}^{n_l} \quad (4.2)$$

es el estado del sistema, cuyos componentes corresponden a variables continuas x_c y lógicas x_l ,

$$y = \begin{bmatrix} y_c \\ y_l \end{bmatrix} \quad y_c \in \mathbb{R}^{p_c}, y_l \in \{0, 1\}^{p_l} \quad (4.3)$$

es el vector de salida,

$$u = \begin{bmatrix} u_c \\ u_l \end{bmatrix} \quad u_c \in \mathbb{R}^{m_c}, u_l \in \{0, 1\}^{m_l} \quad (4.4)$$

corresponde al vector de entrada, junto con $\delta \in \{0, 1\}^{r_l}$ y $z \in \mathbb{R}^{r_c}$ las cuales representan las variables auxiliares lógicas y continuas, respectivamente. Además, A , B_1 , B_2 , B_3 , C , D_1 , D_2 , D_3 , E_1 , E_2 , E_3 , E_4 y E_5 son matrices de dimensión adecuada.

El traspaso de las ecuaciones dinámicas y condiciones lógicas de un sistema dinámico a una estructura MLD se puede realizar mediante el lenguaje *Hybrid Systems Description Language* (HYSDEL) desarrollado por Torrisi & Bemporad (2004), el cual se encuentra disponible para Matlab[®]. Este lenguaje permite describir los modelos asociados a un sistema dinámico y obtener fácilmente las matrices que conforman su modelo MLD.

Por otra parte, la formulación de un controlador predictivo híbrido implica la resolución de un problema de optimización en cada instante de tiempo k , el cual de acuerdo a Bemporad & Morari (1999) puede definirse como:

$$\begin{aligned} \min_{\{u_0^{N-1}, \delta_0^{N-1}, z_0^{N-1}\}} \quad & \sum_{i=0}^{N-1} \|u(i) - u_e\|_{Q_1}^2 + \|\delta(i|k) - \delta_e\|_{Q_2}^2 + \cdots \\ & \cdots + \|z(i|k) - z_e\|_{Q_3}^2 + \|x(i|k) - x_e\|_{Q_4}^2 + \|y(i|k) - y_e\|_{Q_5}^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} x(N|k) &= x_e \\ x(i+1|k) &= Ax(i|k) + B_1u(i) + B_2\delta(i|k) + B_3z(i|k) \\ y(i|k) &= Cx(i|k) + D_1u(i) + D_2\delta(i|k) + D_3z(i|k) \\ E_2\delta(i|k) + E_3z(i|k) &\leq E_1u(i) + E_4x(i|k) + E_5 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Donde $Q_1 = Q_1^\top > 0$, $Q_2 = Q_2^\top > 0$, $Q_3 = Q_3^\top > 0$, $Q_4 = Q_4^\top > 0$, $Q_5 = Q_5^\top > 0$, $u_0^{N-1} = \{u(0), \dots, u(N-1)\}$, δ_e , z_e , y_e corresponden a los puntos de equilibrio determinados por x_e y u_e , $\|x\|_Q^2 = x^\top Qx$, $x(i|k) \equiv x(k+i, x(k), u_0^{i-1}, \delta_0^{i-1}, z_0^{i-1})$ y $\delta(i|k)$, $z(i|k)$ y $y(i|k)$ son vectores definidos de forma similar.

Asumiendo que existe una solución para el problema de optimización y aplicando la estrategia de Horizonte Móvil o *Receding Horizon*, se procede a considerar únicamente como señal de control el primer elemento de la secuencia de control óptima, es decir $u(k) = u^*(0)$, descartándose los elementos restantes de la secuencia de control óptima (Bemporad & Morari, 1999). El problema de optimización se vuelve a resolver para un instante $k+1$, considerando las nuevas mediciones disponibles desde el proceso.

La obtención de una estrategia HMPC implica la reformulación del problema de optimización como un problema de programación cuadrática entera mixta, también llamado *Mixed Integer Quadratic Programming* (MIQP). En consecuencia, se definen los siguientes vectores, los cuales contienen las variables de control y auxiliares del problema de optimización:

$$\Omega = \begin{bmatrix} u(0) \\ \vdots \\ u(N-1) \end{bmatrix} \quad \Delta = \begin{bmatrix} \delta(0) \\ \vdots \\ \delta(N-1) \end{bmatrix} \quad \Xi = \begin{bmatrix} z(0) \\ \vdots \\ z(N-1) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Estos vectores se agrupan en un vector global, denotado por:

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} \Omega \\ \Delta \\ \Xi \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Por lo tanto, el problema de optimización formulado por las ecuaciones (4.5) y (4.6) puede reescribirse como un problema MIQP (Bemporad & Morari, 1999) en la forma:

$$\min_{\{\mathcal{V}\}} \quad \mathcal{V}^\top S_1 \mathcal{V} + 2(S_2 + x_0^\top S_3) \mathcal{V} \quad (4.9)$$

Sujeto a:

$$F_1 \mathcal{V} \leq F_2 + F_3 x_0 \quad (4.10)$$

Donde S_i y F_i con $i = \{1, 2, 3\}$ son matrices definidas adecuadamente.

El problema de optimización puede resolverse empleando diferentes *software*, entre los cuales se destaca CPLEX (disponible para Matlab[®]). Adicionalmente, las restricciones de operación pueden incluirse de manera adecuada en las matrices de la inecuación (4.10). Para mas detalles sobre la formulación de un controlador predictivo y la resolución del problema de optimización asociado se recomienda consultar el trabajo de Maciejowski (2001).

4.3. Aplicación a flotación de minerales

4.3.1. Estado del arte

La flotación es uno de los procesos de separación mas utilizados en la industria de procesamiento de minerales, especialmente en la recuperación de minerales sulfurados. Sin embargo, a la fecha aun es un proceso bajo estudio y el cual presenta diversas ineficiencias en su operación, en parte debido a la poca instrumentación disponible y con necesidades de una mantención adecuada, a la falta de desarrollo de nuevas tecnologías y a la antigüedad de las plantas industriales, las cuales disponen de un alto número de celdas pequeñas que dificultan el diseño de estrategias de control (Shean & Cilliers, 2011).

Laurila et al. (2002) divide el diseño de estrategias de control para flotación en cuatro niveles (ver figura 4.1). El primer nivel corresponde a la instrumentación disponible en una planta industrial, siendo la base para afrontar el diseño de estrategias de control de forma satisfactoria, para lo cual también es necesario disponer de un amplio conocimiento del proceso bajo análisis. El segundo nivel se centra en los lazos de control regulatorio, que controlan los niveles de pulpa, los flujos de inyección de aire y las tasas de adición de reactivos. Esta tarea se realiza habitualmente utilizando controladores PID convencionales. En relación a los niveles superiores, el siguiente corresponde al control avanzado o *Advanced Flotation Control* (AFC) y el último a controladores que optimizan el proceso, también llamados *Optimising Flotation Control* (OFC).

El objetivo de los controladores AFC es rechazar las perturbaciones asociadas a las entradas del proceso, manteniendo las leyes de mineral de salida y recuperación dentro de rangos de operación aceptables. Desde un punto de vista del negocio de producción de concentrado de cobre, los controladores OFC buscan maximizar la ley de concentrado y la recuperación, o minimizar la ley de cola. Generalmente, los controladores AFC definen las referencias de los controladores regulatorios del segundo nivel; no obstante su desempeño queda condicionado al desempeño particular de cada controlador convencional, afectando la eficiencia global del sistema.

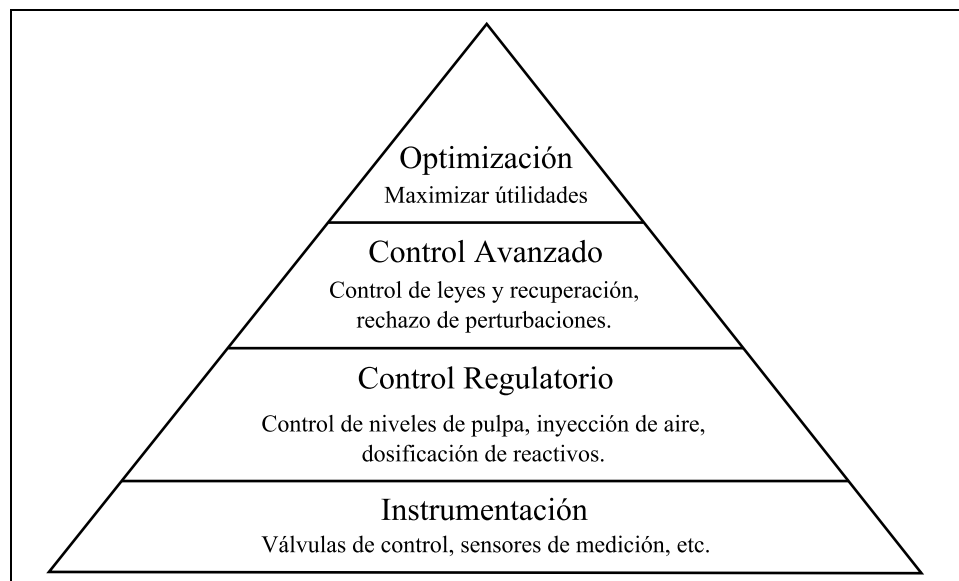


FIGURA 4.1. Jerarquía de sistemas de control aplicados a flotación de minerales

A la fecha, diversas estrategias de control han sido aplicadas al proceso de flotación, destacándose los trabajos de Thwaites (1983) y Thwaites (1986), los cuales proponen el diseño de controladores regulatorios para el nivel de pulpa y adición de reactivos. El trabajo desarrollado por Stenlund & Medvedev (2002), propone el control de los niveles de pulpa de una línea mediante un controlador óptimo multivariable. Adicionalmente, Kämpjärvi & Jämsä-Jounela (2003) realizan un *benchmarking* de diferentes estrategias de control convencionales, controlando los niveles de pulpa de las celdas de una línea.

En relación a la aplicación de estrategias de control avanzado, se destacan los trabajos de Pérez-Correa et al. (1998) y Osorio et al. (1999), primero proponiendo la aplicación de un controlador predictivo experto multivariable a una planta de flotación *rougher*, validado mediante simulación, y posteriormente la aplicación de un sistema experto difuso a una planta de flotación industrial. Por otra parte, el trabajo de Suichies et al. (1999) presenta la aplicación de una estrategia MPC a una planta de flotación de minerales, manipulando la adición de reactivos y controlando las leyes de mineral de salida del proceso, siendo esta estrategia validada satisfactoriamente en una planta industrial. Finalmente, los trabajos de Shean & Cilliers (2011) y Hodouin (2011) presentan un completo resumen de las principales estrategias de control aplicadas al proceso de flotación en los últimos años.

4.3.2. Objetivo de la estrategia de control

El principal objetivo del controlador predictivo híbrido desarrollado en este trabajo es minimizar el error entre la ley de cola de una línea de flotación de minerales y su referencia, bajo perturbaciones en las variables de entrada del proceso, con el fin de mantener su rendimiento en una condición de óptima operación. Para cumplir esta tarea, se formulará la función objetivo del controlador, el modelo dinámico de predicción de la planta bajo una estructura MLD y las restricciones de operación que condicionan el buen funcionamiento del proceso. Posteriormente, este problema de optimización será resuelto como un problema MIQP.

La figura 4.2 presenta el diagrama del sistema de control. La variable controlada es la ley de cola final de la línea (l_t), las variables manipuladas son los porcentajes de apertura de las válvulas de control (v^1 , v^2 y v^3) y las perturbaciones son el flujo de pulpa (Q_f) y la ley de mineral (l_f), ambos en la alimentación de la línea. Las variables medidas se encuentran en concordancia con la instrumentación instalada en una planta de flotación industrial típica (Bergh & Yianatos, 2011).

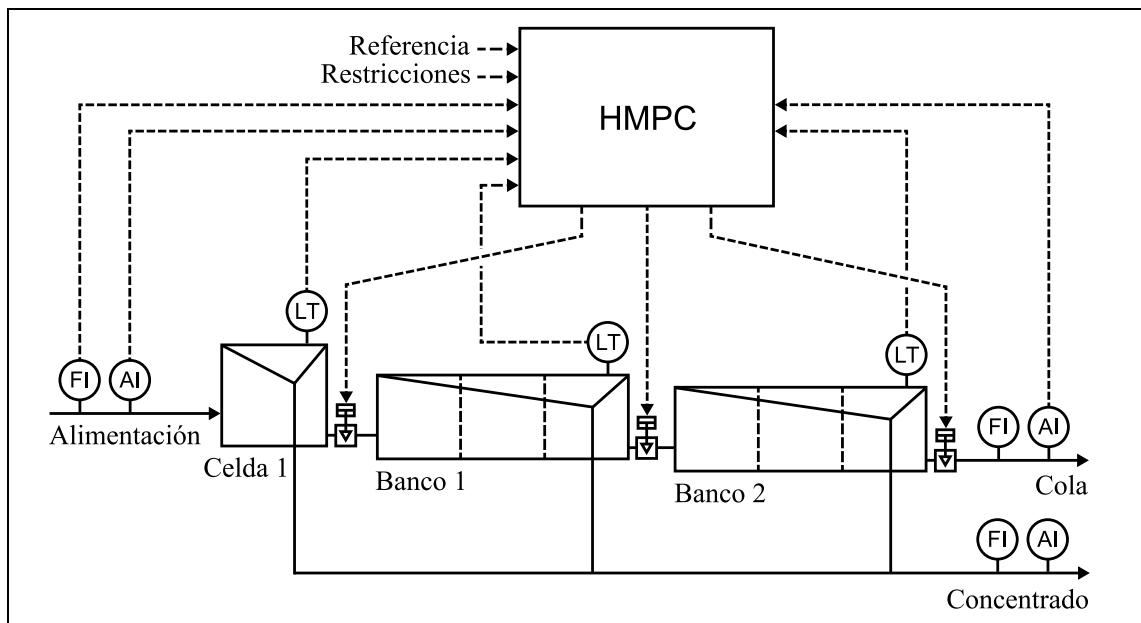


FIGURA 4.2. Sistema de control HMPC aplicado a una línea de flotación

4.3.3. Formulación del modelo de predicción

En el capítulo 3, se identificaron modelos híbridos lineales para predecir tanto los niveles de pulpa de la primera celda y bancos restantes, como la ley de mineral en la cola de la línea. Cada modelo se identificó de manera independiente, mediante datos de entrada-salida generados desde el simulador dinámico, obteniéndose modelos MISO bajo una estructura PWARX. La unificación de estos modelos en un único modelo MLD se lleva a cabo mediante el *software* HYSDEL (Torrisi & Bemporad, 2004), permitiendo definir la estructura del modelo, obtener fácilmente las matrices asociadas y unificar los modelos PWARX independientes en un modelo de predicción del tipo entradas y salidas múltiples, es decir *Multiple Input Multiple Output* (MIMO).

La tabla 4.1 define las variables del controlador predictivo híbrido en relación al simulador dinámico y utilizadas en la formulación del modelo MLD mediante HYSDEL.

TABLA 4.1. Variables del controlador predictivo híbrido

Controlador		Simulador	Descripción
Tipo	Variable	Variable	
Entrada	u_1	v^1	Valor de apertura válvula de control, celda 1
	u_2	v^2	Valor de apertura válvula de control, banco 1
	u_3	v^3	Valor de apertura válvula de control, banco 2
Salida = Estado	$y_1 = x_1$	h_p^1	Nivel de pulpa de la celda 1
	$y_2 = x_2$	h_p^2	Nivel de pulpa del banco 1
	$y_3 = x_3$	h_p^3	Nivel de pulpa del banco 2
	$y_4 = x_4$	l_t	Ley de cola final de la línea
Perturbación	w_1	Q_f	Flujo de pulpa en la alimentación
	w_2	l_f	Ley de mineral en la alimentación

El código 1 presenta la estructura en lenguaje HYSDEL para generar el modelo de predicción MLD a partir de un conjunto de modelos PWARX independientes, el cual es utilizado en este trabajo. La estructura de este código se divide en dos secciones, la primera llamada *interface*, permitiendo definir las variables a ser utilizadas en el modelo y sus rangos de operación. Al interior de esta sección y de acuerdo a la tabla 4.1, se define la subsección *state* que contiene las variables de estado x_i y perturbaciones w_j , la subsección *input* que contiene las variables de entrada u_i , la subsección *output* que contiene las variables de salida y_i y finalmente la subsección *parameter* que contiene los parámetros asociados a cada uno de los modelos PWARX identificados, definidos como θ_{jk}^i con $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $j \in \{1, 2\}$ y $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, e incluyendo los valores límites h_m^1 , h_m^2 , h_m^3 y l_{tm} de cada modelo. Teniendo en cuenta que una planta de flotación de minerales no dispone de entradas ni salidas discretas, todas las variables del modelo mencionadas son continuas y por ende definidas mediante la sintaxis *real*. Sin embargo, en el caso de existir alguna variable discreta de cualquier tipo, ésta puede fácilmente expresarse mediante la sintaxis *bool*.

La segunda sección, llamada *implementation*, se subdivide en seis subsecciones. En la primera de ellas, llamada *aux*, se definen todas las variables auxiliares a ser utilizadas en la estructura del modelo MLD. En este caso se utilizaron cuatro variables discretas y continuas, denotadas por δ_i y z_i respectivamente. El objetivo de estas variables es permitir la interacción entre las dinámicas continuas definidas por los modelos ARX a través de los distintos modos de operación. La segunda subsección definida por *AD* permite establecer las reglas lógicas asociadas a cada modelo PWARX, donde el valor de verdad de cada regla se asigna a una de las variables discretas auxiliares ya definidas. La subsección siguiente, denotada por *DA*, permite escoger uno de los dos modelos ARX asignado a cada modo de operación de un modelo PWARX. Por lo tanto, el resultado a ser asignado a la variable continua auxiliar z_i dependerá del valor lógico de la variable δ_i . Finalmente, las subsecciones *continuous*, *output* y *must* permiten asignar la evolución de las variables de estado y perturbaciones, de las salidas y establecer los rangos de operación admisibles a las variables de entrada, respectivamente.

Código 1: Modelo MLD a partir de modelos PWARX mediante lenguaje HYSDEL

```

1: System pwarx2mld {
2:   Interface {
3:     State      { real  $x_1$  [0,4.6];
4:                  real  $x_2$  [0,4.6];
5:                  real  $x_3$  [0,4.6];
6:                  real  $x_4$  [0,1.5];
7:                  real  $w_1$  [0, 55];
8:                  real  $w_2$  [0,1.5]; }
9:     Input      { real  $u_1$  [0,1];
10:                  real  $u_2$  [0,1];
11:                  real  $u_3$  [0,1]; }
12:    Output     { real  $y_1$ ;
13:                  real  $y_2$ ; }
13:                  real  $y_3$ ; }
13:                  real  $y_4$ ; }
14:    Parameter { real  $\theta_{11}^1, \theta_{12}^1, \theta_{13}^1, \theta_{14}^1, \theta_{15}^1, \theta_{21}^1, \theta_{22}^1, \theta_{23}^1, \theta_{24}^1, \theta_{25}^1, h_m^1$ ;
15:                  real  $\theta_{11}^2, \theta_{12}^2, \theta_{13}^2, \theta_{14}^2, \theta_{15}^2, \theta_{16}^2, \theta_{21}^2, \theta_{22}^2, \theta_{23}^2, \theta_{24}^2, \theta_{25}^2, \theta_{26}^2, h_m^2$ ;
16:                  real  $\theta_{11}^3, \theta_{12}^3, \theta_{13}^3, \theta_{14}^3, \theta_{15}^3, \theta_{21}^3, \theta_{22}^3, \theta_{23}^3, \theta_{24}^3, \theta_{25}^3, h_m^3$ ;
17:                  real  $\theta_{11}^4, \theta_{12}^4, \theta_{13}^4, \theta_{14}^4, \theta_{15}^4, \theta_{16}^4, \theta_{21}^4, \theta_{22}^4, \theta_{23}^4, \theta_{24}^4, \theta_{25}^4, \theta_{26}^4, l_{tm}$ ; }
18:   }
19: Implementation {
20:   Aux { real  $z_1, z_2, z_3, z_4$ ;
21:          bool  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ ; }
22:   AD {  $\delta_1 = x_1 \leq h_m^1$ ;
23:          $\delta_2 = x_2 \leq h_m^2$ ;
24:          $\delta_3 = x_3 \leq h_m^3$ ;
25:          $\delta_4 = x_4 \leq l_{tm}$ ; }
26:   DA {  $z_1 = \{ \text{if } \delta_1 \text{ then } \theta_{11}^1 \cdot x_1 + \theta_{12}^1 \cdot w_1 + \theta_{13}^1 \cdot u_1 + \theta_{14}^1 \cdot x_2 + \theta_{15}^1$ 
27:            $\text{else } \theta_{21}^1 \cdot x_1 + \theta_{22}^1 \cdot w_1 + \theta_{23}^1 \cdot u_1 + \theta_{24}^1 \cdot x_2 + \theta_{25}^1; \}$ 
28:          $z_2 = \{ \text{if } \delta_2 \text{ then } \theta_{11}^2 \cdot x_2 + \theta_{12}^2 \cdot x_1 + \theta_{13}^2 \cdot u_1 + \theta_{14}^2 \cdot u_2 + \theta_{15}^2 \cdot x_3 + \theta_{16}^2$ 
29:            $\text{else } \theta_{21}^2 \cdot x_2 + \theta_{22}^2 \cdot x_1 + \theta_{23}^2 \cdot u_1 + \theta_{24}^2 \cdot u_2 + \theta_{25}^2 \cdot x_3 + \theta_{26}^2; \}$ 
30:          $z_3 = \{ \text{if } \delta_3 \text{ then } \theta_{11}^3 \cdot x_3 + \theta_{12}^3 \cdot x_2 + \theta_{13}^3 \cdot u_2 + \theta_{14}^3 \cdot u_3 + \theta_{15}^3$ 
31:            $\text{else } \theta_{21}^3 \cdot x_3 + \theta_{22}^3 \cdot x_2 + \theta_{23}^3 \cdot u_2 + \theta_{24}^3 \cdot u_3 + \theta_{25}^3; \}$ 
32:          $\vdots$ 

```

```

33:      ⋮
34:       $z_4 = \{ \text{if } \delta_4 \text{ then } \theta_{11}^4 \cdot x_4 + \theta_{12}^4 \cdot w_2 + \theta_{13}^4 \cdot x_1 + \theta_{14}^4 \cdot x_2 + \theta_{15}^4 \cdot x_3 + \theta_{16}^4$ 
35:       $\text{else } \theta_{21}^4 \cdot x_4 + \theta_{22}^4 \cdot w_2 + \theta_{23}^4 \cdot x_1 + \theta_{24}^4 \cdot x_2 + \theta_{25}^4 \cdot x_3 + \theta_{26}^4; \}$ 
36:      Continuous {  $x_1 = z_1;$ 
37:       $x_2 = z_2;$ 
38:       $x_3 = z_3;$ 
39:       $x_4 = z_4;$ 
40:       $w_1 = w_1;$ 
41:       $w_2 = w_2; \}$ 
42:      Output {  $y_1 = x_1;$ 
43:       $y_2 = x_2;$ 
44:       $y_3 = x_3;$ 
45:       $y_4 = x_4; \}$ 
46:      Must {  $u_1 \leq 1;$ 
47:       $-u_1 \leq 0;$ 
48:       $u_2 \leq 1;$ 
49:       $-u_2 \leq 0;$ 
50:       $u_3 \leq 1;$ 
51:       $-u_3 \leq 0; \}$ 
52:       $\}}}$ 

```

Cabe mencionar, que las entradas del modelo MLD deben corresponder únicamente a variables manipuladas, dado que serán incluidas en el vector de control $u(k)$. Dado que tanto Q_f como l_f son perturbaciones medidas del proceso de flotación, en el modelo MLD del controlador predictivo serán consideradas perturbaciones y asignadas como variables de estado en la sección *state* del código HYSDEL. De esta forma, en cada instante de muestreo del controlador predictivo dichas variables serán ingresadas al modelo de predicción MLD por medio del vector de estados iniciales $x(0|k)$. Por lo tanto, el vector de control contendrá únicamente las señales de control futuras correspondientes a las válvulas de control en el flujo de cola de la primera celda y bancos de la línea.

4.3.4. Estrategia de control

El objetivo de control es minimizar el error entre la ley de mineral en la cola final de la línea de flotación y su señal de referencia, resguardando los niveles de pulpa de la primera celda y bancos dentro de un rango que permita una operación adecuada. Las variables manipuladas corresponden a los valores de apertura de las válvulas de control situadas a la salida de cada equipo, siendo sus variaciones también minimizadas.

La ecuación (4.11) describe la función objetivo del controlador predictivo híbrido sujeta al modelo MLD desarrollado en la sección previa y a restricciones de operación para los niveles de pulpa de la primera celda y bancos:

$$\begin{aligned} \min_{\{\Delta u, \delta, z\}} \quad & \sum_{i=0}^{N-1} \|y_4(k+i+1|k) - r(k+i|k)\|_Q^2 \cdots \\ & \cdots + \|\Delta u_1(k+i|k)\|_R^2 + \|\Delta u_2(k+i|k)\|_P^2 + \|\Delta u_3(k+i|k)\|_S^2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Sujeta a:

$$\begin{aligned} x(k+1|k) &= Ax(k|k) + B_3z(k|k) \\ y(k|k) &= Cx(k|k) \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$E_2\delta(k|k) + E_3z(k|k) \leq E_1u(k|k) + E_4x(k|k) + E_5$$

$$\underline{h}_p^j \leq x_j(k|k) \leq \overline{h}_p^j, \quad j = \{1, 2, 3\} \quad (4.13)$$

Donde N es el horizonte de predicción, las variables manipuladas son definidas por el vector $u(k) = [u_1(k), u_2(k), u_3(k), \dots, u_{N-1}(k), u_{N-1}(k), u_{N-1}(k)]^\top$ y $\Delta u_j(k) = u_j(k) - u_j(k-1)$ sus variaciones con $j = \{1, 2, 3\}$, $\overline{h}_p^j$ y $\underline{h}_p^j$ son los límites máximos y mínimos para los niveles de pulpa de la celda o banco j . Finalmente, $r(k)$ corresponde a la señal de referencia para la ley de cola.

4.4. Resultados de simulación

De acuerdo con la estrategia descrita por las ecuaciones (4.11), (4.12) y (4.13) se calibró y validó el Controlador Predictivo Híbrido aplicándolo al simulador dinámico híbrido de una línea de flotación de minerales descrito en el capítulo 2. La implementación del Controlador Predictivo Híbrido se realizó mediante el *software* de optimización CPLEX, disponible para Matlab[®], resolviendo un problema de optimización MIQP en cada instante de muestreo del controlador.

La tabla 4.2 presenta los parámetros del Controlador Predictivo Híbrido, de los cuales el horizonte de predicción N y los pesos asociados a la función objetivo Q , R , P y S se obtuvieron mediante prueba y error. Además, se presentan los rangos de operación para los niveles de pulpa, definidos por $\underline{h}_p^i$ y $\overline{h}_p^i$. En este caso sus valores son iguales para todos los equipos de la línea, aún cuando podrían seleccionarse otros rangos de valores que permitan lograr un adecuado desempeño de la planta.

TABLA 4.2. Parámetros de diseño Controlador Predictivo Híbrido

Parámetro	Valor	Unidad	Descripción
N	4	-	Horizonte de predicción
Q	25000	-	Peso de la función objetivo, ley de cola
R	11	-	Peso de la función objetivo, variación válvula 1
P	11	-	Peso de la función objetivo, variación válvula 2
S	11	-	Peso de la función objetivo, variación válvula 3
$\overline{h}_p^1$	4.5	[m]	Límite superior del nivel de pulpa, celda 1
$\underline{h}_p^1$	4.1	[m]	Límite inferior del nivel de pulpa, celda 1
$\overline{h}_p^2$	4.5	[m]	Límite superior del nivel de pulpa, banco 2
$\underline{h}_p^2$	4.1	[m]	Límite inferior del nivel de pulpa, banco 2
$\overline{h}_p^3$	4.5	[m]	Límite superior del nivel de pulpa, banco 3
$\underline{h}_p^3$	4.1	[m]	Límite inferior del nivel de pulpa, banco 3
T_s	0.1	[min]	Tiempo de muestreo del controlador predictivo

La figura 4.3 presenta los resultados de simulación del Control Predictivo Híbrido en un horizonte de tiempo de 160 min. Se varió el flujo de pulpa y la ley de mineral en la alimentación de la línea, emulando el comportamiento que ambas variables presentan en una planta industrial. Además, se definió una señal de referencia para la ley de cola final, considerando tres escalones de valores 0.125 %, 0.10 % y 0.075 %. Cabe mencionar, que el control de la ley de cola en un valor de referencia permite que la ley de concentrado final y la recuperación, bajo condiciones de régimen permanente, alcancen valores derivados desde balances metalúrgicos previamente realizados para una planta bajo análisis. Por lo tanto, mediante la utilización del controlador avanzado desarrollado en este trabajo, al modificar la referencia de la ley de cola puede variarse convenientemente la ley de concentrado y la recuperación.

Los resultados de simulación permiten apreciar el buen desempeño del controlador, el cual mediante la manipulación de los valores de apertura de las válvulas de control, varía los niveles de pulpa y permite seguir satisfactoriamente la referencia. Además, se aprecia la disminución en las fluctuaciones del flujo de concentrado final de la línea, siendo esto altamente beneficioso para una adecuada operación de una planta de flotación industrial. De manera similar, se aprecia que las variaciones en los niveles de pulpa se mantienen entre los valores límites definidos en la etapa de diseño.

La figura 4.4 presenta las variaciones de los modos de operación de la primera celda y de los bancos restantes de la planta de flotación, junto a los modos de operación del modelo MLD perteneciente al Controlador Predictivo Híbrido. Se aprecia claramente que el controlador siguió satisfactoriamente los modos de operación de la planta, especialmente el cambio de modo evidenciado en el tercer banco de la línea. Esta característica de modificar el modelo de predicción del controlador predictivo de acuerdo al modo de operación actual de la planta, es una de las principales ventajas de una estrategia HMPC. En relación al tercer modo de operación, el cual corresponde a una condición de rebalse, no se evidencia en esta simulación debido a que el límite máximo definido para el nivel de pulpa corresponde a 4.5 m, siendo la altura máxima de una celda o banco 4.6 m. Este valor se ingresa como una restricción de operación, de acuerdo a la inecuación (4.13).

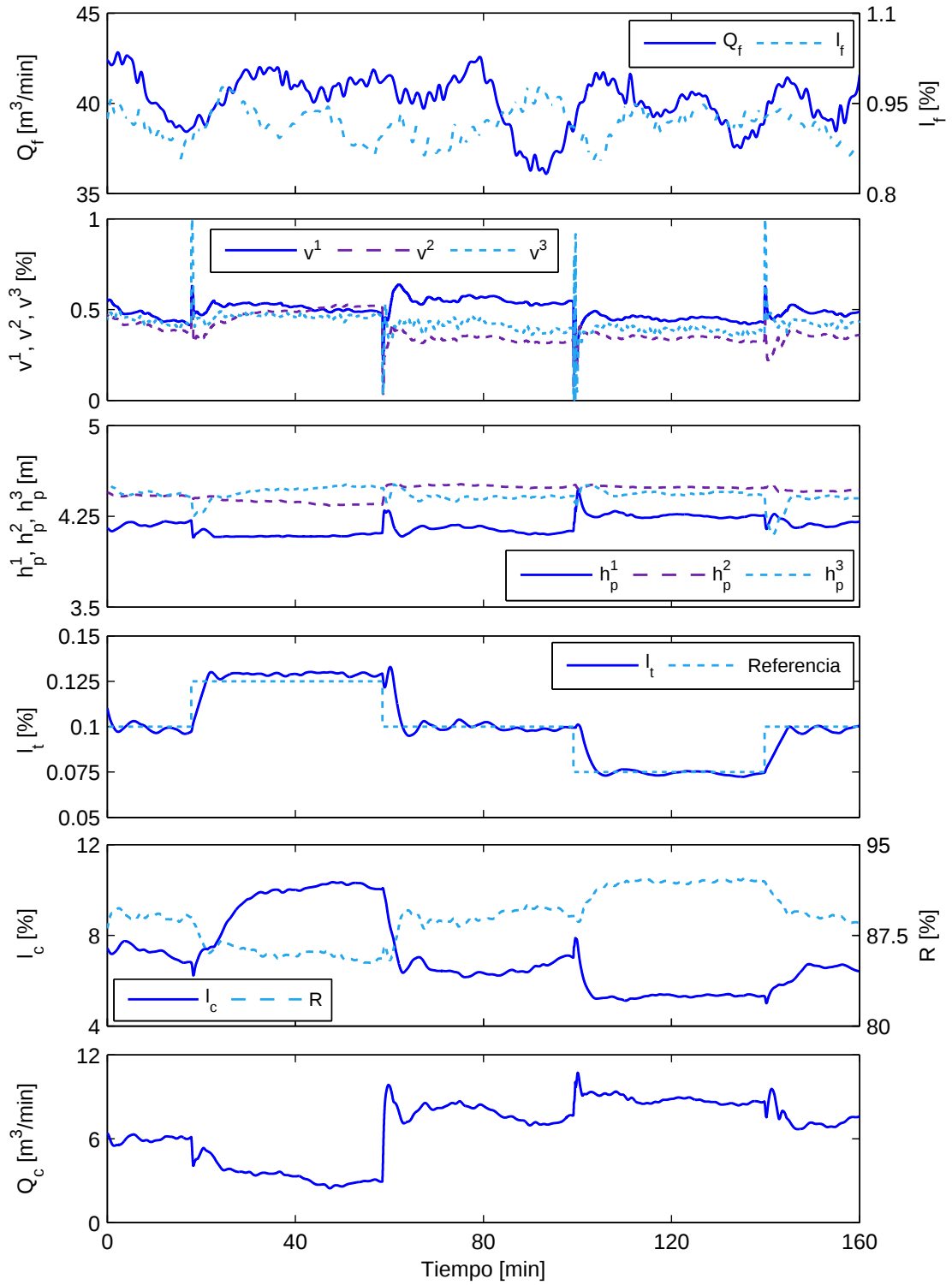


FIGURA 4.3. Resultados de simulación estrategia HMPC aplicada a una línea de flotación

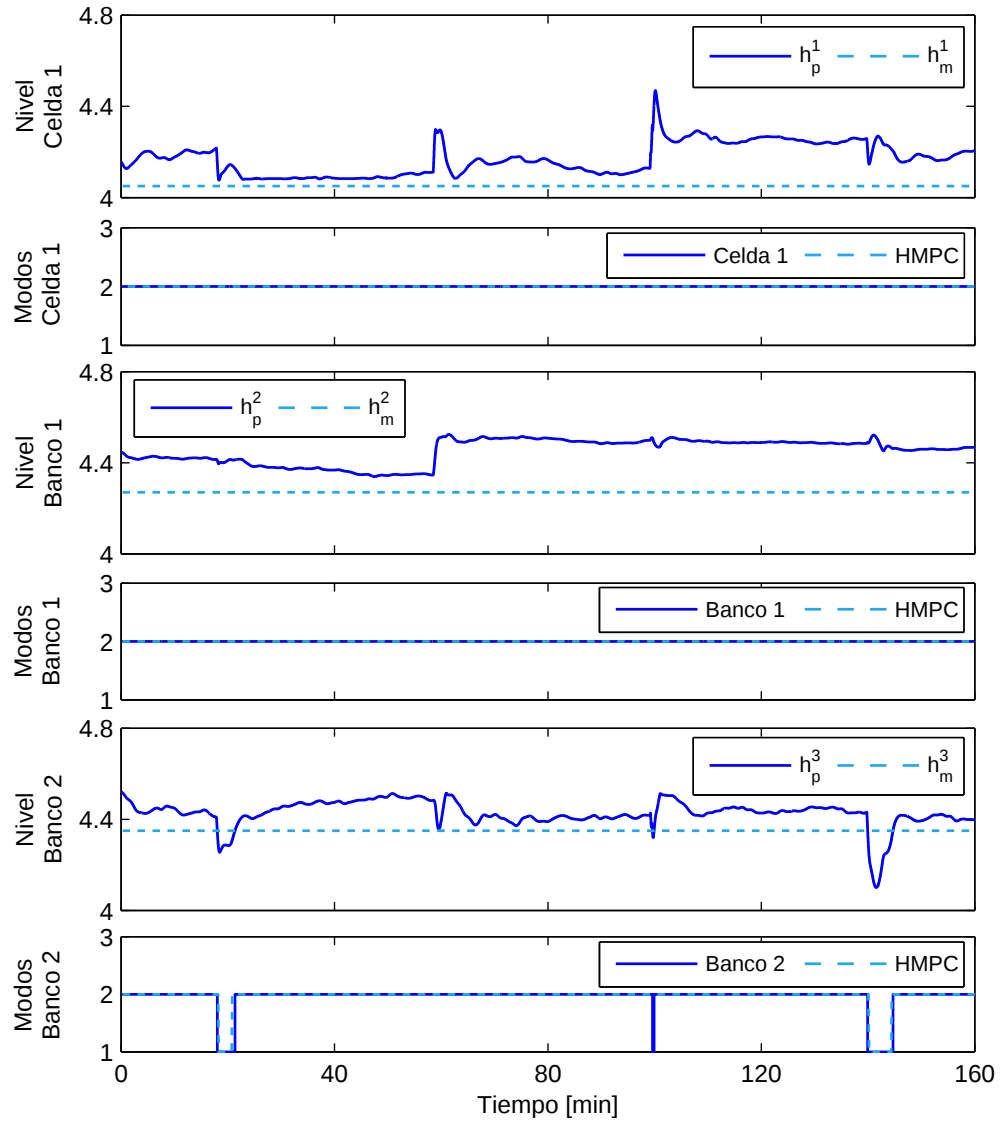


FIGURA 4.4. Modos de operación celdas de flotación y controlador predictivo híbrido

La figura 4.5 permite apreciar la relación que existe entre la ley de concentrado y la recuperación de mineral de la planta, al variar la referencia de la ley de cola utilizando la estrategia HMPC formulada. Esta curva es similar a las evidenciadas habitualmente en plantas de flotación industriales, la cual permite apreciar el rendimiento del proceso de flotación (Shean & Cilliers, 2011). Por otra parte, se visualiza el desempeño del Controlador Predictivo Híbrido, el cual dada una referencia de la ley de mineral en la cola, permite llevar la planta a diferentes puntos de operación.

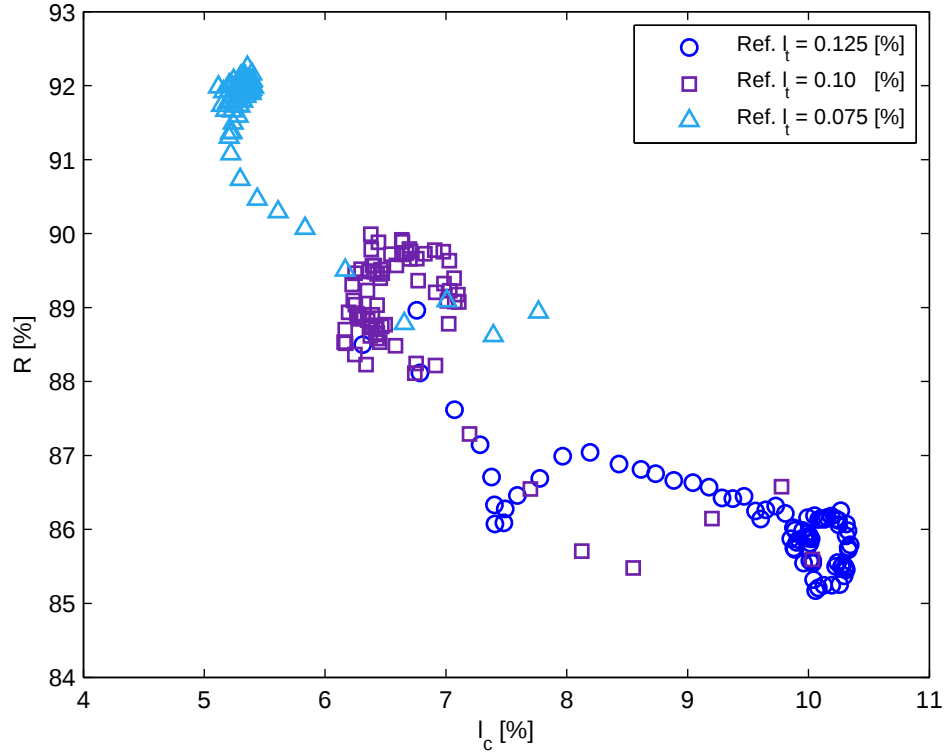


FIGURA 4.5. Ley de concentrado versus recuperación de mineral bajo estrategia HMPC

Con el objetivo de validar el desempeño del Controlador Predictivo Híbrido, se comparó con un Controlador Predictivo convencional. La formulación de esta estrategia MPC se realizó considerando los modelos ARX previamente identificados en el capítulo 3, solo para el segundo modo de operación de la primera celda y bancos de la línea, el cual corresponde a la operación normal de la celda, es decir, bajo presencia de fases pulpa y espuma, junto a los flujos de concentrado y cola asociados.

Los modelos ARX para los niveles de pulpa h_p^1 , h_p^2 y h_p^3 , y ley de cola final l_t , correspondientes a la estrategia MPC, son formulados en un modelo en espacio de estados:

$$\begin{aligned} x(k+1|k) &= Ax(k|k) + Bu(k|k) + W \\ y(k|k) &= Cx(k|k) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Donde $x(k)$ es el vector de estados, $y(k)$ el vector de salidas y $u(k)$ el vector de entradas. Además, A , B , C y W son matrices de dimensión adecuada y que contienen los parámetros de los modelos ARX.

Con el fin de comparar el desempeño del controlador HMPC, la función objetivo del controlador MPC y los parámetros de diseño definidos en la tabla 4.2 serán los mismos, variando únicamente el modelo de predicción. Por lo tanto, la estrategia MPC a ser aplicada a la línea de flotación queda definida por la función objetivo (4.11), el modelo de predicción (4.14) y las restricciones de operación (4.13). Este problema se resuelve mediante su formulación como un problema de Programación Cuadrática o *Quadratic Programming* (QP) (Bemporad, 2005).

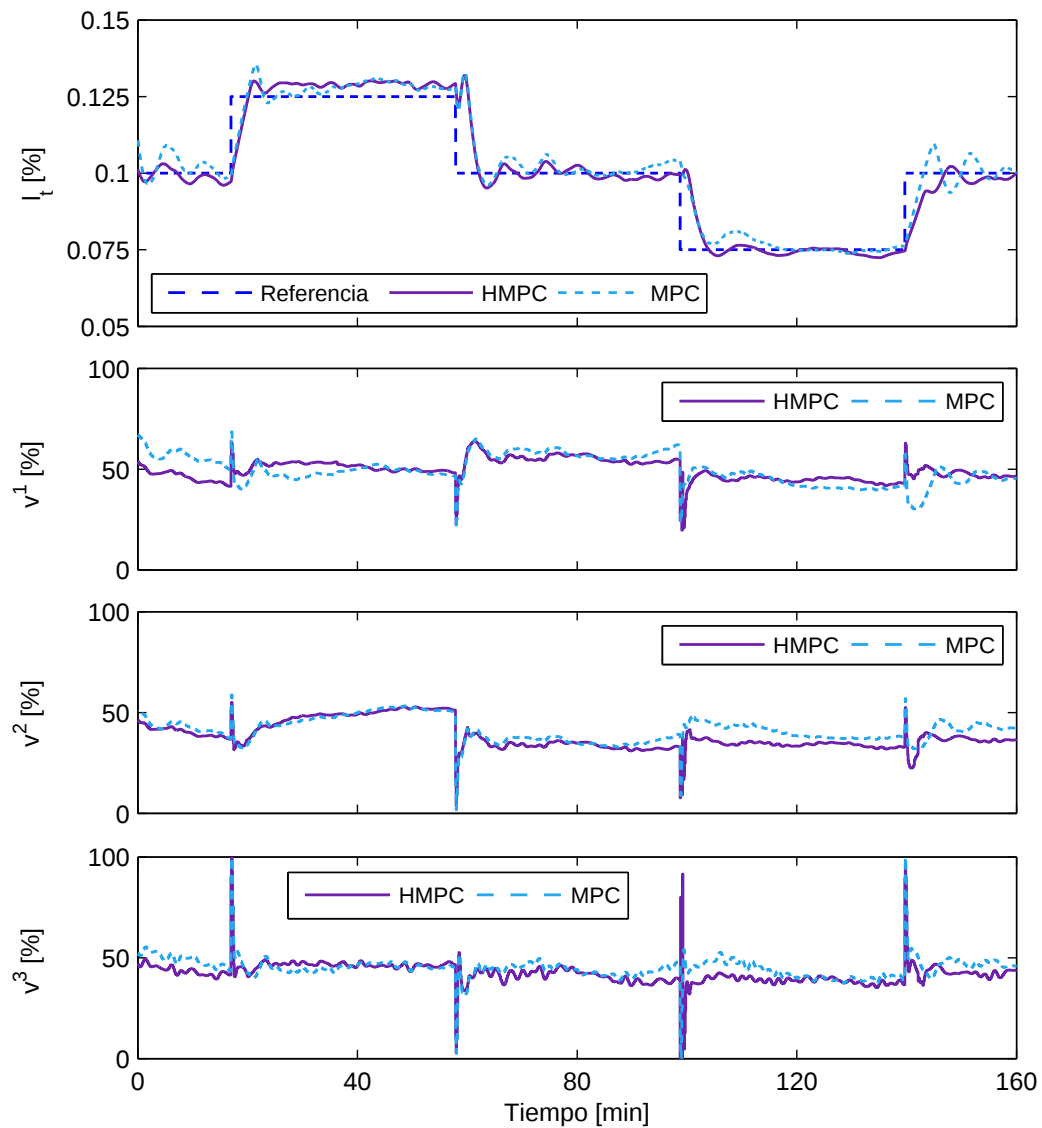


FIGURA 4.6. Resultados de simulación comparación entre estrategias MPC y HMPC

La figura 4.6 presenta los resultados de simulación que comparan el desempeño entre las estrategias HMPC y MPC. Se aprecia que ambas estrategias permiten controlar la ley de cola final de una línea de flotación. La estrategia HMPC utiliza un modelo de predicción MLD, el cual caracteriza un mayor número de dinámicas del proceso, obteniendo mejores resultados en régimen transiente y permanente. En efecto, la tabla 4.3 presenta los errores RMS entre la señal de referencia y la ley de cola final de la línea para ambas estrategias de control, visualizando que la estrategia HMPC desarrollada logra un mejor desempeño en comparación a una estrategia MPC.

Por otra parte, se destaca que la metodología de identificación propuesta, permite obtener modelos de predicción que pueden ser utilizados tanto para el diseño de controladores predictivos convencionales como para el diseño de controladores predictivos híbridos.

TABLA 4.3. Error RMS controlador MPC y HMPC

Indicador	MPC [%]	HMPC [%]	Variación [%]
Error RMS	0.0082	0.0068	-17

4.5. Propuesta de arquitectura para implementación

La figura 4.7 presenta una propuesta de arquitectura para la implementación de la estrategia de control avanzado formulada en este trabajo, la cual considera dos niveles. El primero corresponde a la instrumentación requerida, mientras que el segundo considera los módulos necesarios para el correcto funcionamiento de la estrategia HMPC. Ambos niveles se encuentran interconectados en una red integrada de instrumentación y control, la cual permite la recepción y envío de señales entre ambos.

El sistema de control avanzado utiliza dos módulos de apoyo, el primero corresponde al modelo híbrido y el segundo a la obtención de las señales de control mediante la solución de un problema de optimización MIQP. Finalmente, el sistema de control avanzado es configurado y operado a través de una estación de trabajo remota. La identificación de modelos híbridos PWARX debe realizarse de acuerdo a la metodología descrita en la sección 3.3.1, considerando la mayor cantidad de combinaciones posibles entre las válvulas de control. El diseño del controlador HMPC se realiza de acuerdo a la estrategia formulada en la sección 4.3.4, siendo posible definir desde la estación remota los valores límites $\overline{h_p}$ y $\underline{h_p}$, junto a la referencia de la ley de cola l_t .

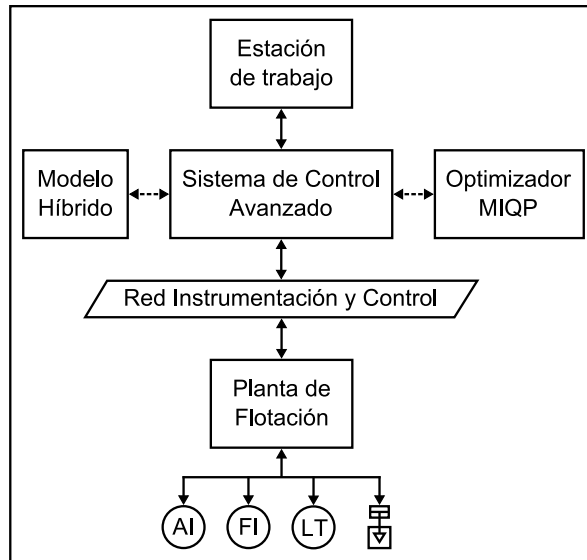


FIGURA 4.7. Propuesta de arquitectura para implementación estrategia HMPC

5. CONCLUSIONES

5.1. Conclusiones del trabajo de tesis

El presente trabajo de tesis abordó el problema de control de una planta de flotación de minerales, mediante una estrategia de Control Predictivo Híbrido. Para cumplir este objetivo, se desarrolló un simulador dinámico de una línea de flotación, el cual se calibró mediante datos de una planta industrial. Adicionalmente, se formuló una metodología de identificación de modelos híbridos predictivos para diferentes modos de operación de una línea de flotación.

A continuación, se formuló un Controlador Predictivo Híbrido, el cual minimiza el error entre la ley de cola y su referencia, mediante la manipulación de los valores de apertura de las válvulas de control de las celdas y bancos pertenecientes a la línea. Este controlador puede operar en condiciones de ausencia de rebose de concentrado en celdas y bancos, variando su modelo de predicción de acuerdo a la condición de operación de los equipos de la planta.

Como es sabido, una planta de flotación de minerales es un proceso complejo, compuesto por dinámicas no lineales y bajo configuraciones de circuitos de producción que dificultan el desarrollo de metodologías de control. Sin embargo, a pesar de esta complicación el simulador dinámico híbrido desarrollado describe razonablemente el comportamiento de una línea de flotación, evidenciando el acoplamiento que existe entre las celdas que conforman la planta.

Por otra parte, el simulador representa adecuadamente las condiciones mineralógicas del proceso bajo la presencia de diferentes granulometrías e incluyendo el efecto de liberación del mineral. La principal ventaja de esta consideración, radica en la posibilidad de interconectar el modelo formulado con modelos de molienda. Además, el simulador caracteriza diferentes condiciones de operación de las celdas que conforman una línea, permitiendo diseñar y validar estrategias de control bajo diferentes escenarios de operación.

Los resultados de identificación muestran que la utilización de modelos híbridos facilitan la caracterización de las principales variables de una planta de flotación. De esta forma, es posible obtener modelos individuales para ciertas condiciones de operación, particularizando las no linealidades del proceso y prediciendo el comportamiento en horizontes de tiempo razonables.

La metodología de identificación propuesta permite abordar el comportamiento global de una planta de flotación, con resultados satisfactorios. No obstante, se debe tener presente en la etapa de generación de datos entrada-salida el abarcar la mayor cantidad de combinaciones posibles entre las válvulas de control de la línea, dado que al variar el valor de apertura de una o de un conjunto de ellas, se modifican las constantes de tiempo de las celdas y bancos, afectando la efectividad de los modelos identificados. La metodología desarrollada junto a la utilización de modelos PWARX aborda satisfactoriamente esta dificultad. Además, se comprueba que los modelos híbridos en la forma PWARX pueden utilizarse satisfactoriamente en la formulación de controladores predictivos lineales.

La investigación realizada comprueba que el Control Predictivo Híbrido es una herramienta viable para el control de plantas de flotación de minerales, permitiendo afrontar diferentes condiciones de operación mediante un único sistema de control. Los resultados muestran el correcto desempeño del controlador bajo perturbaciones en el flujo de pulpa y ley de mineral en la alimentación, junto a un mínimo error en régimen permanente. Por otra parte, la utilización de un modelo de predicción híbrido permite obtener mejores resultados en comparación a una estrategia de control predictivo convencional, mejorando el desempeño del controlador en un 17 %, mediante simulación. La implementación de esta metodología en una planta industrial debe considerar como requisito mínimo la instrumentación señalada y calibrada. Adicionalmente, se muestra que el Controlador Predictivo Híbrido permite reducir las variaciones de los niveles de pulpa, manteniendo dichas variables dentro de un rango de operación acotado. Además, permite controlar la ley de cola final, la cual puede ser definida en un valor tal, de acuerdo a la relación entre la ley de concentrado y la recuperación de mineral establecidas mediante balances metalúrgicos.

5.2. Futuras líneas de investigación

Como actividades de investigación futura, orientadas al diseño de metodologías de control avanzado de plantas de flotación de minerales, se proponen las siguientes:

- Modelar dinámicamente la altura de espuma en celdas de flotación, considerando los efectos de la inyección de aire, la dosificación de espumante y los flujos másicos relacionados con la fase espuma.
- Estudiar la operación del Control Predictivo Híbrido frente a variaciones en las condiciones mineralógicas y operacionales de las etapas restantes del proceso de flotación.
- Estudiar la modelación dinámica de las etapas restantes del proceso de flotación y su integración en un modelo global, el cual permita diseñar e implementar estrategias de control optimizante.
- Validar la estrategia de Control Predictivo Híbrido en una planta piloto, en particular considerando diferentes líneas de flotación e identificando un modelo híbrido global de la ley de cola final.

BIBLIOGRAFIA

- Barbian, N., Ventura-Medina, E., & Cilliers, J. (2003). Dynamic froth stability in froth flotation. *Minerals Engineering*, 16, 1111–1116.
- Barrera, R. & González, G. (1993). Informe técnico: modelación de una planta de flotación. Universidad de Chile.
- Bascur, O. (2010). A flotation model framework for dynamic performance monitoring. *Proceedings of the VII International Mineral Processing Seminar*, 1, 328–339.
- Bemporad, A. (2005). Model predictive control of hybrid systems. Slides of the 1st HYCON PHD School on Hybrid Systems, University of Siena, Italy.
- Bemporad, A., Garulli, A., Paoletti, S., & Vicino, A. (2005). A bounded-error approach to piecewise affine system identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50, 1567–1580.
- Bemporad, A. & Morari, M. (1999). Control of systems integrating logic, dynamics and constraints. *Automatica*, 35, 407–427.
- Bergh, L. & Yianatos, J. (2011). The long way toward multivariate predictive control of flotation processes. *Journal of Process Control*, 21, 226–234.
- Camacho, E. & Bordons, C. (2004). Control predictivo: pasado, presente y futuro. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 1, 5–28.
- Camacho, E., Ramirez, D., Limon, D., Muñoz de la Peña, D., & Alamo, T. (2010). Model predictive control techniques for hybrid systems. *Annual Reviews in Control*, 34, 21–31.

- Casali, A., González, G., Agosto, H., & Vallebuona, G. (2002). Dynamic simulator of a rougher flotation circuit for a copper sulphide ore. *Minerals Engineering*, 15, 253–262.
- Cortés, G., Verdugo, M., Fuenzalida, R., Cerda, J., & Cubillos, E. (2008). Rougher flotation multivariable predictive control: Concentrator A-1 División Codelco Norte. *Proceedings of the V International Mineral Processing Seminar*, 1, 316–325.
- Ferrari-Trecate, G. (2005). Hybrid Identification Toolbox (HIT). http://sisdin.unipv.it/lab/personale/pers_hp/ferrari/HIT_toolbox.php. Último acceso realizado en Mayo de 2014.
- Ferrari-Trecate, G., Muselli, A., Liberati, A., & Morari, M. (2001). Identification of piecewise affine and hybrid systems. *Proceedings of the 2001 American Control Conference*, 5, 3521–3526.
- Ferrari-Trecate, G., Muselli, A., Liberati, A., & Morari, M. (2003). A clustering technique for the identification of piecewise affine systems. *Automatica*, 39, 205–217.
- Gatica, J., Ramos, B., Villalobos, J., & Olivares, J. (2009). Robust multivariable predictive control strategy on SAG mills Codelco Chile - División El Teniente. *Proceedings of the 2009 IFAC Workshop on Automation in Mining, Mineral and Metal Industry*, 1, 49–54.
- Hodouin, D. (2011). Methods for automatic control, observation and optimization in mineral processing plants. *Journal of Process Control*, 21, 211–225.
- Kämpjärvi, P. & Jämsä-Jounela, S. (2003). Level control strategies for flotation cells. *Minerals Engineering*, 16, 1061–1068.
- Laurila, H., Karesvuori, J., & Tiili, O. (2002). Strategies for instrumentation and control of flotation circuits. *Proceedings of the 2002 Mineral Processing Plant Design, Practise and Control Symposium*, 2, 2174–2195.

- Mac-Lean, A. (2013). Competitividad de la minería Chilena. Presentación Comisión Chilena del Cobre.
- Maciejowski, J. (2001). Predictive control with constraints. 1st Ed. Pearson.
- Mathews, J. & Fink, K. (2004). Numerical methods using matlab. 4th Ed. Prentice-Hall Inc.
- Ortiz, J. & Toro, R. (2013). A flotation cell model for dynamic simulation. *Proceedings of the 16th IFAC Symposium on Automation in Mining, Mineral and Metal Processing*, 15, 161–165.
- Osorio, D., Pérez-Correa, R., & Cipriano, A. (1999). Assessment of expert fuzzy controllers for conventional flotation plants. *Minerals Engineering*, 12, 1327–1338.
- Paoletti, S., Juloski, A., Ferrari-Trecate, G., & Vidal, R. (2007). Identification of hybrid systems: a tutorial. *European Journal of Control*, 13, 242–260.
- Pérez-Correa, R., González, G., Casali, A., & Cipriano, A. (1998). Dynamic modelling and advanced multivariable control of conventional flotation circuits. *Minerals Engineering*, 11, 333–346.
- Rojas, D. & Cipriano, A. (2010). Model based predictive control of a rougher flotation circuit considering grade estimation in intermediate cells. *Dyna*, 166, 29–37.
- Sbarbaro, D., Maldonado, M., & Cipriano, A. (2008). A two level hierarchical control structure for optimizing a rougher flotation circuit. *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, 17, 1018–1022.
- Shean, B. & Cilliers, J. (2011). A review of froth flotation control. *International Journal of Mineral Processing*, 100, 57–71.
- Stenlund, B. & Medvedev, D. (2002). Level control of cascade coupled flotation tanks. *Control Engineering Practice*, 10, 443–448.

Suichies, M., Leroux, D., Dechert, C., & Trusiak, A. (1999). Model predictive control of the flotation process. *Proceedings of the 31st Annual Canadian Mineral Processors Operators Conference*.

Thwaites, P. (1983). Continued development of copper flotation control at the Kidd Creek concentrator. *CIM Bulletin*, 76, 41–46.

Thwaites, P. (1986). Computer controlled reagent addition strategy and hardware for the control of a copper and zinc flotation process. *Proceedings of the Third Meeting of the Canadian Industrial Computer Society*, 56, 1–8.

Torrisi, F. & Bemporad, A. (2004). HYSDEL - A tool for generating computational hybrid models for analysis and synthesis problems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 12, 235–249.

Vidal, R. (2004). Identification of pwarx hybrid models with unknown and possibly different orders. *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, 1, 547–552.

Wills, B. & Napier-Munn, T. (2006). Mineral processing technology. 7th Ed. Elsevier.

Yianatos, J. (2005). Flotación de minerales. Universidad Técnica Federico Santa María.

ANEXOS

ANEXO A. CALIBRACIÓN DEL SIMULADOR DINÁMICO HÍBRIDO.

- 1. Cálculo del nivel de pulpa:** En condiciones de estado estacionario, la variación del nivel de pulpa al interior de una celda i cumple $\dot{h}_p^i = 0$. Asumiendo constantes y medibles la altura de espuma h_e^i y la altura máxima de la celda h_{max}^i , el nivel de pulpa al interior de la celda se obtiene mediante la ecuación:

$$h_p^i = h_{max}^i - h_e^i \quad (A.1)$$

- 2. Cálculo de la constante de balance asociada al flujo de cola:** En condiciones de estado estacionario y considerando medibles el flujo volumétrico de pulpa en la cola Q_t^i , la apertura de la válvula de control v^i , el nivel de pulpa h_p^i , el nivel de pulpa de la celda siguiente h_p^{i+1} y la caída hidráulica entre dichas celdas Δh^i , se obtiene la constante de balance del flujo de pulpa en la cola de una celda i :

$$\alpha_t^i = \frac{Q_t^i}{v^i \sqrt{h_p^i - h_p^{i+1} + \Delta h^i}} \quad (A.2)$$

- 3. Cálculo de la constante de balance asociada al flujo de concentrado:** En condiciones de estado estacionario y considerando medibles el flujo volumétrico de concentrado Q_c^i , el nivel de pulpa h_p^i , la altura de espuma h_e^i y la altura máxima disponible de la celda h_{max}^i , la constante de balance asociada al flujo de concentrado de una celda i , se obtiene mediante la ecuación:

$$\alpha_c^i = \frac{Q_c^i}{h_p^i + h_e^i - h_{max}^i} \quad (A.3)$$

- 4. Cálculo de la masa de mineral en fases pulpa y espuma:** En condiciones de estado estacionario y considerando constantes los hold-up de aire en las fases pulpa ϵ_p^i y espuma ϵ_e^i , y medibles el nivel de pulpa h_p^i , la altura de espuma h_e^i y el área de la celda A^i , se obtienen los volúmenes de las fases pulpa y espuma:

$$\begin{aligned} V_p^i &= A^i h_p^i (1 - \epsilon_p^i) \\ V_e^i &= A^i h_e^i (1 - \epsilon_e^i) \end{aligned} \quad (A.4)$$

Asumiendo conocidos los flujos volumétricos de pulpa en la cola Q_t^i y concentrado Q_c^i , junto con los flujos máscicos en la cola M_t^{ijk} y concentrado M_c^{ijk} , ambos medidos para una clase j y granulometría k , la masa de mineral asociada a cada fase de una celda i , se obtiene mediante las ecuaciones:

$$m_p^{ijk} = \frac{V_p^i M_t^{ijk}}{Q_t^i} \quad (\text{A.5})$$

$$m_e^{ijk} = \frac{V_e^i M_c^{ijk}}{Q_c^i} \quad (\text{A.6})$$

5. Cálculo tasas de flotación y drenaje de mineral: En condiciones de estado estacionario, la variación de la masa de mineral en las fases pulpa y espuma de una celda i cumplen $\dot{m}_p^{ijk} = 0$ y $\dot{m}_e^{ijk} = 0$, respectivamente. Considerando conocida la tasa de flotación α_p^{ijk} , la masa de mineral en la fase pulpa m_p^{ijk} y espuma m_e^{ijk} , para una clase j y granulometría k , el flujo volumétrico de concentrado Q_c^i y el volumen de espuma V_e^i ; la tasa de drenaje de mineral asociada a la fase espuma de una celda i , se obtiene mediante la ecuación:

$$\alpha_e^{ijk} = \alpha_p^{ijk} \frac{m_p^{ijk}}{m_e^{ijk}} - \frac{Q_c^i}{V_e^i} \quad (\text{A.7})$$

Los valores de las tasas de flotación α_p^{ijk} , para una clase j y granulometría k , pueden ser definidos de acuerdo a los trabajos de Barrera & González (1993) y Wills & Napier-Munn (2006). Además, una vez conocidos los valores de las tasas de flotación α_p^{ijk} y drenaje α_e^{ijk} para una celda i , los flujos de colector Q_{col} y espumante Q_{esp} se ajustan según la metodología propuesta por Barrera & González (1993) y Pérez-Correa et al. (1998).

6. Cálculo ley de calcopirita asociada a cada clase: En condiciones de estado estacionario, las leyes de cobre para una celda i , en el flujo de cola l_t^i y en el flujo de concentrado l_c^i , se obtienen a partir de las siguientes ecuaciones:

$$l_t^i = l_{cu} \frac{(M_t^{i11} + M_t^{i12} + \dots + M_t^{i1r}) l_{cp}^1 + (M_t^{i21} + M_t^{i22} + \dots + M_t^{i2r}) l_{cp}^2}{(M_t^{i11} + M_t^{i12} + \dots + M_t^{i1r}) + (M_t^{i21} + M_t^{i22} + \dots + M_t^{i2r})} \quad (\text{A.8})$$

$$l_c^i = l_{cu} \frac{(M_c^{i11} + M_c^{i12} + \dots + M_c^{i1r}) l_{cp}^1 + (M_c^{i21} + M_c^{i22} + \dots + M_c^{i2r}) l_{cp}^2}{(M_c^{i11} + M_c^{i12} + \dots + M_c^{i1r}) + (M_c^{i21} + M_c^{i22} + \dots + M_c^{i2r})} \quad (\text{A.9})$$

Conocido el flujo másico de cola M_t^{ijk} y el flujo másico de concentrado M_c^{ijk} , ambos para una celda i , clase j y granulometría k , se define el flujo másico total de cola M_{tsum}^{ij} y flujo másico total de concentrado M_{csum}^{ij} para cada clase $j \in \{1, 2\}$:

$$\begin{aligned} M_{tsum}^{i1} &= M_t^{i11} + M_t^{i12} + \dots + M_t^{i1r} \\ M_{tsum}^{i2} &= M_t^{i21} + M_t^{i22} + \dots + M_t^{i2r} \\ M_{csum}^{i1} &= M_c^{i11} + M_c^{i12} + \dots + M_c^{i1r} \\ M_{csum}^{i2} &= M_c^{i21} + M_c^{i22} + \dots + M_c^{i2r} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Además, considerando que l_{cu} corresponde a la ley de cobre en una molécula de calcopirita (34.61 %), las ecuaciones (A.8) y (A.9) son únicamente función de la ley de calcopirita en la primera clase l_{cp}^1 y segunda clase l_{cp}^2 :

$$l_t^i = \frac{l_{cu} M_{tsum}^{i1}}{M_{tsum}^{i1} + M_{tsum}^{i2}} l_{cp}^1 + \frac{l_{cu} M_{tsum}^{i2}}{M_{tsum}^{i1} + M_{tsum}^{i2}} l_{cp}^2 \quad (\text{A.11})$$

$$l_c^i = \frac{l_{cu} M_{csum}^{i1}}{M_{csum}^{i1} + M_{csum}^{i2}} l_{cp}^1 + \frac{l_{cu} M_{csum}^{i2}}{M_{csum}^{i1} + M_{csum}^{i2}} l_{cp}^2 \quad (\text{A.12})$$

Por lo tanto, conocida la ley de cobre en el flujo de cola y concentrado de una celda i , definidas por l_{tmed}^i y l_{cmed}^i respectivamente, el cálculo de las leyes de calcopirita para la primera clase l_{cp}^1 y segunda clase l_{cp}^2 es ajustado mediante la minimización del error existente entre el valor medido y el calculado mediante las ecuaciones (A.11) y (A.12). El problema de optimización queda definido por:

$$\begin{aligned} \min_{\{l_{cp}^1, l_{cp}^2\}} \quad & \sum_{i=1}^n (l_{tmed}^i - l_t^i)^2 + (l_{cmed}^i - l_c^i)^2 \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeto a:} \quad & l_{cpmin}^1 \leq l_{cp}^1 \leq l_{cpmax}^1 \\ & l_{cpmin}^2 \leq l_{cp}^2 \leq l_{cpmax}^2 \end{aligned}$$

Donde l_{cpmin}^1 , l_{cpmin}^2 , l_{cpmax}^1 y l_{cpmax}^2 son valores mínimos y máximos definidos para cada ley de calcopirita asociada a una clase j , y n el número de celdas.

**ANEXO B. MODELO DINÁMICO HÍBRIDO PARA FLOTACIÓN ROUGHER.
PUBLICADO EN CONGRESO INTERNACIONAL DE AUTOMATI-
ZACIÓN EN LA INDUSTRIA MINERA, AUTOMINING 2012.**

Modelo dinámico híbrido para flotación rougher

Eduardo Putz y Aldo Cipriano

Pontificia Universidad Católica de Chile

Fernando Romero

AngloAmerican, Chile

RESUMEN

La flotación rougher es la etapa del proceso de flotación de mayor impacto en una planta concentradora de minerales. Para esta etapa se han desarrollado diversos modelos dinámicos continuos, basados en modelos hidráulicos o balances de masas, que consideran únicamente celdas aisladas o líneas de producción individual.

Por otra parte, el interés por desarrollar estrategias de control para sistemas de gran escala ha llevado a formular metodologías de modelación que permitan considerar el comportamiento global de una planta. Esto ha generado la formulación de modelos que representen tanto dinámicas continuas del proceso, como dinámicas discretas de actuadores y sensores binarios, muy comunes en plantas industriales. De esta manera, se busca facilitar el diseño, la validación y la evaluación de estrategias de control optimizante de mayor complejidad.

Este trabajo presenta el desarrollo y la simulación de un modelo dinámico híbrido para un proceso de flotación rougher basado en una línea de producción formada por tres bancos de celdas en serie, conectados mediante válvulas *on/off*, en la cual además se dispone de sensores *Level Switch High*. Cada celda de flotación se modela a través de cuatro estados de operación posibles, cuya transición dependerá de las condiciones de operación de la planta bajo estudio, las secuencias de accionamiento de las válvulas y la activación de los sensores correspondientes.

El artículo describe brevemente un modelo dinámico híbrido que integra un modelo de balance de masas con comportamiento hidráulico, para el cual se define también la interacción con las variables discretas del proceso. A continuación, se presentan los resultados de calibración con datos de planta y los obtenidos en la simulación del modelo, y finalmente se proponen líneas futuras de investigación.

INTRODUCCIÓN

Una de los procesos más comunes de un proceso mineralúrgico es la flotación, cuyo objetivo es aumentar la concentración del mineral útil con la mayor selectividad posible. Este proceso se realiza en celdas, las cuales reciben la pulpa desde la molienda, produciendo concentrado y cola, siendo la etapa rougher la de mayor impacto. Esta etapa permite lograr altas recuperaciones y extraer gran parte del mineral. Sin embargo, las leyes logradas son generalmente bajas.

A la fecha, se han desarrollado diversos modelos para representar una celda de flotación o un conjunto de ellas, los que pueden agruparse en dos categorías: modelos estacionarios y modelos dinámicos. En la segunda categoría se destacan los modelos hidráulicos utilizados para evaluar estrategias de control (Stenlund & Medvedev, 2000; Kämpjärvi & Jämsä-Jounela, 2003). Además, se destacan modelos de balances de masas de una fase (Casali et al., 2002; Sbarbaro et al., 2008), de dos fases (Barrera, 1993; Pérez-Correa et al., 1998; Rojas & Cipriano, 2010) o de un conjunto de fases, obtenidos mediante ajuste con datos experimentales (Yianatos et al., 2008). De igual forma, para este proceso se han desarrollado diversos simuladores dinámicos comerciales, entre ellos JK Simfloat (Schwarz & Alexander, 2009) y METSIM (METSIM, 2009).

Los modelos y simuladores mencionados se basan en el comportamiento fenomenológico del proceso, y se han derivado a partir de leyes físicas mediante ecuaciones diferenciales. Sin embargo, para el control de este proceso también se dispone de válvulas del tipo *on/off* y sensores de dos estados, dispositivos cuya evolución en el tiempo puede ser representada mediante valores binarios (Bemporad & Morari, 1999). En los últimos años, el interés por disponer de modelos que permitan la interacción entre ambas dinámicas ha llevado a desarrollar el concepto de “sistema híbrido”. Dichos sistemas contemplan la interacción entre dinámicas continuas y dinámicas discretas caracterizadas por máquinas de estado finitas o reglas del tipo *if-then-else* (Bemporad & Morari, 1999).

Nuestro trabajo propone un modelo dinámico híbrido de flotación rougher para una línea de producción compuesta por siete celdas de flotación en cascada en un conjunto de tres bancos (ver figura 1), validado mediante datos obtenidos de una planta de flotación industrial. Cada línea se acciona mediante una válvula del tipo *on/off* y cada celda se conecta a la siguiente a través de válvulas controladas, las cuales se considerarán también del tipo *on/off*. De igual forma, se dispone de sensores *Level Switch High* (LSH) en cada uno de los bancos. Las celdas de flotación se representarán individualmente a través de cuatro estados de operación posibles, determinados por el accionamiento de las válvulas de entrada y salida de cada una de ellas.

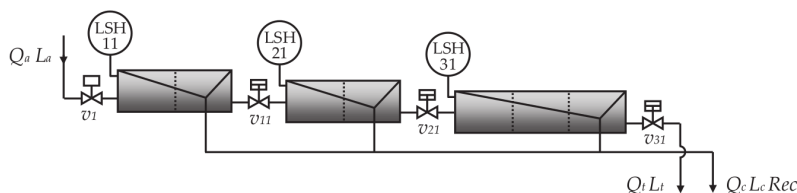


Figura 1 Diagrama del circuito de flotación rougher considerando una línea de producción

MODELO DINÁMICO HÍBRIDO DE FLOTACIÓN ROUGHER

El proceso de flotación rougher puede describirse con diferentes niveles de detalle. Modelos muy simples pueden no capturar la dinámica completa del proceso y modelos muy complejos pueden ser difíciles de simular. Ambas condiciones han sido consideradas en nuestra investigación. Además, la utilización de componentes discretos introduce cambios instantáneos en los componentes continuos del sistema (Lygeros, 2004). Esta característica particular permite desarrollar modelos con un mayor grado de representatividad.

Caracterización híbrida del modelo

Cada celda de flotación rougher dispone de cuatro estados posibles (ver figura 2), gatillados por la operación de las válvulas discretas situadas tanto en el flujo de entrada como en el flujo de cola, así como por el sensor LSH. En el estado 1 las válvulas de entrada y de salida están abiertas, y el sensor LSH se encuentra desactivado, implicando un funcionamiento normal al interior de la celda, obteniéndose flujo de concentrado desde la fase espuma y flujo de cola desde la fase pulpa. El estado 2 se origina en la activación del sensor LSH, previo cierre de la válvula de salida y aumento del nivel de pulpa al interior de la celda. Esto implica la desaparición de la fase espuma y obtención de pulpa a través del flujo de concentrado, provocando un cambio en las condiciones mineralúrgicas de salida. El paso al estado 3 tiene lugar al cerrarse la válvula de entrada, implicando la desactivación del sensor LSH y la posterior disminución del nivel de pulpa de la celda, no siendo posible obtener flujo de concentrado. Finalmente, el estado 4 corresponde al caso en que ambas válvulas están cerradas, obteniéndose una dinámica que dependerá del estado en el cual se encontraba previamente. Así, si la celda se encuentra en el estado 1 y posteriormente se cierran ambas válvulas se mantendrá la dinámica del estado 1, dado que la pulpa queda aislada al interior de la celda con única posibilidad de salida a través del concentrado.

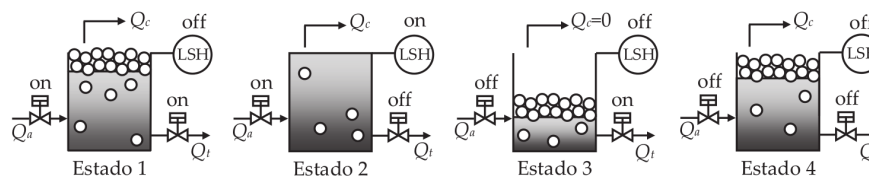


Figura 2 Acciones que conducen al cambio de estados 1-2-3-4 modelo híbrido celda de flotación rougher

Para la formulación del modelo cada válvula se representa mediante la variable discreta de entrada v^{ij} , la cual toma valores binarios {1,0} donde el índice $i = \{1,2,3\}$ es el número de celda y $j = \{1\}$ el número de línea. De igual forma, la acción de cada sensor LSH se define mediante la variable discreta de salida L^{ij} , a la cual se asignan valores binarios {1,0} con igual formato de índices.

Por lo tanto, los estados de operación posibles quedan definidos por:

- Estado 1: Funcionamiento normal de la celda de flotación ($v^{ij}=1 \wedge v^{(i+1)j}=1 \wedge L^{ij}=0$)
- Estado 2: Rebalse de la celda de flotación (solo fase pulpa) ($v^{ij}=1 \wedge v^{(i+1)j}=0 \wedge L^{ij}=1$)
- Estado 3: Vaciado de la celda de flotación ($v^{ij}=0 \wedge v^{(i+1)j}=1 \wedge L^{ij}=0$)
- Estado 4: Detención de flujos de pulpa de la celda de flotación ($v^{ij}=0 \wedge v^{(i+1)j}=0 \wedge (L^{ij}=0 \vee L^{ij}=1)$).

Modelo de balance de masas

Para el desarrollo del modelo consideraremos la interacción entre dos fases: pulpa y espuma. El modelo completo considera flujos másicos de alimentación, concentrado, cola, agregado burbujapartícula, colección y retorno (Yianatos, 2007). La figura 3 presenta las interacciones definidas en el modelo mineralógico de Barrera (1993), que es más simple, y que contempla un flujo másico de colección y retorno entre ambas fases, además de los flujos másicos de entrada y salida de una celda.

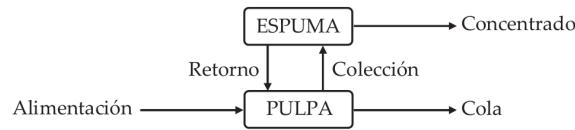


Figura 3 Modelo mineralógico de dos fases de una celda de flotación

El modelo se basa en los siguientes supuestos (Barrera, 1993; Pérez-Correa et al., 1998; Rojas & Cipriano, 2010): a) flujo de aire constante al interior de la celda; b) dos clases mineralúrgicas, una rica (calcopirita) y una pobre (ganga); c) cada fase de la celda se encuentra perfectamente mezclada; d) existe transferencia de material entre ambas fases, dependiendo de la constante de flotación en la fase pulpa y de la constante de drenaje en la fase espuma.

Realizando un balance de masas para cada una de las fases (ver figura 3) y considerando las variables discretas v^{ij} y L^{ij} , se obtiene el siguiente balance de mineral al interior de una celda de flotación. Este balance es válido para los cuatro estados definidos en la figura 2:

$$\frac{dM_p^{nij}}{dt} = - \left[k_p^n (1 - L^{ij}) + \frac{Q_c^{ij} v^{(i+1)j} + Q_c^{ij} L^{ij}}{(1 - \varepsilon_p) A^{ij} h_p^{ij}} \right] M_p^{nij} + Q_a^{ij} v^{ij} C_a^{nij} + k_e^n M_e^{nij} (1 - L^{ij}) \quad (1)$$

$$\frac{dM_e^{nij}}{dt} = \left[- \left[k_e^n + \frac{Q_c^{ij}}{(1 - \varepsilon_e) A^{ij} h_e^{ij}} \right] M_e^{nij} + k_p^n M_p^{nij} \right] (1 - L^{ij}) \quad (2)$$

Donde el índice $n = \{1,2\}$ representa el número de clase mineralúrgica al interior de la celda, $i = \{1,2,3\}$ el número de celda y $j = \{1\}$ el número de línea. M_p^{nij} corresponde a la masa de clase n en la pulpa de la celda i de la línea j , M_e^{nij} corresponde a la masa de clase n en la espuma de la celda i de la línea j , C_a^{nij} a la concentración de mineral de la clase n en la celda i de la línea j , Q_c^{ij} es el flujo de cola en la celda i de la línea j , Q_a^{ij} es el flujo de concentrado de la celda i de la línea j , k_p^n es un parámetro llamado constante de flotación de la fase pulpa de la clase n , el cual depende del flujo de colector, k_e^n es un parámetro llamado constante de drenaje de la fase espuma de la clase n que depende del flujo de espumante.

Finalmente, se define ε_p y ε_e como los *holdup* o concentración de aire para cada fase, A^{ij} el área de la celda i de la línea j , h_e^{ij} el espesor de espuma de la celda i de la línea j , h_p^{ij} como el nivel de pulpa al interior de la celda i de la línea j , v^{ij} el estado de la válvula *on/off* de la celda i en la línea j y L^{ij} la salida del sensor binario LSH de la celda i en la línea j .

Modelo hidráulico

Consideremos una celda de flotación como un estanque perfectamente mezclado, de área A^j constante, en que el flujo de concentrado es pequeño y despreciable comparado con el flujo de cola (Kämpjärvi & Jämsä-Jounela, 2003). La pulpa proveniente de la molienda se alimenta a la primera celda de cada línea y la cola se ingresa a la celda siguiente, por lo cual el nivel de pulpa al interior de la celda, válido para los cuatro estados de la figura 2, queda dado por:

$$\frac{dh_p^{ij}}{dt} = \frac{Q_a^{ij}(1-L^{ij}) - K^{ij}v^{ij}\sqrt{h_p^{ij} - h_p^{(i+1)j} + \Delta h^{ij}}}{A^{ij}} \quad (3)$$

Donde el índice $i = \{1,2,3\}$ representa el número de celdas y $j = \{1\}$ el número de línea de producción. De igual forma, Q_p^{ij} es el flujo volumétrico de entrada a la celda i en la línea j , h_p^{ij} es el nivel de pulpa en la celda i de la línea j , $h_p^{(i+1)j}$ es el nivel de pulpa en la celda siguiente de la línea j , Δh^{ij} la diferencia en altura entre las dos celdas, A^{ij} es el área de la celda i de la línea j , K^{ij} es la constante de pérdida de carga de la celda i en la línea j , v^{ij} es el estado de la válvula de salida de la celda i en la línea j y L^{ij} corresponde a la salida del sensor binario LSH de la celda i en la línea j . Los flujos de entrada a las celdas siguientes corresponden al flujo de salida de la celda anterior:

$$Q_a^{ij} = K^{(i-1)j}v^{(i-1)j}\sqrt{h_p^{(i-1)j} - h_p^{ij} + \Delta h^{(i-1)j}} \quad (4)$$

El flujo de concentrado de salida de una celda de flotación rougher se define como una función lineal de la altura de espuma (Sbarbaro et al., 2008):

$$Q_c^{ij} = \alpha_1 - \alpha_2 h_e^{ij} \quad (5)$$

Donde α_1 y α_2 son constantes ajustadas mediante datos experimentales.

RESULTADOS DE SIMULACIÓN

Como hemos indicado, el sistema bajo análisis considera una línea de producción de una planta de flotación rougher (ver figura 1), basada en un conjunto de siete celdas en cascada ordenadas en tres bancos, emulando la primera línea de flotación rougher de una planta industrial. Nuestro objetivo es modelar el comportamiento mineralúrgico y dinámico considerando los cuatro estados de operación posibles de una celda (ver figura 2). Cada banco se modela como una única celda de flotación, donde las ecuaciones (1) y (2) caracterizan la condición mineralúrgica de la celda, y las ecuaciones (3), (4) y (5) corresponden al comportamiento hidráulico del modelo.

Ajuste del modelo

Para el ajuste del modelo, se utilizaron datos de planta correspondientes a leyes de cobre de alimentación L_a , de concentrado general L_{cg} y de cola general L_{cg} , recuperación Rec , flujo de pulpa de alimentación Q_a^{t1} , flujo de concentrado Q_{cg} y flujo de cola Q_c^{t1} . El ajuste del modelo se realizó utilizando las ecuaciones mineralúrgicas en régimen de estado estacionario para el cálculo de leyes de concentrado general L_{cg} y de cola general L_{cg} (ecuaciones (6) y (7)), donde L_{cp}^n es la ley del mineral de la clase n y L_{Cu} es la ley de cobre en una molécula de calcopirita ($\approx 35\%$). La recuperación se obtiene dividiendo el total de fino en el concentrado por el total de fino en la alimentación.

$$L_{cg}^j = \frac{\sum_{n=1}^2 L_{cp}^n \left[\sum_{i=1}^3 [M_e^{nij} (1 - L^{ij}) + M_p^{nij} L^{ij}] \right]}{\sum_{n=1}^2 \sum_{i=1}^3 [M_e^{nij} (1 - L^{ij}) + M_p^{nij} L^{ij}]} L_{Cu} \quad (6)$$

$$L_{ig}^j = \frac{\sum_{n=1}^2 M_p^{n3j} L_{cp}^n}{\sum_{n=1}^2 M_p^{n3j}} L_{Cu} \quad (7)$$

Resultados de la simulación

La figura 4 muestra los resultados de la simulación del modelo dinámico híbrido realizado, utilizando el *software* Matlab/Simulink.

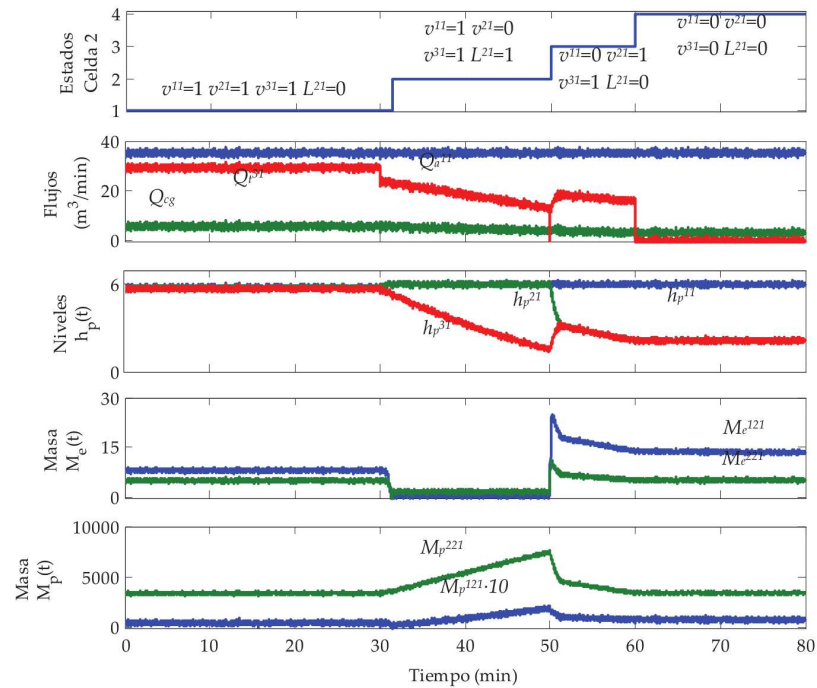


Figura 4 Resultados de la simulación línea de flotación rougher

Para la apertura y el cierre de las válvulas de salida de cada banco se estableció una secuencia, que mantiene siempre abierta la válvula de entrada a la línea. Las secuencias de apertura y cierre de las

válvulas permiten visualizar claramente los cuatro estados de operación de la celda, generando cambios en los flujos tanto de pulpa como de concentrado y en los niveles de pulpa en cada una de las celdas. Por ejemplo, al cerrar la válvula v^{21} y activarse los sensores L^{21} y L^{22} , las celdas 1 y 2 ingresan al estado 1. La alimentación de pulpa a dichas celdas provoca que h_p^{11} y h_p^{21} alcancen un nivel máximo de rebalse definido en 6 m. Además, el flujo de concentrado general Q_{cg} bajo esta condición disminuye, dado que la celda 3 deja de aportar concentrado al no ser alimentada por la pulpa proveniente desde la celda 2, generando una disminución del nivel de pulpa al interior de la celda.

CONCLUSIONES

El estudio permitió detectar la presencia de cuatro estados posibles de operación para una celda rougher, considerando como variables discretas el estado de apertura o cierre de las válvulas de entrada y salida, y sensores binarios LSH, además de variables continuas como masas de mineral fino en la pulpa, flujos, leyes y recuperación.

El modelo dinámico híbrido desarrollado para una celda de flotación rougher permite lograr un mayor grado de representatividad del proceso bajo estudio. Si bien el modelo ha sido simulado para una única línea, puede ser fácilmente ampliado a más líneas de producción, considerando que operan en paralelo. Además, deben considerarse las características de la pulpa proveniente de la molienda y las condiciones de operación aguas abajo, con el fin de desarrollar un modelo global que permita la alimentación de varias líneas de producción, accionando las válvulas correspondientes.

Actualmente, se trabaja en modelar plantas de flotación que incluyan etapas de remolienda y cleaner, y varias líneas de producción.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al proyecto Fondecyt N° 1120047 por el financiamiento otorgado para la investigación y a CONICYT por el apoyo económico brindado a Eduardo Putz como becario.

REFERENCIAS

- Barrera, R. (1993) 'Informe M-3: modelación de una planta de flotación', *Informe Interno Fondef M-17*, pp. 1–21.
- Bemporad, A. & Morari, M. (1999) 'Control of systems integrating logic, dynamics, and constraints', *Automatica*, vol. 35, no. 3, pp. 407–427.
- Casali, A., González, G., Agosto, H. & Vallebuona, G. (2002) 'Dynamic simulator of a rougher flotation circuit for a copper sulphide ore', *Minerals Engineering*, vol. 15, no. 4, pp. 253–262.
- Kämpjärvi, P. & Jämsä-Jounela, S.L. (2003) 'Level control strategies for flotation cells', *Minerals Engineering*, vol. 16, no. 11, pp. 1061–1068.
- Lygeros, J. (2004) *Lecture notes on hybrid systems*, University of Patras, Patras, Greece.
- METSIM (2009). *The premier process simulator for Windows*, consultado el 20 de mayo de 2012, <<http://www.metsim.com>>.

- Pérez-Correa, R., González, G., Casali, A. & Cipriano, A. (1998). 'Dynamic modeling and advanced multivariable control of conventional flotation circuits', *Minerals Engineering*, vol. 11, no. 4, pp. 333–346.
- Rojas, D. & Cipriano, A. (2010). 'Model based predictive control of a rougher flotation circuit considering grade estimation in intermediate cells', *Dyna*, vol. 166, pp. 29–37.
- Sbarbaro, D., Maldonado, M. & Cipriano, A. (2008). 'A two level hierarchical control structure for optimizing a rougher flotation circuit', *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, vol. 17, no. 1, pp. 1018–1022.
- Schwarz, S. & Alexander, D. (2009). 'JKSimFloat v6.1^{plus}: improving flotation circuit performance by simulation', pp. 1018–1022, consultado el 20 de mayo de 2012, <<http://www.jktech.com.au>>.
- Stenlund, B. & Medvedev, A. (2000). 'Level control of cascade coupled flotation tanks', *Control Engineering Practice*, vol. 10, no. 4, pp. 443–448.
- Yianatos, J.B. (2007). 'Fluid flow and kinetic modeling in flotation related processes columns and mechanically agitated cells – A review', *Chemical Engineering Research and Design*, vol. 85, no. 12, pp. 1591–1603.
- Yianatos, J.B., Larenas J.M., Moys, M.H. & Díaz, F.J. (2008). 'Short time mixing response in a big flotation cell', *International Journal of Mineral Processing*, vol. 89, no. 1, pp. 1–8.

ANEXO C. HYBRID DYNAMIC PREDICTIVE MODEL FOR ROUGHER FLOTATION. PUBLICADO EN 15TH IFAC SYMPOSIUM ON CONTROL, OPTIMIZATION AND AUTOMATION IN MINING, MINERAL AND METAL PROCESSING, MMM 2013.



Hybrid Dynamic Predictive Model for Rougher Flotation^{*}

Eduardo Putz Aldo Cipriano

*College of Engineering, Pontificia Universidad Católica de Chile
(e-mail: eiputz@uc.cl, aciprian@ing.puc.cl).*

Abstract: Several dynamic models are able to represent the phenomenological behavior of flotation. On the other side, the interest in developing control strategies for large-scale processes has led to formulate novel methodologies which allow to consider the global performance of a plant, facilitating the design, validation and evaluation of more complex optimizing control strategies.

In this work, we first develop a dynamic hybrid model for a flotation rougher circuit with one production line composed by four cell banks in series, connected by controlled valves. Each line is actuated by discrete valves, whose interaction with different bank pulp levels define several operating modes. The model was validated with data from an industrial plant.

Subsequently, a hybrid prediction model is obtained by applying identification techniques to the different scenarios, valid for optimizing controller strategies. Our simulation results show that the proposed methodology is suitable for modelling the global behavior of a rougher flotation circuit, representing its nonlinear dynamic and providing a robust predictive models for several operating modes of the circuit.

Keywords: Mineral processing, Flotation process, Dynamic modelling, Nonlinear identification, Hybrid systems.

1. INTRODUCTION

One of the most common processes of a mineral processing plant is flotation, whose aim is to increase the concentration of valuable mineral with the highest possible selectivity. This process takes place in cells which receive pulp from the grinding stage, producing concentrate and tail, being the rougher stage the one with greatest impact. This stage allows to achieve high recoveries and remove big part of the valuable mineral. However, the laws achieved are generally low.

The interest in developing control strategies for large scale processes has led to propose new methodologies. These approaches allow to consider the overall behavior of a plant, facilitating the design, validation and evaluation of more complex optimizing control strategies. Additionally, the separation of mineral by flotation is one of the most complex processes in the mining industry. An appropriate final product can be obtained with high recovery and commercial level laws with a proper operation of the various stages that make up process: rougher, scavenger, regrind and cleaner (Bergh and Yianatos, 2011).

To date, several models have been developed to represent a flotation cell or a set of them. These models can be grouped into two categories: stationary models and dynamic models. In the second category hydraulic models used to evaluate control strategies of pulp levels stand out (Stenlund and Medvedev, 2002), (Kämpjärvi and Jämsä-Jounela, 2003). In addition, we highlight mass balance

models based on mineralurgical conditions of one phase (Casali et al., 2002), (Sbarbaro et al., 2008), two phases (Pérez-Correa et al., 1998), (Rojas and Cipriano, 2010) or a set of phases obtained by adjustment with industrial data (Yianatos et al., 2008). However, the mentioned models only consider the dynamic evolution of a cell under a single operating mode.

Similarly, multivariable predictive control methodologies have been applied to rougher flotation. Cortés et al. (2008) proposed the application of a control strategy for stabilizing the operation of the process, generating increases in the copper recovery. In a similar way, Foroush et al. (2009) proposed froth thickness control allowing improvement of mineralurgical characteristics of the concentrate.

Given the existence of different operating modes, hybrid modelling proposes an interesting and novel framework for the representation of the flotation process. In this paper, we first develop a dynamic hybrid model for rougher flotation cell. The plant consists in a production line actuated by a discrete valve, whose interaction with the different pulp banks levels determines the operating modes of the plant. Finally, we get a prediction model for mineral laws through identification techniques. These models can be used for the future design of hybrid model predictive control strategies.

1.1 Plant description

Flotation is a physicochemical separation process widely used in the mining industry. It is based on the characteristics of hydrophobicity of mineral particles that forming

^{*} This study was funded by the FONDECYT N°1120047, "Distributed Hybrid Model Predictive Control for Mineral Processing".

part of the pulp. These characteristics are generated by the use of reagents (collectors, depressants and foaming) and injection of air into the cell (Wills and Napier-Munn, 2006).

Figure 1 shows the typical configuration of a rougher flotation line. This consists in a set of cells in series grouped into banks connected by controlled valves. The line is actuated by a discrete valve, which controls the admission of pulp from a distributor tank. Finally, the process delivery concentrate and tail. The first is sent to a regrind stage and the second to tailing dams.

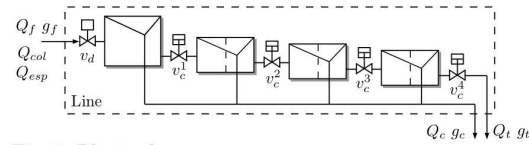


Fig. 1. Plant scheme

The current control strategies for rougher flotation have focused on the use of PID controllers for pulp levels, configured in local operator stations or in Distributed Control Systems (DCS). However, many variables influence this process. Usually, measurable variables correspond to levels of pulp, air flow, rate of froth, bubble size, and mineral laws and flows in feed, tail and final concentrate. In addition, changes in the characteristics of feed pulp as variations in flow, mineral law, particle sizes and percent solids are considered disturbances that affect the stability of this stage (Cortés et al., 2008).

An adequate control methodology that allows to place the operation of the plant in an optimal region of the recovery curve versus concentrate law results in increased utilities (Wills and Napier-Munn, 2006). Accordingly, the use of optimizing control methodologies are presented as a viable alternative to fulfill this task. However, it is necessary to have adequate dynamic models to predict and simulate the behavior of the main process variables of interest.

1.2 Hybrid systems

A hybrid system is a dynamic heterogeneous system whose behavior is determined by the interaction between continuous dynamics, discrete and logical rules (Paoletti et al., 2007). The continuous dynamics is described by variables belonging to a continuous set. Moreover, the discrete dynamics are described by variables belonging to a discrete set, usually finite (Bemporad and Morari, 1999). These type of systems allow to represent complex dynamics, whose evolution over time involves transitions between different operating mode. This situation is very common in large industrial plants.

The two most common structures in applications of hybrid predictive control correspond to PieceWise Affine models (PWA) (Sontag, 1981) which allow to approximate nonlinear dynamics using linearized models at different operating points, and Mixed Logical Dynamics (MLD) (Bemporad and Morari, 1999) whose continuous part is described by linear dynamics and discrete part through a set of logical propositions. We will focus on the class of hybrid models

called Switched Affine Models (Paoletti et al., 2007). This type is defined by a collection of related linear models, connected by an additional discrete variable, called discrete state. These models consider different dynamics for each condition and they are suitable to represent nonlinear dynamics, very common in mining processes.

2. DYNAMIC HYBRID MODEL

The rougher flotation process can be described with different detail levels. Simple models can not capture the full process dynamics. On the other hand, very complex models can be difficult to use. Both conditions have been considered in this investigation.

2.1 Operating modes

The plant evolution through the different operating modes is achieved by using auxiliary logical variables (Bemporad and Morari, 1999). Its use allows to generate instant changes in the continuous components of the system, represented by differential equations.

Each flotation cell is modeled considering a controlled output valve. Additionally, we set a maximum height h_c and minimum h_m . These variables determine the operating condition of the concentrate flow cell (see figure 3). Furthermore, two auxiliary logical variables are defined δ_1 and δ_2 . These set when a condition is active and inactive. The evolution of them is determined by the following logical rules:

$$[\delta_1(t) = 1] \Leftrightarrow [h_p^i(t) \geq h_c] \quad (1)$$

$$[\delta_2(t) = 1] \Leftrightarrow [h_p^i(t) < h_m] \quad (2)$$

Where h_p^i is the pulp level of the cell i . Figure 2 presents the evolution of the three operation modes. These are defined by:

- (1) Filled or discharged: Presence of pulp and froth phase but only output tail flow.
- (2) Normal operation: Presence of pulp and froth phase with output tail and concentrate flows.
- (3) Pulp overflow: Only presence of pulp phase with output through tail and concentrate flows.

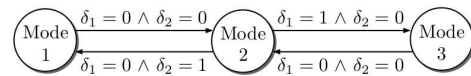


Fig. 2. Schematic of flotation cell operating modes

2.2 Cell flotation model

The mineralurgical model of Pérez-Correa et al. (1998) represents the behavior of a flotation cell by the interaction between two phases: pulp and froth, as shown in figure 3. Additionally, it also considers the following mass flows: feed, tail, concentrate, collection and drainage.

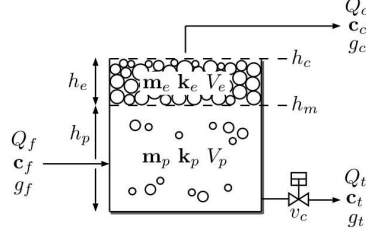


Fig. 3. Flotation cell diagram

The hybrid dynamic model is based on the following assumptions:

- (1) Constant air flow into the cell.
- (2) Each phase of the cell is perfectly mixed.
- (3) There is transfer between both phases, depending on the collection rate of pulp phase and the drainage rate of froth phase.
- (4) The mineral recover is chalcopyrite (CuFeS_2) and n granulometries are considered.
- (5) Flotation cell has constant area.

By performing a mass balance for each phase and considering all operating modes set in figure 2, we obtain the following mineralurgical balance inside a cell:

$$\frac{d\mathbf{m}_p^{ij}}{dt} = - \left[\mathbf{k}_p^{ij} (1 - \delta_1^i) + \frac{Q_t^i + Q_c^i \delta_1^i}{V_p^i} \right] \mathbf{m}_p^{ij} + Q_f^i \mathbf{c}_f^{ij} + \mathbf{k}_e^{ij} \mathbf{m}_e^{ij} (1 - \delta_1^i) \quad (3)$$

$$\frac{d\mathbf{m}_e^{ij}}{dt} = \left[- \left[\mathbf{k}_e^{ij} + \frac{Q_c^i}{V_e^i} \right] \mathbf{m}_e^{ij} + \mathbf{k}_p^{ij} \mathbf{m}_p^{ij} \right] (1 - \delta_1^i) \quad (4)$$

Where i represents the cell number and j the mineral type. $\mathbf{m}_p$ is the pulp phase mineral mass j of cell i (vector of dimension $jn \times 1$), $\mathbf{m}_e$ is the froth phase mineral mass j of cell i (vector of dimension $jn \times 1$), $\mathbf{c}_f$ is the feed mineral concentration j of cell i (vector of dimension $jn \times 1$), $\mathbf{k}_p$ is the collection rate of mineral j in pulp phase of cell i (diagonal matrix of dimension $jn \times jn$) and $\mathbf{k}_e$ is the drainage rate of the mineral j in froth phase of cell i (diagonal matrix of dimension $jn \times jn$). These rates depend of the volumetric flow of collector Q_{col} and foaming Q_{esp} . Furthermore, Q_f , Q_c and Q_t are the feed, concentrate and tail flows of cell i , respectively. V_p is the pulp phase volume of cell i and V_e the froth phase volume of cell i .

The hydraulic model of Kämpjärvi and Jämsä-Jounela (2003) allows to represent the pulp level behavior inside of flotation cell. Taking into account that the froth level is negligible compared to pulp level (Sbarbaro et al., 2008), the volumetric balance of a cell valid for all operating modes is:

$$\frac{dh_p^i}{dt} = \frac{1}{A_c^i} [Q_f^i - Q_t^i - Q_c^i] (1 - \delta_1^i) \quad (5)$$

The pulp feed flow of the line can be obtained by equation (17), where v_d^1 is the input discrete valve, W_w^1 is the input water mass flow and ρ_w its density. The total mineral mass flow corresponds to the sum of each granulometry mineral

mass flow stored in the vector $\mathbf{w}_s^1$ of dimension $jn \times 1$, ρ_s is the total mineral density. A vector sum is defined $\mathbf{m}_s = [1 \dots 1]$ of dimension $1 \times jn$. Additionally, the feed volumetric flow to the next cells is the tail flow of the previous, how it is defined by equation (7).

$$Q_f^1 = v_d^1 \left[\frac{W_w^1}{\rho_w} + \frac{\mathbf{m}_s \mathbf{w}_s^1}{\rho_s} \right] \quad (6)$$

$$Q_f^{i+1} = Q_t^i \quad (7)$$

According to the hydraulic model of Stenlund and Medvedev (2002), the tail flow is derived from physical laws based in Torricelli's principle. Considering a linear model of the cell output valve v_c^i , the tail flow is:

$$Q_t^i = k_t^i v_c^i \sqrt{h_p^i - h_p^{i+1} + \Delta h^i} \quad (8)$$

Where h_p^{i+1} is the pulp level of next cell, Δh^i is the height difference between the cells i and $i+1$, and k_t^i is a constant coefficient of cell i . The tail flow corresponding to the last cell of the line is modeled by equation (8) but setting $h_p^{i+1} = 0$.

The concentrate volumetric flow Q_c of cell i is defined as a linear function of pulp level of the cell. If a cell enters the operating mode 1 concentrate ceases to flow out, resulting in:

$$Q_c^i = k_c^i (h_p^i - h_m) (1 - \delta_2^i) \quad (9)$$

The phases volumes V_p and V_e of cell i are defined as:

$$V_p^i = h_p^i A_c^i (1 - \alpha_p) \quad (10)$$

$$V_e^i = h_e^i A_c^i (1 - \alpha_e) \quad (11)$$

Where α_p y α_e are holdup or air concentration per phase. The froth level h_e^i of cell i has been modeled as a linear function of the pulp level:

$$h_e^i = \left[h_p^i \frac{h_c - h_m + \epsilon}{h_m} + \epsilon \right] \delta_2^i + \left[h_p^i \frac{h_c - h_m - \epsilon}{h_m - h_c} + \frac{\epsilon h_m}{h_m - h_c} + h_c \right] (1 - \delta_2^i) \quad (12)$$

Where ϵ is a tolerance value (for instance $\epsilon \approx 0.1$). We can appreciate that the linear function that models the froth height is determined by the operating modes of the cell. The output mineral concentrations can be calculated by the following equations, valid for all different operating modes:

$$\mathbf{c}_t^{ij} = \frac{\mathbf{m}_p^{ij}}{V_p^i} \quad (13)$$

$$\mathbf{c}_c^{ij} = \frac{\mathbf{m}_e^{ij}}{V_e^i} (1 - \delta_1^i) (1 - \delta_2^i) + \mathbf{c}_t^{ij} \delta_1^i \quad (14)$$

Where $\mathbf{c}_t^{ij}$ and $\mathbf{c}_c^{ij}$ are the mineral concentration of tail and concentrate, respectively (vectors of dimension $jn \times 1$). Similarly, the mineral grades can be calculated by defining the vectors $\mathbf{g}_c^{ij}$ and $\mathbf{g}_t^{ij}$. These contain the grade

average of mineral j for each granulometry of cell i , both of dimensions $1 \times jn$.

$$g_t^{ij} = \frac{\mathbf{g}_t^{ij} \mathbf{m}_p^{ij}}{\mathbf{m}_s \mathbf{m}_p^{ij}} \quad (15)$$

$$g_c^{ij} = \frac{\mathbf{g}_c^{ij} \mathbf{m}_e^{ij}}{\mathbf{m}_s \mathbf{m}_e^{ij}} (1 - \delta_1^i) (1 - \delta_2^i) + g_t^i \delta_1^i \quad (16)$$

Where g_t^{ij} is the tail grade of mineral j in cell i and g_c^{ij} is the concentrate grade of mineral j in cell i . Finally, the recovery of mineral j in cell i , it is obtained by dividing the total fine in concentrate by the total fine in the feed.

3. HYBRID SYSTEM IDENTIFICATION

3.1 Hybrid identification

A Switched AutoRegresive eXogenous (SARX) model in input-output form is defined by introducing the regression vector (Paoletti et al., 2007):

$$\mathbf{r}_k = [\mathbf{y}_{k-1}^\top \dots \mathbf{y}_{k-n_a}^\top \mathbf{u}_k^\top \mathbf{u}_{k-1}^\top \dots \mathbf{u}_{k-n_b}^\top]^\top \quad (17)$$

Where $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^q$, n_a and n_b are the model orders. Then by expressing the output $\mathbf{y}_k$ as a piecewise affine function of $\mathbf{r}_k$ namely:

$$\mathbf{y}_k = \theta_{\sigma(k)}^\top \begin{bmatrix} \mathbf{r}_k \\ 1 \end{bmatrix} + \mathbf{e}_k \quad (18)$$

Where $\sigma(k) \in \{1, \dots, s\}$ is the discrete state, s is the number of submodels, θ_i (with $i = 1, \dots, s$) are the matrices of parameters defining each submodel, and $\mathbf{e}_k \in \mathbb{R}^q$ is a noise/error term.

In PieceWise AutoRegresive eXogenous (PWARX) models, the switching mechanism is determined by a polyhedral partition of the regressors domain $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^d$, where $d = qn_a + p + p(n_b + 1)$. Then the discrete state $\sigma(k)$ is given by (Paoletti et al., 2007):

$$\sigma(k) = i \Leftrightarrow \mathbf{r}_k \in \mathcal{M}_i, \quad i = 1, \dots, s \quad (19)$$

Where $\{\mathcal{M}_i\}_{i=1}^s$ is a complete partition of $\mathcal{M}$.

For PWARX models defined by (18) and (19), the identification problem is formulated as follows (Paoletti et al., 2007):

Given a collection of N input-output pairs $(\mathbf{y}_k, \mathbf{u}_k)$ (with $k = 1, \dots, N$) estimate the model with orders n_a and n_b , the number of submodels s , the parameter vectors θ_i and the regions $\mathcal{M}_i$ (with $i = 1, \dots, s$).

The identification problem can be approached by several methodologies (Paoletti et al., 2007). In this work we have used an identification algorithm called clustering-based procedure. This method was developed by Ferrari-Trecate et al. (2003) and it works for fixed parameters n_a , n_b and s .

4. SIMULATION RESULTS

A one rougher flotation production line (see figure 1) was analyzed. This is based in a set of four banks in series calibrated by industrial data. The aim of this work is

modelling the dynamic behavior of the plant considering the operating modes defined previously. Moreover, the PWARX models identification of the main process variables of interest in order to be used in future closed loop control strategies.

4.1 Model calibration

Industrial data was used to adjust the hybrid model. Data of copper grades and mass flows of mineral and water in the feed, tail and concentrate were used. Furthermore, four different granulometries were considered as it shows in table 1.

Table 1. Main validation data

Variable	+106(μm)	+53(μm)	+25(μm)	-25(μm)
W_f^1 (t/h)	337.18	112.21	78	258.62
W_f^4 (t/h)	320.28	100.24	68.88	232.62
W_c^{fine} (t/h)	16.89	11.97	9.13	25.99
g_f^{11} (%)	0.35	0.92	1.31	0.93
g_t^{41} (%)	0.09	0.04	0.04	0.20
g_c^{fine1} (%)	5.37	8.30	10.75	7.40

4.2 Hybrid dynamic behavior of rougher flotation

Figure 4 shows the simulation results of the hybrid dynamic rougher flotation model. The software Matlab®/Simulink® was used.

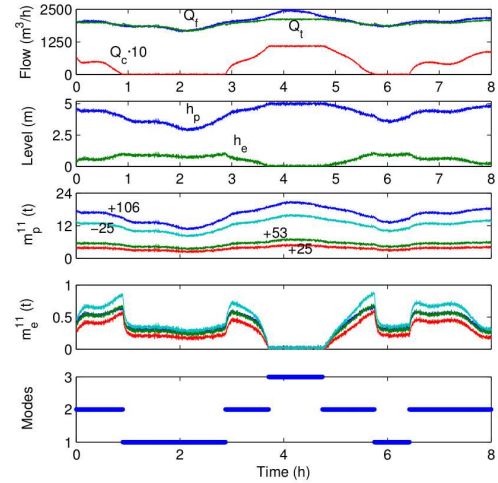


Fig. 4. Hybrid behavior of first rougher flotation cell

A feed flow that varies from 1500 to 2500 m³/h was established. This generates the transition of each cell through the three operating modes by variation of pulp levels. Additionally, when the pulp level decreases below 4 m the cell enters mode 1 and it stops to generate concentrate. Similarly, when the level exceeds the maximum pulp height of the cell, set at 5 m, the cell enters mode 3 and the froth phase disappears. Finally, if the cell does not exceed

any of the above mentioned conditions then it is operating under normal conditions, given by mode 2. Finally, this simulator is used to obtain input-output data of the interest variables of rougher flotation process.

4.3 Single input-single output predictive model

Simulation results of the hybrid plant were used for the model identification procedure. It was considered a sample time of 7.2 seconds over eight hours of simulation. For the process identification 4000 different data samples were used. The first half for identification and the next for validation. The identification was developed using the Hybrid Identification Toolbox (HIT) (Ferrari-Trecate, 2005).

A SISO PWARX model was identified for the cell's pulp level of the first bank. In addition, a model for concentrate grade of the line was obtained. The best performance was achieved with a $n_a = 1$ and $n_b = 2$ order. Furthermore, a number of submodels of $s = 3$ for pulp level model and $s = 2$ for concentrate grade model generate the lowest error value. For both models the input values correspond to samples of the line pulp feed flow and the procedure is easy to replicate for each cell of the three remainder banks. Graphical results of the validation process are presented in figure 5. The results show that the identified models allow to predict the behavior of the interest variables. Therefore, these models are valid for use in hybrid predictive control strategies.

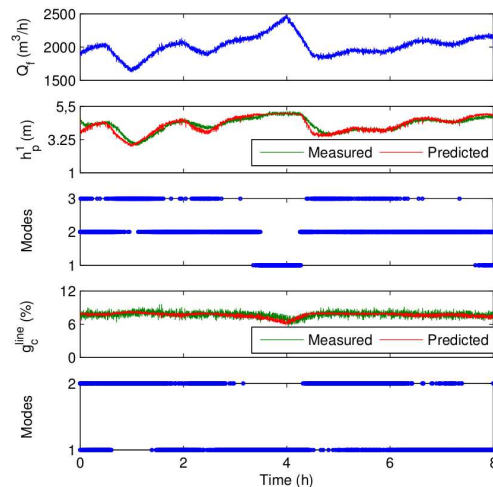


Fig. 5. Validation results: pulp level of the first cell and concentrate grade of the line

5. CONCLUSION

This work allowed to detect the presence of three possible operating modes for a rougher cell considering discrete variables and logical rules that can generate instant changes in the dynamics of the system.

The hybrid dynamic model developed for a rougher flotation cell achieves a higher degree of representation of the process under study. Although the model has been simulated for a single line, it can be easily extended to more production lines, considering their parallel operation. Characteristic of the pulp from grinding stages and downstream operating conditions should be considered in order to develop a model that allows overall feed several production lines, by operating the corresponding valves.

Finally, it was found that identifying PWARX models is a viable alternative to represent highly nonlinear dynamics, facilitating the future design of hybrid predictive control strategies. Currently, we are working on modelling flotation plants including regrinding stages, cleaner and scavenger, with several operation lines.

ACKNOWLEDGEMENTS

The authors gratefully acknowledge the flotation plant Las Tórtolas of AngloAmerican Copper, especially Fernando Romero for the industrial data provided, and Conicyt for the scholarship given to Eduardo Putz.

REFERENCES

- Bemporad, A. and Morari, M. (1999) Control of systems integrating logic, dynamics and constraints. *Automatica*, volume 35(3), pages 407–427.
- Bergh, L.G. and Yianatos, J.B. (2011) The long way toward multivariate predictive control of flotation processes. *Journal of Process Control*, volume 21(2), pages 226–234.
- Camacho, E.F., Ramirez, D.R., Limon, D., Muñoz de la Peña, D. and Alamo, T. (2010) Model predictive control techniques for hybrid systems. *Annual Reviews in Control*, volume 34(1), pages 21–31.
- Casali, A., González, G., Agosto, H. and Vallebuena, G. (2002) Dynamic simulator of a rougher flotation circuit for a copper sulphide ore. *Minerals Engineering*, volume 15(4), pages 253–262.
- Cortés, G., Verdugo, M., Fuenzalida, R., Cerda, J. and Cubillos, E. (2008) Rougher flotation multivariable predictive control: concentrator A-1 division Codelco Norte. *V International Mineral Processing Seminar*, volume 1(6), pages 316–325.
- Ferrari-Trecate, G. (2005) Hybrid Identification Toolbox (HIT).
- Ferrari-Trecate, G., Muselli, M., Liberati, D. and Morari, M. (2003) A clustering technique for the identification of piecewise affine systems. *Automatica*, volume 39(2), pages 205–217.
- Foroush, H., Gaulocher, S. and Gallestey, E. (2009) Model predictive control of the froth thickness in a flotation circuit. *VI International Mineral Processing Seminar*, volume 1(7), pages 403–411.
- Kämpjärvi, P. and Jämsä-Jounela, S.L. (2003) Level control strategies for flotation cells. *Minerals Engineering*, volume 16(11), pages 1061–1068.
- Paoletti, S., Juloski, A., Ferrari-Trecate, G. and Vidal, R. (2007) Identification of hybrid systems: a tutorial. *European Journal of Control*, volume 13(2-3), pages 242–260.

- Pérez-Correa, R., González, G., Casali, A. and Cipriano, A. (1998) Dynamic modeling and advanced multivariable control of conventional flotation circuits. *Minerals Engineering*, volume 11(4), pages 333–346.
- Rojas, D. and Cipriano, A. (2010) Model based predictive control of a rougher flotation circuit considering grade estimation in intermediate cells. *Dyna*, volume 166(1), pages 29–37.
- Sbarbaro, D., Maldonado, M. and Cipriano, A. (2008) A two level hierarchical control structure for optimizing a rougher flotation circuit. *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, volume 17(1), pages 1018–1022.
- Sontag, E. (1981) Nonlinear regulation: the piecewise linear approach. *IEEE Trans. on Automatic Control*, volume 26(2), pages 346–358.
- Stenlund, B. and Medvedev, D. (2002) Level control of cascade coupled flotation tanks. *Control Engineering Practice*, volume 10(4), pages 443–448.
- Wills, B.A. and Napier-Munn, T.J. (2006) Mineral processing technology. *Elsevier Science and Technology Books*, pages 267–352.
- Yianatos, J.B., Larenas, J.M., Moys, M.H. and Díaz, F.J. (2008) Short time mixing response in a big flotation cell. *International Journal of Mineral Processing*, volume 89(1), pages 1–8.

**ANEXO D. HYBRID MODEL PREDICTIVE CONTROL FOR FLOTATION
PLANTS, PUBLICACIÓN SOMETIDA A EVALUACIÓN EN REVIS-
TA MINERALS ENGINEERING, MARZO 2014.**

Hybrid Model Predictive Control for Flotation Plants¹

Eduardo Putz Aldo Cipriano²

*College of Engineering, Pontificia Universidad Católica de Chile,
Av. Vicuña Mackenna 4860, Santiago, Chile.*

Abstract: Development of control strategies for large-scale processes has led to formulate novel methodologies to consider the global performance of a plant, facilitating the design, validation and evaluation of more complex control strategies. This paper describes a hybrid dynamic simulator for a flotation circuit with one production line composed by one cell and two banks in series, calibrated with industrial data. This simulator allows to represent a real plant behaviour, facilitating the process of extracting input-output data. A PieceWise AutoRegressive eXogenous (PWARX) system is obtained from simulated plant by applying identification techniques for different operating conditions. A Hybrid Model Predictive Control (H MPC) methodology based on PWARX models has been developed and evaluated showing a good performance. Simulation results show that the proposed methodology is suitable for modelling the behaviour of a flotation process and its control stage by minimizing the tracking error in the final tail grade.

Keywords: Flotation, Hybrid Systems, Identification, Hybrid Model Predictive Control.

1. INTRODUCTION

One of the most common processes of a mineral processing plant is flotation, whose aim is to increase the concentration of valuable mineral with the highest possible selectivity. A typical flotation plant includes the following stages: rougher, scavenger, regrinding and cleaner (Bergh and Yianatos, 2011), where its configuration depends on characteristics of the orebody in exploitation. Consequently, an appropriate final product with a high recovery and commercial ore grade can be obtained by a suitable operation of these stages (Wills and Napier-Munn, 2006). Furthermore, the interest in developing control strategies for large-scale processes has led to formulate novel methodologies. These approaches allow to consider the global performance of a plant, facilitating the design, validation and evaluation of more complex optimizing control strategies. According to this trend, flotation is still being studied and its main operational inefficiencies are due to the antiquity of plants, the absence of measurement instruments and the lack of new technologies (Shean and Cilliers, 2011).

To date, several models have been developed to represent a flotation cell or a set of them. These models can be grouped into two categories: stationary and dynamics. In the second category a first group are hydraulic models, which are used to evaluate control strategies of pulp levels (Stenlund and Medvedev, 2002), (Kämpjärvi and Jämsä-Jounela, 2003). A second group are the mass balance models based on mineralurgical conditions of one phase (Casali et al., 2002), (Sbarbaro et al., 2008) and two phases (Pérez-Correa et al., 1998), (Rojas and Cipriano, 2010), (Bascur, 2010). Recently, new efforts have been performed in Ortiz and Toro (2013), modelling the air

phase inside a cell. However, the mentioned models only consider the dynamic evolution of a cell under a single operating condition.

Similarly, several control strategies have been applied to flotation. For instance, regulatory strategies to control the pulp level and the rate of reagent addition have been proposed by Thwaites (1983) and Thwaites (1986). A decade later, Pérez-Correa et al. (1998) and Suichies et al. (1999) designed a multivariable predictive controllers to regulate the output ore grades. Recently, Cortés et al. (2008) proposed an advanced control strategy, generating increases in the copper recovery. Foroush et al. (2009) designed a froth thickness control, improving the concentrate mineralurgical characteristics. A comprehensive review of control strategies applied to flotation can be found on Shean and Cilliers (2011) and Hodouin (2011).

This paper is organized as follows. Section 2 presents a hybrid dynamic model for a single cell, used to develop a simulator of a flotation line that is calibrated with industrial data. Using this simulator, a hybrid identification methodology is formulated in Section 3, based on PieceWise AutoRegressive eXogenous (PWARX) models and considering coupling effects among the cells. The design and implementation of a Hybrid Model Predictive Control (H MPC) and its comparison with a conventional Model Predictive Control (MPC) is detailed in Section 4. Finally, conclusions are presented in Section 5.

1.1 Plant description

Flotation is a physico-chemical separation process widely used in the mining industry and it is based on characteristic of hydrophobicity of valuable minerals content in pulp. This characteristic is generated by the use of reagents (collectors, depressants and foaming) and injection of air into the cell, generating the attachment of valuable minerals to air bubbles (Wills and Napier-Munn, 2006).

¹ This study was funded by the FONDECYT N°1120047, "Distributed Hybrid Model Predictive Control for Mineral Processing".

² Corresponding author.

E-mail address: eiputz@uc.cl, aciprian@ing.puc.cl.

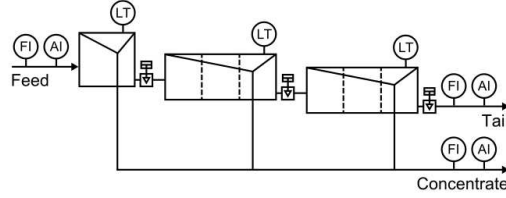


Fig. 1. Rougher flotation plant under analysis

Figure 1 shows the typical configuration of a flotation line, which consists in a set of cells in series grouped into banks connected by controlled valves. The process delivers concentrate and tail, where the first is sent to a regrinding stage and the second to tailing dams. Additionally, the typical measurement instruments are pulp level sensors placed in each cell or bank. The sensors of flow and ore grade can be located at the input and output streams. Nowadays, there are also available sensors to measure the froth speed and the bubble sizes inside a cell. More details can be found on Shean and Cilliers (2011).

The current control strategies for flotation have been focused on the use of PID controllers for pulp levels, configured in local operator stations or in Distributed Control Systems (DCS). In addition, changes in characteristics of the feed pulp, such as variations in flow, mineral law, particle sizes and percent solids are considered disturbances that could affect the plant stability (Cortés et al., 2008). Wills and Napier-Munn (2006) propose that to place the plant in a region of optimal operation an adequate control strategy is needed, producing increases in the profitability of the business. Accordingly, the use of optimizing predictive controllers are presented as a viable alternative to fulfill this task, but an adequate prediction model is required.

1.2 Hybrid systems

Hybrid dynamic systems are used to represent processes, whose behavior involves both continuous and discrete dynamics. The system variables belong to a continuous and discrete set, and the interconnection between them is performed by logical rules (Bemporad and Morari, 1999). Several types of models can be used to described hybrid systems. The class most studied corresponds to PieceWise Affine (PWA) systems, which can approximate non-linear dynamics using linearized models at different operating points (Sontag, 1981). A PWA system is defined by:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}_i \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(k) + \mathbf{f}_i \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}_i \mathbf{x}(k) + \mathbf{g}_i \end{aligned}, \text{ for } \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}(k) \end{bmatrix} \in \mathcal{X}_i \quad (1)$$

where $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^m$ and $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^r$ denote the state, input and output vectors, respectively. $\mathcal{X}_i$ is a convex polyhedral subset of the state-input set, generally given by a finite number of linear inequalities. Each subsystem $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ defined by matrices $\mathbf{A}_i$, $\mathbf{B}_i$, $\mathbf{C}_i$, and vectors $\mathbf{f}_i$ and $\mathbf{g}_i$ corresponds to one linear model of the operating point assigned to $\mathcal{X}_i$. In each sample time, the transition between two linear models is established by past values of the states and inputs.

Other class of hybrid systems, widely used in the design of HMPC strategies, is the Mixed Logical Dynamical (MLD) systems. In these type of systems, physical laws, logic rules and operating constraints are interdependent in a linear state-space representation (Bemporad and Morari, 1999). MLD systems can be generalized by:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_1\mathbf{u}(k) + \mathbf{B}_2\boldsymbol{\delta}(k) + \mathbf{B}_3\mathbf{z}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_1\mathbf{u}(k) + \mathbf{D}_2\boldsymbol{\delta}(k) + \mathbf{D}_3\mathbf{z}(k) \\ \mathbf{E}_2\boldsymbol{\delta}(k) + \mathbf{E}_3\mathbf{z}(k) &\leq \mathbf{E}_1\mathbf{u}(k) + \mathbf{E}_4\mathbf{x}(k) + \mathbf{E}_5 \end{aligned} \quad (2)$$

where $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^{n_c} \times \{0,1\}^{n_l}$, $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^{m_c} \times \{0,1\}^{m_l}$ and $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^{r_c} \times \{0,1\}^{r_l}$ denote the state, input and output vectors, respectively. It should be noted that these vectors can include both continuous and discrete variables. Additionally, $\boldsymbol{\delta}(k) \in \{0,1\}^{p_l}$ and $\mathbf{z}(k) \in \mathbb{R}^{p_c}$ are auxiliary logical and continuous variables, respectively. The state matrix $\mathbf{A}$ and the input matrices $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ and $\mathbf{B}_3$ describe the evolution of the state variables. Similarly, the output matrix $\mathbf{C}$ and the matrices $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2$ and $\mathbf{D}_3$ describe the evolution of the output variables. Finally, the matrices $\mathbf{E}_1$ to $\mathbf{E}_5$ define the inequality of the system, which is incorporated when transforming the logic rules into mixed-integer inequalities.

Heemels et al. (2001) proved that PWA system and MLD system are equivalents. However, a PWA system can be formulated in a simpler way, being more suitable to be used in the identification of hybrid systems. On the other hand, a MLD system is useful to describe several types of systems, involving discrete variables and operating constraints. This feature has led to this system to be widely used in the formulation of HMPC strategies, as shown in Camacho et al. (2010).

2. DYNAMIC HYBRID MODEL

2.1 Operating modes

A hybrid system can switch its operating conditions (or modes) using auxiliary logical variables, which generate instant changes in the continuous components of the system, represented by differential equations (Bemporad and Morari, 1999). Accordingly, a flotation cell i has been modelled considering two auxiliary logical variables, established by δ_1^i and δ_2^i . Both of them can take a value of 0 or 1, and their time evolution is defined by the following logical rules:

$$\delta_1^i = \begin{cases} 1 & \text{if } h_p^i \leq h_{max}^i \\ 0 & \text{if } h_p^i > h_{max}^i \end{cases} \quad (3)$$

$$\delta_2^i = \begin{cases} 1 & \text{if } h_p^i + h_e^i > h_{max}^i \\ 0 & \text{if } h_p^i + h_e^i \leq h_{max}^i \end{cases} \quad (4)$$

where h_p^i , h_e^i and h_{max}^i are the pulp level, froth height and maximum available height of a cell, respectively. The subscripts p and e indicate if the variable belongs to the pulp phase or froth phase. Figure 3 shows the three operating modes detected in a flotation cell, which can be individualized defining the vector $[\delta_1^i \ \delta_2^i]$, containing the values assigned to each auxiliary logical variable.

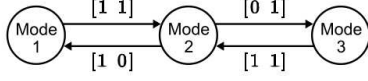


Fig. 2. Operating modes of a flotation cell with $[\delta_1^i \ \delta_2^i]$

According to Figure 2, the operating modes defined for a cell are: (1) operation with presence of pulp and froth phases, without overflow of concentrate from top of the cell, (2) normal operation with presence of pulp and froth phases, with overflow of concentrate from top of the cell and (3) operation with overflow of pulp phase from top of the cell, with absence of froth phase. A flotation cell could have other operating modes depending of the objective for which the model will be used. For instance, changes in the injection of air flow, opening or closing of different flotation lines in parallel, among others. These are not considered in this work.

2.2 Model formulation of a flotation cell

The mineralurgical dynamic model of Pérez-Correa et al. (1998) represents the behaviour of a flotation cell by the interaction between pulp phase and froth phase, and the presence of streams feed, concentrate and tail. In addition, the model has been formulated based on the following assumptions: (1) the mineral to be recovered is chalcopryrite (CuFeS_2) and it has two classes of mineralogies: high and low, (2) the phases are perfectly mixed, (3) there is material transfer depending on collection rate of pulp phase and drainage rate of froth phase, (4) r granulometries are considered, (5) there is a constant injection of air flow and (6) the cell has a constant area.

A mass balance for the pulp phase and froth phase is performed considering the three operating modes previously defined. The mineralurgical equations of a cell i are:

$$\dot{m}_p^{ijk} = M_f^{ijk} + \alpha_e^{ijk} m_e^{ijk} - \left[\alpha_p^{ijk} + \frac{Q_t^i}{V_p^i} \right] m_p^{ijk} \quad (5)$$

$$\dot{m}_e^{ijk} = \alpha_p^{ijk} m_p^{ijk} - \left[\alpha_e^{ijk} + \frac{Q_c^i}{V_e^i} \right] m_e^{ijk} \quad (6)$$

where $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j \in \{1, 2\}$ and $k \in \{1, 2, \dots, r\}$ are indexes for the cell number, class and granulometry, respectively. A rich mineral class is denoted by $j = 1$, while a low mineral class is denoted by $j = 2$. The index k allows to represent different granulometries that can be present in a mass ore, for instance a particle size distribution classified by a Tyler mesh set. m_p^{ijk} is the ore mass for pulp phase and m_e^{ijk} the ore mass for froth phase. Similarly, α_p^{ijk} is the collection rate and α_e^{ijk} is the drainage rate, which are calculated as follows:

$$\alpha_p^{ijk} = a^{ijk} Q_{col}^3 + b^{ijk} Q_{col}^2 + c^{ijk} Q_{col} + \alpha_{col}^{ijk} \quad (7)$$

$$\alpha_e^{ijk} = d^{ijk} Q_{col} + e^{ijk} Q_{esp} + \alpha_{esp}^{ijk} \quad (8)$$

where a^{ijk} , b^{ijk} , c^{ijk} , d^{ijk} , e^{ijk} , α_{col}^{ijk} and α_{esp}^{ijk} are constant variables that allow to fit the model using industrial data. Q_{col} and Q_{esp} are the collector volumetric flow and foaming volumetric flow, respectively (Pérez-Correa et al., 1998). In addition, the total volume for each phase is:

$$V_p^i = A^i h_p^i (1 - \epsilon_p^i) \quad (9)$$

$$V_e^i = A^i h_e^i (1 - \epsilon_e^i) \quad (10)$$

where V_p^i is the volume of pulp phase, V_e^i is the volume of froth phase, ϵ_p^i is the air hold-up of pulp phase and ϵ_e^i is the air hold-up of froth phase. The hydraulic model of Kämpjärvi and Jämsä-Jounela (2003) allows to represent the level behaviour of pulp phase inside a flotation cell. Considering that the froth height is negligible compared to pulp level (Sbarbaro et al., 2008), the volumetric balance of a cell i valid for all operating modes is:

$$\dot{h}_p^i = \frac{1}{A^i} (Q_f^i - Q_t^i - Q_c^i) \delta_1^i \quad (11)$$

where Q_f^i is the feed volumetric flow and A^i is the area of the cell. The tail volumetric flow is derived from physical laws based on Torricelli's principle (Stenlund and Medvedev, 2002):

$$Q_t^i = \alpha_t^i v^i \sqrt{h_p^i - h_p^{i+1} + \Delta h^i} \quad (12)$$

where $v^i \in \{0, 1\}$ is the position of the output control valve and α_t^i is a tuning constant. The difference in height between two consecutive cells is denoted by Δh^i . When two consecutive cells are connected, the feed volumetric flow of next cell is the tail volumetric flow of previous cell, that is $Q_f^{i+1} = Q_t^i$. The concentrate volumetric flow is formulated as a linear empirical function of pulp level, froth height and maximum available height of a cell (Bascur, 2010). The concentrate volumetric flow valid for all operating modes is:

$$Q_c^i = \alpha_c^i (h_p^i + h_e^i - h_{max}^i) \delta_1^i \delta_2^i + (Q_f^i - Q_t^i) (1 - \delta_1^i) \quad (13)$$

where α_c^i is a tuning constant. Froth height can be modelled as a constant (Pérez-Correa et al., 1998), as a function of the air flow injected and the dosification of foaming (Barbian et al., 2003), or as a difference between the maximum height available for the cell and its pulp level (Sbarbaro et al., 2008). To date, there are not significant advances in modelling this variable, therefore it has been considered a constant with a measuring noise. Equations for output mass flows of a cell i are obtained by combining mineral masses and volumetric flows calculated from both mineralurgical model and hydraulic model:

$$M_t^{ijk} = \frac{Q_t^i}{V_p^i} m_p^{ijk} \quad (14)$$

$$M_c^{ijk} = \frac{Q_c^i}{V_e^i} m_e^{ijk} \quad (15)$$

where M_t^{ijk} and M_c^{ijk} are the tail mass flow and the concentrate mass flow, respectively. In addition, the tail grade and the concentrate grade depend on the ore mass in each output stream:

$$g_t^i = g_{cu} \frac{\sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^r M_t^{ijk} g_{cp}^j}{\sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^r M_t^{ijk}} \quad (16)$$

$$g_c^i = g_{cu} \frac{\sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^r M_c^{ijk} g_{cp}^j}{\sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^r M_c^{ijk}} \quad (17)$$

where g_t^i is the tail grade, g_c^i is the concentrate grade, g_{cp}^j is the chalcopryite grade associated both high class and low class, and g_{cu} is the cooper grade in a one molecule of chalcopryite (approximately 34.61%). The final concentrate grade is obtained considering the contribution of concentrate flow of all cells that belonging to a line:

$$g_c = g_{cu} \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^r M_c^{ijk} g_{cp}^j}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^r M_c^{ijk}} \quad (18)$$

The final tail grade is the tail grade corresponding to the last cell of the line, that is $g_t = g_t^n$. Finally, the recovery is obtained by dividing the total of valuable mineral in the concentrate flow by the total of valuable mineral in the feed flow. Given that $g_c \gg g_t$ the final recovery is:

$$R = 100 \left(1 - \frac{g_t}{g_f} \right) \quad (19)$$

The equations used to define mass flows, grades and recovery are valid in steady state. However, according to Pérez-Correa et al. (1998) and Rojas and Cipriano (2010) these can also be used to represent their behaviour in dynamic state. In addition, equation (19) allows to calculate the recovery of a single cell, using the ore grades appropriated.

2.3 Simulation results

Figure 3 shows the simulation results of the hybrid dynamic simulator, considering the model of a flotation cell developed and the plant detailed in Figure 1. Model inputs are feed volumetric flow, which varies between 35-50 m³/min; feed grade, which is considered a measured disturbance and it varies between 0.85-1.00%; and the effects of collection rate and drainage rate, that were considered constant. In addition, position of the output control valves were modified between 40-75%, allowing to visualize the changes in pulp level of first cell and remaining banks. Generally, an output control valve, cell air flow and reagent additions are the only actuators in a flotation cell or bank (Wills and Napier-Munn, 2006).

The changes in operating modes of first cell and banks can also be seen in Figure 3, which are triggered by the presence or absence of concentrate volumetric flow according to equations (3) and (4). For instant, pulp level h_p^3 is in mode three between 75-150 min, decreasing the final concentrate grade. Besides, the pulp levels decrease between 150-225 min, implying an absence of the final concentrate flow and its grade associated. Grade sensors are considered installed in streams according to Figure 1, therefore if there is not pulp or concentrate flow in a stream the measured of grade is zero.

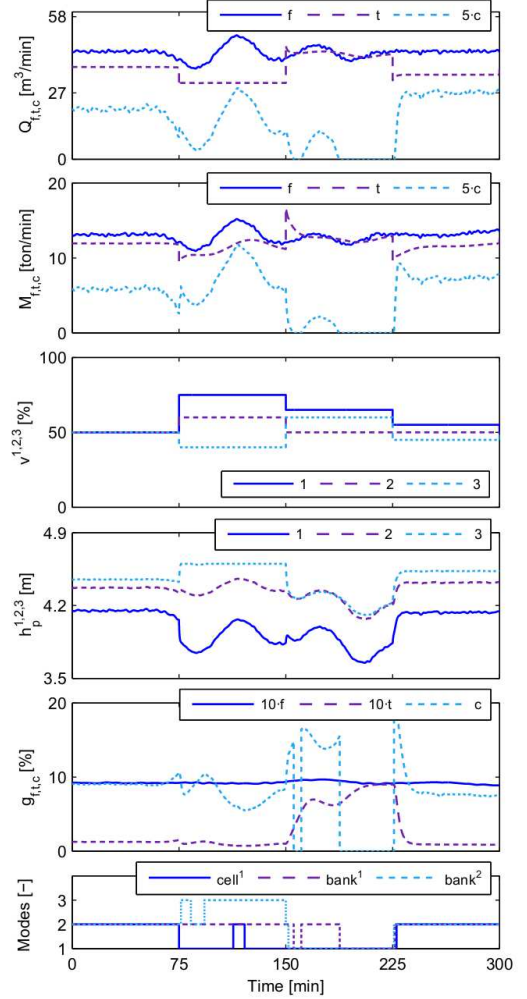


Fig. 3. Hybrid dynamic simulator results, where f, t and c indicate feed, tail and concentrate, respectively.

3. HYBRID SYSTEM IDENTIFICATION

3.1 Identification of hybrid systems

Given a set of input-output data which is measured from a process with a hybrid dynamic, a PieceWise AutoRegressive eXogenous (PWARX) system is defined as (Ferrari-Trecate et al., 2001):

$$y(k) = \begin{cases} \theta_1 \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ 1 \end{bmatrix} + e(k) & \text{if } \mathbf{x}(k) \in \mathcal{X}_1 \\ \vdots \\ \theta_s \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ 1 \end{bmatrix} + e(k) & \text{if } \mathbf{x}(k) \in \mathcal{X}_s \end{cases} \quad (20)$$

where $x(k) \in \mathbb{R}^n$ is the regressor vector that contains only n_a past outputs and n_b past inputs:

$$\mathbf{x}(k) = [y(k-1) \cdots y(k-n_a) \mathbf{u}^\top(k-1) \cdots \mathbf{u}^\top(k-n_b)]^\top \quad (21)$$

where $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^p$, $y(k) \in \mathbb{R}$ and $e(k) \in \mathbb{R}$ are the input vector, output and noise term, respectively. In addition, s is the number of submodels, p the number of input variables, $\theta_{\lambda(k)}$ is the parameter vector of each affine ARX submodel with $\lambda(k) \in \{1, \dots, s\}$ the discrete state (or mode). The regressor vector lie in a bounded polyhedron $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^n$ called regressor set where $n = n_a + p \cdot n_b$. The switching mechanism is determined by a polyhedral partition $\{\mathcal{X}\}_{i=1}^s$ of $\mathcal{X}$, whose discrete state is given by:

$$\lambda(k) = i \Leftrightarrow \mathbf{x}(k) \in \mathcal{X}_i \quad (22)$$

where $i \in \{1, \dots, s\}$ and $\{\mathcal{X}\}_{i=1}^s$ is a complete partition of $\mathcal{X}$. Therefore, the identification problem for a PWARX system is formulated as follows: Given a collection set of N input-output pairs $(y(k), \mathbf{u}^\top(k))$ with $k \in \{1, \dots, N\}$ estimate the model with orders n_a and n_b , the number of submodels s , the parameter vector θ_i and the regions $\mathcal{X}_i$ with $i \in \{1, \dots, s\}$ (Paoletti et al., 2007).

This identification problem can be approached through different methodologies (Paoletti et al., 2007), such as the clustering-based procedure formulated by Ferrari-Trecate et al. (2003) for fixed parameters n_a , n_b and s , the algebraic geometric technique developed by Vidal (2004) and the bounded-error procedure designed by Bemporad et al. (2005). To date, the clustering-based procedure provide a faster implementation by using the Hybrid Identification Toolbox (HIT) available to Matlab (Ferrari-Trecate, 2005), while the other two techniques do not have tools to facilitate their use.

3.2 Clustering-based procedure

The clustering-based procedure is based on the fact that a PWA map is locally linear and it has been widely studied in Ferrari-Trecate et al. (2001), Ferrari-Trecate et al. (2003) and Paoletti et al. (2007), which works as follows:

- *Local regression:* for $k = \{n, \dots, N\}$ a local data set $\mathcal{C}_k$ is built by collecting the data $(y(k), \mathbf{x}(k))$ and the $c-1$ regression vectors $x(j)$ that are closest to $\mathbf{x}(k)$. Local parameter vectors θ_k^{LS} are then computed for each local data set $\mathcal{C}_k$ by least squares.
- *Construction of feature vectors:* Each data point $(y(k), \mathbf{x}(k))$ is mapped into the feature vector:

$$\xi_k = [(\theta_k^{LS})^\top \mathbf{m}_k^\top]^\top \quad (23)$$

where $\mathbf{m}_k^\top = \frac{1}{c} \sum_{(y, \mathbf{x}) \in \mathcal{C}_k} \mathbf{x}$ is the center of $\mathcal{C}_k$.

- *Clustering:* Feature vectors are partitioned into s groups $\{\mathcal{F}_i\}_{i=1}^s$ by applying a K-means algorithm, exploiting suitable defined confidence measures on the feature vectors.
- *Parameter estimation:* Since the mapping of the data points into the feature vectors is bijective, data points

are classified into clusters $\{\mathcal{D}_i\}_{i=1}^s$ according to the following rule:

$$(y, \mathbf{x}) \in \mathcal{D}_i \Leftrightarrow \xi_k \in \mathcal{F}_i \quad (24)$$

A parameter vector θ is estimated for each data cluster $\mathcal{D}_i$ by weighted least squares.

This procedure requires that the orders n_a and n_b , the number of submodels s and the cardinality of the local data sets c are fixed. More details can be found on Paoletti et al. (2007).

3.3 Application to a flotation line

Due to the cascade configuration of cells and banks that compose a line, the dynamic behavior of the process is highly non-linear (Shean and Cilliers, 2011), and making the identification process more difficult. As indicated previously, each flotation cell or bank can have three operating modes: (1) absence of concentrate flow, (2) normal operation and (3) overflow of pulp phase (see Figure 3). Considering that PWARX models will be used in the formulation of predictive controllers, it is useful to simplify their structure. For instance, using only two operating modes. This is feasible, because the mode three only occurs when the pulp level is greater than the maximum height available of a cell or bank and it can be considered as an operating constraints in the optimization problem associated to the predictive controller by $h_p^i \leq h_{max}^i$. Therefore, only mode 1 and mode 2 will be identified. In accordance with the available plant instrumentation under analysis, only pulp levels h_p^i with $i \in \{1, 2, 3\}$ and final tail grade g_t will be considered as an input-output variables. This work proposes six step to identify predictive models, considering all coupling effects among cells and banks:

- Set the operating range of feed pulp Q_f as a sequence of decreasing steps. The duration of each step is represented by τ_1 (see Figure 4).
- In each step of Q_f , change the position of the output control valves, setting a decreasing step sequences for each of them, where τ_2 , τ_3 and τ_4 are the duration time of each step associated to the output control valves v^1 , v^2 and v^3 , respectively (see Figure 4).

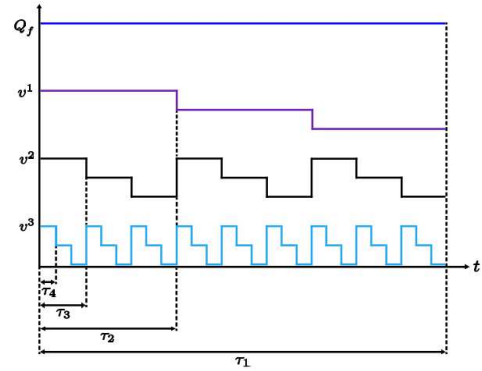


Fig. 4. Hybrid MPC strategy applied to a flotation line

- Considering that the froth height h_e^i of a cell i is known, set a pulp level h_p^i in which the cell or bank begins its normal operation:

$$h_p^i \leq h_{max}^i - h_e^i \quad (25)$$

Therefore, defining $h_m^i = h_{max}^i - h_e^i$ with $i \in \{1, 2, 3\}$, mode 1 is when $h_p^i \leq h_m^i$ (absence of concentrate flow) and mode 2 is when $h_p^i > h_m^i$ (normal operation).

- Using the dynamic hybrid simulator, adjust manually the step values for each output control valve. For each cell, two sets of input-output data must be generated, one for each operating mode. A linear identification for the pulp level must be performed on each set.
- Simulate the process, considering the inputs Q_f , v^1 , v^2 and v^3 previously adjusted in a horizon of $n\tau_1$ with n the number of feed pulp steps. This simulation allows to generate the input-output data sets for each mode, being h_p^1 , h_p^2 , h_p^3 and g_t outputs.
- Using the software HIT, identify the parameters associated to the AutoRegressive eXogenous (ARX) model of each operating mode, according to the structure presented in appendix A.

3.4 Simulation results

Figure 5 shows the validation results using the PWARX model identification methodology proposed previously. The validation data was obtained generating variations in the inputs of the simulator, such as feed pulp, feed grade and output control valves in tail streams. These results prove that the identified hybrid models allow to adequately predict the behaviour of the flotation plant and appreciating their potential to be used in HMPC applications. In addition, inputs for predictive models of pulp level depend on the location of cells or banks along the flotation line. Besides, inputs for predictive model of final tail grade include all pulp levels of the line and the feed grade. More details about the predictive models structure and the parameters identified can be found on appendix A. Finally, the Table 1 shows the Root Mean Square Error (RMSE) for the prediction results commented.

Table 1. RMS Error prediction models

PWARX Model	h_p^1 [m]	h_p^2 [m]	h_p^3 [m]	g_t [%]
RMS Error	0.0251	0.0153	0.0094	0.0360

4. HYBRID MPC FOR FLOTATION

4.1 Hybrid predictive control applied to flotation

Hybrid Model Predictive Control (HMPC) uses predictive models characterized by means of dynamic behaviours, logical rules and operating constraints (Bemporad and Morari, 1999). In this work, the predictive models are obtained using a hybrid identification methodology detailed in section 3. Besides, the proposed centralized HMPC strategy applicable to a flotation line is shown in Figure 6. It was validated by controlling the flotation line designed in the hybrid dynamic simulator formulated in section 2. Manipulated variables are the output control

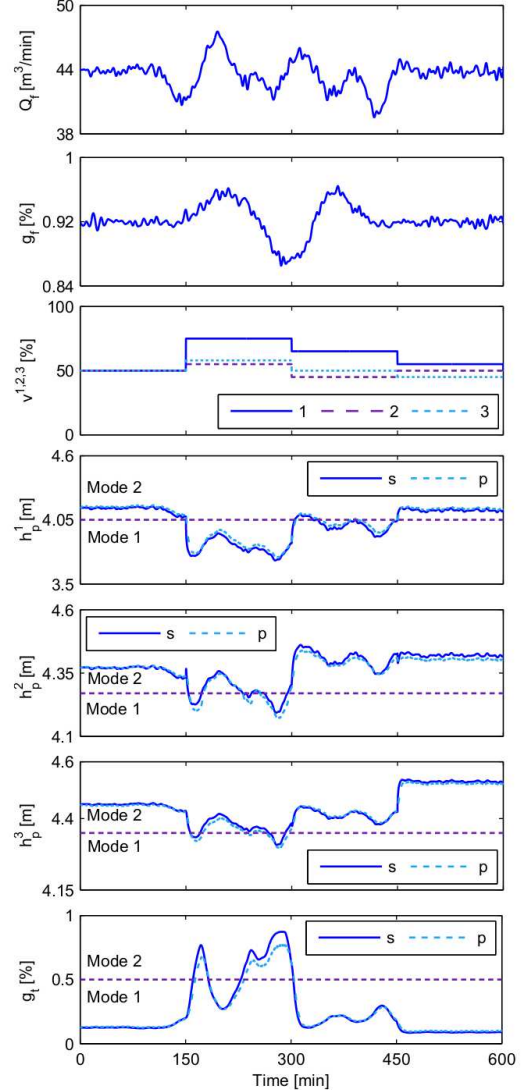


Fig. 5. Hybrid identification results where s and p denote a signal from simulator and a signal from predictive model, respectively. In addition, the dotted line separates the results that were obtained with the prediction model assigned to mode 1 of the results obtained with the prediction model assigned to mode 2.

valves of each cell and bank, while controlled variables are the pulp levels and the final tail grade (see Figure 6). Both the feed flow and the feed grade are considered as a measured disturbances. The control aim is to minimize the error between a reference and the final tail grade, and to minimize variations in manipulated variables, according to the methodology proposed by Maciejowski (2001).

In order to prevent unwanted operating conditions in the first cell and remaining banks, a lower bound and an upper bound are included in the strategy. Consequently, the objective function is defined as follows:

$$\begin{aligned} \min_{\{\Delta u, \delta, z\}} \quad & \sum_{i=0}^{N-1} \|y_4(k+i+1|k) - r(k+i|k)\|_Q^2 \cdots \\ & \cdots + \|\Delta u_1(k+i|k)\|_R^2 + \|\Delta u_2(k+i|k)\|_P^2 \quad (26) \\ & \cdots + \|\Delta u_3(k+i|k)\|_S^2 \end{aligned}$$

Subject to:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1|k) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k|k) + \mathbf{B}_3\mathbf{z}(k|k) \\ \mathbf{y}(k|k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k|k) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\mathbf{E}_2\delta(k|k) + \mathbf{E}_3\mathbf{z}(k|k) \leq \mathbf{E}_1\mathbf{u}(k|k) + \mathbf{E}_4\mathbf{x}(k|k) + \mathbf{E}_5$$

$$\underline{h}_p^j \leq x_j(k|k) \leq \overline{h}_p^j \quad j = \{1, 2, 3\} \quad (28)$$

Where $y_4(k)$ is the final tail grade of a line, $\Delta u_1(k) = u_1(k) - u_1(k-1)$, $\Delta u_2(k) = u_2(k) - u_2(k-1)$ and $\Delta u_3(k) = u_3(k) - u_3(k-1)$ correspond to the changes in the position of output control valves v^1 , v^2 and v^3 , respectively; and $r(k)$ is the reference, which can also be set as zero, minimizing the value of the final tail grade. N is the prediction horizon and equation (27) corresponds to the MLD identified model. Additionally, equation (28) is an operating constraint for the pulp level of each cell or bank j , $\|y_4\|_Q^2 = y_4^T Q y_4$, $\|\Delta u_1\|_R^2 = \Delta u_1^T R \Delta u_1$, $\|\Delta u_2\|_P^2 = \Delta u_2^T P \Delta u_2$ and $\|\Delta u_3\|_S^2 = \Delta u_3^T S \Delta u_3$ with $Q = Q^T \geq 0$, $R = R^T \geq 0$, $P = P^T \geq 0$ and $S = S^T \geq 0$.

By setting the following vectors:

$$\mathbf{\Omega} = [\Delta \mathbf{u}(k|k) \cdots \Delta \mathbf{u}(k+N-1|k)]^T \quad (29)$$

$$\mathbf{\Xi} = [\delta(k|k) \cdots \delta(k+N-1|k)]^T \quad (30)$$

$$\mathbf{\Gamma} = [\mathbf{z}(k|k) \cdots \mathbf{z}(k+N-1|k)]^T \quad (31)$$

and the general vector:

$$\mathbf{\Lambda} = [\mathbf{\Omega} \mathbf{\Xi} \mathbf{\Gamma}]^T \quad (32)$$

The optimization problem defined by equations (26) to (28) can be formulated as a Mixed Integer Quadratic Programming (MIQP) using the general vector (32), which is solved as:

$$\min_{\{\mathbf{\Lambda}\}} \frac{1}{2} \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{F}_1 \mathbf{\Lambda} + \mathbf{F}_2 \mathbf{\Lambda} \quad (33)$$

Subject to:

$$\mathbf{F}_3 \mathbf{\Lambda} \leq \mathbf{F}_4 \quad (34)$$

Where $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ and $\mathbf{F}_4$ are matrices with suitable dimensions. In accordance to the receding horizon theory, only the control action corresponding to the current sampling time $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}(0|0)$ is applied to the process, being the MIQP optimization problem solved anew at the next sampling time (Bemporad and Morari, 1999).

4.2 Predictive model formulation

A H MPC methodology needs predictive models, which must represent the dynamics of the process to be controlled. In this work, a PWARX models identified from

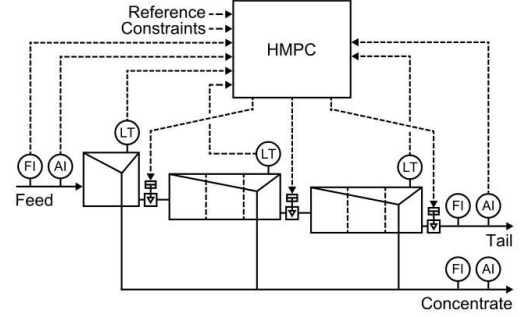


Fig. 6. Hybrid MPC strategy applied to a flotation line

input-output data are used to predict the behaviour of the flotation line. As mentioned previously, one of the principal features of a PWARX model is its equivalence with a MLD model (Heemels et al., 2001), which is widely used in the design of H MPC strategies. According to this trend, Torrisi and Bemporad (2004) developed a language called HYSDEL available for Matlab, that fully automates the process of generating the matrices associated to a MLD model defined by (2) and (27). The Code 1 shows the HYSDEL structure used to transform PWARX models of the form (20) in a MLD model suitable to be used in a H MPC strategy. In this work, it was used HYSDEL version 2.0.6 with orders $n_a = n_b = 1$.

The Code 1 is divided in two sections: *interface* and *implementation*. The first section allows to define parameters and ranges of the model variables, while the second section allows to define equations and rules associated to each model. The section *interface* is subdivided in sections: *state*, *input*, *output* and *parameter*, which allow to define states, inputs, outputs and parameters of the PWARX model. The section *implementation* is divided in six sub-sections: *aux*, *AD*, *DA*, *continuous*, *output* and *must*. Auxiliary MLD variables, logical rules, dynamic equations, updated states, model output variables and bounded constraints are defined in these sections, respectively.

Code 1: HYSDEL example for PWARX to MLD

```

1: System pwarx2mld {
2: Interface {
3:   State { real x [x_min, x_max]; ... }
4:   Input { real u [u_min, u_max]; ... }
5:   Output { real y; ... }
6:   Parameter { real theta_11, theta_12, theta_13;
7:                 real theta_21, theta_22, theta_23;
8:                 real a_11, a_12, b_11; ... } }
9: Implementation {
10:  Aux { real z; ...
11:         bool d; ... }
12:  AD { d = (a_11 * x + a_12 * u) <= b_11; ... }
13:  DA { z = { if d then theta_11 * x + theta_12 * u + theta_13
14:              else theta_21 * x + theta_22 * u + theta_23 }; ... }
15:  Continuous { x = z; ... }
16:  Output { y = x; ... }
17:  Must { u <= u_max;
18:          -u <= -u_min; ... } }

```

4.3 Simulation results

Figure 7 shows the results of H MPC strategy applied to a flotation line, regulating the final tail grade. Table 2 shows the principal values used in the controller design, according to the objective function defined by (26), the MLD model (27) and operating constraints (28).

Table 2. Parameters of the H MPC strategy

Parameter	N [-]	Q [-]	R, P, S [-]	h_p^i [m]	h_p^i [m]	h [min]
Value	4	2500	11	4.5	4.1	0.1

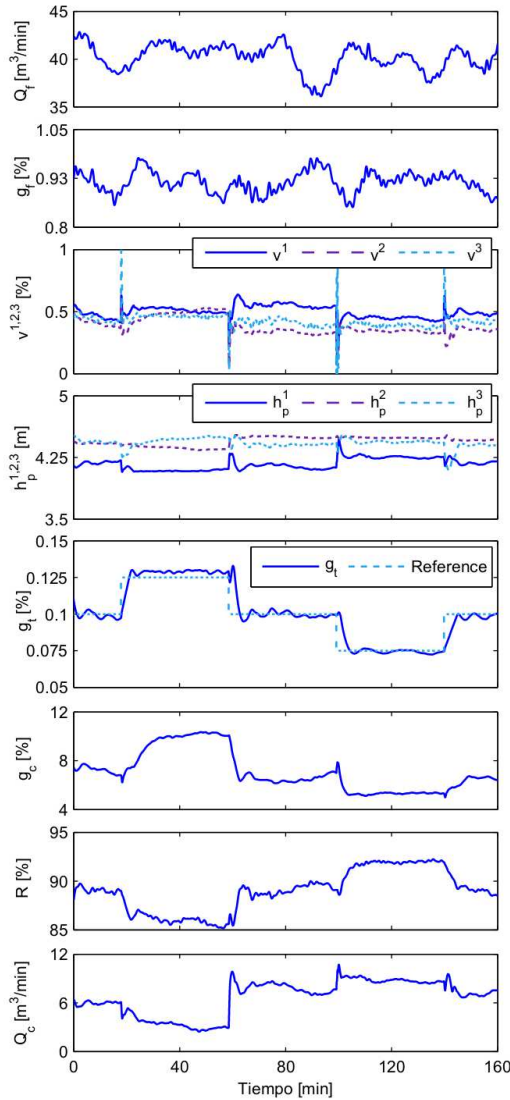


Fig. 7. H MPC simulation results controlling a flotation line

In Figure 7, feed pulp and feed grade were considered as measured disturbances, emulating its behaviour in a real plant. Performance of the controller is good and the final tail grade follows the reference correctly, considering that the only manipulated variables are the output control valves of the first cell and the remaining banks. The reference for the final tail grade was set in three steps of 0.125%, 0.10% and 0.075%. Considering these small changes in the final tail grade is possible to adjust the operating point of the flotation line. In addition, fluctuations in the final concentrate flow are reduced, this being highly beneficial for a suitable operation of the plant. Similarly, variations in the pulp levels are maintained within the boundaries defined in the design stage of the hybrid controller.

The comparison among the operating modes of H MPC and simulator is presented in Figure 8. It is noted that the controller at any time does not allow the pulp overflow from the first cell and the banks, due to the operating constrain defined in (28). For instance, when the pulp level of bank 2 (h_p^3) changes its operating condition from mode 2 to mode 1, the H MPC strategy changes correctly its predictive model. This is one of the main features of a hybrid controller, which can modify its predictive model according to the operating conditions of the process.

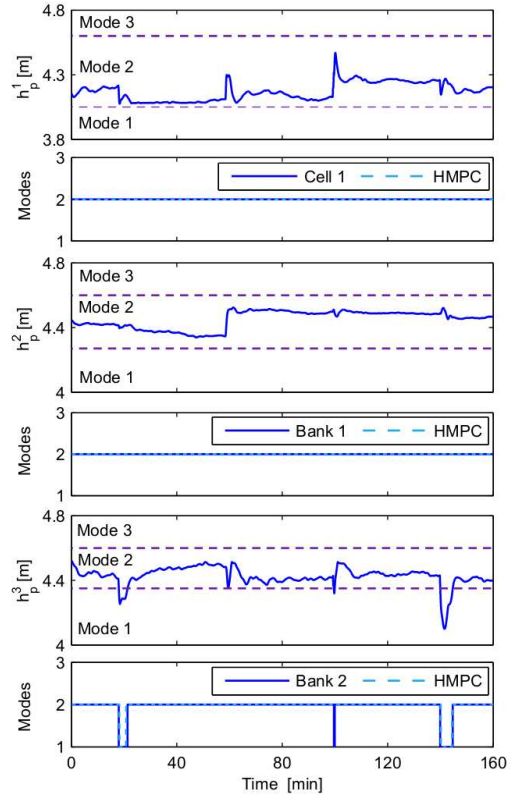


Fig. 8. Comparison of operating modes between the H MPC strategy and the hybrid dynamic simulator

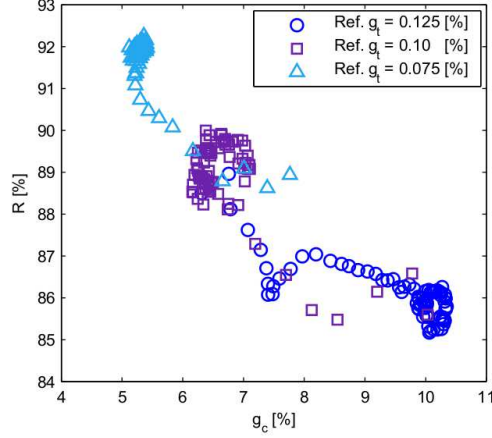


Fig. 9. Final concentrate versus recovery curve

Figure 9 shows the relationship between final concentrate grade and recovery, varying the reference of final tail grade by the HMPC strategy implemented. This curve is similar to that usually can be seen in industrial flotation plants, which allows to appreciate the performance of the flotation process and its operating points (Shean and Cilliers, 2011).

4.4 Comparison between MPC and HMPC

In order to compare the performance of the HMPC controller, a conventional MPC strategy was developed. The PWARX predictive models can be individualized in each operating region, obtained an ARX model for each mode. Considering only the predictive models of mode 2 for the first cell and the remaining banks, a general state-space model can be formulated:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1|k) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k|k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k|k) + \mathbf{W} \\ \mathbf{y}(k|k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k|k) \end{aligned} \quad (35)$$

Where $\mathbf{x}(k)$, $\mathbf{y}(k)$ and $\mathbf{u}(k)$ are state, output and input vector, respectively. In addition, the matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ and $\mathbf{W}$ have adequate dimensions and contain the parameters of ARX models. Therefore, the MPC strategy is defined by the objective function (26), predictive model (35), constraints (28) and parameters of Table 2. This MPC strategy can be solved as an optimization problem with a Quadratic Programming (QP) structure (Bemporad, 2005). Figure 10 shows the comparison simulation results between HMPC and MPC strategies, allowing to regulate the final tail grade with a good performance. The HMPC presents better results to be compared with the MPC, when the reference is changed. Variations in RMSE for these simulations results are presented in Table 3.

Table 3. Performance of control strategies

Index	MPC [%]	HMPC [%]	Variation [%]
RMS Error	0.0082	0.0068	-17

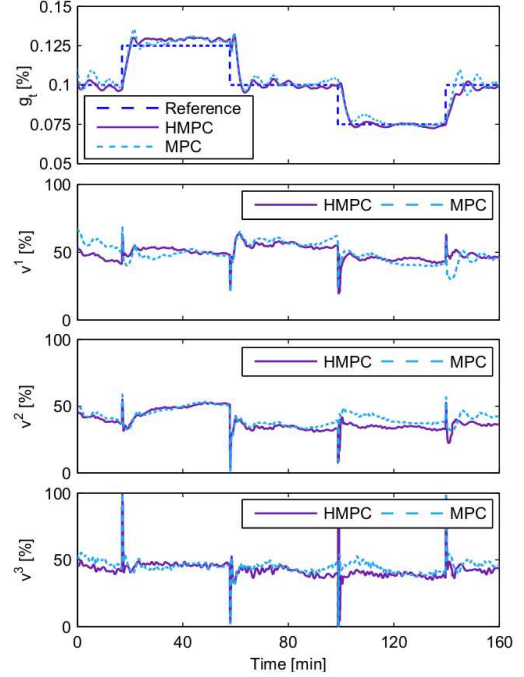


Fig. 10. Simulation results of the hybrid dynamic simulator

5. CONCLUSIONS

This paper presents a hybrid dynamic model and a hybrid identification methodology based on PWARX models for pulp levels, tail and concentrate grades, suitable for the development of HMPC strategies for a rougher and scavenger flotation plants. It was not considered the injection of air into the cell and variations in reagent addition. The models were formulated in a MLD representation by the software HYSDEL, facilitating their compatibility with optimizing control strategies. The simulation results show that a HMPC strategy is suitable for minimizing the error between the final tail grade and its reference, applying constraints in the pulp levels. Besides, this control approach is easily expandable to control dynamic behaviours of global flotation plants by identifying PWARX models for final concentrate grades, final tail grades and pulp levels for cells or banks, considering different operating conditions of the plant. This extension is going to be studied in future works along with the integration of distributed control strategies. The objective is to provide a coordination between different controllers, minimizing the loss of performance when it is compared to a large centralized scheme.

ACKNOWLEDGEMENTS

The authors gratefully acknowledge the flotation plant Las Tórtolas of Anglo American Copper, especially Fernando Romero for the industrial data provided, and CONICYT for the scholarship given to Eduardo Putz.

REFERENCES

- Barbian, N., Ventura-Medina, E., and Cilliers, J. (2003). Dynamic froth stability in froth flotation. *Minerals Engineering*, 16, 1111–1116.
- Bascur, O. (2010). A flotation model framework for dynamic performance monitoring. *Proceedings of the VII International Mineral Processing Seminar*, 1, 328–339.
- Bemporad, A. (2005). Model predictive control of hybrid systems. Slides of the 1st HYCON PHD School on Hybrid Systems, University of Siena, Italy.
- Bemporad, A., Garulli, A., Paoletti, S., and Vicino, A. (2005). A bounded-error approach to piecewise affine system identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50, 1567–1580.
- Bemporad, A. and Morari, M. (1999). Control of systems integrating logic, dynamics and constraints. *Automatica*, 35, 407–427.
- Bergh, L. and Yianatos, J. (2011). The long way toward multivariate predictive control of flotation processes. *Journal of Process Control*, 21, 226–234.
- Camacho, E., Ramirez, D., Limon, D., Muñoz de la Peña, D., and Alamo, T. (2010). Model predictive control techniques for hybrid systems. *Annual Reviews in Control*, 34, 21–31.
- Casali, A., González, G., Agosto, H., and Vallebuona, G. (2002). Dynamic simulator of a rougher flotation circuit for a copper sulphide ore. *Minerals Engineering*, 15, 253–262.
- Cortés, G., Verdugo, M., Fuenzalida, R., Cerda, J., and Cubillos, E. (2008). Rougher flotation multivariable predictive control: Concentrator A-1 División Codelco Norte. *Proceedings of the V International Mineral Processing Seminar*, 1, 316–325.
- Ferrari-Trecate, G. (2005). Hybrid Identification Toolbox (HIT).
- Ferrari-Trecate, G., Muselli, A., Liberati, A., and Morari, M. (2001). Identification of piecewise affine and hybrid systems. *Proceedings of the 2001 American Control Conference*, 5, 3521–3526.
- Ferrari-Trecate, G., Muselli, A., Liberati, A., and Morari, M. (2003). A clustering technique for the identification of piecewise affine systems. *Automatica*, 39, 205–217.
- Foroush, H., Gaulocher, S., and Gallestey, E. (2009). Model predictive control of the froth thickness in a flotation circuit. *Proceedings of the VI International Mineral Processing Seminar*, 1, 403–411.
- Heemels, W., Schutter, B.D., and Bemporad, A. (2001). Equivalence of hybrid dynamical models. *Automatica*, 37, 1085–1091.
- Hodouin, D. (2011). Methods for automatic control, observation and optimization in mineral processing plants. *Journal of Process Control*, 21, 211–225.
- Kämpjärvi, P. and Jämsä-Jounela, S. (2003). Level control strategies for flotation cells. *Minerals Engineering*, 16, 1061–1068.
- Maciejowski, J. (2001). Predictive control with constraints. 1st Ed. Pearson.
- Ortiz, J. and Toro, R. (2013). A flotation cell model for dynamic simulation. *Proceedings of the 16th IFAC Symposium on Automation in Mining, Mineral and Metal Processing*, 15, 161–165.
- Paoletti, S., Juloski, A., Ferrari-Trecate, G., and Vidal, R. (2007). Identification of hybrid systems: a tutorial. *European Journal of Control*, 13, 242–260.
- Pérez-Correa, R., González, G., Casali, A., and Cipriano, A. (1998). Dynamic modelling and advanced multivariable control of conventional flotation circuits. *Minerals Engineering*, 11, 333–346.
- Rojas, D. and Cipriano, A. (2010). Model based predictive control of a rougher flotation circuit considering grade estimation in intermediate cells. *Dyna*, 166, 29–37.
- Sbarbaro, D., Maldonado, M., and Cipriano, A. (2008). A two level hierarchical control structure for optimizing a rougher flotation circuit. *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, 17, 1018–1022.
- Shean, B. and Cilliers, J. (2011). A review of froth flotation control. *International Journal of Mineral Processing*, 100, 57–71.
- Sontag, E. (1981). Nonlinear regulation: the piecewise linear approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26, 346–358.
- Stenlund, B. and Medvedev, D. (2002). Level control of cascade coupled flotation tanks. *Control Engineering Practice*, 10, 443–448.
- Suichies, M., Leroux, D., Dechert, C., and Trusiak, A. (1999). Model predictive control of the flotation process. *Proceedings of the 31st Annual Canadian Mineral Processors Operators Conference*.
- Thwaites, P. (1983). Continued development of copper flotation control at the kidd creek concentrator. *CIM Bulletin*, 76, 41–46.
- Thwaites, P. (1986). Computer controlled reagent addition strategy and hardware for the control of a copper and zinc flotation process. *Proceedings of the Third Meeting of the Canadian Industrial Computer Society*, 56, 1–8.
- Torrisi, F. and Bemporad, A. (2004). HYSDEL - A tool for generating computational hybrid models for analysis and synthesis problems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 12, 235–249.
- Vidal, R. (2004). Identification of pwarx hybrid models with unknown and possibly different orders. *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, 1, 547–552.
- Wills, B. and Napier-Munn, T. (2006). Mineral processing technology. 7th Ed. Elsevier.

Appendix A. STRUCTURE OF THE PWARX PREDICTIVE MODELS

The structure of PWARX models associated to the first, intermediate and final cells or banks are presented.

A.1 Initials cells

The PWARX model of first cell is a linear hybrid function of feed flow of the line, position of its output control valve and pulp level of next cell:

$$h_p^1(k) = \theta^1(k) \begin{bmatrix} h_p^1(k-1) Q_f(k-1) \cdots \\ v^1(k-1) h_p^2(k-1) 1 \end{bmatrix}^\top \quad (\text{A.1})$$

$$\theta^1(k) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \theta_1^1 & \theta_2^1 & \theta_3^1 & \theta_4^1 & \theta_5^1 \end{bmatrix} & \text{if } h_p^1(k-1) \leq h_m^1 \\ \begin{bmatrix} \theta_1^2 & \theta_2^2 & \theta_3^2 & \theta_4^2 & \theta_5^2 \end{bmatrix} & \text{if } h_p^1(k-1) > h_m^1 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

A.2 Intermediate cells

The PWARX model of intermediate cells is a linear hybrid function of pulp levels of neighbouring cells, the position of previous control valve, and position of its output control valve:

$$h_p^i(k) = \theta^i(k) \begin{bmatrix} h_p^i(k-1) & h_p^{i-1}(k-1) & v^{i-1}(k-1) \\ \dots & v^i(k-1) & h_p^{i+1}(k-1) & 1 \end{bmatrix}^\top \quad (\text{A.3})$$

$$\theta^i(k) = \begin{cases} [\theta_1^1 & \theta_2^1 & \theta_3^1 & \theta_4^1 & \theta_5^1 & \theta_6^1] & \text{if } h_p^i(k-1) \leq h_m^i \\ [\theta_1^2 & \theta_2^2 & \theta_3^2 & \theta_4^2 & \theta_5^2 & \theta_6^2] & \text{if } h_p^i(k-1) > h_m^i \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

A.3 Last cell

The PWARX model of last cell is a linear hybrid function of pulp level of previous cell, position of previous output control valve, and position of its output control valve:

$$h_p^n(k) = \theta^n(k) \begin{bmatrix} h_p^n(k-1) & h_p^{n-1}(k-1) & \dots \\ v^{n-1}(k-1) & v^n(k-1) & 1 \end{bmatrix}^\top \quad (\text{A.5})$$

$$\theta^n(k) = \begin{cases} [\theta_1^1 & \theta_2^1 & \theta_3^1 & \theta_4^1 & \theta_5^1] & \text{if } h_p^n(k-1) \leq h_m^n \\ [\theta_1^2 & \theta_2^2 & \theta_3^2 & \theta_4^2 & \theta_5^2] & \text{if } h_p^n(k-1) > h_m^n \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

A.4 Final tail grade

The PWARX model of the final tail grade is a linear hybrid function of all pulp levels of the cell and banks, and the feed grade:

$$g_t(k) = \theta_t(k) \begin{bmatrix} g_t(k-1) & g_f(k-1) & h_p^1(k-1) & \dots \\ h_p^2(k-1) & \dots & h_p^n(k-1) & 1 \end{bmatrix}^\top \quad (\text{A.7})$$

$$\theta_t(k) = \begin{cases} [\theta_1^1 & \theta_2^1 & \dots & \theta_n^1 & \theta_{n+1}^1 & \theta_{n+2}^1] & \text{if } g_t(k-1) \leq g_{tm} \\ [\theta_1^2 & \theta_2^2 & \dots & \theta_n^2 & \theta_{n+1}^2 & \theta_{n+2}^2] & \text{if } g_t(k-1) > g_{tm} \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

A.5 Parameters of PWARX identified models

Table A.1 presents the identified parameters for each PWARX model formulated previously.

Table A.1. Parameters for PWARX models

Model	h_p^1		h_p^2		h_p^3		g_t	
Mode	1	2	1	2	1	2	1	2
θ_1	0.58	0.65	0.58	0.38	0.51	0.71	0.87	0.83
θ_2	0.01	0.01	0.09	0.27	0.36	0.17	0.04	0.01
θ_3	-0.40	-0.32	0.12	0.21	0.26	0.17	-0.04	-0.01
θ_4	0.42	0.28	-0.34	-0.31	-0.44	-0.30	-0.02	-0.01
θ_5	-0.15	0.25	0.34	0.08	0.71	0.62	-0.03	-0.01
θ_6	-	-	0.08	1.32	-	-	0.39	0.24
h_m [m]	4.05		4.27		4.35		-	
g_{tm} [%]	-		-		-		0.5	

Appendix B. NOMENCLATURE

i	Cell number index
j	Mineral class index, high and low
k	Granulometry number index
δ_1^i	Auxiliary variable 1
δ_2^i	Auxiliary variable 2
h_p^i	Pulp level
h_e^i	Froth height
h_{max}^i	Maximum height available of a cell
m_p^{ijk}	Mineral mass for pulp phase
m_e^{ijk}	Mineral mass for froth phase
M_f^{ijk}	Feed mas flow
M_t^{ijk}	Tail mass flow
M_c^{ijk}	Concentrate mass flow
Q_f^i	Pulp feed volumetric flow
Q_t^i	Pulp tail volumetric flow
Q_c^i	Concentrate volumetric flow
A^i	Area of the cell
v^i	Position of the output control valve
α_p^{ijk}	Collection rate constant
α_e^{ijk}	Drainage rate constant
α_t^{ijk}	Tail tuning constant
α_c^{ijk}	Concentrate tuning constant
Δh^i	Height difference between two cells
V_p^i	Volume of pulp phase
V_e^i	Volume of froth phase
ϵ_p^i	Air hold-up of pulp phase
ϵ_e^i	Air hold-up of froth phase
g_f^i	feed grade
g_t^i	Tail grade
g_c^i	Concentrate grade
g_{cp}^j	Chalcopiryste grade in each class
g_{cu}	Cooper grade
Q_{col}	Collector volumetric flow
Q_{esp}	Foaming volumetric flow
R	Mineral recovery
N	Prediction horizon
Q	Tail grade weight of control strategy
R, P, S	Valve weights of control strategy
$\bar{h}_p^i$	Upper limit to pulp level
$\underline{h}_p^i$	Lower limit to pulp level
h	Sample time control strategy