PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

# COBERTURA ÓPTIMA EN ECONOMÍAS EMERGENTES IMPORTADORAS DE PETRÓLEO

**FELIPE ALDUNATE ANFOSSI**

Tesis para optar al grado de
Magister en Ciencias de la Ingeniería

Profesor Supervisor:
JAIME CASASSUS VARGAS

Santiago de Chile, Marzo 2008

© MMVIII, FELIPE ALDUNATE ANFOSSI

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

# COBERTURA ÓPTIMA EN ECONOMÍAS EMERGENTES IMPORTADORAS DE PETRÓLEO

**FELIPE ALDUNATE ANFOSSI**

Tesis presentada a la Comisión integrada por los profesores:

JAIME CASASSUS VARGAS
GONZALO CORTAZAR SANZ
MATÍAS BRAUN LLONA
MIGUEL RÍOS OJEDA

Para completar las exigencias del grado de
Magister en Ciencias de la Ingeniería

Santiago de Chile, Marzo 2008

*A mi familia*

## AGRADECIMIENTOS

Agradezco primero a mi profesor guía Jaime Casassus por su tiempo, apoyo y por la infinidad de cosas que me enseñó. Fui afortunado de contar con la oportunidad de trabajar con él, quien sin lugar a dudas se convirtió en un *super advisor*.

Me siento muy agradecido además del profesor Gonzalo Cortazar, ya que fue en su gran talento para enseñar, donde encontré las razones que me llevaron a entrar en este entretenido mundo de las finanzas. Debo destacar también el valioso aporte que significaron sus comentarios para el desarrollo de esta tesis. Quiero agradecer también a Matías Braun y a Miguel Ríos, por interesarse en este proyecto y sumarse en sus últimas etapas aportando con sus observaciones y comentarios.

Rescato de mi tiempo de investigación, el privilegio que tuve de conocer a cada uno de mis compañeros de magíster y de FinlabUC. Nunca me faltó ayuda cuando la necesité y recibí importantes consejos de parte de muchos de ellos en momentos en que la investigación se trababa. Me llevo el recuerdo de tantos excelentes momentos vividos, y me quedo con profundas amistades.

No puedo olvidar a mi familia. Agradezco a mi madre por todo, a mis abuelitos por su inspirador ejemplo y por haberme permitido estudiar en esta universidad y a mi padre por darme la curiosidad científica. Finalmente mención especial para Catalina, por su infinita paciencia, apoyo y por el invaluable regalo de su compañía.

*Somewhere, something incredible is waiting to be known.*

—CARL SAGAN

# Índice general

AGRADECIMIENTOS . . . . . IV

Índice de figuras . . . . . VI

Índice de cuadros . . . . . VII

RESUMEN . . . . . VIII

ABSTRACT . . . . . IX

Capítulo 1. INTRODUCCION . . . . . 1

Capítulo 2. Marco Teórico . . . . . 4

2.1. Literatura relacionada . . . . . 4

2.2. Modelos de elección de portafolio . . . . . 16

Capítulo 3. Modelo . . . . . 22

3.1. Recursos Naturales y Capital en la Economía Emergente . . . . . 22

3.2. Proceso Gaussiano General para el Precio del Petróleo . . . . . 24

3.3. Políticas Óptima de Consumo, Demanda y Cobertura para la Economía Emergente . . . . . 25

3.4. Solución . . . . . 28

Capítulo 4. Un Proceso Simple para el Precio del Petróleo . . . . . 31

4.1. Consumo Óptimo de Capital . . . . . 32

4.2. Estrategia Óptima de Cobertura . . . . . 34

Capítulo 5. Resultados Empíricos . . . . . 36

5.1. Estimación de Parámetros . . . . . 36

5.1.1. Parámetros del Modelo de un Factor para el Precio del Petróleo . . . . 36

5.1.2. Parámetros del País Emergente . . . . . 38

5.2. Precisión de la Expansión Asintótica . . . . . 41

5.3. Análisis de los Resultados . . . . . 43
5.3.1. Consumo . . . . . 44
5.3.2. Estrategia de Cobertura y Correlación . . . . . 45
5.3.3. Reversión a la Media y Premio por Riesgo del Precio del Petróleo . . . 47
5.3.4. Aversión al Riesgo . . . . . 49
5.4. El caso de Chile . . . . . 50

Capítulo 6. Conclusiones . . . . . 53

Bibliografía . . . . . 55

Bibliografía . . . . . 55

ANEXOS . . . . . 61

ANEXO A. Expansión de primer orden . . . . . 62

## Índice de figuras

Figura 5.1. Comparación entre la aproximación de primer y segundo orden para el consumo. . . . . 41
Figura 5.2. Comparación entre la aproximación de primer y segundo orden para la estrategia de cobertura. . . . . 42
Figura 5.3. Consumo sobre capital $C/K$ y sobre el recurso natural $C/V$ en función del tamaño relativo del recurso natural $V/K$. . . . . 44
Figura 5.4. Estrategia de cobertura $\theta$ para diferentes coeficientes de correlación entre el recurso natural y los retornos del petróleo en función del tamaño relativo del recurso natural $V/K$. . . . . 45
Figura 5.5. Componentes de la estrategia de cobertura $\theta$ en función del tamaño relativo del recurso natural $V/K$. . . . . 46
Figura 5.6. Razón entre consumo y capital, $C/K$, en función de la reversión a la media del (log) precio del petróleo $\psi_x$ para diferentes tamaños relativos del recurso natural $V/K$. . . . . 47
Figura 5.7. Estrategia de cobertura $\theta$ en función de la reversión a la media del (log) precio del petróleo $\psi_x$ para diferentes tamaños relativos del recurso natural $V/K$. 48
Figura 5.8. Razón entre consumo y capital $C/K$ en función del premio por riesgo de mercado del (log) precio del petróleo $\lambda_x$ para diferentes tamaños relativos del recurso natural $V/K$. . . . . 49
Figura 5.9. Estrategia de cobertura $\theta$ en función del premio por riesgo de mercado del (log) precio del petróleo $\lambda_x$ para diferentes tamaños relativos del recurso natural $V/K$. . . . . 50
Figura 5.10. Razón entre consumo y capital $C/K$ en función de la aversión al riesgo del país $\gamma$ para diferentes tamaños relativos del recurso natural $V/K$. . . 51
Figura 5.11. Estrategia de cobertura $\theta$ en función de la aversión al riesgo del país $\gamma$ para diferentes tamaños relativos del recurso natural $V/K$. . . . . 52

## Índice de cuadros

Cuadro 5.1. Estimación por Máxima Verosimilitud del Proceso del Precio del Petróleo . . . . . 37
Cuadro 5.2. Parámetros del País Emergente . . . . . 38

## RESUMEN

Una característica común de las economías emergentes es su dependencia a las exportaciones de unos cuantos commodities primarios, cuyos precios en muchas ocaciones están correlacionados con el precio del petróleo. Contruimos un modelo que estudia el efecto del precio del petróleo sobre la estrategia de cobertura y el consumo óptimo en la economía emergente. La economía tiene dos sectores productivos: uno de capital que usa el petróleo como insumo de producción y uno de recursos naturales que produce el commodity local. Se asume que el recurso natural no es transable y que proporciona un dividendo al sector de capital. El precio del petróleo sigue un proceso exponencialmente *affine* de $n$ factores. Hay dos efectos directos del petróleo sobre la economía: el *efecto insumo* que puede ser positivo o negativo dependiendo del grado de aversión al riesgo, y el *efecto correlación* que puede ser positivo o negativo dependiendo de la correlación entre el recurso natural y el petróleo. Encontramos que la reversión a la media de los precios del petróleo, que puede ser inducida por un retorno por conveniencia variante en el tiempo, juega un importante rol en el consumo y estrategia de cobertura de la economía emergente. Influye sobre el efecto insumo a través de la persistencia de los shocks en el precio del petróleo y de la volatilidad de los contratos futuros, que son el instrumento de cobertura. Encontramos además que un *efecto correlación* mayor, debido a un parámetro de correlación positivo, implica que el recurso natural actúa como una cobertura natural frente al petróleo. Finalmente mostramos como encontrar una aproximación razonable cuando no existe una solución cerrada. En efecto, utilizamos una expansión asintótica en dos parámetros, la porción del petróleo dentro de los insumos y el tamaño del dividendo del recurso natural, para obtener una solución cuando el precio del petróleo sigue un proceso de $n$ factores.

**Palabras Claves:** Precios de commodities, precios de futuros, retorno por conveniencia, manejo del riesgo, mercados emergentes

## ABSTRACT

A common characteristic of emerging economies is that they rely on the export of a few primary commodities. Many times these commodities are correlated with crude oil prices. We build a model to study the effect of crude oil prices in the hedging strategy and optimal consumption in an emerging economy. The economy has two technologies: a capital sector that uses crude oil as an input to production and a natural resource that produces the local commodity. The natural resource is assumed to be non-tradable and pays a dividend to the capital sector. Crude oil prices follow a general n-factor exponentially affine process. There are two direct effects from crude oil prices in the economy: the *input effect*, which can be positive or negative depending on the degree of risk aversion parameter, and the *correlation effect*, that can be positive or negative depending on the correlation between the natural resource and the crude oil. We find that mean-reversion in crude oil prices, which can be induced by a time-varying convenience yield, plays an important role in the consumption and hedging strategy of the emerging economy. It affects the input effect through the persistence of the oil price shocks and the volatility of futures prices, which is the hedging instrument. We also find that a higher correlation effect due to the a positive correlation parameter, implies that the natural resource acts as a natural hedge against changes in crude oil. Finally, we show how to find a reasonable approximation when there are no closed-form solution available. Indeed, we use the asymptotic expansion technique in two parameters, the input share of oil to production and the size of the dividend from the natural resource, to obtain a solution when the crude oil price follows the general n-factor model.



**Keywords:** Commodity prices, Futures prices, Convenience yield, Risk Management, Emerging Markets

# Capítulo 1. INTRODUCCION

Las exportaciones de muchos países en Latinoamérica y en el África subsahariana están usualmente concentradas sólo en unos pocos commodities primarios. Durante los últimos años, los países emergentes han experimentado tasas de crecimiento que prácticamente han duplicado a las de los países desarrollados, mientras el índice de commodities de Goldman Sachs ha triplicado su valor desde 1999. El comercio de África representó en el año 2000 un 2.5 % del total a nivel mundial, decreciendo desde un 6.3 % en 1980. En el mismo período las exportaciones de productos manufacturados de este continente cayeron desde un 7.8 %, del total de los países desarrollados, a sólo un 3 % (UNCTAD 2003). Perlas, piedras preciosas y semipreciosas representaron por sí solas en el año 2000 el 15.3 % del total de exportaciones del África subsahariana. Estos hechos muestran, no sólo que África ha ido perdiendo presencia en el intercambio comercial global, sino que además ha sido incapaz de diversificar sus exportaciones hacia productos manufacturados. A pesar de que algunos países latinoamericanos han logrado desempeñarse en general mejor que los países africanos, muchos todavía concentran la mayor parte de sus exportaciones en commodities primarios. El cobre y sus derivados, por ejemplo, sumaron el año 2005 casi el 46 % del total de las exportaciones chilenas, representando más del 15 % del total de ingresos fiscales. La dependencia a los commodities de estos países hace que sus economías sean extremadamente vulnerables a los shocks en sus precios. Habiyaremye (2005) reporta que una caída del 28 % en los términos de intercambio entre 1980 y 1989, llevó a una pérdida de 15 %-16 % en el PIB del África subsahariana en el período 1987-1989.

Para capturar la relación entre los shocks en el precio del petróleo y el desempeño macroeconómico del país emergente, desarrollamos un modelo de equilibrio parcial para la economía emergente. Consideramos la existencia de una tecnología de producción que utiliza petróleo y capital como insumos. Suponemos además que el país cuenta con una dotación inicial de recursos naturales, que no pueden ser transados en el mercado, pero que entregan continuamente un dividendo que sí es líquido. Es un hecho que muchas economías emergentes optan por mantener y administrar sus recursos naturales, tanto por motivos

estratégicos como políticos, terminando de esta manera en una situación de mercado incompleto. Asumimos que el precio del petróleo está determinado por un vector de estado gaussiano de $n$ factores y que el valor económico del recurso natural sigue un proceso browniano geométrico que puede estar correlacionado con los shocks del precio del petróleo.

Introducimos contratos futuros sobre el petróleo en nuestra economía, de manera que el país emergente puede cubrir el riesgo asociado a las fluctuaciones en su precio. También asumimos que el país maximiza la utilidad esperada del consumo, dada por un función del tipo CRRA. De esta manera el problema que el país resuelve, consiste en decidir cuánto petróleo importar, cuántos contratos futuros comprar y cuánto capital consumir.

Desde una perspectiva de manejo del riesgo, el objetivo de nuestro trabajo es estudiar la estrategia de cobertura del petróleo solamente, por lo que nos enfocamos en la demanda por contratos futuros. Basamos nuestra suposición de que no existen contratos futuros sobre el commodity local, en razones de mercado y de estrategia de su administración. Suponemos que el país emergente incurriría en una pérdida de valor substancial si tratare de cubrir la totalidad de su producción de commodity local, debido a que los agentes de mercado demandarían menores precios de futuros, haciendo así que la decisión de cobertura sea poco atractiva. El Banco Mundial (World Bank 1999), reporta que las entidades locales en economías basadas en commodities tienen poco o ningún acceso a instrumentos de manejo del riesgo. Ellos atribuyen este hecho a tres razones fundamentales: una estructura del mercado local subdesarrollada, contratos con especificaciones que no calzan con las necesidades del país emergente y riesgos locales que generan mayores costos de transacción. A lo anterior se suma el hecho de que suponemos que el país se expone al riesgo del commodity local por razones estratégicas, ya que considera que tiene ventajas comparativas, en relación a otros agentes, para su administración. Al estudiar las políticas de cobertura para algunos países emergentes de nuestra muestra, encontramos que esta suposición es bastante razonable. Por ejemplo Codelco, la compañía estatal de cobre de Chile, tiene solamente el 9 % de su producción futura cubierta para el período entre 2006 y 2012.

Derivamos una solución analítica aproximada utilizando una técnica basada en el análisis de perturbación, para resolver la ecuación altamente no lineal de Hamilton Jacobi Bellman (HJB) resultante en el modelo. El método consiste en encontrar un set de parámetros tales que la ecuación tenga una solución cerrada, y luego expandir en torno a ese espacio de parámetros. Kogan y Uppal (2003) muestran que éste método de perturbación entrega bastante buenas aproximaciones de primer orden para las políticas de consumo e inversión y para otras variables económicas de interés, en el caso de un inversionista no logarítmico. En su artículo, al definir que el parámetro de aversión al riesgo es unitario, la expansión es realizada en torno a la solución con función de utilidad logarítmica. En contraste, nosotros imponemos que los parámetros del porcentaje de petróleo dentro de los insumos y del dividendo son cero, de manera que nuestro problema se simplifica al problema estándar de Merton con función de utilidad CRRA. La técnica de expansión asintótica expande la solución de la ecuación de HJB en torno a la solución cerrada del problema de Merton.

La expansión asintótica nos permite derivar expresiones de equilibrio para el consumo, las importaciones de petróleo y las posiciones en los contratos futuros de forma cerrada. Nuestros resultados muestran que la demanda por futuros considera la demanda miope estándar, un segundo término relacionado con los cambios en el conjunto de oportunidades de inversión, y un tercer término que surge de la correlación existente entre el precio del petróleo y el recurso natural de la economía emergente. Este último término aparece debido a que no existen otros instrumentos en la economía que permitan una cobertura ante variaciones en la riqueza ilíquida del país.

Este documento está organizado de la siguiente manera. En el siguiente capítulo se presenta el marco teórico de esta investigación, realizándose tanto una revisión bibliográfica, como un pequeño resumen de los modelos de elección de portafolio. En el capítulo 3 se presenta el modelo y se entrega una solución analítica para la ecuación de Hamilton Jacobi Bellman, discutiéndose las políticas de consumo y cobertura resultantes. En el capítulo 4 se analiza un caso simplificado con el fin de obtener una intuición económica del modelo. En el capítulo 5 se presenta la estimación empírica del modelo y se analizan sus implicancias económicas. Finalmente en el capítulo 6 se presentan las conclusiones.

# Capítulo 2. MARCO TEÓRICO

## 2.1. Literatura relacionada

### Efecto de los precios de commodities sobre la economía

Una extensa literatura estudia la relación entre los precios del petróleo y la actividad económica. Rasche y Tatom (1977), Darby (1982), Hamilton (1983, 1988), Burbidge y Harrison (1984), Mork (1989), Carruth, Hooker y Oswald (1998) reportan evidencia que apoya la hipótesis de que los precios del petróleo tienen efectos significativos sobre el producto de la economía. Artículos más recientes como Lee, Ni y Ratti (1995) y Hamilton (2003) proponen especificaciones alternativas para un shock en el petróleo, debido a la disminución observada del efecto de éstos sobre la actividad económica desde la mitad de la década de los 80. Los autores, enfocándose no sólo en los shocks mismos, sino también en el contexto en que éstos ocurren, logran mejorar el resultado de sus regresiones. Por otro lado, Bernanke et al. (1997, 2004), Hamilton y Herrera (2004) y Leduc y Sill (2004), han contribuido recientemente en el debate acerca del rol que ha jugado la política monetaria, en respuesta a los shocks en el precio del petróleo, sobre las recesiones en EEUU.

Se ha encontrado evidencia de efectos importantes del precio del petróleo en otros países, además de EE.UU.. Mork, Olsen y Mysen (1994) estudian la respuesta asimétrica a los shocks del petróleo para EE.UU. y otros países perteneciente a la OECD, y encuentran evidencia significativa indicando la existencia de una correlación negativa entre el precio del petróleo y fluctuaciones en el PIB para la mayoría de los países del estudio. Papapetrou (2001) reporta evidencia empírica que sugiere que las variaciones del precio del petróleo, afectan tanto la actividad económica real, como el empleo en Grecia. Cuñado y Pérez de Gracia (2003) estudian el caso de varios países europeos y encuentran que los shocks en el precio del petróleo tiene un efecto permanente y significativo sobre la inflación y un efecto de corto plazo sobre la producción industrial. De Miguel, Manzano y Martín-Moreno (2003) desarrollan un modelo para una economía pequeña, en la que la tasa de interés es exógena. Su modelo es capaz de replicar adecuadamente la evolución del PIB español entre

los años 1973 y 1986, pero su poder explicativo disminuye de ahí en adelante. Finalmente, Jiménez-Rodríguez y Sánchez (2005) utilizan un enfoque de VAR para estudiar la relación entre el precio del petróleo y la actividad económica real de los principales países industrializados de la OECD, y muestran que, en países importadores de petróleo, aumentos en su precio, tienen consecuencias negativas sobre el PIB. Jones, Leiby y Paik (2004) realizan una extensa revisión bibliográfica sobre los efectos macroeconómicos de los shocks del precio del petróleo.

Este trabajo se construye sobre una serie de esfuerzos teóricos por explicar el mecanismo a través del cual los precios de la energía afectan la producción final de la economía. Kim y Lougani (1992) incluyen explícitamente a la energía como un insumo en un modelo RBC, considerando separadamente el efecto de los shocks del precio de la energía, del efecto de los shocks no observables de la tecnología. Ellos encuentran que las variaciones en el precio del petróleo debieran explicar sólo una pequeña parte de la volatilidad del producto final. Rotemberg y Woodford (1996) consideran los efectos de competencia imperfecta y encuentran que un modelo que contemple una colusión implícita en el mercado productivo puede aumentar significativamente el efecto de los shocks de los precios de la energía. Finn (2000) propone una explicación alternativa basada en la relación entre la tasa de utilización de capital y los precios de energía. Este mecanismo de transmisión para los shocks en el precio del petróleo proporciona efectos cuantitativamente similares a lo de Rotemberg y Woodford, pero en un marco de competencia perfecta.

Por otro lado, una serie de artículos estudia la relación entre precios de commodities y el desempeño económico de una economía emergente, e.g., Deaton y Miller (1995), Hoffmaister, Roldos, y Wickham (1998), Deaton (1999) y Dehn (2000). Deaton y Miller examinan esta relación en varios países del África subsahariana utilizando un vector autoregresivo extendido, donde el PIB y sus componentes, consumo, inversión, gasto del gobierno y exportaciones, son regresionados versus un índice de precios de commodities. Los autores encuentran evidencia significativa que sugiere un efecto favorable de los booms en los precios de los commodities, aumentando el PIB, principalmente a través de la inversión. Hasta

nuestro conocimiento, existe sólo una limitada cantidad de artículos que modelan la dependencia de una economía emergente de sus recursos naturales en un marco económico como el nuestro. Kose y Riezman (1999) desarrollan un modelo de equilibrio en tiempo discreto y estudian los efectos de los shocks en los precios de commodities, entre otros términos de intercambio, en una pequeña economía abierta, a la que se refieren como una "típica economía africana". Los autores encuentran que los shocks en los términos de intercambio, explican una parte importante de las fluctuaciones en el producto agregado.

**Gestión del riesgo de precios de commodities en países emergentes**

Una amplia literatura se dedica al estudio de la forma en que los países con economías altamente dependientes de ciertos commodities deben gestionar los riesgos que esta condición implica. Los fondos de estabilización han sido la solución más común hasta el momento, pero recientemente estrategias de cobertura basadas en instrumentos del mercado financiero han sido propuestos por diferentes autores.

El problema fundamental relacionado con la volatilidad de los precios de los commodities que se exportan (importan) surge debido a que parte importante de los ingresos (egresos) futuros del país y por tanto su presupuesto fiscal, son desconocidos e impredecibles. Una menor recaudación fiscal, producto de una caída en los precios, puede llevar a impopulares recortes en el gasto y además a la cancelación de proyectos en curso, perdiéndose de esta manera la inversión inicial ya realizada. Para evitar lo anterior, el país podría intentar recurrir a financiamiento externo, sin embargo éste generalmente tiende a ser procíclico, siendo difícil por tanto obtenerlo precisamente cuando los precios de los commodities de los que el país depende han caído y éste más los necesita. Por otro lado un aumento en los precios de los commodities tampoco significa la ausencia de problemas, es sin duda un escenario más favorable que el anterior, pero un alza apresurada en el gasto, podría llevar a la inversión de recursos en proyectos no rentables, debido a la sensación general de abundancia y la consecuente presión política para gastar los nuevos recursos disponibles. Un alza en el precio de los commodities que se exportan también puede causar lo que comúnmente se conoce como enfermedad holandesa, término que se refiere al deterioro de otros sectores

de la economía, por ejemplo el manufacturero, a causa de una apreciación de la moneda local y la consecuente pérdida de competitividad de estos sectores.

Los fondos de recursos naturales han sido la estrategia más usada para lidiar con los problemas mencionados. Estos fondos son creados generalmente con dos objetivos. El primero se relaciona con la volatilidad de los precios de los commodities relevantes para la economía local, en este caso se conocen como fondos de estabilización. El segundo motivo que lleva a establecer uno de estos fondos es el de permitir el ahorro de cierto porcentaje de los beneficios obtenidos para las generaciones futuras. Omán en 1980 y Kuwait en 1976 son dos ejemplo de países que crearon fondos de reservas con sus ganancias de petróleo. Según Davis et al. (2001) estos fondos de ahorro también son capaces de proporcionar cierto grado de cobertura en el corto plazo.

Sin embargo, los fondos de estabilización no han significado para un porcentaje importante de países que los han implementado, una solución efectiva para los problemas relacionados con la volatilidad del precio de los commodities. Por otro lado en cuanto a los fondos de ahorro, no es claro hasta que punto la generación actual estaría dispuesta a reducir sus niveles de consumo, con el objetivo de favorecer a las generaciones futuras.

Es importante señalar que la existencia de un fondo de estabilización no es garantía de una menor volatilidad en el gasto fiscal. Por ejemplo, si el país emergente emite una mayor cantidad de deuda, aprovechando las condiciones favorables para ello en un escenario de precios altos del commodity que exporta, eliminará el efecto de estabilización buscado con el fondo.

Se debe considerar además que la efectividad de estos fondos depende directamente de las propiedades de los precios de los recursos naturales. No es claro en qué medida los precios revierten a la media, y en caso de que lo hicieran, esta media también resulta difícil de estimar. Por lo tanto, los fondos de estabilización que funcionan con reglas fijas para determinar sus ingresos y egresos, corren el riesgo de acumular recursos ilimitadamente en el tiempo o de agotarse. Sin embargo una normativa de administración de los fondos que permita una mayor discrecionalidad por parte del gobierno puede llevar al uso ineficiente

de los recursos. Davis et al. (2001a) cuestiona la verdadera utilidad de los fondos de estabilización. En su artículo resume una serie de aspectos negativos a considerar y cita los casos de Nigeria y Venezuela.

En 1994 Nigeria tenía una serie de fondos para gastos extrapresupuestarios, financiados con las ganacias del petróleo, que representaban casi un tercio del gasto fiscal total. Pero una regulación poco disciplinada así como la falta de capacidad para administrar las inversiones llevaron a la realización de costosos proyectos que terminaron teniendo bajas tasas de retornos. Mientras que en el caso de Venezuela, los recursos del Fondo de Inversión de Venezuela, establecido en la década de 1970, terminaron siendo utilizados para entrar en la propiedad de empresas de diferentes rubros, incluyendo el manufacturero, resultando en muchos casos en pérdidas. Además en años posteriores se destinaron recursos para subvencionar a compañías públicas del sector energético.

Finalmente, otro de los objetivos que a veces se menciona en favor de la creación de fondos de estabilización tiene relación con la posibilidad que estos sean utilizados para manejar en cierta medida la tasa de cambio, al permitir la inversión de sus recursos en el extranjero. Sin embargo, esto también puede ser logrado por el banco central o ministerio de hacienda del país, por ejemplo aumentando las reservas de moneda extranjera.

En uno de los pocos estudios empíricos sobre el tema, Davis et al. (2001a), analiza la relación entre un fondo de estabilización y los gastos del gobierno. Para ello considera una muestra de 12 países, 5 de los cuales han tenido un fondo de estabilización por un tiempo considerable y otros 7 que no, para poder realizar la comparación. Los autores estudian además la posible existencia de quiebres estructurales en las series de tiempo de los países que establecieron fondos. Sus resultados permiten concluir por un lado que en general en los países con fondos de estabilización el gasto fiscal se ve menos afectado ante cambios en los ingresos provenientes de las exportaciones de commodities. De los cinco países con fondos en tres (Chile, Kuwait y Noruega) la evidencia indica la ausencia de una relación positiva entre el gasto y las ganancias, mientras que en otro de los países con un fondo la relación es positiva, pero no significativamente distinta de cero. Sin embargo, los autores

concluyen también que la creación de un fondo de estabilización no tuvo efectos sobre el gasto fiscal. La evidencia para ello es bastante robusta para los cuatro países en los que se pudo realizar el test de un quiebre en el gasto tras la creación del fondo.

En un artículo reciente Shabligh y Ilahi (2007) postulan sin embargo que para medir la real efectividad de los fondos de estabilización no basta con estudiar sólo su impacto sobre los ingresos y el gasto fiscal, sino que se deben analizar además otros posibles efectos macroeconómicos. Los autores ocupan datos de 15 países, 9 de los cuales implementaron un fondo de estabilización en el período de estudio que comprende 30 años. Los resultados obtenidos indican la existencia de beneficios macroeconómicos de los fondos no considerados en la literatura existente. La presencia de un fondo de estabilización estaría relacionada negativamente con la inflación y con la volatilidad del dinero disponible en la economía. Sin embargo según el estudio, sólo existiría una débil relación entre la presencia de un fondo y la volatilidad de la tasa de cambio. De esta manera sus resultados contradicen la postura de los artículos mencionados anteriormente en relación a que los fondos de estabilización son prescindibles en el caso de una administración responsable del gobierno, y que por tanto no afectan el desempeño económico del país.

Existe sólo una acotada literatura que estudia estrategias de cobertura del riesgo del precio del petróleo, basadas en instrumentos del mercado financiero. Claessens y Varangis (1991) muestran como una empresa pública en un país emergente, se puede beneficiar con el uso de instrumentos financieros al disminuir con ellos la volatilidad del precio del petróleo que importa. Los autores estudian el beneficio que se puede alcanzar para diferentes tipos de petróleo al utilizar estrategias de cobertura basadas en instrumentos como futuros, opciones o commodity swaps. Los resultados obtenidos permiten concluir que el país lograría reducciones importantes en el riesgo al que está expuesto a través de la utilización de diferentes instrumentos financieros, sin embargo se hace notar que factores legales así como otros políticos relacionados con publicidad negativa pueden impedir la implementación de este tipo de estrategias de cobertura.

Daniel (2001) cuestiona la efectividad de los fondos de estabilización como estrategia de cobertura debido a la forma en que el precio del petróleo varía en el tiempo, ya que según él, éste no posee una media de largo plazo bien definida a la que revierte lo que hace que los shocks sean prácticamente permamentes. El autor plantea además, como ya se mencionó anteriormente, que un fondo por si solo no garantiza la estabilización del gasto fiscal ya que debe ser acompañado de otras políticas de control del presupuesto. A través de simulaciones, se muestra en el artículo como una estrategia de cobertura que considere futuros u opciones permite a un país exportador de petróleo reducir la volatilidad de sus ingresos. En particular se analiza el efecto que habría tenido en México una estrategia de este tipo. Se simulan los ingresos que habría percibido este país entre los años 1990 y 2000 si se hubiera cubierto comprando contratos futuros a 12 meses. Los resultados indican que se habría logrado una disminución de la volatilidad en un 58 % en el período estudiado, sin embargo, los ingresos habrían sido un 12 % menores. Daniel menciona además el posible uso de instrumentos OTC (Over the Counter), los que pueden ser creados para cubrir de mejor manera las necesidades específicas de cada país. Con ellos se logra eliminar el riesgo base, que se relaciona con el hecho de que el instrumento financiero no siempre está escrito sobre un subyacente que coincide perfectamente con las características del commodity cuyo rieso se quiere cubrir. El autor atribuye finalmente la poca utilización de instrumentos financieros a problemas de economía política así como a la falta de capacidad institucional para su adecuada gestión.

Devlin y Titman (2004) analizan el caso de un país exportador de petróleo y postulan que la estrategia de cobertura que éste debe implementar depende de la forma en que el precio del petróleo evoluciona en el tiempo. Si el precio presenta altos grados de reversión a la media, los shocks en el precio serán sólo transitorios, por lo que los autores concluyen que un fondo de estabilización sería suficiente en este caso. Pero por otro lado, si los cambios en el precio son más permanentes, es decir, presentan sólo una leve reversión a la media, la estrategia óptima debiera considerar instrumentos financieros como opciones o futuros, ya que un fondo de estabilización no sería suficiente para lograr suavizar los ingresos y

por tanto también el gasto fiscal. Los autores citan como ejemplo del uso del mercado financiero la estrategia de cobertura del precio del petróleo seguida por el estado de Texas en EEUU, donde a mediados de los años 90 se implementó un programa para cubrir alrededor del 10 % de las ganancias del petróleo, porcentaje que posteriormente fue aumentado a 25 %. Los autores destacan la forma en que se llevó a cabo el establecimiento del programa, realizándose un esfuerzo por evitar el surgimiento de oposición política. Entre otras cosas, la implementación fue de manera gradual, se educó a los legisladores y a sus equipos y se establecieron claros criterios de término del programa como una cantidad máxima de dinero que éste podía perder.

Por otro lado, Caballero (2003), analiza el rol que debe jugar el IMF u otro organismo internacional para ayudar a los países emergentes. Plantea que el enfoque debe abarcar no sólo períodos de crisis exclusivamente, y comprender además el apoyo al desarrollo y funcionamiento de soluciones de mercado para que puedan lidiar con la volatilidad de los flujos de capital.

**Modelos para precios de commodities**

Los mercados de commodities han experimentado un enorme crecimiento en los últimos años, aumentando tanto en valor como en complejidad. Este crecimieno ha sido acompañado por el desarrollo de modelos cada vez más complejos y precisos para los precios de los commodities y para los diferentes instrumentos derivados escritos sobres éstos, como futuros, opciones y otros.

Los modelos actuales se pueden clasificar en estacionarios y no estacionarios. Los modelos estacionarios, asumen que toda perturbación en el precio del commodity es temporal y eventualmente desaparece. De esta manera existe en ellos un valor de largo plazo al cual los precios tienden. Por otro lado, los modelos no estacionarios asumen que los shocks en el precio son permanentes, por lo que un aumento o disminución en ellos no desaparecerá con el tiempo. Así en este último tipo de modelos no existe una media de largo plazo a la cual reviertan los precios.

Los primeros modelos de precios de commodities consideraban un sólo factor estocástico y asumían que el retorno por conveniencia era constante en el tiempo, como por ejemplo en el modelo de Brennan y Schwarz (1985), donde se asume que el precio spot sigue un proceso no estacionario. Sin embargo, un problema de estos modelos es que en ellos todos los retornos de los futuros están perfectamente correlacionados, una característica que va en contra de la evidencia empírica. Considerando esto y además la evidencia que indicaba la presencia de reversión a la media en los precios, se comenzaron a introducir modelos de más factores en años posteriores. Gibson y Schwarz (1990) presentan un modelo de dos factores estocásticos en el cual asumen que el precio spot sigue un proceso browniano geométrico, suponiendo que tiene una distribución estacionaria log-normal. Además el segundo factor introducido corresponde al retorno por conveniencia del commodity, el cual tiene reversión a la media.

Schwartz (1997) estudia la capacidad de diferentes modelos de uno, dos y tres factores para explicar el comportamiento de precios de commodities. El modelo de un factor asume un proceso del tipo Ornstein-Uhlenbeck para el (log) precio. Este modelo es estacionario y considera reversión a la media. Por otro lado, el modelo de dos factores es una variación del modelo de Gibson y Schwartz (1990) mencionado anteriormente. En este modelo, el segundo factor es el retorno por conveniencia el cual se asume que sigue un proceso con reversión a la media y además que está correlacionado positivamente con el precio spot. Finalmente, el modelo de tres factores corresponde a una extensión del modelo anterior, considerando ahora que la tasa de interés también es estocástica. El autor concluye que los modelos de 2 y 3 factores son preferibles al de un solo factor, entre otros motivos, por su capacidad de explicar de mejor manera la estuctura de volatilidad de los precios. Además menciona la importancia de considerar la reversión a la media para la evaluación de proyectos relacionados con commodities.

Schwartz y Smith (2000) proponen otro modelo no estacionario de dos factores, que son las desviaciones de corto plazo del precio spot del commodity y el nivel de equilibrio del precio. El modelo asume que las desviaciones de corto plazo revierten a una media, pero que el nivel de equilibrio de los precios no. De esta manera se tiene que el modelo

corresponde al tipo no estacionario. Los autores muestran que a pesar de que su modelo no considera explicitamente los cambios del retorno por conveniencia en el tiempo, es equivalente a los modelos que sí lo hacen como los de Gibson y Schwartz (1990) y Schwartz (1997).

Cortazar y Schwarz (2003) proponen un modelo no estacionario de tres factores, en el cual al contrario del modelo de Schwartz (1997), donde el tercer factor es calibrado con precios de bonos, todos los factores son calibrados a partir de los precio de contratos futuros. Los autores destacan además la simpleza de la metodología de estimación propuesta, lo que facilita su implementación.

Casassus y Collin-Dufresne (2005) desarrollan un modelo gaussiano de tres factores que abarca las especificaciones analizadas por Schwartz (1997) así como Brennan (1991), Gibson y Schwartz (1990), Ross (1997) y Schwartz y Smith (2000). Los autores especifican conjuntamente la dinámica del precio spot del commodity, de la tasa de interés y del retorno por conveniencia. Éste puede depender entonces tanto del precio spot como de la tasa de interés. El modelo es maximal en el sentido de Dai y Singleton (2000), lo que quiere decir que contiene la mayor cantidad de parámetros econométricamente identificables. Uno de los aspectos más interesantes del modelo dice relación con la posibilidad de que exista reversión a la media tanto en la medida real como en la ajustada por riesgo. En la medida real, o histórica, la reversión a la media puede ser producida por la depenendencia al nivel de precios spot del retorno por conveniencia y/o por un premio por riesgo variable, mientras que en la medida ajustada por riesgo la reversión a la media se debe sólo a la relación entre el retorno por conveniencia y el nivel de precios spot. Los autores encuentran que la reversión a la media relacionada con el retorno por conveniencia tiene mayor importancia en commodities utilizados para producción, como petróleo y cobre, mientras que la reversión a la media causada por el premio por riesgo variable es más importante para los commodities que se utilizan como activos de inversión, como son el oro y la plata.

Finalmente, Cortazar y Naranjo (2006) estudian la capacidad de un modelo no estacionario de N factores para explicar el comportamiento de precios de futuros. Para la estimación de su modelo se introduce una metodología de filtro de Kalman que utiliza toda la información de precios disponibles, ya que se adapta al caso en que la cantidad de observaciones diarias varíe en el tiempo. Los autores concluyen que se requieren tres factores para modelar la estructura de precios y cuatro para explicar adecuadamente la estructura de volatilidad.

**Aversión al Riesgo y Mercados Incompletos**

Este artículo se relaciona además con la literatura de agentes aversos al riesgo en mercados incompletos, ya que en nuestro modelo el recurso natural es una activo no transable. Kahl, Liu y Longstaff (2003) estudian el caso de un agente que posee una acción ilíquida, cuyo riesgo puede ser cubierto solo parcialmente. Henderson (2006) concluye que la opción de invertir de un emprendedor que enfrenta mercados incompletos es diferente en relación al caso de un mercado completo. En particular, la autora menciona como su principal resultado el que existe una región de valores para los parámetros del modelo en la cual para un mercado incompleto el individuo decidiría invertir, sin embargo bajo un mercado completo la decisión sería la de esperar. Hugonnier y Morellec (2006) analizan como la aversión al riesgo afecta el momento en que un ejecutivo que enfrenta un riesgo no diversificable toma la decisión de inversión. Miao y Wang (2006) incluyen en su modelo la optimización de las políticas de consumo y ahorro de un agente que debe decidir además su inversión bajo un mercado incompleto. En todos los casos, los autores encuentran desviaciones significativas de las políticas de inversión y consumo con respecto al caso de mercados completos.

Nuestro trabajo está ligado de forma más cercana a Schwartz y Tebaldi (2006), quienes consideran un agente que cuenta con una dotación inicial de riqueza ilíquida, que no puede ser totalmente cubierta en el mercado, pero que le proporciona un dividendo líquido. Ellos estudian como esta restricción de liquidez afecta las decisiones de consumo e inversión en los diferentes activos disponibles en la economía. Nuestro modelo difiere en varios aspectos de su artículo. El más importante es que en vez de considerar un activo libre de riesgo y un

mercado accionario disponibles para invertir los fondos líquidos, nosotros consideramos que el agente debe decidir cuanto petróleo importar con el fin de utilizarlo como un insumo en una tecnología de producción no lineal.

## 2.2. Modelos de elección de portafolio

En esta sección se realiza una breve revisión del marco teórico relacionado con los modelos de elección de portafolio. A pesar de que el trabajo realizado para esta tesis corresponde a un modelo en tiempo continuo, se presentan primero los modelos en tiempo discreto que permiten una aproximación más intuitiva al tema.

### Modelos en tiempo discreto

Los modelos multiperíodos en tiempo discreto representan la extensión lógica de los modelos de elección de portafolio de un sólo período, en los que un individuo simplemente maximiza el valor final de su riqueza. En los modelos multiperíodos, se agrega la posibilidad de que el agente pueda consumir parte de su riqueza y además recalibrar su cartera en ciertos momentos intermedios de tiempo.

Suponemos que el individuo debe determinar sus estrategias óptimas para el período de tiempo comprendido entre $t = 0$ y $t = T$, donde $T$ se puede interpretar como la fecha de muerte del individuo que se asume conocida. Definimos como $c_{t_n}$ y $\theta_{t_n}$ a las políticas de consumo e inversión del individuo en el tiempo $t_n$ que mantendrá hasta $t_{n+1}$. Sean además $c = (c_t)_{t \in t_0, t_1, \ldots, t_{N-1}}$ y $\theta = (\theta_t)_{t \in t_0, t_1, \ldots, t_{N-1}}$. Por otro lado, asumimos que la utilidad que obtiene el individuo a lo largo de toda su vida está dada por la expresión:

$$U(c, W_T) = \sum_{t=0}^{T} e^{-\delta t}\, u(c_t) + e^{-\delta T}\, \overline{u}(W_T)$$

Se define la función de utilidad indirecta, $J$, como:

$$J_{t_i} \equiv \sup_{\{c,\, \theta\}} \mathbb{E}_{t_i} \left[ \sum_{t=0}^{T} e^{-\delta t}\, u(c_t) + e^{-\delta T}\, \overline{u}(W_T) \right]$$

Esta expresión corresponde a la máxima utilidad esperada que puede alcanzar el individuo a partir del instante $t_i$. De esta manera el problema que debe resolver consiste en determinar las políticas de consumo, $c$, y de inversión, $\theta$, que maximizan el valor esperado de su utilidad a lo largo de toda su vida $(J_0)$.

Algunas simples manipulaciones, permiten modificar la expresión anterior y obtener:

$$J_{t_i} = \sup_{\{c,\,\theta\}} \left\{ u(c_t)\,\Delta t + e^{-\delta\,\Delta t}\,\mathbb{E}_{t_i}[J_{t_{i+1}}] \right\}$$

Esta ecuación se conoce como *ecuación de Bellman*. Se observa que la decisión que se toma en $t_i$ se puede dividir en dos. Por un lado se deben escoger las políticas óptimas para el período actual y por otro las políticas para todos los períodos futuros. Esta propiedad es la base para poder solucionar el problema a través de un procedimiento recursivo de programación dinámica. Más adelante cuando se presente el caso de modelos en tiempo continuo se analizará el modo de encontrar una solución con más detalle.

Se necesita modelar además la forma en que evoluciona la riqueza del individuo en función de las decisiones que toma. Asumiendo que el vector $\theta_{t_n}$ corresponde al monto invertido en los diferentes activos, y que $R_{t_n}$ es el vector con sus retornos entre $t_n$ y $t_{n+1}$, se tendrá que el cambio en la riqueza del individuo entre un período y el siguiente está dado por:

$$W_{t_{n+1}} - W_{t_n} = \alpha_{t_n}\, r_{t_n} \Delta\, t + \theta_{t_n}^{\top}\, R_{t_n} + (y_{t_n} - c_{t_n}) \Delta\, t$$

donde $\alpha_{t_n}$ corresponde a la inversión en el activo libre de riesgo y $r_{t_n}$ a su tasa de retorno. En la expresión anterior se incluye además el término $y_{t_n}$ para considerar la posibilidad de que el agente reciba un ingreso durante el período. Ahora, el retorno de los activos riesgosos se puede descomponer en una parte conocida y otra estocástica:

$$R_{t_n} = \mu_{t_n}\, \Delta\, t + \sigma_{t_n}\, \epsilon_{t_n}\, \sqrt{\Delta\, t}$$

donde $\mu_{t_n}$ corresponde a los retornos esperados para el período, $\epsilon_{t_n}$ es el vector con los shocks estocásticos y $\sigma_{t_n}$ es una matriz que determina la influencia que tienen estos shocks sobre los retornos de los diferentes activos.

Finalmente se tiene que la evolución de la riqueza del individuo está dada por:

$$W_{t_{n+1}} - W_{t_n} = [\alpha_{t_n} r_{t_n} + \theta_{t_n}^{\top} \mu_{t_n} + y_{t_n} - c_{t_n}]\Delta t + \theta_{t_n}^{\top} \sigma_{t_n} \epsilon_{t_n} \sqrt{\Delta t}$$

**Modelos en tiempo continuo**

Los modelos en tiempo continuo representan en muchos aspectos una mejor descripción del comportamiento real de un individuo que debe decidir sus políticas de consumo e inversión, ya que por ejemplo no restringen a este agente a tomar sus decisiones sólo en ciertos momentos específicos de tiempo. Además los resultados para las estrategias óptimas de consumo e inversión son generalmente más claras que en los modelos de tiempo discreto.

En estos modelos lo primero es definir un espacio de probabilidad estándar $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con una filtración $\mathbb{F}$, que resume la evolución de la toda la información relevante para el individuo. En tiempo continuo, el objetivo del individuo seguirá siendo maximizar el valor esperado de su utilidad, pero ahora sus decisiones corresponden a una tasa de consumo y un proceso continuo para su portafolio en el intervalo $[0, T]$. El objetivo entonces es maximizar:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{-\delta t}\, u(c_t) + e^{-\delta T}\, \overline{u}(W_T)\right]$$

Nuevamente se define la función de utilidad indirecta, como la máxima utilidad esperada que puede alcanzar el individuo, la cual está dada por:

$$J_{t_i} = \sup_{\{c,\,\theta\} \in \mathcal{A}_t} \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{-\delta t}\, u(c_t) + e^{-\delta T}\, \overline{u}(W_T)\right]$$

Para encontrar la solución al problema que enfrenta el agente existen dos métodos generalmente utilizados. Uno consiste en utilizar programación dinámica como se comenzó a explicar en el análisis de los modelos en tiempo discreto, mientras la segunda alternativa se conoce como método de la martingala. Ésta última alternativa tiene la ventaja de no requerir la existencia de un proceso de Markov $X = X_t$ tal que la función de utilidad

indirecta se pueda escribir como $J_t = J(Wt, X_t, t)$, como sucede cuando se utiliza programación dinámica. Además esta alternativa permite un estudio de manera más simple acerca de la existencia de soluciones al problema. Sin embargo este método requiere que los mercados sean completos para poder ser utilizado.

En la literatura de elección de portafolio es más usual la utilización de programación dinámica estocástica la que se basa en la solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) y permite obtener las políticas óptimas de control, como son el consumo y la inversión, a partir de la solución.

Sin embargo la ecuación de HJB resultante es un muchas ocasiones una ecuación diferencial parcial altamente no lineal. Lamentablemente estas ecuaciones generalmente no tienen solución, excepto por algunos casos más simples. En la sección siguiente se presenta uno de ellos, y la forma de resolverlo.

**Modelo de Merton**

Para ejemplificar lo mostrado hasta el momento, se presenta a continuación el Modelo de Merton para el caso de horizonte de tiempo infinito. Merton analiza las decisiones de consumo e inversión de un agente que quiere maximizar el valor esperado de su utilidad y enfrenta incertidumbre sobre la forma en que evolucionan los precios de los diferentes activos de la economía.

El problema de Merton para un horizonte de tiempo infinito considera un agente con una función de utilidad dada por:

$$U(C) = e^{-\rho\, t}\frac{C^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad \text{para} \quad \gamma > 0, \gamma \neq 1$$

Donde $\gamma$ es el parámetro de aversión al riesgo. En este modelo la riqueza final es irrelevante para la utilidad del agente. Por otro lado, la evolución del activo riesgoso está dada por:

$$\frac{dS}{S} = \mu\, dt + \sigma\, dZ$$

Entonces, el problema que tiene que resolver el individuo consiste en maximizar el valor esperado de su utilidad que depende solamente de su consumo, eligiendo sus políticas de inversión y de consumo.

Ahora, haciendo algunas manipulaciones, reemplazando las especificaciones de este problema y utilizando la notación $J_W = \frac{\partial J}{\partial X}$, la ecuación de HJB resulta ser:

$$0 = e^{-\rho\, t}\frac{C^{1-\gamma}}{1-\gamma} + J_t + J_W\left(W\left(r + p(\mu - r)\right) - C\right) + \frac{1}{2}\, J_{WW}\, W^2\, p^2\, \sigma^2$$

donde se ha definido $p = \frac{\theta}{W}$ como la fracción de la riqueza invertida en el activo riesgoso.

Como se trata de un problema relativamente simple, es posible en este caso particular encontrar una solución analítica, para lo cual se debe suponer primero que la función de utilidad indirecta tiene una cierta forma y luego reemplazarla para verificar que cumple con la ecuación de HJB. La suposición para este problema es:

$$J(W, t) = e^{-\rho\, t}\, A\, \frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

donde $A$ es una constante que depende de los parámetros fundamentales del modelo. Ahora, según la condición de primer orden para el consumo óptimo $U_C = J_W$, (*envelope condition*), se tiene:

$$C^*(W, t) = A\, W$$

El consumo óptimo resulta ser simplemente una fracción constante de la riqueza del individuo. Por otro lado, derivando la ecuación de HJB con respecto a $p$ se obtiene la condición de primer orden con respecto a la inversión en el activo riesgoso, la cual implica que:

$$p^* = \frac{\mu - r}{\gamma\, \sigma^2}$$

De esta manera, se tiene que la inversión en el activo riesgoso también resulta ser una fracción constante de la riqueza. Además es interesante notar que mientras mayor sea la aversión al riesgo del individuo, menor será la cantidad de recursos que destine a invertir en el activo riesgoso. Se observa que lo mismo sucede con un aumento de la volatilidad. Por otro lado, como es de esperar, mientras mayor sea el retorno esperado del activo, o de manera más precisa, mientras mayor sea el exceso de retorno del activo por sobre la tasa de interés libre de riesgo, mayor será la inversión que hará el agente en él.

Estos resultados implican que tanto la razón entre consumo y riqueza como entre inversión en activo riesgoso y riqueza serán constantes para todos los individuos que tengan la misma aversión al riesgo, independiente de su riqueza.

Este simple modelo de elección de portafolio ha sido extendido en la literatura en una infinidad de maneras, pero el concepto básico continúa siendo el mismo. Extensiones interesantes resultan de considerar modelos con lo que se conoce como *oportunidades de inversión estocásticas*, donde se considera que variables como la tasa de interés, la volatilidad o el premio por riesgo son también estocásticas. Merton en artículos posteriores demostró que un agente bajo un escenario de oportunidades de inversión estocásticas incluirá un término adicional en la expresión de la demanda por activos riesgosos, que se denomina la demanda por cobertura (*hedging demand*). Éste término adicional surge también en el modelo presentado en esta tesis, por lo que será analizado en detalle en secciones posteriores.

# Capítulo 3. MODELO

En este capítulo se presenta el modelo general para el país emergente. Se asume que en éste existen dos sectores productivos, un sector de recursos naturales y uno de capital, a partir de los cuales el país obtiene recursos para cubrir sus diferentes necesidades. Por otro lado, el país debe comprar petróleo para su sector productivo y los recursos restantes puede destinarlos a la compra de contratos futuros o a consumo.

Primero se modela al sector de recursos naturales de la economía que se asume no es transable, lo que quiere decir que el país no puede acudir al mercado para vender sus reservas totales de commodities, pero este sector entrega en cada momento de tiempo un dividendo que sí es líquido. Luego se presenta la tecnología de producción del sector de capital, la que utiliza petróleo y capital como insumos.

El precio del petróleo está determinado en el modelo por un vector de estado gaussiano de $n$ factores, que puede estar correlacionado con el proceso browniano geométrico seguido por el tamaño de los recursos naturales. El país emergente puede cubrir el riesgo asociado a la volatilidad del petróleo mediante contratos futuros sobre su precio, sin embargo se asume que no existen en el mercado contratos futuros sobre el commodity que el país exporta.

Posteriormente se plantea el problema que tiene que resolver el país emergente, en particular, la expresión para la función de valor, a partir de la cual se obtiene la ecuación de Hamilton Jacobi Bellman para este modelo. Finalmente se resuelve la ecuación anterior y se presentan las expresiones para las políticas óptimas de consumo y cobertura, obtenidas mediante una técnica de expansión asintótica.

## 3.1. Recursos Naturales y Capital en la Economía Emergente

Asumimos que existen dos sectores productivos en la economía emergente: un sector de capital donde se utiliza petróleo como insumo y un sector de recursos naturales que produce el commodity local. Este último sigue un proceso browniano geométrico:

$$dV(t) = V(t)(\mu_{_V} - \xi)dt + V(t)\sigma_{_V}\, dW(t), \tag{3.1}$$

donde $\mu_V$ y $\sigma_V$ son la tasa de crecimiento esperada y la volatilidad del valor económico de los recusos naturales, $V(t)$, respectivamente. La tasa de crecimiento puede ser positiva o negativa. Un valor negativo para $\mu_V$ puede deberse por ejemplo a la depreciación del stock de commodities. El término $\xi\, V(t)dt$ es el dividendo que obtiene el país por efecto de las exportaciones de su commodity local. Por último, $W(t)$ corresponde a un movimiento browniano estándar, que puede eventualmente estar correlacionado con los shocks del precio del petróleo descritos en la siguiente sección.

Existe además en la economía emergente una tecnología de producción no lineal que utiliza capital, $K(t)$, y petróleo, $Q(t)$, como insumos. Consideramos la siguiente dinámica para el capital en la economía emergente:

$$dK(t) = \left(\alpha\, K(t)^{1-\eta} Q(t)^{\eta} - S(t)Q(t) + \xi\, V(t) - C(t)\right) dt, \tag{3.2}$$

donde $\eta$ es una constante que denota la porción de petróleo en los insumos, $S(t)$ es el precio por unidad de petróleo y $C(t)$ es el consumo. El país decide cuantas unidades de petróleo $Q(t)$ comprar en todo momento de tiempo $t$.

El petróleo tiene un doble efecto sobre la economía emergente. Primero, existe un impacto directo en la producción final del país, debido a que el petróleo es un insumo de la economía. A esto llamaremos *efecto insumo*. Mientras más alto sea el precio del petróleo, menores serán los flujos de caja generados por el país. El segundo efecto, surge de la posible correlación entre el precio del petróleo y los recursos naturales no transables del país. A esto último llamaremos *efecto correlación*.

Finalmente, la economía emergente maximiza la utilidad esperada del consumo, dada por:

$$U(t, C) = e^{-\beta t} \frac{C^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad \text{para} \quad \gamma > 0, \gamma \neq 1 \tag{3.3}$$

### 3.2. Proceso Gaussiano General para el Precio del Petróleo

En esta sección seguimos a Duffie y Kan, Duffie, Pan, y Singleton, y Dai y Singleton (DS 2000), y se introduce una representación canónica de un vector de estados gaussiano de $n$ factores, para el (log) precio del petróleo.

El modelo corresponde a la familia $A_0(n)$ siguiendo la terminología de DS 2000. Asumimos que el precio spot del commodity $S(t)$ está dado por:

$$X(t) := \log S(t) = \phi_0 + \phi_Y^\top Y(t), \tag{3.4}$$

donde $\phi_0$ es una constante, $\phi_Y$ es un vector de $n\times 1$, e $Y(t)^\top = (Y_1(t), Y_2(t), \ldots, Y_n(t))$ es un vector de variables de estado que sigue un proceso de difusión gaussiano bajo la medida neutral al riesgo $\mathbb{Q}$:

$$dY(t) = -\kappa Y(t)dt + dZ^{\mathbb{Q}}(t), \tag{3.5}$$

donde $\kappa$ es una matriz triangular inferior de $n \times n$ y $dZ^{\mathbb{Q}}$ es un vector de movimientos brownianos independientes de dimensión $n \times 1$.

Asumimos que en todo momento de tiempo $t$ se transan $n$ contratos futuros sobre el precio del petróleo de madureces $T_i > t$ para $i = 1, \ldots, n$. Como es sabido (e.g., Duffie (1996)), el precio de un futuro $F_{T_i}(t)$ de madurez $T_i$ en el tiempo $t$ es:

$$F_{T_i}(t) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[e^{X(T_i)}\right] = e^{A_{T_i}(t) + B_{T_i}(t)^\top Y(t)}, \tag{3.6}$$

donde $A_{T_i}(t)$ y $B_{T_i}(t)$ son la solución al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{dA_{T_i}(t)}{dt} = -\frac{1}{2}B_{T_i}(t)^\top B_{T_i}(t) \tag{3.7}$$

$$\frac{dB_{T_i}(t)}{dt} = \kappa^\top B_{T_i}(t) \tag{3.8}$$

con condiciones de borde $A_{T_i}(T_i) = \phi_0$ y $B_{T_i}(T_i) = \phi_Y$, que puede ser resuelto de manera cerrada.

Elegimos la siguiente especificación para el premio por riesgo:

$$dZ^{\mathbb{Q}}(t) = dZ(t) + \lambda\, dt. \tag{3.9}$$

donde $Z$ es un vector de movimientos brownianos de $n \times 1$, en un espacio de probabilidad estándar $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y $\lambda$ es un vector de constantes de $n \times 1$.

Se tiene entonces que el proceso para el precio del futuro que madura en tiempo $T_i$ bajo la medida de probabilidad histórica $P$ está dado por

$$dF_{T_i}(t) = F_{T_i}(t) B_{T_i}(t)^{\top} \lambda\, dt + F_{T_i}(t) B_{T_i}(t)^{\top} dZ(t). \tag{3.10}$$

Definimos el proceso $dF_{T}(t)$ como el vector de dimensión $n \times 1$ que agrupa los precios de los diferentes contratos futuros $dF_{T_i}(t)$:

$$dF_{T}(t) = I_{F}(t)\sigma_{F}(t)\lambda\, dt + I_{F}(t)\sigma_{F}(t) dZ(t) \tag{3.11}$$

donde $I_{F}(t)$ es una matriz con los precios de los futuros $F_{T_i}(t)$ en su diagonal, y $\sigma_{F}(t)$ contiene los vectores $B_{T_i}(t)$ de dimensión $n$.

## 3.3. Políticas Óptima de Consumo, Demanda y Cobertura para la Economía Emergente

En esta sección estudiamos el problema que enfrenta la economía emergente. El país tiene la posibilidad de tomar posiciones cortas o largas en los $n$ contratos de futuros sobre el precio del petróleo, con el fin de cubrirse óptimamente ante esta fuente de incertidumbre. Estos contratos aumentan además el set de oportunidades de inversión del país, creando incentivos adicionales para invertir en ellos. Definimos como $\pi(t)$ al vector de dimensión $n \times 1$, que contiene las posiciones en los $n$ contratos futuros en el tiempo $t$. Asumimos que $\pi(t)$ corresponde a la razón entre el dinero invertido en los contratos y el capital disponible, $K(t)$. En otras palabras, en cualquier momento $t$, el vector $K(t)I_{F}(t)^{-1}\pi(t)$ representa el número de contratos futuros de petróleo que el país mantiene. Restringimos $\pi(t)$ a estar en el conjunto de estrategias admisibles que llevan a procesos para el capital estrictamente

positivos ($K(t) > 0$). Además consideramos solamente políticas no negativas para el consumo y la demanda por petróleo. La política óptima de consumo-demanda-cobertura de la economía emergente corresponde a la solución del siguiente problema:

$$J(K(0), V(0), Y(0), 0) \equiv \sup_{\{\pi, C, Q\} \in \Psi} \mathbb{E}_0 \left[ \int_0^\infty U(s, C(s)) ds \right] \tag{3.12}$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} dK(t) &= \left( \alpha\, K(t)^{1-\eta} Q(t)^\eta - S(t)Q(t) + \xi\, V(t) - C(t) \right) dt + \\ &\quad K(t) \pi(t)^\top I_{_F}(t)^{-1} dF(t) \qquad (3.13) \\ dV(t) &= V(t)(\mu_{_V} - \xi) dt + V(t) \sigma_{_V} (\rho^\top dZ(t) + \sqrt{1 - \rho^\top \rho}\, dZ_{_V}(t)) \qquad (3.14) \\ dY(t) &= (\lambda - \kappa Y(t)) dt + dZ(t) \qquad (3.15) \end{aligned}$$

donde $dF_T(t)$ está definido en la ecuación (3.11) y $J(K(t), V(t), Y(t), t)$ es la función de valor asociada a este problema. Reescribimos además el movimiento browniano asociado a los recursos naturales, $W(t)$, como una combinación lineal de movimientos brownianos independientes. Definimos $Z_{_V}(t) \equiv \frac{W(t) - \rho^\top Z(t)}{\sqrt{1 - \rho^\top \rho}}$, como un movimiento browniano independiente del vector $Z(t)$ que captura el riesgo idiosincrático del recurso natural. En lo que resta del documento omitiremos el argumento del tiempo de las diferentes variables para simplificar la notación.

Para eliminar el tiempo como variable de estado, definimos la función de valor descontada $J(K, V, Y)$, como $J(K, V, Y, t) = e^{-\beta t} J(K, V, Y)$. La función $J(K, V, Y)$ satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman:

$$\begin{aligned} 0 &= \max_{\{\pi, C, Q\}} \left\{ \frac{C^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \beta\, J + (\alpha\, K^{1-\eta} Q^\eta - S\, Q + \xi\, V - C + \pi^\top \sigma_{_F} \lambda\, K) J_K + V(\mu_{_V} - \xi) J_V \right. \\ &\quad + (\lambda - \kappa\, Y)^\top J_Y + \frac{1}{2} \pi^\top \sigma_{_F} \sigma_{_F}^\top \pi K^2 J_{KK} + \frac{1}{2} \sigma_{_V}^2 V^2 J_{VV} + \frac{1}{2} \text{Traza}[J_{YY}] \\ &\quad \left. + \pi^\top \sigma_{_F} \rho\, \sigma_{_V} K\, V\, J_{KV} + \pi^\top \sigma_{_F} K\, J_{KY} + \sigma_{_V} \rho^\top V\, J_{VY} \right\}. \qquad (3.16) \end{aligned}$$

El consumo óptimo es derivado entonces de la condición de primer orden $C^* = J_K^{-1/\gamma}$. Por su parte, la demanda óptima por petróleo es independiente de la función de valor y del valor económico de los recursos naturales. Se obtiene cuando el beneficio marginal de una unidad extra iguala al precio del commodity $S(t)$

$$Q^* = \underset{Q}{\operatorname{argmax}} \left\{ \alpha \, K^{1-\eta} Q^{\eta} - S \, Q \right\} = K \left( \frac{\alpha \, \eta}{S} \right)^{\frac{1}{1-\eta}}. \tag{3.17}$$

La demanda óptima resulta ser decreciente en el precio del petróleo. El resultado de la tecnología de producción para $Q^*$, i.e.,

$$\alpha \, K^{1-\eta} (Q^*)^{\eta} - S \, Q^* = \alpha (1-\eta) \left( \frac{\alpha \, \eta}{S} \right)^{\frac{\eta}{1-\eta}} K, \tag{3.18}$$

es lineal en $K(t)$ y decreciente en $S(t)$. La estrategia óptima de cobertura con futuros de petróleo está dada por el vector $\pi^*(t)$ de $n \times 1$. La condición de primer orden implica que:

$$\pi^* = \left( \sigma_{_F}^{-1} \right)^{\top} \left( \lambda \frac{-J_K}{K \, J_{KK}} + \frac{-J_{KY}}{K \, J_{KK}} + \rho \, \sigma_{_V} \frac{-V \, J_{KV}}{K \, J_{KK}} \right). \tag{3.19}$$

Las posiciones en los $n$ contratos futuros tienen tres componentes. El primer término es la demanda miope estándar presente en el modelo de Merton que captura la relación riesgo-retorno y la aversión al riesgo del país. Su objetivo principal es tomar ventaja del set de oportunidades aumentado, más que generar una cobertura ante cambios en el precio del petróleo. El segundo término es la demanda por cobertura ante cambios en el set de oportunidades de inversión causados por cambios en las variables de estado $Y(t)$. En nuestro modelo, el precio del petróleo afecta la riqueza de la economía solamente por ser un insumo de producción. La dinámica de $Y(t)$ determina la evolución de los precios de los futuros y está ligada al valor de los recursos naturales, pero no al nivel de $Y(t)$ directamente. Si $\eta = 0$ no existen incentivos para comprar petróleo y por tanto la demanda por cobertura desaparece. Esta demanda está relacionada con el *efecto insumo* del petróleo. El último término incluye la correlación entre el valor económico $V(t)$ y la incertidumbre en el precio del petróleo, correspondiendo así al *efecto correlación*. Un aumento en este efecto implica que el recurso natural es un mejor método de cobertura frente a cambios en el precio del petróleo. En efecto, como el capital del país cambia debido a las posiciones en futuros,

este término corresponde a la demanda del país por contratos futuros para cubrirse ante cambios en el valor económico del recurso natural. Finalmente, utilizando la condición de primer orden para el consumo, se puede interpretar el término $J_{KV}$ como la sensibilidad de la utilidad marginal con respecto a $V(t)$.

### 3.4. Solución

En esta sección utilizamos la homogeneidad del problema para reducir el número de variables de estado. Además mostramos como utilizar un enfoque basado en una expansión asintótica para obtener una aproximación de la solución alrededor de un caso en particular que tenga solución en forma cerrada .

Dada la función de utilidad de aversión relativa al riesgo constante (CRRA) y la tecnología de producción Cobb-Douglas de elasticidad de sustitución constante, podemos escribir la solución de la función de valor descontada como

$$J(K,V,Y) = A_1^{-\gamma}\frac{\left(K\, e^{g(\omega,Y)}\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \tag{3.20}$$

donde la nueva variable de estado $\omega$ es la (log) razón entre el valor económico del recurso natural y el capital, i.e., $\omega = \log\left[\frac{V}{K}\right]$. Aquí, hemos definido la constante

$$A_1 = \frac{1}{\gamma}\left(\beta - \alpha(1-\gamma) - \frac{1-\gamma}{\gamma}\lambda^\top\lambda\right) > 0 \tag{3.21}$$

Reemplazando la ecuación (3.20) y las políticas de control óptimas $\{C^*, Q^*, \pi^*\}$ en la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (3.16) se obtiene la siguiente ecuación diferencial para $g(\omega, Y)$:

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; & -\beta + A_1\gamma\left((1-g_\omega)e^{g}\right)^{-\frac{1-\gamma}{\gamma}} + (1-\gamma)\left(\alpha(1-\eta)\left(\alpha\,\eta\,e^{-(\phi_0+\phi_1^\top Y)}\right)^{\frac{\eta}{1-\eta}} + \xi\,e^{\omega}\right)(1-g_\omega) \\
& +(1-\gamma)(\mu_{_V}-\xi)g_\omega + (1-\gamma)(\lambda-\kappa\,Y)^\top g_Y \\
& +\frac{1-\gamma}{2}\frac{\left((1-g_\omega)\lambda+\rho\,\sigma_{_V}((1-\gamma)(1-g_\omega)g_\omega-g_{\omega\omega})+((1-\gamma)(1-g_\omega)g_Y-g_{\omega Y})\right)^\top}{1-(1-\gamma)(1-g_\omega^2)-g_\omega-g_{\omega\omega}} \\
& ((1-g_\omega)\lambda+\rho\,\sigma_{_V}((1-\gamma)(1-g_\omega)g_\omega-g_{\omega\omega})+((1-\gamma)(1-g_\omega)g_Y-g_{\omega Y})) \\
& +\frac{1-\gamma}{2}\left(\sigma_{_V}^2(-g_\omega+(1-\gamma)g_\omega^2+g_{\omega\omega})+2\sigma_{_V}\rho^\top((1-\gamma)g_\omega g_Y+g_{\omega Y})\right) \\
& -\frac{1-\gamma}{2}\text{Traza}[(1-\gamma)g_Y g_Y^\top+g_{YY}]. \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

Hasta donde llega nuestro conocimiento, esta ecuación altamente no lineal no tiene una solución de forma cerrada. Además resulta ser difícil de resolver numéricamente por ser una ecuación de segundo orden en $n+1$ variables. Sin embargo, puede ser resuelta utilizando una técnica de aproximación basada en una expansión asintótica. La idea es encontrar un conjunto de parámetros para los cuales la ecuación (3.22) tenga solución conocida y luego realizar una expansión de Taylor en torno a ese espacio de parámetros. El punto de partida es el caso en que $\eta = \xi = 0$. En este escenario, el petróleo es irrelevante para la economía, lo que implica que $Q^* = 0$. El problema que enfrenta la economía emergente se reduce entonces al problema de Merton con función de utilidad del tipo CRRA. En este caso $C^* = A_1 K$ y $g(\omega, Y) = 0$. La solución encontrada es válida para $\eta, \xi > 0$, siempre que estos parámetros tengan valores cercanos a cero.[1] Como veremos más adelante, incluso para pequeños valores de $\eta$ y $\xi$ existe una gran cantidad de acción en el modelo. Es de esperar además que la tasa de dividendo $\xi$, que está en términos anuales, sea menor a 10 %. Por otro lado, es común utilizar valores pequeños para $\eta$ en la literatura de modelos RBC. Por ejemplo Wei (2003) utiliza un valor de 4 % para la porción del valor de la energía en relación a los inputs.

[1] En la siguiente sección se realiza una prueba empírica del error de aproximación generado por este método de expansión asintótica.

Presentamos aquí la metodología para una expansión de primer orden en $\eta$ y $\xi$, pero ésta puede ser implementada para expansiones de mayor orden. Asumimos la siguiente estructura para la solución de la ecuación (3.22):

$$g(\omega, Y) = g^{\eta}(\omega, Y)\,\eta + g^{\xi}(\omega, Y)\,\xi + g^{\eta\xi}(\omega, Y)\,\eta\,\xi + O(\eta^2) + O(\xi^2) \tag{3.23}$$

Esta solución la reemplazamos entonces en la ecuación de HJB (aquí, $h(\eta, \xi)$) y realizamos una expansión de Taylor de primer orden de la ecuación diferencial:

$$0 = h(\eta, \xi) = h_{\eta}(0,0)\,\eta + h_{\xi}(0,0)\,\xi + h_{\eta\xi}(0,0)\,\eta\,\xi + O(\eta^2) + O(\xi^2) \tag{3.24}$$

Buscamos una solución para $g^{\eta}(\omega, Y)$, $g^{\xi}(\omega, Y)$ y $g^{\eta\xi}(\omega, Y)$ tal que $h_{\eta}(0,0) = h_{\xi}(0,0) = h_{\eta\xi}(0,0) = 0$. Estas soluciones resultan ser bastante simples, incluso considerando el proceso gaussiano general para el precio del petróleo. Aún más, encontramos que estas soluciones son funciones affine de las variables de estado $Y(t)$. Las siguientes expresiones muestran la solución tras haber realizado la expansión de primer orden

$$g^{\eta}(\omega, Y) = A_0^{\eta} + {A_Y^{\eta}}^{\top} Y \tag{3.25}$$

$$g^{\xi}(\omega, Y) = A_0^{\xi} e^{\omega} \tag{3.26}$$

$$g^{\eta\xi}(\omega, Y) = (A_0^{\eta\xi} + {A_Y^{\eta\xi}}^{\top} Y) e^{\omega} \tag{3.27}$$

donde los $A$'s son todos constantes que dependen de los parámetros fundamentales del modelo.

## Capítulo 4. UN PROCESO SIMPLE PARA EL PRECIO DEL PETRÓLEO

Resulta difícil estudiar el modelo general, por lo que en esta sección se lo presenta en un contexto simplificado. Consideramos el siguiente modelo gaussiano de un factor para el proceso del precio del petróleo:

$$X(t) = \log S(t) \tag{4.1}$$

$$dX(t) = (r - \delta(t) - \frac{1}{2}\sigma_{_X}^2)dt + \sigma_{_X} dZ_{_X}{}^{\mathbb{Q}} \tag{4.2}$$

$$\delta(t) = \psi_0 + \psi_{_X} X(t) \tag{4.3}$$

$$dZ_{_X}{}^{\mathbb{Q}}(t) = dZ_{_X}(t) + \lambda_{_X} dt \tag{4.4}$$

Siguiendo a Casassus y Collin-Dufresne (2005), optamos por una representación económica del modelo, la cual es más intuitiva que la forma canónica de las ecuaciones (3.4) y (3.5). El modelo para el precio del petróleo anterior tiene exactamente las mismas propiedades que la forma canónica para $n = 1$. A pesar de su simpleza, el modelo puede generar tanto contango como backwardation, siempre que $\psi_{_X} > 0$. Esta es una consecuencia de la correlación existente entre el retorno por conveniencia $\delta(t)$, y el log precio, $X(t)$. Aquí, el retorno por conveniencia es variante en el tiempo, lo que como se verá más adelante, tiene un importante efecto en las decisiones del país emergente.

La dinámica de los precios de los futuros $F_{_T}(X(t), t)$ bajo la medida histórica es:

$$dF_{_T}(t) = F_{_T}(t)\sigma_{_F}(t)\lambda_{_X} dt + F_{_T}(t)\sigma_{_F}(t) dZ_{_X}(t) \tag{4.5}$$

con $\sigma_{_F}(t) = B_{_T}(t) = \sigma_{_X} e^{-\psi_X (T-t)}$. El parámetro de reversión a la media $\psi_{_X}$ afecta la volatilidad de los retornos de los futuros, y por tanto sus premios por riesgo.

La solución aproximada de la función de utilidad indirecta de la economía emergente $J(K, V, X)$ tiene la misma forma que en las ecuaciones (3.20)-(3.27):

$$J(K, V, X) = A_1^{-\gamma} \frac{\left(K\, e^{g\left(\log(\frac{V}{K}), X\right)}\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \tag{4.6}$$

con

$$g(\omega, X) = (A_0^\eta + A_X^\eta X)\eta + A_0^\xi \xi\, e^\omega + (A_0^{\eta\xi} + A_X^{\eta\xi} X)\eta\xi\, e^\omega \tag{4.7}$$

Las constantes $A_0^\eta$, $A_X^\eta$, $A_0^\xi$, $A_0^{\eta\xi}$ y $A_X^{\eta\xi}$ corresponden a la solución de un simple sistema de ecuaciones. En particular, obtenemos:

$$A_0^\xi = ((\alpha + \rho\,\sigma_{_V}\lambda_{_X}) - \mu_{_V})^{-1} > 0 \tag{4.8}$$

$$A_X^\eta = -\alpha\,(A_1 + \psi_{_X})^{-1} < 0 \tag{4.9}$$

$$A_X^{\eta\xi} = \alpha\, A_0^\xi\,((A_0^\xi)^{-1} + \psi_{_X})^{-1} > 0 \tag{4.10}$$

Usamos estos valores para el análisis. Las soluciones para $A_0^\eta$ and $A_0^{\eta\xi}$ son más complejas y son presentadas en el apéndice.

## 4.1. Consumo Óptimo de Capital

El consumo óptimo de capital y la demanda por petróleo en este modelo, tienen la misma estructura que en el modelo general. Si reemplazamos las ecuaciones (4.6)-(4.7) en el consumo óptimo (i.e. $C^* = J_K^{-1/\gamma}$), resulta difícil obtener una adecuada comprensión de la solución. En cambio, seguimos Kogan y Uppal (2003) y presentamos las aproximaciones en una expansión asintótica equivalente. Aplicamos una expansión de Taylor a las variables (consumo, posiciones en futuros, etc) y consideramos solamente los términos de primer orden. Nótese que no requerimos hacer otras suposiciones, debido a que ya estamos considerando valores pequeños para $\eta$ y $\xi$. La aproximación de primer orden para el consumo es:

$$C^*(K,V,X) \approx \hat{C}(K,V,X) \equiv A_1\left(K - \frac{1-\gamma}{\gamma}(A_0^\eta + A_X^\eta X)\eta\, K + A_0^\xi \xi\, V\right). \tag{4.11}$$

De esta ecuación resulta más simple observar el efecto de $X(t)$ y $V(t)$ sobre el consumo. Si calculamos la expresión para $\hat{C}_X$ tenemos:

$$\hat{C}_X = \frac{1-\gamma}{\gamma}\frac{\alpha\,\eta}{(A_1 + \psi_{_X})} \tag{4.12}$$

Como es de esperar, la aversión al riesgo juega un rol crucial en el análisis. En el caso en que $\gamma > 1$, el consumo total es decreciente respecto al (log) precio del petróleo $X(t)$ (i.e. $\hat{C}_X < 0$), ya que el efecto riqueza (negativo), domina al efecto sustitución. Si $\gamma < 1$, entonces $\hat{C}_X > 0$ ya que el consumo hoy pasa a ser más barato comparativamente si el precio del petróleo aumenta, y el efecto sustitución domina al efecto riqueza. Si $\gamma = 1$ ambos se cancelan mutuamente. Estos efectos están escalados por $\eta$, ya que la sensibilidad del precio en la tecnología de producción aumenta con este parámetro. La reversión a la media en el precio del petróleo, $\psi_{_X}$, juega un rol particular en el consumo. Sucede que el coeficiente de sensibilidad entre los precios y el consumo, $\hat{C}_X$, es menos importante para mayores grados de reversión a la media. La razón es simple. Mientras mayor sea el grado de reversión a la media, menor será la persistencia de los shocks en el precio del petróleo. Un shock positivo en los precios tendrá solamente un efecto de corto plazo sobre consumo y riqueza. En el límite en que $\psi_{_X} \to \infty$ podemos ver que $\hat{C}_X \to 0$.

El consumo es creciente además en el flujo de caja $\xi\, V$, ya que éste afecta directamente la acumulación de capital. Además, es natural esperar mayores niveles de consumo para mayores valores de $V(t)$, ya que el país es más rico. Este efecto, al menos en la expansión de primer orden, es independiente de la aversión al riesgo. Si expandimos el valor marginal del recurso natural relativo al capital, encontramos:

$$P \equiv \frac{J_V}{J_K} \approx A_0^{\xi} \xi \tag{4.13}$$

Esto sugiere que $A_0^{\xi}$ actúa como un factor de descuento perpetuo, ya que \$1 extra en el stock de commodity local genera un flujo de caja perpetuo de $\xi$. En efecto, restringimos $A_0^{\xi}$ a ser positivo, debido a que $\alpha + \rho\, \sigma_{_V} \lambda_{_X}$ es un aproximación de primer orden de la tasa de descuento y $\mu_{_V}$ es la tasa de crecimiento. Si $\gamma = 1$, entonces el consumo es proporcional a la riqueza total $K + P\, V$, usando el valor marginal para el recurso natural.

## 4.2. Estrategia Óptima de Cobertura

Antes de analizar la estrategia óptima de cobertura, necesitamos modificar la ecuación (3.19), ya que ahora el factor es directamente el (log) precio, $X(t)$, en vez del vector de variables latentes $Y(t)$. En un modelo de un factor para el precio del petróleo, el país necesita tomar posición en sólo un contrato futuro $F_{_T}(X(t),t)$ para cubrirse ante los shocks en el petróleo. La estrategia de cobertura está dada por:

$$\pi^* = \left(\sigma_{_F}^{-1}\right)\left(\lambda_{_X}\frac{-J_K}{K\,J_{KK}} - \sigma_{_X}\frac{J_{KX}}{K\,J_{KK}} - \rho\,\sigma_{_V}\frac{V\,J_{KV}}{K\,J_{KK}}\right). \tag{4.14}$$

donde $\lambda_{_X}$ es el precio por riesgo de mercado del petróleo y $\rho$ es la correlación entre el (log) precio del petróleo y el retorno del recurso natural local.

Las aproximaciones de primer orden para cada uno de los término de la estrategia de cobertura son:

$$\lambda_{_X}\frac{-J_K}{K\,J_{KK}} \approx \frac{\lambda_{_X}}{\gamma}\left(1+\frac{A_0^{\xi}\xi V}{K}\right) \tag{4.15}$$

$$-\sigma_{_X}\frac{J_{KX}}{K\,J_{KK}} \approx \sigma_{_X}\frac{1-\gamma}{\gamma}A_X^{\eta}\eta \tag{4.16}$$

$$-\rho\,\sigma_{_V}\frac{V\,J_{KV}}{K\,J_{KK}} \approx -\rho\,\sigma_{_V}\frac{A_0^{\xi}\xi V}{K} \tag{4.17}$$

El primer término es la demanda miope estándar que es proporcional al premio por riesgo $\lambda_{_X}$. El término $\frac{-J_K}{K\,J_{KK}}$ es diferente a $\gamma^{-1}$, ya que $K$ es sólo una parte de la riqueza total del país. En efecto, una consecuencia de la homogeneidad de la solución es que:

$$\frac{-J_K}{K\,J_{KK}} = \frac{1}{\gamma}\left(1+\frac{V\,J_{KV}}{K\,J_{KK}}\right) \tag{4.18}$$

El segundo término de la estrategia $\pi^*$ es la demanda por cobertura ante cambios en el precio del petróleo. Como es de esperar, esta demanda depende de la sensibilidad del consumo respecto al precio del petróleo, $C_X$. La interpretación de este término es similar a las demandas por cobertura en Merton y Breeden, con la excepción de que en este caso no es el conjunto de oportunidades de inversión que está cambiando (i.e. precio de los futuros),

sino que el producto final de la economía. El país está preocupado porque un aumento en los precios del petróleo tiene un efecto en la producción futura, independiente de la estrategia de cobertura $\pi$. Si el país no toma posiciones en los contratos futuros, existe de todas maneras cierta sensibilidad a los shocks en el precio del petróleo, ya que éste es un insumo de la economía. Esta es la razón de porqué este término es creciente en $\eta$, por tanto, tenemos al efecto insumo nuevamente. Tal como en el análisis del consumo óptimo, este efecto depende además de cuan permanentes son los shocks. Un mayor grado de reversión a la media implica que los shocks son más transitorios, de manera que el país se preocupa menos y esta demanda por cobertura pasa a ser menos importante ($A_X^\eta$ es decreciente en el grado de reversión a la media). La demanda por cobertura será positiva (negativa) cuando el grado de aversión al riesgo sea mayor (menor) a la unidad (notar que $A_X^\eta < 0$). Así, el efecto del petróleo sobre el consumo será negativo (positivo), de manera que el agente se cubrirá tomando posiciones positivas (negativas) en los contratos futuros.

El término de la ecuación (4.17) aparece debido a que la riqueza no transable (recurso natural local) está correlacionada con los contratos futuros. Esta demanda es negativa mientras la correlación $\rho$ sea positiva (recordar que $A_0^\xi > 0$). Si este es el caso, se tiene que un shock positivo en los precios tiene un efecto positivo tanto sobre el commodity local como sobre los contratos futuros. Debido a que el recurso natural está positivamente correlacionado con el precio del petróleo, el país tomará una posición menor en los contratos futuros. Esto sugiere que el recurso natural actúa como una cobertura natural frente a cambios en el precio del petróleo. Por esta razón este término es creciente en el flujo de caja producto del recurso natural hacia el capital $\xi V$.

Finalmente, la reversión a la media tiene un segundo efecto en la estrategia de cobertura a través de la volatilidad de los contratos futuros en la ecuación (4.5). Para mayores grados de reversión a la media, la volatilidad $\sigma_{_F}$ es menor, lo que implica que el país necesita tomar posiciones mayores en los contratos futuros. Lo mismo sucede con la madurez de los contratos. El país tomará mayores posiciones en contratos de madurez mayor, para lograr el mismo resultado que con contratos de madurez menor. Este es el único lugar donde la madurez de los contratos importa.

# Capítulo 5. RESULTADOS EMPÍRICOS

En este capítulo se analizan los principales resultados. Primero, se estima el modelo para el precio del petróleo y se calibran los parámetros de las funciones de utilidad y de tecnología del país. Se concentra el análisis en el modelo de un factor para el petróleo que ya ha sido discutido, con el objetivo de conectar los resultados empíricos con los teóricos analizados anteriormente. Se comparan los resultados de la expansión de primer orden con otra de mayor orden para tener una estimación de los errores de aproximación inducidos al truncar. Luego se analiza el efecto del recurso natural y de su correlación con el petróleo sobre el consumo y la estrategia de cobertura. Finalmente se revisan los efectos particulares de la reversión a la media y del premio por riesgo de los precios, así como de la aversión al riesgo sobre la economía.

## 5.1. Estimación de Parámetros

### 5.1.1. Parámetros del Modelo de un Factor para el Precio del Petróleo

El modelo de un factor para el precio se estima a partir de las ecuaciones (4.1)-(4.4). Se usa el set de datos y la técnica de estimación de Casassus y Collin-Dufresne (2005). Los datos corresponden a observaciones semanales de precios de futuros desde 1/2/1990 hasta 8/25/2003 de NYMEX, con madurez de 1, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 24, 30 y 36 meses. Una característica especial de los contratos futuros es que el último día en que se transan, corresponde a un día específico de cada mes. La solución para los precios de los futuros de las ecuaciones (3.6)-(3.8) considera el hecho de que la madurez de los contratos varía en el tiempo.

Se estima el modelo utilizando máxima verosimilitud, usando tanto datos de la serie de tiempo como de la sección transversal. Se sigue el enfoque de Chen y Scott (1993) y Pearson y Sun (1994) asumiendo que ciertos datos son observados sin errores . En particular, se sigue Collin-Dufresne, Goldstein, y Jones (2002) y Casassus y Collin-Dufresne (2005) y se opta por ajustar el primer componente principal de la curva de futuros. Como el componente principal permanece affine en la variable de estado, puede ser fácilmente

invertido para obtener la variable de estado $X(t)$. Los componentes principales restantes de la curva de futuros están entonces sobre identificados y son observados con "errores de medición", los que se asume que siguen un proceso AR(1).[1]

CUADRO 5.1. Estimación por Máxima Verosimilitud del Proceso del Precio del Petróleo

Resultados de la estimación por máxima verosimilitud para el modelo de un factor de las ecuaciones (4.1)-(4.4), para precios semanales entre 1/2/1990 y 8/25/2003.

| Parámetro | Valor Estimado (Error Std.) |
|---|---|
| $r$ | 0.030 |
| $\psi_0$ | -0.790 (0.029) |
| $\psi_X$ | 0.271 (0.010) |
| $\lambda_X$ | 0.919 (1.021) |
| $\sigma_X$ | 0.263 (0.006) |
| auto-corr. error | 0.797 (0.011) |
| Log-verosimilitud | 22119.6 |

La tabla 5.1 presenta los resultados de la estimación por máxima verosimilitud del modelo de las ecuaciones (4.1)-(4.4). La tasa de interés se fija en $r = 0{,}03$. No es estimada, ya que el modelo está intencionalmente sobre indentificado para separar la tasa de interés del retorno por conveniencia en la ecuación (4.3). Los resultados, incluso en el modelo de un factor, son consistentes con lo encontrado por Casassus y Collin-Dufresne (2005). Primero, los parámetros del retorno por conveniencia y la volatilidad de los retornos del petróleo son todos significativamente distintos de cero. Aun más, el parámetro de reversión a la media que juega un rol importante en el consumo y en la estrategia de cobertura, es positivo y significativo ($\psi_X = 0{,}271$). Además se tiene que el parámetro del premio por riesgo $\lambda_X$ no es significativo. Casassus y Collin-Dufresne (2005) también encuentran que incluso para una especificación más rica para el premio por riesgo, los parámetros para el petróleo resultan ser menos significativos que para cobre, plata y oro. Dado además

[1]Para el petróleo se usan los componentes principales de los contratos con madurez de 18 meses, porque son los únicos contratos disponibles para todo el período estudiado.

que en este estudio queremos destacar el efecto del recurso natural en la estrategia de cobertura, se opta por definir $\lambda_X = 0$ en el análisis, eliminando de esta manera el efecto de la demanda miope en la estrategia de cobertura. En la sección siguiente, se hace un análisis de sensibilidad del consumo y de la estrategia de cobertura respecto al premio por riesgo del precio del petróleo $\lambda_X$.

### 5.1.2. Parámetros del País Emergente

Los parámetros para del país son estimados en base a información disponible para Chile. Se escoge este país, ya que las características de su economía se ajutan bastante bien a las de un país emergente como el considerado en el modelo. Además esta selección tiene la ventaja de que Chile no ha sufrido mayores problemas de gobernabilidad en los últimos años, como sí ha sucedido en otros países de África y de América Latina, por lo que sus datos económicos están más relacionados con las variables consideradas en el modelo y menos con factores políticos omitidos.

Los valores se seleccionan tratando de replicar la realidad de este país de la mejor manera posible y además considerando que las condiciones de las ecuaciones (3.21) y (4.8) se cumplan. La tabla 5.2 muestra estos valores.

CUADRO 5.2. Parámetros del País Emergente

Parámetros usados para las tecnologías del país y la función de utilidad.

| Parámetro | Valor Estimado |
|---|---|
| $\alpha$ | 0,093 |
| $\eta$ | 0,03 |
| $\xi$ | 0,034 |
| $\mu$ | -0,10 |
| $\sigma_v$ | 0,212 |
| $\rho$ | 0,289 |
| $\gamma$ | 3 |
| $\beta$ | 0,05 |

El parámetro $\alpha$ se conoce en la literatura como la productividad total de factores (PTF). A su vez la productividad marginal del capital, se obtiene al considerar este factor multiplicado por la importancia relativa del capital dentro de los inputs de la función, es decir,

en este modelo correspondería a $\alpha\,(1-\eta)$. Existe una amplia literatura que trata de estimar estos valores. Bergoeing y Morandé (2002) calculan este valor para el caso de Chile a partir de una función de producción del tipo Cobb-Douglas, que asumen tiene como inputs el capital y el trabajo. Despejando la PTF de esta función y reemplazando valores para Chile obtienen un valor de 0,45. Los autores consideran este valor extremadamente alto, ya que implicaría en su modelo una productividad marginal para el capital de 0,23. Por ello deciden utilizar datos de países desarollados para así obtener un valor de 0,3 para la PTF, el cual implica una productividad marginal de capital de 0,15, que corresponde a un valor más razonable en su opinión.

Caselli y Feyrer (2007) estudian la productividad marginal del capital para una serie de países, intentando explicar las aparentes diferencias que se observan entre ellos. Los autores corrigen la productividad marginal del capital tanto por recursos naturales como por efectos de diferencias de precios. La primera corrección se realiza considerando que los recursos naturales son un input generalmente omitido en las funciones de producción, pero su importancia difiere entre países desarrollados y en vías de desarrollo, siendo generalmente mayor en estos últimos. Por otro lado la segunda corrección se realiza para considerar el hecho de que el precio del capital relativo al output en países en desarrollo es generalmente mayor que en países desarrollados. De esta manera los autores concluyen que las supuestas diferencias que citaba la literatura entre los diferentes países desaparecen tras realizar las correcciones mencionadas, obteniéndose una productividad marginal de capital de 8,4 % para países ricos y de 6,9 % para países pobres. En lo que se relaciona a esta tesis, los autores calculan un valor para Chile de 9 %.

Para el modelo presentado se opta entonces por utilizar una productividad marginal del capital de 9 %. Ahora, para encontrar el parámetro $\alpha$ se debe estimar además el valor de $\eta$. Artículos como Finn (2000) y Wei (2003), estiman que el porcentaje que ocupa la energía como input dentro de los insumo de la economía de EEUU es de 4 %. Para la elección del valor a utilizar en este caso se toman en cuenta dos factores. Primero, según la Comisión Nacional de Energía de Chile (CNE) en la matriz energética, el petróleo corresponde a un

35 % del total. Por otro lado, los países en vías de desarrollo son generalmente más intensivos en el uso de energía y petróleo que los países desarrollados. Según Birol (2004) esta mayor utilización correspondería en promedio a aproximadamente el doble en los primeros respecto a los segundos. Por ejemplo, respecto a los países de la OECD, Brasil sería un 48 % más intensivo, los países africanos un 138 %, China un 132 % e India un 188 %.

Considerando tanto los datos de la matriz energética para Chile, como las conclusiones de Birol (2004) el valor que se usa para el análisis es de $\eta = 0,3$. Por lo tanto, se tiene que el valor para $\alpha$ debe ser $\alpha = \frac{0,09}{0,97} = 0,93$.

La estimación del valor del parámetro $\xi$ se realiza utilizando los valores para las reservas de mineral y producción anual de CODELCO (Corporación del Cobre), la empresa estatal a cargo de la explotación del cobre en Chile. Según datos de la Comisión Chilena del Cobre (COCHILCO), el año 2006 las exportaciones totales del país ascendieron a 1,68 millones de toneladas de cobre [2], mientras las reservas del mineral estimadas el año 2007 son de aproximadamente 50 millones.[3] Entonces, dividiendo la producción anual por las reservas totales, se obtiene que $\xi = 3,4\,\%$

Para estimar la volatilidad del commodity local y su correlación con el precio del petróleo, se utilizaron datos mensuales de precios de contratos futuros del período comprendido entre agosto de 1995 y septiembre de 2007. Considerando que se quiere aproximar el precio spot se usaron para el cálculo los contratos con la menor madurez disponible, obteniéndose una volatilidad mensual anualizada de 21,2 % para el cobre y una correlación de 28,9 % entre éste y el petróleo.

La selección del valor para el parámetro $\mu$, que corresponde a la tasa de depreciación de las reservas del commodity local, es quizás la más arbitraria. Para escoger un valor se debió considerar restricciones propias del modelo, que imponían la necesidad de que este valor fuera negativo, de manera de que fuera posible la obtención de una solución.

---

[2]Fuente: Cochilco, Anuario de Estadísticas del Cobre y Otros Minerales 1987-2006

[3]Fuente: *Cambios en la estructura de la industria del cobre: La perspectiva de Codelco*, José Pablo Arellano, 29 de Marzo de 2007

Finalmente para seleccionar el parámetro de aversión al riesgo ($\gamma$) y la tasa de descuento intertemporal ($\beta$) se utilizan valores estándar de la literatura. Dada la importancia del primero de estos parámetros, se realiza más adelante en esta sección una análisis de sensibilidad del modelo respecto a él.

## 5.2. Precisión de la Expansión Asintótica

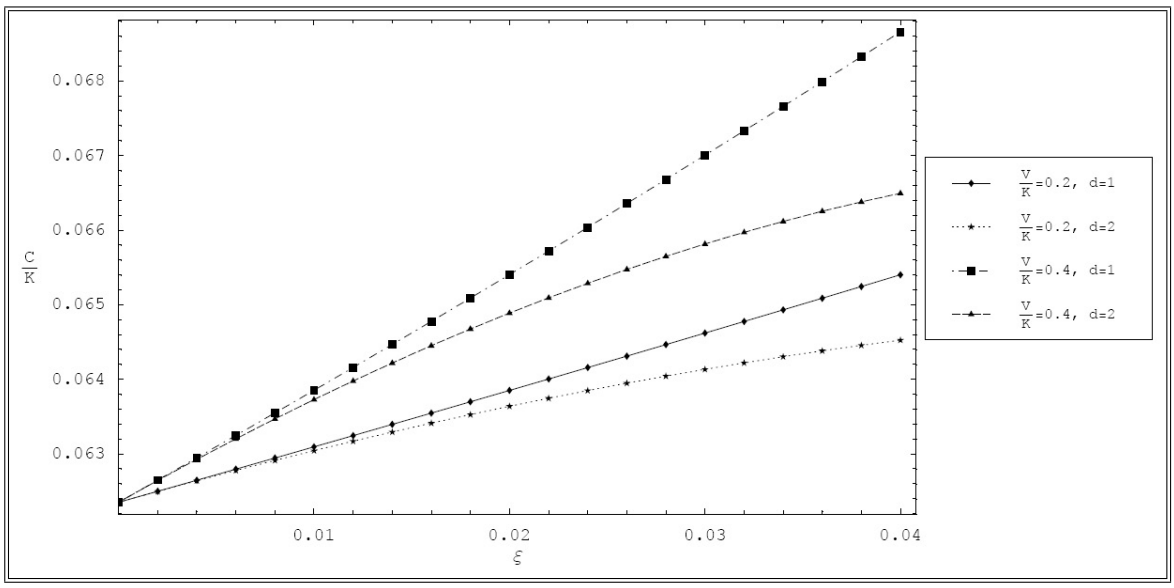


FIGURA 5.1. Comparación entre la aproximación de primer y segundo orden para el consumo en función de la tasa de dividendo $\xi$ para diferentes tamaños relativos del recurso natural $V/K$. El parámetro $d$ da cuenta del mayor orden utilizado en la expansión asintótica de la solución, i.e., $d = i$ es la expansión de orden $i - ésimo$. Usamos los parámetros de las tablas (5.1) y (5.2).

Para el análisis general se utiliza una expansión asintótica de primer orden tanto para $\eta$ como para $\xi$, en torno a la solución del modelo de Merton ($\eta = \xi = 0$). Una aproximación de primer orden resulta adecuada desde un punto de vista económico, ya que permite un mejor entendimiento del modelo. Claramente, para valores pequeños de $\eta$ y $\xi$, la aproximación es mejor. Desde una perspectiva práctica resultaría interesante saber cuan buena es la aproximación respecto a una solución exacta. Dado que no se cuenta con una solución en forma cerrada, el enfoque estándar consiste en utilizar un método numérico para obtener la solución "exacta" buscada. Desafortunadamente, aun para el modelo de un factor, es difícil

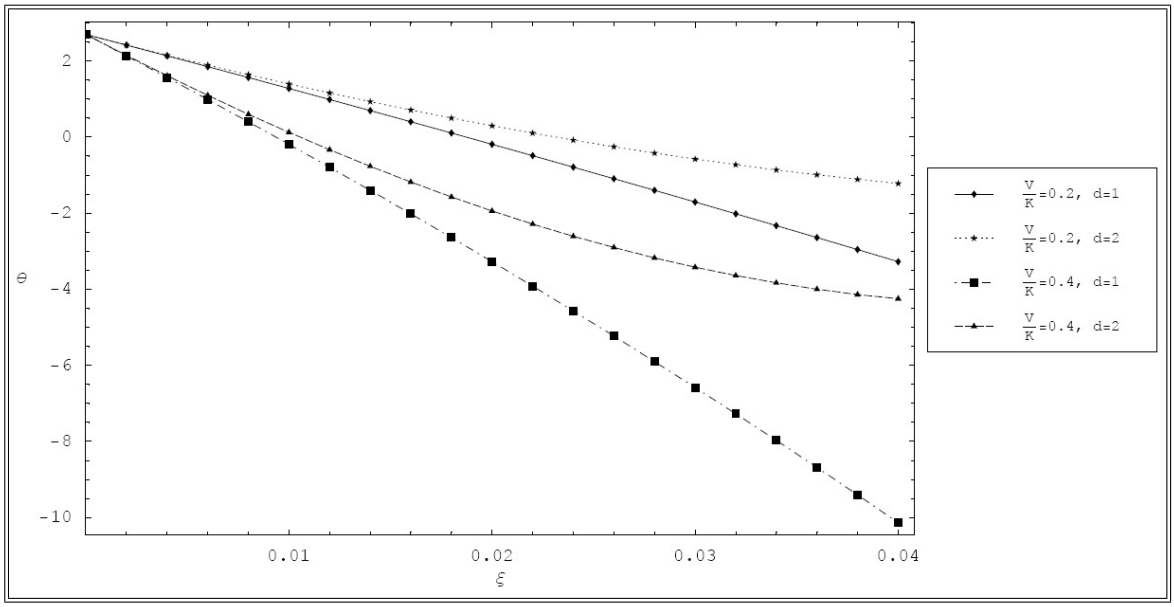


FIGURA 5.2. Comparación entre la aproximación de primer y segundo orden para la estrategia de cobertura en función de la tasa de dividendo $\xi$ para diferentes tamaños relativos del recurso natural $V/K$. El parámetro $d$ da cuenta del mayor orden utilizado en la expansión asintótica de la solución, i.e., $d = i$ es la expansión de orden $i - ésimo$. Usamos los parámetros de las tablas (5.1) y (5.2).

implementar un método de solución numérica, debido a la dimensionalidad del problema. Por esta razón, se opta por comparar la aproximación de primer orden con la de segundo orden. Una aproximación de mayor orden de la solución es más exacta, pero a su vez más compleja y menos intuitiva. Considerando que es más probable una tasa de dividendos más elevada, del orden de $5\,\% - 10\,\%$, que un mayor $\eta$, se estudia una expansión de mayor orden sólo para $\xi$ y se mantiene una expansión de primer orden para $\eta$. La solución de la función de valor en nuestra expansión de segundo orden tiene una estructura similar a la ecuación (3.23), pero incluye los nuevos términos de orden mayor. La función de valor continúa siendo affine en los $n$ factores de $Y(t)$, sin embargo, deja de ser lineal en $e^{\omega} = V/K$.

Por otro lado, para estudiar la estrategia de cobertura resulta interesante comparar la inversión en contratos futuros con el gasto en petróleo. Definimos por lo tanto, como $\theta$ la razón entre el dinero invertido en estos contratos y el dinero destinado a la compra de

petróleo. Recordemos que $\pi$ correspone a la razón entre el dinero invertido en contratos futuros y el capital disponible, de modo que:

$$\theta = \frac{\pi\, K(t)}{S\, Q}$$

De igual modo, definimos $\theta^1 = \frac{\pi^1 K(t)}{S\, Q}$ , $\theta^2 = \frac{\pi^2 K(t)}{S\, Q}$ y $\theta^3 = \frac{\pi^3 K(t)}{S\, Q}$.

Las figuras 5.1 y 5.2 comparan las expansiones de primer y segundo orden para la razón de consumo y la estrategia de cobertura respectivamente. Ellas muestran que si el tamaño relativo del recurso natural es pequeño ($V/K = 0{,}2$), entonces las aproximaciones de primer orden son bastante correctas para tasas de dividendos, $\xi$ menores a $4\,\%$. Sin embargo, a medida que $\xi$ o $V/K$ aumentan, las aproximaciones empeoran rápidamente. De los gráficos podemos observar que lo que realmente importa para la precisión de la aproximación es el producto $\xi\, V/K$. En efecto, dado que $V(t)$ afecta solamente al flujo de caja $\xi\, V$ y que sigue un proceso browniano geométrico, se tiene que la variable importante para el modelo es $\xi\, V/K$ (notar que $\frac{dV}{V} = \frac{d(\xi\, V)}{\xi\, V}$). Esto también se puede ver de la expansión de la función de valor en las ecuaciones (3.23) y (3.25)-(3.27), que muestran que la solución es una función de $\xi\, V/K$. Se discutirá el efecto de $\xi$ (o $V/K$) en la razón de consumo y estrategia de cobertura en las siguientes secciones. Notar que todas las líneas convergen cuando $\xi \to 0$, pero este valor es diferente al del modelo de Merton, ya que tenemos por un lado una tecnología de producción para el capital y por otro $\eta > 0$.

## 5.3. Análisis de los Resultados

Para el análisis es importante comparar, tanto el consumo como la cobertura, respecto a las variables principales del modelo. Se optó por usar la expansión de segundo orden para obtener resultados más precisos, pero como se verá más adelante, muchos de los resultados obtenidos anteriormente para el caso "asintóticamente equivalente" de la expansión de primer orden siguen siendo válidos para aproximaciones de mayor orden. No se presenta el efecto del nivel del precio del petróleo, ya que el consumo y la estrategia de cobertura no son muy sensibles a esta variable. Para todo el análisis se asume que el precio inicial del

log precio, $X(0)$, corresponde al valor incondicional de la variable, que con los parámetros calculados resulta ser $X(0) = 3{,}127$.

### 5.3.1. Consumo

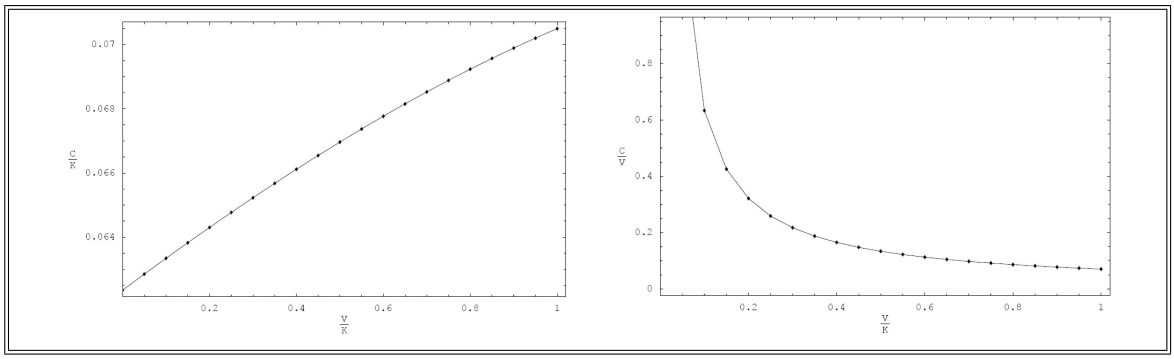


FIGURA 5.3. Consumo sobre capital $C/K$ y sobre el recurso natural $C/V$ en función del tamaño relativo del recurso natural $V/K$. En estos gráficos se utilizan los parámetros de las tablas (5.1) y (5.2).

Existe más de una manera de mostrar el efecto del tamaño del recurso natural sobre el consumo, ya que hay varias maneras de presentar la razón de consumo. En el modelo de Merton, la razón entre el consumo y la riqueza es constante. En nuestro modelo la riqueza del país tiene dos componentes, el capital y el recurso natural. Resultaría deseable medir el consumo relativo a la riqueza total, sin embargo dado que el mercado es incompleto, no existe un único valor para el recurso natural.

La figura 5.3 muestra el efecto del tamaño relativo del recurso natural para dos razones de consumo diferentes. El gráfico de la izquierda muestra que el consumo sobre el capital es creciente en el tamaño del recurso natural. La razón es puramente el efecto riqueza, ya que aumenta el dividendo que se obtiene del recurso natural $\xi V$. Incluso para parámetros bastante desfavorables en la dinámica de $V(t)$ (i.e. $\mu_{_V}$ negativo o $\sigma_{_V}$ elevado), el país prefiere tener el recurso natural a no tenerlo. El gráfico de la derecha de la figura 5.3, muestra que la razón entre el consumo y el tamaño del recurso natural es decreciente en $V/K$. La razón es que el recurso natural es sólo parte de la riqueza. Básicamente, si dos países son idénticos, pero uno tiene el doble de recurso natural que el otro, entonces el

primero consume menos que el doble del segundo. El país con mayores recursos naturales tiene una mayor riqueza, pero ésta no es el doble que la del otro país, debido a que ambos tienen el mismo stock de capital.

### 5.3.2. Estrategia de Cobertura y Correlación

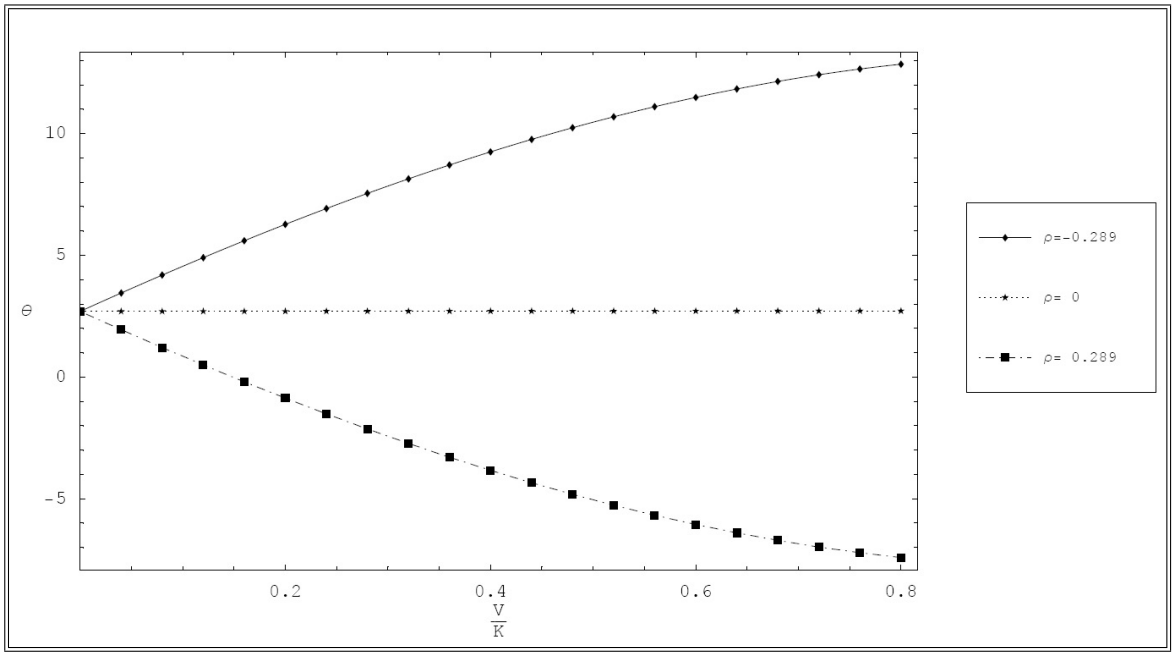


FIGURA 5.4. Estrategia de cobertura $\theta$ para diferentes coeficientes de correlación entre el recurso natural y los retornos del petróleo en función del tamaño relativo del recurso natural $V/K$. En este gráfico se utilizan los parámetros de las tablas (5.1) y (5.2).

Como fue discutido en la sección anterior, un shock positivo en el precio del petróleo tiene dos efectos directos sobre la riqueza del país: el efecto insumo y el efecto correlación. Esta sección se concentra en el efecto correlación. Si la correlación es positiva, entonces un shock positivo incrementará el flujo de caja proveniente del recurso natural hacia el capital. Bajo esta suposición, el recurso natural actúa como una cobertura natural para el país contra cambios en el precio del petróleo. Esto implica que países con mayores recursos naturales que estén positivamente correlacionados con los retornos del petróleo, se preocuparán de cubrir el riesgo del precio del petróleo en una menor medida.

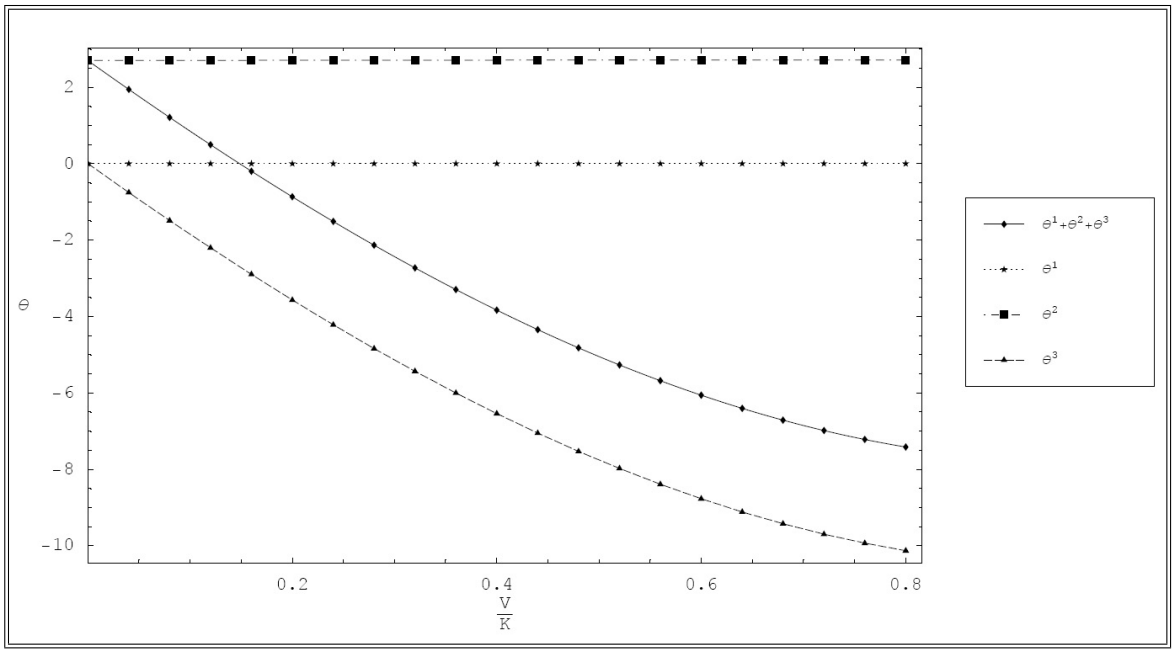


FIGURA 5.5. Componentes de la estrategia de cobertura $\theta$ en función del tamaño relativo del recurso natural $V/K$. $\theta^1$ es la demanda miope, $\theta^2$ es la demanda por cobertura ante cambios en el precio del petróleo y $\theta^3$ es la demanda ocasionada por el recurso natural. En este gráfico se utilizan los parámetros de las tablas (5.1) y (5.2).

La figura 5.4 confirma que la correlación juega un rol importante en la cobertura. Mientras mayor es la correlación, mayor es el efecto de la cobertura natural producto del commodity local, lo que produce una disminución en las posiciones de los contratos futuros. Este efecto es creciente en el tamaño relativo del recurso natural. Si la correlación es negativa, entonces la estrategia de cobertura consiste en tomar mayores posiciones en los contratos futuros. Obviamente, hay otras variables que afectan la estrategia de cobertura. Recordemos que se ha elegido un premio por riesgo nulo de manera de aislar los efectos del modelo estándar de Merton. La figura 5.5 muestra las diferentes componentes de la cobertura para el caso en que $\rho = 0{,}289$. Con el set de parámetros escogido, el tamaño del recurso natural es la principal variable afectando la decisión de cobertura. En el gráfico la demanda miope está representada por $\theta^1 = 0$, ya que $\lambda_{_X} = 0$. La demanda por cobertura es importante en particular para países que no tienen recursos naturales. En efecto, $\theta^2 > 0$

porque $\gamma > 1$ y es una línea plana para los diferentes valores de $V/K$. Finalmente, el efecto de la cobertura natural está representado por $\theta^3$, el cual es decreciente ya que $\rho > 0$.

### 5.3.3. Reversión a la Media y Premio por Riesgo del Precio del Petróleo

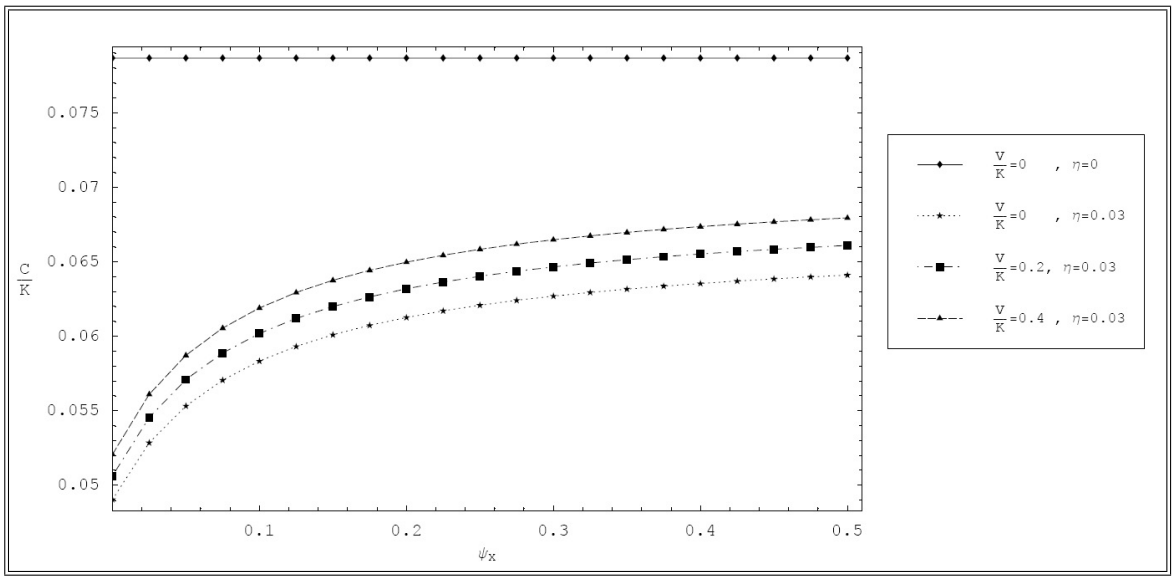


FIGURA 5.6. Razón entre consumo y capital, $C/K$, en función de la reversión a la media del (log) precio del petróleo $\psi_X$ para diferentes tamaños relativos del recurso natural $V/K$. En estos gráficos se utilizan los parámetros de las tablas (5.1) y (5.2).

El otro efecto del petróleo sobre las diferentes decisiones es a través del efecto insumo y la reversión a la media es fundamental para entenderlo. Si la reversión a la media es pequeña, entonces el efecto de los precios dura por muchos años, ya que los shocks son muy persistentes. Si consideramos mayores grados de reversión a la media, entonces los shocks serán temporales, y los flujos de caja serán afectados sólo en el corto plazo.

La figura 5.6 muestra este efecto de la reversión a la media sobre el consumo. La línea horizontal corresponde a la solución de Merton, ya que $V = \eta = 0$, de manera que no tiene sensibilidad con respecto al precio del petróleo. Para los otros casos, la reversión a la media aumenta el consumo para $\gamma > 1$, ya que un shock positivo en los precios tiene un efecto de corto plazo solamente. Encontramos los mismos resultados que en la discusión teórica de la sección anterior. La figura 5.7 también es concordante con los resultados teóricos. La

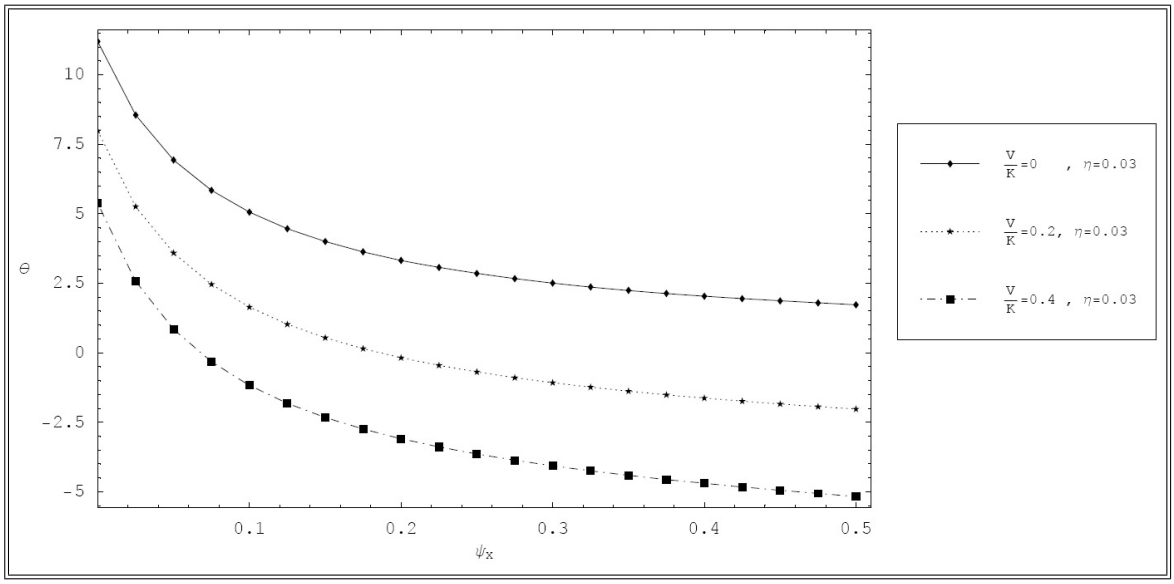


FIGURA 5.7. Estrategia de cobertura $\theta$ en función de la reversión a la media del (log) precio del petróleo $\psi_X$ para diferentes tamaños relativos del recurso natural $V/K$. En estos gráficos se utilizan los parámetros de las tablas (5.1) y (5.2).

estrategia de cobertura es decreciente en la reversión a la media debido a que los shocks en el precio del petróleo son menos significativos para mayores valores de ésta.

Recordemos que se ha obviado la demanda miope intencionalmente. Las figuras 5.8 y 5.9 presentan los resultados típicos de la literatura de elección de portafolio. La demanda miope es creciente en el premio por riesgo, ya que la compensación por tomar la misma cantidad de riesgo aumenta. En este modelo, el país toma posiciones en los contratos porque éstos son atractivos, aun en el caso en que no exista recurso natural o que el petróleo no sea un insumo. Si el país es más averso al riesgo que un agente con función de utilidad logarítmica (i.e. $\gamma > 1$), el cual es el caso aquí, entonces la tasa de consumo aumenta con el valor absoluto del premio por riesgo. Aun si el conjunto de oportunidades de inversión es más atractivo, y el consumo relativo de mañana es más barato, el país desea suavizar el consumo, por lo que aumenta la tasa de consumo de hoy también.

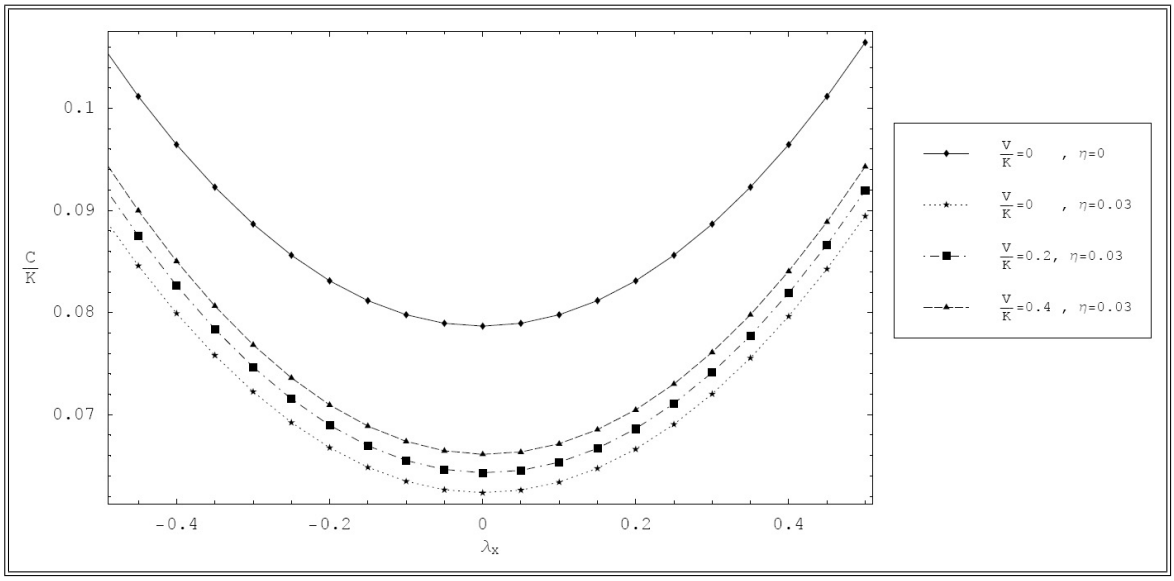


FIGURA 5.8. Razón entre consumo y capital $C/K$ en función del premio por riesgo de mercado del (log) precio del petróleo $\lambda_X$ para diferentes tamaños relativos del recurso natural $V/K$. En estos gráficos se utilizan los parámetros de las tablas (5.1) y (5.2).

### 5.3.4. Aversión al Riesgo

Las figuras 5.10 y 5.11 muestran la razón entre consumo y capital, y la estrategia de cobertura para diferentes valores del coeficiente de aversión al riesgo. Como antes, la línea más oscura representa el modelo de Merton. Notar que el modelo de Merton es igual al caso en que no hay recursos naturales ($V/K = 0$) cuando $\gamma = 1$. Esto sucede porque en ausencia de recursos naturales, la única diferencia entre ambos es la demanda por cobertura, la que desaparece para el caso de un agente logarítmico.

En principio puede llamar la atención el hecho de que el consumo aumente con la aversión al riesgo, pero en la figura 5.10 se observa que este comportamiento también ocurre para el modelo más simple de Merton, por lo que no corresponde a un fenómeno exclusivo del modelo considerado, sino que surge en función de la relación entre el parámetro de aversión al riesgo, el premio por riesgo y la productividad total de factores.

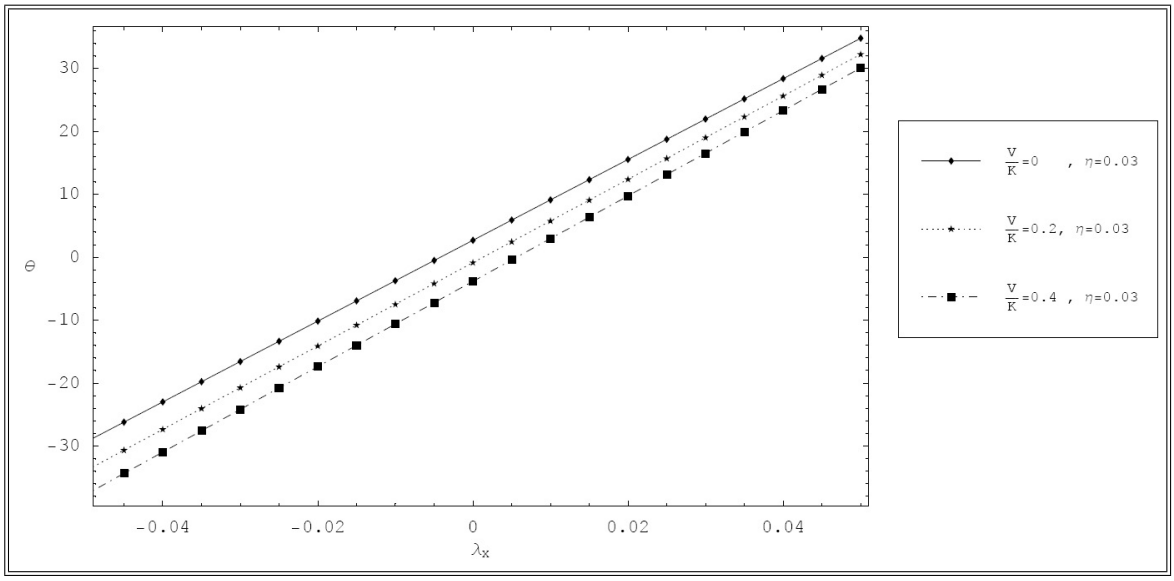


FIGURA 5.9. Estrategia de cobertura $\theta$ en función del premio por riesgo de mercado del (log) precio del petróleo $\lambda_X$ para diferentes tamaños relativos del recurso natural $V/K$. En estos gráficos se utilizan los parámetros de las tablas (5.1) y (5.2).

## 5.4. El caso de Chile

Finalmente en esta sección se analiza cual debiera ser la estrategia de cobertura del precio del petróleo en Chile, considerando la correlación que existe entre éste y el precio del cobre. Como ya se explicó anteriormente los parámetros utilizados para el análisis presentado fueron seleccionados tratando de replicar en la mejor manera posible las características de la economía de este país.

Para realizar el cálculo se necesita estimar el valor de la razón entre las reservas de cobre del estado y el capital del país. Ésta última cantidad es conocida y como ya se presentó anteriormente corresponde a aproximadamente 50 millones de toneladas de cobre. Las que valoradas a un precio de 3,053 dólares la libra, precio promedio del año 2006,[4] corresponden a aproximadamente 337 mil millones de dólares.

El capital es más difícil de estimar para un país, por lo que en vez de hacerlo directamente, se hace a través de la función de producción del modelo. Así, considerando que

[4]Fuente: Codelco, Memoria Anual 2006

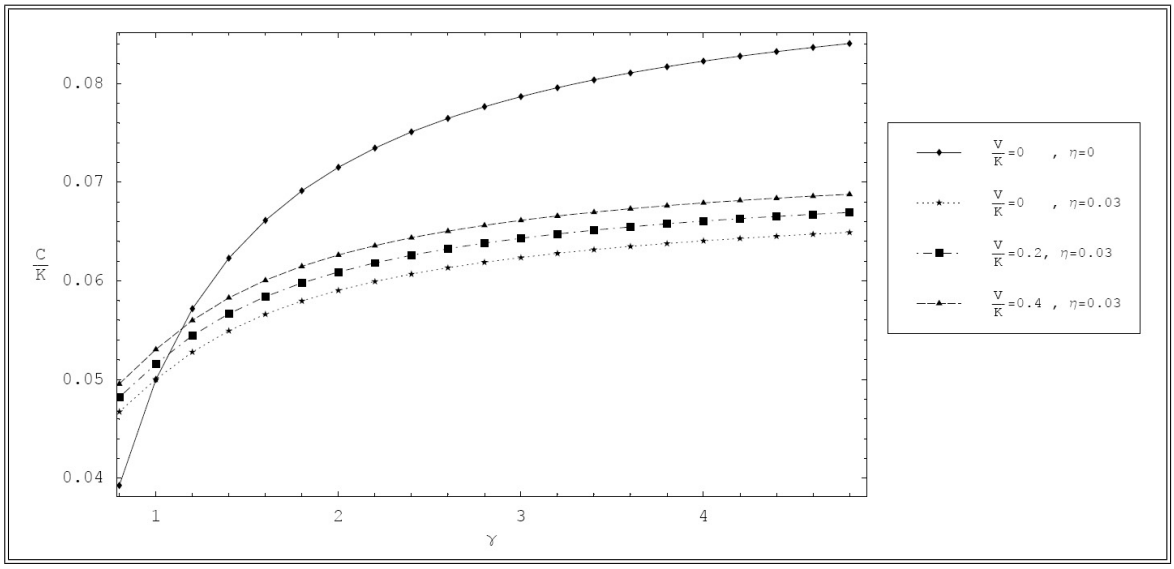


FIGURA 5.10. Razón entre consumo y capital $C/K$ en función de la aversión al riesgo del país $\gamma$ para diferentes tamaños relativos del recurso natural $V/K$. En estos gráficos se utilizan los parámetros de las tablas (5.1) y (5.2).

el output de esta tecnología corresponde al PIB del país, se puede encontrar el capital de éste a partir de la expresión para la producción óptima dada por la ecuación (3.18). Para el cálculo se escoge un precio del petróleo de 65 dólares que fue el promedio del año 2006 y se reemplazan los valores de los parámetros para Chile. De esta manera se obtiene que la razón entre las reservas de cobre y el capital en Chile es de 17 %.

Al evaluar la expresión para la estrategia de cobertura con los parámetros de la tabla (5.2) y reemplazando un valor de 17 % para la razón entre reservas de cobre y capital, se obtiene para $\theta$ un valor de -0.37. Es decir, según el modelo, Chile no debiera comprar futuros sobre el petróleo, y aún más, dada la importancia del cobre en la economía, este país debiera tomar posiciones cortas en estos contratos para tratar de cubrir el riesgo relacionado a este último commodity. Cabe destacar sin embargo, lo sensible que es este resultado a la razón entre reservas de cobre locales y capital, como se observa en las figuras 5.4 y 5.5.

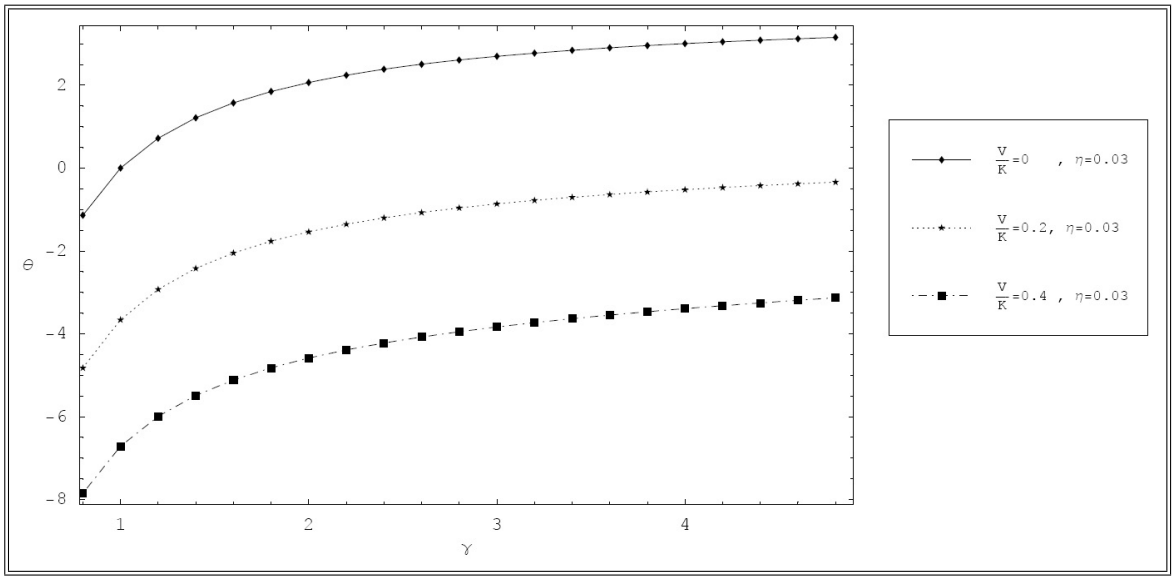


FIGURA 5.11. Estrategia de cobertura $\theta$ en función de la aversión al riesgo del país $\gamma$ para diferentes tamaños relativos del recurso natural $V/K$. En estos gráficos se utilizan los parámetros de las tablas (5.1) y (5.2).

# Capítulo 6. CONCLUSIONES

Una característica en común de las economías emergentes es su dependencia a las exportaciones de unos pocos commodities primarios, cuyos precios están en muchas ocasiones correlacionados con el precio del petróleo.

En este artículo, construimos un modelo para estudiar el efecto del precio del petróleo sobre las estrategias óptimas de cobertura y consumo en la economía emergente. Ésta tiene dos tecnologías, un sector del capital que utiliza petróleo como insumo de producción y un sector del commodity local. Asumimos que este último no es transable y que entrega una tasa de dividendos al sector del capital.

El precio del petróleo sigue un proceso gaussiano general exponencialmente affine de $n$ factores. Existen dos efectos directos del petróleo sobre la economía: el *efecto insumo*, que es siempre negativo, y el *efecto correlación*, que puede ser positivo o negativo dependiendo de la correlación entre el commodity local y el precio del petróleo.

Esta tesis muestra como encontrar una aproximación razonable cuando no existen soluciones en forma cerrada disponibles. En efecto, usando una técnica de expansión asintótica en dos parámetros, la importancia relativa del petróleo como insumo de producción y el tamaño del dividendo del commodity local, obtenemos una solución analítica para el caso en que el precio del petróleo sigue un proceso general de $n$ factores.

Encontramos que la reversión a la media en el precio del petróleo, que puede ser inducida por un retorno por conveniencia que varía en el tiempo, juega un rol importante en el consumo y en la estrategia de cobertura de la economía emergente. Por un lado influye sobre el efecto insumo modificando la persistencia de los shocks en el precio del petróleo y por otro afecta la volatilidad de los contratos futuros.

Encontramos además que a medida que el efecto correlación aumenta, para un parámetro de correlación positivo, el recurso natural mejora como cobertura natural ante cambios en el precio del petróleo, lo que disminuye las posiciones en los contratos futuros.

Finalmente, se evalúa si Chile debiera implementar o no una estrategia de cobertura frente al riesgo del precio del petróleo. Tras estimar una relación de 17 % para las reservas de cobre sobre capital en este país, se obtiene que Chile no debiera preocuparse del riesgo del petróleo, ya que la importancia del cobre en la economía es tal, que su correlación con el petróleo permite cubrir este riesgo totalmente. Es más, el modelo indica que Chile debiera tomar una pequeña cantidad de posiciones cortas en estos contratos, dado que permiten cierto grado de cobertura frente a variaciones en el precio del cobre.

## Bibliografía

Bergoeing, R., & Morandé, F. (2002). Crecimiento, empleo e impuestos al trabajo: Chile 1998-2001. *Cuadernos de Economía*, *39*, 127-140.

Bernanke, B., Gertler, M., & Watson, M. (2004). Oil shocks and aggregate macroeconomic behavior: The role of monetary policy: Reply. *Journal of Money, Credit and Banking*, *36*(2), 287-291.

Bernanke, B., Gertler, M., Watson, M., Sims, C., & Friedman, B. (1997). Systematic monetary policy and the effects of oil price shocks. *Brookings Papers on Economic Activity*, *1997*(1), 91-157.

Birol, F. (n.d.). Analysis of the impact of high oil prices on the global economy. *International Energy Agency*.

Brennan, M. (n.d.). Schwartz, 1985,.[ev]aluating natural resource investments. *Journal of Business*, *58*(2), 135-157.

Burbidge, J., & Harrison, A. (1984, Jun.). Testing for the effects of oil-price rises using vector autoregressions. *International Economic Review*, *25*(2), 459-484.

Carruth, A. A., Hooker, M. A., & Oswald, A. J. (1998, Nov.). Unemployment equilibria and input prices: Theory and evidence from the united states. *Review of Economics and Statistics*, *4*(4), 621-628.

Casassus, J., & Collin-Dufresne, P. (2005). Stochastic convenience yield implied from commodity futures and interest rates. *Journal of Finance*, *60*(5), 2283-2331.

Caselli, F., & Feyrer, J. (2007). The marginal product of capital. *Quarterly Journal of Economics*, *122*(2), 535-568.

Chen, R. R., & Scott, L. (1993). Maximum likelihood estimation for a multifactor equilibrium model of the term structure of interest rates. *Journal of Fixed Income*, *december,vol.3 no 3*, 14-31.

Claessens, S., & Varangis, P. (1991). Hedging crude oil imports in developing countries. *World Bank Policy Research Working Paper No 755*.

Collin-Dufresne, P., Goldstein, R., & Jones, C. (2001). *Multi-dimensional edgeworth expansion: Improving quasi-maximum likelihood.* (Working paper)

Cortazar, G., & Naranjo, L. (2006). An n-factor gaussian model of oil futures prices. *Journal of Futures Markets*, *26*(3), 243-68.

Cortazar, G., & Schwartz, E. (2003). Implementing a stochastic model for oil futures prices. *Energy Economics*, *25*(3), 215-238.

Cuñado, J., & Gracia, F. Pérez de. (2003). Do oil price shocks matter? Evidence for some European countries. *Energy Economics*, *25*(2), 137–154.

Daniel, J. (2001, November). *Hedging government oil price risk* (IMF Working Papers No. 01/185). International Monetary Fund.

Darby, M. R. (1982, Sept.). The price of oil and world inflation and recession. *American Economic Review*, *72*(4), 738-751.

Davis, J., Ossowski, R., Daniel, J., & Barnett, S. (2001a). Oil funds: Problems posing as solutions? *Finance and Development*, *38*(4).

Davis, J., Ossowski, R., Daniel, J., & Barnett, S. (2001b). Stabilization and savings funds for nonrenewable resources [IMF Occasional Papers]. (205).

Deaton, A. (1999). Commodity Prices and Growth in Africa. *The Journal of Economic Perspectives*, *13*(3), 23–40.

Deaton, A., & Miller, R. I. (1995). *International Commodity Prices, Macroeconomic Performance, and Politics in Sub-Saharan Africa*. International Finance Section, Dept. of Economics, Princeton University Princeton, NJ.

Dehn, J. (2000). The Effects on Growth of Commodity Price Uncertainty and Shocks. *World Bank Policy Research Working Paper No 2455*.

De Miguel, C., Manzano, B., & Martín-Moreno, J. (2003). *Oil Price Shocks and Aggregate Fluctuations.* (Working Paper Universidad de Vigo)

Devlin, J., & Titman, S. (2004). Managing oil price risk in developing countries. *The World Bank Research Observer*, *19*(1), 119-139.

Finn, M. G. (2000). Perfect competition and the effects of energy price increases on economic activity. *Journal of Money, Credit and Banking*, *32*(3), 400–416.

Gibson, R., & Schwartz, E. (1990). Stochastic convenience yield and the pricing of oil contingent claims. *The Journal of Finance*, *45*(3), 959-976.

Habiyaremye, A. (2005, Nov.). Dependence on Primary Commodities and Poverty Traps in Sub-Saharan Africa: Devising strategies and building capabilities for diversification. (Working Paper United Nations University)

Hamilton, J., & Herrera, A. (2004). Oil shocks and aggregate macroeconomic behavior: The role of monetary policy. *Journal of Money, Credit & Banking*, *36*(2), 265-287.

Hamilton, J. D. (1983, April). Oil in the macroeconomy since world war ii. *Journal of Political Economy*, *91*(2), 228-248.

Hamilton, J. D. (1988, June). A neoclassical model of unemployment and the business cycle. *Journal of Political Economy*, *96*(3), 593-617.

Hamilton, J. D. (2003). What is an oil shock? *Journal of econometrics*, *113*(2), 363–398.

Henderson, V. (2006, Nov.). *Valuing the option to invest in an incomplete market.* (Working Paper Princeton University)

Hugonnier, J., & Morellec, E. (2006, Jun.). *Corporate control and real investment in incomplete markets.* (Working Paper University of Lausanne)

Ilahi, N., & Shabsigh, G. (2007, April). *Looking beyond the fiscal: Do oil funds bring macreconomic stability?* (IMF Working Papers No. 07/96). International Monetary Fund.

Jiménez-Rodríguez, R., & Sánchez, M. (2005). Oil price shocks and real GDP growth: empirical evidence for some OECD countries. *Applied Economics*, *37*(2), 201–228.

Jones, D., Leiby, P., & Paik, I. (2004). Oil Price Shocks and the Macroeconomy: What Has Been Learned Since 1996. *Energy Journal*, *25*(2), 1–32.

Kahl, M., Liu, J., & Longstaff, F. A. (2003). Paper millionaires: how valuable is stock to a stockholder who is restricted from selling it? *Journal of Financial Economics*, *67*, 385–410.

Kim, I.-M., & Loungani, P. (1992). The role of energy in real business cycle models. *Journal of Monetary Economics*, *29*, 173-189.

Kogan, L., & Uppal, R. (2003a). *Risk aversion and dynamic optimal portfolio policies.* (Working Paper)

Kogan, L., & Uppal, R. (2003b). Risk aversion and dynamic optimal portfolio policies. (Working Paper)

Kose, M. A., & Riezman, R. (1999, Nov.). *Trade shocks and macroeconomic fluctuations in africa.* (CESifo Working Paper Series No 203)

Leduc, S., & Sill, K. (2004). A quantitative analysis of oil-price shocks, systematic monetary policy, and economic downturns. *Journal of Monetary Economics*, *51*(4), 781-808.

Lee, K., Ni, S., & Ratti, R. (1995). Oil Shocks and the Macroeconomy: The Role of Price Variability. *Energy Journal*, *16*(4), 39–56.

Miaoy, J., & Wang, N. (2006, Sep.). *Investment, consumption and hedging under incomplete markets.* (Working Paper Boston University)

Mork, K. (1989, June). Oil and the macroeconomy when prices go up and down: An extension of hamilton's results. *Journal of Political Economy*, *97*(3), 740-744.

Mork, K., Olsen, Ø., & Mysen, H. (1994). Macroeconomic Responses to Oil Price Increases and Decreases in Seven OECD Countries. *The Energy Journal*, *15*(4), 19–35.

Papapetrou, E. (2001). Oil price shocks, stock market, economic activity and employment in Greece. *Energy Economics*, *23*(5), 511–532.

Pearson, N. D., & Sun, T.-S. (1994). Exploiting the condititional density in estimating the term structure: An application to the Cox, Ingersoll and Ross model. *Journal of Finance*, *XLIX, no 4*, 1279-1304.

Rasche, R. H., & Tatom, J. A. (1977). Energy resources and potential gnp. *Federal Reserve Bank of St. Louis Review*, *59*(6), 10-24.

Rotemberg, J. J., & Woodford, M. (1996). Imperfect competition and the effects of energy price increases on economic activity. *Journal of Money, Credit & Banking*, *28*(4).

Schwartz, E. (1997). The stochastic behavior of commodity prices: Implications for valuation and hedging. *The Journal of Finance*, *52*(3), 923-973.

Schwartz, E., & Smith, J. (2000). Short-term variations and long-term dynamics in commodity prices. *Management Science*, *46*(7), 893–911.

Schwartz, E. S., & Tebaldi, C. (2006, Oct.). *Illiquid assets and optimal portfolio choice.* (National Bureau of Economic Research, Working Paper)

UNCTAD. (2003). *Economic development in africa: Trade performance and commodity dependence*. New York and Geneva: United Nations.

# ANEXOS

# ANEXO A. EXPANSIÓN DE PRIMER ORDEN

En esta sección se presentan las expresiones de la solución aproximada de la función de utilidad indirecta de la economía emergente $J(K, V, X)$, para el caso del modelo simplificado de un sólo factor:

$$J(K, V, X) = A_1^{-\gamma} \frac{\left(K\, e^{g\left(\log(\frac{V}{K}), X\right)}\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \tag{A.1}$$

con

$$g(\omega, X) = (A_0^{\eta} + A_X^{\eta} X)\eta + A_0^{\xi}\xi\, e^{\omega} + (A_0^{\eta\xi} + A_X^{\eta\xi} X)\eta\xi\, e^{\omega} \tag{A.2}$$

Donde las constantes $A_0^{\eta}$, $A_X^{\eta}$, $A_0^{\xi}$, $A_0^{\eta\xi}$ y $A_X^{\eta\xi}$ están dadas por:

$$A_0^{\eta} = ((\alpha\, A_1^{-1}(\log(\alpha\,\eta) - 1 - (r - \frac{\sigma_{_X}^2}{2} + \frac{\sigma_{_X}\lambda_{_X}}{\gamma} - \psi_{_0})(A_1 + \psi_{_X})^{-1}) \tag{A.3}$$

$$A_0^{\xi} = ((\alpha + \rho\,\sigma_{_V}\lambda_{_X}) - \mu_{_V})^{-1} \tag{A.4}$$

$$A_X^{\eta} = -\alpha(A_1 + \psi_{_X})^{-1} \tag{A.5}$$

$$A_0^{\eta\xi} = -\alpha\, A_0^{\xi}(\log(\alpha\,\eta) - 1 - (r + \rho\,\sigma_{_V}\lambda_{_X} - \frac{\sigma_{_X}^2}{2} - \psi_{_0})((A_0^{\xi})^{-1} + \psi_{_X})^{-1}) \tag{A.6}$$

$$A_X^{\eta\xi} = \alpha((A_0^{\xi})^{-1} + \psi_{_X})^{-1} \tag{A.7}$$