PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA

CARACTERIZACIÓN DEL COMPORTAMIENTO MECÁNICO DE UN TERMOPLÁSTICO REFORZADO CON FIBRAS

DANILO EDIR WIMMER DEL SOLAR

Tesis para optar al grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Profesor Supervisor:
DIEGO JAVIER CELENTANO

Santiago de Chile, Agosto, 2012

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

CARACTERIZACIÓN DEL COMPORTAMIENTO MECÁNICO DE UN TERMOPLÁSTICO REFORZADO CON FIBRAS

DANILO EDIR WIMMER DEL SOLAR

Tesis presentada a la Comisión integrada por los profesores:

DIEGO JAVIER CELENTANO

IGNACIO LIRA CANGUILHEM

ARTURO MENESES GONZÁLEZ

FRANCO PEDRESCHI PLASENCIA

Para completar las exigencias del grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Santiago de Chile, Agosto, 2012

A Marisol, Jonathan, Héctor, María José y amigos que siempre me han apoyado.

AGRADECIMIENTOS

Mis más sinceros agradecimientos a mi profesor supervisor, Diego Celentano, por su gran disposición y entrega en este trabajo y por su trato siempre cordial y cercano. Quisiera agradecer también a: Patricio Pérez por su ayuda brindada en los ensayos mecánicos; Luis Flores y al resto del taller mecánico por colaborar en la fabricación de probetas; Loreto Muñoz por su ayuda en la obtención de imágenes SEM del material; Don Carlos y el taller de estructuras por colaborar con el ensayo del tubo; Arturo Meneses y la gente de Krah por facilitar sus instalaciones y material para el estudio; y a los distintos autores que me enviaron sus trabajos desinteresadamente. Finalmente agradecer a María José por su tiempo y cariño, y a mi familia por el apoyo y amor incondicional y por brindarme la oportunidad de estudiar.

INDICE GENERAL

Pág.

DEDICATORIA ii

AGRADECIMIENTOS iii

INDICE DE TABLAS vii

INDICE DE FIGURAS viii

RESUMEN viii

ABSTRACT xiv

1. INTRODUCCIÓN 1
   - 1.1 Presentación del problema 1
   - 1.2 Motivación 2
   - 1.3 Hipótesis y objetivos 3
   - 1.4 Alcances de la investigación 3
   - 1.5 Contenido 4

2. TEORÍA Y ANTECEDENTES 5
   - 2.1 Polietileno 5
   - 2.1.1 Morfología 6
   - 2.1.2 Polietileno de alta densidad (HDPE) 9
   - 2.2 Materiales compuestos 10
   - 2.2.1 Comportamiento micro-mecánico 10
   - 2.2.2 Comportamiento macro-mecánico 16
   - 2.2.3 Modelos reológicos 21
   - 2.3 Criterios de Fractura 30

3. PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL 33
   - 3.1 Material 33
   - 3.2 Probetas 34
   - 3.3 Instrumentos de ensayos mecánicos 34
   - 3.4 Ensayos mecánicos 36

3.5 Datos experimentales 36
3.5.1 Ensayo de tracción hasta fractura 36
3.5.2 Ensayo de carga y descarga 40
3.5.3 Relación entre la tasa de esfuerzo y el esfuerzo 44
3.5.4 Módulo de Poisson 47
3.6 Otros ensayos 49
3.7 Microscopía electrónica de barrido (SEM) 54

4. CARACTERIZACIÓN VISCOELÁSTICA DEL MATERIAL 60
4.1 Supuestos, limitaciones y alcances del modelo 60
4.2 Análisis preliminar del efecto viscoso 62
4.3 Ley de Tensión-Deformación 65
4.4 Modelo de laminado viscoelástico tridimensional 66
4.4.1 Componente elástica del modelo 66
4.4.2 Componente viscosa modelo 68
4.5 Procedimiento para la obtención de los parámetros del modelo 72
4.6 Ajustes del modelo 76
4.7 Discusión 86

5. SIMULACIÓN Y VALIDACIÓN DEL MODELO 89
5.1 Ensayo de flexión de carga y descarga 89
5.1.1 Motivación 89
5.1.2 Objetivos 89
5.1.3 Probeta 89
5.1.4 Montaje 90
5.1.5 Resultados y discusión 93
5.2 Simulación 97
5.3 Discusión 103

6. CONCLUSIONES 104

BIBLIOGRAFíA 106

A N E X O S 110

ANEXO A) CARACTERIZACIÓN UTILIZANDO OTROS MODELOS 111

ANEXO B) ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE LA SIMULACIÓN…..……122

ANEXO C) MODELO Y DATOS PARA APLICAR EL MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS EN AMPL……...….127

ANEXO D)CÓDIGO MATLAB PARA ROTAR LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA LÁMINA EN THETA GRADOS 135

INDICE DE TABLAS

Pág.

Tabla 4-1: Parámetros de ajuste del modelo unidimensional de Maxwell para probetas longitudinales 63
Tabla 4-2: Parámetros de ajuste del modelo unidimensional de Maxwell para probetas transversales 63
Tabla 4-3: Parámetros de la lámina encontrados según el modelo de laminado viscoelástico tridimensional 76
Tabla 5-1: Características geométricas y dimensiones del tubo ensayado. 90
Tabla 5-2: Parámetros de ajuste utilizados en las simulaciones. 99
Tabla A-1: Propiedades de la lámina obtenidas mediante mínimos cuadrados 114
Tabla A-2: Parámetros de modelo unidimensional de Maxwell para ensayo de tracción uniaxial con probetas longitudinales y transversales 117
Tabla B-1: Características geométricas y dimensiones del tubo simulado……122
Tabla B-2: Parámetros de ajuste utilizados en las simulaciones……122

INDICE DE FIGURAS

Pág.

Figura 1-1: Esquema del método de conformado del tubo. 2
Figura 2-1 Esquema de morfología del polietileno 6
Figura 2-2 Esquema idealizado de una lámina de polietileno 7
Figura 2-3 Esquema de una esferulita 8
Figura 2-4: Esquema de conexiones interlaminares 9
Figura 2-5 Esquema del modelo propuesto por Oshmyan et al. (2004). 25
Figura 2-6 Esquema del modelo propuesto por Oshmyan et al. (2006) 28
Figura 3-1: Diagrama esquemático de los 33
Figura 3-2: Forma de probeta utilizada para los diferentes ensayos. 34
Figura 3-3: Máquina Instron utilizada en los ensayos de tracción y ensayos cíclicos. 35
Figura 3-4: Extensómetro utilizado para medir la deformación en los ensayos de tracción y ensayos cíclicos 35
Figura 3-5: Probeta longitudinal fracturada. 37
Figura 3-6: Probeta transversal fracturada. En la imagen inferior, el extremo fracturado se señala con un círculo semi-continuo 38
Figura 3-7: Ensayo de tracción hasta fractura a distintas velocidades con probetas longitudinales. 39
Figura 3-8: Ensayo de tracción hasta fractura a distintas velocidades con probetas transversales. 39
Figura 3-9: Ensayos de tracción de los dos tipos de probetas a distintas velocidades. 40
Figura 3-10: Ensayo cíclico de carga y descarga con probetas longitudinales. 42
Figura 3-11: Ensayo cíclico de carga y descarga con probetas transversales. 43
Figura 3-12: Detalle de la plasticidad aparente en los ciclos 2 al 5 del ensayo cíclico a 1mm/min con probeta transversal. 44
Figura 3-13: Relación entre la tasa de esfuerzo y el esfuerzo en probetas longitudinales 45

Figura 3-14: Relación entre la tasa de esfuerzo y el esfuerzo en probetas transversales. 46
Figura 3-15: Módulo de Poisson LT (el subíndice LT se refiere a la compresión en la dirección longitudinal a medida que la probeta se carga en dirección transversal). 48
Figura 3-16: Módulo de Poisson RL (el subíndice RL se refiere a la compresión en la dirección radial a medida que la probeta se carga en dirección longitudinal). 48
Figura 3-17: Disminución de la deformación una vez descargada y dejada libre la probeta longitudinal. 49
Figura 3-18: Deformación y esfuerzo versus tiempo para observar la disminución de la deformación una vez descargada y dejada libre la probeta longitudinal. En a) ensayo completo y en b) desde el momento en que la probeta quedó libre. 50
Figura 3-19: Disminución de la deformación una vez descargada y dejada libre la probeta transversal 51
Figura 3-20: Deformación y esfuerzo versus tiempo para observar la disminución de la deformación una vez descargada y dejada libre la probeta transversal. En a) ensayo completo y en b) desde el momento en que la probeta quedó libre. 52
Figura 3-21: Relajación de carga y de descarga con probeta longitudinal. 53
Figura 3-22: Relajación de carga y descarga con probeta transversal 54
Figura 3-23: Distintas vistas de una muestra de probeta longitudinal analizada mediante SEM. 55
Figura 3-24: Distintas vistas de una muestra de probeta transversal analizada mediante SEM. 55
Figura 3-25: Máquina JEOL utilizada para obtener las imágenes SEM. 56
Figura 3-26: Micrografía SEM de la superficie de fractura de una probeta a) longitudinal ensayada a 10mm/min y b) transversal ensayada a 10mm/min. Aumento de 35X 56
Figura 3-27: Micrografía SEM de la superficie de fractura de una probeta a) longitudinal ensayada a 1mm/min y b) transversal ensayada a 1mm/min. Aumento de 100X 57
Figura 3-28: Micrografía SEM de la superficie de fractura de una probeta a) longitudinal ensayada a 10mm/min y b) transversal ensayada a 10mm/min. Aumento de 200X 58
Figura 4-1: Viscosidad versus tasa de deformación en escala logarítmica 64

Figura 4-2: Arriba, esquema de una lámina de polietileno con fibra de vidrio corta; abajo, esquema del modelo propuesto para caracterizar la lámina. 70
Figura 4-3: Analogía entre el modelo de Maxwell (izquierda) y el modelo propuesto para caracterizar la lámina (derecha). 71
Figura 4-4: Esquemas de laminados. Izquierda: Laminado de 3 láminas ordenadas de a 90°. Derecha: laminado de 4 láminas ordenadas de a 45°. 71
Figura 4-5: Ajuste del modelo para probetas longitudinales utilizando Ajuste 1. 78
Figura 4-6: Ajuste del modelo para probetas transversales utilizando Ajuste 1. 79
Figura 4-7: Datos experimentales de los ensayos de tracción con probetas longitudinales y ajustes logrados con el modelo de laminado viscoelástico para distintas velocidades de desplazamiento de travesaño: a) 10mm/min; b) 1mm/min; c) 0.1mm/min. Se utilizó el Ajuste 1. 80
Figura 4-8: Datos experimentales de los ensayos de tracción con probetas transversales y ajustes logrados con el modelo de laminado viscoelástico para distintas velocidades de desplazamiento de travesaño: a) 10mm/min; b) 1mm/min; c) 0.1mm/min. Se utilizó el Ajuste1. 81
Figura 4-9: Ajuste del modelo para probetas longitudinales utilizandoAjuste 2. 82
Figura 4-10: Ajuste del modelo para probetas transversales utilizando Ajuste 2. 83
Figura 4-11: Datos experimentales de los ensayos de tracción con probetas longitudinales y ajustes logrados con el modelo de laminado viscoelástico para distintas velocidades de desplazamiento de travesaño: a) 10mm/min; b) 1mm/min; c) 0.1mm/min. Se utilizó el Ajuste 2. 84
Figura 4-12: Datos experimentales de los ensayos de tracción con probetas transversales y ajustes logrados con el modelo de laminado viscoelástico para distintas velocidades de desplazamiento de travesaño: a) 10mm/min; b) 1mm/min; c) 0.1mm/min. Se utilizó el Ajuste 2. 85
Figura 5-1: Ensayo de flexión del tubo. 91
Figura 5-2: Apoyo capaz de girar sobre sí mismo. 92

Figura 5-3: Transistores utilizados para medir el desplazamiento de la superficie superior del tubo. 92
Figura 5-4: Transistor utilizado para medir el desplazamiento de la superficie inferior del tubo. 93
Figura 5-5: Resultados del ensayo de flexión del tubo real. Carga y desplazamiento en función del tiempo. 95
Figura 5-6: Curva carga-desplazamiento de la superficie superior del tubo. 96
Figura 5-7: Curva carga-desplazamiento de la superficie inferior del tubo. 96
Figura 5-8: Mallado del tubo utilizado en las simulaciones. 98
Figura 5-9: Curva de desplazamiento-tiempo impuesta en la simulación. 99
Figura 5-10: Curva carga-tiempo del punzón. Resultados experimentales y simulados con parámetros de Ajuste 1. 100
Figura 5-11: Curva carga-tiempo del punzón. Resultados experimentales y simulados con parámetros de Ajuste 2. 100
Figura 5-12: Esfuerzos de Von-Mises en MPa. Condición final. Tiempo 1000 s. 101
Figura 5-13: Deformación viscosa equivalente. Condición final. Tiempo 1000 s. 102
Figura A-1: Esfuerzo versus deformación longitudinal (eje X) cuando la probeta es traccionada en dirección longitudinal, y ajuste obtenido con los parámetros de lámina mostrados en la Tabla A-1 115
Figura A-2: Esfuerzo versus deformación transversal (eje Y) cuando la probeta es traccionada en dirección transversal, y ajuste obtenido con los parámetros de lámina mostrados en la Tabla A-1 116
Figura A-3: Ajuste viscoelástico uniaxial de probeta paralela cargada con velocidad de desplazamiento de travesaño de: a) 1mm/min; b) 0.1mm/min. 118
Figura A-4: Ajuste viscoelástico uniaxial de probeta transversal cargada con una velocidad de desplazamiento del travesaño de: a) 20mm/min; b) 1mm(min). 119
Figura A-5: Respuesta viscoelástica del modelo de Maxwell con los parámetros de la Tabla A-2 para las probetas paralelas cargadas a una velocidad de desplazamiento de travesaño de: a) 1mm/min; b) 0.1mm/min. 120

Figura A-6: Respuesta viscoelástica del modelo de Maxwell con los parámetros de la Tabla A-2 para las probetas transversales cargadas a una velocidad de desplazamiento de travesaño de: a) 20mm/min; b) 1mm/min 121
Figura B-1: Curva carga-tiempo del punzón. Resultados experimentales y simulados con parámetros de Ajuste 1……. 123
Figura B-2: Curva carga-tiempo del punzón. Resultados experimentales y simulados con parámetros de Ajuste 2……. 123
Figura B-3: Esfuerzos de von-Mises. Vista superior. Tiempo 350 s…….…..……. 124
Figura B-4: Esfuerzos de von-Mises. Vista lateral. Tiempo 350 s..……..……. 124
Figura B-5: Desplazamiento nodal en dirección Y. Tiempo 350 s….…….……. 125
Figura B-6: Desplazamiento nodal total. Tiempo 350 s……..…….……. 125

RESUMEN

En este trabajo se realizó una caracterización del comportamiento mecánico a corto plazo de un material compuesto de polietileno de alta densidad con fibra de vidrio corta. Este material es utilizado en la fabricación de tubos mediante enrollamiento helicoidal. El objetivo fue desarrollar un modelo viscoelástico simple capaz de ser implementado en la industria para así mejorar el proceso de conformado del tubo y predecir su respuesta a cargas en el corto plazo.

En la fase experimental se realizaron ensayos de tracción uniaxial carga-descarga a probetas longitudinales y transversales a tres velocidades de desplazamiento de travesaño distintas (10, 1 y 0.1 mm/min). También se obtuvieron imágenes SEM para confirmar que la orientación de las fibras en el polietileno preferentemente es en la dirección del flujo en el proceso de conformado.

De los resultados experimentales se propuso una ley constitutiva basada en el modelo de Maxwell que considera un cuerpo elástico transversalmente isótropo en serie con un elemento viscoso. Al analizar los datos experimentales, se desarrolló una ley de viscosidad logarítmica que define la viscosidad como función de la tasa de deformación total. Esta relación mejoró considerablemente el ajuste agregando sólo un parámetro, resultando un total de siete parámetros.

La caracterización resultó bien, particularmente en la carga. Además, el método propuesto posee cuatro cualidades que lo acercan a la industria: requiere probetas en sólo dos direcciones; requiere al menos dos velocidades de ensayo; la función utilizada en el método de los mínimos cuadrados es lineal y; una vez conocidas las propiedades de la lámina se pueden determinar las propiedades de cualquier laminado.

Respecto a la simulación del ensayo de flexión del tubo, se observó un buen ajuste entre los resultados numéricos y los experimentales en la curva carga-tiempo del punzón, captando bien la respuesta viscoelástica del material.

Palabras Claves: Polietileno, fibra de vidrio, material compuesto, viscoelasticidad, simulación numérica.

ABSTRACT

In this work a characterization of the short-term mechanical behavior of a composite material of polyethylene and short glass fiber was developed. The material is used in the fabrication of tubes by helical winding. The objective was developing a simple viscoelastic model able of being implemented in the industry in order to improve the forming process of the tube and predict its short-term response.

In the experimental work, loading-unloading uniaxial tension tests were performed to longitudinal and transverse specimens at three different crosshead displacement rates (10, 1, 0.1 mm/min). SEM images were obtained to confirm that the fibers orientation in the polyethylene is preferably in flow direction in the forming process.

From experimental results a constitutive law based on Maxwell model, considering a transverse isotropic elastic body in series with a viscous body, was proposed.

By analyzing the experimental data, a logarithmic viscous law, that defines the viscosity as a function of the total strain rate, was developed. This relationship improved considerably the fitting, adding just one parameter, resulting in a seven parameters model.

The characterization was good, particularly in the loading. Furthermore, the proposed method has four qualities that make it closer to the industry: it requires specimens in only two directions; requires at least two test speeds; the function used in the least squares method is linear and; once the lamina properties are known, any laminate properties can be known.

Regarding the simulation of the flexion test of the tube, good fittings were observed between its results and the experimental ones in the load-time curve of the punch, capturing well the viscoelastic response of the material.

Keywords: Polyethylene, glass fiber, composite material, viscoelasticity, numeric simulation.

1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta el marco general en el que se desarrolla la tesis, es decir, se presenta el problema a estudiar y qué motivó su estudio, para luego presentar la hipótesis que se desea comprobar y los objetivos que se desean cumplir con la investigación. Posteriormente se definen los alcances de la tesis, que indican qué aspectos se dejarán fuera de la investigación para concluir con los contenidos que se desarrollan en los capítulos siguientes.

1.1 Presentación del problema

Los materiales compuestos han ido siendo con el tiempo cada vez más utilizados en la industria gracias a las ventajas comparativas de costos y propiedades físicas y mecánicas que éstos poseen. Actualmente existen muchos estudios enfocados a la caracterización de la respuesta mecánica de los materiales compuestos utilizando modelos micro-mecánicos predictivos o con parámetros de ajuste, teoría de laminado, modelos visco-elásticos y modelos visco-elasto-plásticos. Los dos últimos logran buenos ajustes pero con el inconveniente de que son complejos y/o con un gran número de parámetros que los alejan de la interpretación física y de la aplicación en la industria; los primeros, en cambio, son mucho más simples pero, en general, consideran sólo elasticidad.

El material compuesto estudiado en la presente tesis es utilizado en la fabricación de tubos mediante enrollado helicoidal. El sistema para este método constructivo cuenta, en términos generales, con una válvula gravimétrica, un extrusor y un mandril, ver Figura 1-1. El polietileno y la fibra de vidrio pasan a través de la válvula gravimétrica para obtener los porcentajes en peso deseados para la composición del material. Luego, las materias primas son calentadas por sobre la temperatura de fusión del polietileno para lograr una mezcla entre éste con la fibra que continúa en estado sólido. Así, ingresan al extrusor de donde se obtiene la lámina, unidad constructiva del tubo. La lámina se adosa al mandril cilíndrico con radio externo igual al radio interno deseado para el tubo. El mandril tiene una velocidad de giro y una velocidad de avance que cambia de sentido tantas veces como capas tenga el tubo, de modo que la lámina proveniente del extrusor

va conformando el tubo helicoidalmente y por capas. Este proceso explica la naturaleza laminar del tubo.

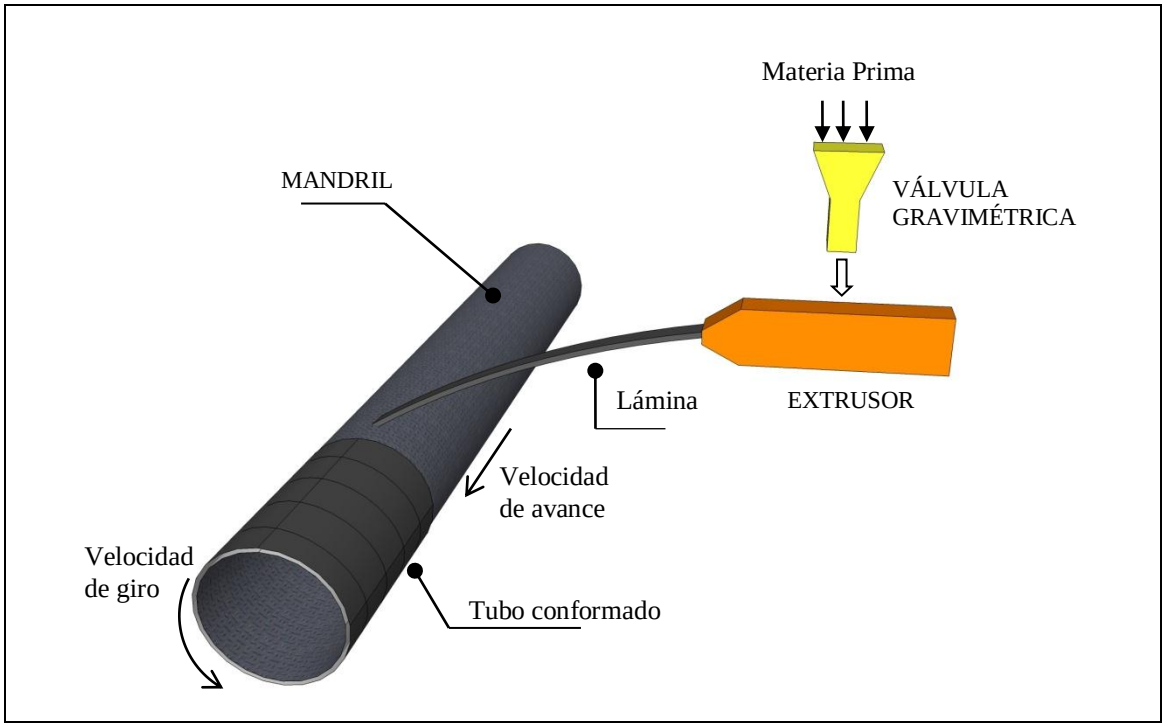


Figura 1-1: Esquema del método de conformado del tubo.

La relevancia de esta tesis es que busca, mediante un modelo visco-elástico de Maxwell modificado, caracterizar el comportamiento mecánico a corto plazo del materi4al, tal que sea de fácil comprensión y con posibilidad de aplicación en la industria. Con esto además, se dispondrá de un método para predecir las propiedades mecánicas que tendrá el tubo en operación bajo condiciones de carga de servicio. ambientales normales.

1.2 Motivación

Este estudio se vio motivado por la necesidad existente en la industria de conocer las propiedades mecánicas a corto plazo de las piezas y tubos fabricados con el material compuesto, ya que actualmente no existe un método predictivo de las propiedades mecánicas que tendrá el tubo dados la cantidad de fibra de vidrio, el ángulo de las capas

respecto al eje principal de tubo y el número de capas. Actualmente el procedimiento es inverso, de acuerdo a la experiencia i) se fabrica el tubo o la pieza específica, ii) luego se saca una muestra de éste y iii) finalmente se realiza un ensayo de tracción de modo que cumpla con la norma establecida. Dicho esto, lo que se busca es conocer las propiedades mecánicas de los tubos a priori, es decir, antes de que éste sea construido, de modo de escoger el diseño que mejor responda a las solicitaciones que éste tendrá en operación.

1.3 Hipótesis y objetivos

La hipótesis de este trabajo es que el comportamiento mecánico a corto plazo del material compuesto de polietileno con fibra de vidrio se puede representar mediante un modelo visco-elástico de Maxwell modificado con utilidad práctica para la industria.

El objetivo general de esta tesis es caracterizar mecánicamente el material compuesto para que éste pueda ser modelado mediante el método de los elementos finitos y para que el proceso de conformado de las piezas se optimice y se pueda predecir su respuesta a las cargas en el corto plazo. Esto, con el fin último de evitar fallas del material en etapas previas a la utilización, como por ejemplo el montaje y ubicación del tubo. Los objetivos específicos son:

i) Realizar ensayos de tracción de probetas obtenidas de un tubo para conocer la relación tensión-deformación del material.

ii) Ajustar los parámetros del modelo propuesto a los datos experimentales, ya que éstos son necesarios para el modelo constitutivo del material.

iii) Simular piezas fabricadas con el material en estudio bajo ciertas cargas de operación mediante el método de los elementos finitos.

iv) Comparar los resultados de la simulación con datos experimentales para validar el modelo y conocer y analizar su alcance y limitaciones

1.4 Alcances de la investigación

Quedan fuera del alcance de la investigación los siguientes aspectos:

i) Efectos de largo plazo del material. Esto, pues la caracterización busca, como fin último, evitar fallas del material en etapas donde está sujeto a cargas de corto plazo.

ii) Efectos térmicos en las propiedades del material.

iii) Efectos ambientales, como la humedad, en las propiedades del material.

1.5 Contenido

Los siguientes apartados de la tesis tienen los siguientes temas:

- Capítulo 2: Presenta el estado del arte en polímeros y materiales compuestos.
- Capítulo 3: Describe los procedimientos, resultados, discusión y análisis de los experimentos llevados a cabo y los datos obtenidos.
- Capítulo 4: Desarrolla y presenta el modelo propuesto para caracterizar el material.
- Capítulo 5: Presenta la modelación de un tubo mediante el método de los elementos finitos y se valida el modelo comparando la modelación con el experimento realizado a un tubo real.
- Capítulo 6: Resume las principales conclusiones del trabajo.

2. TEORÍA Y ANTECEDENTES

Esta parte de la tesis contiene distintos estudios que se han llevado a cabo, tanto en polímeros como en materiales compuestos, y antecedentes que sirvieron como base para entender el comportamiento del material y desarrollar un modelo que lo caracterice.

2.1 Polietileno

El polietileno (PE), químicamente el polímero más simple, es hecho mediante la polimerización de etileno:

$$nCH_2 = CH_2 \rightarrow \begin{bmatrix} H & H \\ | & | \\ -C & C- \\ | & | \\ H & H \end{bmatrix}_n$$

El tipo de polietileno depende del tamaño y la forma de las moléculas de polietileno que conforman el sólido y las condiciones de preparación. En cuanto al tamaño y forma de las moléculas, los factores más importantes son el grado de ramificación de las moléculas y el peso molecular de éstas. Algunos tipos son: polietileno de alta densidad (HDPE- High density polyethylene), polietileno de baja densidad (LDPE – Low density polyethylene), polietileno lineal de baja densidad (LLDPE – Linear low density polyethylene). De manera breve, y siempre con respecto a los otros tipos de PE, se puede decir que: el HDPE está compuesto por moléculas poco ramificadas y de bajo peso molecular; el LDPE está compuesto por moléculas muy ramificadas y de alto peso molecular; y el LLDPE está compuesto por moléculas de alto peso molecular y poco ramificadas. Las características recién comentadas, para el caso del HDPE, permiten que las moléculas se ordenen de modo compacto obteniendo un polímero de alta densidad, no así el LDPE y el LLDPE que ya sea por el tamaño o ramificación de sus moléculas no son capaces de lograr una organización compacta por lo que se obtienen polímeros de baja densidad.

En lo que sigue, el trabajo se centrara básicamente en el HDPE, ya que es justamente con este tipo de polietileno con el que se trabaja en la investigación. Sin embargo y por motivos comparativos, a veces se comentará acerca del LDPE.

2.1.1 Morfología

El término morfología es utilizado para describir la organización de las moléculas en el estado sólido o derretido. En estado sólido, el polietileno existe con una morfología semicristalina compuesta por regiones cristalinas inmersas en una matriz no-cristalina. Actualmente se puede considerar al polietileno como un material de tres fases: cristalina, interfase y no-cristalina, ver Figura 2-1. Cada una de estas fases se distingue principalmente por el grado de orientación y orden que adoptan las moléculas.

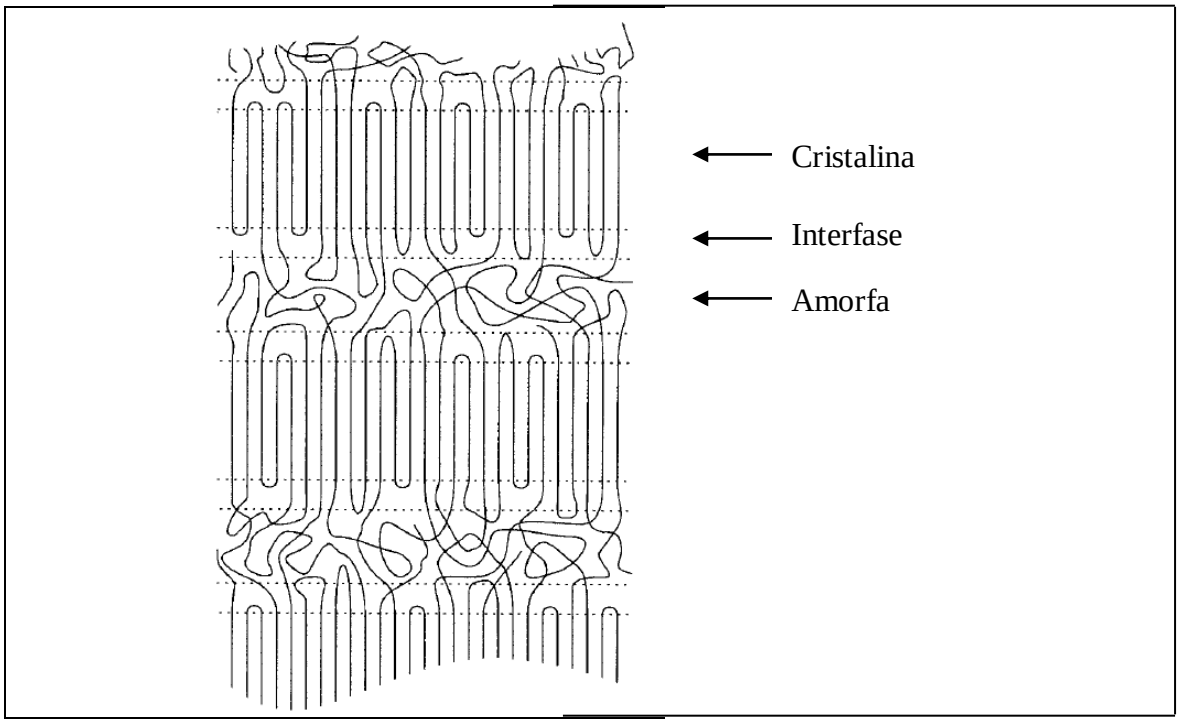


Figura 2-1 Esquema de morfología del polietileno

a) Estructura cristalina

Esta fase consiste en cristalitos (*crystallites*), unidad más pequeña que forma la región cristalina, en las cuales las cadenas de polietileno se ordenan y empaquetan en arreglos

regulares. Si el cristalito crece de modo que dos de sus dimensiones son mucho más grandes que la tercera se le llama lámina (*lamellae*), ver Figura 2-2. La formación de estructuras cristalinas se ve facilitada cuando las moléculas de polietileno son de bajo peso molecular y poco ramificadas, como es el caso del HDPE.

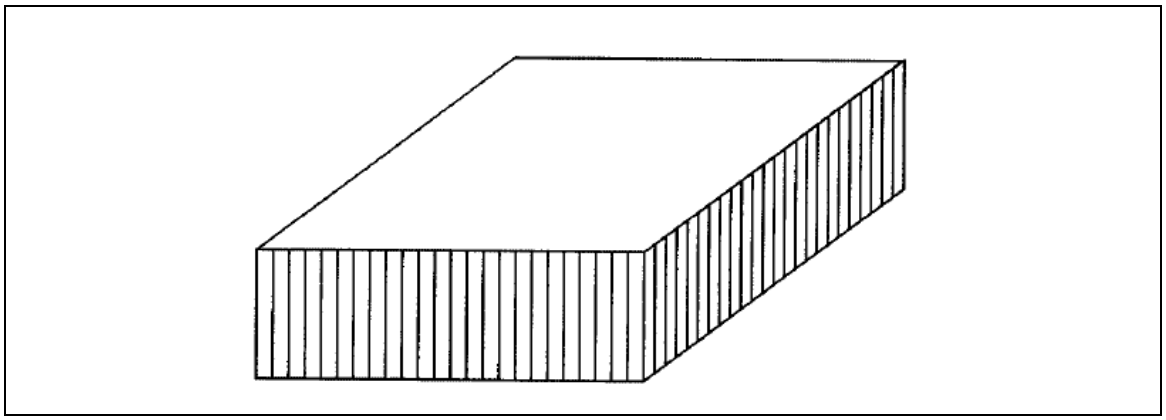


Figura 2-2 Esquema idealizado de una lámina de polietileno

b) Estructura no-cristalina

La estructura no-cristalina está formada por aquellas cadenas o tramos de cadenas de polietileno desordenadas. Dado que la molécula de polietileno es varias veces más grande que el tamaño de la fase cristalina y no-cristalina, es que ésta puede pertenecer a más de un cristalito, pasando por la fase no-cristalina y uniendo a ambos cristalitos, formando *tie chains*; la molécula también puede salir y volver a entrar a una zona cristalina, de modo que el tramo que sale y luego entra pasa a formar parte de la estructura no-cristalina formando *loops*; o bien puede salir y no volver a ingresar a un cristalito formando *cilia*.

c) Interfase

La interfase es la zona de transición entre una estructura ordenada y una desordenada. No existe una línea demarcada definiendo la interfase, por lo que se debe definir como una zona parcialmente ordenada entre los cristalitos y la zona desordenada.

d) Esferulitas

La esferulita (*spherulite*) es una organización supermolecular, la cual consiste en un conjunto de láminas que crecen radialmente desde un núcleo común, ver Figura 2-3. Ésta cuenta con regiones cristalinas y no-cristalinas. Si la esferulita se desarrolla aisladamente, ésta crece en forma esférica, pero en general muchas de estas estructuras se desarrollan simultáneamente y en sus proximidades, por lo que ellas chocan entre sí limitando su crecimiento.

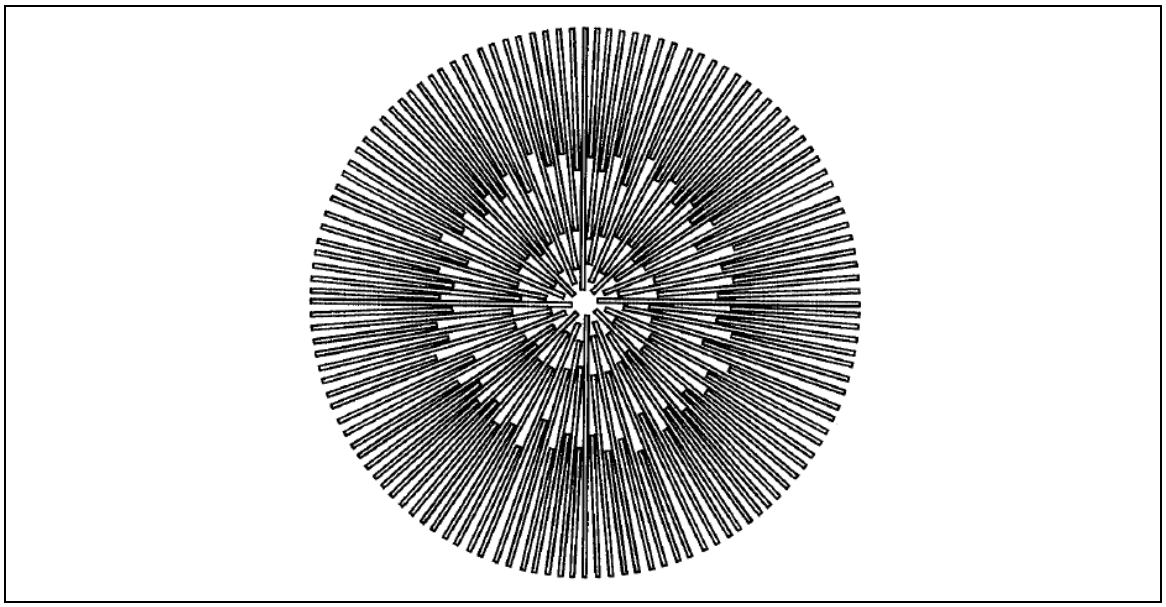


Figura 2-3 Esquema de una esferulita

e) Conexiones interlaminares

Consiste en uniones entre cristalitos o láminas vecinas. Estas uniones son debido a *tie chains* y a *loops* enredados. Estas uniones son de gran importancia ya que transmiten las fuerzas de una lámina a otra. Además determinan o influencian muchas propiedades mecánicas del polietileno como la ductilidad, la tenacidad y el módulo de elasticidad. Sin la existencia de conexiones interlaminares el polietileno sería un material frágil y de poca resistencia.

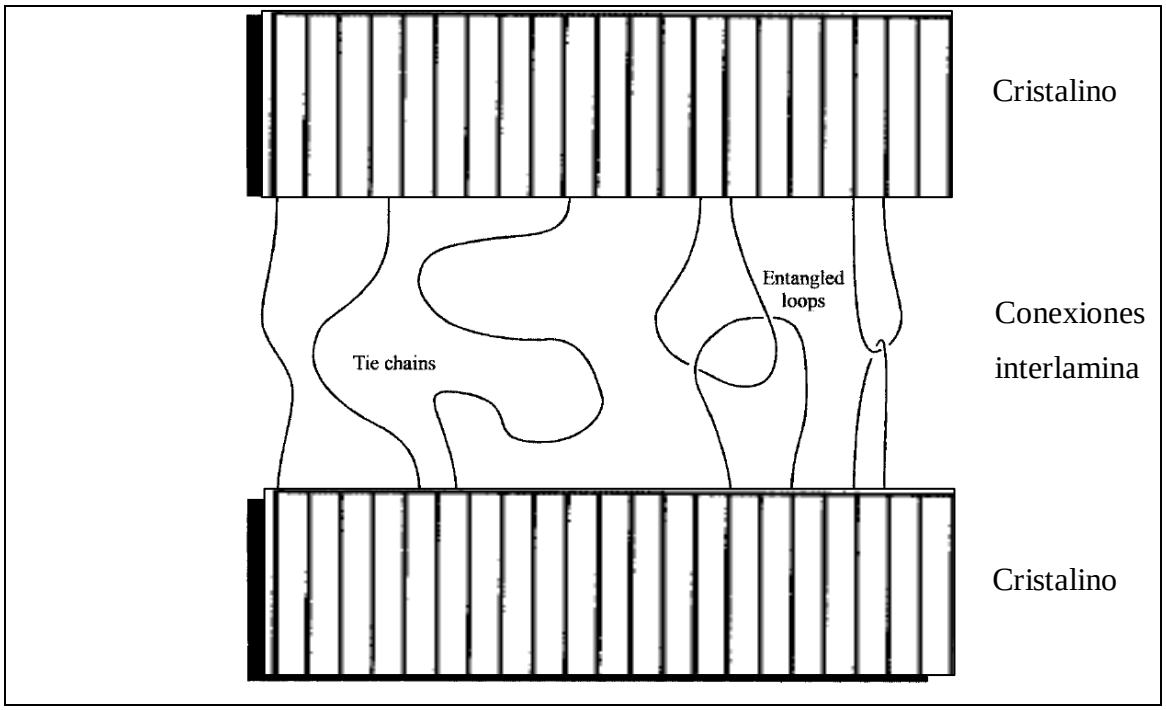


Figura 2-4: Esquema de conexiones interlaminares

Para mayor información sobre polietileno, ver referencia (Peacock, 2000).

□

2.1.2 Polietileno de alta densidad (HDPE)

Es químicamente la estructura más cercana a polietileno puro. Éste consiste principalmente de moléculas no ramificadas con muy pocos defectos como para modificar su linealidad lo que le permite alcanzar un alto grado de cristalinidad, resultando en una resina de alta densidad (en relación a los otros tipos de polietileno), la cual puede estar en el rango aproximado de 0.94 – 0.97 g/cm^3.

Respecto a los mecanismos de deformación del polietileno, es bien sabido que la morfología del polietileno de alta densidad cambia a medida que éste se deforma plásticamente (Song, 1990; Bartczak, 1992; Galeski, 1992), involucrando varios mecanismos de deformación de las fases cristalinas y amorfas, siendo algunos de ellos el deslizamiento entre planos cristalográficos, deslizamiento interlaminar, separación

laminar, etc. También se ha visto la formación de vacíos en el polietileno a medida que éste se deforma (Pawlak, 2005; Pawlak 2007), fenómeno conocido como cavitación. No obstante, es importante señalar que estos mecanismos de deformación ocurren a deformaciones por sobre el 10% o para tensiones superiores al límite de fluencia.

2.2 Materiales compuestos

Para materiales compuestos, ya sean de fibras largas o cortas, el problema de encontrar o conocer sus propiedades mecánicas puede ser abordado de distintas maneras. Se distinguen básicamente 3 modos de abordar el problema: i) mediante el estudio del comportamiento micro-mecánico del compuesto; ii) mediante el estudio del comportamiento macro-mecánico del compuesto; y iii) mediante modelos reológicos.

Los modelos micro-mecánicos distinguen que el material está compuesto por dos o más constituyentes y, en general buscan responder a la siguiente pregunta: ¿Cuál es la relación entre las propiedades del material compuesto y las propiedades de los distintos constituyentes o fases? Al contrario, a los modelos macro-mecánicos no les interesa si el material está compuesto por uno, dos o más constituyentes, sino que ellos buscan responder a preguntas como: ¿cuáles son las características del material? ó ¿cómo éste responde a un esfuerzo aplicado? Los modelos reológicos, que reproducen la sensibilidad del material a la deformación, la tasa de deformación y al nivel de esfuerzo, pueden tener características tanto macroscópicas como microscópicas.

2.2.1 Comportamiento micro-mecánico

Al estudiar el comportamiento micro-mecánico de un material se busca conocer y entender cómo influye la relación y la interacción de los distintos componentes y/o fases en las propiedades de éste. Esto, para el caso de un polímero reforzado, requiere de un conocimiento de la matriz polimérica, de la fibra de refuerzo y de la interfase que relaciona la matriz con la fibra.

De la matriz polimérica ya se hizo una descripción en el apartado 2.1 debido a su compleja estructura, la variedad de polietilenos que se pueden lograr y por ser el

principal constituyente del material compuesto. Ahora, antes de describir los modelos micro-mecánicos, se dedicará un espacio a la fibra de vidrio y a la interfase fibra-matriz.

2.2.1.1 **Fibra de vidrio**

Existen varios tipos de fibras de vidrio pero todas están basadas en sílice, i.e. dióxido de silicio, SiO_2. Éste se puede derretir y mezclar con otros elementos para crear vidrios especiales. Las fibras de vidrio son producidas mediante extrusión de vidrio derretido a través de agujeros entre 1 o 2 mm de diámetro y luego estos filamentos son trefilados para producir fibras con un diámetro entre 5 y 15 μm. La resistencia de la fibra de vidrio es muy dependiente del tamaño de los defectos que ésta contenga, en general, ubicados en la superficie. La fibra de vidrio tipo E es la que mayormente se utiliza como refuerzo en materiales compuestos. Las fibras de vidrio presentan propiedades mecánicas isotrópicas debido a que sus cristales se orientan en todas las direcciones posibles sin dar preferencia a alguna orientación en particular que pueda condicionar su respuesta mecánica. El módulo de elasticidad de la fibra de vidrio está en el orden de los 72 GPa.

2.2.1.2 **Interfase fibra-matriz**

La interfase controla la interacción entre la matriz y la fibra (Piggot, 1987; Tselios, 1999; Zhang, 2000), por ende, es responsabilidad de ésta que los esfuerzos se transmitan entre uno y otro. Por lo tanto, la interfase es el principal factor que controla el rendimiento de un compuesto de fibras. Con el fin de asegurar una interfase fuerte que asegure una eficiente transferencia del esfuerzo es que a las fibras se las trata superficialmente con agentes promotores de adhesión. Para el caso de fibras de vidrio se utiliza generalmente un silano orgánico, cuyo mayor componente típicamente es γ-[(methacryloxy)propyl] –trihydroxysilane (γ-MPS). El modo en el que el agente de adhesión trabaja es generando enlaces, por un lado con la fibra, y por el otro con la matriz (Piggot, 1987). Una buena adhesión ayuda a que no se generen poros entre la fibra y la matriz debido a contracción o dilatación térmica y a esfuerzos externos.

2.2.1.3 **Modelos micro-mecánicos**

Ahora se presentarán los modelos micro-mecánicos más utilizados para compuestos de fibras largas y cortas (Fu, 1996; Jones, 1999; Joseph, 2003; Facca, 2006; Islam, 2011):

a) Ley de mezcla o modelo en paralelo

Es el modelo más simple disponible para predecir el módulo elástico de un material compuesto y está dado por:

$$E_c = E_f V_f + E_m V_m \tag{2.1}$$

donde E_f y E_m son el módulo elástico de la fibra y de la matriz, respectivamente, y V_f y V_m son la fracción de volumen de la fibra y la matriz, respectivamente.

Esta relación se deriva al suponer que la fibra y la matriz se deforman de igual forma al estar sujetas a un esfuerzo y además supone una unión fibra-matriz perfecta, elástica y que no desliza. Funciona mejor para materiales compuestos de fibras largas, ya que en éstos no se producen concentraciones de esfuerzos en el final de la fibra, como en el caso de las fibras cortas.

Cabe señalar que la ley de mezclas puede ser utilizada como modelo para predecir cualquier propiedad X, como un ponderado de las propiedades X_i de los constituyentes de la muestra, de modo que, $X = \sum_i f_i \cdot X_i$ donde X es la propiedad a calcular y f_i y X_i son la fracción de volumen y la propiedad del elemento i, respectivamente.

b) Ley de mezcla inversa o modelo en serie

La ley de mezcla inversa es representada por la siguiente relación:

$$E_c = \frac{E_f E_m}{V_m E_f + V_f E_m} \tag{2.2}$$

donde E_f y E_m son el módulo elástico de la fibra y de la matriz, respectivamente, y V_f y V_m son la fracción de volumen de la fibra y la matriz, respectivamente.

Esta relación considera que la fibra y la matriz están sujetas al mismo esfuerzo cuando son sometidos a una fuerza externa. Esta configuración no puede ser considerada como

un modelo teórico que describe a los compuestos reforzados de fibra corta ya que básicamente es un arreglo de elementos (matriz y fibra en nuestro caso) conectados en serie.

c) Modelo de Hirsh

Este modelo es una combinación de los modelos en serie y paralelo y está dado por:

$$E_c = x(E_f V_f + E_m V_m) + (1-x)\frac{E_f E_m}{V_m E_f + V_f E_m} \tag{2.3}$$

donde E_f y E_m son el módulo elástico de la fibra y de la matriz, respectivamente, y V_f y V_m son la fracción de volumen de la fibra y la matriz, respectivamente, y x es un parámetro de ajuste que determina la transferencia de esfuerzo entre la fibra y la matriz. Se supone que los factores que controlan el valor de x son principalmente la orientación de las fibras, el largo de las fibras y el efecto de amplificación del esfuerzo al final de las fibras. Este modelo puede ser una representación de los materiales compuestos en los cuales la fibra es introducida en forma de una tela o tejido.

d) Modelo de Halpin-Tsai

El modelo de Halpin-Tsai ha sido ampliamente utilizado para predecir el módulo elástico en compuestos reforzados de fibra corta. Tiene una relación para el módulo longitudinal y otra para el módulo transversal. El modelo considera aspectos geométricos como el largo y el diámetro de la fibra. Se define como:

$$E_{cL} = E_m\left(\frac{1+\xi\eta_L V_f}{1-\eta_L V_f}\right) \tag{2.4}$$

$$E_{cT} = E_m\left(\frac{1-2\eta_T V_f}{1-\eta_T V_f}\right) \tag{2.5}$$

con

$$\eta_L = \frac{E_f / E_m - 1}{E_f / E_m + \xi} \tag{2.6}$$

y

$$\eta_T = \frac{E_f / E_m - 1}{E_f / E_m + 2} \tag{2.7}$$

y

$$\xi = \frac{2L}{D} \tag{2.8}$$

donde L y D son el largo y el diámetro o espesor de la fibra, respectivamente.

e) Modelo modificado de Halpin-Tsai

La modificación hecha el modelo de Halpin-Tsai fue cambiar el parámetro ξ por un parámetro ajustable ξ_{ad}.

$$E_c = E_m \left(\frac{1 + \xi_{ad} \eta V_f}{1 - \eta V_f} \right) \tag{2.9}$$

con

$$\eta = \frac{E_f / E_m - 1}{E_f / E_m + \xi_{ad}} \tag{2.10}$$

f) Modelo de Cox

De acuerdo a la teoría de Cox, el módulo de Young longitudinal está dado por:

$$E_c = E_f V_f \left(1 - \frac{\tanh(\beta / 2)}{\beta / 2} \right) + E_m V_m \tag{2.11}$$

con

$$\beta = \left(\frac{2\pi G_m}{E_f A_f \ln(R / r)} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.12}$$

donde r es el radio de la fibra, G_m el módulo de corte de la matriz, R la distancia centro a centro de las fibras y A_f el área de la fibra.

g) Modelo de Bowyer-Bader

Este modelo es representado por la siguiente relación:

$$E_c = E_m V_m + \chi_1 \chi_2 E_f V_f \tag{2.13}$$

donde χ_1 y χ_2 son factores de orientación de fibra y de largo de fibra, respectivamente y el producto $\chi_1\chi_2$ representa el factor de reforzamiento. Este modelo, al tener los factores χ_1 y χ_2, en general logra un buen ajuste al módulo elástico medido. El problema es poder predecir los parámetros de acuerdo a la geometría de las fibras y a la interfaz fibra-matriz, para que no sean parámetros de ajuste, sino parámetros intrínsecos al material compuesto. Así, si la fibra de vidrio es de largo uniforme L, se puede definir

$$\chi_2 = L/(2L_c) \text{ para } L<L_c \tag{2.14}$$

$$\chi_2 = 1 - L_c/(2L) \text{ para } L>L_c \tag{2.15}$$

donde L_c es el largo crítico de la fibra, que se define como el largo mínimo que debe tener ésta para permitir que la tensión en la fibra alcance el valor de su tensión de fractura por tracción. Por ende, si la fibra tiene una longitud menor a L_c, la superficie no será suficiente para tener una buena cohesión entre ésta y la matriz, por lo que la fibra no se romperá sino se deslizará y será arrancada de la matriz. La longitud crítica se define como:

$$L_c = \frac{r_f \sigma_{fu}}{\tau_i} \tag{2.16}$$

donde τ_i y r_f son el esfuerzo de corte interfacial entre la matriz y la fibra y el radio de la fibra, respectivamente. Kelly y Tyson propusieron un modelo considerando los efectos de las fibras más largas y más cortas que el largo crítico (Kelly, 1965). Luego a este modelo se le agregó el factor de orientación de fibra resultando el siguiente modelo:

$$\sigma_{cu} = \chi_1 \left[\sum_{Li=L\,min}^{Lc} V_i \sigma_{fu} \frac{L_i}{2L_c} + \sum_{Lj=Lc}^{L\,max} V_j \sigma_{fu} \left(1 - \frac{L_c}{2L_j} \right) \right] + V_m \sigma_m \tag{2.17}$$

donde los 2 términos del paréntesis toman en consideración las contribuciones de fibras con largo sub-crítico (menor a L_c) y largo súper-crítico (mayor a L_c). Estos términos están multiplicados por el factor de orientación de la fibra (en el caso unidireccional = 1). También se han utilizado funciones de densidad de probabilidad para describir el largo de las fibras en la matriz y la orientación (ángulo) de éstas respecto a una dirección dada para así determinar los términos χ_1 y χ_2 (Fu, 1996), o para determinar el módulo de elasticidad (Fu, 1998; Fu, 2000) o para describir anisotropías en el material (Fu, 1998).

□

Todos los modelos presentados anteriormente tienen las mismas grandes limitaciones para caracterizar materiales compuestos con matriz polimérica:

- Consideran la respuesta del material como lineal-elástica; supuesto errado, ya que está demostrado experimentalmente que presentan una respuesta no lineal con una histéresis en su respuesta tensión-deformación.
- No consideran en sus variables la tasa de deformación, siendo que empíricamente se obtienen distintas curvas tensión-deformación si la probeta se carga con distinta tasa de deformación.

2.2.2 Comportamiento macro-mecánico

a) Teoría de laminado (Jones, 1999)

Otro modo de analizar los materiales compuestos con fibras es mediante la teoría de laminado, la cual considera que el material compuesto es un laminado formado por un conjunto de láminas delgadas donde las propiedades del material compuesto están dadas por la geometría, cantidad y propiedades de las láminas.

La utilización de esta teoría en materiales compuestos se da principalmente gracias a los modos de manufactura que se presentan en la industria.

Como se mencionó, la unidad que conforma el laminado es la lámina, la que puede ser isótropa, ortótropa, transversalmente isótropa, etc. La matriz de flexibilidad de la lámina,

que relaciona al esfuerzo con la deformación de la forma $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, puede tener las siguientes formas:

i) Material ortótropo

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & 0 & -\frac{\nu_{13}}{E_3} & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & -\frac{\nu_{23}}{E_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_3} & -\frac{\nu_{23}}{E_3} & 0 & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

ii) Material transversalmente isótropo

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & 0 & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{E_2}(1+\nu_{23}) & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

iii) Material isótropo

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & 0 & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 & \frac{1}{E_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

La teoría de laminado considera, en general, un estado de tensión plano por lo que la relación tensión-deformación se reduce a:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

Si la lámina tiene los ejes coordenados, 1-2-3, distintos al del laminado, x-y-z, es necesario rotar la matriz de rigidez para llevar todo al mismo sistema coordenado x-y-z. Se define la matriz de rigidez de la lámina en los ejes x-y-z como:

$$\left[\overline{\mathbf{Q}}\right] = \left[\mathbf{T}\right]^{-1}\left[\mathbf{Q}\right]\left[\mathbf{T}\right]^{-T} \tag{2.22}$$

donde

$$\left[\mathbf{T}\right] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

y la relación tensión deformación finalmente queda como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{13} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{23} \\ \overline{Q}_{13} & \overline{Q}_{23} & \overline{Q}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

Bajo la hipótesis de deformaciones pequeñas y que las secciones planas permanecen planas luego de deformadas, se obtienen las siguientes relaciones:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_o}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} = \varepsilon_x{}^o + z\kappa_x \tag{2.25}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v_o}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} = \varepsilon_y{}^o + z\kappa_y \tag{2.26}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} - 2z\frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} = \gamma_{xy}{}^o + z\kappa_{xy} \tag{2.27}$$

Por ende, la relación tensión-deformación de la lámina *k* queda como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{13} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{23} \\ \overline{Q}_{13} & \overline{Q}_{23} & \overline{Q}_{33} \end{bmatrix}_k \left[\begin{bmatrix} \varepsilon_x{}^o \\ \varepsilon_y{}^o \\ \gamma_{xy}{}^o \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \right] \tag{2.28}$$

Finalmente las fuerzas y momentos resultantes en la lámina se pueden determinar como:

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz \tag{2.29}$$

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz \tag{2.30}$$

Lo que conduce a:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{13} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{23} \\ \overline{Q}_{13} & \overline{Q}_{23} & \overline{Q}_{33} \end{bmatrix}_k \left[\int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \varepsilon_x{}^o \\ \varepsilon_y{}^o \\ \gamma_{xy}{}^o \end{bmatrix} dz + \int_{z_{k-1}}^{z_k} z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} dz \right] \tag{2.31}$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{13} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{23} \\ \overline{Q}_{13} & \overline{Q}_{23} & \overline{Q}_{33} \end{bmatrix}_k \left[\int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \varepsilon_x{}^o \\ \varepsilon_y{}^o \\ \gamma_{xy}{}^o \end{bmatrix} z dz + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} z^2 dz \right] \tag{2.32}$$

Y finalmente

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x{}^o \\ \varepsilon_y{}^o \\ \gamma_{xy}{}^o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x{}^o \\ \varepsilon_y{}^o \\ \gamma_{xy}{}^o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

donde

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \left(\overline{Q}_{ij}\right)_k \left(z_k - z_{k-1}\right) \tag{2.35}$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \left(\overline{Q}_{ij}\right)_k \left(z_k{}^2 - z_{k-1}{}^2\right) \tag{2.36}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N} \left(\overline{Q}_{ij}\right)_k \left(z_k{}^3 - z_{k-1}{}^3\right) \tag{2.37}$$

□

A continuación se presentan estudios de algunos autores en relación a la teoría de laminado:

b) Hamed et al. (2009)

Estudiando el comportamiento de un material compuesto de epoxy y fibra de vidrio, estos autores desarrollaron un método para determinar los valores teóricos de todas las constantes elásticas necesarias para esfuerzos tridimensionales de laminados *angle-ply* y de tubos de filamento enrollado (*filament wound*) a partir de las propiedades de una lámina reforzada con fibras unidireccionales. No obstante, el método está falto de

generalidad, ya que para encontrar los valores teóricos de las constantes elásticas se hace el supuesto de que el tubo tiene una configuración de láminas balanceada y simétrica, además tiene la simplificación de que el tubo está sometido a carga uniforme axi-simétrica, lo que permite la eliminación de varios términos antes de obtener las constantes elásticas.

2.2.3 Modelos reológicos

Los modelos reológicos consideran, en general, la combinación de elementos elásticos (resortes) y elementos viscosos (amortiguadores), ya sea en serie, en paralelo o una combinación de ambos, para representar el comportamiento plástico y tiempo-dependiente de los materiales.

La respuesta elástica, dada por los resortes, se caracteriza por la independencia de la relación tensión-deformación al signo y magnitud de la tasa de deformación y por su reversibilidad que permite la completa e instantánea recuperación al descargar. La expresión para un material elástico es:

$$\varepsilon = \mathrm{f}(\sigma) \tag{2.38}$$

La respuesta viscosa, dada por los amortiguadores, se caracteriza porque la relación tensión-deformación depende del signo y magnitud de la tasa de deformación; y la deformación es irreversible después de descargar. La expresión para un elemento viscoso es:

$$\dot{\varepsilon} = \mathrm{g}(\sigma) \tag{2.39}$$

Finalmente, la acumulación de deformación plástica irreversible en un material comienza a cierta carga llamada esfuerzo de cedencia (yield) y su magnitud no depende del tiempo o la tasa de carga:

$$\mathrm{d}\varepsilon = \begin{cases} 0, & \sigma < \sigma_{\mathrm{y}} \\ \infty, & \sigma > \sigma_{\mathrm{y}} \end{cases} \tag{2.40}$$

El comportamiento de los materiales compuestos y polímeros actuales es frecuentemente una combinación de estas respuestas, categorizándose como viscoelástico, elastoplástico, viscoelastoplástico, etc.

a) Modelo de Maxwell

El elemento de Maxwell es uno de los modelos más simples. Éste consiste en un resorte y un amortiguador conectados en serie. Sus relaciones tensión-deformación son las siguientes:

$$\sigma = \sigma_e = \sigma_v \tag{2.41}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_v \tag{2.42}$$

donde

$$\sigma_e = E\varepsilon_e \tag{2.43}$$

$$\sigma_v = \eta\dot{\varepsilon}_v \tag{2.44}$$

Considerando $\dot{\varepsilon}$ constante se llega a la siguiente relación lineal entre σ y $\dot{\sigma}$:

$$\dot{\sigma} = -\frac{E}{\eta}\sigma + E\dot{\varepsilon} \tag{2.45}$$

Además, haciendo el remplazo $dt = \frac{d\varepsilon}{\dot{\varepsilon}}$ se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} + \frac{E}{\eta\dot{\varepsilon}}\sigma = E \tag{2.46}$$

cuya solución da la respuesta tensión-deformación del elemento de Maxwell. Ésta es:

$$\sigma(\varepsilon) = \eta\dot{\varepsilon} + Ce^{\left(-\frac{E}{\eta\dot{\varepsilon}}\varepsilon\right)} \tag{2.47}$$

donde C es la constante a ser determinada mediante las condiciones de borde que se definen como $\sigma(0) = 0$ y $\sigma(\varepsilon_{max}) = \sigma_{max}$ para la carga y descarga, respectivamente,

donde $\varepsilon_{\max}$ es la deformación alcanzada en el momento en que el ensayo de tracción cambia de carga a descarga.

Se ha demostrado que el elemento de Maxwell no es capaz de representar el comportamiento cíclico de carga y descarga en polímeros y materiales compuestos usando los mismos parámetros tanto en la carga como en la descarga, no obstante es capaz de ajustarse muy bien utilizando parámetros distintos en carga y descarga (Oshmyan, 2005). A pesar de esto, tiene la gran ventaja comparativa de ser un modelo muy simple de sólo dos parámetros que tienen una clara interpretación física.

□

Como ya se mencionó, múltiples combinaciones de estos elementos se pueden llevar a cabo obteniendo distintas respuestas a las cargas. Además se pueden agregar condiciones especiales basadas en la microestructura del material, de modo de representar de mejor manera la respuesta experimental de éste. A continuación se presentan algunos modelos propuestos en diferentes estudios.

b) I. D. Moore (1997)

Estos autores desarrollaron dos modelos uniaxiales para representar la respuesta mecánica no-lineal del polietileno de alta densidad. El primero es un modelo viscoelástico que consiste en un resorte conectado en serie con seis elementos de Kelvin; el segundo es un modelo viscoplástico que utiliza la teoría desarrollada por Bodner para caracterizar el comportamiento viscoplástico uniaxial de metales. Ambos modelos fueron evaluados bajo distintos ensayos mecánicos y comparados entre sí, logrando diferentes niveles de ajuste dependiendo la aplicación (creep, relajación, carga, descarga).

c) Drozdov et al. (2003)

Estos autores propusieron un modelo para estudiar la respuesta viscoplástica del LDPE bajo ensayos uniaxiales de carga y descarga. El LDPE fue modelado como una red equivalente de cadenas unidas mediante conexiones interlaminares. Se introdujeron dos

procesos de deslizamiento en las microestructuras del LDPE para explicar la no-linealidad y la disipación de energía en los ensayos. El primero refleja el movimiento de las conexiones interlaminares en las regiones amorfas y el deslizamiento sutil (*fine slip*) de las cristalitas, proceso que se asume ocurre a todo nivel de esfuerzos. El segundo está asociado al deslizamiento grueso (*coarse slip*) y la fragmentación de las láminas; este proceso se supone ocurre sólo en la descarga. La diferencia entre ambos tipos de deslizamiento es que el deslizamiento sutil no produce disipación de energía, mientras que el deslizamiento grueso y la desintegración de las láminas dan como resultado una evidente producción de entropía. En este estudio, el término "plástico" fue utilizado para explicar apropiadamente el mecanismo de transformación de la estructura interna de un polímero semi-cristalino, y no como la deformación residual que queda después de la descarga.

Este modelo resulta en un buen ajuste para el LDPE y cuenta solamente con cinco parámetros ajustables, lo que significa una ventaja comparativa en relación al modelo de Oshmyan et al. (2004) y sus posteriores modificaciones. No obstante, el supuesto de que el deslizamiento grueso y la destrucción de las láminas ocurren sólo en la descarga no tiene sentido, ya que tanto en carga como en descarga el material está sometido a tracción, siendo incluso más alto el esfuerzo en la carga.

d) Oshmyan et al (2004)

Basándose en la evidencia de que el comportamiento bajo grandes deformaciones de los materiales está acompañado e influenciado por una evolución estructural, la que es aún más notoria en los materiales polímeros, especialmente semi-cristalinos, plantearon la idea de que una transición estructural ocurre bajo pequeñas deformaciones. De este modo, apoyándose en la teoría de percolación, suponen que una destrucción inducida por los esfuerzos de algunas porciones cristalinas angostas y por lo tanto altamente cargadas es una razón realista para esta transición. Así, la transformación local de una pequeña porción de componentes cristalinos rígidos y plásticos a componentes amorfos blandos y altamente elásticos, la cual implica una pérdida en la conectividad de los

dominios cristalinos, conlleva a la alteración de la respuesta mecánica en los polímeros semi-cristalinos incluso bajo pequeñas deformaciones.

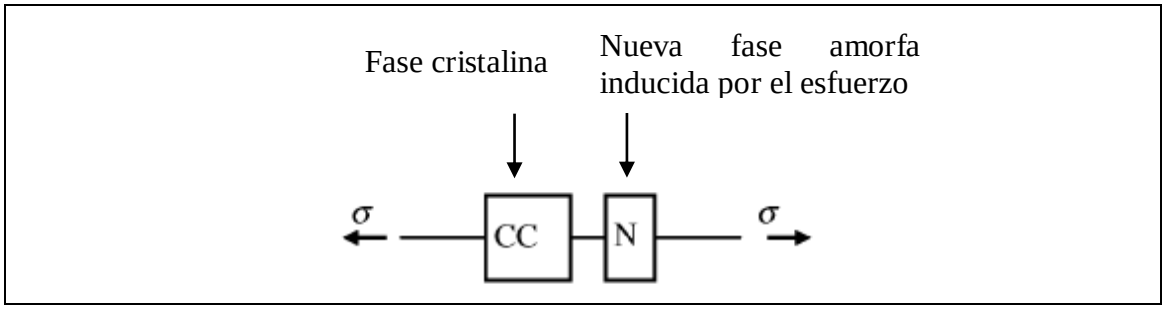


Figura 2-5 Esquema del modelo propuesto por Oshmyan et al. (2004).

Para representar la respuesta instantánea del material proponen un elemento que cuenta con una parte cristalina conectada en serie con una parte amorfa. La parte cristalina se considera viscoelástica y la parte amorfa se considera elástica. Las relaciones tensión-deformación del modelo son:

Para la deformación:

$$\varepsilon = c\varepsilon^{(cr)} + (1-c)\varepsilon^{(am)} \tag{2.48}$$

donde $\varepsilon^{(cr)} = \varepsilon_e{}^{(cr)} + \varepsilon_p{}^{(cr)}$ es la deformación de la parte cristalina y está dada por una componente elástica y otra viscosa, y *c* representa el grado de cristalinidad, que como se mencionó, disminuye a medida que se carga el material y se supone proporcional al esfuerzo aplicado, por lo que es representada como $\dot{c} = -k_c\sigma^{(cr)}c$.

Para el esfuerzo del elemento se tiene:

$$\sigma = \sigma^{(cr)} = E^{(cr)}\varepsilon_e{}^{(cr)} = \sigma^{(am)} = E^{(am)}\varepsilon^{(am)} \tag{2.49}$$

La viscosidad del modelo se le atribuye a la parte cristalina, por lo tanto:

$$\dot{\varepsilon}_p{}^{(cr)} = \chi^{(cr)}E^{(cr)}\varepsilon_e{}^{(cr)} \tag{2.50}$$

Por otra parte, hay evidencia de que la orientación de las zonas cristalinas en los polímeros estirados causa un endurecimiento de deformación y una disminución de la

capacidad plástica. Este hecho es considerado por el modelo agregando una tasa de cambio para $E^{(cr)}$ y para $\chi^{(cr)}$ que se supone proporcional al esfuerzo aplicado. Esto es:

$$\dot{E}^{(cr)} = k_E \sigma^{(cr)} E^{(cr)} \tag{2.51}$$

$$\dot{\chi}^{(cr)} = -k_\chi \sigma^{(cr)} E^{(cr)} \tag{2.52}$$

El ajuste logrado por este modelo es muy bueno, pero tiene las siguientes limitaciones o problemas: es unidimensional y de 11 parámetros, lo que lo hace un modelo poco aplicable en la práctica de la ingeniería donde los materiales están sometidos a cargas multiaxiales; y a pesar de que cada parámetro tiene una interpretación física bien definida, para lograr un buen ajuste, los parámetros deben tomar valores que exageran o sobredimensionan los efectos que ellos representan.

e) Y. Rémond (2005)

Entendiendo que en muchos polímeros reforzados la descarga después de aplicar tensión está acompañada por un efecto viscoso que difiere mucho del exhibido durante la tensión, este autor evaluó las características de distintos modelos desarrollados para caracterizar polímeros y polímeros reforzados. El estudio lo realizó con observaciones experimentales sobre el comportamiento bajo pequeñas deformaciones de polietileno y polietileno reforzado con fibras de vidrio cortas. Una observación importante fue que para deformaciones de aproximadamente 7- 8% la descarga seguida por una recuperación de varios días resultó en una reversibilidad completa de la deformación, lo que permite referirse a este fenómeno como completamente viscoelástico, sin entrar a la región viscoplástica. En el estudio además concluye que se requiere considerar el cambio en la microestructura del material para representarlo correctamente y que el refuerzo en los polímeros reforzados con fibras cortas previenen de gran manera los efectos de deformación viscoelástica de gran largo plazo haciendo al fenómeno menos notable.

f) Hizoum et al (2006)

Con el objetivo de evaluar los límites del modelo de Oshmyan et al. (2004), estos autores realizaron un ensayo con HDPE de dos ciclos, el primero hasta 5% de deformación, y el segundo hasta 5% de deformación comenzando desde la deformación residual del primer ciclo. Para que el modelo se ajustara a los ensayos en ambos ciclos se debió utilizar una relación más general para el comportamiento de la deformación plástica que obedece a la ley de Eyring. Por lo tanto, en lugar de utilizar $\dot{\varepsilon}_p^{(cr)} = \chi^{(cr)} E^{(cr)} \varepsilon_e^{(cr)}$ se utilizó:

$$\dot{\varepsilon}_p^{(cr)} = \dot{\varepsilon}_{p0}^{(cr)} \exp\left(-\frac{U^{(cr)}}{kT}\right) \sinh\left(-\frac{\gamma^{(cr)}\sigma^{(cr)}}{kT}\right) \tag{2.53}$$

ecuación que si se obvian los efectos térmicos se puede arreglar a una forma más simple:

$$\dot{\varepsilon}_p^{(cr)} = \beta_0 \sinh\left(\alpha_0 \sigma^{(cr)}\right) \tag{2.54}$$

donde β_0 y α_0 son constantes del material.

Si ya el modelo propuesto por Oshmyan et al. (2004) tenía la limitación de poseer muchos parámetros, agregarle dos parámetros más lo aleja aún más de una posible aplicación en la industria.

g) Oshmyan et al (2006)

Propusieron un enfoque unificado para el modelamiento del comportamiento mecánico de un medio continuo a bajas deformaciones que permite la transición estructural inducida por la deformación. El modelo cuenta con una fase dura y una fase blanda que puede ser, en el caso de polímeros, la fase cristalina y la fase amorfa, respectivamente, o en el caso de compuestos, las fases duras y blandas corresponden a zonas donde las inclusiones de refuerzo están bien unidas a la matriz y zonas donde las inclusiones no están bien unidas a la matriz.

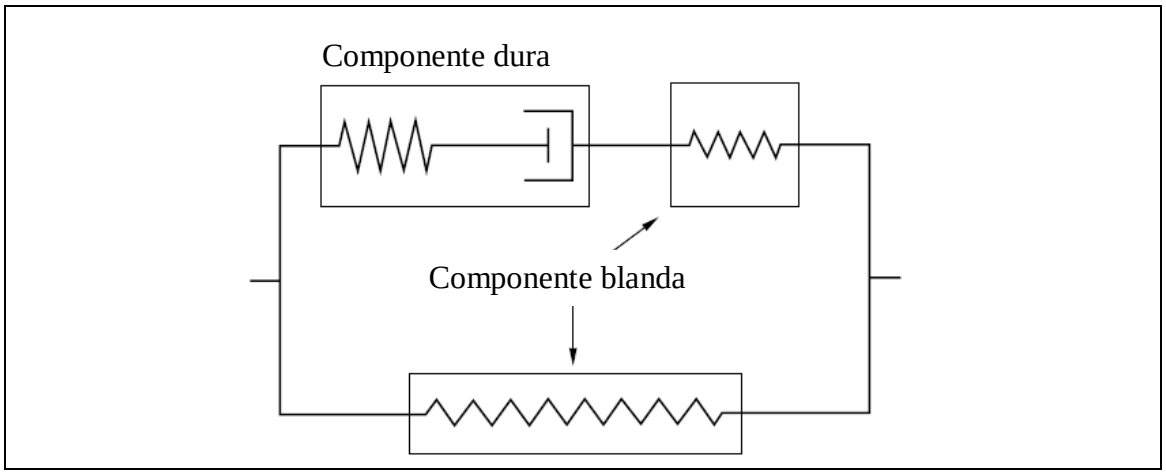


Figura 2-6 Esquema del modelo propuesto por Oshmyan et al. (2006)

En el trabajo se reconocen tres grandes diferencias entre este modelo y el propuesto por Oshmyan et al. (2004): la primera es la capacidad de conectividad de la fase amorfa que brinda la rama inferior del modelo, la que además permite y explica la recuperación que sufre el material ante la ausencia de esfuerzos macroscópicos; la segunda diferencia es la capacidad del modelo de transformar, reversiblemente, la componente dura en blanda, lo que permite la recuperación morfológica del material; y la tercera es la simplificación del modelo en ignorar la capacidad de la componente dura en experimentar flujo plástico, lo que se justifica a bajas deformaciones.

h) Hizoum et al (2011)

Estos autores le agregaron al modelo presentado en Oshmyan et al (2006) una influencia de la formación de nanocavidades en el comportamiento a deformación del HDPE bajo el punto de fluencia. Con esto además lograron representar, con los mismos parámetros del material, tres programas independientes de deformación uniaxial cíclica.

i) Andriyana et al (2010)

Este estudio busca cómo contabilizar la orientación de las fibras en la matriz polimérica en la predicción de la respuesta mecánica de materiales compuestos fabricados mediante moldeado por inyección. Para cumplir el objetivo se desarrolló un conjunto de ensayos de tracción a distintas tasas de deformación con probetas mecanizadas obtenidas desde

piezas de termoplástico reforzado con fibras cortas moldeadas por inyección de los que concluyeron que: el material es altamente anisotrópico y no-lineal; el comportamiento tiempo-dependiente es claro y a pequeñas deformaciones la dependencia es mayor durante la descarga (en relación a la carga), y observan una tendencia contraria a altas deformaciones; y finalmente, observan la existencia de una histéresis de equilibrio dependiente del contenido y orientación de las fibras. La observación de estos experimentos llevó a desarrollar un modelo fenomenológico tridimensional que consiste en dos fases: la fase uno es la matriz y la fase dos es la fibra más la interfase fibra-matriz. Para representar la fase uno se utilizó un elemento de Maxwell en paralelo con un resorte mientras que la respuesta elasto-plástica anisotrópica de la fase dos es modelada por un elemento de fricción dependiente de la dirección en paralelo con un resorte dependiente de la dirección. El modelo considera como dato un tensor de segundo orden que representa la orientación de las fibras en la matriz y cuenta con 10 parámetros ajustables.

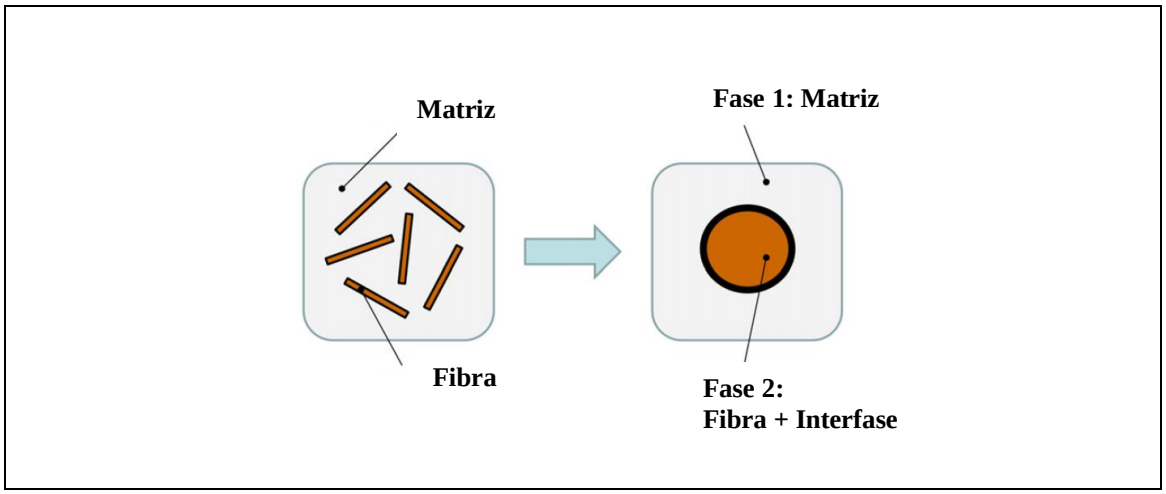
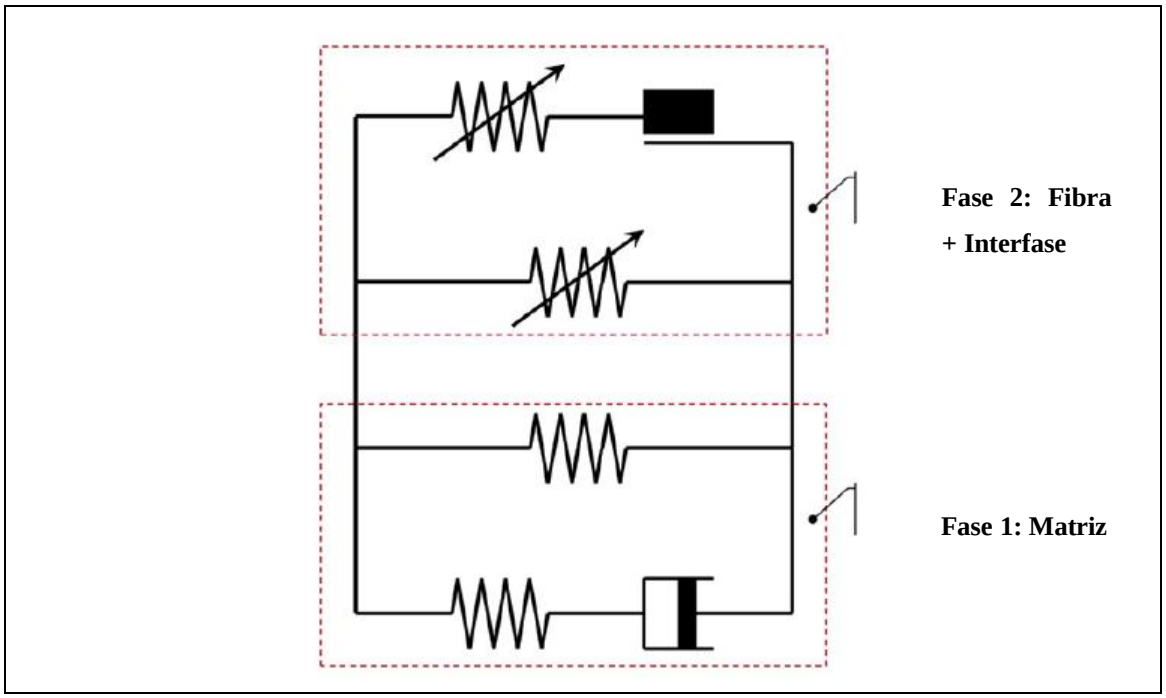


Figura 2-7: Representación de las fases uno y dos del modelo.



2.3 Criterios de Fractura

Los criterios de fractura relacionan los esfuerzos con las resistencias del material. Éstos cuentan con una condición de fractura del tipo $F(\sigma_i, R_i)_{i=1..n} = 1$, donde la función F representa la función de fractura y, en general, consiste en términos de primer y segundo orden, σ_i son las componentes del esfuerzo que conducen a fractura, y R_i son las resistencias del material.

Un criterio de fractura, a diferencia de una condición de fractura, distingue los estados de tensiones que ocasionan fractura de aquellos que no ocasionan fractura, y es de la forma $F(\sigma_j, R_j)_{j=1..n} >,=,< 1$, donde σ_i son los esfuerzos actuales y R_j son las resistencias del material.

A continuación se presentan distintos criterios de falla:

a) Criterio de Tsai-Hill (Tsai, 1965)

Hill propuso el siguiente criterio de fluencia para materiales ortotrópicos:

$$(G+H)\sigma_1^{\ 2}+(F+H)\sigma_2^{\ 2}+(F+G)\sigma_3^{\ 2}-2H\sigma_1\sigma_2-2G\sigma_1\sigma_3-2F\sigma_2\sigma_3 \\ +2L\tau_{23}^{\ 2}+2M\tau_{13}^{\ 2}+2N\tau_{12}^{\ 2}=1 \qquad (2.55)$$

Luego Tsai relacionó los parámetros de resistencia a la falla F, G, H, L, M, N con las resistencias usuales X, Y y S para una lámina. Las relaciones son las siguientes: $2N = 1/S^2$; $G + H = 1/X^2$; $F + H = 1/Y^2$; $F + G = 1/Z^2$; $2F = 1/Y^2 + 1/Z^2 – 1/X^2$; $2G = 1/X^2 + 1/Z^2 – 1/Y^2$; $2H = 1/X^2 + 1/Y^2 – 1/Z^2$.

Si además se modifica el criterio para un estado de tensiones plano de una lámina transversalmente isótropa, donde $\sigma_3 = \tau_{13} = \tau_{23} = 0$ y Z = Y, éste queda:

$$\frac{\sigma_1^{\ 2}}{X^2}-\frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2}+\frac{\sigma_2^{\ 2}}{Y^2}+\frac{\tau_{12}^{\ 2}}{S^2}=1 \qquad (2.56)$$

b) Criterio de Hoffman (1967)

Con el fin de considerar diferentes resistencias en tracción y compresión, Hoffman le agregó términos lineales a la relación propuesta por Hill:

$$C_1(\sigma_2-\sigma_3)^2+C_2(\sigma_3-\sigma_1)^2+C_3(\sigma_1-\sigma_2)^2+C_4\sigma_1+C_5\sigma_2+C_6\sigma_3 \\ +C_7\tau_{23}^{\ 2}+C_8\tau_{13}^{\ 2}+C_9\tau_{12}^{\ 2}=1 \qquad (2.57)$$

donde los $C_{i=1..9}$ se relacionan con las nueve resistencias X_t, X_c, Y_t, Y_c, Z_t, Z_c, S_{12}, S_{23} y S_{13}. Además, modificando la relación para un estado de tensiones plano y para una lámina transversalmente isótropa, donde $\sigma_3 = \tau_{13} = \tau_{23} = 0$ y $Z_t = Y_t$, $Z_c = Y_c$, $S_{31} = S_{12}$, resulta:

$$-\frac{\sigma_1^{\ 2}}{X_cX_t}+\frac{\sigma_1\sigma_2}{X_cX_t}-\frac{\sigma_2^{\ 2}}{Y_cY_t}+\frac{X_c+X_t}{X_cX_t}\sigma_1+\frac{Y_c+Y_t}{Y_cY_t}\sigma_2+\frac{\tau_{12}^{\ 2}}{S_{12}^{\ 2}}=1 \qquad (2.58)$$

donde los valores de resistencia a la compresión son inherentemente negativos. Cabe señalar que si las resistencias a la tracción son iguales a las resistencias a la compresión en las diferentes direcciones, el criterio de Hoffman se reduce al criterio de Tsai-Hill.

c) Criterio de Puck (Knops, 2008)

El criterio de Puck es más complejo que los criterios mencionados anteriormente, ya que a diferencia de la mayoría de los otros criterios, lo cuales son relaciones matemáticas sin

una base física, Puck basó su criterio en un conocimiento sobre las fracturas frágiles en materiales isotrópicos, el que dice que *el límite de fractura de un material es determinado por los esfuerzos sobre el plano de fractura*. Así, el criterio de Puck:

i) Distingue dos tipos de fractura en los materiales compuestos por fibras unidireccionales, y por ende, dos criterios distintos. Estos son el criterio de fractura de fibra y el criterio de fractura inter-fibra.

ii) Considera las siguientes hipótesis: la fractura inter-fibra se causada debido a los esfuerzos σ_n y $\tau_{n\psi}$ que actúan sobre el plano de fractura; si σ_n es un esfuerzo de tensión, éste promueve la fractura junto con el esfuerzo de corte $\tau_{n\psi}$ o incluso para $\tau_{n\psi} = 0$. Al contrario, si σ_n es un esfuerzo de compresión, éste impide la fractura elevando la resistencia del plano de fractura contra la fractura por corte a medida que σ_n aumenta.

□

En este capítulo, primero se presentó información teórica importante para la comprensión del material, dando énfasis en sus microestructuras, las que condicionan el comportamiento mecánico y propiedades del polímero; luego se presentaron distintas teorías, estudios y trabajos experimentales realizados para la modelación, caracterización y predicción de las propiedades y comportamiento mecánico de polímeros y materiales compuestos, dejando en claro que existen muchos modos y enfoques para tratar el problema. En general, modelos simples de pocos parámetros son de fácil comprensión e implementación pero limitados para representar los diferentes comportamientos que presentan los polímeros y materiales compuestos. Al contrario, modelos complejos y de muchos parámetros son de difícil comprensión, implementación y ajuste pero logran representar los distintos comportamientos mecánicos. Es por esto que el enfoque o modelo a utilizar debe ser consecuente con el tipo de aplicación que se busca representar y con la precisión de los resultados que se desean obtener.

3. PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

En este capítulo se explican los distintos experimentos realizados, los procedimientos seguidos y los datos obtenidos. Estos se resumen esquemáticamente en el siguiente diagrama de bloques.

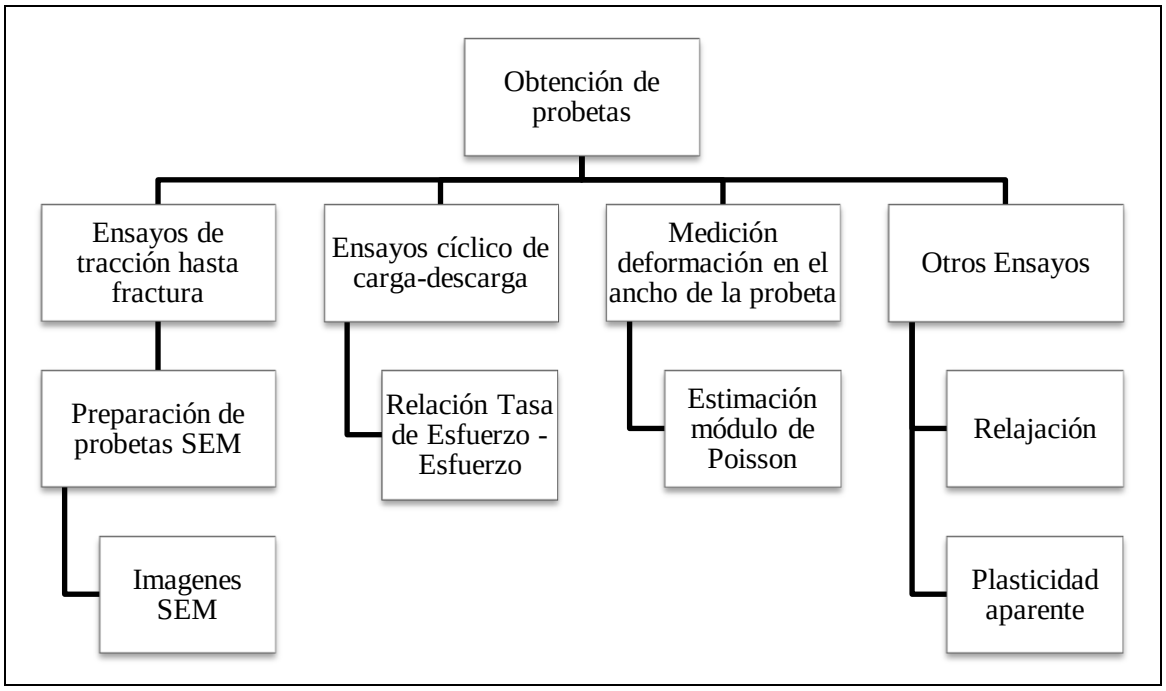


Figura 3-1: Diagrama esquemático de los

3.1 Material

El material estudiado en esta tesis es un compuesto de polietileno de alta densidad con 20% en peso de fibra de vidrio corta. El material es utilizado para la fabricación de tubos mediante el proceso de enrollado de tubos cilíndricos con revolución en espiral. En éste, la mezcla de materias primas es extruida y pegada a un mandril con diámetro externo igual al diámetro interno deseado para el tubo y largo mayor o igual al del tubo. El mandril puede girar en torno a su eje y desplazarse a lo largo de éste, de este modo es posible lograr el enrollado continuo del material a lo largo del tubo. Dependiendo de las

propiedades que se deseen en el tubo el proceso se puede repetir, ida y vuelta, varias veces y a distintas velocidades de giro y avance del mandril (ver Figura 1-1).

3.2 Probetas

Se fabricaron 3 tipos de probetas: longitudinales con el eje principal de la probeta paralelo al eje principal del tubo, el ancho en dirección transversal y el espesor en dirección radial, longitudinales con el eje principal de la probeta paralelo al eje principal del tubo, el ancho en dirección radial y el espesor en dirección transversal y transversales (dirección tangente a la circunferencia del tubo) con el ancho en dirección longitudinal. Las probetas fueron maquinadas para obtener las dimensiones de la probeta tipo 1 definidas por la norma ASTM D 638 – *Tensile properties of plastics*, con un espesor de 6mm., ver Figura 3-2. A pesar de que 3 tipos de probetas fueron fabricados y ensayados, sólo 2 tipos son estrictamente necesarios.

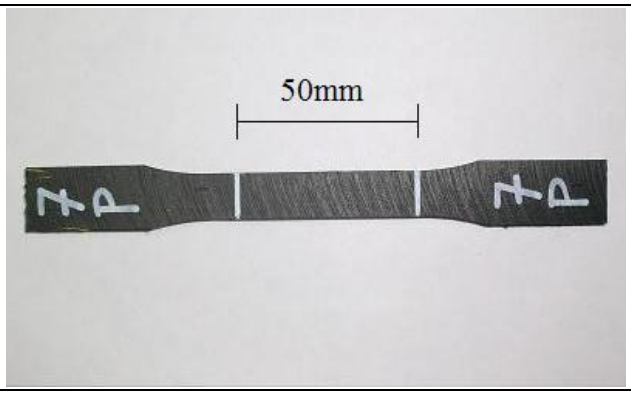


Figura 3-2: Forma de probeta utilizada para los diferentes ensayos.

3.3 Instrumentos de ensayos mecánicos

Los ensayos de tracción se realizaron en una máquina Instron 4206 con capacidad de carga de 150kN, ver Figura 3-3. La deformación fue medida utilizando un extensómetro de 50 mm.

Figura 3-3: Máquina Instron utilizada en los ensayos de tracción y ensayos cíclicos.

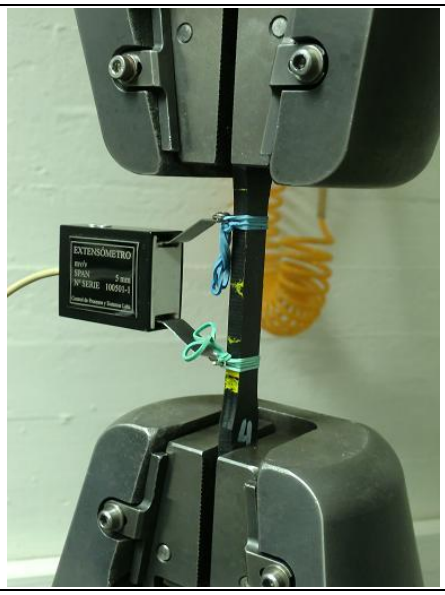


Figura 3-4: Extensómetro utilizado para medir la deformación en los ensayos de tracción y ensayos cíclicos

3.4 Ensayos mecánicos

Para cada tipo de probeta se realizaron dos tipos de ensayos: ensayo de carga y descarga a tasas de desplazamiento del travesaño de 0.1mm/min, 1mm/min, 10mm/min; y ensayo de carga hasta fractura a tasas de desplazamiento del travesaño de 0.1mm/min, 1mm/min, 10mm/min. Ambos ensayos se realizaron con el objetivo de estudiar la respuesta tensión-deformación del material. En particular, el ensayo de carga y descarga se realizó con el objetivo de estudiar el comportamiento visco-elástico del material mientras que el ensayo de carga hasta fractura se llevó a cabo para obtener la curva completa hasta la fractura, datos sobre resistencia última y conocer el modo de fractura de las probetas. También se midió, con un pie de metro electrónico, la deformación en el ancho de la probeta mientras transcurría un ensayo de tracción en carga a 1mm/min de tasa de desplazamiento de travesaño; esto se realizó para estimar el módulo de Poisson.

3.5 Datos experimentales

A continuación se presentan los resultados y un breve análisis de los distintos ensayos realizados.

3.5.1 Ensayo de tracción hasta fractura

Se realizaron ensayos de tracción hasta fractura a tres velocidades de desplazamiento de travesaño diferentes, 10mm/min, 1mm/min y 0.1mm/min, con los dos tipos de probetas: longitudinal y transversal. En la Figura 3-5 y la Figura 3-6 se presentan imágenes de probetas longitudinales y transversales fracturadas, respectivamente.

Figura 3-5: Probeta longitudinal fracturada.

Figura 3-6: Probeta transversal fracturada. En la imagen inferior, el extremo fracturado se señala con un círculo semi-continuo.

De estos ensayos, entonces, se lograron seis curvas tensión deformación que se presentan a continuación desde la Figura 3-7 a la Figura 3-9.

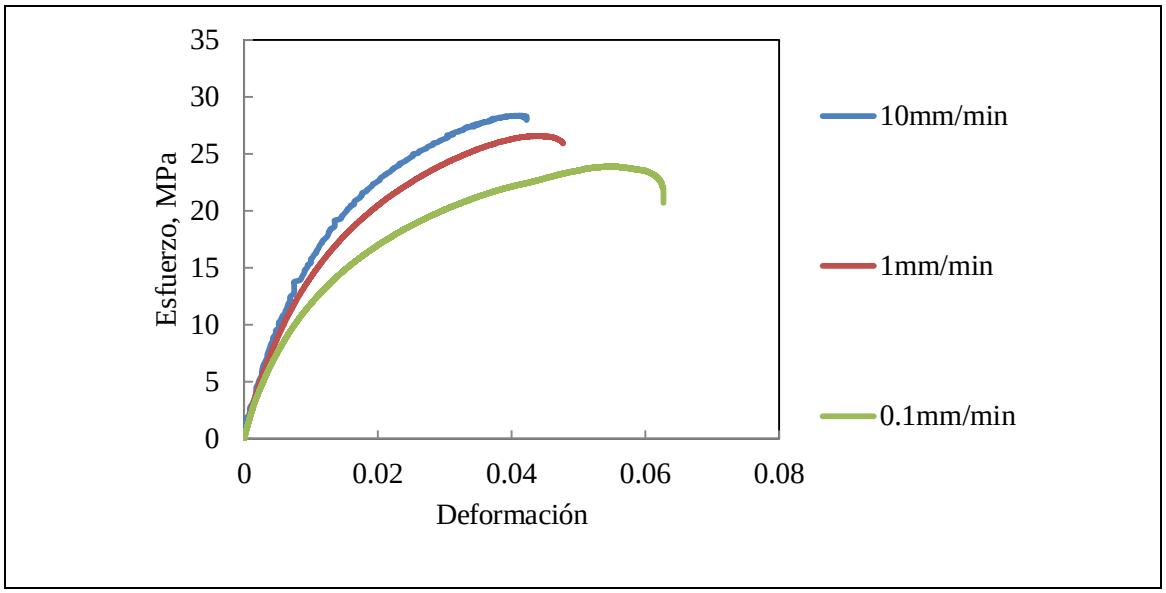


Figura 3-7: Ensayo de tracción hasta fractura a distintas velocidades con probetas longitudinales.

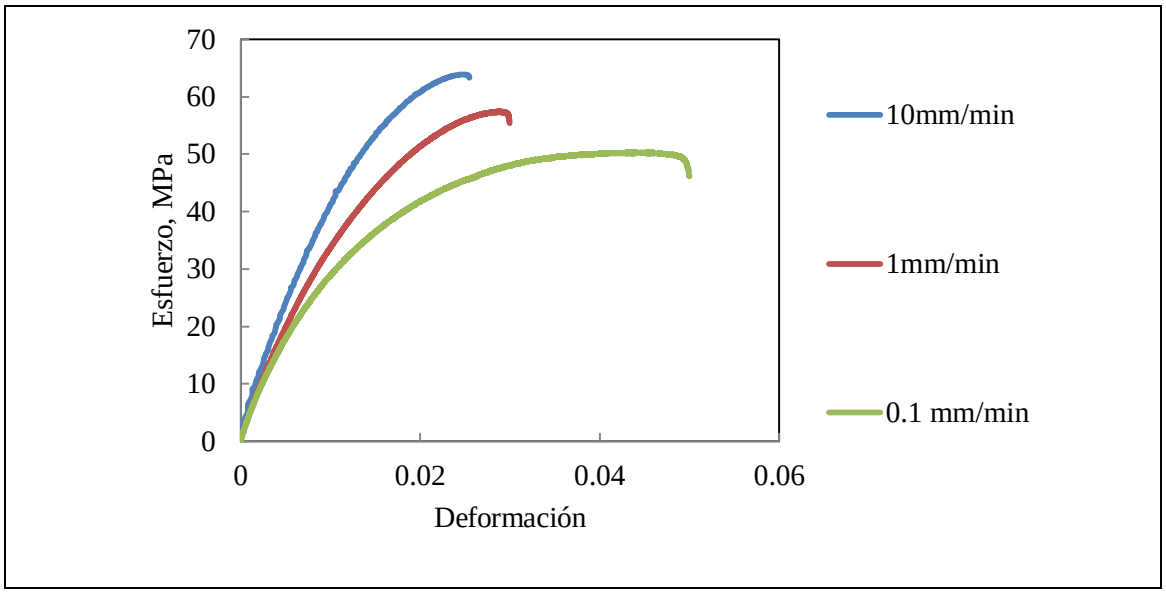


Figura 3-8: Ensayo de tracción hasta fractura a distintas velocidades con probetas transversales.

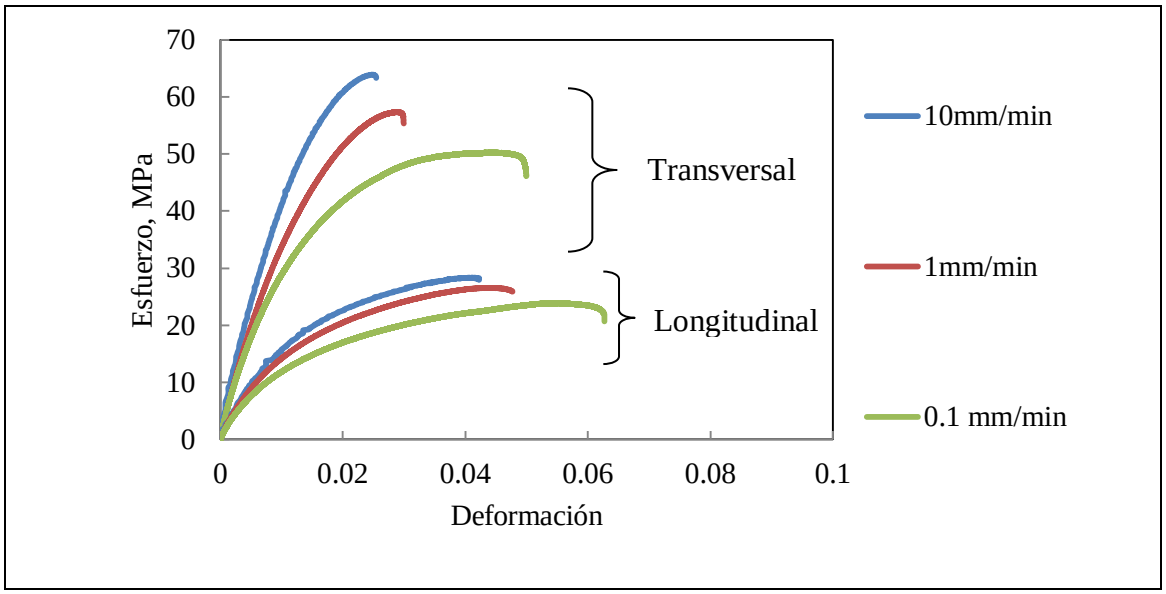


Figura 3-9: Ensayos de tracción de los dos tipos de probetas a distintas velocidades.

De los ensayos presentados desde la Figura 3-7 hasta la Figura 3-9 se puede apreciar un comportamiento no-lineal, anisotrópico y sensible a la tasa de deformación. El comportamiento no-lineal es una propiedad mecánica otorgada al material compuesto por la matriz polimérica. La anisotropía se manifiesta gracias a la orientación de las fibras de vidrio que actúan como refuerzo dentro de la matriz, y en vista de los resultados, se espera que éstas tengan una orientación preferentemente transversal. Por último, la sensibilidad a la tasa de deformación también es una propiedad de la matriz polimérica.

3.5.2 Ensayo de carga y descarga

Las probetas longitudinales fueron cargadas hasta 120kgf y descargadas completamente, mientras que las transversales fueron cargadas hasta 400kgf y descargadas completamente. Esto mismo se realizó a tres velocidades de desplazamiento de travesaño distintas: 10mm/min, 1mm/min y 0.1mm/min.

En la Figura 3-10 se muestran ensayos cíclicos con probetas longitudinales a 10, 1 y 0.1 mm/min. El ensayo a 10 mm/min contó de 4 ciclos de carga y descarga, el ensayo a 1mm/min también contó de 4, y el de 0.1mm/min de sólo un ciclo. Por otra parte, en la

Figura 3-11 se presentan los ensayos cíclicos con probetas transversales. Los ensayos realizados a 10 y a 1mm/min contaron con 5 ciclos, mientras que el realizado a 0.1mm/min contó de sólo un ciclo.

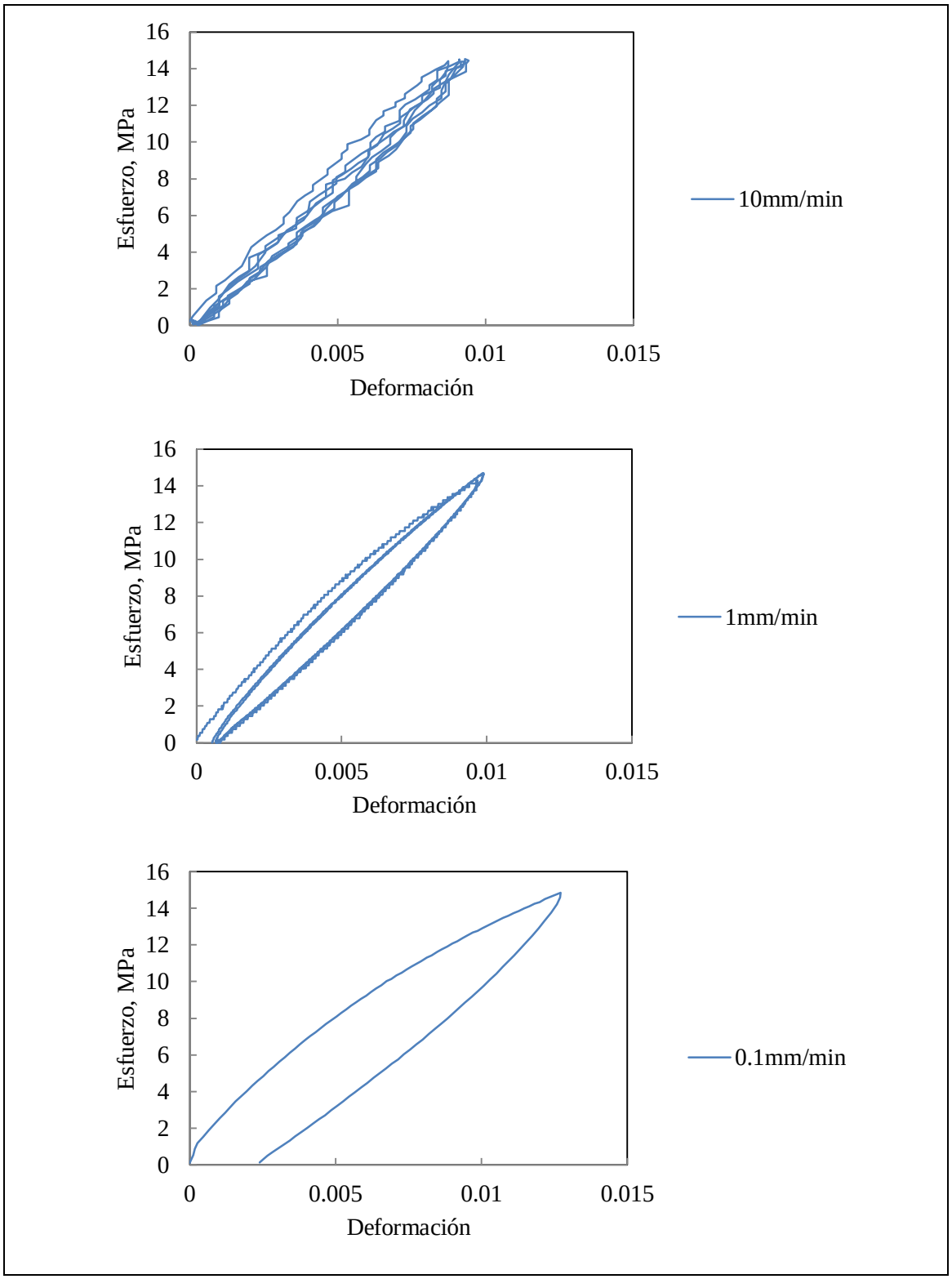


Figura 3-10: Ensayo cíclico de carga y descarga con probetas longitudinales.

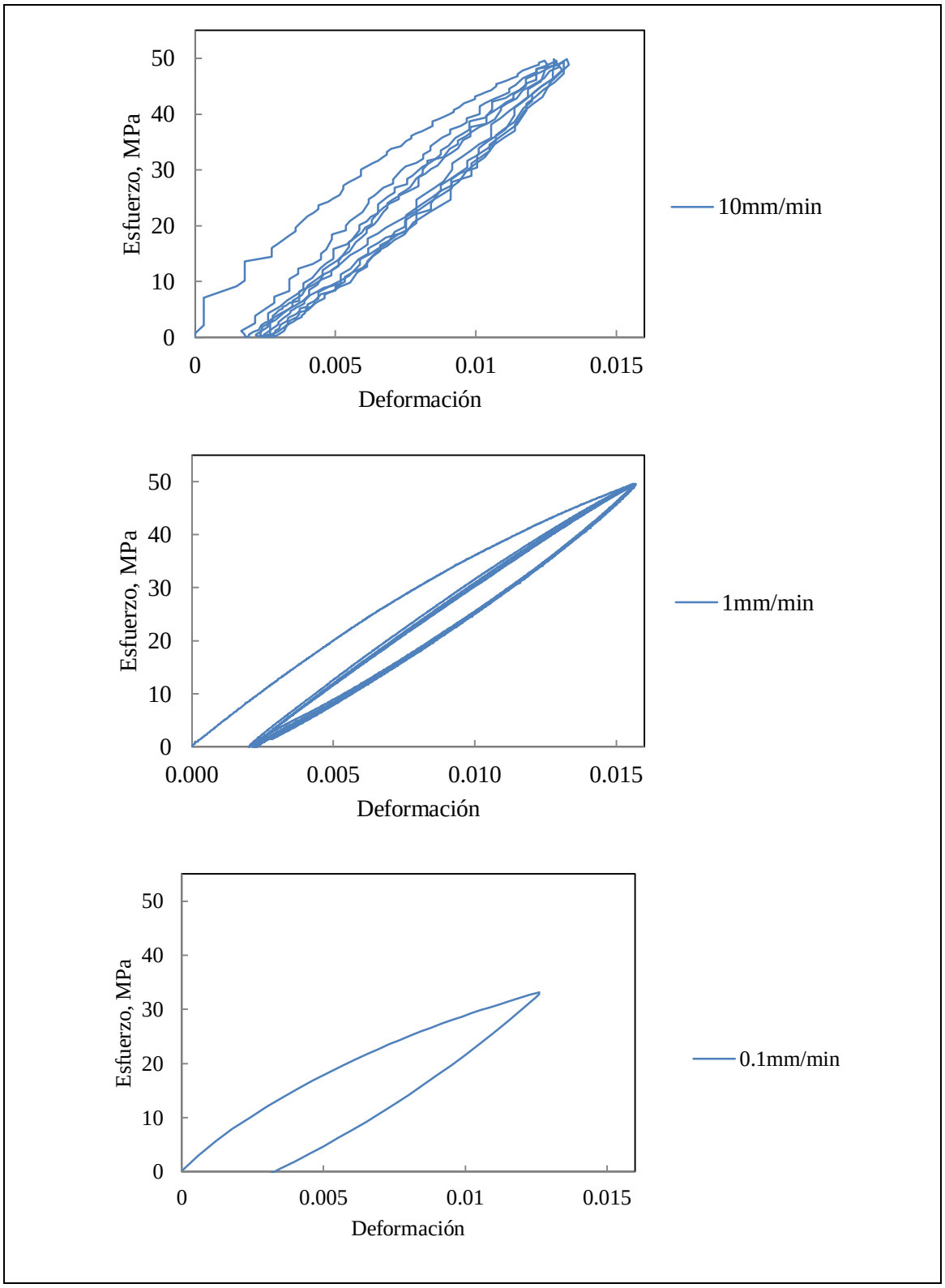


Figura 3-11: Ensayo cíclico de carga y descarga con probetas transversales.

En la Figura 3-12 se muestra en detalle de cómo la plasticidad aparente aumenta a medida que aumenta el número de ciclos, teniendo el mayor aumento en el primer ciclo y disminuyendo mientras éstos aumentan. Este mismo comportamiento lo observaron Drozdov et.al (2007) al estudiar el comportamiento de polietileno de alta densidad.

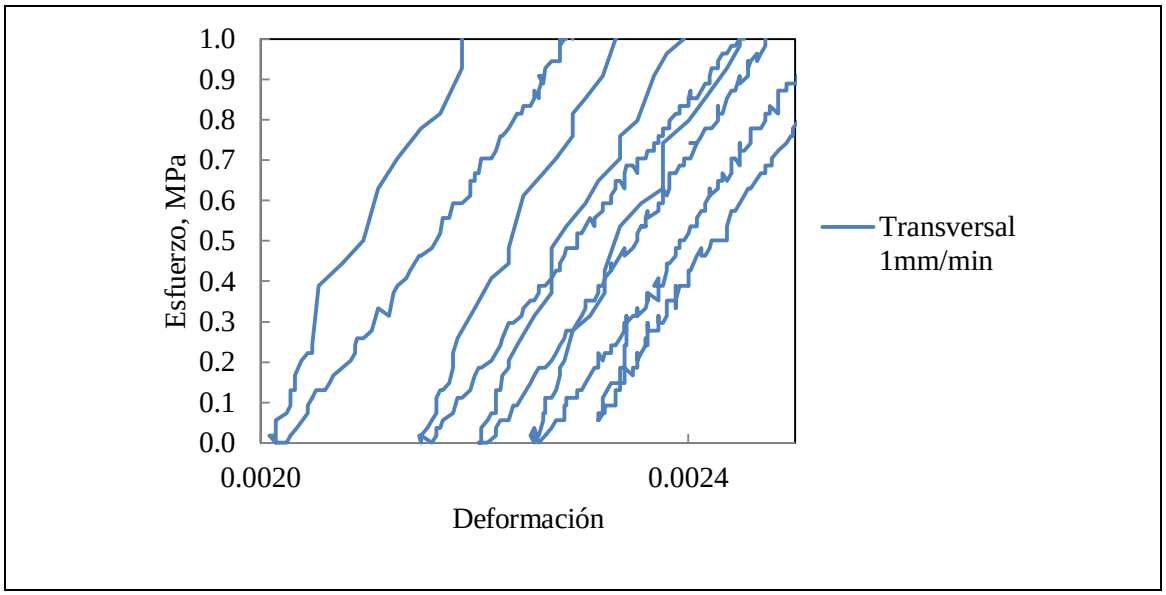


Figura 3-12: Detalle de la plasticidad aparente en los ciclos 2 al 5 del ensayo cíclico a 1mm/min con probeta transversal.

3.5.3 Relación entre la tasa de esfuerzo y el esfuerzo

Como se vio en el capítulo 2, el modelo de Maxwell responde a una relación lineal entre la tasa de esfuerzo y el esfuerzo (ecuación (2.45)). Es por esto que interesa conocer cómo se relacionan ambas cantidades en nuestro material. En la Figura 3-13 y la Figura 3-14 se presenta esta relación para los 6 ensayos cíclicos realizados.

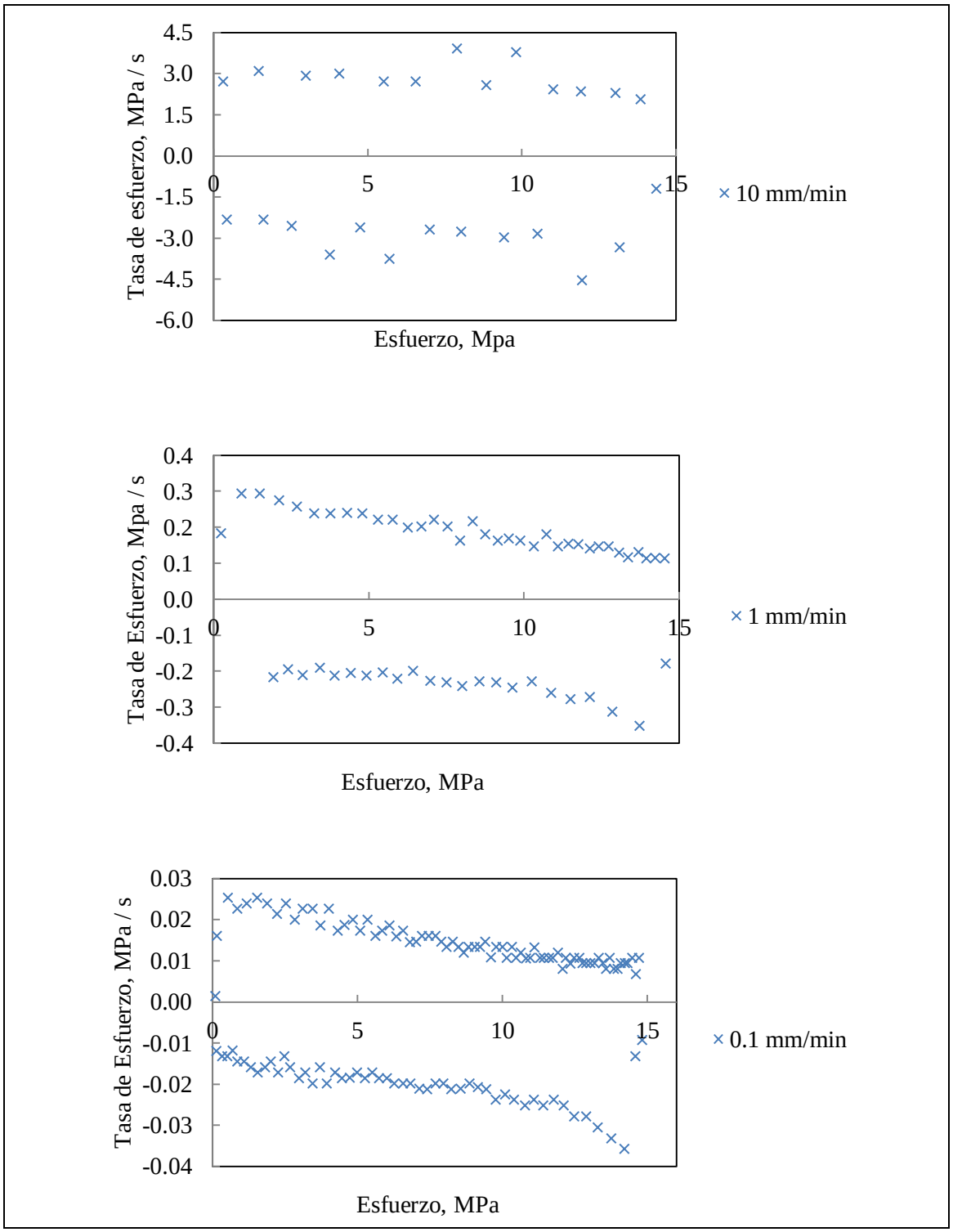


Figura 3-13: Relación entre la tasa de esfuerzo y el esfuerzo en probetas longitudinales

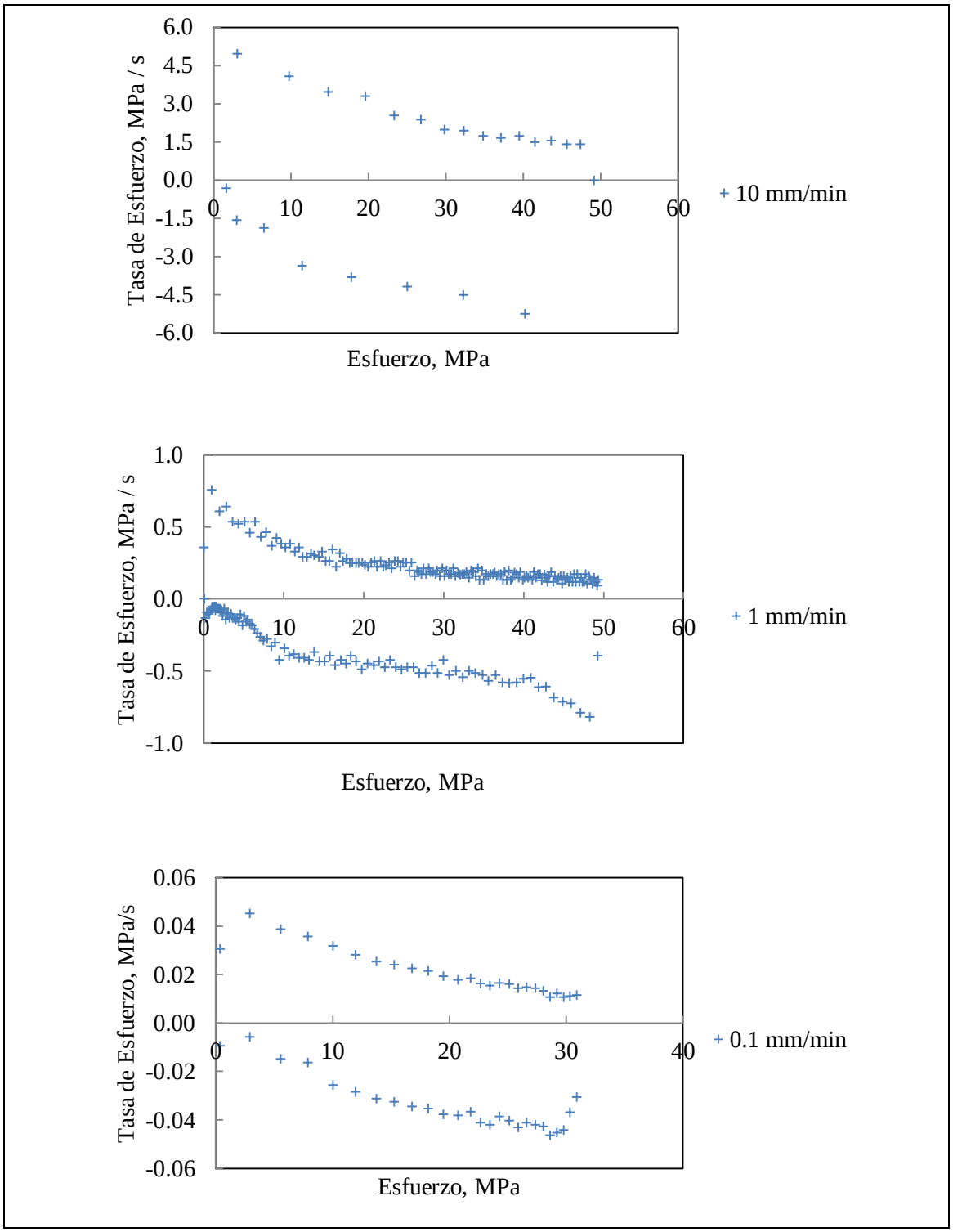


Figura 3-14: Relación entre la tasa de esfuerzo y el esfuerzo en probetas transversales

Como se puede ver en las figuras anteriores, la relación entre la tasa de esfuerzo y el esfuerzo sí tiene cierta linealidad, lo que a priori permite pensar que, por lo menos para la carga o la descarga de un ciclo cualquiera, el modelo de Maxwell puede representar el comportamiento del material. Este aspecto se discutirá más detalladamente en el capítulo 4.

3.5.4 Módulo de Poisson

Para obtener el módulo de Poisson se midió con un pie de metro electrónico con precisión de 2 décimas de milímetro, mientras transcurría un ensayo de carga, la contracción en el ancho de la probeta mientras ésta era estirada en la dirección de su eje principal. Los valores obtenidos para el módulo de Poisson se presentan en la Figura 3-15 y en la Figura 3-16. Inicialmente se nota una alta dispersión en los valores obtenidos, pero éstos se estabilizan a medida que aumenta la deformación. No es para sorprenderse que las mediciones den valores mayores a 0.5, ya que el material no es isótropo y la condición de que el módulo de Poisson debe ser menor o igual a 0.5 es para materiales isótropos; para materiales ortótropos las condiciones que deben cumplirse son más generales y los valores obtenidos serán puestos a prueba en el capítulo 4.

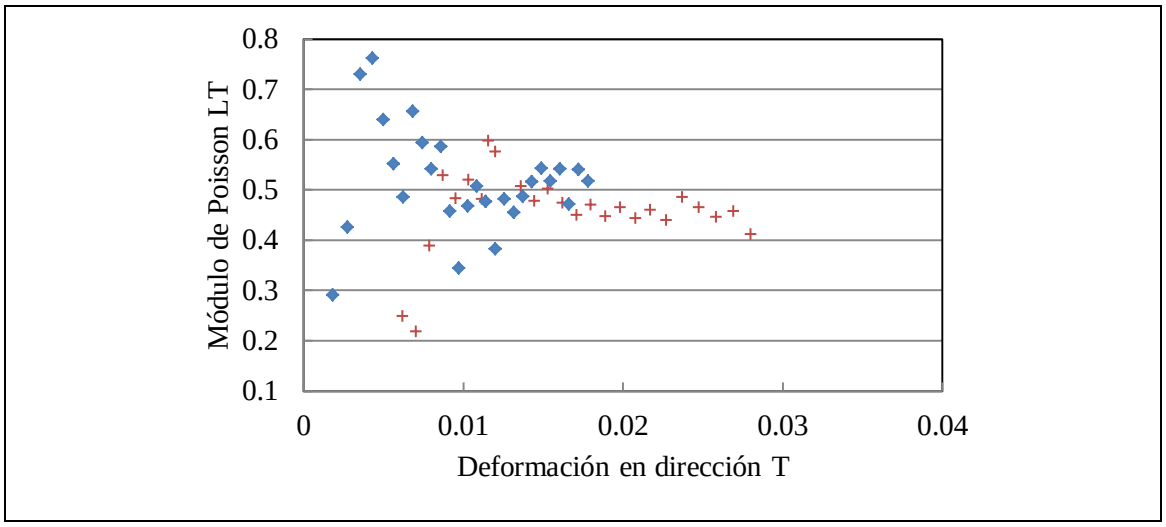


Figura 3-15: Módulo de Poisson LT (el subíndice LT se refiere a la compresión en la dirección longitudinal a medida que la probeta se carga en dirección transversal).

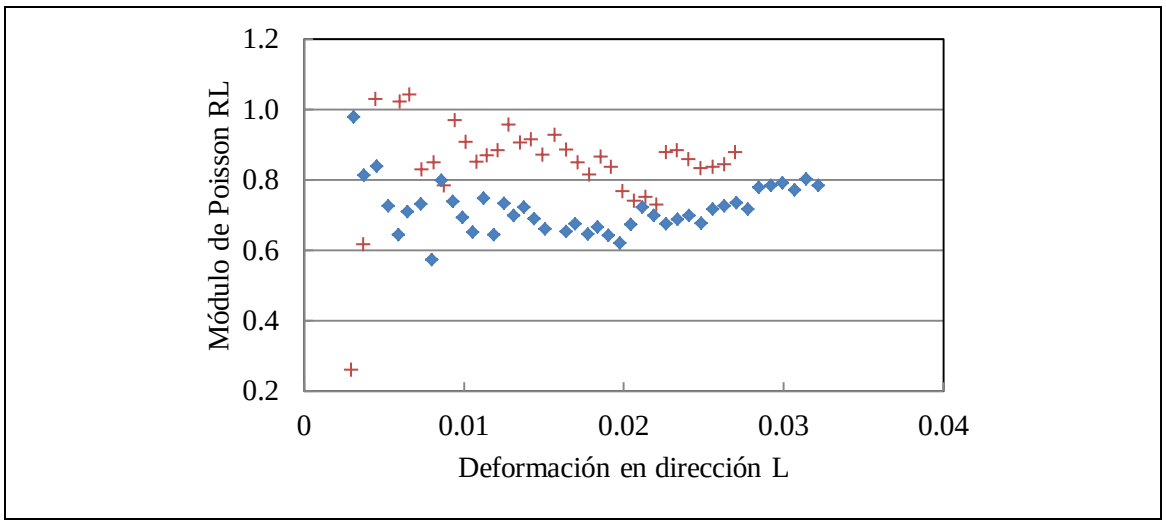


Figura 3-16: Módulo de Poisson RL (el subíndice RL se refiere a la compresión en la dirección radial a medida que la probeta se carga en dirección longitudinal).

□

Todos los ensayos presentados hasta ahora entregan valores y datos que serán utilizados en el capítulo 4 para encontrar y conocer las propiedades a corto plazo del modelo

utilizado para caracterizar el material. A continuación se muestran ensayos que fueron realizados sólo para comprender mejor el comportamiento mecánico de éste.

3.6 Otros ensayos

a) Plasticidad permanente y plasticidad aparente

Como se ha podido observar en los ensayos cíclicos, al descargar completamente el material, existe una deformación remanente a la cual se le llama plasticidad aparente. Este nombre se le asigna debido a que no es una plasticidad permanente, ya que si el material es dejado a relajar en un estado libre de tensiones, la deformación remanente comienza a disminuir tal como se ha observado en polietileno de alta densidad (Bartczak, 1992), en polipropileno con fibra de vidrio (Fritsch, 2009) y como se observa en este trabajo, en la Figura 3-17 y la Figura 3-18 para la dirección longitudinal y en la Figura 3-19 y la Figura 3-20 para la dirección transversal. Para ambos casos el tiempo de relajación en el estado libre de tensiones fue de 40 minutos.

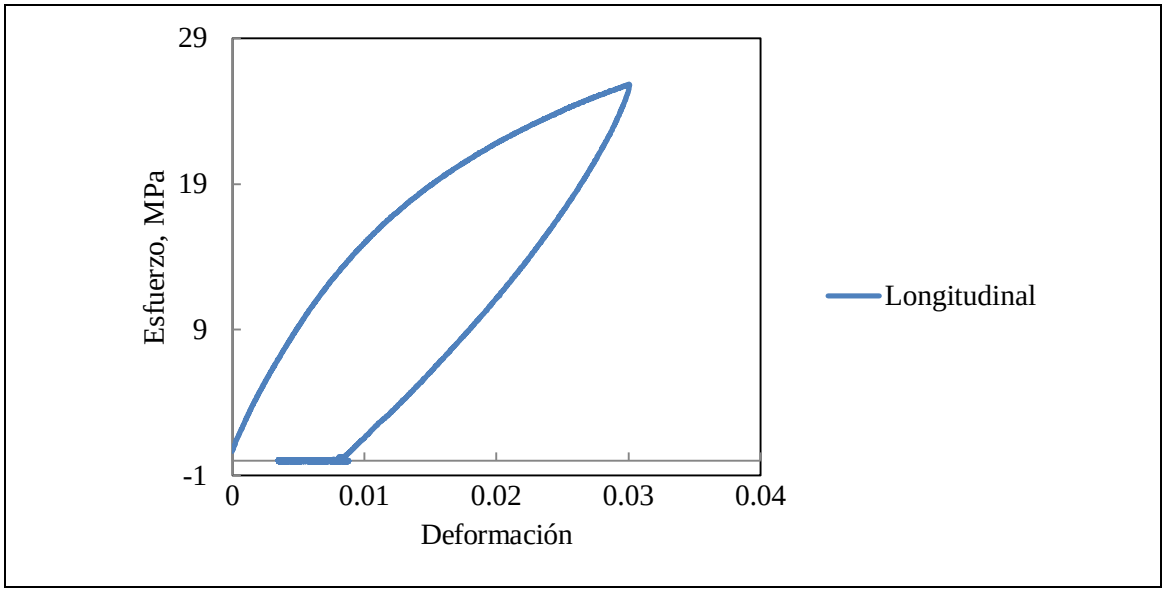


Figura 3-17: Disminución de la deformación una vez descargada y dejada libre la probeta longitudinal.

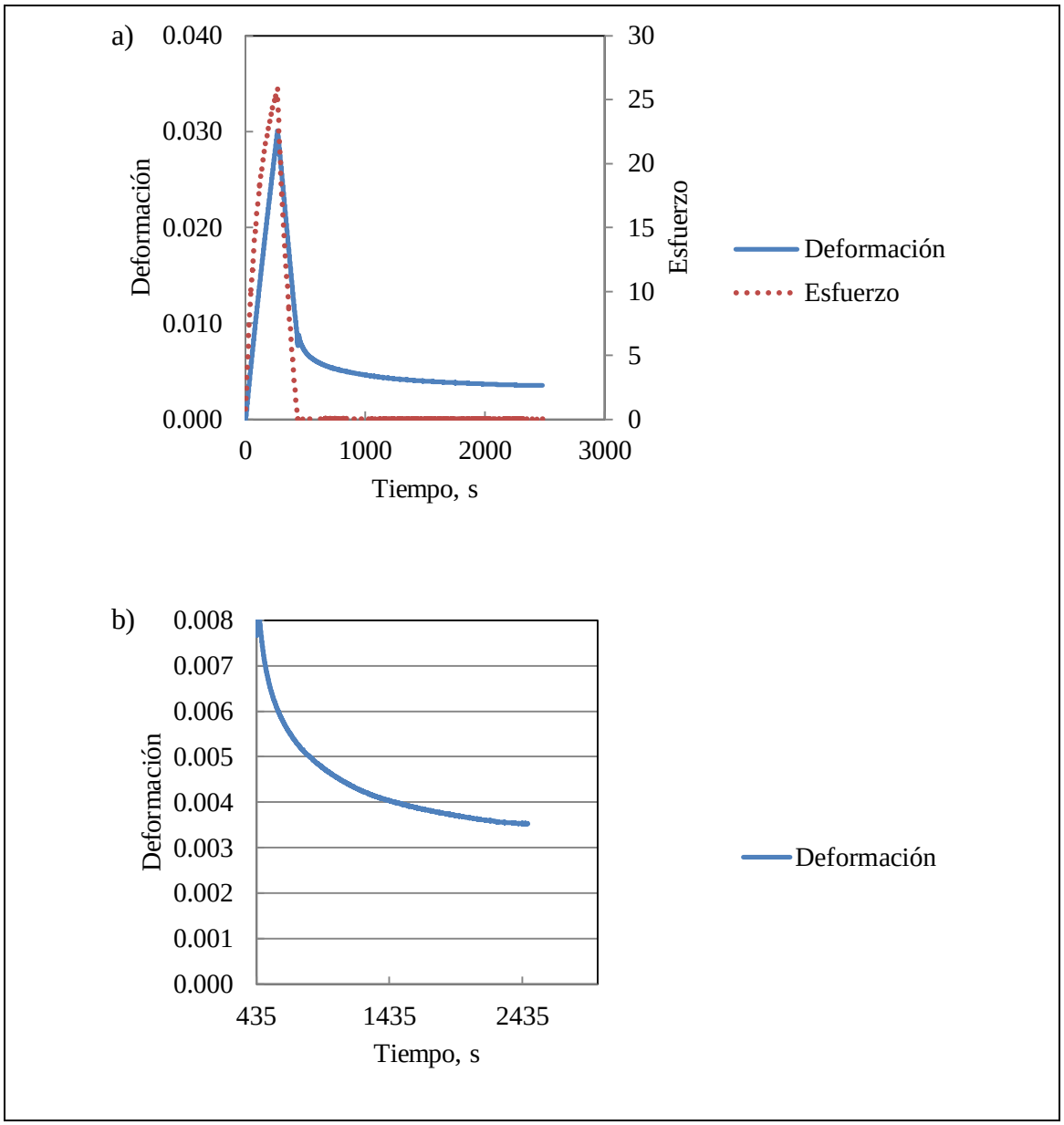


Figura 3-18: Deformación y esfuerzo versus tiempo para observar la disminución de la deformación una vez descargada y dejada libre la probeta longitudinal. En a) ensayo completo y en b) desde el momento en que la probeta quedó libre.

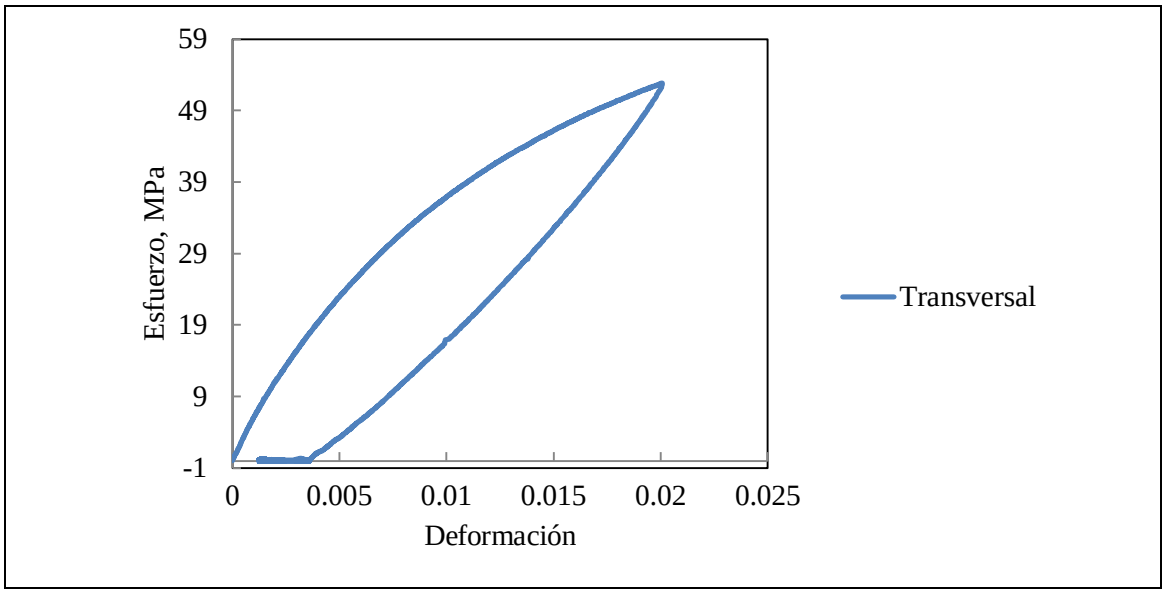


Figura 3-19: Disminución de la deformación una vez descargada y dejada libre la probeta transversal

En las Figura 3-17 y Figura 3-19 se muestra, en un gráfico tensión-deformación, el ciclo completo y cómo la deformación remanente disminuye una vez que la carga llega a cero y la probeta es dejada en un estado libre de tensiones. En las Figura 3-18 a) y Figura 3-20 a) se presenta en línea punteada la carga del ensayo y en línea continua la deformación de la probeta, ambas en función del tiempo, y se observa claramente cómo la carga llega a un máximo y luego vuelve a cero, instante en el cual, además de notarse una deformación remanente, la probeta es liberada de la mordaza en uno de sus extremos. Luego de esto, la probeta tiende a volver a su tamaño inicial disminuyendo su deformación permanente, en ambas probetas, en más de un 50% en un transcurso de 40 minutos. Las Figura 3-18 b) y Figura 3-20 b) muestra cómo disminuye la deformación justo desde el instante en que la carga llega a cero y la probeta es liberada de la mordaza de uno de sus extremos.

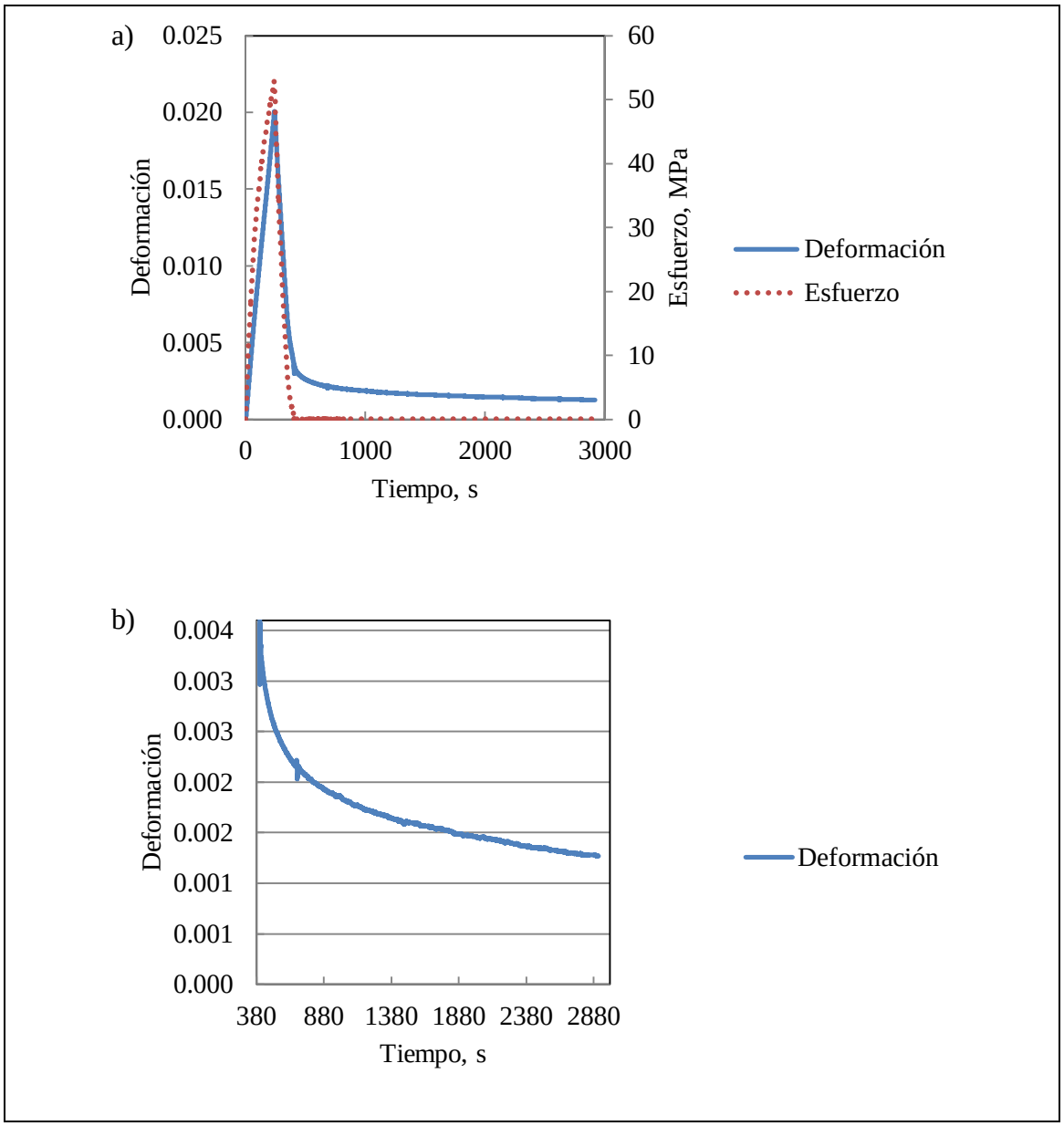


Figura 3-20: Deformación y esfuerzo versus tiempo para observar la disminución de la deformación una vez descargada y dejada libre la probeta transversal. En a) ensayo completo y en b) desde el momento en que la probeta quedó libre.

b) Relajación del esfuerzo en carga y recuperación del esfuerzo en descarga

En las Figura 3-21 y Figura 3-22 se puede apreciar que cuando el material es cargado y luego sometido a desplazamiento de travesaño constante e igual a cero, el esfuerzo en la

probeta comienza a disminuir, lo que se conoce como relajación. Por el contrario, cuando el material es descargado y luego sometido a desplazamiento de travesaño constante e igual a cero, el esfuerzo en el material comienza a aumentar. A este fenómeno se le ha dado el nombre de recuperación del esfuerzo y ha sido observado en polietileno de alta densidad (Zhang, 1997) y en materiales compuestos (Fritsch, 2009; Kim, 2002).

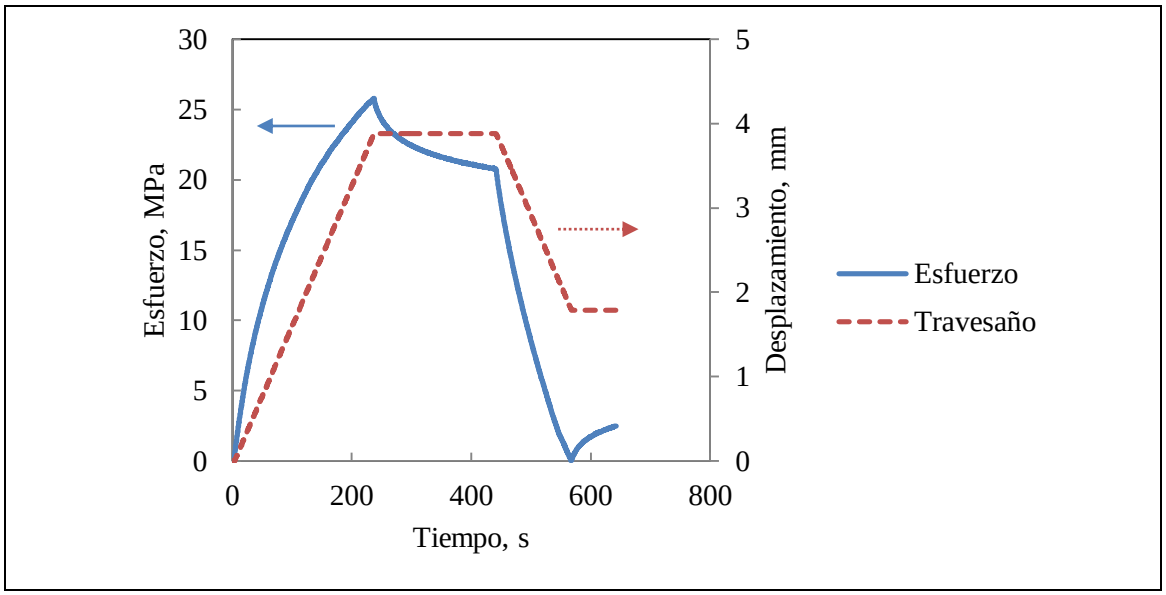


Figura 3-21: Relajación de carga y de descarga con probeta longitudinal.

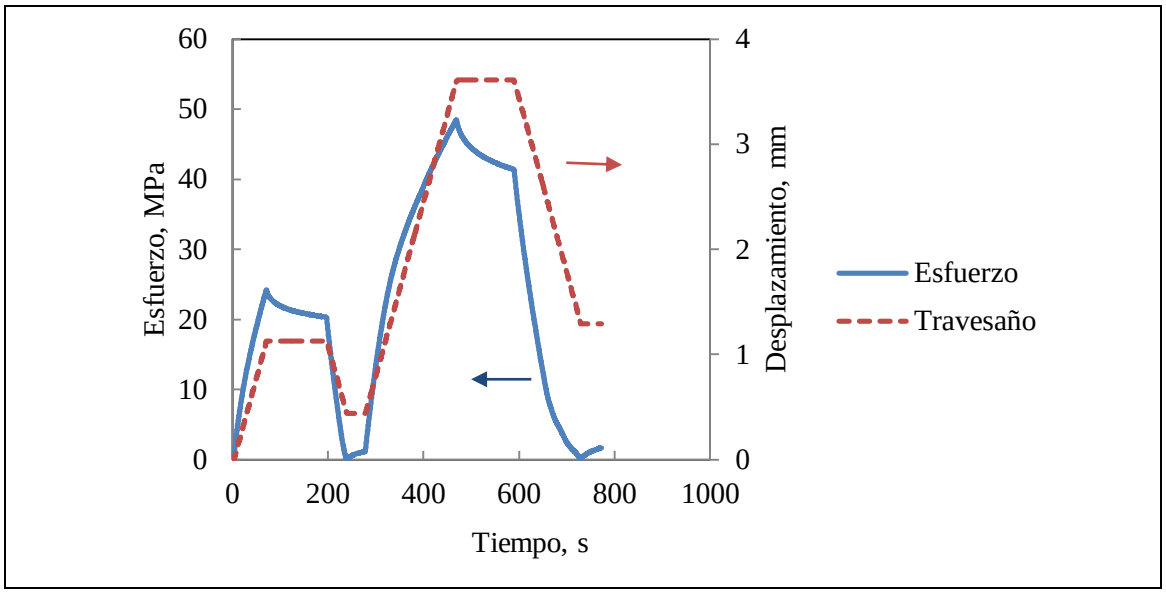


Figura 3-22: Relajación de carga y descarga con probeta transversal

Es interesante notar que aunque en ambos casos el material está sometido a tracción (carga y descarga), su comportamiento depende de la dirección del movimiento o bien del signo de la tasa de deformación, es decir, si el material está siendo cargado, de modo que su deformación aumenta y el movimiento se detiene, el esfuerzo en el material disminuye. Al contrario, si el material está siendo descargado, de modo que su deformación disminuye y el desplazamiento se detiene, el esfuerzo en el material aumenta.

3.7 Microscopía electrónica de barrido (SEM)

La superficie de fractura de las probetas ensayadas a tracción fue examinada mediante imágenes SEM con el objetivo de estudiar la fractura de las distintas probetas y ensayos, y para también tener mayor conocimiento sobre la orientación e interacción de la fibra en la matriz.

Para las imágenes SEM, distintos trozos de las probetas previamente fracturadas mediante ensayos de tracción fueron bañadas en oro (ver Figura 3-23 y Figura 3-24) y examinadas con el microscopio electrónico de barrido JEOL JSM 5300 (Jeol Ltd., Tokyo, Japón), operado a un voltaje de aceleración de 20kV (ver Figura 3-25). ADDA II

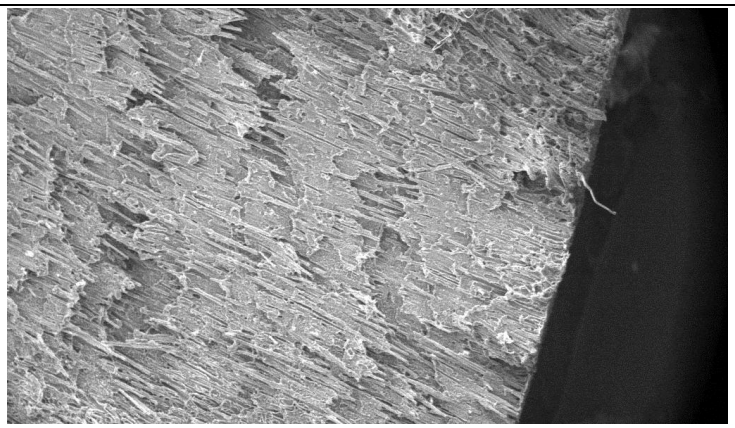
fue utilizado como interfase entre el microscopio y el computador, y las imágenes fueron analizadas con el software AnalySIS, ver. 3.2.

Figura 3-23: Distintas vistas de una muestra de probeta longitudinal analizada mediante SEM.

Figura 3-24: Distintas vistas de una muestra de probeta transversal analizada mediante SEM.

Figura 3-25: Máquina JEOL utilizada para obtener las imágenes SEM.

a)



b)

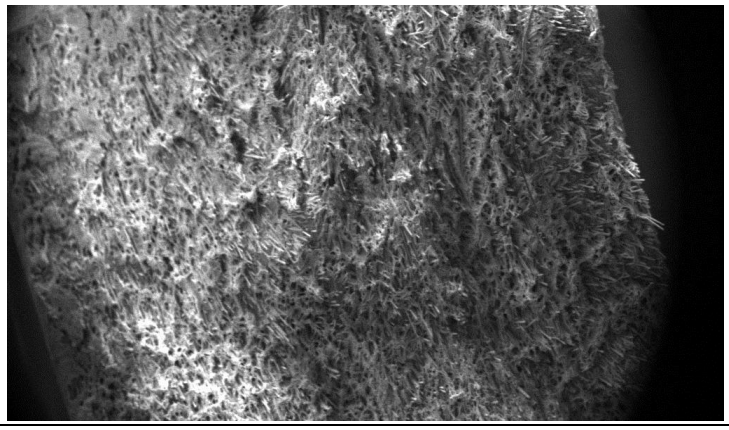
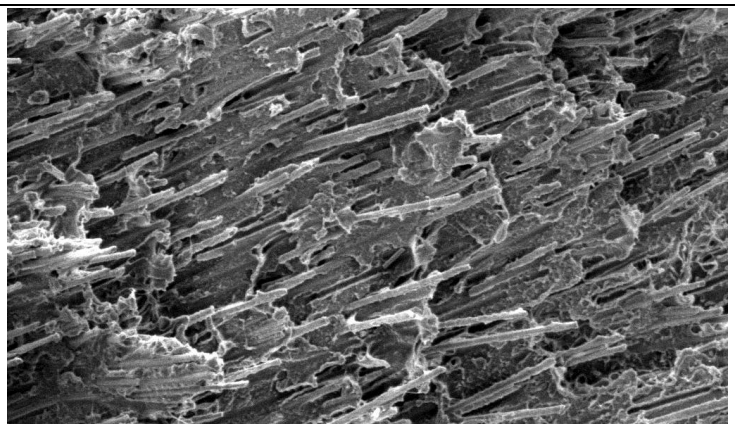


Figura 3-26: Micrografía SEM de la superficie de fractura de una probeta a) longitudinal ensayada a 10mm/min y b) transversal ensayada a 10mm/min. Aumento de 35X

a)



b)

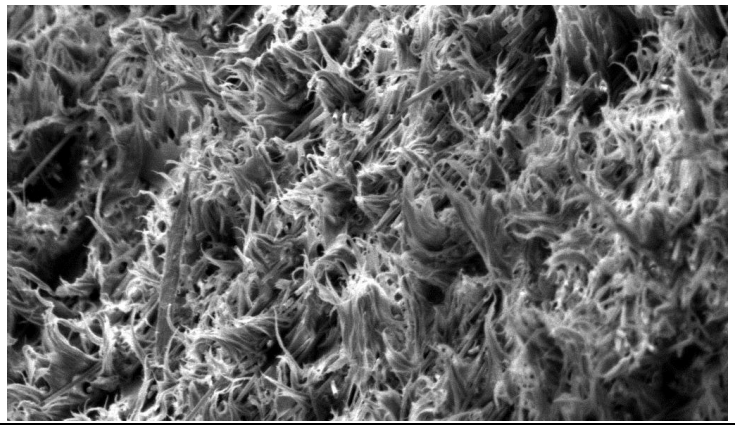
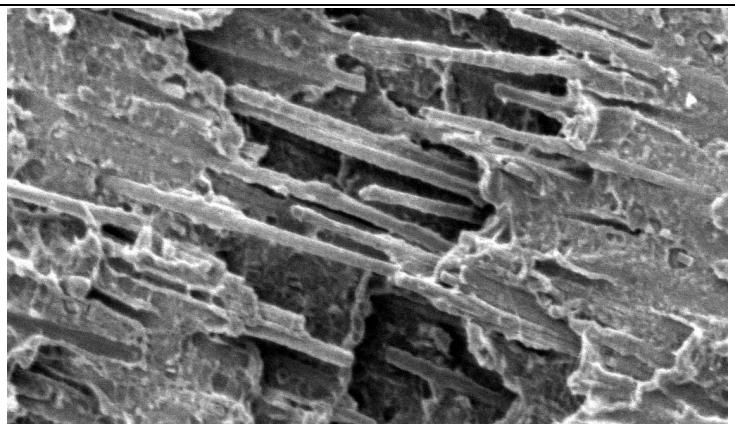


Figura 3-27: Micrografía SEM de la superficie de fractura de una probeta a) longitudinal ensayada a 1mm/min y b) transversal ensayada a 1mm/min. Aumento de 100X

a)



b)

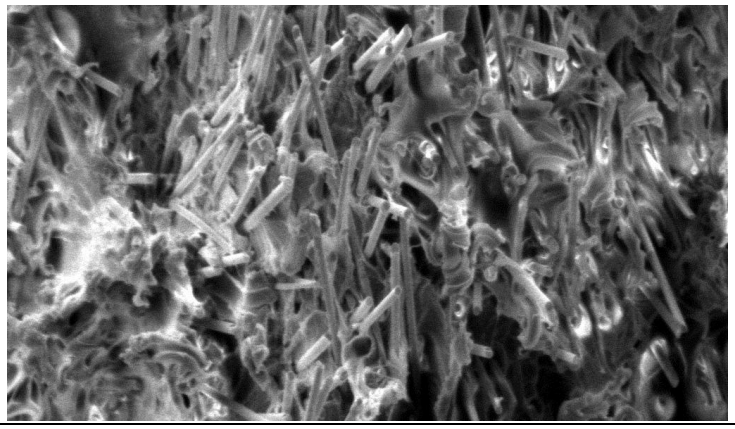


Figura 3-28: Micrografía SEM de la superficie de fractura de una probeta a) longitudinal ensayada a 10mm/min y b) transversal ensayada a 10mm/min. Aumento de 200X

En las Figura 3-26, Figura 3-27 y Figura 3-28 se muestra la superficie de fractura de probetas longitudinales y transversales, donde las imágenes a) corresponden a probetas longitudinales y las imágenes b) corresponden a probetas transversales. En las imágenes a) de las Figura 3-26, Figura 3-27 y Figura 3-28 se puede ver que la superficie de fractura es relativamente plana, lo que concuerda con lo observado macroscópicamente, esto es, una fractura frágil y regular, mientras que en las imágenes b) de las mismas figuras se aprecia una superficie irregular y desordenada, fenómeno observado macroscópicamente. Además, en las figuras a) se nota claramente cómo las fibras están orientadas perpendicularmente al eje principal de la probeta y contenidas en el plano de

fractura, mientras que en las imágenes b) se notan las fibras de vidrio orientadas preferentemente paralelas al eje principal de la probeta, esto es, en la dirección transversal. Todo esto, es decir, una orientación visiblemente preferencial y un tipo de fractura notoriamente distinto para cada tipo de probeta, avala la hipótesis de que el proceso de fabricación orienta la fibra preferencialmente en una dirección dentro de la lámina, lo que permite suponer un comportamiento de la lámina transversalmente isótropo.

□

En este capítulo se presentaron los experimentos llevados a cabo para comprender y conocer la naturaleza y comportamiento del material en estudio. En términos generales el capítulo se separó en 4 grandes bloques. El primero incluye desde el capítulo 3.1 hasta el capítulo 3.4, donde se explican descriptivamente el material estudiado, las probetas e instrumentos de ensayo utilizados y los ensayos mecánicos realizados. En el segundo bloque corresponde al apartado 3.5, donde se presentan todos los datos y resultados obtenidos de los ensayos mecánicos que serán utilizados en la caracterización del comportamiento del material a describir en el capítulo 4 y que será la base de la modelación mostrada en el capítulo 5. El tercer bloque corresponde al capítulo 3.6 y presenta una serie de ensayos llevados a cabo para entender y conocer de mejor manera distintos comportamientos del material que no fueron incorporados en la caracterización del mismo. Esto permite tener un mejor conocimiento sobre los alcances y limitaciones del modelo en el capítulo 4. El cuarto y último bloque que corresponde al capítulo 3.7 presenta un estudio microscópico del material mediante imágenes SEM que busca darle validez microscópica a la hipótesis de que la componente elástica del material en estudio se puede representar mediante un cuerpo transversalmente isótropo.

4. CARACTERIZACIÓN VISCOELÁSTICA DEL MATERIAL

En este capítulo se describe cómo se caracterizó el material utilizando distintas herramientas como la ley de mezclas (a nivel de laminado, no de componentes de cada lámina) y el modelo viscoelástico de Maxwell, y los distintos pasos que se siguieron para ajustar los parámetros del modelo a los valores obtenidos mediante los ensayos de tracción. Pero antes de presentar el modelo propuesto en esta tesis es importante hacer referencia al trabajo previo que llevó a escoger esta formulación.

Se ha visto que la formulación elástica del laminado permite encontrar las características mecánicas de la lámina transversalmente isótropa (ver Anexo A), pero esta formulación trae consigo el gran inconveniente de que no es capaz de representar la histéresis del material, la que implica una curva tensión-deformación distinta para carga y descarga, y tampoco puede representar la sensibilidad a la tasa de deformación. Por otro lado, también se ha visto que el modelo uniaxial de Maxwell presenta la gran ventaja de ser un modelo de solo 2 parámetros, pero que no es capaz de representar fielmente, en carga y descarga, el comportamiento del material utilizando el mismo conjunto de parámetros (ver Anexo A), pero que, tal como se comentó en el capítulo 2.2.3, sí es capaz de representar la carga y descarga utilizando distintos parámetros para cada caso. Además, como se trata de un material no-isótropo, para representar el comportamiento en distintas direcciones utilizando el modelo unidimensional de Maxwell se necesita un conjunto de parámetros para cada dirección, lo que no permite obtener un solo conjunto de parámetros que responda consecuentemente al comportamiento del material. Por lo tanto, el modelo propuesto, que será descrito en el apartado 4.3 busca rescatar las características y ventajas de la formulación elástica preliminar presentada en el Anexo A y del modelo de Maxwell y unificarlos en un solo modelo capaz de responder a la anisotropía y a la sensibilidad a la tasa de deformación del material en estudio.

4.1 Supuestos, limitaciones y alcances del modelo

El modelo tiene como supuestos que:

- Las láminas son unidireccionales, es decir, las fibras de vidrio tienen una orientación altamente preferencial al eje 1 de la lámina, o en el caso ideal paralelas a este eje. Esto permite representar la lámina como un cuerpo transversalmente isótropo. Este supuesto está avalado por las imágenes SEM presentadas en el apartado 3.7.
- Las láminas están unidas perfectamente entre sí, por lo que no es necesario estudiar la posibilidad de que existan huecos o vacíos entre láminas, o que haya una mala unión entre ellas debido a problemas de fabricación del tubo.
- La interfaz polietileno-fibra de vidrio es perfecta, por lo que los esfuerzos entre ambos componentes se transmiten perfectamente.

El modelo no es capaz de:

- Representar un cambio en la composición del material, esto es, en la cantidad de fibra de vidrio. Esto debido a que no hay una variable o relación que considere el porcentaje de fibra de vidrio en el material, por lo que las propiedades encontradas son solamente válidas para láminas unidireccionales con 20% en peso de fibra de vidrio. No obstante, cabe señalar que el método presentado es aplicable a cualquier composición del material.
- Representar la recuperación elástica que manifiesta el material una vez que éste es descargado y dejado libre sin restricciones geométricas. Este fenómeno fue observado en el capítulo 3.6 b). Es importante señalar por qué este fenómeno se dejó fuera del análisis. Esto se debe principalmente a que la deformación incurrida por el material en esta recuperación es muy baja en relación a la deformación de ruptura del material. Por otra parte, la inclusión de esta recuperación en el modelo requería incorporar a lo menos un resorte en paralelo al modelo de Maxwell lo que le agrega parámetros al modelo propuesto, modelo que busca representar el comportamiento mecánico a corto plazo del material en estudio con el menor número de parámetros posible.

El modelo sí es capaz de:

- Representar la anisotropía del material en estudio. Este fenómeno se observó experimentalmente en el capítulo 3 a través de los diferentes ensayos mecánicos

llevados a cabo, donde dependiendo de la dirección de la probeta traccionada se obtuvieron diferentes curvas tensión deformación. La anisotropía se debe a la orientación preferente de las fibras en una dirección, fenómeno observado en el apartado 3.7.

- Representar la sensibilidad a la tasa de deformación que tiene el material en estudio. Este fenómeno se observó en el capítulo 3, donde se presentan los ensayos de tracción a distintas velocidades de desplazamiento de travesaño, lo que hace obtener diferentes curvas tensión deformación para cada caso.

4.2 Análisis preliminar del efecto viscoso

En este apartado se detalla el análisis efectuado sobre el efecto viscoso y las implicancias que éste tiene sobre el modelo propuesto en este trabajo.

El análisis llevado a cabo consistió en encontrar, para cada curva tensión-deformación obtenida en carga y descarga en el capítulo 3, los parámetros del modelo unidimensional de Maxwell (E y η) que se ajustaran mejor a éstas. Esto se realizó con el objetivo de buscar alguna relación o tendencia entre las variables involucradas para todos los casos observados. Así, ajustando el modelo unidimensional de Maxwell a cada uno de los casos, se obtuvieron 12 conjuntos de parámetros (E_i y η_i, para i=1..12), ya que los ensayos realizados fueron a 3 velocidades, con probetas en 2 direcciones, y en carga y descarga. Los parámetros encontrados para las probetas longitudinales y transversales se presentan en las tablas Tabla 4-1 y Tabla 4-2, respectivamente.

Tabla 4-1: Parámetros de ajuste del modelo unidimensional de Maxwell para probetas longitudinales

		Carga			Descarga		
Velocidad de travesaño	mm/min	10	1	0.1	10	1	0.1
Módulo de elasticidad	GPa	1.8	2.1	1.9	1.5	1.2	1.0
Viscosidad	GPa*s	32.6	190	1800	17.3	120	960
Tasa de deformación	1/s*10^6	1700	160	12	-1600	-150	-14

Tabla 4-2: Parámetros de ajuste del modelo unidimensional de Maxwell para probetas transversales

		Carga			Descarga		
Velocidad de travesaño	mm/min	10	1	0.1	10	1	0.1
Módulo de elasticidad	GPa	6.0	4.7	5.1	3.3	2.4	2.6
Viscosidad	GPa*s	130	1300	5200	52	330	5100
Tasa de deformación	1/s*10^6	580	60	8	-800	-130	-8

En relación al módulo de elasticidad obtenido, en este ejercicio no se observó ninguna relación entre las variables involucradas que lograra definir algún criterio de comportamiento de esta variable. Para la viscosidad, en cambio, se observa que a menor tasa de deformación que experimenta la probeta en el ensayo, mayor es la viscosidad obtenida que logra un buen ajuste entre los datos experimentales y el modelo unidimensional de Maxwell. Esta tendencia se cumple para todos los casos mostrados en la Tabla 4-1 y en la Tabla 4-2, y llevó a buscar una relación que involucrara estas dos

variables, esto es, la viscosidad y la tasa de deformación. Así, como se observa en la Figura 4-1, al graficar el logaritmo de la viscosidad versus el logaritmo de la tasa de deformación los valores de todos los casos caen sobre una línea recta. Esto implica que si se define la viscosidad como función de la tasa de deformación, el modelo de Maxwell se podría ajustar al material en estudio de mejor manera que si se considera la viscosidad como una constante. Esta observación llevó a definir la viscosidad como:

$$\eta(\dot{\varepsilon}) = A\exp(-b\ln\dot{\varepsilon}) \tag{4.1}$$

Con esto, la ecuación (2.45) queda de la forma

$$\dot{\sigma}(\sigma) = -\frac{E}{A\exp(-b\ln\dot{\varepsilon})}\sigma + E\dot{\varepsilon} \tag{4.2}$$

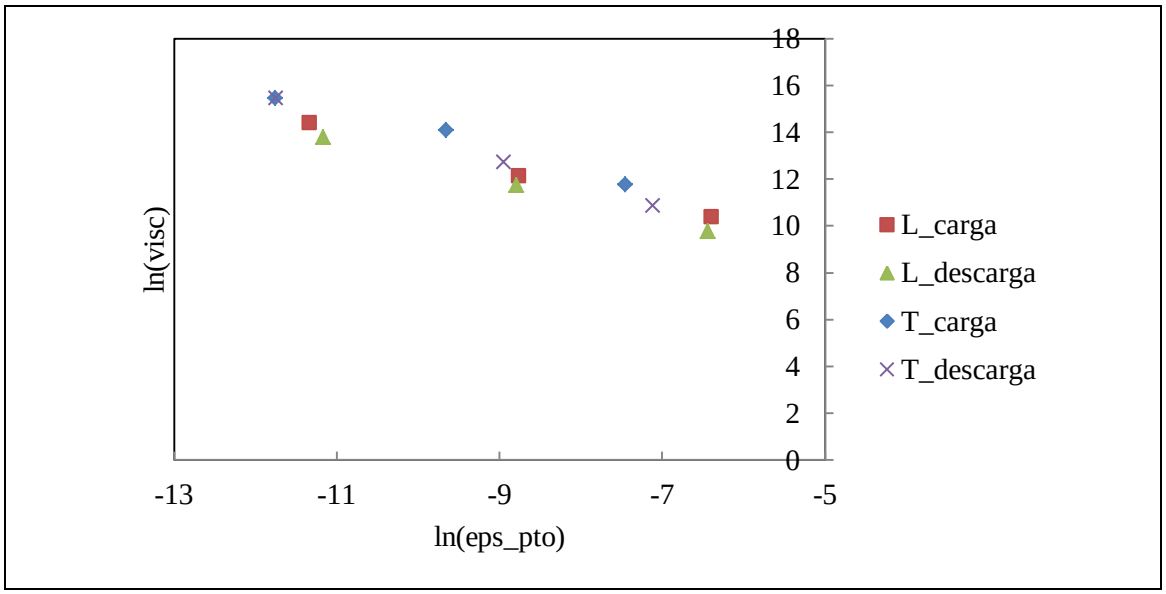


Figura 4-1: Viscosidad versus tasa de deformación en escala logarítmica

Este análisis preliminar del efecto viscoso es de suma importancia en el desarrollo de esta tesis, ya que permite mejorar considerablemente el ajuste del modelo aumentando el número de parámetros solo en uno y además disminuye en gran manera una de las falencias del modelo de Maxwell que han sido comentadas en este trabajo, esta es, la incapacidad de lograr un buen ajuste tanto en carga como descarga con el mismo

conjunto de parámetros, manteniendo las ventajas de ser un modelo de pocos parámetros y fácil interpretación física.

4.3 Ley de Tensión-Deformación

En el modelo se consideró la siguiente relación tensión-deformación:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \left(\mathbf{e} - \mathbf{e}^{p}\right) \tag{4.3}$$

Donde **C** es el tensor elástico ortótropo, **σ** es el tensor de esfuerzos de Cauchy definido en términos del tensor de deformación de Almansi $\mathbf{e} = 1/2\ (\mathbf{1} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1})$, con **F** el tensor de gradiente de deformación. El súper índice p se refiere a la componente plástica.

La evolución de la variable interna $\mathbf{e}^{p}$ está definida bajo un contexto teórico viscoplástico *rate-dependent* como

$$L_v\left(\mathbf{e}^{p}\right) = \lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{4.4}$$

Donde L_v es la derivada de Lie (*frame-indifferent*), λ es el parámetro viscoplástico definido como

$$\lambda = \left\langle \frac{F}{\eta} \right\rangle \tag{4.5}$$

y F(**σ**) es el potencial de flujo plástico. Bajo este marco, F también se asume como la función de fluencia tal que no ocurre evolución viscoplástica cuando $F \leq 0$. En este caso $F \geq 0$ siempre, por lo que el material no debe superar ningún umbral para entrar a la zona viscosa. Así, F se define como

$$F = \sigma_{eq} = \sqrt{3J_2} \geq 0 \tag{4.6}$$

Donde $J_2 = 1/2\ (\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}')$ es el segundo invariante de la parte deviatórica del esfuerzo, **σ′**. A su vez, $\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - p \cdot \mathbf{1}$, donde **1** es la matriz identidad y $p = 1/3\ \mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma})$, con tr como la traza.

Además, se adopta la siguiente ley viscosa:

$$\eta\left(\dot{\varepsilon}_{eq}\right) = A \exp\left(-b \ln \dot{\varepsilon}_{eq}\right) \tag{4.7}$$

donde A y b son parámetros del material y $\dot{\varepsilon}_{eq}$ es la tasa de deformación equivalente definida ene ste contexto como

$$\dot{\varepsilon}_{eq} = \frac{\boldsymbol{\sigma} : L_v(\mathbf{e})}{\sigma_{eq}} \tag{4.8}$$

4.4 Modelo de laminado viscoelástico tridimensional

En este apartado se presenta el modelo propuesto para representar al material estudiado. El modelo propuesto, al igual que el modelo de Maxwell, cuenta con un elemento elástico y uno viscoso conectados en serie, pero con la diferencia de que el elemento elástico, en lugar de ser unidimensional de módulo elástico E, es transversalmente isótropo con su respectiva matriz de flexibilidad y el elemento viscoso, en lugar de ser constante, se define como función de la tasa de deformación $\dot{\varepsilon}$ tal como se detalló en el apartado 4.2. Debido a la naturaleza laminar del material, la caracterización se realiza a nivel de lámina, que es la unidad constituyente del laminado, y a partir de las propiedades de la lámina se determinan las propiedades del laminado.

4.4.1 Componente elástica del modelo

Sea $\mathbf{D}_i$ la matriz de flexibilidad de la lámina i en ejes coordenados (1-2-3) de la lámina cuyos términos son D_{ij} y $\overline{\mathbf{D}}$ la matriz de flexibilidad del laminado en ejes (x-y-z) del laminado con términos $\overline{D}_{ij}$, se define la matriz de rigidez de la lámina como $\mathbf{C}_i = \mathbf{D}_i^{-1}$ y se adopta la ley de mezclas a nivel de lámina para calcular la matriz de rigidez del laminado. La ley de mezclas dice que, $X = \sum_i f_i \cdot X_i$ donde X es la propiedad a calcular y f_i y X_i son la fracción de volumen y la propiedad del elemento i, respectivamente. Por ende, la matriz de rigidez $\overline{\mathbf{C}}$ del laminado será la sumatoria de las matrices de rigidez de cada lámina ponderadas por su fracción de volumen y, por supuesto, todas en el mismo sistema coordenado x-y-z del laminado. Sea $\mathbf{T}_i$ la matriz de rotación que lleva del sistema coordenado 1-2-3 de la lámina al sistema x-y-z del

laminado, entonces la matriz de rigidez de la lámina *i* en el sistema coordenado del laminado es $\overline{\mathbf{C}}_i = \mathbf{T}_i \times \mathbf{T}_i : \mathbf{C}_i : \mathbf{T}_i^T \times \mathbf{T}_i^T$. Finalmente, utilizando la ley de mezclas, se tiene que la matriz de rigidez del laminado es $\overline{\mathbf{C}} = \sum_i f_i \cdot \overline{\mathbf{C}}_i$, donde f_i es la fracción de volumen de la lámina *i*. Pero si cada lámina tiene el mismo espesor la expresión queda

$$\overline{\mathbf{C}} = \frac{1}{n}\sum_i^n \overline{\mathbf{C}}_i \tag{4.9}$$

donde *n* es el número de capas.

Ahora que ya se tiene la matriz de rigidez del laminado, la matriz de flexibilidad del laminado se calcula como $\overline{\mathbf{D}} = \overline{\mathbf{C}}^{-1}$. Por lo tanto, la matriz de flexibilidad del laminado en función de la matriz de flexibilidad de la lámina queda como

$$\overline{\mathbf{D}} = \left(\frac{1}{n}\sum_i^n \mathbf{T}_i \times \mathbf{T}_i : \mathbf{D}_i^{-1} : \mathbf{T}_i^T \times \mathbf{T}_i^T \right)^{-1} \tag{4.10}$$

con

$$\overline{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \overline{D}_{11} & \overline{D}_{12} & \overline{D}_{13} & \overline{D}_{14} & \overline{D}_{15} & \overline{D}_{16} \\ \overline{D}_{21} & \overline{D}_{22} & \overline{D}_{23} & \overline{D}_{24} & \overline{D}_{25} & \overline{D}_{26} \\ \overline{D}_{31} & \overline{D}_{32} & \overline{D}_{33} & \overline{D}_{34} & \overline{D}_{35} & \overline{D}_{36} \\ \overline{D}_{41} & \overline{D}_{42} & \overline{D}_{43} & \overline{D}_{44} & \overline{D}_{45} & \overline{D}_{46} \\ \overline{D}_{51} & \overline{D}_{52} & \overline{D}_{53} & \overline{D}_{54} & \overline{D}_{55} & \overline{D}_{56} \\ \overline{D}_{61} & \overline{D}_{62} & \overline{D}_{63} & \overline{D}_{64} & \overline{D}_{65} & \overline{D}_{66} \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

donde cada uno de los términos $\overline{D}_{ij}$ de la matriz de flexibilidad $\overline{\mathbf{D}}$ del laminado es función de términos D_{ij} de la matriz de flexibilidad **D** de la lámina o bien cero.

En particular, debido a la orientación preferente que obtienen las fibras en la lámina, el material en estudio se define como transversalmente isótropo, por lo que la matriz de flexibilidad **D** de la lámina queda como:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{12}}{E_{22}} & 0 & -\frac{\nu_{12}}{E_{22}} & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{22}} & 0 & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{E_{22}}(1+\nu_{23}) & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{22}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & 0 & \frac{1}{E_{22}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

y por ende, para la presente tesis, los términos $\overline{D}_{ij}$ de la matriz de flexibilidad $\overline{\mathbf{D}}$ están en función de E_{11}, E_{22}, G_{12}, ν_{12} y ν_{23}.

4.4.2 Componente viscosa modelo

Ya definida la componente elástica del modelo sólo queda definir la componente viscosa de éste. Esta componente, dada la evidencia del análisis preliminar del efecto viscoso presentado en el apartado 4.2, será definida tal como fue presentada en ese apartado y se presenta ahora en la ecuación (4.13), es decir, dependiente de la tasa de deformación e independiente de la dirección en que se aplique la fuerza o la deformación.

$$\eta(\dot{\varepsilon}) = A\exp(-b\ln\dot{\varepsilon}) \tag{4.13}$$

□

Para una mejor comprensión del modelo se presentan la Figura 4-2, la Figura 4-3 y la Figura 4-4. La primera, muestra un esquema de una lámina transversalmente isótropa de polietileno con fibra de vidrio corta y luego el modelo propuesto para su caracterización. Es importante hacer hincapié en que el modelo propuesto es para caracterizar la lámina del material y, por ende, las propiedades del laminado que se obtienen es una combinación de las propiedades de las láminas. La Figura 4-3 muestra, a mano izquierda, un esquema del modelo unidimensional de Maxwell y a mano derecha, un esquema del modelo propuesto. Se aprecia fácilmente cómo el modelo propuesto se basa

en el modelo de Maxwell y qué modificaciones se le realizaron a este último para lograr el modelo propuesto final. Y la Figura 4-4 muestra dos tipos de laminado, a mano izquierda un laminado conformado por 3 láminas orientadas de a 90° y a mano derecha un laminado conformado por 4 láminas orientadas de a 45°, esto con el objetivo de enfatizar visualmente que las propiedades del laminado serán todas definidas a partir de las propiedades de su unidad que la conforma, en este caso, la lámina.

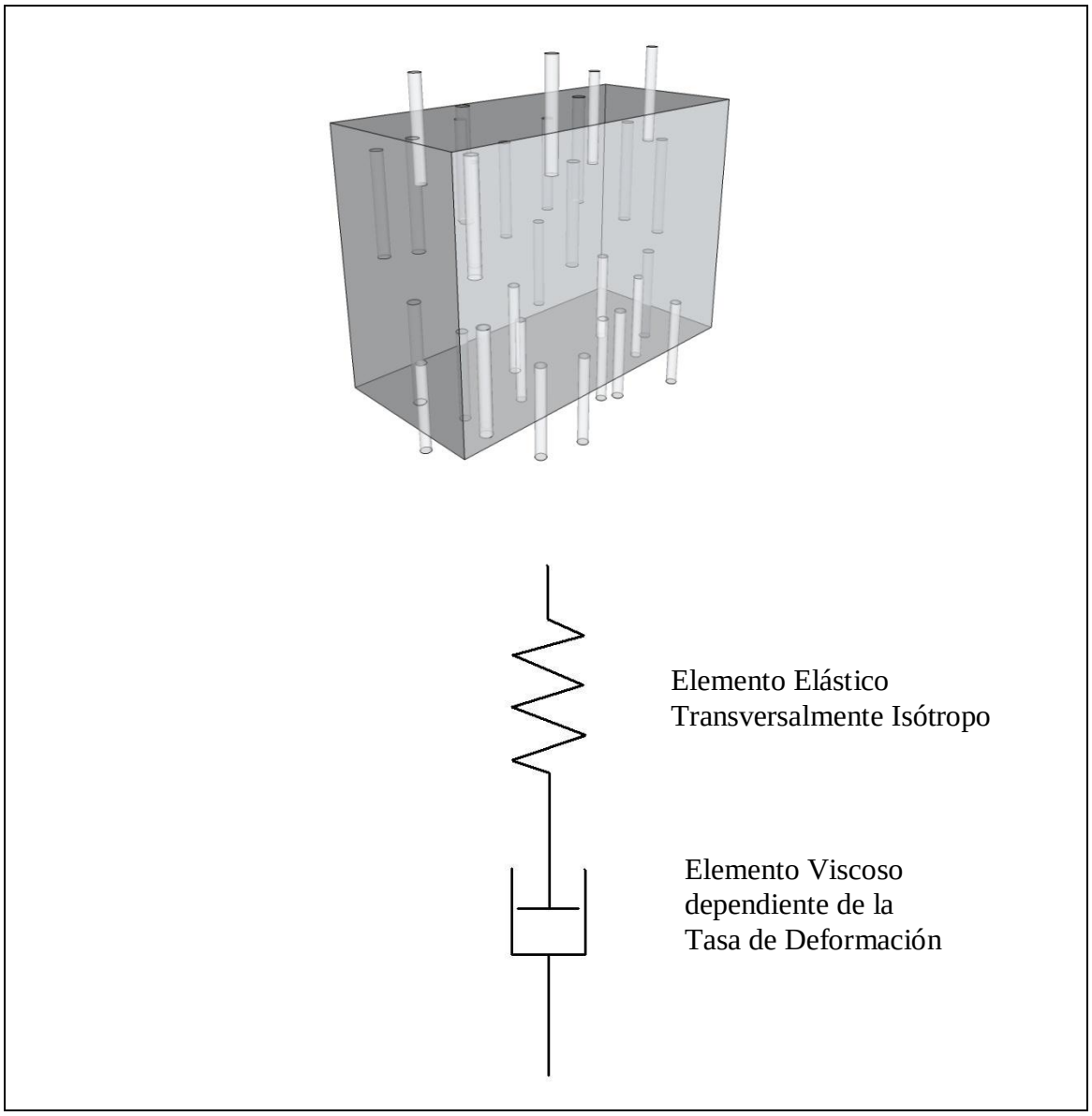


Figura 4-2: Arriba, esquema de una lámina de polietileno con fibra de vidrio corta; abajo, esquema del modelo propuesto para caracterizar la lámina.

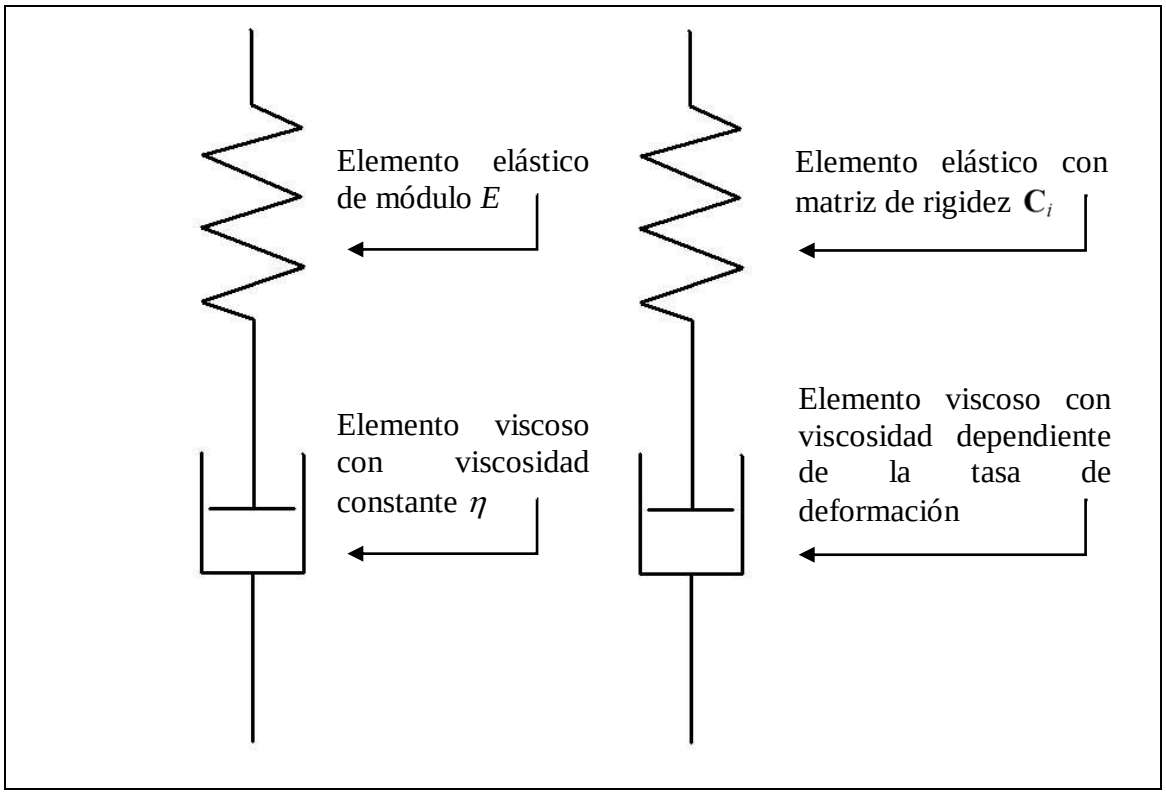


Figura 4-3: Analogía entre el modelo de Maxwell (izquierda) y el modelo propuesto para caracterizar la lámina (derecha).

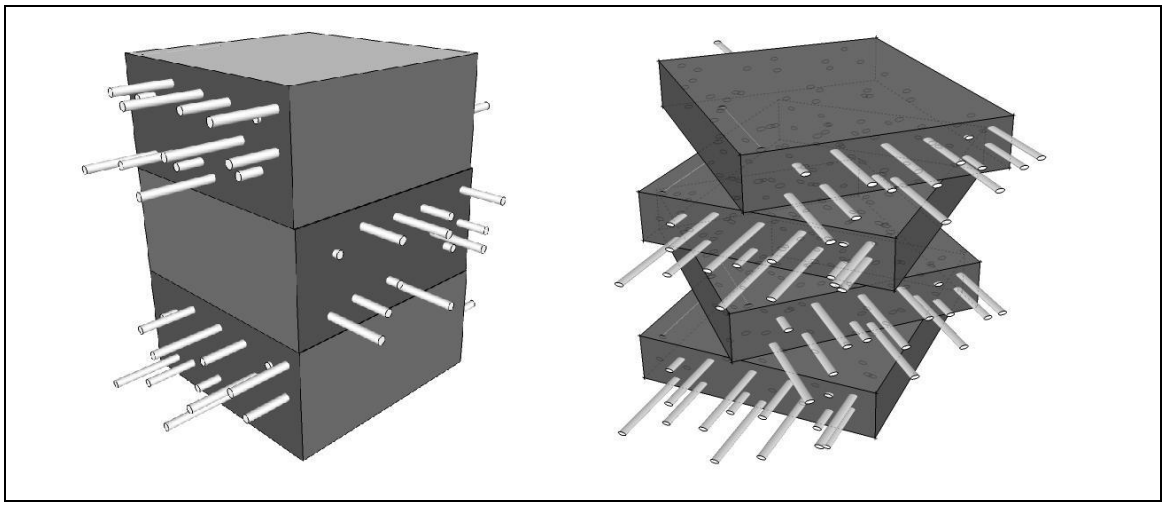


Figura 4-4: Esquemas de laminados. Izquierda: Laminado de 3 láminas ordenadas de a 90°. Derecha: laminado de 4 láminas ordenadas de a 45°.

Con este modelo se busca estimar los parámetros elásticos E_{11}, E_{22}, G_{12}, ν_{12}, ν_{23} y los parámetros viscosos A y b de la lámina a partir de ensayos de tracción del laminado en dirección longitudinal y transversal. El procedimiento para lograr esto se presenta a continuación.

4.5 Procedimiento para la obtención de los parámetros del modelo

Para obtener los parámetros del modelo, primero se debe tener conocimiento de la geometría del laminado desde el cual serán obtenidas las probetas de ensayo, es decir, el número de láminas y el ángulo de cada una de ellas respecto a la dirección principal del laminado, ya que es respecto a éste que se encontrarán las propiedades de la lámina. En el caso de la presente tesis, el laminado fue obtenido de un tubo de 5 láminas orientadas a +82° y -82° aproximadamente respecto al eje principal del tubo. Conocido esto luego se debe:

i) Definir la matriz de flexibilidad de la lámina (en este caso es una matriz transversalmente isótropa)

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & D_{14} & 0 & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 & D_{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ D_{14} & D_{24} & 0 & D_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

ii) Calcular la matriz de rigidez de la lámina como $\mathbf{C}_i = \mathbf{D}_i^{-1}$ para que quede en función de los parámetros D_{ij} de la lámina.

iii) Para cada lámina, rotar la matriz $\mathbf{C}_i$ mediante $\overline{\mathbf{C}}_i = \mathbf{T}_i \times \mathbf{T}_i : \mathbf{C}_i : \mathbf{T}_i^T \times \mathbf{T}_i^T$ (ver ANEXO D)), para que todas las matrices queden en el mismo sistema de coordenadas principales, xyz, del laminado.

iv) Aplicar ley de mezclas para obtener la matriz de rigidez del laminado como $\overline{\mathbf{C}} = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n}\overline{\mathbf{C}}_i$, donde n es el número de láminas.

v) Obtener la matriz de flexibilidad del laminado haciendo $\overline{\mathbf{D}} = \overline{\mathbf{C}}^{-1}$.

vi) Aplicar mínimos cuadrados (ver más adelante y ANEXO B)), obteniendo así D_{11}, D_{22}, D_{12}, D_{23}, D_{44}, A y b.

vii) Obtener $E_{11} = 1/D_{11}$, $E_{22} = 1/D_{22}$, $G_{12} = 1/D_{44}$, $\nu_{12} = E_{22}D_{12}$, $\nu_{23} = E_{22}D_{23}$ y $\eta = A\exp(-b\ln\dot{\varepsilon})$.

El ajuste de los parámetros se realizó utilizando el software AMPL mediante el solver MINOS de programación no-lineal. El código escrito se presenta en el ANEXO B). A continuación se presenta qué datos y relaciones fueron utilizados en la obtención de los parámetros del modelo.

Gracias a la linealidad entre la tasa de esfuerzo y el esfuerzo observada en la Figura 3-13 y la Figura 3-14 es que se utiliza la ecuación (4.2) para el ajuste mediante mínimos cuadrados, además esta ecuación no depende explícitamente de condiciones iniciales o finales de cada ensayo como deformación máxima o esfuerzo máximo. Otra opción más intuitiva habría sido ajustar los parámetros utilizando directamente la relación tensión-deformación, pero esta idea fue descartada ya que la relación tensión-deformación para el elemento de Maxwell es no-lineal y la descarga depende de la deformación y el esfuerzo máximos alcanzados en la carga. Por ende, para los ensayos de tracción uniaxial en la dirección longitudinal (x) y transversal (y) se tendrá que

$$\dot{\sigma}_{xx}(\sigma_{xx}) = E_{xx}\cdot\dot{\varepsilon}_{xx} - \frac{E_{xx}}{A\exp\left(-b\ln\dot{\varepsilon}_{xx}\right)}\cdot\sigma_{xx} \tag{4.15}$$

$$\dot{\sigma}_{yy}(\sigma_{yy}) = E_{yy}\cdot\dot{\varepsilon}_{yy} - \frac{E_{yy}}{A\exp\left(-b\ln\dot{\varepsilon}_{yy}\right)}\cdot\sigma_{yy} \tag{4.16}$$

respectivamente, donde $\dot{\sigma}_{xx}$, $\dot{\sigma}_{yy}$, $\dot{\varepsilon}_{xx}$, $\dot{\varepsilon}_{yy}$, σ_{xx}, σ_{yy} son datos y $E_{xx} = 1/\overline{D}_{11}$, $E_{yy} = 1/\overline{D}_{22}$, A y b son los parámetros a encontrar. Cabe destacar que E_{xx} y E_{yy} son

componentes de la matriz de rigidez del laminado y que debido a la definición de la matriz $\overline{\mathbf{D}}$, los términos $\overline{D}_{11}$ y $\overline{D}_{22}$ están en función de los parámetros de la lámina D_{11}, D_{22}, D_{12}, D_{23} y D_{44}. No obstante, la utilización de las ecuaciones (4.15) y (4.16) no es suficiente para asegurar que los módulos de Poisson se definan, es por esto que al método de los mínimos cuadrados se agregan las ecuaciones (4.17) y (4.18). Por lo visto en Okoli (2000), el módulo de Poisson no es sensible a la tasa de deformación, por lo tanto agregar sólo la parte elástica del modelo no incurre en contradicciones con el modelo. Las ecuaciones agregadas se acompañan de las mediciones presentadas en el apartado 3.5.4 que corresponde a las mediciones del módulo de Poisson.

Del ensayo de tracción uniaxial en las direcciones longitudinal y transversal se tiene que:

i) Carga en dirección longitudinal

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{D}_{21} \cdot \sigma_{xx} \\ \overline{D}_{41} \cdot \sigma_{xx} \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

ii) Carga en dirección transversal

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{D}_{12} \cdot \sigma_{yy} \\ \overline{D}_{42} \cdot \sigma_{yy} \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

donde $\overline{D}_{11}$, $\overline{D}_{22}$, $\overline{D}_{21} = \overline{D}_{12}$, $\overline{D}_{41}$ y $\overline{D}_{42}$ están en función de D_{11}, D_{22}, D_{12}, D_{23} y D_{44}, y ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{zz}, σ_{xx} y σ_{yy} son datos obtenidos de los ensayos de tracción y de las mediciones realizadas.

Por lo tanto, si se ingresan las ecuaciones (4.15), (4.16), (4.17) y (4.18) al problema de mínimos cuadrados, la función a minimizar resulta:

$$F = \sum_{VELOCIDAD} \left(\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{N_L} \left(\overline{D}_{11} \cdot \sigma_{xx_i} - \varepsilon_{xx_i}\right)^2 + \left(\overline{D}_{21} \cdot \sigma_{xx_i} - \varepsilon_{yy_i}\right)^2 + \left(\overline{D}_{41} \cdot \sigma_{xx_i} - \varepsilon_{zz_i}\right)^2 \\ + \sum_{j=1}^{N_T} \left(\overline{D}_{12} \cdot \sigma_{yy_j} - \varepsilon_{xx_i}\right)^2 + \left(\overline{D}_{22} \cdot \sigma_{yy_j} - \varepsilon_{yy_i}\right)^2 + \left(\overline{D}_{42} \cdot \sigma_{yy_j} - \varepsilon_{zz_i}\right)^2 \\ + \sum_{i=1}^{N_L} \left(E_{xx}\varepsilon_{xx_i} - \dfrac{E_{xx}}{A\exp\left(-b\ln\dot{\varepsilon}_{xx}\right)}\sigma_{xx_i} - \dot{\sigma}_{xx_i} \right)^2 \\ + \sum_{i=1}^{N_T} \left(E_{yy}\varepsilon_{yy_i} - \dfrac{E_{yy}}{A\exp\left(-b\ln\dot{\varepsilon}_{yy}\right)}\sigma_{yy_i} - \dot{\sigma}_{yy_i} \right)^2 \end{array} \right) \quad (4.19)$$

Remplazando $E_{xx} = 1/\overline{D}_{11}$ y $E_{yy} = 1/\overline{D}_{22}$ queda:

$$F = \sum_{VELOCIDAD} \left(\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{N_L} \left(\overline{D}_{11} \cdot \sigma_{xx_i} - \varepsilon_{xx_i}\right)^2 + \left(\overline{D}_{21} \cdot \sigma_{xx_i} - \varepsilon_{yy_i}\right)^2 + \left(\overline{D}_{41} \cdot \sigma_{xx_i} - \varepsilon_{zz_i}\right)^2 \\ + \sum_{j=1}^{N_T} \left(\overline{D}_{12} \cdot \sigma_{yy_j} - \varepsilon_{xx_i}\right)^2 + \left(\overline{D}_{22} \cdot \sigma_{yy_j} - \varepsilon_{yy_i}\right)^2 + \left(\overline{D}_{42} \cdot \sigma_{yy_j} - \varepsilon_{zz_i}\right)^2 \\ + \sum_{i=1}^{N_L} \left(\dfrac{\varepsilon_{xx_i}}{\overline{D}_{11}} - \dfrac{1}{\overline{D}_{11}A\exp\left(-b\ln\dot{\varepsilon}_{xx}\right)}\sigma_{xx_i} - \dot{\sigma}_{xx_i} \right)^2 \\ + \sum_{i=1}^{N_T} \left(\dfrac{\varepsilon_{yy_i}}{\overline{D}_{22}} - \dfrac{1}{\overline{D}_{22}A\exp\left(-b\ln\dot{\varepsilon}_{yy}\right)}\sigma_{yy_i} - \dot{\sigma}_{yy_i} \right)^2 \end{array} \right) \quad (4.20)$$

En la expresión anterior, N_L y N_T representan el número de datos en la dirección longitudinal yt transversal, respectivamente, y la sumatoria externa al paréntesis principal indica que todos los datos experimentales, incluyendo todas las velocidades estudiadas, entran al método de los mínimos cuadrados.

Los parámetros calculados se resumen en la Tabla 4-3:

Tabla 4-3: Parámetros de la lámina encontrados según el modelo de laminado viscoelástico tridimensional

Parámetro	Ajuste 1: Ajustando carga y descarga	Ajuste 2: Ajustando carga
E_{11} (GPa)	4.53	5.4
E_{22} (GPa)	1.54	1.5
G_{12} (GPa)	0.87	0.85
ν_{12}	0.18	0.2
ν_{23}	0.76	0.6
A (MPa·s)	1260	280
b	0.72	0.84

Los parámetros presentados en la Tabla 4-3 son de vital importancia para este estudio ya que, una vez obtenidos los parámetros de la lámina del tubo, se puede modificar la geometría de éste, es decir, el número de láminas y el ángulo de éstas respecto a los ejes principales, y obtener las propiedades mecánicas del nuevo tubo que se desea fabricar. Así se pueden definir distintas geometrías de tubo dependiendo de la aplicación que a éste se le dé y los esfuerzos a los que esté sometido.

Como se mencionó en el capítulo 3, no es de extrañar que un módulo de Poisson de la lámina dé mayor que 0.5, ya que se está trabajando con un material no-isótropo, y la condición de $\nu < 0.5$ es sólo para materiales isótropos. Para materiales ortótropos, la condición que debe cumplirse es:

$$\overline{\Delta} = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13} > 0 \qquad (4.21)$$

Esta relación implica que tanto la matriz de rigidez como la matriz de flexibilidad deben ser positivas definidas, por lo tanto, su determinante debe ser mayor que cero. Para este caso, la relación da el valor de 0.087, por lo que la relación se cumple, y los valores son consistentes.

4.6 Ajustes del modelo

A continuación se presentan los ajustes logrados con ambos conjuntos de parámetros (ver Tabla 4-3).

a) Ajustes de carga y descarga

La Figura 4-5 y la Figura 4-6 presentan los ajustes logrados por el modelo en la relación tasa de esfuerzo-esfuerzo, y luego, en la Figura 4-7 y la Figura 4-8 se presentan la respuesta tensión-deformación lograda con los parámetros encontrados al ajustar la carga y la descarga. Este ajuste será llamado Ajuste 1.

b) Ajustes de carga

La Figura 4-9 y la Figura 4-10 presentan los ajustes logrados por el modelo en la relación tasa de esfuerzo-esfuerzo, y luego, en la Figura 4-11 y la Figura 4-12 se presentan la respuesta tensión-deformación lograda con los parámetros encontrados al ajustar solamente la carga. Este ajuste será llamado Ajuste 2.

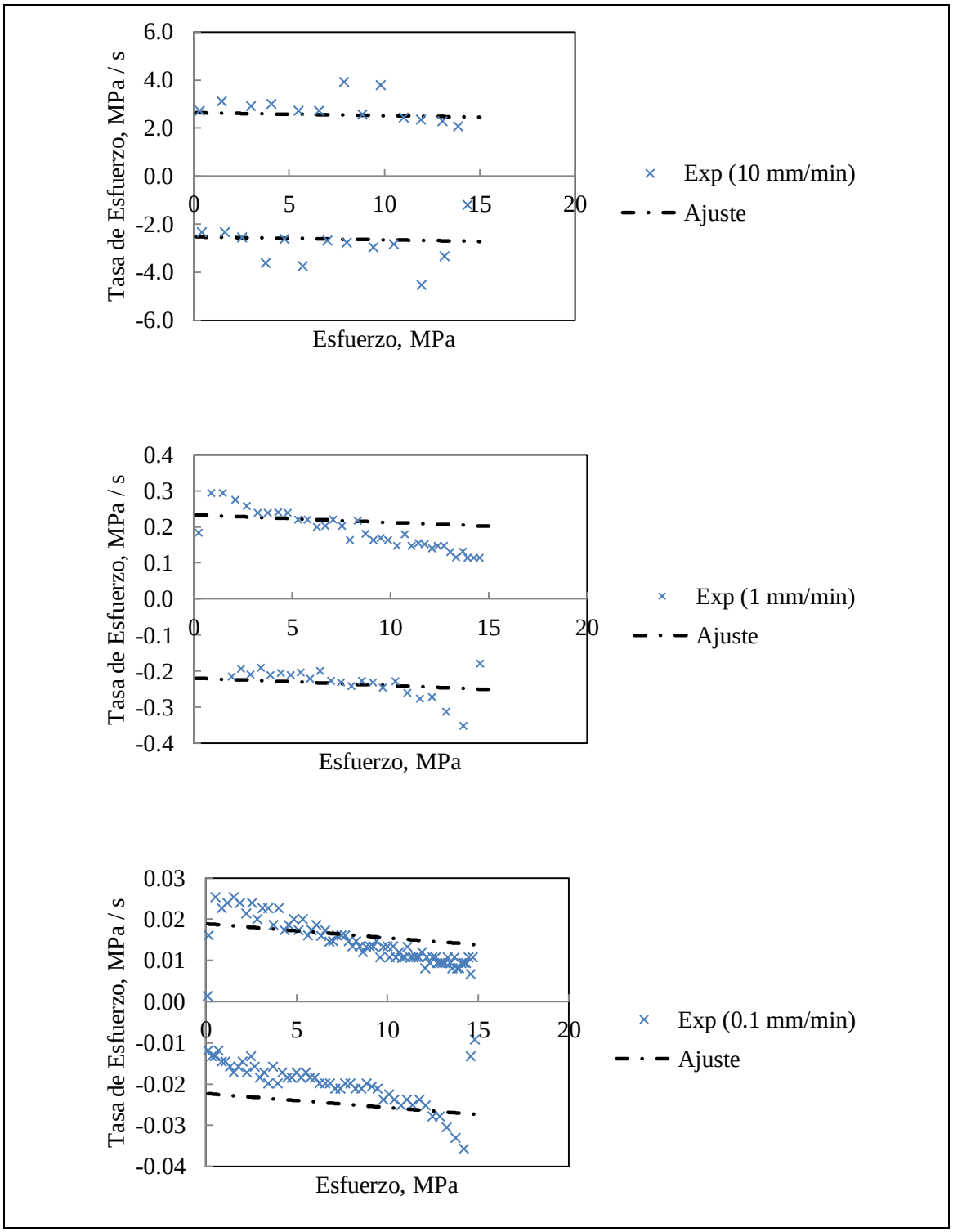


Figura 4-5: Ajuste del modelo para probetas longitudinales utilizando Ajuste 1.

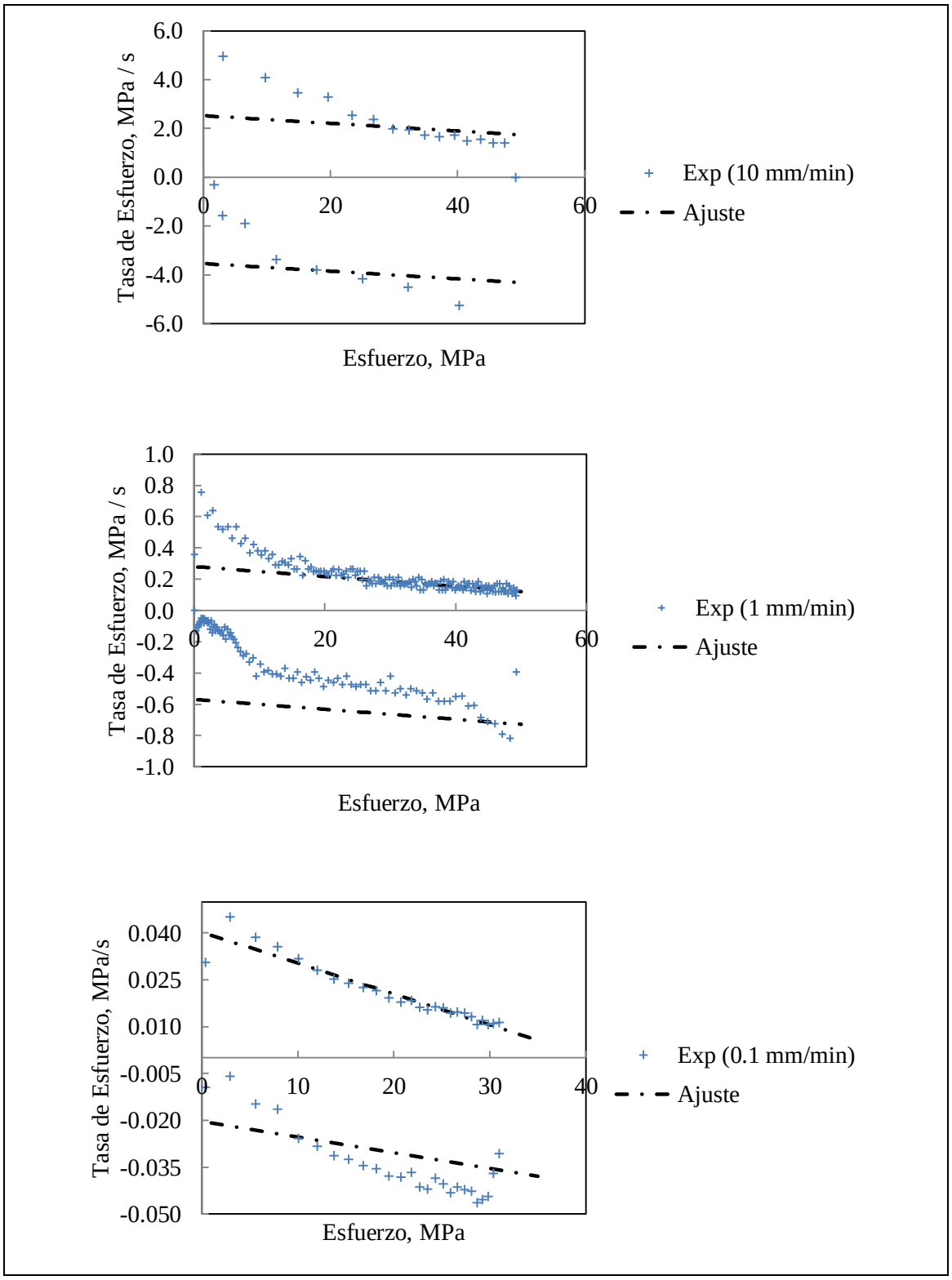


Figura 4-6: Ajuste del modelo para probetas transversales utilizando Ajuste 1.

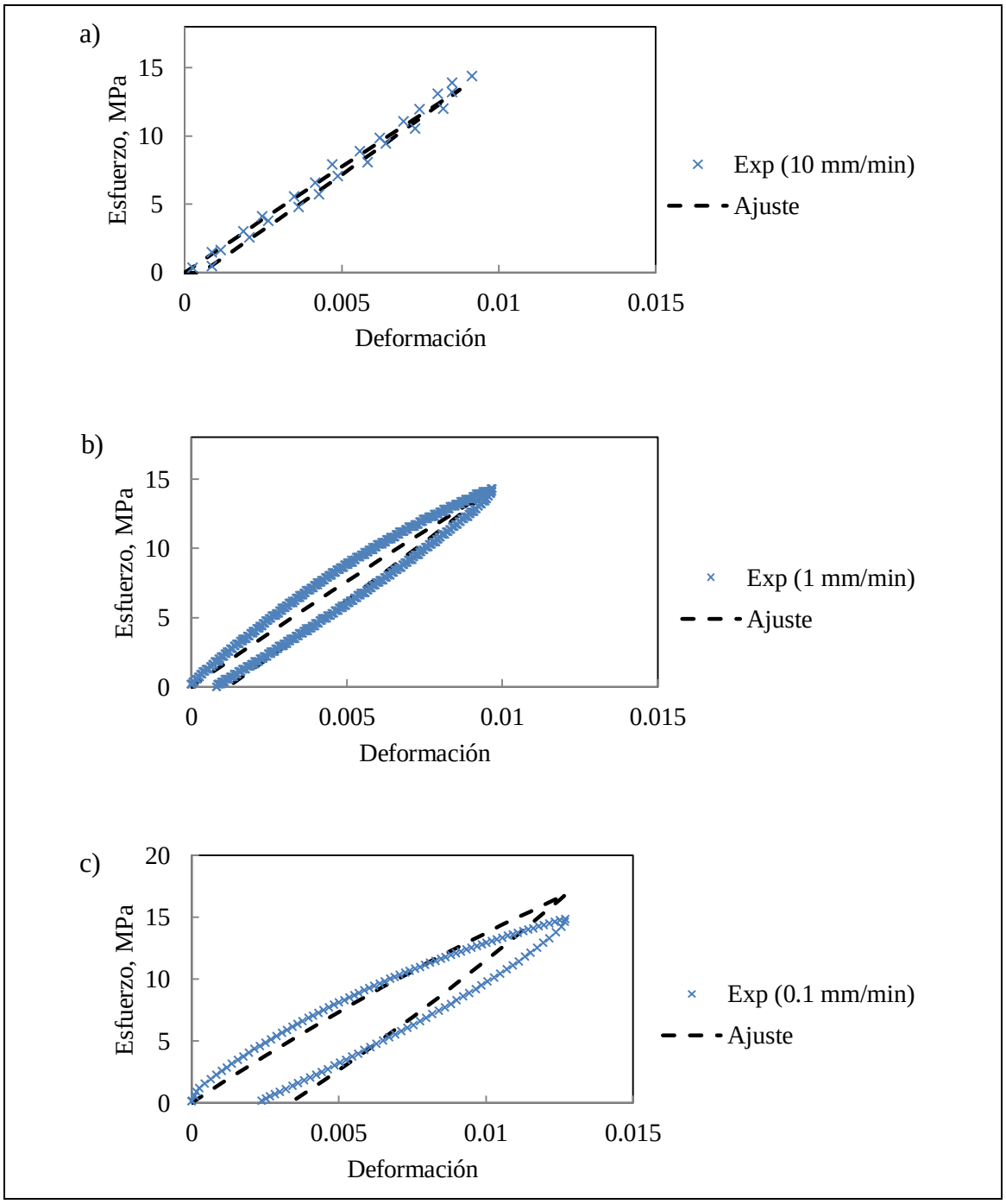


Figura 4-7: Datos experimentales de los ensayos de tracción con probetas longitudinales y ajustes logrados con el modelo de laminado viscoelástico para distintas velocidades de desplazamiento de travesaño: a) 10mm/min; b) 1mm/min; c) 0.1mm/min. Se utilizó el Ajuste 1.

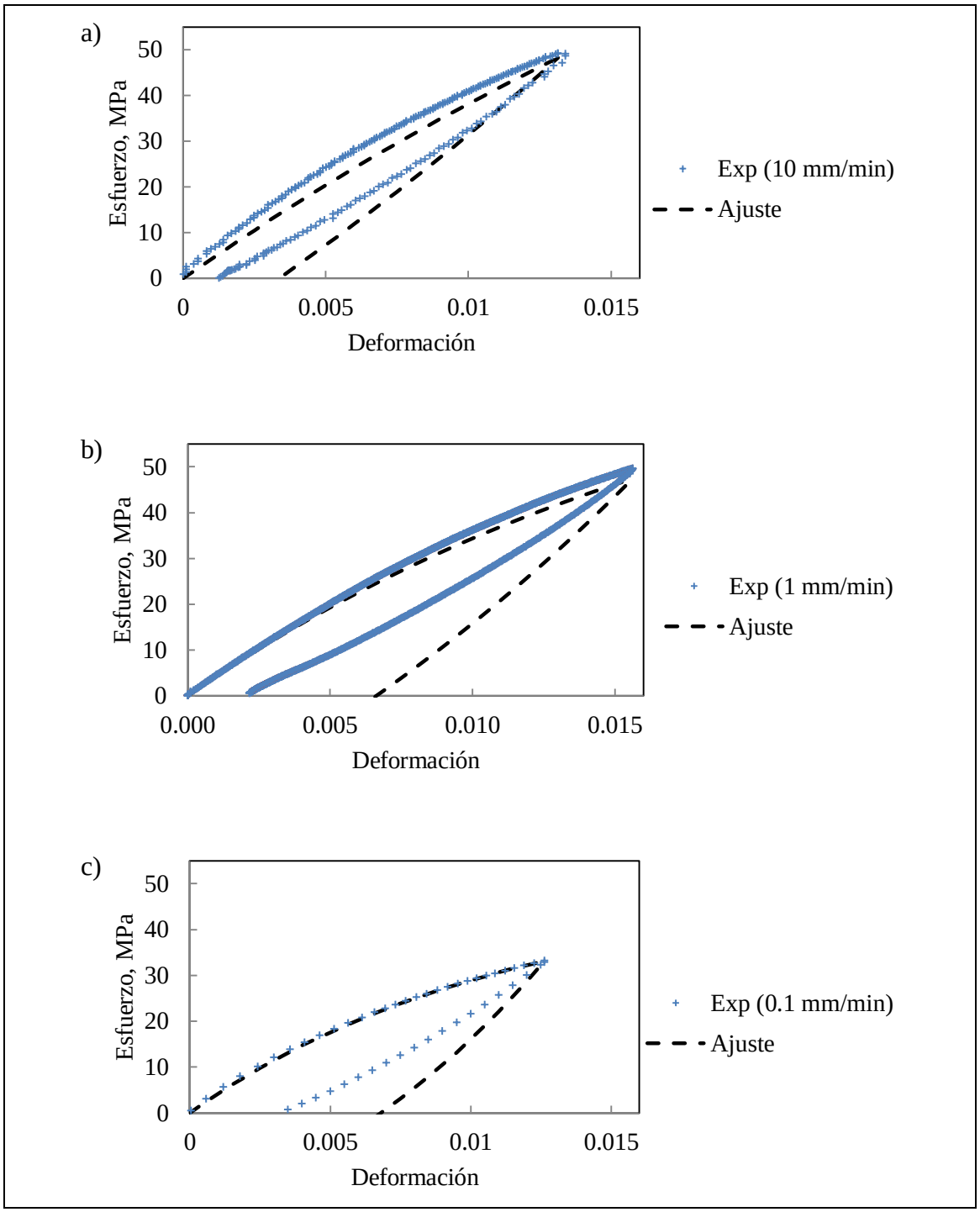


Figura 4-8: Datos experimentales de los ensayos de tracción con probetas transversales y ajustes logrados con el modelo de laminado viscoelástico para distintas velocidades de desplazamiento de travesaño: a) 10mm/min; b) 1mm/min; c) 0.1mm/min. Se utilizó el Ajuste1.

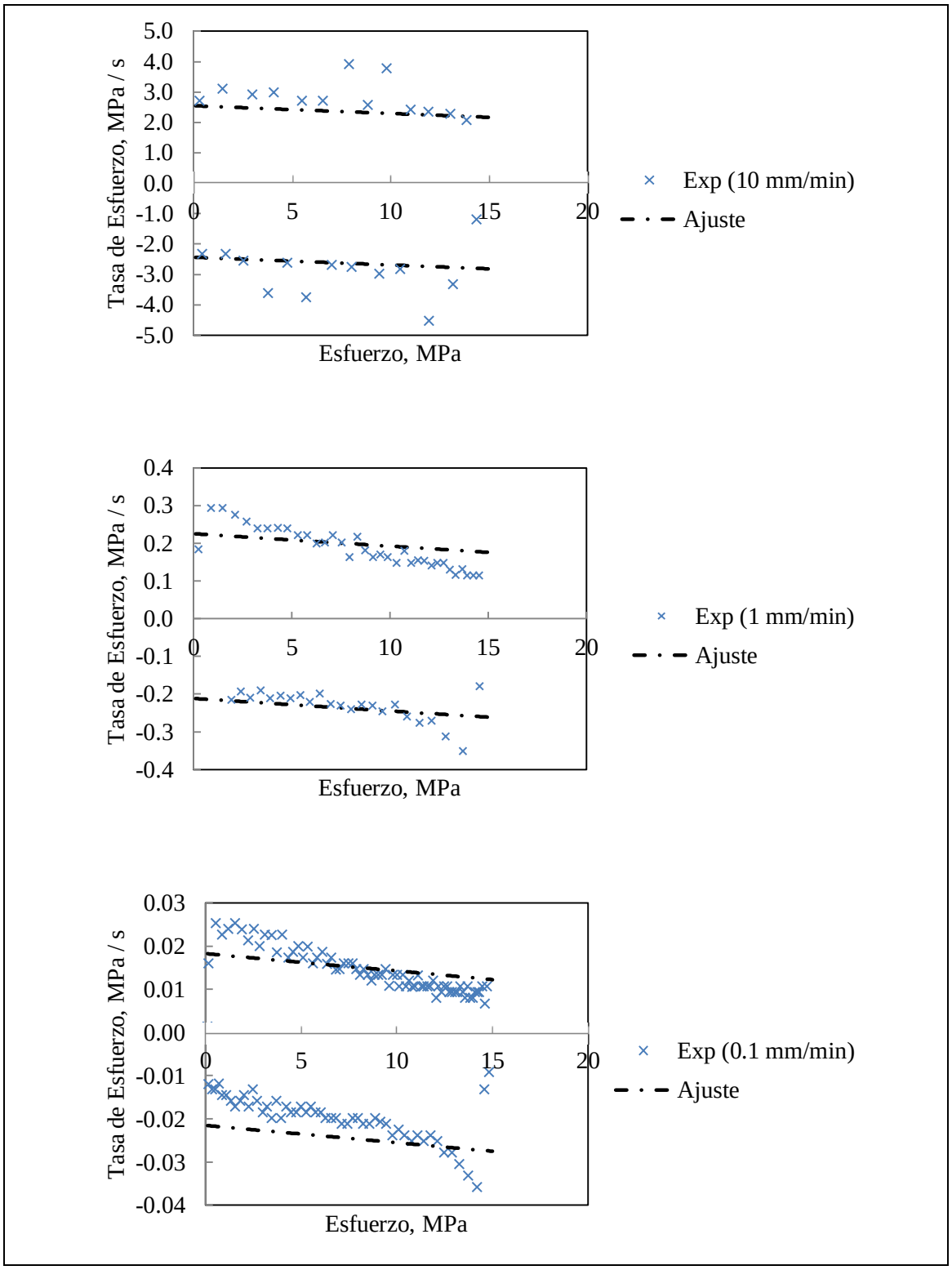


Figura 4-9: Ajuste del modelo para probetas longitudinales utilizando Ajuste 2.

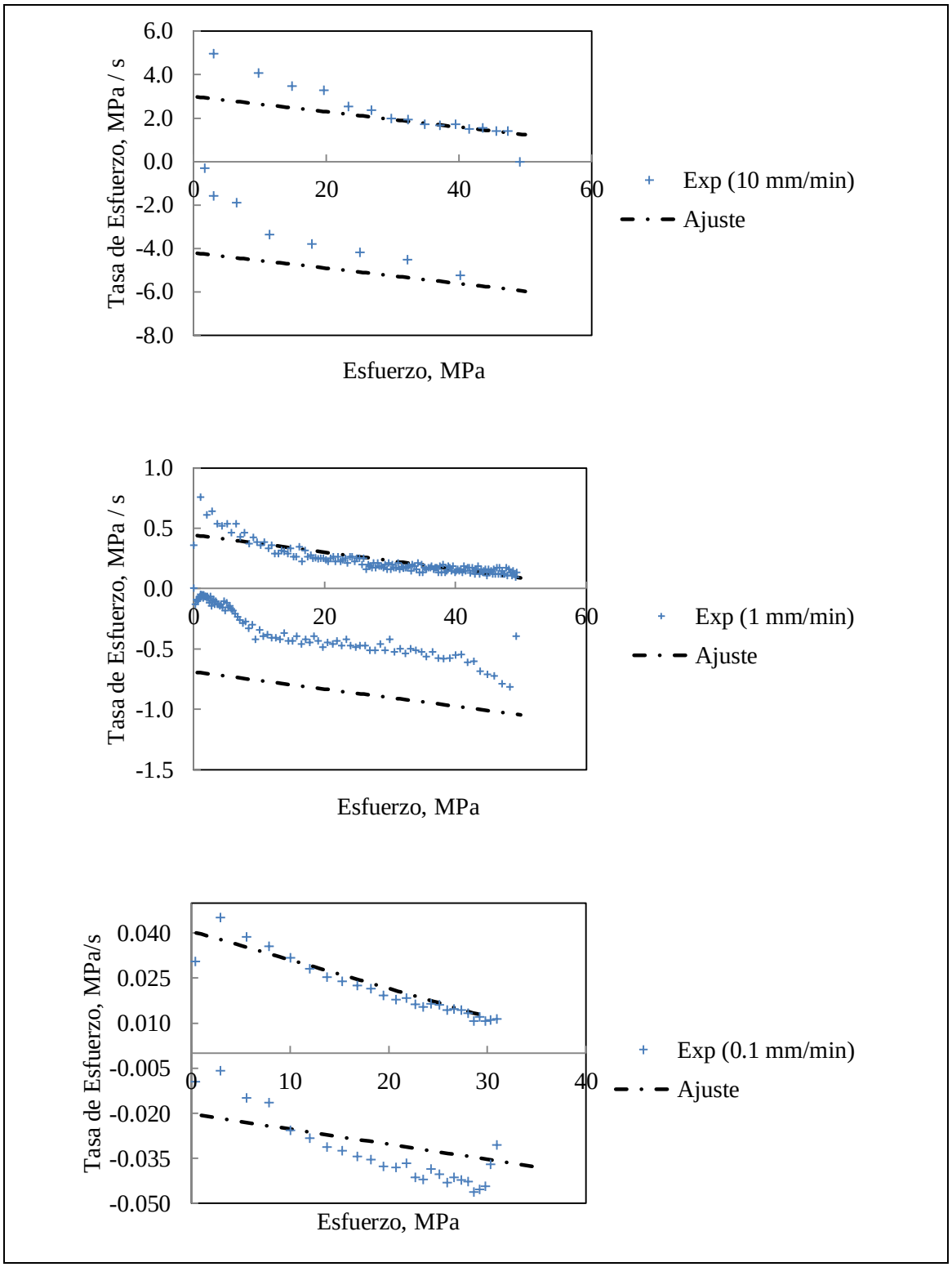


Figura 4-10: Ajuste del modelo para probetas transversales utilizando Ajuste 2.

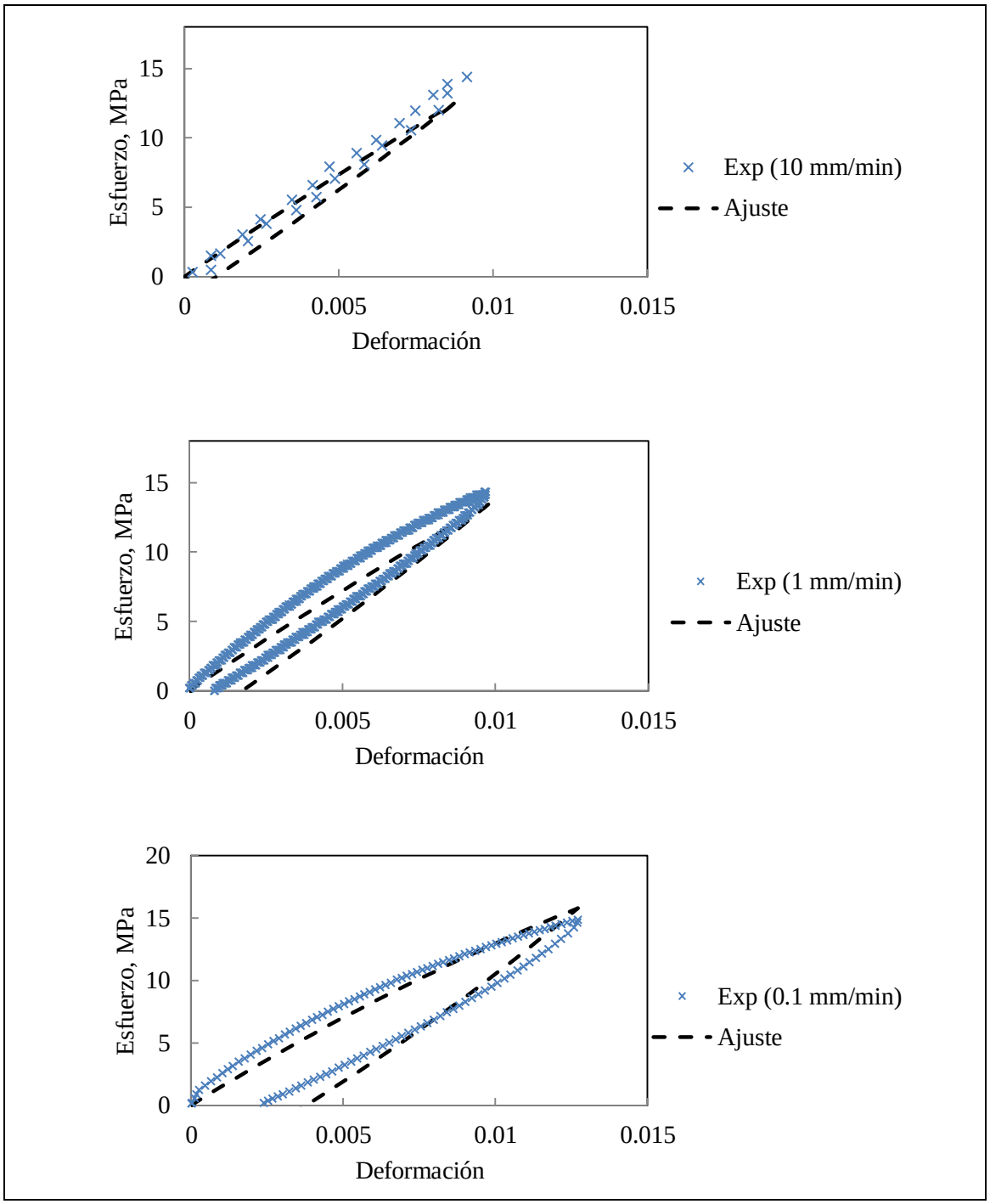


Figura 4-11: Datos experimentales de los ensayos de tracción con probetas longitudinales y ajustes logrados con el modelo de laminado viscoelástico para distintas velocidades de desplazamiento de travesaño: a) 10mm/min; b) 1mm/min; c) 0.1mm/min. Se utilizó el Ajuste 2.

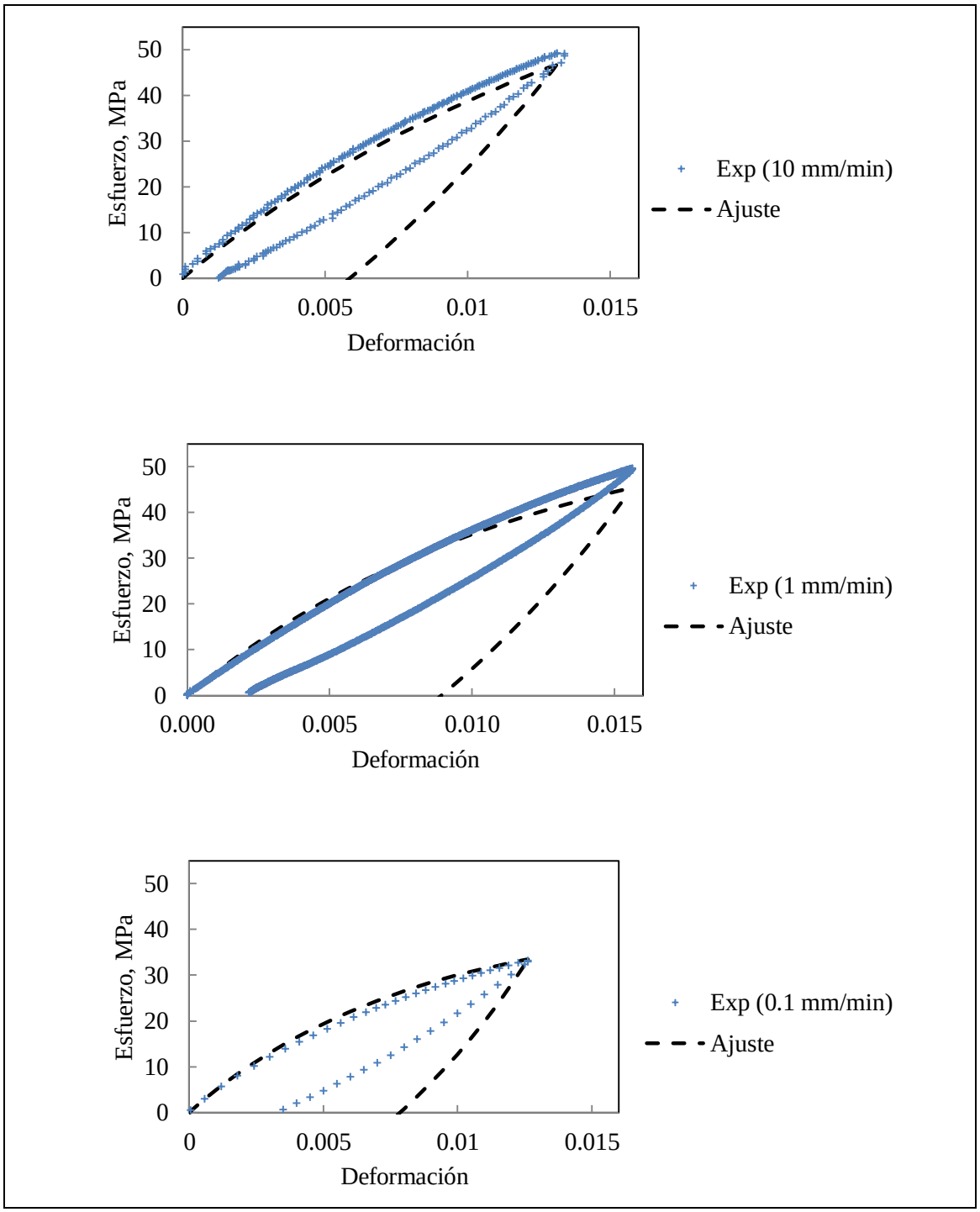


Figura 4-12: Datos experimentales de los ensayos de tracción con probetas transversales y ajustes logrados con el modelo de laminado viscoelástico para distintas velocidades de desplazamiento de travesaño: a) 10mm/min; b) 1mm/min; c) 0.1mm/min. Se utilizó el Ajuste 2.

4.7 Discusión

El modelo propuesto, que corresponde a una modificación del modelo de Maxwell, cuenta con un elemento elástico transversalmente isótropo conectado en serie con un elemento viscoso dependiente de la tasa de deformación total. El elemento elástico es el encargado de responder a la anisotropía del material y en las curvas tensión-deformación se observa que el modelo es capaz de representar las diferencias mecánicas entre ambas direcciones ensayadas. Sin embargo, dado que los parámetros elásticos son constantes, no logran ajustar bien tanto la carga como la descarga, ya que como se vio en el capítulo 4.2 la descarga es menos rígida que la carga. A su vez, el elemento viscoso es el encargado de representar el comportamiento no-lineal y la sensibilidad del material a la tasa de deformación y para esto, la definición de la viscosidad presentada en el capítulo 4.2 como la ecuación (4.13), significó una mejora significativa para el modelo en comparación al modelo con viscosidad constante, ya que permitió que la viscosidad variara considerablemente entre los ensayos realizados a distintas velocidades, tal como se ve en la Figura 4-1.

Respecto al Ajuste 1, en la Figura 4-7 y la Figura 4-8 se puede observar que el modelo logra, en general, un mejor ajuste en la carga que en la descarga y en el rango de deformaciones menores al 1% el ajuste de la carga es bueno. En particular, los ajustes longitudinales a 1 y a 10 mm/min de tasa de desplazamiento de travesaño son buenos tanto para la carga como la descarga, no así el resto de los casos. Para los ajustes transversales, todas las descargas sobrestiman la deformación después de la descarga, esto debido a que el módulo elástico transversal que ajusta bien la carga, es muy rígido para ajustar también la descarga.

En relación al Ajuste 2, con estos parámetros se logra un material menos rígido (más viscoso) lo cual es apreciable en las curvas tensión-deformación donde, para el caso longitudinal (Figura 4-11), las curvas de 10 y 1 mm/min van por debajo de la curva experimental y la curva de 0.1 mm/min logra un mejor ajuste que con los parámetros del Ajuste 1. En el caso transversal (Figura 4-12) también se observa que con los parámetros del Ajuste 2 se obtiene un material menos rígido (más viscoso) resultando en ajustes de

carga menos lineales. La descarga en el caso transversal resulta en un mal ajuste, lo que era de esperar ya que estos parámetros fueron encontrados sin considerar la descarga.

Respecto a la cantidad de parámetros del modelo, los siete parámetros (cinco elásticos y dos viscosos) se pueden considerar un número relativamente bajo en comparación a otras caracterizaciones presentadas en el capítulo 2, sobre todo considerando que el modelo busca representar la anisotropía y la viscoelasticidad del material. No obstante, en el apartado 4.6 se aprecia que un modelo de siete parámetros no es capaz de representar fielmente el comportamiento a carga y descarga del material, y aún menos comportamientos como la recuperación elástica o recuperación del esfuerzo observados en el capítulo 3. Por esto, la inclusión de un mayor número de parámetros podría ayudar a lograr un mejor ajuste pero, como se mencionó en los objetivos del trabajo, esto se aleja del propósito de buscar un modelo simple que sea capaz de representar el comportamiento del material para una aplicación dada.

Por otra parte, el planteamiento del modelo permite que los parámetros sean encontrados con un número reducido de experimentos y de probetas, lo cual es fundamental si el método y la caracterización se desean utilizar en la industria, ya que en otros trabajos, para la caracterización de materiales compuestos fibrosos, se ensayan al menos probetas en tres direcciones y distintas velocidades.

Para el ajuste de los parámetros se decidió utilizar las ecuaciones (4.15) y (4.16), que relacionan linealmente al esfuerzo con la tasa de esfuerzo, por dos razones:

- Experimentalmente se observó que el material también presenta este comportamiento;
- Para un solver es más fácil converger a un conjunto de parámetros en un problema lineal.

Este segundo punto es importante debido a que, como ya se ha comentado, uno de los objetivos de la tesis es que el modelo propuesto, además de representar el comportamiento mecánico del material, sea capaz de ser comprendido e implementado en la industria, por lo que la linealidad de su función objetivo, sumado a que es un modelo de relativamente pocos parámetros, son puntos clave, ya que esto permite que el

conjunto de ecuaciones y datos no sea tan grande, permitiendo que la representación de resultados e incluso el ajuste de los parámetros se puedan realizar en el software Excel.

5. SIMULACIÓN Y VALIDACIÓN DEL MODELO

En este capítulo se describen el ensayo realizado a un tubo real y las simulaciones realizadas mediante el método de los elementos finitos. El ensayo realizado fue un ensayo de flexión de carga y descarga con dos apoyos simples.

5.1 Ensayo de flexión de carga y descarga

5.1.1 Motivación

La motivación para realizar este ensayo fue el tener resultados experimentales para comparar el desempeño del modelo con la realidad y así validar el mismo. Se escogió realizar un ensayo de flexión porque es a este tipo de esfuerzos al que los tubos se someten principalmente durante las etapas de montaje, traslado y ubicación, y el realizarlo de carga y descarga fue para tener información para evaluar la capacidad del modelo para describir la relación tensión-deformación en la descarga.

5.1.2 Objetivos

El objetivo del ensayo es obtener la relación entre la carga aplicada y la deflexión de las superficies superior e inferior del tubo sometido a flexión en función del tiempo. Estos datos son fundamentales para la evaluación y validación del modelo, ya que son éstos los que serán comparados con una modelación mediante el método de los elementos finitos que será descrita más adelante en el apartado 5.2.

5.1.3 Probeta

El tubo utilizado en el ensayo está fabricado con polietileno de alta densidad con un 20% en peso de fibra de vidrio mediante el método de manufactura de enrollamiento helicoidal descrito en el capítulo 1. Las dimensiones y características geométricas del tubo se presentan en la Tabla 5-1.

Tabla 5-1: Características geométricas y dimensiones del tubo ensayado.

Diámetro, mm	Largo, mm	Espesor, mm	N° de láminas	Ángulo de las láminas
507	1900	16	3	86°

5.1.4 Montaje

El ensayo de flexión fue pensado como un ensayo de dos apoyos y con la carga aplicada verticalmente hacia abajo transversalmente en el centro del tubo. Para lograr esto, los apoyos simples se montaron de modo que tuvieran la capacidad de rotar sobre sí mismos, ubicando un madero plano sobre un tubo de acero (ver Figura 5-1 y Figura 5-2). La carga fue aplicada utilizando un gato hidráulico, el cual actuó sobre un madero utilizado para aplicar la carga uniformemente en el tubo (ver Figura 5-1 y Figura 5-3). Es importante señalar que en la aplicación de la carga no se pueden controlar la tasa de aplicación de la misma ni la tasa de desplazamiento del émbolo del gato, por lo que estos valores sólo se pueden conocer al analizar los datos. Para lograr medir la deflexión de ambas superficies se instalaron tres transistores: dos para la parte superior, ubicados sobre el madero, uno a cada lado del gato, y midiendo el desplazamiento directamente (ver Figura 5-1 y Figura 5-3), y uno para la superficie inferior ubicado, por seguridad del instrumento, fuera de la zona ocupada por la proyección del tubo hacia abajo (ver Figura 5-1 y Figura 5-4). De este modo, el transistor inferior mide la deflexión indirectamente y a una razón de 6:1 gracias al sistema de palanca instalado, es decir, si el transistor se deforma 1mm, el tubo en realidad se deforma 6mm.

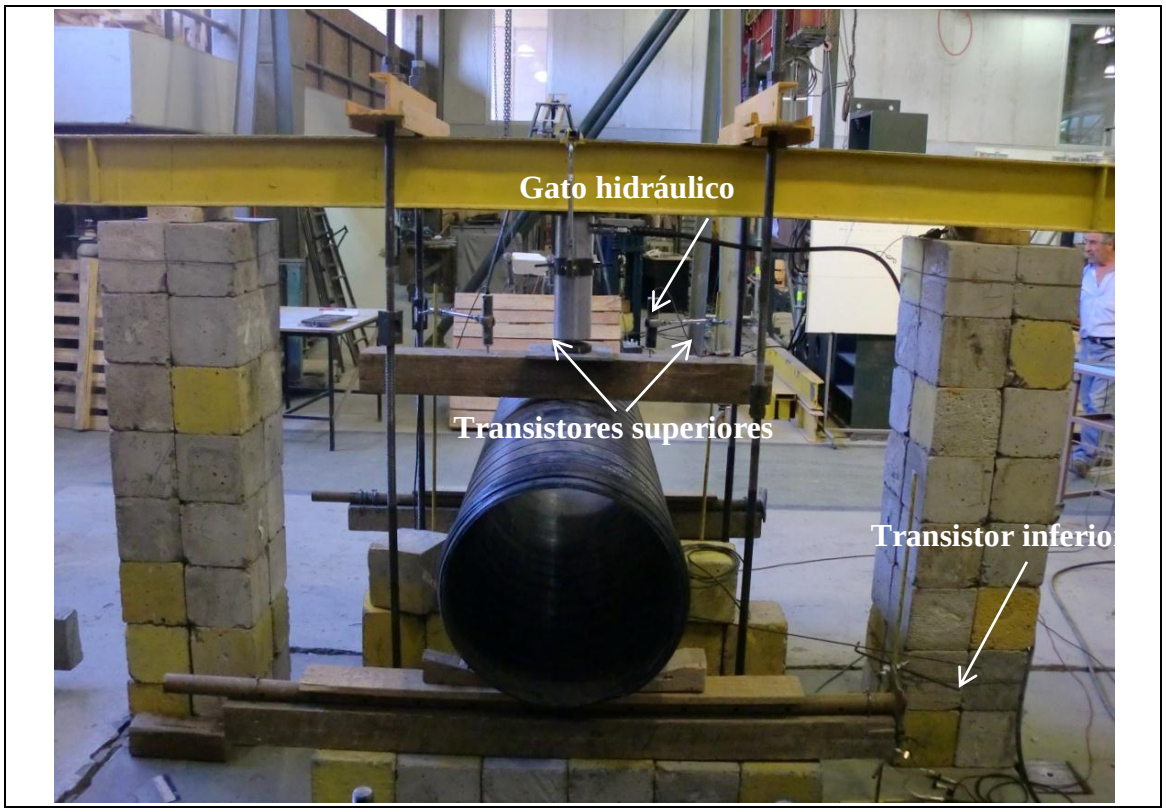


Figura 5-1: Ensayo de flexión del tubo.

Figura 5-2: Apoyo capaz de girar sobre sí mismo.

Figura 5-3: Transistores utilizados para medir el desplazamiento de la superficie superior del tubo.

Figura 5-4: Transistor utilizado para medir el desplazamiento de la superficie inferior del tubo.

5.1.5 Resultados y discusión

A continuación se presentan los resultados del ensayo de flexión. En la Figura 5-5 se muestran la carga y el desplazamiento en función del tiempo. Se aprecia cómo ambas superficies del tubo, superior e inferior, se desplazan hacia abajo en cantidades muy distintas, siendo el desplazamiento de la zona superior casi nueve veces mayor al de la superficie inferior. Esto se debe principalmente a que los efectos de la carga localmente fueron mucho más importantes que la transmisión de esfuerzos en el tubo hacia la cara inferior del mismo, lo cual produce un estado de tensiones distinto al que se somete el tubo al curvarse en el fondo marino, en instalaciones bajo tierra o etapas de montaje. Para lograr un desplazamiento más homogéneo entre ambas superficies, el ensayo se debiera realizar con un tubo con mayor razón largo/diámetro (que en este caso es de 4)

para que así la flexión fuera más evidente, o dejar que éste se flecte por la acción de su propio peso midiendo el esfuerzo mediante galgas extensométricas.

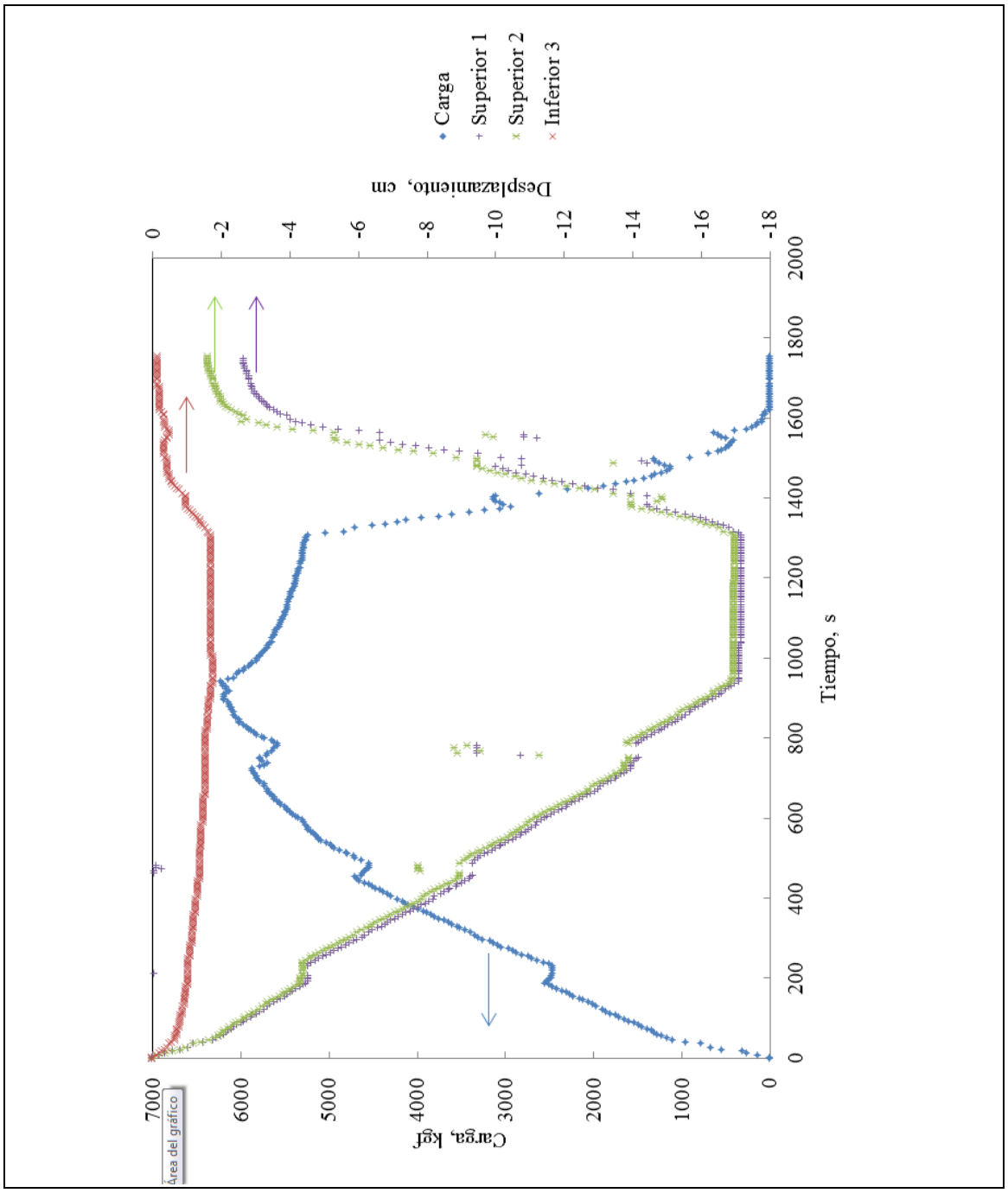


Figura 5-5: Resultados del ensayo de flexión del tubo real. Carga y desplazamiento en función del tiempo.

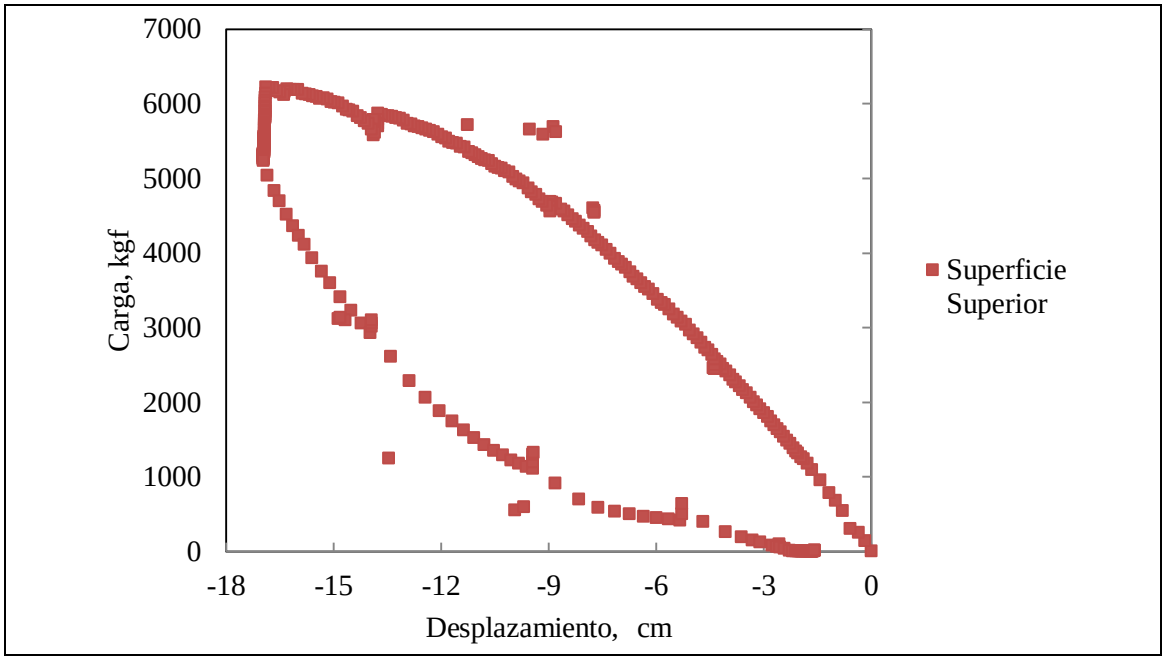


Figura 5-6: Curva carga-desplazamiento de la superficie superior del tubo.

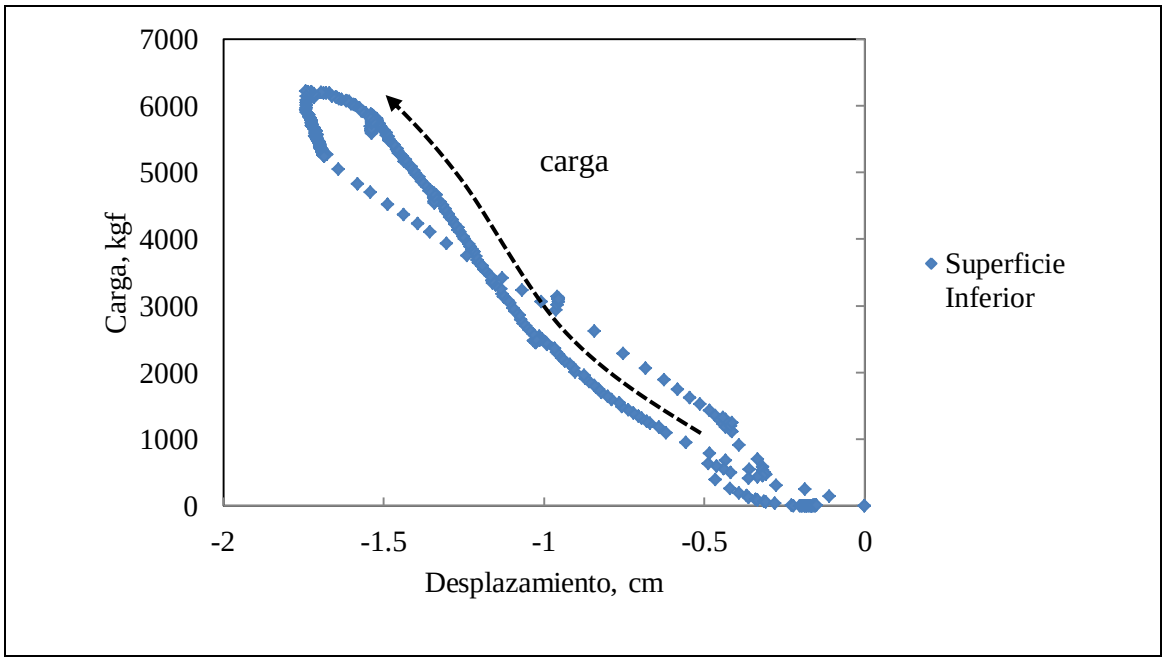


Figura 5-7: Curva carga-desplazamiento de la superficie inferior del tubo.

En la Figura 5-6 se presenta la curva carga-desplazamiento de la superficie superior del tubo. Se puede ver que la respuesta del tubo es muy similar a las observadas en el apartado 3.5.2 de los ensayos de carga y descarga. Por otra parte, en la Figura 5-7 se muestra la curva carga-desplazamiento de la superficie inferior del tubo. Se puede apreciar que en la carga esta curva presenta una curva tipo S que no había sido observada anteriormente en el capítulo 3 en los procedimientos experimentales. Esto se puede explicar argumentando que la rapidez con la que los esfuerzos se transmiten a la cara inferior del tubo es distinta a la rapidez con la que se aplica la fuerza directamente sobre el tubo, lo que hace que ambas curvas sean distintas. Esta observación, que tiene relación con las respuestas de las superficies superior e inferior, es coherente con lo observado en la Figura 5-5 donde se observa claramente la diferencia entre los desplazamientos de ambas caras, diferencia atribuible a la transmisión de esfuerzos a través del tubo.

5.2 Simulación

a) Mallado

La malla del tubo se realizó con elementos hexaédricos de 8 nodos y los contactos se modelaron con elementos cuadriláteros de 4 nodos. El espesor de cada elemento se definió de modo tal que fuera igual al espesor de cada lámina del tubo. Se modeló un cuarto del tubo y se corroboró que esto no influyera en los resultados de la simulación. La malla se presenta en la Figura 5-8, y se observa que la zona del centro fue definida con una malla más fina, ya que es ahí dónde se aplica la carga y dónde interesa conocer la respuesta del tubo.

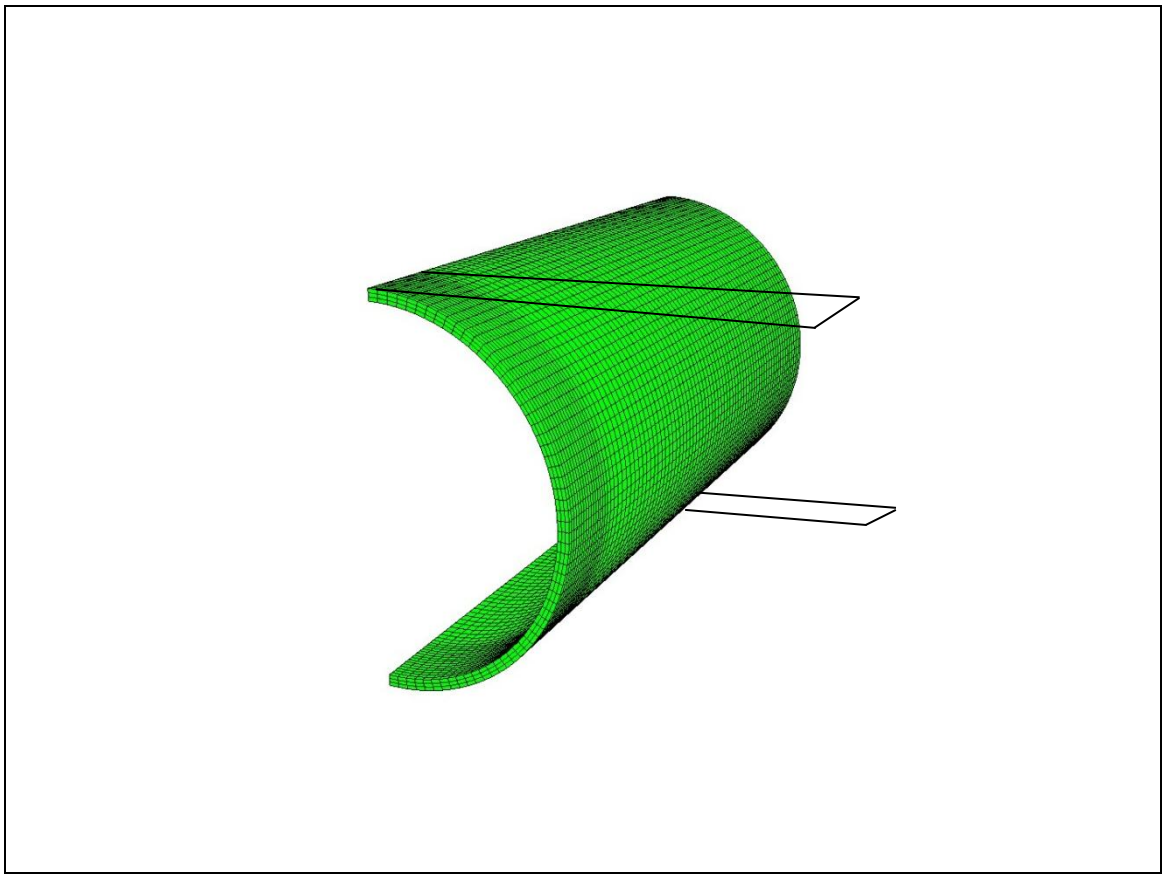


Figura 5-8: Mallado del tubo utilizado en las simulaciones.

b) Condiciones de contorno

Ambos apoyos se definieron como placas planas infinitamente rígidas sin la capacidad de rotar sobre un eje perpendicular al eje principal del tubo. Al tubo, se le impuso un desplazamiento vertical hacia abajo (no la carga), obtenido del ensayo experimental, a través de una placa infinitamente rígida definida con elementos de contorno. El desplazamiento impuesto se presenta en la Figura 5-9.

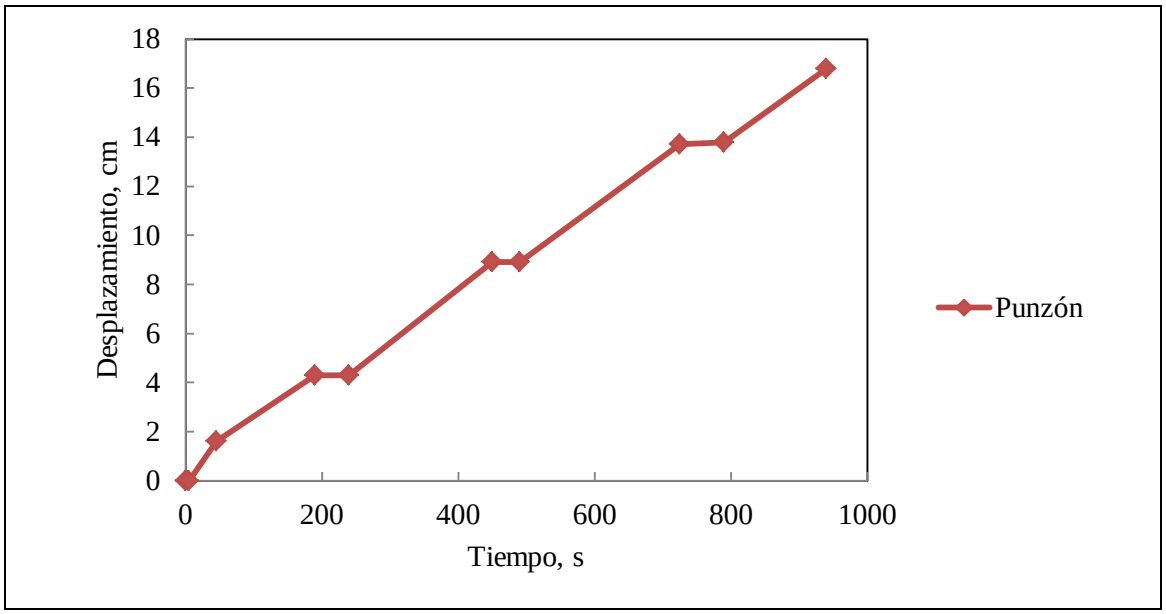


Figura 5-9: Curva de desplazamiento-tiempo impuesta en la simulación.

c) Resultados

A continuación se presentan los resultados de la simulación efectuada con el Ajuste 2. En la Figura 5-10 y la Figura 5-11 se presentan los resultados en carga-desplazamiento y carga tiempo, respectivamente.

Tabla 5-2: Parámetros de ajuste utilizados en las simulaciones.

Caso	E_1 (MPa)	E_2 (MPa)	G_{12} (MPa)	ν_{12}	ν_{23}	A (MPa*s)	B
Ajuste carga	5400	1461	980	0.29	0.78	280	0.839

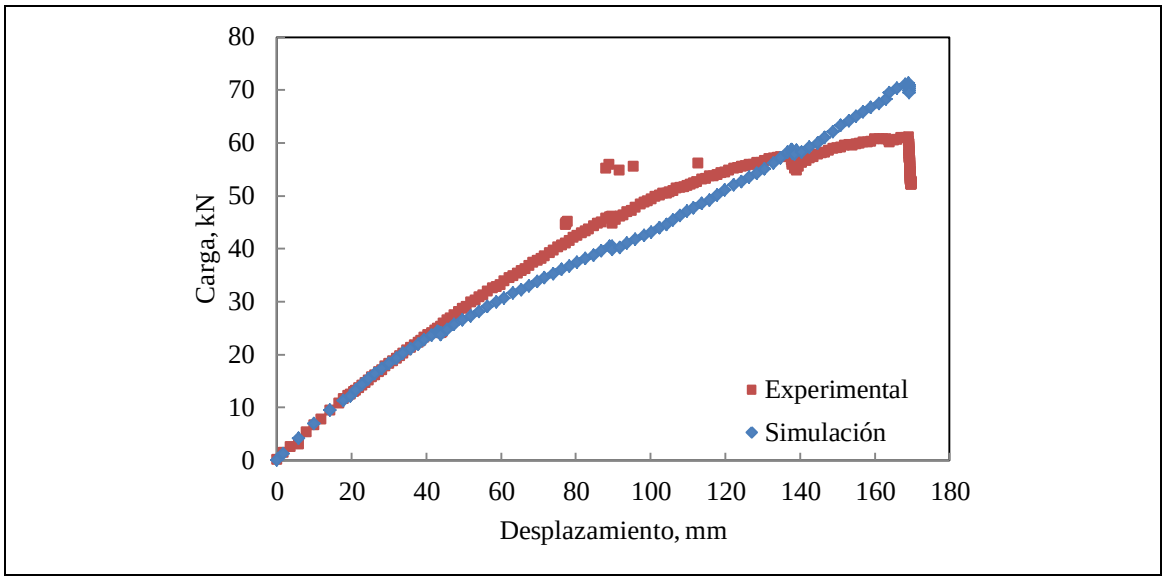


Figura 5-10: Curva carga-tiempo del punzón. Resultados experimentales y simulados con parámetros de Ajuste 1.

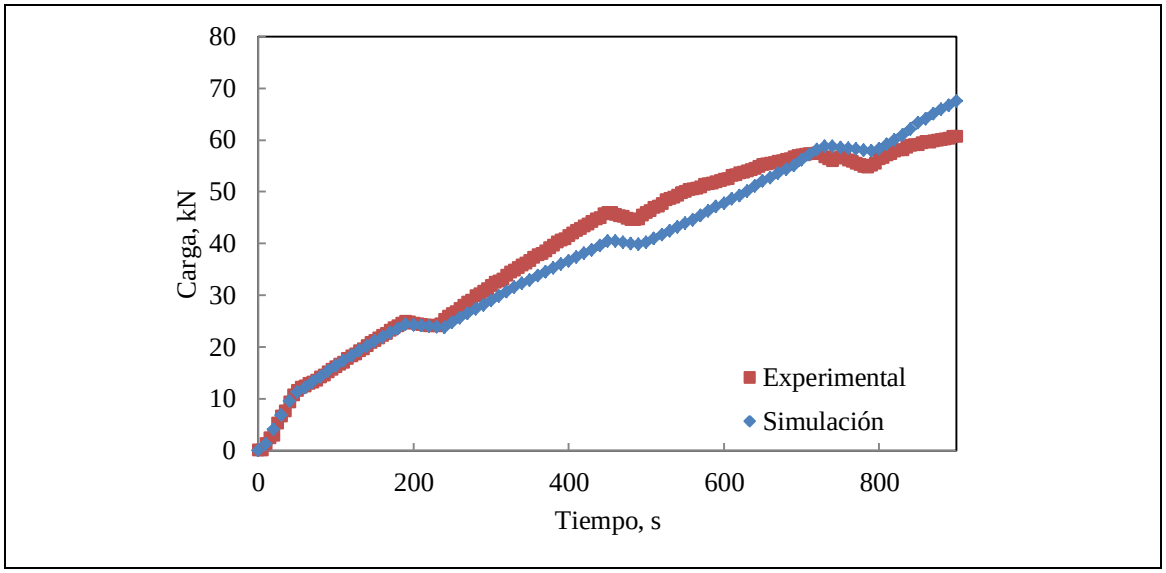


Figura 5-11: Curva carga-tiempo del punzón. Resultados experimentales y simulados con parámetros de Ajuste 2.

A continuación, en la Figura 5-12 y Figura 5-13, se presentan la distribución de esfuerzos de von-Mises y la deformación viscosa para la condición final de la simulación (1000 segundos).

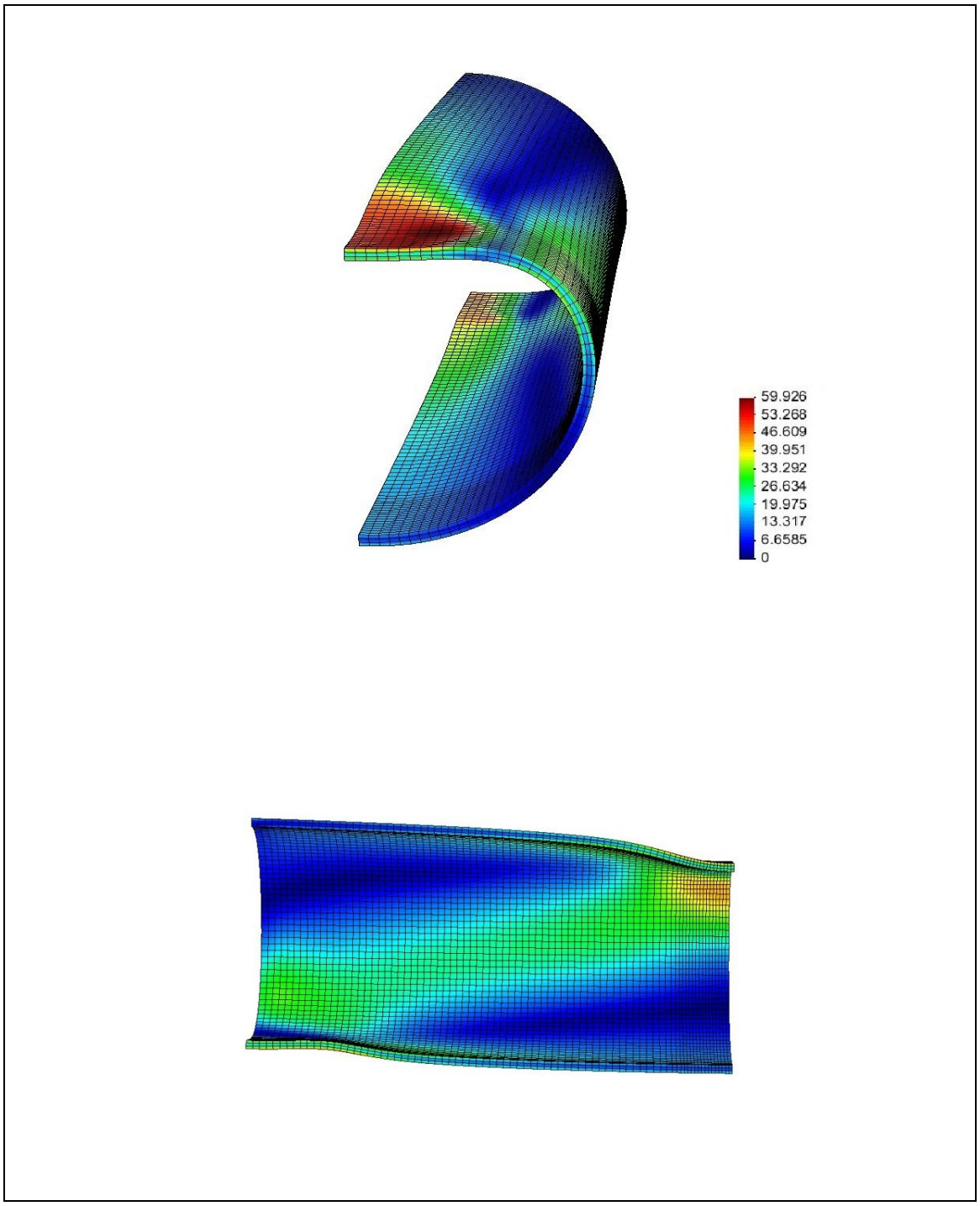


Figura 5-12: Esfuerzos de Von-Mises en MPa. Condición final. Tiempo 1000 s.

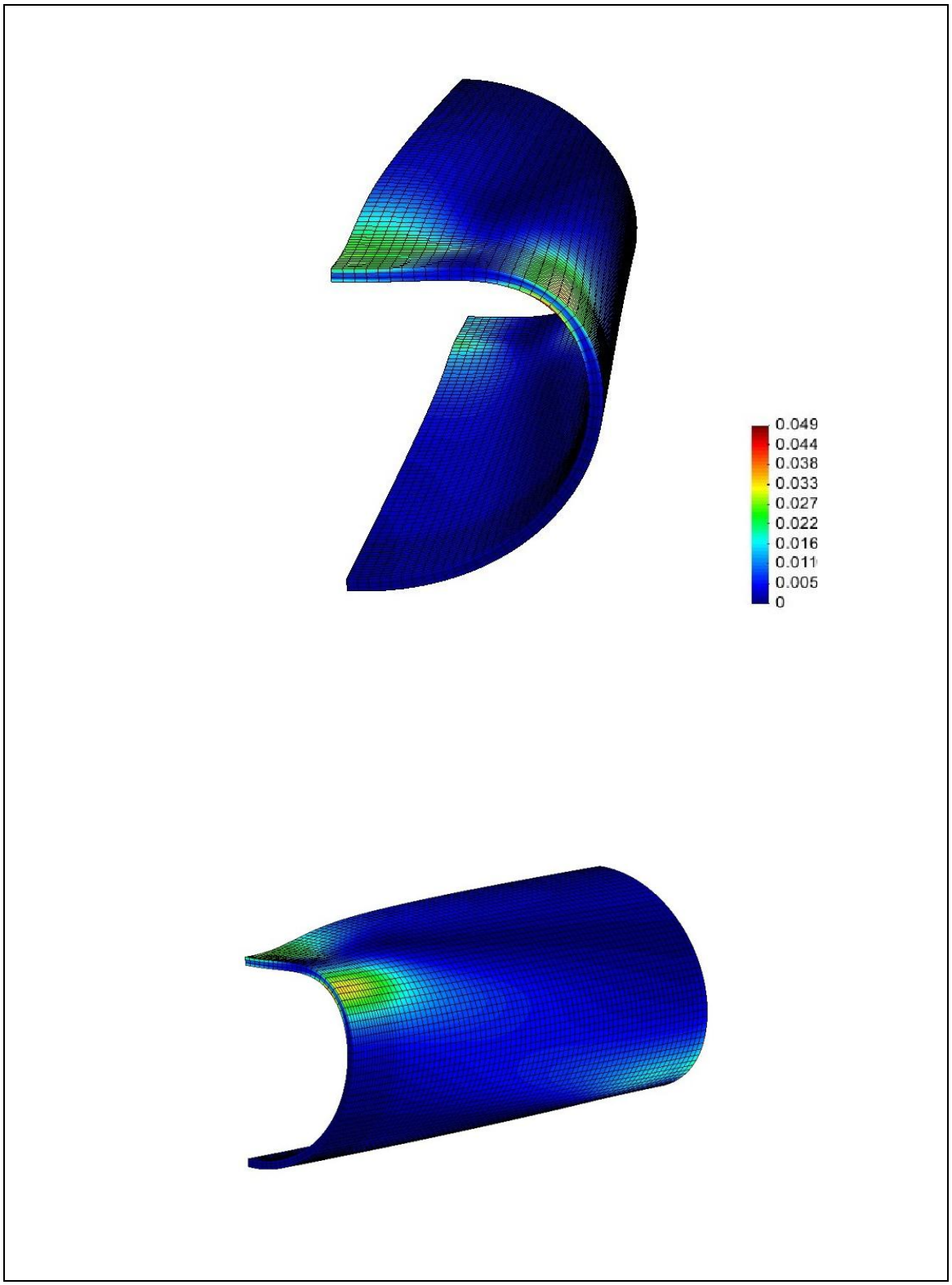


Figura 5-13: Deformación viscosa equivalente. Condición final. Tiempo 1000 s.

5.3 Discusión

En los resultados expuestos se puede ver que el tubo en la simulación responde muy bien visco-elásticamente al desplazamiento impuesto. Esto es observable en la no-linealidad de la curva carga-tiempo y en la relajación manifestada en el tubo. Por lo tanto la respuesta viscoelástica cualitativamente se capta muy bien.

La Figura 5-10 y 5-11presentan los resultados en carga-desplazamiento y en carga-tiempo, respectivamente. En ambas figuras se puede observar un excelente ajuste hasta el final de la primera relajación, punto en el que se comienzan a separar ambas curvas pero manteniendo una buena respuesta visco-elástica. Esta discrepancia se puede deber principalmente a evoluciones microscópicas experimentadas por el material debido a la deformación del mismo e interacciones fibra-matriz. Estos cambios microscópicos generan que la respuesta en carga y/o descarga, luego de una relajación o algún otro fenómeno, sea diferente a la inicial. No obstante, las discrepancias no son tan significativas y los resultados continúan siendo satisfactorios.

En la Figura 5-12 se muestra la distribución de esfuerzos de von-Mises en la condición final del ensayo. Se observa que los mayores esfuerzos ocurren en la zona de aplicación de la carga y es interesante observar cómo se transmiten los esfuerzos en el ducto desde la zona de aplicación de la carga a los apoyos. La Figura 5-13 presenta la deformación viscosa equivalente experimentada por el tubo en la condición final de la simulación. Se observa que la mayor deformación viscosa no ocurre en la zona de aplicación de carga, lo cual tiene sentido ya que la tasa de deformación total en la zona de aplicación de carga es mayor que en otras zonas, lo que genera una menor proporción de deformación viscosa que en otras zonas donde la tasa de deformación es menor. Además, esto deja en evidencia que no existe una relación lineal entre el esfuerzo y la deformación viscosa.

6. CONCLUSIONES

En esta investigación se presentó un método para caracterizar mecánicamente tubos de polietileno con fibras cortas de vidrio fabricados mediante enrollamiento helicoidal. El método consiste en caracterizar mecánicamente la lámina del tubo a partir de ensayos de tracción efectuados a laminados obtenidos del tubo en dirección longitudinal y transversal. La caracterización de la lámina se realizó con un modelo de 7 parámetros: 5 elásticos y 2 viscosos. El modelo es una modificación al modelo de Maxwell donde los 5 parámetros elásticos corresponden a los términos del tensor constitutivo elástico transversalmente isótropo y los 2 parámetros viscosos definen a la viscosidad en función de la tasa de deformación total.

Con respecto a la caracterización, en el apartado 4.6 se presentaron los ajustes logrados por el modelo con los Ajustes 1 y 2. En las curvas tensión-deformación se observó un buen ajuste en las cargas en el rango de deformación ensayado, pero las descargas para ambos casos resultaron con peores ajustes que la carga, discrepando más en las probetas transversales debido al alto módulo de elasticidad en esa dirección.

En relación al método para obtener las propiedades de la lámina, considerando que se trata de un material no-isótropo y visco-elástico, se pueden destacar cuatro bondades:

- Se requieren probetas en sólo dos direcciones.
- Se requieren al menos dos velocidades distintas de ensayo.
- La función objetivo del método de los mínimos cuadrados es lineal.
- Una vez conocidas las propiedades de la lámina, se pueden conocer las propiedades de un tubo con cualquier número y orientación de láminas.

Esto hace que el método sea aplicable en la industria ya que el número de ensayos, parámetros y datos permite trabajar en programas como Excel o la versión gratuita de AMPL, o bien, permite ser implementado mediante programación en Matlab.

Del ensayo se pudieron rescatar los datos necesarios para validar el modelo, no obstante, la respuesta del tubo fue muy localizada en la zona de carga, alejándose de los estados de tensiones que se pueden producir en las etapas de montaje del tubo o bien, cuando éste se flecta en el fondo marino o bajo tierra. De esto se deriva que para mejorar el

ensayo, éste se debe realizar con un tubo de mayor razón largo/diámetro al que se le aplique una carga, o bien, que se flecte por la acción de su propio peso.

De la simulación expuesta en el capítulo 5 se concluye que el modelo es aplicable en una simulación mediante el método de los elementos finitos y es capaz de responder a la viscoelasticidad del material satisfactoriamente, presentando ajustes perfectos en ciertas etapas de la simulación. De los resultados se desprende que las discrepancias entre la simulación y el ensayo pueden deberse principalmente a evoluciones microscópicas experimentadas por el material que provocan una respuesta diferente después de una relajación o algún otro fenómeno. Además se observa explícitamente que el modelo predice que no existe una relación lineal entre el esfuerzo y la deformación viscosa.

De acuerdo a los ajustes logrados en el apartado 4.6, se puede afirmar que el modelo sí es capaz de representar al material en carga hasta deformaciones menores al 1.5%.

BIBLIOGRAFÍA

Andriyana, A., Billon, N., & Silva, L. (2010). Mechanical response of a short fiber-reinforced thermoplastic: Experimental investigation and continuum mechanical modeling. *European Journal of Mechanics - A/Solids, 29*(6), 1065-1077. doi: DOI: 10.1016/j.euromechsol.2010.07.001

Andrzej, P. (2007). Cavitation during tensile deformation of high-density polyethylene. *Polymer, 48*(5), 1397-1409. doi: 10.1016/j.polymer.2006.12.054

Bartczak, Z., Cohen, R. E., & Argon, A. S. (1992). Evolution of the crystalline texture of high-density polyethylene during uniaxial compression. *Macromolecules, 25*(18), 4692-4704. doi: 10.1021/ma00044a034

Drozdov, A. D., & Christiansen, J. d. (2003). Modelling the viscoplastic response of polyethylene in uniaxial loading–unloading tests. *Mechanics Research Communications, 30*(5), 431-442. doi: DOI: 10.1016/S0093-6413(03)00040-5

Drozdov, A. D., & Christiansen, J. d. (2007). Cyclic viscoplasticity of high-density polyethylene: Experiments and modeling. *Computational Materials Science, 39*(2), 465-480. doi: 10.1016/j.commatsci.2006.07.014

Drozdov, A. D., & deC. Christiansen, J. (2007). Viscoelasticity and viscoplasticity of semicrystalline polymers: Structureâ€“property relations for high-density polyethylene. *Computational Materials Science, 39*(4), 729-751.

Facca, A. G., Kortschot, M. T., & Yan, N. (2006). Predicting the elastic modulus of natural fibre reinforced thermoplastics. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, 37*(10), 1660-1671. doi: 10.1016/j.compositesa.2005.10.006

Fritsch, J., Hiermaier, S., & Strobl, G. (2009). Characterizing and modeling the non-linear viscoelastic tensile deformation of a glass fiber reinforced polypropylene. *Composites Science and Technology, 69*(14), 2460-2466.

Fu, S. -., Lauke, B., Mäder, E., Yue, C. -., & Hu, X. (2000). Tensile properties of short-glass-fiber- and short-carbon-fiber-reinforced polypropylene composites. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, 31*(10), 1117-1125. doi: 10.1016/S1359-835X(00)00068-3

Fu, S., & Lauke, B. (1996). Effects of fiber length and fiber orientation distributions on the tensile strength of short-fiber-reinforced polymers. *Composites Science and Technology, 56*(10), 1179-1190. doi: 10.1016/S0266-3538(96)00072-3

Fu, S., & Lauke, B. (1998). An analytical characterization of the anisotropy of the elastic modulus of misaligned short-fiber-reinforced polymers. *Composites Science and Technology, 58*(12), 1961-1972. doi: 10.1016/S0266-3538(98)00033-5

Fu, S., & Lauke, B. (1998). The elastic modulus of misaligned short-fiber-reinforced polymers. *Composites Science and Technology, 58*(3-4), 389-400. doi: 10.1016/S0266-3538(97)00129-2

Galeski, A., Bartczak, Z., Argon, A. S., & Cohen, R. E. (1992). Morphological alterations during texture-producing plastic plane strain compression of high-density polyethylene. *Macromolecules, 25*(21), 5705-5718. doi: 10.1021/ma00047a023

Hamed, A. F., Megat, M. H., Sapuan, S. M., & Sahari, B. B. (2008). Theoretical analysis for calculation of the through thickness effective constants for orthotropic thick filament wound tubes. *Polymer-Plastics Technology & Engineering, 47*(10), 1008-1015. doi: 10.1080/03602550802353144

Hizoum, K., Rémond, Y., Bahlouli, N., Oshmyan, V., Patlazhan, S., & Ahzi, S. (2006). Non linear strain rate dependency and unloading behavior of semi-crystalline polymers. *Oil & Gas Science and Technology - Rev.IFP, 61*(6), 743-749.

Hizoum, K., Remond, Y., & Patlazhan, S. (2011). Coupling of nanocavitation with cyclic deformation behavior of high-density polyethylene below the yield point. *Journal of Engineering Materials and Technology, 133*(3), 030901. doi: 10.1115/1.4004047

Hoffman, O. (1967). The brittle strength of orthotropic materials. *Journal of Composite Materials, 1*(2), 200-206.

Islam, M. A., & Begum, K. (2011). Prediction models for the elastic modulus of fiber-reinforced polymer composites: An analysis. *Journal of Scientific Research; Vol 3, no 2 (2011),*

Jones, R. M. (1999). *Mechanics of composite materials* (Second Edition ed.) Taylor & Francis.

Joseph, P. V., Mathew, G., Joseph, K., Thomas, S., & Pradeep, P. (2003). Mechanical properties of short sisal fiber-reinforced polypropylene composites: Comparison of experimental data with theoretical predictions. *Journal of Applied Polymer Science, 88*(3), 602-611. doi: 10.1002/app.11498

Kelly, A., & Tyson, W. R. (1965). Tensile properties of fibre-reinforced metals: Copper/tungsten and copper/molybdenum. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 13*(6), 329-350. doi: 10.1016/0022-5096(65)90035-9

Kim, W., & Sun, C. T. (2002). Modeling relaxation of a polymeric composite during loading and unloading. *Journal of Composite Materials, 36*(6), 745-755.

Knops, M. (2008). *Analysis of failure in fiber polymer laminates : The theory of alfred puck. : Engineering materials and processes*

Okoli, O. I., & Smith, G. F. (2000). The effect of strain rate and fibre content on the poisson's ratio of glass/epoxy composites. Composite Structures, 48(1), 157-161.

Oshmyan, V., Patlazhan, S., & Remond, Y. (2004). Simulation of small-strain deformations of semi-crystalline polymer: Coupling of structural transformations with stress-strain response. *Journal of Materials Science, 39*(11), 3577-3586.

Oshmyan, V., Patlazhan, S., & Remond, Y. (2006). Principles of structural-mechanical modeling of polymers and composites. *Polymer Science Series A, 48*(9), 1004-1013. doi: 10.1134/S0965545X06090173

Oshmyan, V., Rémond, Y., & Patlazhan, S. (2005). The effect of structural changes and nonlinear character of plastic flow on low strains in semicrystalline polymers. *Polymer Science Series A, 47*(4), 346-351.

Pawlak, A., & Galeski, A. (2005). Plastic deformation of crystalline polymers:â€‰ the role of cavitation and crystal plasticity. *Macromolecules, 38*(23), 9688-9697. doi: 10.1021/ma050842o

Peacock, A. J. (2000). *Handbook of polyethylene: Structures, properties and applications* Marcel Dekker.

Piggott, M. R., & Chua, P. S. (1987). Recent studies of the glass fiber-polymer interphase. *Industrial & Engineering Chemistry Research, 26*(4), 672-677. doi: 10.1021/ie00064a007

Rémond, Y. (2005). Constitutive modelling of viscoelastic unloading of short glass fibre-reinforced polyethylene. *Composites Science and Technology, 65*(3-4), 421-428. doi: DOI: 10.1016/j.compscitech.2004.09.010

Song, H. H., Argon, A. S., & Cohen, R. E. (1990). Morphology of highly textured high-density polyethylene. *Macromolecules, 23*(3), 870-876. doi: 10.1021/ma00205a030

Stephen W. Tsai. (1965). *Strength characteristics of composite materials.* (No. 19960503).

Tselios, C., Bikiaris, D., Savidis, P., Panayiotou, C., & Larena, A. (1999). Glass-fiber reinforcement of in situ compatibilized polypropylene/polyethylene blends. *Journal of Materials Science, 34*(2), 385-394. doi: 10.1023/A:1004434412273

Zhang, C., & Moore, I. D. (1997). Nonlinear mechanical response of high density polyethylene. part I: Experimental investigation and model evaluation. *Polymer Engineering & Science, 37*(2), 404-413. doi: 10.1002/pen.11683

Zhang, C., & Moore, I. D. (1997). Nonlinear mechanical response of high density polyethylene. part II: Uniaxial constitutive modeling. *Polymer Engineering & Science, 37*(2), 414-420. doi: 10.1002/pen.11684

Zhang, Y., Chen, R., & Hui, Z. (2000). Effects of the interfacial stress-induced crystallization on the matrix crystalline morphology and the mechanical properties of glass fiber-reinforced high density polyethylene composites. *Journal of Adhesion Science & Technology, 14*(11), 1405-1421.

A N E X O S

ANEXO A) CARACTERIZACIÓN UTILIZANDO OTROS MODELOS

Antes de llegar a definir completamente el modelo propuesto en esta tesis, se llevaron a cabo distintas caracterizaciones del material que no debían quedar fuera del trabajo. Es por esto que a continuación se presenta el ajuste logrado mediante un modelo lineal elástico transversalmente-isótropo y mediante el modelo uniaxial de Maxwell

A 1. Comportamiento lineal-elástico

A 1.1. Supuestos y limitaciones

Para caracterizar este material como uno lineal-elástico uno debe comprometer la representación de una serie de comportamientos, sin embargo, esto hace ganar mucho por el lado de la simpleza del modelo. Dicho esto, al caracterizar como un material lineal-elástico el modelo no tiene la capacidad de responder a la sensibilidad en la tasa de deformación observada en la fase experimental (capítulo 2), ni puede realizar los recorridos diferenciados de carga y descarga eliminando la histéresis en la respuesta del modelo. Además el modelo pierde toda respuesta a largo plazo como el creep o la relajación.

A 1.2. Matriz de rigidez elástica del laminado

Debido a la naturaleza laminar del material es que se adopta la ley de mezclas para calcular la matriz de rigidez del laminado. La ley de mezclas dice que, $X = \sum_i f_i \cdot X_i$ donde X es la propiedad a calcular y f_i y X_i son la fracción de volumen y la propiedad del elemento i, respectivamente. Por ende, la matriz de rigidez del laminado será la sumatoria de las matrices de rigidez de cada lámina ponderadas por su fracción de volumen y por supuesto todas en el mismo sistema coordenado.

Sea $\mathbf{C}_i$ la matriz de rigidez de la lámina i, y $\mathbf{T}_i$ la matriz de rotación que lleva del sistema coordenado la lámina al del laminado, entonces la matriz de rigidez de la lámina i, en el sistema coordenado del laminado, es $\overline{\mathbf{C}}_i = \mathbf{T}_i \times \mathbf{T}_i : \mathbf{C}_i : \mathbf{T}_i^T \times \mathbf{T}_i^T$. Finalmente, utilizando la ley de mezclas, se tiene que la matriz de rigidez del laminado es $\overline{\mathbf{C}} = \sum_i f_i \cdot \overline{\mathbf{C}}_i$, y si cada lámina tiene el mismo espesor la expresión queda

$$\overline{\mathbf{C}} = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n}\overline{\mathbf{C}}_i \tag{A.1}$$

donde n es el número de capas.

De la relación tensión-deformación se tiene que $\boldsymbol{\varepsilon} = \overline{\mathbf{D}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, donde $\overline{\mathbf{D}} = \overline{\mathbf{C}}^{-1}$ es la matriz de flexibilidad en coordenadas del laminado. Por ende, la matriz de flexibilidad del laminado se define como

$$\overline{\mathbf{D}} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i}^{n}\overline{\mathbf{C}}_i\right)^{-1} \tag{A.2}$$

con

$$\overline{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \overline{D}_{11} & \overline{D}_{12} & \overline{D}_{13} & \overline{D}_{14} & \overline{D}_{15} & \overline{D}_{16} \\ \overline{D}_{21} & \overline{D}_{22} & \overline{D}_{23} & \overline{D}_{24} & \overline{D}_{25} & \overline{D}_{26} \\ \overline{D}_{31} & \overline{D}_{32} & \overline{D}_{33} & \overline{D}_{34} & \overline{D}_{35} & \overline{D}_{36} \\ \overline{D}_{41} & \overline{D}_{42} & \overline{D}_{43} & \overline{D}_{44} & \overline{D}_{45} & \overline{D}_{46} \\ \overline{D}_{51} & \overline{D}_{52} & \overline{D}_{53} & \overline{D}_{54} & \overline{D}_{55} & \overline{D}_{56} \\ \overline{D}_{61} & \overline{D}_{62} & \overline{D}_{63} & \overline{D}_{64} & \overline{D}_{65} & \overline{D}_{66} \end{bmatrix} \tag{A.3}$$

donde cada uno de los términos de la matriz $\overline{\mathbf{D}}$ es función de términos D_{ij} de la matriz de rigidez de la lámina o bien cero.

Para determinar los coeficientes D_{ij} de la lámina mediante el método de los mínimos cuadrados primero se debe conocer la geometría del laminado, es decir, el número de láminas y el ángulo de cada una de éstas respecto al sistema coordenado principal, teniendo siempre presente que la rotación matricial y la ley de mezclas se aplica sobre la matriz de rigidez, por lo que se debe trabajar con ésta.

Los pasos a seguir son los siguientes:

i) Definir la matriz de flexibilidad de la lámina como (matriz transversalmente isótropa):

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & D_{14} & 0 & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 & D_{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ D_{14} & D_{24} & 0 & D_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} \end{bmatrix} \tag{A.4}$$

ii) Calcular la matriz de rigidez de la lámina como $\mathbf{C} = \mathbf{D}^{-1}$ para que quede en función de los parámetros D_{ij}.

iii) Rotar la matriz **C** de cada lámina para que éstas queden en coordenadas principales xyz del laminado.

iv) Aplicar ley de mezclas para obtener la matriz de rigidez del laminado como $\overline{\mathbf{C}} = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n}\overline{\mathbf{C}}_i$.

v) Obtener la matriz de flexibilidad del laminado haciendo $\overline{\mathbf{D}} = \overline{\mathbf{C}}^{-1}$.

vi) Aplicar mínimos cuadrados (más adelante se detalla la función objetivo que se minimizó), obteniendo así D_{11}, D_{22}, D_{44}, D_{12} y D_{23}

vii) Obtener $E_{11} = 1/D_{11}$, $E_{22} = 1/D_{22}$, $G_{12} = 1/D_{44}$, $\nu_{12} = E_{22}D_{12}$ y $\nu_{23} = E_{22}D_{23}$.

A 1.3. Estimación de las propiedades elásticas de la lámina

A continuación se explica cómo se obtuvieron los parámetros mediante el método de los mínimos cuadrados:

a) Mínimos cuadrados para obtener D_{11}, D_{22}, D_{44}, D_{12} y D_{23}.

Del ensayo de tracción uniaxial se tiene que:

i) Carga en dirección longitudinal

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{D}_{11} \cdot \sigma_x \\ \overline{D}_{21} \cdot \sigma_x \\ \overline{D}_{41} \cdot \sigma_x \end{bmatrix} \tag{A.5}$$

ii) Carga en dirección transversal

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{D}_{12} \cdot \sigma_y \\ \overline{D}_{22} \cdot \sigma_y \\ \overline{D}_{42} \cdot \sigma_y \end{bmatrix} \tag{A.6}$$

donde $\overline{D}_{11}$, $\overline{D}_{22}$, $\overline{D}_{21} = \overline{D}_{12}$, $\overline{D}_{41}$ y $\overline{D}_{42}$ están en función de D_{11}, D_{22}, D_{44}, D_{12} y D_{23}, y ε_x, ε_y, ε_z, σ_x y σ_y son datos obtenidos de los ensayos de tracción a distintas velocidades de desplazamiento del travesaño y de las mediciones realizadas.

De este modo, la función que se desea minimizar es:

$$F = \sum_{VELOCIDAD} \left(\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{N_L} \left(\overline{D}_{11} \cdot \sigma_{xi} - \varepsilon_{xi}\right)^2 + \left(\overline{D}_{21} \cdot \sigma_{xi} - \varepsilon_{yi}\right)^2 + \left(\overline{D}_{41} \cdot \sigma_{xi} - \varepsilon_{zi}\right)^2 \\ + \sum_{j=1}^{N_T} \left(\overline{D}_{12} \cdot \sigma_{yj} - \varepsilon_{xj}\right)^2 + \left(\overline{D}_{22} \cdot \sigma_{yj} - \varepsilon_{yj}\right)^2 + \left(\overline{D}_{42} \cdot \sigma_{yj} - \varepsilon_{zj}\right)^2 \end{array} \right) \tag{A.7}$$

donde los subíndices x e y corresponden a las direcciones longitudinal y transversal, respectivamente. La sumatoria externa al paréntesis principal indica que se suman todos los datos de los ensayos realizados a distintas velocidades, por lo tanto, la minimización considera todos los ensayos realizados.

Del ajuste mediante mínimos cuadrados (ver ANEXO C) se obtuvieron las siguientes propiedades de la lámina:

Tabla A-1: Propiedades de la lámina obtenidas mediante mínimos cuadrados

E_1 (MPa)	E_2 (MPa)	G_{12} (MPa)	ν_{12}	ν_{23}
3839	1679	900	0.44	0.3

En la Tabla A-1 se puede ver que los resultados obtenidos son completamente coherentes con lo que se esperaba, es decir, el módulo de elasticidad en la dirección de las fibras mayor que el módulo en la dirección perpendicular a las fibras, el módulo de corte menor que los dos módulos anteriores y el módulo de Poisson dentro de los valores comunes. Desde la Figura A-1 a la Figura A-2 se muestran los ajustes obtenidos con los valores de la Tabla A-1.

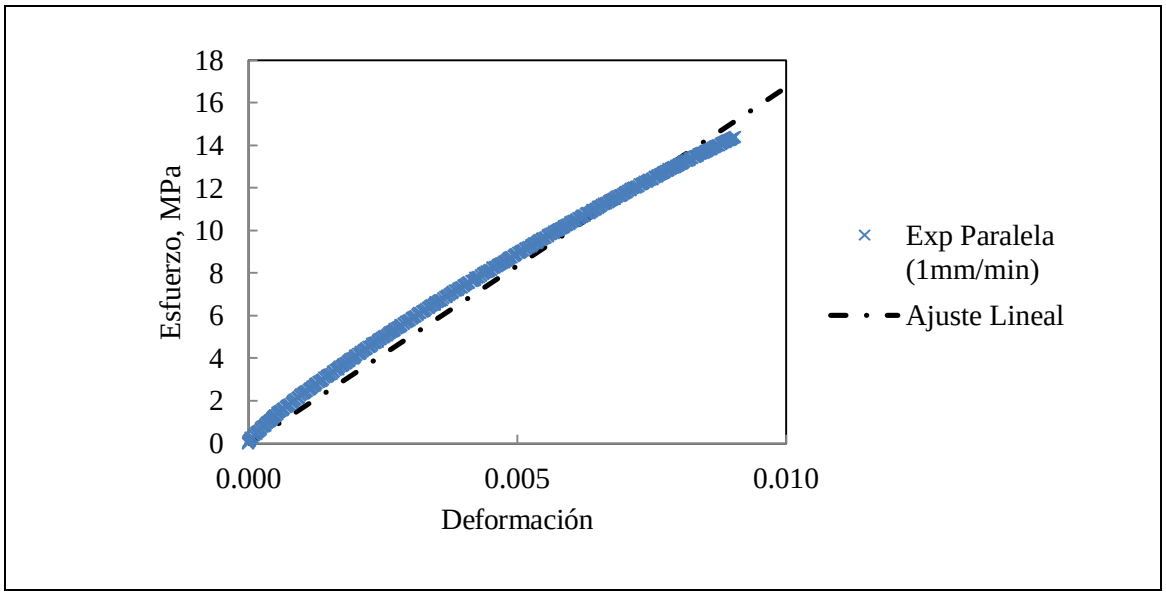


Figura A-1: Esfuerzo versus deformación longitudinal (eje X) cuando la probeta es traccionada en dirección longitudinal, y ajuste obtenido con los parámetros de lámina mostrados en la Tabla A-1

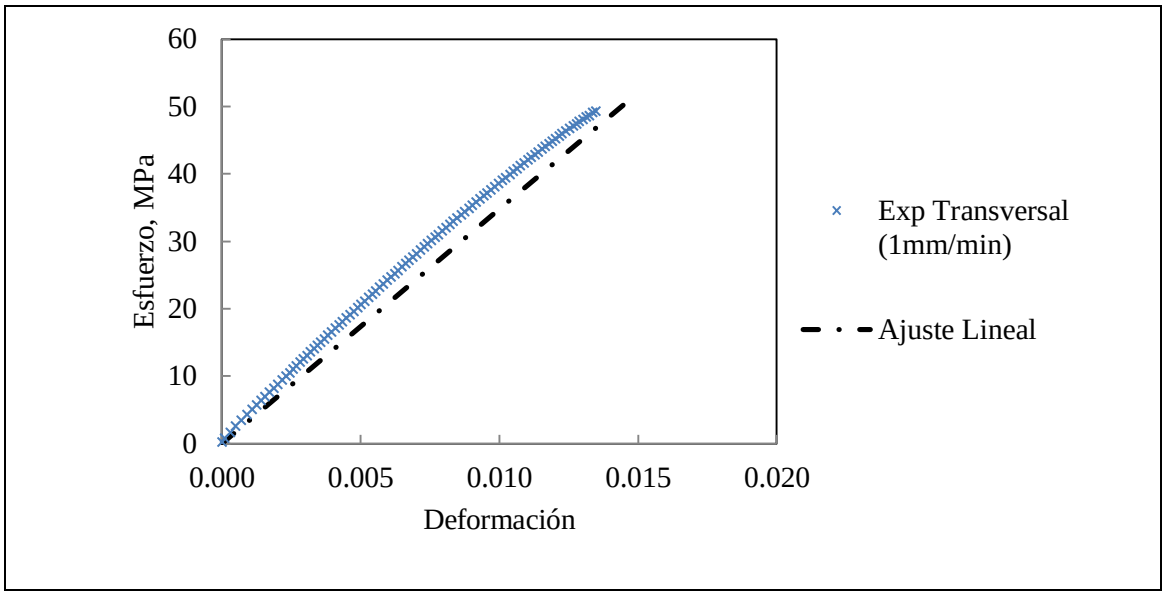


Figura A-2: Esfuerzo versus deformación transversal (eje Y) cuando la probeta es traccionada en dirección transversal, y ajuste obtenido con los parámetros de lámina mostrados en la Tabla A-1

A 2. Comportamiento viscoelástico unidimensional

A 2.1. Supuestos y limitaciones

Suponer que el material se puede caracterizar mediante el modelo unidimensional de Maxwell inmediatamente agrega respuestas al modelo capaces de representar ciertos comportamientos observados en la fase experimental. El modelo de Maxwell es capaz de responder a la sensibilidad en la tasa de deformación; también es capaz generar una histéresis al cargar y descargar, lo que indica que la carga y la descarga se realizan por distintos recorridos; además puede representar comportamiento a largo plazo como creep o relajación. No obstante el modelo tiene la gran limitación de ser unidimensional, por lo que no es posible generar una respuesta tridimensional del material.

A 2.2. Modelo reológico unidimensional de Maxwell

Como ya se mencionó en el capítulo 2, el modelo de Maxwell consiste en un resorte y un amortiguador conectados en serie cuya relación entre la tasa de esfuerzo y el esfuerzo, si se considera la tasa de deformación constante, obedece a la siguiente ecuación lineal (es la misma que la ecuación 2.41),

$$\dot{\sigma}(\sigma) = -\frac{E}{\eta}\sigma + E\dot{\varepsilon} \qquad \text{(A.8)}$$

A 2.3. Ajuste de parámetros viscoelásticos

Debido a la linealidad de la ecuación (A.8) respecto a σ y a $\dot{\sigma}$ es que ésta se utilizó para ajustar los parámetros E y η mediante el método de los mínimos cuadrados. En esta ecuación $\dot{\varepsilon}$ es constante, σ es dato y $\dot{\sigma}$ se calcula a partir de los datos como $\Delta\sigma / \Delta t$. Los parámetros calculados se presentan en la siguiente tabla:

Tabla A-2: Parámetros de modelo unidimensional de Maxwell para ensayo de tracción uniaxial con probetas longitudinales y transversales

Propiedad	Longitudinal	Transversal	
E	1644	3695	MPa
η	3045010	2874280	MPa*s

En la Figura A-3 y la Figura A-4 se muestran los datos de la tasa de esfuerzo en función del esfuerzo y los ajustes logrados experimentales obtenidos en un ensayo de tracción cíclico, es decir, de carga y descarga, y el ajuste del modelo de Maxwell utilizando los parámetros de la Tabla A-2, para probetas longitudinales y transversales, respectivamente.

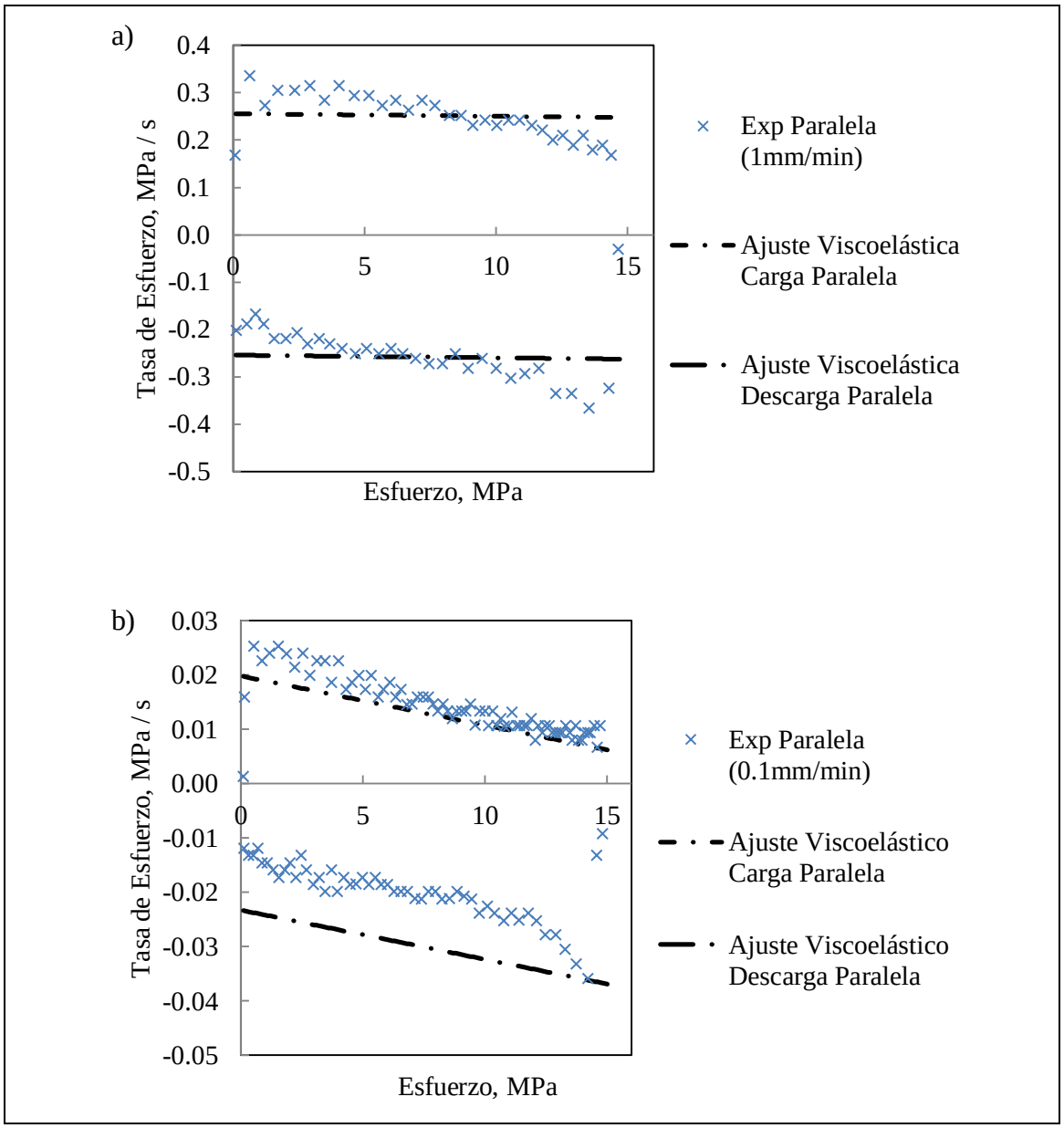


Figura A-3: Ajuste viscoelástico uniaxial de probeta paralela cargada con velocidad de desplazamiento de travesaño de: a) 1mm/min; b) 0.1mm/min.

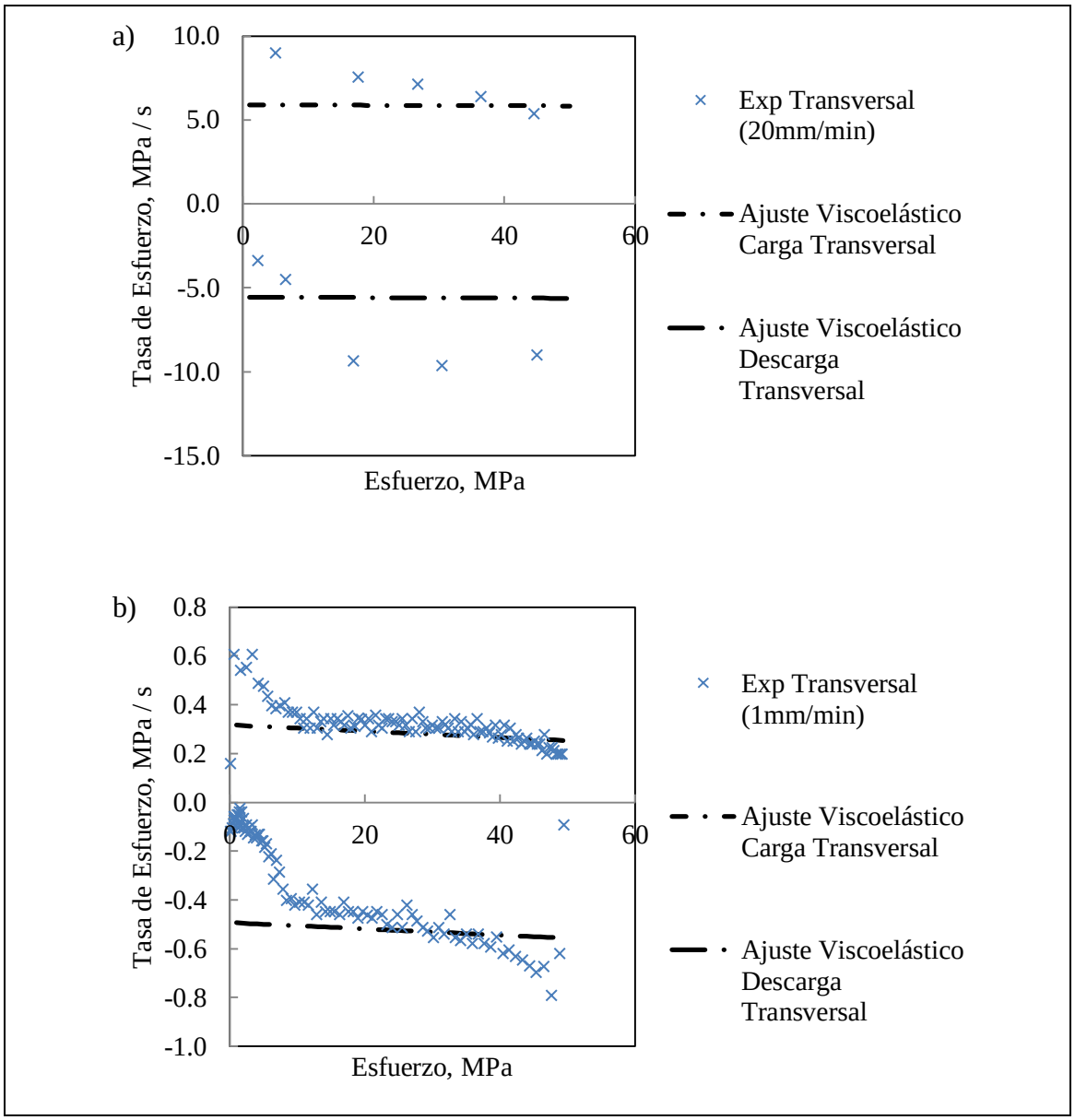


Figura A-4: Ajuste viscoelástico uniaxial de probeta transversal cargada con una velocidad de desplazamiento del travesaño de: a) 20mm/min; b) 1mm(min).

Con este ajuste, la respuesta tensión-deformación queda del siguiente modo:

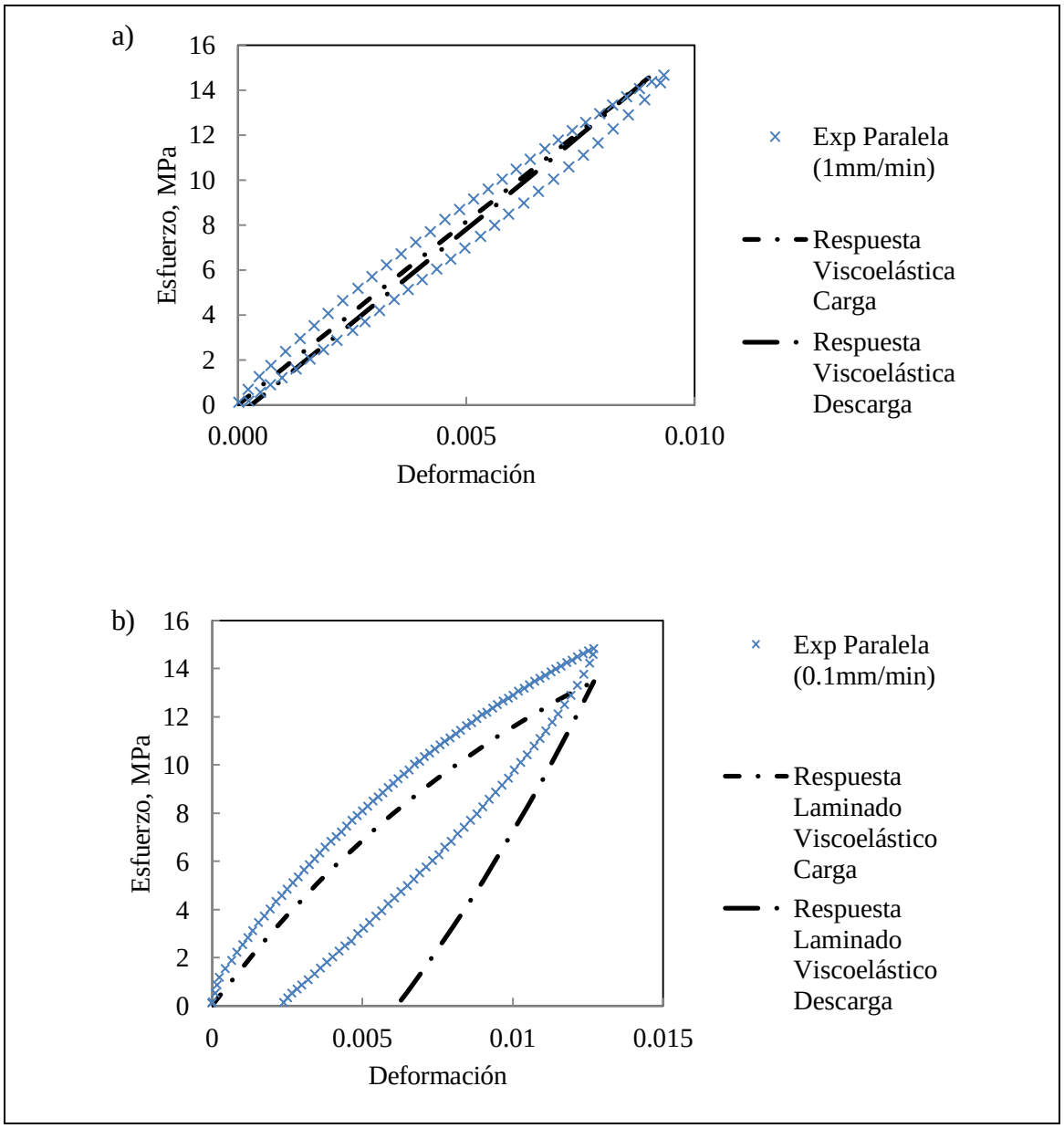


Figura A-5: Respuesta viscoelástica del modelo de Maxwell con los parámetros de la Tabla A-2 para las probetas paralelas cargadas a una velocidad de desplazamiento de travesaño de: a) 1mm/min; b) 0.1mm/min.

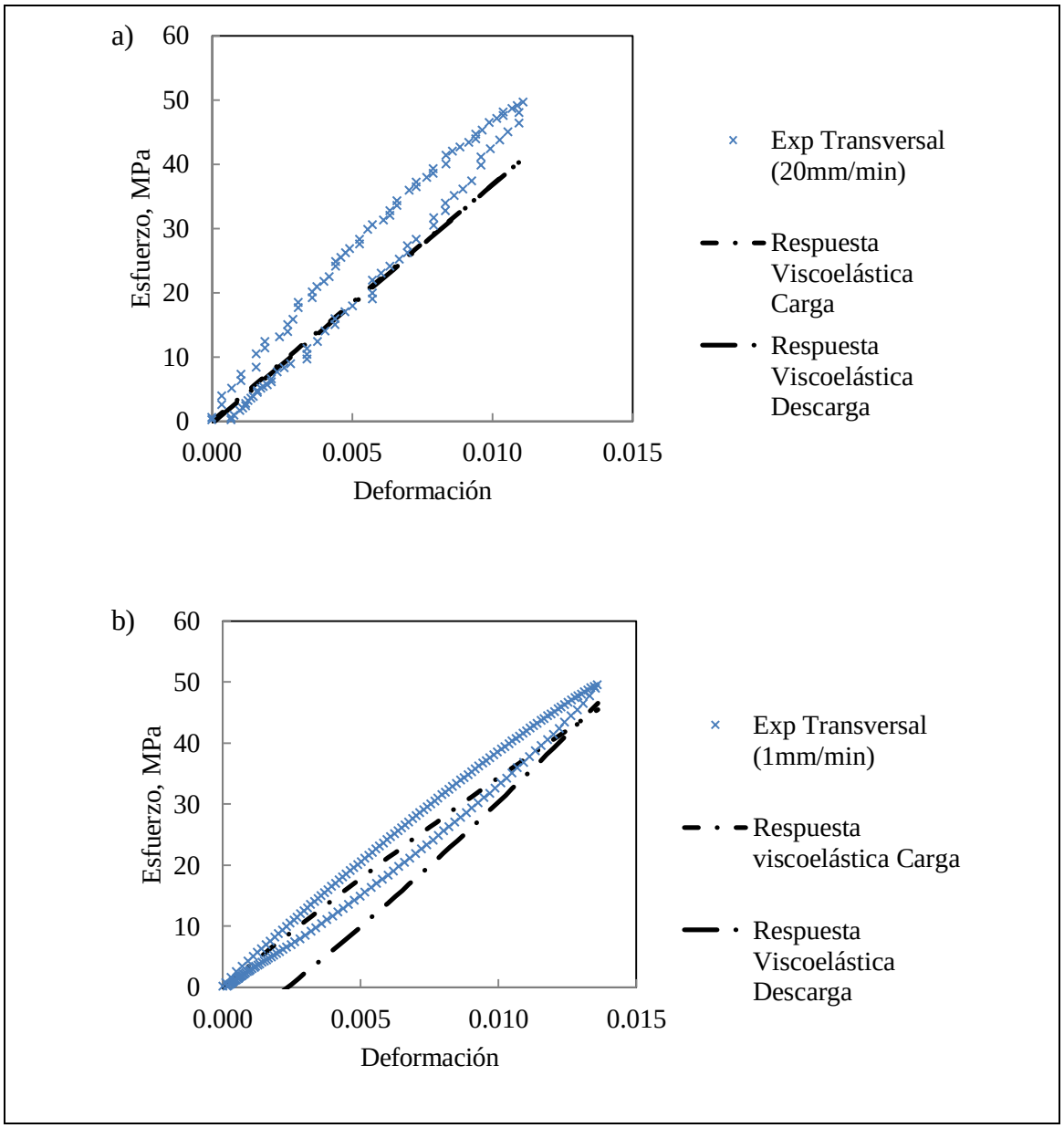


Figura A-6: Respuesta viscoelástica del modelo de Maxwell con los parámetros de la Tabla A-2 para las probetas transversales cargadas a una velocidad de desplazamiento de travesaño de: a) 20mm/min; b) 1mm/min

ANEXO B) ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE LA SIMULACIÓN

A continuación se presentan resultados de simulaciones realizadas con una geometría modificada del tubo y con los dos parámetros de ajustes presentados en el cuerpo de la tesis. La Tabla B-1 presenta la geometría del tubo a ser simulada.

Tabla B-1: Características geométricas y dimensiones del tubo ensayado.

Diámetro, mm	Largo, mm	Espesor, mm	N° de láminas	Ángulo de las láminas
500	2000	17.5	3	86°

B 1. Resultados

A continuación se presentan los resultados de las simulaciones efectuadas con los Ajustes 1 y 2. En la Figura B-1 y la Figura B-2 se presentas los resultados de la simulación al utilizar los parámetros de los Ajustes 1 y 2, respectivamente.

Tabla B-2: Parámetros de ajuste utilizados en las simulaciones.

Caso	E_1 (MPa)	E_2 (MPa)	G_{12} (MPa)	ν_{12}	ν_{23}	A (MPa*s)	B
Ajuste 1 (carga-descarga)	4529	1542	869	0.18	0.76	1259.8	0.7243
Ajuste 2 (carga)	5400	1461	980	0.29	0.78	280	0.839

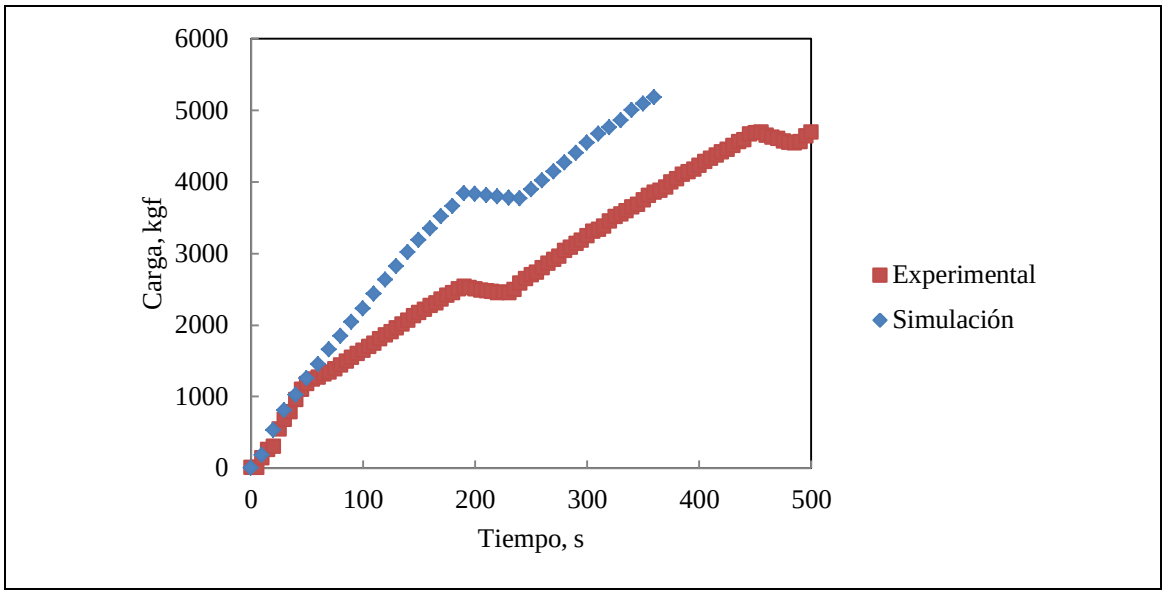


Figura B-1: Curva carga-tiempo del punzón. Resultados experimentales y simulados con parámetros de Ajuste 1.

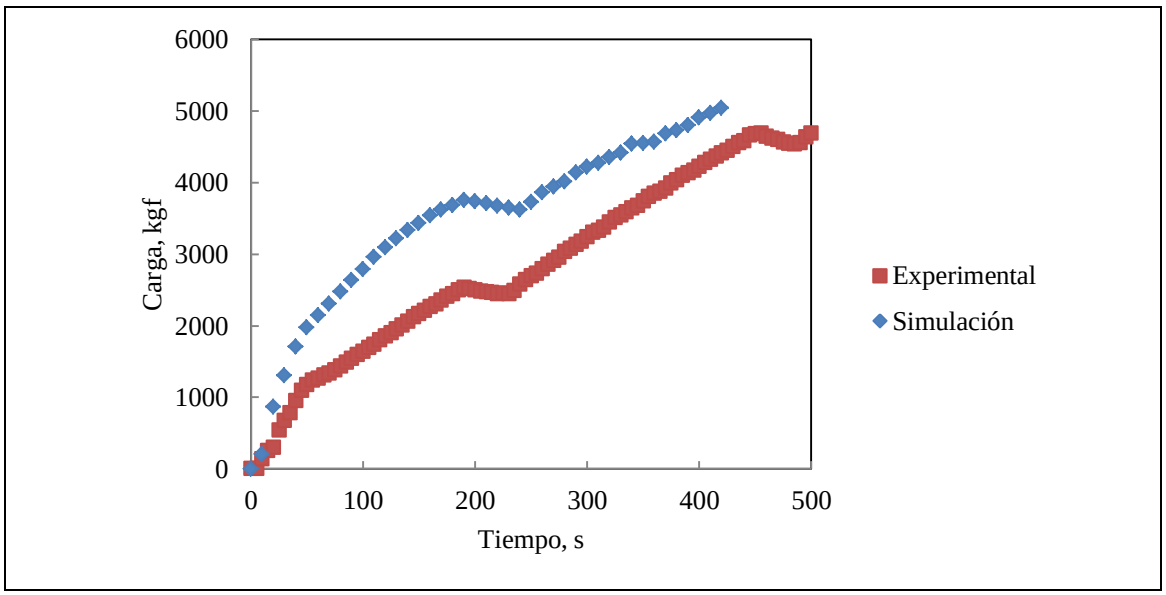


Figura B-2: Curva carga-tiempo del punzón. Resultados experimentales y simulados con parámetros de Ajuste 2.

A continuación, en la Figura B-1 y Figura B-2, se presenta la distribución de esfuerzos de Von-Mises en el tubo en el paso 350 (350 s) de la simulación. En la Figura B-5 y la B-6 se presentan desplazamientos nodales en dirección Y y totales, respectivamente.

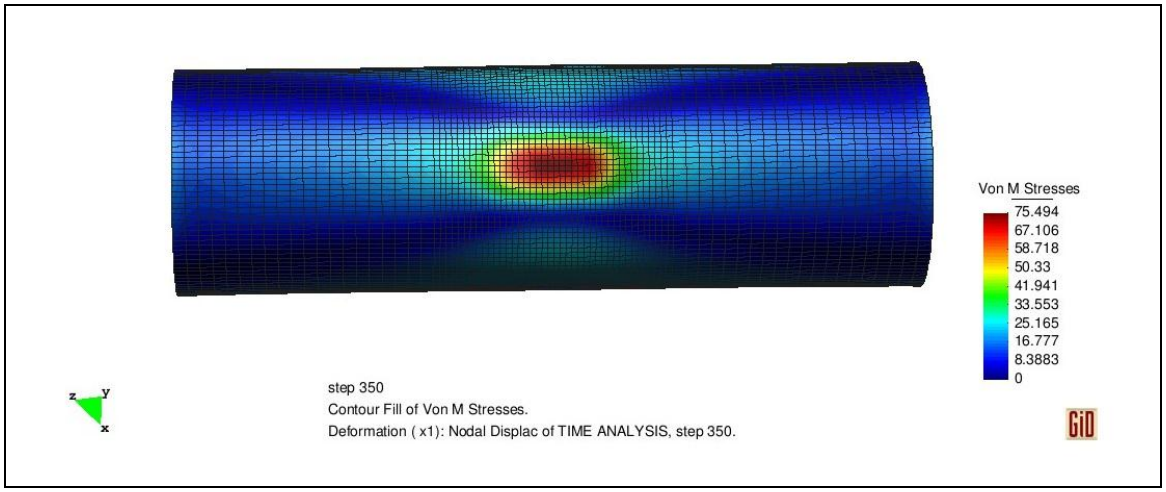


Figura B-3: Esfuerzos de von-Mises. Vista superior. Tiempo 350 s.

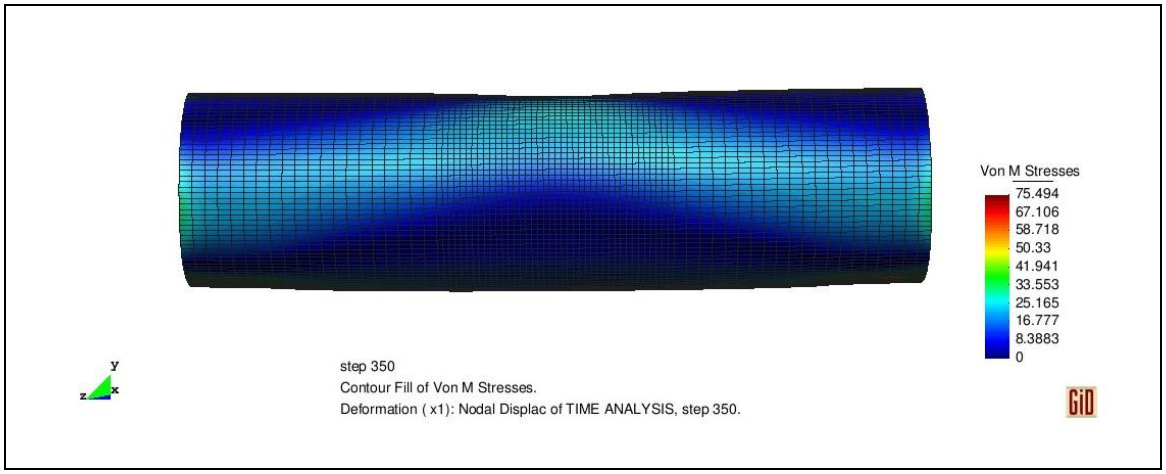


Figura B-4: Esfuerzos de von-Mises. Vista lateral. Tiempo 350 s.

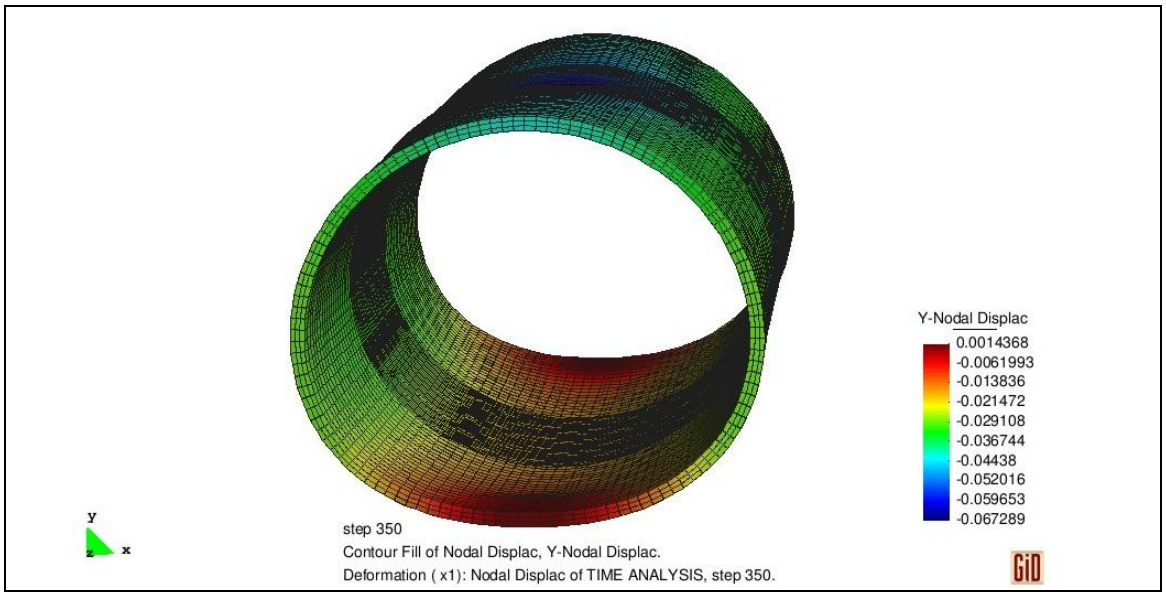


Figura B-5: Desplazamiento nodal en dirección Y. Tiempo 350 s.

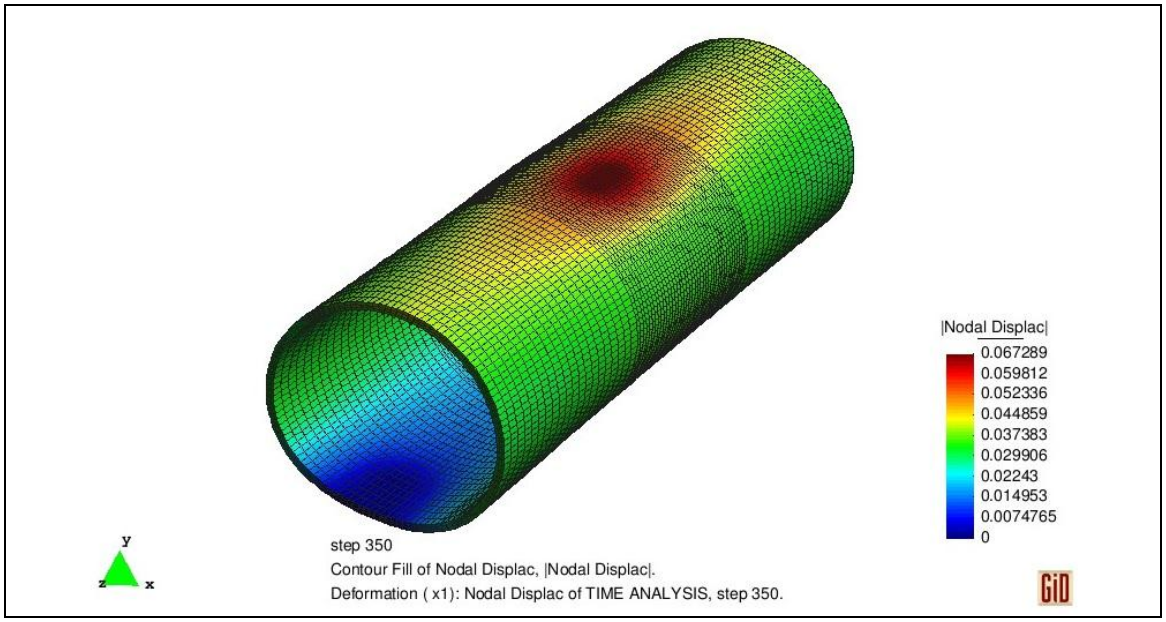


Figura B-6: Desplazamiento nodal total. Tiempo 350 s.

B 2. Discusión

En este análisis de sensibilidad se observa que los resultados de la simulación son sensibles a la geometría y los parámetros de los dos ajustes. En particular, el ensayo

simulado es muy sensible al espesor del tubo, ya que el mecanismo principal de deformación es el aplastamiento, donde ocurren esfuerzos y deformaciones muy localizadas. No obstante, en un ensayo más homogéneo como el propuesto en el apartado 5.1.5 debiera resultar en una sensibilidad menor, obteniendo así un modelo más robusto.

La Figura B-1 presenta la simulación con los parámetros encontrados al ajustar carga y descarga. Esta simulación resulta en una respuesta muy rígida del tubo, donde la pendiente inicial se ajusta bien a la pendiente experimental, pero luego continúa muy rígida y se separan ambas curvas sin lograr un buen ajuste. La relajación de la simulación se observa también más rígida que la experimental. Al retomar la carga, ambas pendientes se equiparan pero desfasadas debido a la rigidez del tubo en la etapa previa.

La Figura B-2 presenta la simulación con los parámetros obtenidos al ajustar sólo la carga de los ensayos carga-descarga. En ésta se puede observar que al comienzo de la simulación la respuesta del tubo es más rígida que en el experimento, pero luego las pendientes del experimento y la simulación tienden a equipararse. La respuesta en la relajación se observa que es prácticamente la misma pero desfasada debido a la alta rigidez inicial del tubo.

ANEXO C) MODELO Y DATOS PARA APLICAR EL MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS EN AMPL

C 1. El modelo: archivo *.mod

```
#DEFINICIÓN DE CONJUNTOS_____________________________

set ndatos=1..40000;
set direccion;
set ciclo;
set cargadescarga;
set carga within {dir in direccion,c in ciclo,n in ndatos};
set descarga within {dir in direccion, c in ciclo, k in ndatos};

#DEFINICIÓN DE PARÁMETROS_____________________________

param tpo{direccion,ciclo,ndatos};
param sigma{direccion,ciclo,ndatos};
param sigma_pto{direccion,ciclo,ndatos};
param epsXX{direccion,ciclo,ndatos};
param epsYY{direccion,ciclo,ndatos};
param epsZZ{direccion,ciclo,ndatos};
param eps_pto{dir in direccion, c in ciclo, cd in cargadescarga};

#parámetros que contienen la cantidad de datos de cada ensayo
param  largoP3;
param  largoP31;
param  largoT21;
param  largoT2;
param  largoT3;
param  largoT41;
param  largoT4;
param  largoT10;
param  largoP6;
param  largoP4;
param  largoP3d;
param  largoP3d1;
param  largoT2d1;
param  largoT2d;
param  largoT3d;
param  largoT4d1;
param  largoT4d;
param  largoP6d;
param  largoP4d;
```

```
#los parámetros t y l son para asignarles valor 1 ó 0, para poner o quitar los ensayos
#transversales o longitudinales a la función objetivo
param  t;
param  l;
#parámetros de los valores de la matriz de deformación. Se calculan a partir de las
#variables definidas
param  E11;
param  E22;
param  nu12;
param  nu21;
param  nu23;
param  nu32;
param  nu13;
param  nu31;
#parámetro para definir el ángulo del laminado
param  th;
#parámetro escala sirve para agrandar los valores de la parte viscosa que se ingresan #al
modelo, ya que entre los valores de la parte lineal y los valores de la parte viscosa #hay
como 5 órdenes de magnitud de diferencia
param  escala;
#parametros viscoso y elástico son para asignarles valor 1 ó 0 y así poner o quitar la
#parte viscosa o elástica de la función objetivo
param  viscoso;
param  elastico;
#parametros crg y dscrg son para asignarles valor 1 ó 0 y así poner o quitar la parte #de
la carga o de la descarga de los ensayos cíclicos de la función objetivo
param  crg;
param  dscrg;
#los parámetros definidos a continuación son para modificar el peso de cada ensayo #en
la función objetivo
param  transXXe;
param  transXXv;
param  transYY;
param  transZZ;
param  trans10;
param  trans01;
param  paral1XXe;
param  paral1XXv;
param  paral1YY;
param  paral1ZZ;
param  paral10;
param  paral01;
```

#DEFINICIÓN DE VARIABLES CON SUS RESTRICCIONES_____

```
var S11 >=1e-4,<=1e-3 ;
var S22 >= 4e-4,<=1e-3;
var S12 <= -5e-6,>=-5e-3 ;
var S23 <= -5e-5,>=-5e-3 ;
var S44 >= 5e-4,<=5.00e-3 ;
var b >=0.1,<=1;
var A >=1;
```

#DEFINICIÓN DE FUNCIÓN OBJETIVO.

/*No se pondrá toda la función objetivo, por razones de espacio. Se pondrá sólo un parte de ésta para mostrar cómo fue definida. Importante destacar que los parámetros D11, D22, D12, D23 mostrados en la función objetivo, en el programa real son expresiones muy grandes que están en función de los parámetros Sij de la matriz de flexibilidad y del ángulo de la capa.*/

```
minimize dife:

        t*(1/largoT21)*crg*(transXXe)*(elastico)*(sum {(i,j,k) in carga: i=="T2" &&
j==1} ((D22*sigma[i,j,k] - epsXX[i,j,k] )^2)

+        t*(1/largoT21)*crg*(transYY)*(elastico)*(sum {(i,j,k) in carga:i=="T2" &&
j==1} ((D21*sigma[i,j,k] - epsYY[i,j,k] )^2)

+        t*(1/largoT21)*crg*(transZZ)*(elastico)*(sum {(i,j,k) in carga:i=="T2" &&
j==1} ((D23*sigma[i,j,k] - epsZZ[i,j,k] )^2)

+        t*(1/largoT21)*crg*(transXXv)*(viscoso)*(1/escala)*(sum {(i,j,k) in
carga:i=="T2" && j==1}
( 1/(E22)*eps_pto[i,j,"c"]
- 1/((E22)*sigma[i,j,k]/(A*exp(-b*log(eps_pto[i,j,"c"]))) - sigma_pto[i,j,k])^2 )

+        t*(1/largoT2d1)*dscrg*(transXXv)*(viscoso)*(1/escala)*(sum {(i,j,k) in
descarga:i="T2" && j==1}
( 1/(E22)*eps_pto[i,j,"d"]
- 1/(E22)*sigma[i,j,k]/((A*exp(-b*log(abs(eps_pto[i,j,"d"])))) - sigma_pto[i,j,k])^2 )

+       l*(1/largoP31)*crg*(paral1XXe)*(elastico)*(sum {(i,j,k) in carga:i=="P3" &&
j==1} (D11*sigma[i,j,k] - epsXX[i,j,k] )^2)

+       l*(1/largoP31)*crg*(paral1YY)*(elastico)*(sum {(i,j,k) in carga:i=="P3" &&
j==1} (D12*sigma[i,j,k] - epsYY[i,j,k] )^2)
```

```
+       l*(1/largoP31)*crg*(paral1ZZ)*(elastico)*(sum {(i,j,k) in carga:i=="P3" &&
j==1} (D13*sigma[i,j,k] - epsZZ[i,j,k] )^2)

+       l*(1/largoP31)*crg*(paral1XXv)*(viscoso)*(1/escala)*(sum {(i,j,k) in
carga:i=="P3" && j==1}
(  1/(D11)*eps_pto[i,j,"c"]
-  1/(D11)*sigma[i,j,k]/(A*exp(-b*log(eps_pto[i,j,"c"]))) - sigma_pto[i,j,k])^2 )

+       l*(1/largoP3d1)*dscrg*(paral1XXv)*(viscoso)*(1/escala)*(sum {(i,j,k) in
descarga:i="P3" && j==1}
(  1/(D11)*eps_pto[i,j,"d"]
-  1/(D11)*sigma[i,j,k]/(A*exp(-b*log(abs(eps_pto[i,j,"d"])))) - sigma_pto[i,j,k])^2 )
```

C 2. Los datos: archivo *.dat

```
#DEFINICIÓN DE CONJUNTOS_________________________

set     direccion:=     T2      T3      T4      T10     P3      P4      P6      R3;
set     ciclo:=         1       2       3       ;
set     cargadescarga:=         c       d;
set     carga   :=
 (T2,1,*)       /*34     45      56      67      78      89      100     111     122     133
        144     155     166     177     188     199     210*/   221     232     243     254
        265     276     287     298     309     320     331     342     353     364     375
        386     397     408     419     430     441     452     463     474     485     496
        507     518     529     540     551     562     573     584     595     606     617
        628     639     650     661     672     683     694     705     716     727     738
        749     760     771     782     793     804     815     826     837     848     859
        870     881     892     903     914     925     936     947     958     969     980
        991     1002    1013    1024    1035    1046    1057    1068    1079    1090    #1101
        1112    1123    1134    1145    1156    1167    1178    1189    1200    1211    1222
        1233    1244    1255    1266    1277    1288    1299    1310    1321    1332    1343
        1354    1365    1376    1387    1398    1409    1420    1431    1442    1453    1464
        1475    1486    1497    1508    1519    1530    1541    1552    1563    1574    1585
        1596    1607    1618    1629    1640

(T2,2,*)        2808    2819    2830    2841    2852    2863    2874    2885    2896    2907
        2918    2929    2940    2951    2962    2973    2984    2995    3006    3017    3028
        3039    3050    3061    3072    3083    3094    3105    3116    3127    3138    3149
        3160    3171    3182    3193    3204    3215    3226    3237    3248    3259    3270
        3281    3292    3303    3314    3325    3336    3347    3358    3369    3380    3391
        3402    3413    3424    3435    3446    3457    3468    3479    3490    3501    3512
        3523    3534    3545    3556    3567    3578    3589    3600    3611    3622    3633
```

```
        3644  3655  3666  3677  3688  3699  3710  3721  3732  3743  3754
        3765  3776  3787  3798  3809  3820  3831

(T3,2,*)      464   475   486   497   508   519   530   541   552

(T4,1,*)      17    28    39    50    61    72    83    94    105   116
        127   138   149   160   171

(T4,2,*)      140   151   162   173   184

(T10,1,*)     201   603   1005  1407  1809  2211  2613  3015  3417  3819
        4221  4623  5025  5427  5829  6231  6633  7035  7437  7839  8241
        8643  9045  9447  9849  10251 #10653       11055 11457 11859 12261
        12663 13065 13467 13869 14271 14673 15075 15477 15879 16281 16683
        17085 17487 17889 18291 18693 19095 19497 19899 20301 20703 21105
        21507 21909 22311 22713 23115 23517 23919 24321

(P3,1,*)      33    50    67    84    101   118   135   152   169   186
        203   220   237   254   271   288   305   322   339   356   373
        390   407   424   441   458   475   492   509   526   543   560
        577

(P3,3,*)      2020  2035  2050  2065  2080  2095  2110  2125  2140  2155
        2170  2185  2200  2215  2230  2245  2260  2275  2290  2305  2320
        2335  2350  2365  2380  2395  2410  2425  2440  2455  2470  2485

(P4,3,*)      180   183   186   189   192   195   198   201   204   207
        210   213   216

(P6,1,*)      57    170   283   396   509   622   735   848   961   1074
        1187  1300  1413  1526  1639  1752  1865  1978  2091  2204  2317
        2430  2543  2656  2769  2882  2995  3108  3221  3334  3447  3560
        3673  3786  3899  4012  4125  4238  4351  4464  4577  4690  4803
        4916  5029  5142  5255  5368  5481  5594  5707  5820  5933  6046
        6159  6272  6385  6498  6611  6724  6837  6950  7063  7176  7289
        7402  7515  7628  7741  7854  7967  8080  8193  8306  8419
;
        set   descarga      :=
(T2,1,*)      1651  1662  1673  1684  1695  1706  1717  1728  1739  1750
        1761  1772  1783  1794  1805  1816  1827  1838  1849  1860  1871
        1882  1893  1904  1915  1926  1937  1948  1959  1970  1981  1992
        2003  2014  2025  2036  2047  2058  2069  2080  2091  2102  2113
        2124  2135  2146  2157  2168  2179  2190  2201  2212  2223  2234
        2245  2256  2267  2278  2289  2300  2311  2322  2333  2344  2355
        2366  2377  2388  2399  2410  2421  2432  2443  2454  2465  2476
```

```
        2487  2498  2509  2520  2531  2542  2553  2564  2575  2586  2597
        2608  2619  2630  2641  2652  2663  2674  2685  2696

(T2,2,*)      3842  3853  3864  3875  3886  3897  3908  3919  3930  3941
        3952  3963  3974  3985  3996  4007  4018  4029  4040  4051  4062
        4073  4084  4095  4106  4117  4128  4139  4150  4161  4172  4183
        4194  4205  4216  4227  4238  4249  4260  4271  4282  4293  4304
        4315  4326  4337  4348  4359  4370  4381  4392  4403  4414  #4425
        4436  4447  4458  4469  4480  4491  4502  4513  4524  4535  4546
        4557  4568  4579  4590  4601  4612  4623  4634  4645  4656  4667
        4678  4689  4700  4711  4722  4733  4744  4755  4766  4777  4788
        4799  4810  4821  4832  4843  4854  4865  4876  4887

(T3,2,*)      563   574   585   596   607   618   629   640

(T4,1,*)      984   995   1006  1017  1028  1039  1050  1061

(T4,2,*)      195   206   217   228   239

(P3,1,*)      594   611   628   645   662   679   696   713   730   747
        764   781   798   815   832   849   866   883   900   917   934
        951   968   985   1002  1019

(P3,3,*)      2500  2515  2530  2545  2560  2575  2590  2605  2620  2635
        2650  2665  2680  2695  2710  2725  2740  2755  2770  2785  2800
        2815  2830  2845  2860  2875  2890  2905  2920  2935

(P4,3,*)      222   225   228   231   234   237   240   243   246   249
        252   255

(P6,1,*)      8532  8645  8758  8871  8984  9097  9210  9323  9436  9549
        9662  9775  9888  10001 10114 10227 10340 10453 10566 10679 10792
        10905 11018 11131 11244 11357 11470 11583 11696 11809 11922 12035
        12148 12261 12374 12487 12600 12713 12826 12939 13052 13165 13278
        13391 13504 13617 13730 13843 13956 14069 14182 14295
;
```

DEFINICIÓN DE PARÁMETROS_____

#Tasa de deformación en carga y descarga para cada ensayo realizado

```
param  eps_pto          :=
[T2,*,*]:       c               d               :=
1               0.000069814     -0.000130530

[T2,*,*]:       c               d               :=
2               0.000085815     -0.000133379

[T3,*,*]:       c               d               :=
2               0.001175289     -0.001286763

[T4,*,*]:       c               d               :=
1               0.000578755     -0.000812340

[T4,*,*]:       c               d               :=
2               0.001597120     -0.001503360

[T10,*,*]:      c               d               :=
1               7.84039E-06     0.000000000

[P3,*,*]:       c               d               :=
1               0.000136728     -0.000165242

[P3,*,*]:       c               d               :=
3               0.000155650     -0.000151878

[P4,*,*]:       c               d               :=
3               0.001672000     -0.001597583

[P6,*,*]:       c               d               :=
1               1.20668E-05     -1.37678E-05

;
```

#DEFINICIÓN DE VALORES INICIALES PARA LAS VARIABLES_____

```
var S11:= 0.0002672;
var S22 := 0.000543085;
var S12 := -0.000113569;
var S23 := -0.00049032;
var S44 := 0.001151;
var b := .8;
var A:= 200;
```

#NO SE PONDRÁN TODOS LOS DATOS, POR RAZONES DE ESPACIO SÓLO SE PONDRÁ UNA PARTE DE ELLOS PARA MOSTRAR CÓMO FUERON DEFINIDOS

param: tpo sigma sigma_pto epsXX epsYY epsZZ :=

["T2",1,*]

221	29.015	11.93863667	0.355997798	0.00286	-0.0012870	-0.0012870
232	30.562	12.43916958	0.29007228	0.002986	-0.0013437	-0.0013437
243	32.109	12.95824074	0.29007228	0.003124	-0.0014058	-0.0014058
254	33.656	13.45877364	0.312881953	0.003236	-0.0014562	-0.0014562
265	35.218	13.86661527	0.303257383	0.003364	-0.0015138	-0.0015138
276	36.765	14.42276294	0.29007228	0.003488	-0.0015696	-0.0015696
287	38.312	14.84914282	0.329627591	0.003608	-0.0016236	-0.0016236
298	39.859	15.31259921	0.263702073	0.003734	-0.0016803	-0.0016803

[T4,1,*]

17	2.125	3.081924822	4.95072545	0.000368	-0.0002944	-0.0000719
28	3.5	9.786032202	4.066667334	0.001696	-0.0013568	-0.0003312
39	4.875	14.85708778	3.447826653	0.00286	-0.0022880	-0.0005586
50	6.25	19.64573591	3.27101503	0.003942	-0.0031536	-0.0007699
61	7.625	23.40298291	2.524477065	0.004812	-0.0038496	-0.0009398

[P6,1,*]

57	7.125	0.111545298	0.00132792	0.000006	0	0
170	21.25	0.167317948	0.015935043	0.00002	0	0
283	35.375	0.537896217	0.025230484	0.000118	0	0
396	49.5	0.873771505	0.022574644	0.000178	0	0

ANEXO D) CÓDIGO MATLAB PARA ROTAR LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA LÁMINA EN THETA GRADOS

```
%% MATRIZ DE ROTACIÓN
m=cos(theta);
n=sin(theta);

R=[  m n 0;
     -n m 0;
     0 0 1 ];

%% MATRIZ DE FLEXIBILIDAD MATERIAL ORTOTROPO

S=[ S11 S12 S13 0   0   0;
    S21 S22 S23 0   0   0;
    S31 S32 S33 0   0   0;
    0   0   0   S44 0   0;
    0   0   0   0   S55 0;
    0   0   0   0   0   S66];

%% MATRIZ DE RIGIDEZ MATERIAL ORTOTROPO
C=inv(S);

%% PASO DE MATRIZ DE 6x6 A TENSOR DE 4 SUBINDICES
%Se define el tensor C81 de 4 sub-índices
C81(3,3,3,3)=sym(0);

%Ciclo para pasar de la matriz C de 6x6 al tensor C81 de 4 sub-índices
for i=1:3
    for j=1:3
        for k=1:3
            for l=1:3
               if i==j
                   if k==l
                       C81(i,j,k,l)=C(i,k);
                   end
                   if k~=l
                       C81(i,j,k,l)=C(i,k+l+1);
                   end
               end
               if i~=j
                   if k==l
                       C81(i,j,k,l)=C(i+j+1,k);
                   end
                   if k~=l
                       C81(i,j,k,l)=C(i+j+1,k+l+1);
                   end
               end
            end
        end
    end
```

```
end
%% MATRICES DE RIGIDEZ Y FLEXIBILIDAD PARA CADA LÁMINA EN SUS
COORDENADAS PRINCIPALES

% Ciclo para cumplir la simetría de la matriz y para hacer al material
% transversalmente isótropo
for i=1:3
    for j=1:3
        for k=1:3
            for l=1:3
                C81(i,j,k,l)=subs(C81(i,j,k,l), S21, S12);
                C81(i,j,k,l)=subs(C81(i,j,k,l), S31, S13);
                C81(i,j,k,l)=subs(C81(i,j,k,l), S13, S12);
                C81(i,j,k,l)=subs(C81(i,j,k,l), S32, S23);
                C81(i,j,k,l)=subs(C81(i,j,k,l), S33, S22);
                C81(i,j,k,l)=subs(C81(i,j,k,l), S55, S44);
                C81(i,j,k,l)=subs(C81(i,j,k,l), S66, 2*(S22-S23));
            end
        end
    end
end




% ROTACIÓN DEL TENSOR EN NOTACION DE 4 SUBINDICES

D_(3,3,3,3)=sym(0);
for q=1:3
    for r=1:3
        for o=1:3
            for p=1:3
                for i=1:3
                    for j=1:3
                        for k=1:3
                            for l=1:3
                                aux1=subs(R(q,i)*R(r,j),theta);
                                aux2=subs(R(o,k)*R(p,l),theta);

D_(q,r,o,p)=((D_(q,r,o,p)+aux1*C81(i,j,k,l)*aux2));
                                D_(q,r,o,p)=simplify(D_(q,r,o,p));
                            end
                        end
                    end
                end
            end
        end
    end
end
```

```
% PASO DE TENSOR DE 4 SUBINDICES A MATRIZ DE 6x6

for i=1:3
    for j=1:3
        for k=1:3
            for l=1:3
               if i==j
                   if k==l
                       Clamina_(i,k)=(D_(i,j,k,l));
                   end
                   if k~=l
                       Clamina_(i,k+l+1)=D_(i,j,k,l);
                   end
               end
               if i~=j
                   if k==l
                       Clamina_(i+j+1,k)=D_(i,j,k,l);
                   end
                   if k~=l
                       Clamina_(i+j+1,k+l+1)=D_(i,j,k,l);
                   end
               end
            end
        end
    end
end
```