



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

ESTIMATION OF COMMODITY FUTURES PRICES AT RISKAMERICA SPA

MATÍAS ALEX VEGA BASTÍAS

Proyecto para optar al grado de
Magíster en Ingeniería

Profesor Supervisor:
JORGE VERA ANDREO

Santiago de Chile, enero, 2022

© 2022, Matías Vega Bastías



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

ESTIMATION OF COMMODITY FUTURES PRICES AT RISKAMERICA SPA

MATÍAS ALEX VEGA BASTÍAS

Proyecto presentado a la Comisión integrada por los profesores:

JORGE VERA ANDREO 

GONZALO CORTÁZAR SANZ 

HÉCTOR ORTEGA GONZÁLEZ 

DIEGO LÓPEZ-GARCÍA GONZÁLEZ 

Para completar las exigencias del grado de
Magíster en Ingeniería

Santiago de Chile, enero, 2022

A mi familia y amigos.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quiero agradecer sinceramente al profesor Jorge Vera por su constante apoyo en mi carrera universitaria. Desde mi segundo año, el profesor Vera ayudó en mi postulación a un doble título en Francia, para más tarde convertirse en mi profesor supervisor del Magíster en Ingeniería.

También deseo agradecer el liderazgo y ayuda de Héctor Ortega, gerente de desarrollo en RiskAmerica SpA, cuya supervisión fue fundamental para alcanzar los resultados expuestos en esta tesis.

Por último, agradecer a mi familia por el soporte incondicional en todos estos años.

INDICE GENERAL

Pág.

DEDICATORIA	ii
AGRADECIMIENTOS	iii
INDICE DE TABLAS	vi
INDICE DE FIGURAS	viii
RESUMEN	x
ABSTRACT	xii
1. INTRODUCCIÓN	1
2. MODELO DE PRECIOS DE COMMODITIES	4
2.1 Modelo Cortázar y Naranjo	6
2.2 Momentos del Modelo Cortázar y Naranjo	7
3. VALORIZACIÓN DE CONTRATOS FUTUROS	9
3.1 Valorización de un Contrato Futuro	10
3.2 Valorización de un Contrato Futuro para Modelo Cortázar y Naranjo	10
3.3 Estructura de Volatilidad de un Futuro para Modelo Cortázar y Naranjo	11
4. CÁLCULO DE VARIABLES DE ESTADO Y PARÁMETROS USANDO EL FILTRO DE KALMAN	12
4.1 Descripción del Filtro de Kalman.....	12
4.1.1 Espacio de Estados	13
4.1.2 Estimación Óptima del Vector de Variables de Estado	13
4.2 Estimación de Parámetros	15
5. TRANSACCIONES DE FUTUROS	16
5.1 Contratos Futuros de Petróleo WTI	16
5.2 Contratos Futuros de Cobre.....	17
5.3 Contratos Futuros de Oro	18
6. RESULTADOS	19

6.1	Resultados para el Petróleo	20
6.1.1	Estimación de Parámetros.....	20
6.1.2	Ajuste a Transacciones In-Sample.....	21
6.1.3	Ajuste a Transacciones Out-Of-Sample.....	24
6.1.4	Ajuste a la Estructura de Volatilidad	26
6.1.5	Conclusiones preliminares para el Petróleo	28
6.2	Resultados para el Cobre.....	30
6.2.1	Estimación de Parámetros.....	30
6.2.2	Ajuste a Transacciones In-Sample.....	31
6.2.3	Ajuste a Transacciones Out-Of-Sample.....	33
6.2.4	Ajuste a la Estructura de Volatilidad	35
6.2.5	Conclusiones preliminares para el Cobre.....	37
6.3	Resultados para el Oro	39
6.3.1	Estimación de Parámetros.....	39
6.3.2	Ajuste a Transacciones In-Sample.....	40
6.3.3	Ajuste a Transacciones Out-Of-Sample.....	42
6.3.4	Ajuste a la Estructura de Volatilidad	44
6.3.5	Conclusiones preliminares para el Oro	46
7.	CONCLUSIONES.....	48
	BIBLIOGRAFIA	49

INDICE DE TABLAS

Pág.

Tabla V-1: Caracterización de contratos futuros de petróleo WTI en función de la madurez del <i>bucket</i>	16
Tabla V-2: Caracterización de contratos futuros de cobre en función de la madurez del <i>bucket</i>	17
Tabla V-3: Caracterización de contratos futuros de oro en función de la madurez del <i>bucket</i>	18
Tabla VI-1: Parámetros estimados del modelo no estacionario de 3 factores para el petróleo WTI.	20
Tabla VI-2: MPE y MAPE del ajuste de los modelos a los precios de futuros de petróleo WTI en período dentro de la muestra.....	21
Tabla VI-3: MPE y MAPE del ajuste de los modelos a los precios de futuros de petróleo WTI en período fuera de la muestra.	24
Tabla VI-4: Parámetros estimados del modelo no estacionario de 3 factores para el cobre.....	30
Tabla VI-5: MPE y MAPE del ajuste de los modelos a los precios de futuros de cobre en período dentro de la muestra.	31
Tabla VI-6: MPE y MAPE del ajuste de los modelos a los precios de futuros de cobre en período fuera de la muestra.	33
Tabla VI-7: Parámetros estimados del modelo no estacionario de 3 factores para el oro.	39

Tabla VI-8: MPE y MAPE del ajuste de los modelos a los precios de futuros de oro en período dentro de la muestra.	40
Tabla VI-9: MPE y MAPE del ajuste de los modelos a los precios de futuros de oro en período fuera de la muestra.	42

INDICE DE FIGURAS

	Pág.
Figura 6-1: Distribución del MPE y MAPE por <i>bucket</i> de los modelos para el petróleo en período dentro de la muestra.	22
Figura 6-2: Dispersión del MPE por <i>bucket</i> de los modelos para el petróleo en período dentro de la muestra.	23
Figura 6-3: Distribución del MPE y MAPE por <i>bucket</i> de los modelos para el petróleo en período fuera de la muestra.	25
Figura 6-4: Dispersión del MPE por <i>bucket</i> de los modelos para el petróleo en período fuera de la muestra.	26
Figura 6-5: Ajuste a la estructura de volatilidad de modelos para el petróleo en período dentro de la muestra.	27
Figura 6-6: Ajuste a la estructura de volatilidad de modelos para el petróleo en período fuera de la muestra.	28
Figura 6-7: Transacciones y curva de precios futuros de petróleo WTI al día 28/09/2021.	29
Figura 6-8: Distribución del MPE y MAPE por <i>bucket</i> de los modelos para el cobre en período dentro de la muestra.	32
Figura 6-9: Dispersión del MPE por <i>bucket</i> de los modelos para el cobre en período dentro de la muestra.	33
Figura 6-10: Distribución del MPE y MAPE por <i>bucket</i> de los modelos para el cobre en período fuera de la muestra.	34

Figura 6-11: Dispersión del MPE por <i>bucket</i> de los modelos para el cobre en período fuera de la muestra.....	35
Figura 6-12: Ajuste a la estructura de volatilidad de modelos para el cobre en período dentro de la muestra.....	36
Figura 6-13: Ajuste a la estructura de volatilidad de modelos para el cobre en período fuera de la muestra.....	37
Figura 6-14: Transacciones y curva de precios futuros de cobre al día 19/10/2021. .	38
Figura 6-15: Distribución del MPE y MAPE por <i>bucket</i> de los modelos para el oro en período dentro de la muestra.	41
Figura 6-16: Dispersión del MPE por <i>bucket</i> de los modelos para el oro en período dentro de la muestra.....	42
Figura 6-17: Distribución del MPE y MAPE por <i>bucket</i> de los modelos para el oro en período fuera de la muestra.	43
Figura 6-18: Dispersión del MPE por <i>bucket</i> de los modelos para el oro en período fuera de la muestra.	44
Figura 6-19: Ajuste a la estructura de volatilidad de modelos para el oro en período dentro de la muestra.....	45
Figura 6-20: Ajuste a la estructura de volatilidad de modelos para el oro en período fuera de la muestra.	46
Figura 6-21: Transacciones y curva de precios futuros de oro al día 12/11/2021.....	47

RESUMEN

En la economía mundial, los precios de los *commodities* sufren una variación continua e impredecible de acuerdo a los niveles de oferta, demanda e inventarios. Los agentes económicos se esfuerzan por comprender el comportamiento estocástico del precio de los *commodities* para la toma de decisiones de proyectos de inversión, valorización de derivados financieros, entre otros. En este contexto, la empresa RiskAmerica SpA pone a disposición de sus clientes información histórica de transacciones y una estimación del precio de los contratos futuros de ciertos *commodities* relevantes en el mercado financiero. La compañía desea mejorar estas estimaciones, lo cual da origen al trabajo presentado en esta tesis; actualizar y recalibrar la estimación de precios futuros del petróleo *West Texas Intermediate* (WTI), el cobre y el oro.

La metodología consiste en utilizar un modelo gaussiano multifactorial de precios de *commodities* sin arbitraje. El modelo es calibrado usando el filtro de Kalman, a partir de contratos futuros provenientes de la *New York Mercantile Exchange* y la *New York Commodity Exchange*. Finalmente, gracias a la aplicación de diversas técnicas analíticas, se mejoró el ajuste realizado por el modelo de RiskAmerica a las transacciones de contratos futuros de estos *commodities* y su estructura de volatilidad empírica. Para el petróleo WTI, el cobre y el oro, se redujo el error absoluto medio porcentual en todo el período de la muestra en un 36%, 12% y 51% respectivamente. Estos resultados ya se encuentran reflejados en el sitio oficial de RiskAmerica SpA y disponibles para sus clientes.

ABSTRACT

In the world's economy, commodity prices suffer a continuous and unpredictable variation following supply, demand and inventory levels. Economic agents strive to understand the stochastic behavior of commodity prices in order to make decisions regarding investment projects, valuation of financial derivatives, among others. In this context, RiskAmerica SpA gives its clients access to transactions' historical information and futures price estimates of relevant commodities in the financial market. The company wishes to improve these estimates, therefore originating the work presented in this thesis; to update and recalibrate the estimation of futures prices of West Texas Intermediate (WTI) oil, copper and gold.

This work's methodology consists in using a multifactor Gaussian model of commodity prices without arbitrage. The model is calibrated using the Kalman filter, based on future contracts from the New York Mercantile Exchange and the New York Commodity Exchange. Finally, due to the application of various analytical techniques, the fit of the RiskAmerica model to the future contract transactions of these commodities and their empirical volatility structure was improved. For WTI oil, copper and gold, the mean absolute percentage error over the entire sample period was reduced by 36%, 12% and 51% respectively. These results are already shown in RiskAmerica SpA's official website and remain available to its clients.

1. INTRODUCCIÓN

En la economía mundial se actualizan continuamente los niveles de oferta, demanda e inventarios de los diversos *commodities* transados por los agentes económicos. Esto produce una variación continua e impredecible de sus precios, los cuales se ajustan en búsqueda de un equilibrio entre oferta y demanda. Si los precios bajan, los consumidores aumentarían su demanda mientras que los productores de más alto costo cesan su producción reduciendo la oferta del material, por lo que los precios vuelven a subir. En caso contrario, cuando los precios suben, los consumidores tienden a reducir su demanda al mismo tiempo que los productores de más alto costo reanudan sus operaciones, bajando el precio de este. Ante un desbalance ingresan rápidamente los especuladores quienes hacen equilibrar el mercado.

La modelación y estimación del comportamiento estocástico del precio de los *commodities* es un tema de interés en la literatura financiera, cuyos avances influyen en la toma de decisiones de proyectos de inversión, valorización de derivados financieros, entre otros. Diversos modelos han sido propuestos a lo largo del tiempo, cuyas diferencias se centran en la definición del precio *spot*, reversión a la media en el precio y cantidad de fuentes de incertidumbre o factores de riesgo. De igual manera, existen otras disimilitudes en la información utilizada para calibrar los modelos y las métricas empleadas para evaluar el rendimiento de estos.

Los modelos más simples consideran que la mejor estimación del precio futuro es el precio *spot* (Alquist, Kilian, & Vigfusson, 2013), definido como el precio pactado de un activo con entrega inmediata. Este tipo de modelación sugiere una caminata aleatoria del precio del activo sin ajuste del *drift* o tendencia del proceso. Una alternativa para la estimación de precios futuros es la utilización de contratos futuros suscritos sobre los *commodities* de interés. Un ejemplo es el modelo de precios de *commodities* propuesto por Gonzalo Cortázar y Lorenzo Naranjo. Se trata de un modelo gaussiano lognormal sin arbitraje que utiliza toda la información de precios disponible en transacciones diarias de *commodities* de distintas bolsas de comercio usando como método de resolución un filtro de Kalman. Dicho modelo también permite distinguir distintos números de factores de riesgo.

En este contexto, la empresa RiskAmerica SpA utiliza el modelo descrito, considerando un proceso no estacionario de 3 factores de riesgo, para poner a disposición de sus clientes una estimación del precio de los contratos futuros de ciertos *commodities* relevantes en el mercado financiero. Esta estimación se muestra a través de una curva que representa la dinámica de los contratos futuros en el tiempo y en distintos plazos. En conjunto a estas curvas, también se entrega información histórica sobre las transacciones ejecutadas en bolsas de comercio. En particular, se dispone del precio y plazo o duración de estas.

El enfoque de esta tesis será actualizar y recalibrar la estimación de precios futuros que RiskAmerica realiza del petróleo *West Texas Intermediate* (WTI), el cobre y el oro. La metodología consiste en utilizar el modelo de Cortázar y Naranjo considerando un proceso

no estacionario y 3 factores de riesgo. Igualmente, se utilizará un filtro de Kalman para estimar el nivel de las variables no observables, usando como variables observables las observaciones del precio de contratos futuros suscritos sobre los *commodities* desde enero del 2018 a la última fecha disponible al momento de la estimación del 2021.

Se espera obtener resultados que permitan mejorar el ajuste del modelo actual a la estructura de precios de futuros de los *commodities*. Para determinar su efectividad, se medirá el ajuste del modelo a los precios futuros mediante herramientas estadísticas de error. También se evaluará el ajuste a la estructura de volatilidad de los contratos futuros, definida como la curva de la volatilidad de los retornos de futuros para cada madurez.

RiskAmerica en su espíritu de mejora continua ha modernizado su sitio web y sistemas subyacentes. En este aspecto, el trabajo desarrollado durante el internado, y reflejado en esta tesis, tendrá un impacto directo en los servicios ofrecidos por la empresa, puesto que no existen modelos de valoración de *commodities* en el lenguaje de programación Python.

La organización de esta tesis es la siguiente. En el capítulo 2 se describe el modelo de precios de *commodities*. En el capítulo 3 se derivan las fórmulas explícitas de valorización de contratos futuros. A continuación, en el capítulo 4 se explica el filtro de Kalman y su aplicación a un panel incompleto de datos. En el capítulo 5 se describen los datos utilizados para la calibración del modelo. En el capítulo 6 se exhiben los resultados empíricos de la valorización. Para terminar, en el capítulo 7 se presentan las conclusiones.

2. MODELO DE PRECIOS DE COMMODITIES

En este capítulo se describe el modelo de precios de *commodities*, propuesto por los profesores Gonzalo Cortázar y Lorenzo Naranjo, utilizado en RiskAmerica para la estimación de precios futuros del petróleo WTI, el cobre y el oro. Este modelo generaliza reconocidos modelos de la literatura financiera sobre valorización de *commodities* (Brennan y Schwartz 1985, Gibson y Schwartz 1990, Schwartz 1997, Schwartz y Smith 2000, Cortázar y Schwartz 2003) en una escala de N-factores con un proceso no estacionario, lo cual es comúnmente aceptado en la literatura de *commodities* e implica que x_t tiene una raíz unitaria.

Como se ha mencionado, el modelo permite distinguir entre distintos números de factores de riesgo, los cuales representan el número de elementos del vector de incrementos dw_t , que sigue un movimiento browniano geométrico. En la literatura, los primeros modelos de este tipo utilizaban 1 factor de riesgo para modelar el comportamiento estocástico del precio spot. No obstante, la evidencia señala que, si el número de factores no es suficiente las transacciones no se ajustan a la estructura de retornos de los futuros. Un mayor número de factores entrega más flexibilidad al modelo. Por ello, y sumado a razones de estabilidad en la curva de precios, esta tesis asume 3 factores de incertidumbre. Sin embargo, en la sección 2.1 se opta por mostrar en detalle la generalización de N-factores con el objetivo de exponer claramente el modelo de Cortázar y Naranjo.

La importancia del modelo radica en su capacidad de estimar la estructura y dinámica de los futuros en distintos plazos o duraciones, pudiendo modelar el precio de activos provenientes de diferentes bolsas de comercio donde se transen futuros de *commodities*. Una de sus características es la valorización ajustada por riesgo, la cual impone que el retorno del subyacente sea igual a una tasa de interés libre de riesgo. Posteriormente, se descuentan los flujos del instrumento a una tasa libre de riesgo. Por consiguiente, este procedimiento permite calcular el valor de cualquier activo como el valor esperado de sus flujos, bajo el supuesto neutral al riesgo, descontados a la tasa libre de riesgo.

El modelo incluye la presencia de variables latentes o no observables que son estimadas a partir de precios observados. El número de estas variables está determinado por la cantidad de factores de riesgo del modelo (3) y se representan por el vector de variables de estado x_t . En otras palabras, incorporan la incertidumbre presente en el sistema macroeconómico, ajustándose continuamente a medida que nuevas transacciones ocurren en los mercados financieros. Además, determinan el estado del precio spot en cada instante al incluir características estadísticas del precio spot como su varianza y función de autocorrelación.

De igual manera, el modelo incorpora un set de parámetros estructurales constantes que reflejan los rasgos más estables del mercado. Estos condicionan la dinámica que siguen las variables de estado, y por consiguiente la estimación diaria de futuros del *commodity* en distintos vencimientos. Para calcular el nivel de las variables de estado se utiliza el filtro de Kalman y la información de otras variables que sí se observan.

Las variables observables son los precios de contratos futuros escritos sobre el petróleo WTI, el cobre y el oro a distintos plazos o vencimientos. En particular, se extraen observaciones diarias de transacciones de estos derivados de la *New York Mercantile Exchange* (NYMEX) y *New York Commodity Exchange* (COMEX).

2.1 Modelo Cortázar y Naranjo

En esta sección se presenta un modelo Gaussiano de N-factores para el precio spot de un *commodity*. Es relevante considerar que el logaritmo de una variable aleatoria lognormal posee una distribución normal. Luego, sea S_t el precio spot de un *commodity*, el proceso estocástico del logaritmo del precio spot estará dado por:

$$\log S_t = 1'x_t + \mu t \quad (2.1)$$

donde x_t es un vector de dimensión $n \times 1$ que representa las variables de estado, y μ la tasa de crecimiento de largo plazo. El vector de variables de estado x_t sigue el siguiente proceso estocástico:

$$dx_t = -Kx_t dt + \Sigma dw_t \quad (2.2)$$

donde

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_n \end{pmatrix} \text{ y } \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

corresponden a matrices diagonales de $n \times n$ con entradas positivas constantes. La matriz K se llamará matriz de reversión. Asimismo, dw_t es un vector de incrementos de dimensión $n \times 1$ que sigue un movimiento browniano tal que $dw_t' dw_t = \Omega dt$, y

$\Omega = (\rho_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz de correlaciones donde $(\rho_{ij}) \in [-1, 1]$. Además, dw_t sigue una medida ajustada por riesgo y representa el número de factores de incertidumbre del modelo.

El modelo especifica que las variables de estado tienen una distribución multivariada normal. En específico, x_1 sigue una caminata aleatoria induciendo una raíz unitaria al proceso del precio spot, donde cualquier perturbación en x_1 es permanente por falta de reversión a la media. Esto implica que k_1 es cero. El resto de variables de estado revierten a cero a una tasa de reversión a la media dada por los elementos de la matriz de reversión K , k_i , donde las perturbaciones son transitorias.

Por último, se muestra el proceso ajustado por riesgo que siguen las variables de estado:

$$dx_t = -(\lambda + Kx_t)dt + \Sigma dw_t \quad (2.3)$$

donde λ es un vector de constantes reales de dimensión $n \times 1$ que representa el premio por riesgo y tiene igual dimensión que el vector de variables de estado x_t .

2.2 Momentos del Modelo Cortázar y Naranjo

En este apartado se describe explícitamente la distribución de probabilidades del modelo de precios no estacionario explicado anteriormente. Sean $\mathbb{E}_t(\cdot)$ el valor esperado y $\text{Cov}_t(\cdot)$ la varianza-covarianza condicional al tiempo t , se tiene que los momentos condicionales del vector de estados son:

$$\mathbb{E}_t(x_i(T)) = \begin{cases} x_1(t) & i = 1 \\ e^{-k_i(T-t)} x_i(t) & i = 2, \dots, N \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\text{Cov}_t(x_i(T), x_j(T)) = \begin{cases} \sigma_1^2(T-t) & i = 1, j = 1 \\ \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \frac{1 - e^{-(k_i+k_j)(T-t)}}{k_i+k_j} & i \neq 1, j \neq 1 \end{cases} \quad (2.5)$$

A partir de estas ecuaciones se observa el comportamiento no-estacionario de las variables de estado, al incluir un término que afecta el comportamiento de largo plazo del modelo. De manera más formal, se observa el límite del valor esperado cuando el tiempo tiende a infinito:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_t(x_i(T)) = \begin{cases} x_1(t) & i = 1 \\ 0 & i = 2, \dots, N \end{cases} \quad (2.6)$$

De igual forma, la varianza del vector de estados en el largo plazo será:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{Cov}_t(x_i(T), x_j(T)) = \begin{cases} +\infty & i = 1, j = 1 \\ \frac{\sigma_i \sigma_j \rho_{ij}}{k_i+k_j} & i \neq 1, j \neq 1 \end{cases} \quad (2.7)$$

Así, el logaritmo del precio spot ($\log S_t$) de un *commodity* posee la siguiente media y varianza:

$$\mathbb{E}_t(\log S_T) = x_1(t) + \sum_{i=2}^N e^{-k_i(T-t)} x_i(t) + \mu T \quad (2.8)$$

$$V_t(\log S_T) = \sigma_1^2(T-t) + \sum_{i,j \neq 1}^N \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \frac{1 - e^{-(k_i+k_j)(T-t)}}{k_i+k_j} \quad (2.9)$$

Finalmente, el valor esperado del precio spot es:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t(S_T) = & \exp(x_1(t) + \sum_{i=2}^N e^{-k_i(T-t)} x_i(t) + \mu T + \frac{1}{2} \sigma_1^2(T-t) + \\ & \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq 1}^N \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \frac{1 - e^{-(k_i+k_j)(T-t)}}{k_i+k_j}) \end{aligned} \quad (2.10)$$

3. VALORIZACIÓN DE CONTRATOS FUTUROS

Como se ha mencionado, la información contenida en los contratos futuros escritos sobre *commodities* será de vital importancia al momento de calcular el nivel de las variables de estado y calibrar el modelo. Por ello, en este capítulo se revisa la valorización teórica de un contrato futuro y su aplicación al modelo desarrollado por Cortázar y Naranjo, considerando un proceso ajustado por riesgo.

El proceso ajustado por riesgo se basa en un escenario de equilibrio donde no existen oportunidades de arbitraje. Esto implica que la valorización de un contrato futuro puede realizarse como el valor esperado de sus flujos, bajo una medida ajustada por riesgo, descontados a una tasa de interés libre de riesgo. Este ajuste por riesgo se lleva a cabo descontando el precio de mercado del riesgo, ajustando así el *drift* o tendencia del proceso.

Por otro lado, un contrato futuro se define como un acuerdo para comprar o vender un activo en una fecha específica en el futuro a un precio determinado (Hull, 2012). El activo sobre el cual se escribe un futuro se denomina activo subyacente, y la fecha futura en donde se fija el contrato representa el plazo, madurez o vencimiento de este. Los contratos futuros se transan en bolsas de comercio, quienes garantizan los pagos correspondientes.

Por último, cabe señalar la diferencia entre el precio de un futuro y el precio spot. El primero describe un precio de entrega en una fecha futura, mientras que el segundo es para una entrega inmediata.

3.1 Valorización de un Contrato Futuro

A continuación se presenta la valorización teórica de un contrato futuro. El precio de un contrato futuro en el tiempo t y fecha de vencimiento T se representa por $F(S_t, t, T)$. A partir de este, se desprende que el plazo del contrato es $\tau = T - t$. Luego, el precio del futuro es el valor esperado del precio spot en el tiempo T , considerando la probabilidad ajustada por riesgo Q , es:

$$F(S_t, t, T) = \mathbb{E}_t^Q(S_T) \quad (3.1)$$

3.2 Valorización de un Contrato Futuro para Modelo Cortázar y Naranjo

Dado que el precio spot S_T sigue una distribución lognormal, tenemos que:

$$\mathbb{E}_t^Q(S_T) = \exp(\mathbb{E}_t^Q(\log S_T) + \frac{1}{2} V_t^Q(\log S_T)) \quad (3.2)$$

donde

$$\mathbb{E}_t(\log S_T) = (\mathbf{1}')(\mathbb{E}_t^Q(x_T)) + \mu T \text{ y } \text{Var}_t(\log S_T) = (\mathbf{1}')(\text{Cov}_t^Q(x_T))(\mathbf{1})$$

Luego, a partir de la ecuación 2.3, los momentos condicionales de x_T son:

$$\mathbb{E}_t(x_T) = e^{-K(T-t)} x_t - \left(\int_0^{T-t} e^{-K\tau} d\tau \right) \lambda \quad (3.3)$$

$$\text{Cov}_t(x_T) = \int_0^{T-t} e^{-K\tau} \Sigma \Theta \Sigma' (e^{-K\tau})' d\tau \quad (3.4)$$

donde

$$\Theta dt = (dw_t)(dw_t')$$

Por lo tanto, al aplicar la medida de probabilidad ajustada por riesgo se tiene:

$$\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}(x_i(T)) = \begin{cases} x_1(t) - \lambda_1(T-t) & i = 1 \\ e^{-k_i(T-t)}x_i(t) - \frac{1-e^{-k_i(T-t)}}{k_i}\lambda_i & i = 2, \dots, N \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\text{Cov}_t^{\mathbb{Q}}(x_i(T), x_j(T)) = \begin{cases} \sigma_1^2(T-t) & i = 1, j = 1 \\ \sigma_i\sigma_j\rho_{ij} \frac{1-e^{-(k_i+k_j)(T-t)}}{k_i+k_j} & i \neq 1, j \neq 1 \end{cases} \quad (3.6)$$

Finalmente, obtenemos la fórmula de valorización de un contrato futuro para el modelo Cortázar y Naranjo al reemplazar las ecuaciones 3.5 y 3.6 en la ecuación 3.2, lo que resulta en:

$$F(x_t, t, T) = \exp(x_1(t) + \sum_{i=2}^N e^{-k_i(T-t)}x_i(t) + \mu t + (\mu - \lambda_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2)(T-t) - \sum_{i=2}^N \frac{1-e^{-k_i(T-t)}}{k_i}\lambda_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j \neq 1} \sigma_i\sigma_j\rho_{ij} \frac{1-e^{-(k_i+k_j)(T-t)}}{k_i+k_j}) \quad (3.7)$$

Este resultado es conocido en la valorización de contratos futuros en el caso de que el precio spot siga un proceso browniano geométrico.

3.3 Estructura de Volatilidad de un Futuro para Modelo Cortázar y Naranjo

La estructura de volatilidad de los retornos de un contrato futuro se obtiene a partir de la fórmula de valorización de un contrato futuro para el modelo Cortázar y Naranjo y la ecuación 2.2.

$$\sigma_F^2(t, T) = \sigma_1^2 + \sum_{i,j \neq 1}^N \sigma_i\sigma_j\rho_{ij}e^{-(k_i+k_j)(T-t)} \quad (3.8)$$

Cabe señalar que la volatilidad de los retornos de los futuros converge a σ_1^2 cuando la madurez de estos tiende a infinito. Esto es:

$$\sigma_F^2(t, \infty) = \sigma_1^2 \quad (3.9)$$

4. CÁLCULO DE VARIABLES DE ESTADO Y PARÁMETROS USANDO EL FILTRO DE KALMAN

En este capítulo se describe la aplicación del filtro de Kalman para calibrar el modelo, usando observaciones diarias del precio de contratos futuros escritos sobre los *commodities* de interés. Estas observaciones construyen un panel de datos incompleto, donde no necesariamente existe el mismo tipo de transacciones ni plazos para cada día del período de valorización.

Esto representa un tema importante en la aplicación del filtro, pues muchos trabajos consideran solo aquellos contratos con vencimientos en los cuales se tengan observaciones todos los días. Por ende, en esta tesis se utiliza toda la información disponible hasta el momento de la estimación, lo que incluye la presencia de futuros cuyos plazos se transan con menos frecuencia, o que han sido incorporados recientemente al mercado.

Así, el método de resolución del filtro de Kalman permite estimar el nivel de las variables de estado del modelo. Se destaca la existencia de una relación lineal entre estas variables y el logaritmo del precio teórico de un futuro.

4.1 Descripción del Filtro de Kalman

El filtro de Kalman es una metodología de estimación que calcula recursivamente el valor de las variables de estado o no observables, usando variables observables que pueden tener cierto error de medición.

4.1.1 Espacio de Estados

El filtro puede ser aplicado en modelos dinámicos que estén representados en el espacio de estados. Allí, la ecuación de medida relaciona de forma lineal el vector de variables observables z_t de dimensión $m \times 1$ con el vector de variables de estado x_t de dimensión $n \times 1$:

$$z_t = H_t x_t + d_t + v_t, \quad v_t \sim \mathcal{N}(0, R_t) \quad (4.1)$$

La matriz H_t es un operador lineal de dimensión $m \times n$. El vector d_t es de dimensión $m \times 1$, al igual que el vector v_t , que es una variable aleatoria con media 0 y matriz de covarianza R_t con dimensión $m \times m$. El vector v_t representa el error de medición de las variables observables. De igual manera, existe una ecuación de transición, que representa el proceso estocástico que siguen las variables de estado en el tiempo:

$$x_t = A_t x_{t-1} + c_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, Q_t) \quad (4.2)$$

La matriz A_t es un operador lineal de dimensión $n \times n$ que relaciona el nuevo estado x_t con el estado anterior x_{t-1} . El vector c_t es de dimensión $n \times 1$, al igual que el vector ε_t , que es una variable aleatoria con media 0 y matriz de covarianza Q_t con dimensión $n \times n$. El vector ε_t representa la incertidumbre de las variables de estado.

4.1.2 Estimación Óptima del Vector de Variables de Estado

En esta sección, se busca encontrar un estimador del vector de variables no observables. El objetivo de este es minimizar el valor esperado del error cuadrático entre el vector mencionado y su estimación. Sea $\hat{x}_t$ el estimador de x_t y P_t su matriz de error de varianza-covarianza, se define:

$$\hat{x}_t = \mathbb{E}_t(x_T) \quad (4.3)$$

$$P_t = \mathbb{E}_t(x_T - \hat{x}_t)(x_T - \hat{x}_t)' \quad (4.4)$$

Luego, el filtro de Kalman usa recursivamente la estimación de $\hat{x}_{t-1}$ y P_{t-1} para predecir el valor $\hat{x}_t$ y P_t . Esto se denomina etapa de predicción, donde:

$$\hat{x}_{t|t-1} = A_t \hat{x}_{t-1} + c_t \quad (4.5)$$

$$P_{t|t-1} = A_t P_{t-1} A_t' + Q_t \quad (4.6)$$

Esto permite predecir el valor de las variables observables:

$$\hat{z}_{t|t-1} = H_t \hat{x}_{t|t-1} + d_t \quad (4.7)$$

A continuación, se pasa a la etapa de actualización, donde se estima el valor del vector de estados:

$$\hat{x}_t = \hat{x}_{t|t-1} + P_{t|t-1} H_t' F_t^{-1} (z_t - \hat{z}_{t|t-1}) \quad (4.8)$$

$$P_t = P_{t|t-1} - P_{t|t-1} H_t' F_t^{-1} H_t P_{t|t-1} \quad (4.9)$$

donde:

$$F_t = H_t P_{t|t-1} H_t' + R_t$$

A partir de estas ecuaciones, se observa que la estimación del vector de estado es un promedio entre las transacciones ocurridas en t y la historia contenida en el período anterior por $\hat{x}_{t|t-1}$. Además, F_t representa la varianza de la predicción de las innovaciones, definidas como el cambio en los precios observados para un día respecto a la curva de futuros teórica del día anterior.

4.2 Estimación de Parámetros

La estimación de los parámetros del modelo se logra maximizando la función de máxima verosimilitud:

$$\log L(\Psi) = -\frac{1}{2} \sum_t \log |F_t| - \frac{1}{2} \sum_t (z_t - \hat{z}_{t|t-1})' F_t^{-1} (z_t - \hat{z}_{t|t-1}) \quad (4.10)$$

donde Ψ es el vector de parámetros a estimar y está compuesto por las variables $\mu, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, k_1, k_2, k_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{21}, \rho_{22}, \rho_{23}, \rho_{31}, \rho_{32}$ y ρ_{33} .

Para lograrlo, la empresa dispone de 2 métodos de optimización. El primero es un algoritmo de optimización sin restricciones que utiliza el método de Nelder-Mead. Se trata de una variación del método de simplex que permite trabajar en un espacio n-dimensional de forma heurística sin calcular derivadas en cada iteración, lo que permite agilizar el tiempo de optimización. En RiskAmerica, se recomienda comenzar la optimización con este algoritmo, para luego pasar a un segundo método.

Este método es un algoritmo de optimización que utiliza el método L-BFGS-B. Este corresponde a un método muy eficiente de actualización quasi-newton que aproxima el algoritmo de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno, al limitar el uso de memoria computacional lo cual es útil dado el alto número de contratos futuros transados diariamente. El método encuentra una dirección de descenso mejorando gradualmente la aproximación del inverso de la matriz Hessiana, gracias a evaluaciones de gradiente mediante un método secante.

5. TRANSACCIONES DE FUTUROS

En esta sección se describen los datos utilizados en la calibración de los modelos. Estos corresponden al precio de transacciones de contratos futuros en un período entre enero del 2018 y la última fecha del período *out-of-sample* del *commodity* en cuestión. Como se ha mencionado, se utilizó todo el panel de datos disponibles.

5.1 Contratos Futuros de Petróleo WTI

Las observaciones de contratos futuros de petróleo WTI corresponden a transacciones en la *New York Mercantile Exchange* (NYMEX). Estas se transan a un plazo máximo de 10 años.

En la tabla V-1 se presenta una caracterización de los datos ordenados por *bucket*. Este último representa un intervalo de duración de contratos futuros. Por ejemplo, el *bucket* de 0 a 1 años incluye a aquellos derivados con vencimiento a 30, 60, 90, 120, 150, 180, 210, 240, 270, 300, 330 y 360 días.

Tabla V-1: Caracterización de contratos futuros de petróleo WTI en función de la madurez del *bucket*.

Madurez <i>bucket</i> (años)	Precio promedio (USD)	Desviación estándar precio	Madurez promedio (años)	Precio mínimo (USD)	Precio máximo (USD)	Nº de observaciones
0-1	55,5	10,6	0,5	11,6	76,4	10.865
1-2	53,5	7,9	1,5	30,6	73,5	10.866
2-3	52,1	6,2	2,5	34,3	69,0	10.866

3-4	51,4	4,9	3,5	37,0	65,2	10.864
4-5	51,2	4,1	4,5	39,0	62,5	10.865
5-6	51,3	3,5	5,5	40,4	60,7	10.851
6-7	51,5	3,1	6,5	41,2	59,8	10.753
7-8	51,9	2,8	7,5	41,9	59,6	10.747
8-9	52,0	2,6	8,5	42,1	59,8	9.668
9-10	51,9	2,6	9,4	42,3	57,2	5.989
Total	52,3	5,7	1.727,4	11,6	76,4	102.334

5.2 Contratos Futuros de Cobre

Las observaciones de contratos futuros de cobre corresponden a transacciones en la *New York Commodity Exchange* (COMEX). Estas se transan a un plazo máximo de 5 años y medio. Además, en la tabla V-2 se presenta una caracterización de los datos ordenados por la madurez del *bucket*.

Tabla V-2: Caracterización de contratos futuros de cobre en función de la madurez del *bucket*.

Madurez <i>bucket</i> (años)	Precio promedio (USD)	Desviación estándar precio	Madurez promedio (años)	Precio mínimo (USD)	Precio máximo (USD)	Nº de observaciones
0-1	3,11	0,62	0,5	2,15	4,78	10.985
1-2	3,14	0,59	1,5	2,18	4,75	10.987
2-3	3,14	0,57	2,5	2,22	4,68	4.595
3-4	3,15	0,56	3,5	2,24	4,64	4.581
4-5	3,16	0,57	4,5	2,28	4,65	4.580
5-6	3,92	0,51	5,1	2,48	4,64	338

Total	3,14	0,59	2,0	2,15	4,64	36.066
--------------	-------------	-------------	------------	-------------	-------------	---------------

5.3 Contratos Futuros de Oro

Las observaciones de contratos futuros de oro corresponden a transacciones en la *New York Commodity Exchange* (COMEX). Estas se transan a un plazo máximo de 6 años. Además, en la tabla V-3 se presenta una caracterización de los datos ordenados por la madurez del *bucket*.

Tabla V-3: Caracterización de contratos futuros de oro en función de la madurez del *bucket*.

Madurez <i>bucket</i> (años)	Precio promedio (USD)	Desviación estándar precio	Madurez promedio (años)	Precio mínimo (USD)	Precio máximo (USD)	Nº de observaciones
0-1	1.554,3	248,0	155,8	1.176,2	2.097,0	6.847
1-2	1.581,5	240,1	538,2	1.206,8	2.122,7	5.213
2-3	1.607,5	233,5	915,1	1.258,0	2.141,0	1.836
3-4	1.635,9	230,2	1.280,2	1.297,6	2.159,8	1.835
4-5	1.664,9	227,1	1.645,4	1.335,4	2.177,7	1.836
5-6	1.690,6	220,7	2.010,4	1.373,2	2.195,8	1.838
Total	1.597,7	243,2	753,3	1.176,2	2.195,8	19.405

6. RESULTADOS

En esta sección se presentan los resultados de la estimación de precios futuros para 3 *commodities*; petróleo, cobre y oro. Se utilizó el modelo de Cortázar y Naranjo, descrito en el capítulo 2, calibrado mediante un filtro de Kalman, presentado en el capítulo 4. El filtro calculó el nivel de las variables de estado del modelo no-estacionario de 3 factores. Por otro lado, la estimación de los parámetros se realizó con 2 algoritmos de optimización, maximizando la función de verosimilitud de las innovaciones de los precios futuros.

En la siguiente sección, se exhiben los resultados de la estimación de precios futuros desarrollada por el alumno (etiqueta ‘Estimación’), en comparación al modelo existente de RiskAmerica en ese momento (etiqueta ‘Sitio’). Como se ha mencionado, el principal objetivo es mejorar el ajuste del modelo a los precios futuros, por lo que los resultados se enfocan en evidenciar analíticamente la mejora en la calibración del modelo.

También se evaluará el ajuste del modelo, mediante la volatilidad de la curva de precios futuros, a la estructura de volatilidad de los contratos futuros, definida como la curva de la volatilidad de los retornos de futuros para cada madurez. Cabe destacar el uso de herramientas estadísticas de error; el *mean absolute percentage error* (MAPE) y el *mean percentage error* (MPE). El primero, es el promedio del error absoluto entre el valor observado, o real, y el valor estimado, dividido por el valor observado. El segundo es el promedio de la diferencia entre el valor observado y el valor estimado, dividido por el valor observado.

6.1 Resultados para el Petróleo

6.1.1 Estimación de Parámetros

En esta sección se presentan los resultados de la estimación de los parámetros estructurales del modelo de precios del petróleo. Esta calibración se logró gracias a la iteración del algoritmo con el método Nelder-Mead y la información proveniente de un panel incompleto de datos con variación continua en el tiempo.

Es posible observar que el parámetro de reversión a la media k_1 toma el valor de cero. Esto se explica por la existencia de un modelo no-estacionario, donde el parámetro μ indica la tasa de crecimiento constante del precio spot. Para el resto de las variables de estado, si existen parámetros con reversión a la media.

Tabla VI-1: Parámetros estimados del modelo no estacionario de 3 factores para el petróleo WTI.

Parámetro	Valor
μ	-0,01477
λ_1	0,08668
λ_2	0,43817
λ_3	0,12227
k_1	0,00000
k_2	0,56887
k_3	0,09352

σ_1	0,63805
σ_2	1,08862
σ_3	1,03072
ρ_{21}	0,00004
ρ_{31}	0,01911
ρ_{32}	-0,61221

6.1.2 Ajuste a Transacciones In-Sample

En el análisis de los modelos es relevante separar el período de tiempo utilizado en un intervalo dentro de la muestra (*in-sample*) y otro fuera de la muestra (*out-of-sample*). El primero se utiliza para estimar los parámetros del modelo y el segundo para evaluar el ajuste de esta estimación usando transacciones reales.

Para el caso del petróleo, se seleccionó como *in-sample* el período entre el 3 de enero de 2018 y el 5 de enero de 2021. El *out-of-sample* se definió entre el 5 de enero de 2021 y el 28 de septiembre de 2021. En la tabla VI-2 se muestra el MPE y el MAPE, en el período dentro de la muestra, de la estimación desarrollada por el alumno (Estimación) y el modelo del sitio web de Riskamerica (Sitio).

Tabla VI-2: MPE y MAPE del ajuste de los modelos a los precios de futuros de petróleo WTI en período dentro de la muestra.

	MPE	MAPE
Estimación	0,029%	0,570%
Sitio	-0,008%	0,757%

Estos resultados señalan que la estimación del alumno presenta menor error absoluto (MAPE) que el sitio, reduciéndolo en un 24,7%. No obstante, se identifica un mayor sesgo global del modelo, representado por el MPE. En la figura 6-1, se muestra la distribución del MPE y MAPE por *bucket*.

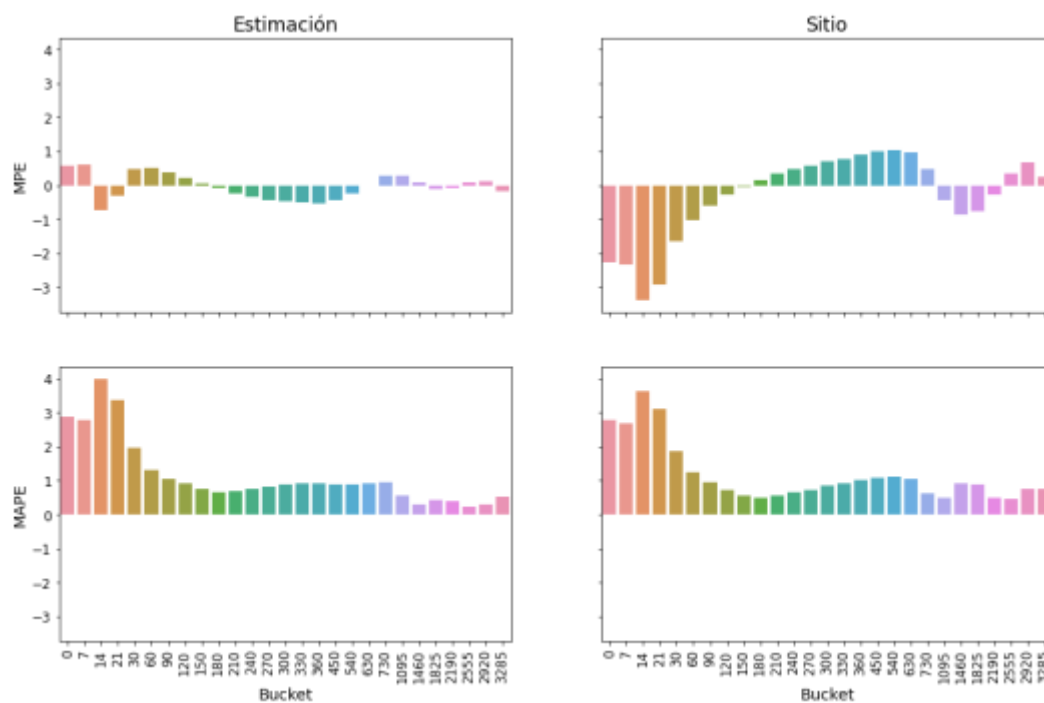


Figura 6-1: Distribución del MPE y MAPE por *bucket* de los modelos para el petróleo en período dentro de la muestra.

En ella, se observa un comportamiento similar a nivel de error absoluto entre la estimación y el sitio, a excepción de una leve mejora en el ajuste de los contratos futuros con vencimiento en el mediano y largo plazo. A nivel de error porcentual o MPE, se identifica una mejora sustancial de la estimación en todos los plazos del modelo. Esto genera una contradicción respecto a la información provista por la tabla IV-2.

Sin embargo, al examinar la dispersión del MPE de la figura 6-2, se percibe una mayor presencia de datos por debajo del percentil 25 o primer cuartil en el modelo ‘Estimación’. Estos *outliers*, situados en transacciones de corto plazo menores a 30 días, podrían explicar el mayor sesgo global de la estimación en comparación al sitio, al igual que la mayor dispersión entre la media, y su primer y tercer cuartil del modelo en cuestión.

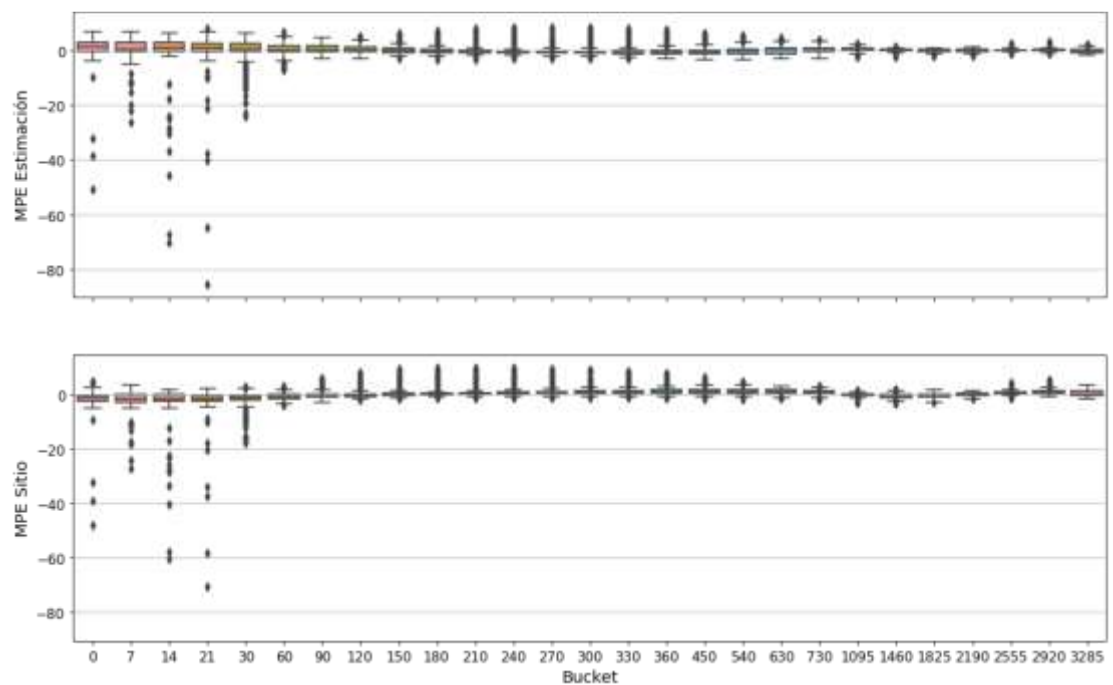


Figura 6-2: Dispersión del MPE por *bucket* de los modelos para el petróleo en período dentro de la muestra.

6.1.3 Ajuste a Transacciones Out-Of-Sample

El período *out-of-sample* se definió entre el 5 de enero de 2021 y el 28 de septiembre de 2021. La tabla VI-3 expone el valor del MPE y el MAPE global de los modelos al ajuste de los precios futuros de petróleo en el período fuera de la muestra.

Tabla VI-3: MPE y MAPE del ajuste de los modelos a los precios de futuros de petróleo WTI en período fuera de la muestra.

	MPE	MAPE
Estimación	0,181%	0,675%
Sitio	0,033%	1,181%

Al igual que los resultados del período dentro de la muestra, se tiene que la estimación presenta menor error absoluto que el sitio, pero un mayor sesgo global del modelo. Sumado a este resultado, la figura 6-3 evidencia una clara mejora en la estabilidad del error absoluto de la estimación por sobre el sitio, donde existe un error relativamente bajo y constante en todos los *buckets*.

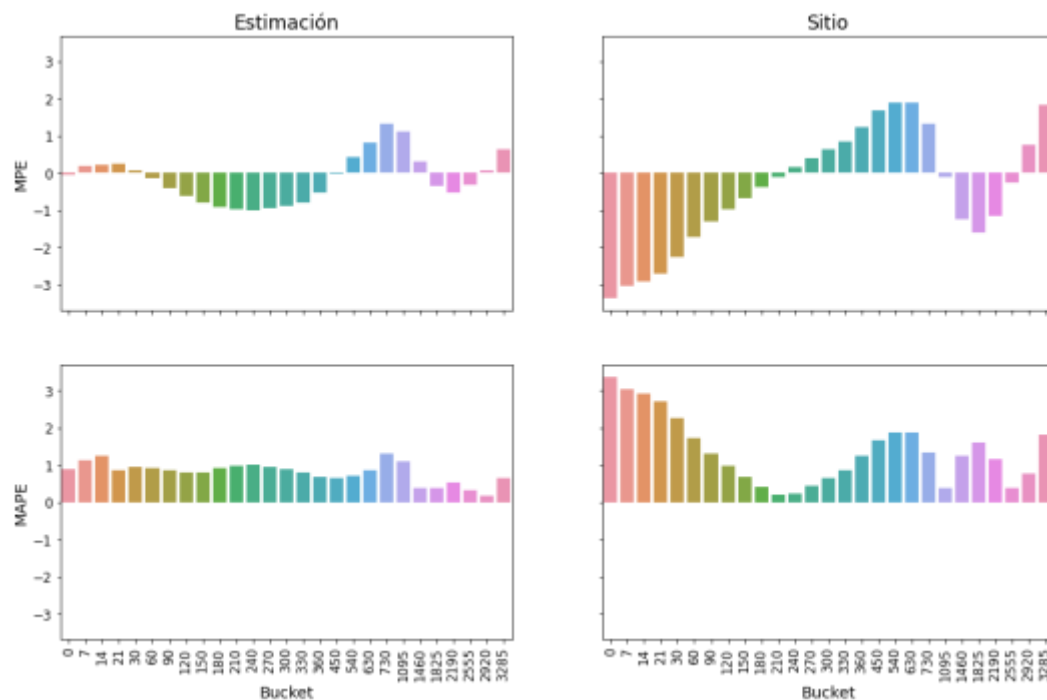


Figura 6-3: Distribución del MPE y MAPE por *bucket* de los modelos para el petróleo en período fuera de la muestra.

Además, la dispersión del MPE por *bucket* exhibida en la figura 6-4, muestra que la media del modelo de la estimación está más centrada en cero que el ajuste del sitio. Se aprecia el mismo efecto para los percentiles 25 y 75, y más aún, se reduce considerablemente la cantidad de *outliers* por debajo del primer cuartil.

En este caso, el mayor sesgo global de la estimación en comparación al sitio podría explicarse por la mayor dispersión entre la media, y su primer y tercer cuartil, para el modelo de la estimación.

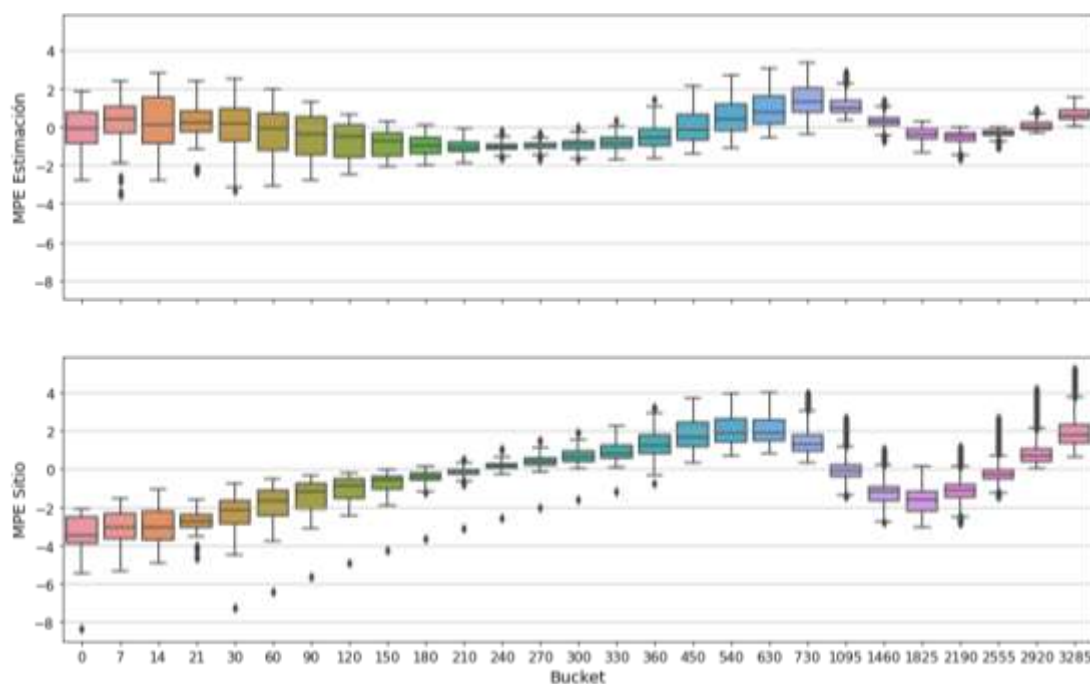


Figura 6-4: Dispersión del MPE por *bucket* de los modelos para el petróleo en período fuera de la muestra.

6.1.4 Ajuste a la Estructura de Volatilidad

Resulta relevante que la estimación del modelo, representada por la volatilidad de la curva de precios futuros, represente de buena forma la estructura de volatilidad de los contratos futuros, es decir, la curva de la volatilidad de los retornos de estos datos para cada madurez. La volatilidad de la curva de la estimación de precios futuros hace referencia a la desviación estándar, para todos los plazos, de los retornos lognormales anualizados de estos precios. Este análisis es importante por la fuerte influencia de la volatilidad en la valorización de derivados financieros.

Las figuras 6-5 y 6-6 muestran la estructura de volatilidad de la curva de precios futuros dentro y fuera de la muestra. Ambos modelos presentan un buen ajuste a la estructura de volatilidad de las transacciones. De manera particular, se aprecia que la estimación subestima ligeramente la volatilidad de corto plazo en todo el período, pero dicho desajuste no es lo suficientemente fuerte como para descartar el modelo.

De manera más general, se observa que la volatilidad de los contratos futuros de más largo plazo es menor que aquellos futuros con plazos menores. Esto muestra que la estructura de volatilidad es decreciente al vencimiento de los contratos futuros, lo que puede explicarse por la reversión a la media en los precios del *commodity*.

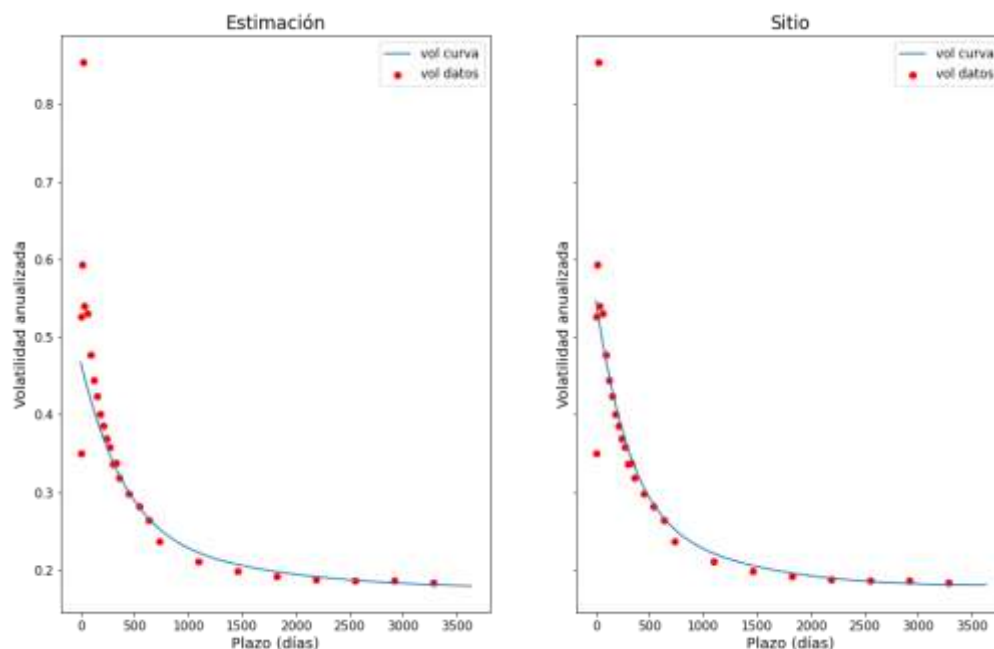


Figura 6-5: Ajuste a la estructura de volatilidad de modelos para el petróleo en período dentro de la muestra.

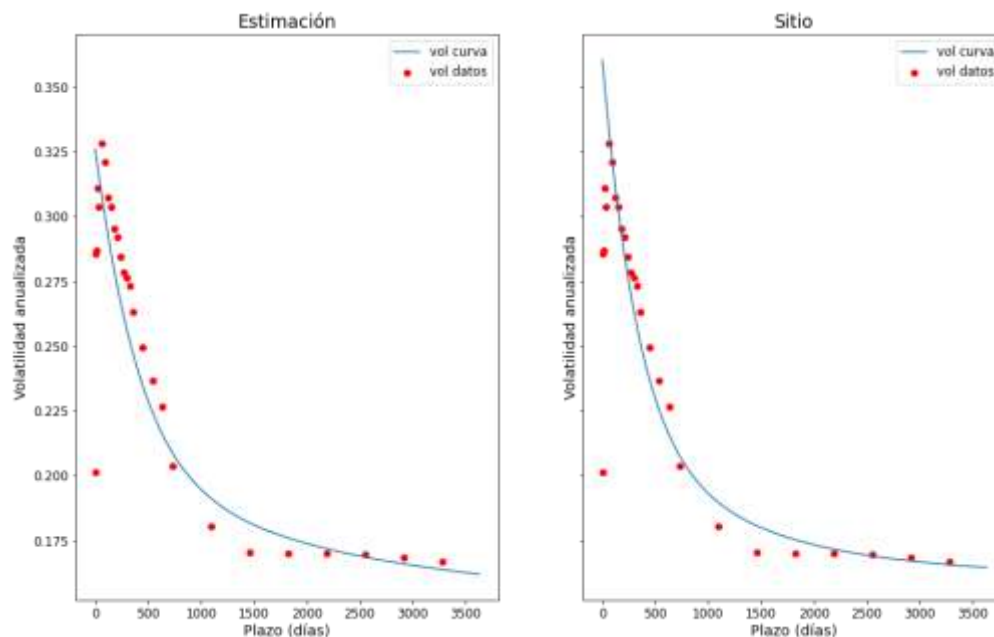


Figura 6-6: Ajuste a la estructura de volatilidad de modelos para el petróleo en período fuera de la muestra.

6.1.5 Conclusiones preliminares para el Petróleo

En base a los resultados descritos anteriormente, se destaca que el modelo de la estimación efectivamente permite mejorar el cálculo de precios futuros realizado por el sitio. El principal sustento es la importante reducción del error absoluto de los modelos tanto dentro como fuera del período de la muestra, pasando de un 0,757% a un 0,570% y de un 1,181% a un 0,675% respectivamente. Además, se aprecia un buen ajuste del modelo a la estructura de volatilidad de los contratos futuros y un sesgo, que si bien es mayor al sitio, permite reducir la cantidad de datos *outliers* en el período fuera de la muestra.

Finalmente, en la figura 6-7 se muestran las transacciones y las curvas de precios futuros para la estimación y el sitio en el último día del período *out-of-sample*. Esta fecha corresponde al día previo a subir los parámetros y variables de estado del modelo desarrollado por el alumno al sitio oficial de RiskAmerica. En el gráfico, es posible distinguir un mejor ajuste de la curva de precios futuros de la estimación respecto a las transacciones reales. Este efecto se aprecia en todos los plazos y contribuye a justificar la calibración del modelo de precios futuros del petróleo WTI. Cabe destacar que este análisis se efectuó para todas las fechas del período para estudiar el comportamiento temporal del modelo.

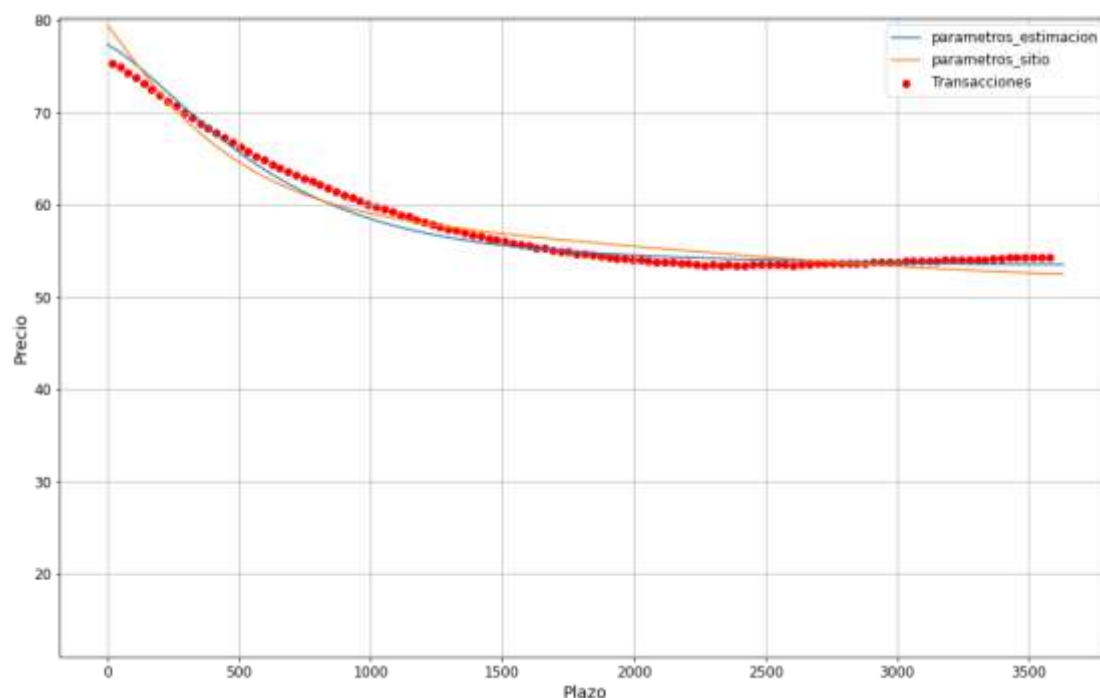


Figura 6-7: Transacciones y curva de precios futuros de petróleo WTI al día

28/09/2021.

6.2 Resultados para el Cobre

6.2.1 Estimación de Parámetros

En la tabla VI-4 se exhiben los resultados de la estimación de los parámetros estructurales del modelo de precios del cobre. Los parámetros fueron calculados gracias a la iteración del algoritmo con el método L-BFGS-B y la información del panel incompleto de datos. Además, al ser un modelo de precios no estacionario, se tiene que k_1 es cero, mientras que para el resto de las variables de estado los parámetros con reversión a la media son distintos de cero.

Tabla VI-4: Parámetros estimados del modelo no estacionario de 3 factores para el cobre.

Parámetro	Valor
μ	1,44823
λ_1	1,43661
λ_2	-2,13824
λ_3	0,47117
k_1	0,00000
k_2	0,20487
k_3	0,75612
σ_1	0,22371
σ_2	0,65607
σ_3	0,07053
ρ_{21}	0,24459

ρ_{31}	0,50722
ρ_{32}	0,11646

6.2.2 Ajuste a Transacciones In-Sample

Para la estimación de precios futuros de cobre se utilizó como intervalo dentro de la muestra el período entre el 3 de enero de 2018 y el 5 de enero de 2021, mientras que fuera de la muestra el período entre el 5 de enero de 2021 y el 19 de octubre de 2021.

En la tabla VI-5 se presenta el MPE y el MAPE, en el período dentro de la muestra, de la estimación desarrollada por el alumno (Estimación) y el modelo presente en el sitio web de RiskAmerica (Sitio).

Tabla VI-5: MPE y MAPE del ajuste de los modelos a los precios de futuros de cobre en período dentro de la muestra.

	MPE	MAPE
Estimación	-0,0006%	0,0989%
Sitio	0,0241%	0,1500%

La estimación del alumno posee resultados muy robustos, dado que presenta menos error porcentual (MPE) y error absoluto (MAPE) que el sitio. En cuanto a MPE, se pasa de 0,0241% a tan solo -0,0006%, mientras que en MAPE se reduce el error absoluto en un 34%. Estos resultados se confirman al examinar la figura 6-8, que muestra la distribución del MPE y MAPE por *bucket*.

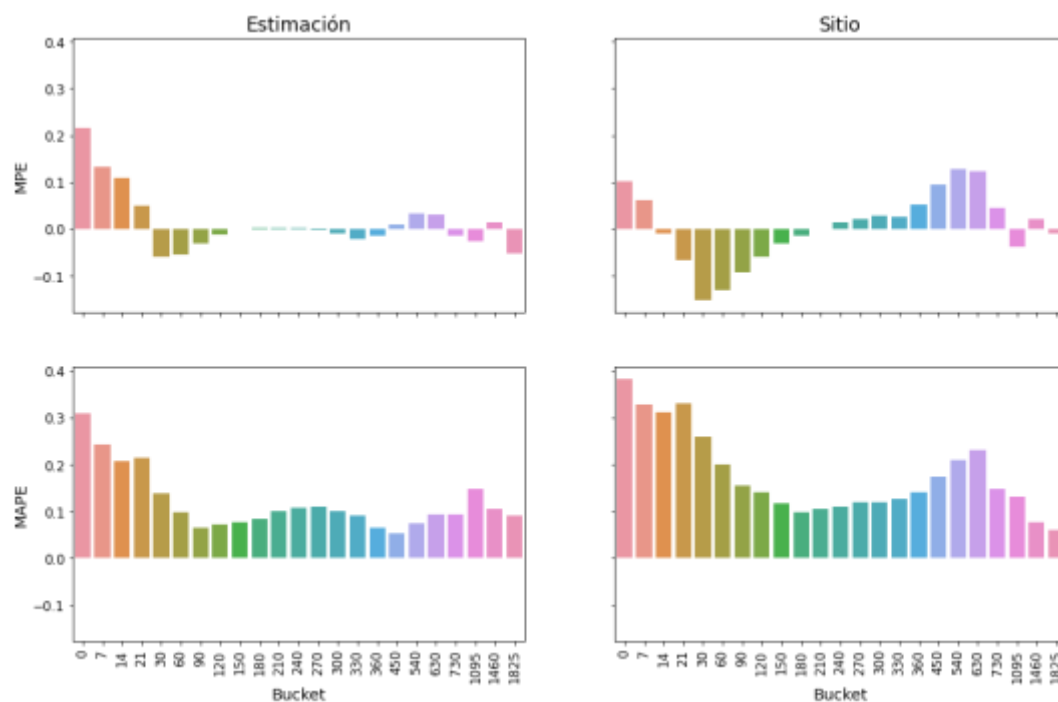


Figura 6-8: Distribución del MPE y MAPE por *bucket* de los modelos para el cobre en período dentro de la muestra.

La distribución muestra una mejora generalizada de la estimación por sobre el sitio, a excepción del error porcentual en los futuros de muy corto plazo. Además, al observar la dispersión del MPE por *bucket* de la figura 6-9, se tiene que la media de la estimación, y sus percentiles 25 y 75, están muy centrados en cero y menos dispersos. Igualmente, existe una reducción significativa de la cantidad de *outliers* por sobre y debajo de la media en todos los plazos.

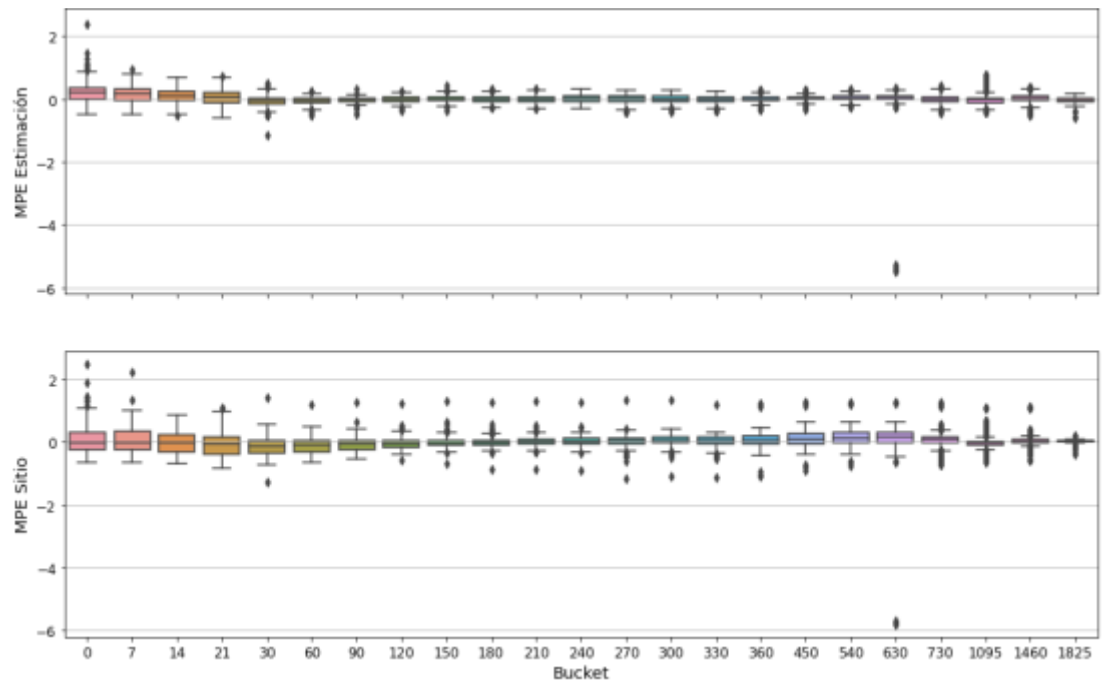


Figura 6-9: Dispersión del MPE por *bucket* de los modelos para el cobre en período dentro de la muestra.

6.2.3 Ajuste a Transacciones Out-Of-Sample

El período fuera de la muestra se estableció entre el 5 de enero de 2021 y el 19 de octubre de 2021. Luego, la tabla VI-6 contiene el valor del MPE y el MAPE global de los modelos al ajuste de los precios futuros de cobre en este período.

Tabla VI-6: MPE y MAPE del ajuste de los modelos a los precios de futuros de cobre en período fuera de la muestra.

	MPE	MAPE
Estimación	0,006%	0,2658%
Sitio	0,072%	0,2659%

Se evidencia que el error porcentual de la estimación sigue siendo ampliamente superior al MPE del sitio. No obstante, el error absoluto es muy parecido en ambos modelos. Consecuentemente, la figura 6-10 corrobora esta similitud en cuanto a MAPE, donde por cierto la estimación posee una pequeña mejora en el ajuste de precios de futuros de corto plazo, contrarrestada por un menor ajuste en los futuros de largo plazo.

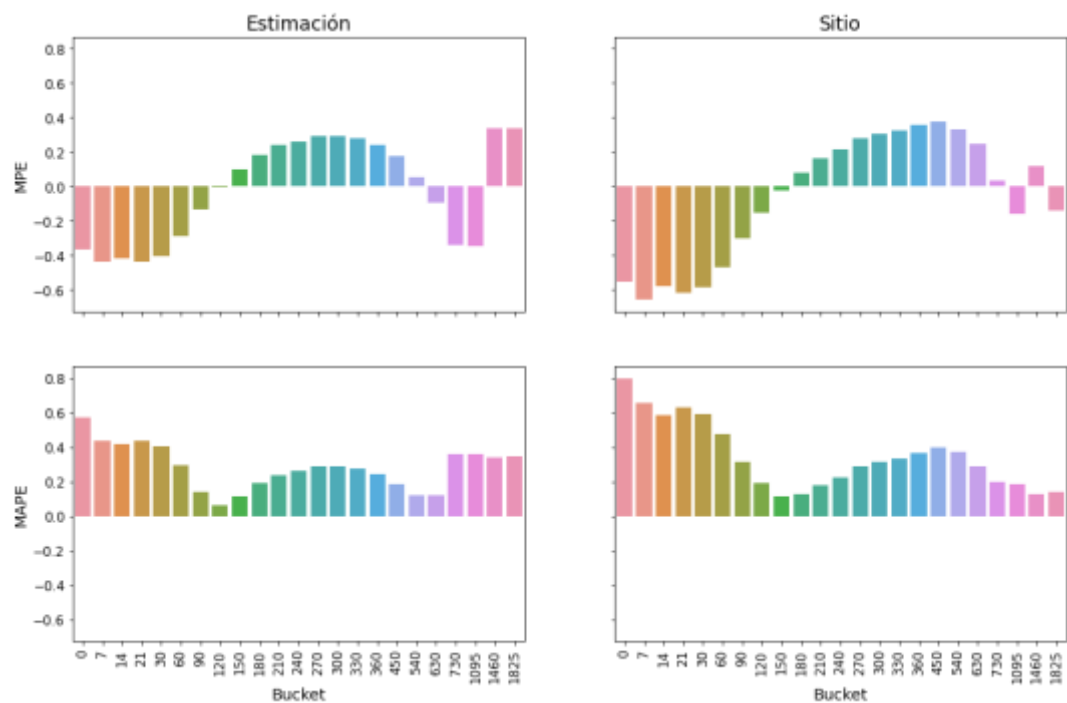


Figura 6-10: Distribución del MPE y MAPE por *bucket* de los modelos para el cobre en período fuera de la muestra.

Finalmente, la dispersión del MPE por *bucket* de la figura 6-11 exhibe resultados análogos en el posicionamiento de la media de los modelos, y sus respectivos primer

y tercer cuartil. Aun así, al igual que en el período *in-sample*, la estimación brinda una reducción significativa de la cantidad de *outliers* por sobre y debajo de la media en todos los plazos, al igual que una menor dispersión del MPE por *bucket*.

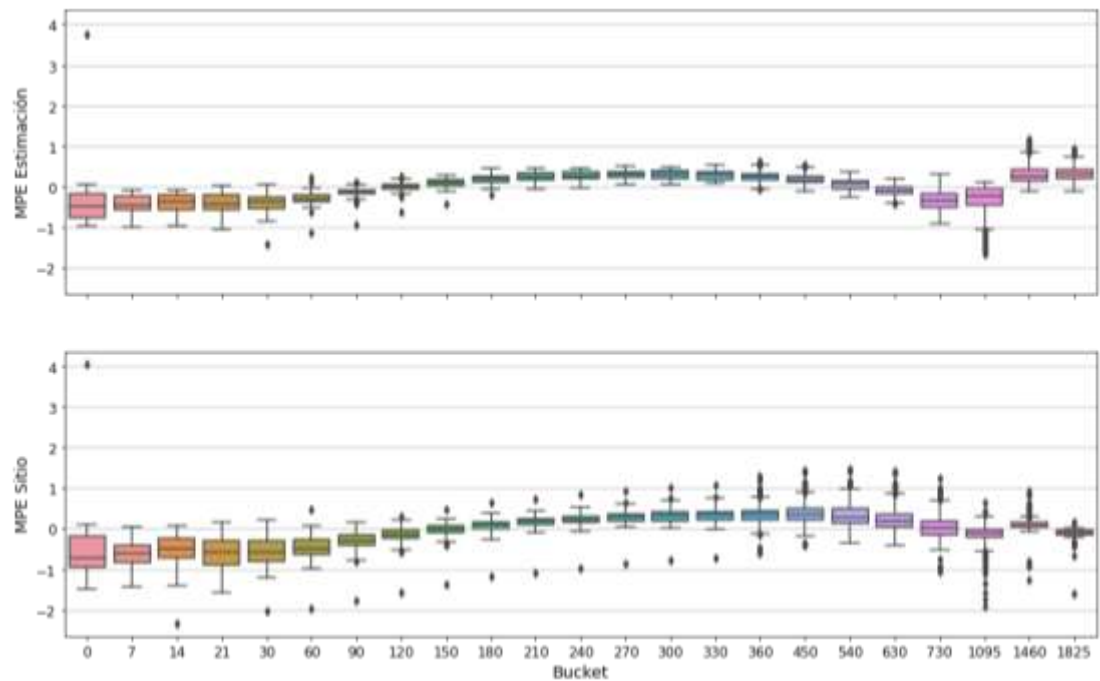


Figura 6-11: Dispersión del MPE por *bucket* de los modelos para el cobre en período fuera de la muestra.

6.2.4 Ajuste a la Estructura de Volatilidad

Las figuras 6-12 y 6-13 señalan la estructura de volatilidad de la curva de los precios futuros estimados de los modelos, es decir, la desviación estándar de los retornos lognormales anualizados de estos precios.

En el período *in-sample*, es claro que la estimación presenta un excelente ajuste a la estructura de volatilidad de las transacciones en todos los plazos. En contraste, el sitio sobreestima la volatilidad en todos los contratos con vencimiento mayor a 200 días.

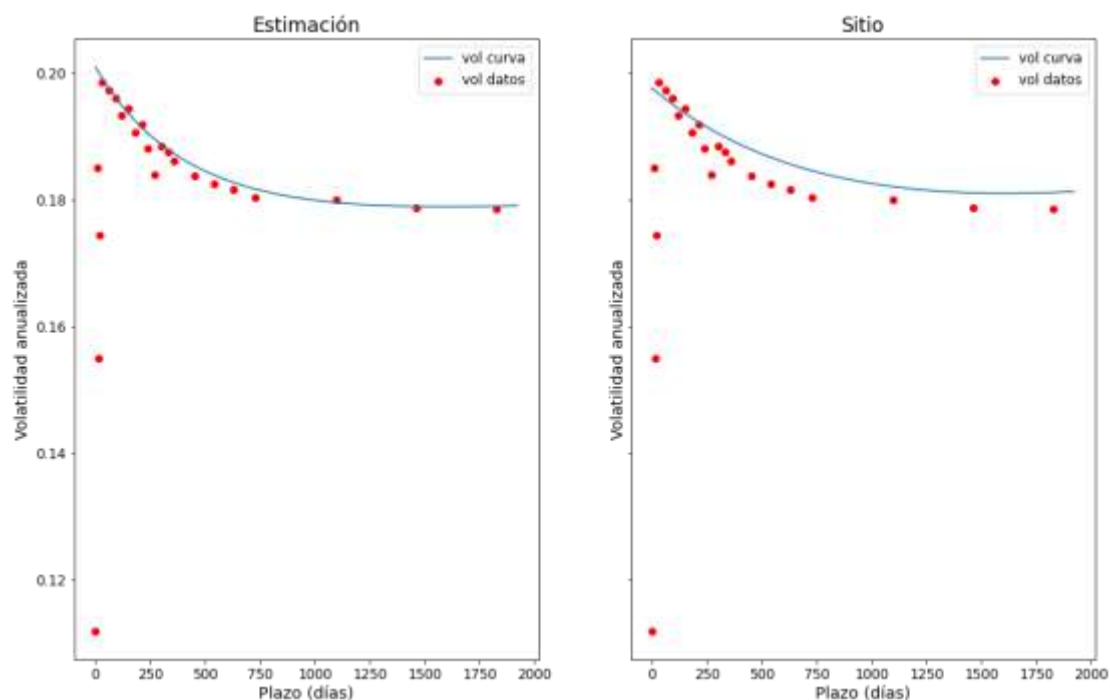


Figura 6-12: Ajuste a la estructura de volatilidad de modelos para el cobre en período dentro de la muestra.

Posteriormente, en el período *out-of-sample*, se tiene que la estimación perfecciona el ajuste a la estructura de volatilidad de las transacciones hasta 500 días de plazo. Después de este punto, la estimación muestra ser ligeramente más estable en su nivel de volatilidad que el sitio, cuya curva de volatilidad tiene mayor convexidad.

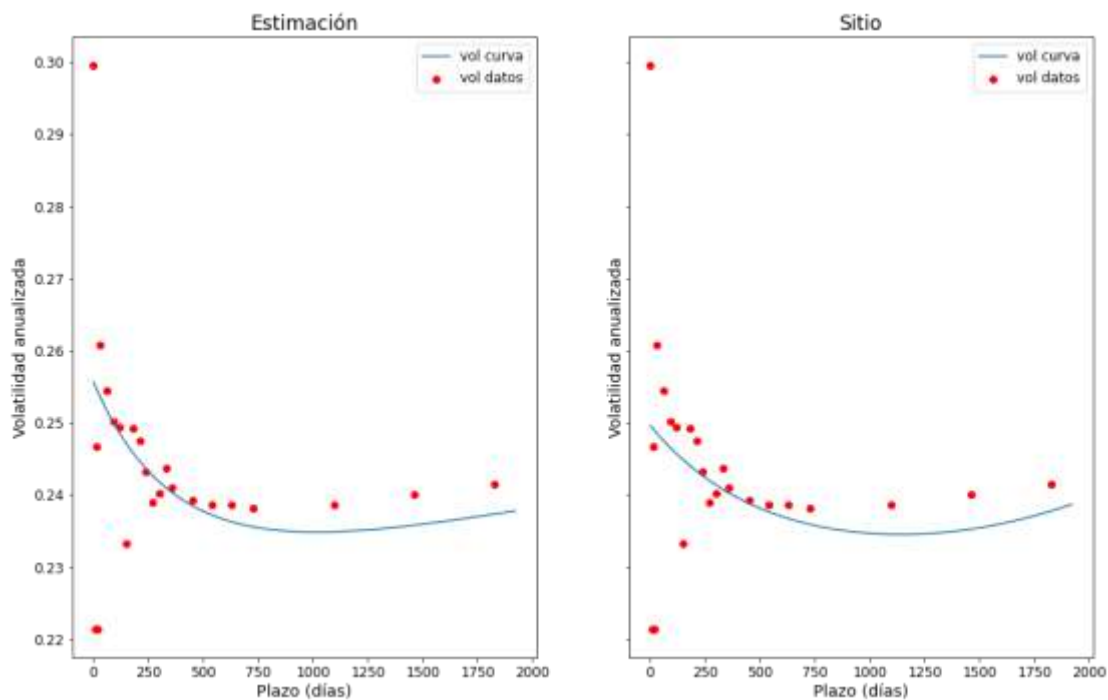


Figura 6-13: Ajuste a la estructura de volatilidad de modelos para el cobre en período fuera de la muestra.

6.2.5 Conclusiones preliminares para el Cobre

Considerando los resultados para el cobre presentados anteriormente, se concluye que el ajuste de la estimación realizada por el alumno permite mejorar el cálculo de precios de futuros, sustentado por un excelente MAE y MAPE en el período *in-sample* y un contundente ajuste a la estructura de volatilidad de las transacciones.

El error porcentual y absoluto mostrado por la estimación en el período dentro de la muestra, es tan robusto que compensa el menor desempeño del MAPE en el período

fuera de la muestra. Igualmente, la dispersión del MPE en todo el periodo del tiempo denota una reducción significativa por parte de la estimación en la cantidad de *outliers* por sobre y debajo de la media en todos los plazos.

Para terminar, en la figura 6-14 se muestran las transacciones y las curvas de precios futuros de la estimación y el sitio en el último día del *out-of-sample*. Al igual que el petróleo, dicha fecha corresponde al día previo a la actualización del modelo oficial de RiskAmerica por los parámetros y variables de estado calculadas por el alumno. El gráfico denota una mayor estabilidad de la curva de precios, y a diferencia del sitio, evita una sobreestimación del precio del cobre en los contratos de mayor plazo.

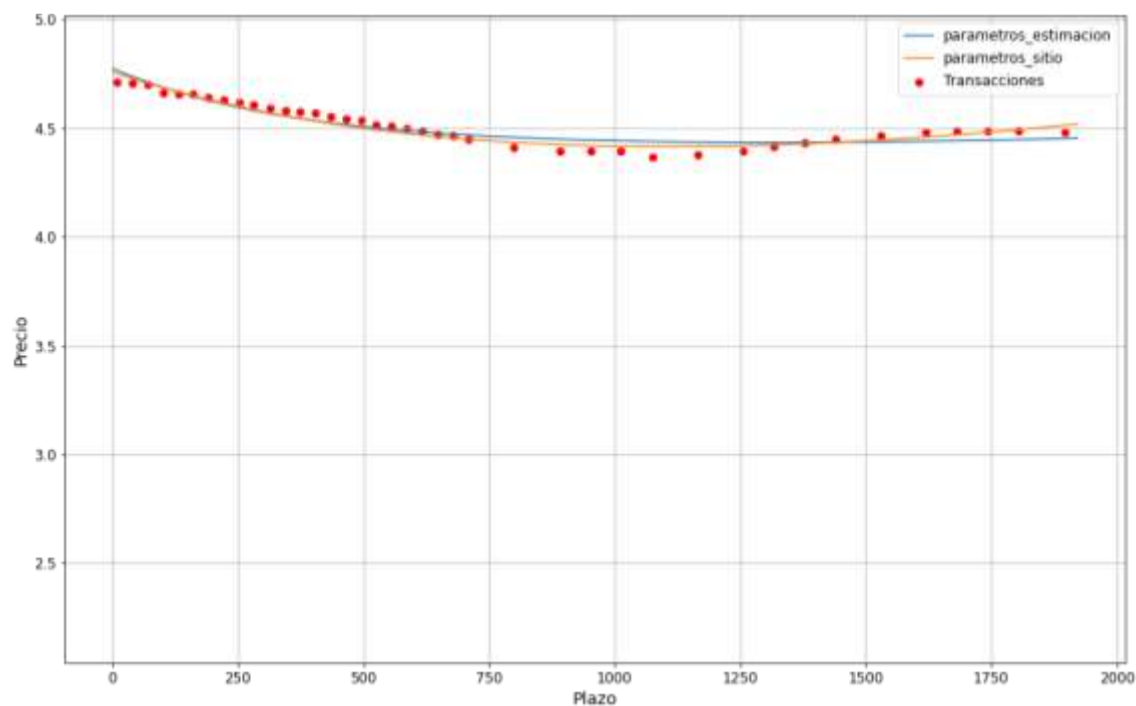


Figura 6-14: Transacciones y curva de precios futuros de cobre al día 19/10/2021.

6.3 Resultados para el Oro

6.3.1 Estimación de Parámetros

Se comienza por mostrar los resultados de la estimación de los parámetros estructurales del modelo, disponibles en la tabla VI-7. Los parámetros se calcularon con el método L-BFGS-B y el panel incompleto de datos. Al igual que los otros *commodities*, el parámetro de reversión a la media de x_1 es cero, mientras que en el resto de las variables estos parámetros son distintos de cero.

Tabla VI-7: Parámetros estimados del modelo no estacionario de 3 factores para el oro.

Parámetro	Valor
μ	0,09914
λ_1	0,04966
λ_2	0,78244
λ_3	0,43047
k_1	0,00000
k_2	0,04835
k_3	0,81546
σ_1	0,27759
σ_2	0,54912
σ_3	0,26300
ρ_{21}	0,18484
ρ_{31}	0,68379
ρ_{32}	0,67466

6.3.2 Ajuste a Transacciones In-Sample

La estimación de precios futuros de oro se realizó tomando como intervalo dentro de la muestra las fechas entre el 2 de enero de 2019 y el 30 de abril de 2021, mientras que para el intervalo fuera de la muestra las fechas entre el 30 de abril de 2021 y el 12 de noviembre de 2021.

Para analizar el ajuste a las transacciones *in-sample*, se empieza por observar el valor del MPE y el MAPE del modelo planteado por el alumno (Estimación) y el modelo oficial de Riskamerica (Sitio). Esta información se resume en la siguiente tabla.

Tabla VI-8: MPE y MAPE del ajuste de los modelos a los precios de futuros de oro en período dentro de la muestra.

	MPE	MAPE
Estimación	0,0001%	0,0728%
Sitio	-0,0043%	0,0989%

Es posible distinguir que la estimación del alumno presenta muy buenos resultados tanto para el error porcentual (MPE) como para el error absoluto (MAPE). Para el primero se obtiene un sesgo prácticamente despreciable de 0,0001%, mientras que para el segundo se reduce el MAPE en un 26%. Estos resultados se complementan con la distribución del MPE y MAPE de la figura 6-15.

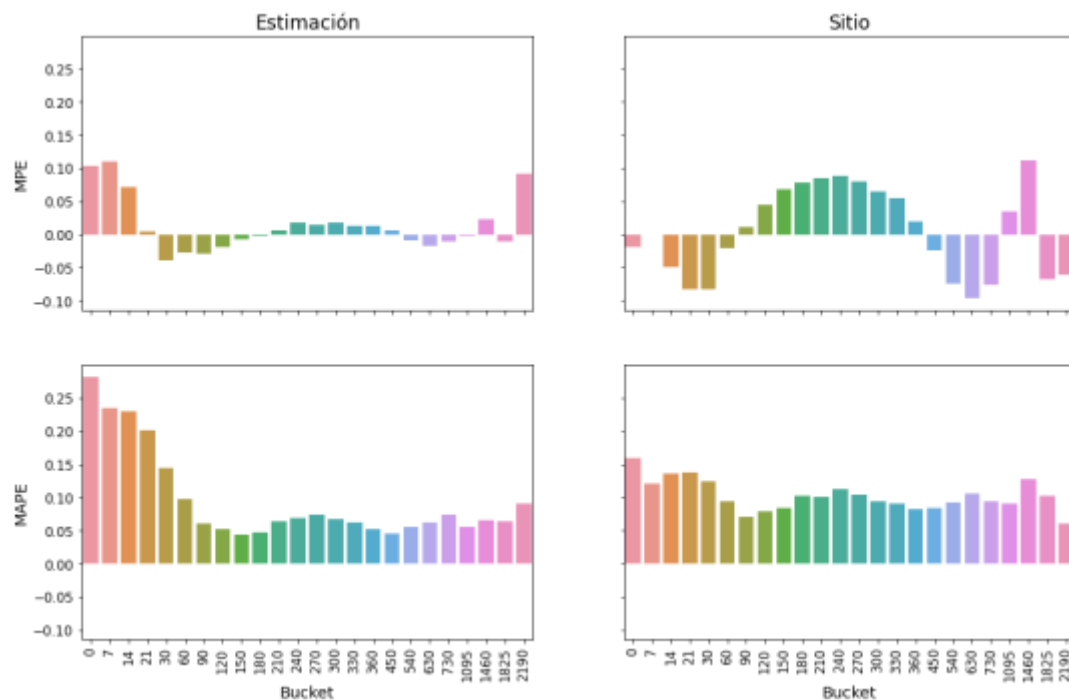


Figura 6-15: Distribución del MPE y MAPE por *bucket* de los modelos para el oro en período dentro de la muestra.

En la distribución de los errores, la estimación presenta un mejor resultado global que el sitio, a excepción del error absoluto en los futuros con vencimiento hasta 30 días y el error porcentual de contratos hasta 14 días. Del mismo modo, la dispersión del MPE por *bucket* de la figura 6-16 muestra que la media de la estimación, y su primer y tercer cuartil, están muy centradas en cero para contratos futuros con duración en el mediano y largo plazo. También, se cuenta con una importante reducción de la cantidad de *outliers* por sobre y debajo de la media, sobretodo a partir del *bucket* 30.

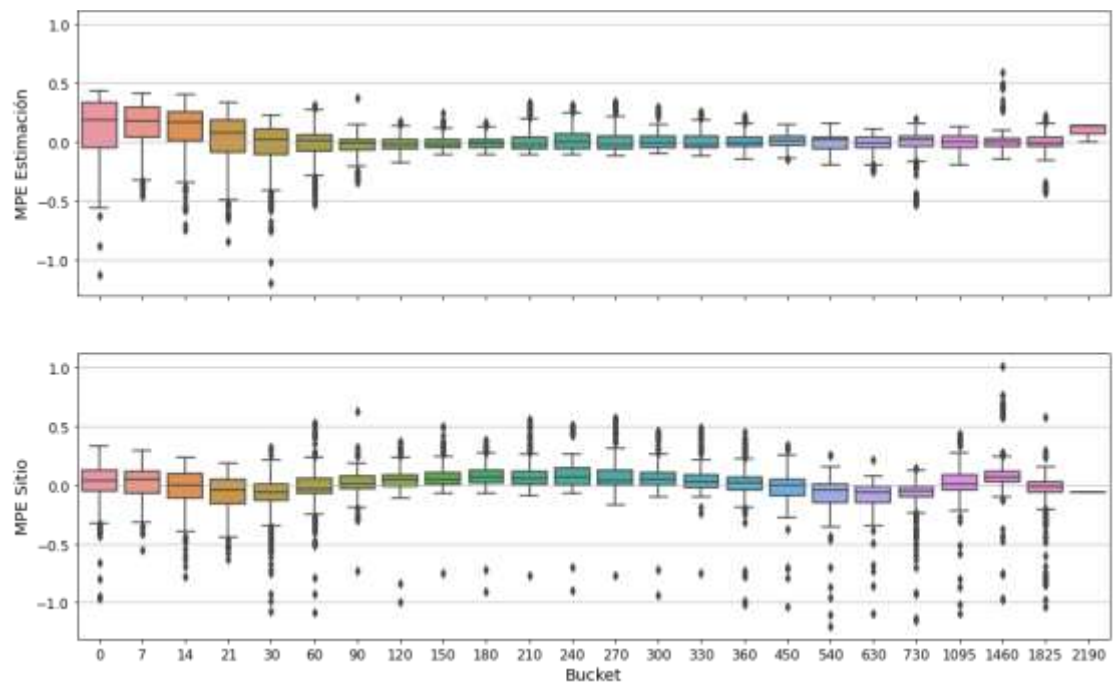


Figura 6-16: Dispersión del MPE por *bucket* de los modelos para el oro en período dentro de la muestra.

6.3.3 Ajuste a Transacciones Out-Of-Sample

Se muestra el valor del MPE y MAPE global de los modelos en el período fuera de la muestra, comprendido entre el 30 de abril de 2021 y el 12 de noviembre de 2021.

Tabla VI-9: MPE y MAPE del ajuste de los modelos a los precios de futuros de oro en período fuera de la muestra.

	MPE	MAPE
Estimación	-0,0005%	0,1666%
Sitio	-0,1112%	0,3923%

Al igual que el período *in-sample*, se ve una superioridad del ajuste de la estimación sobre el sitio para ambos tipos de error. Esto se corrobora con la información provista por la distribución del MPE y MAPE en el período *out-of-sample*, donde la estimación reduce el error porcentual y absoluto en todos los plazos.

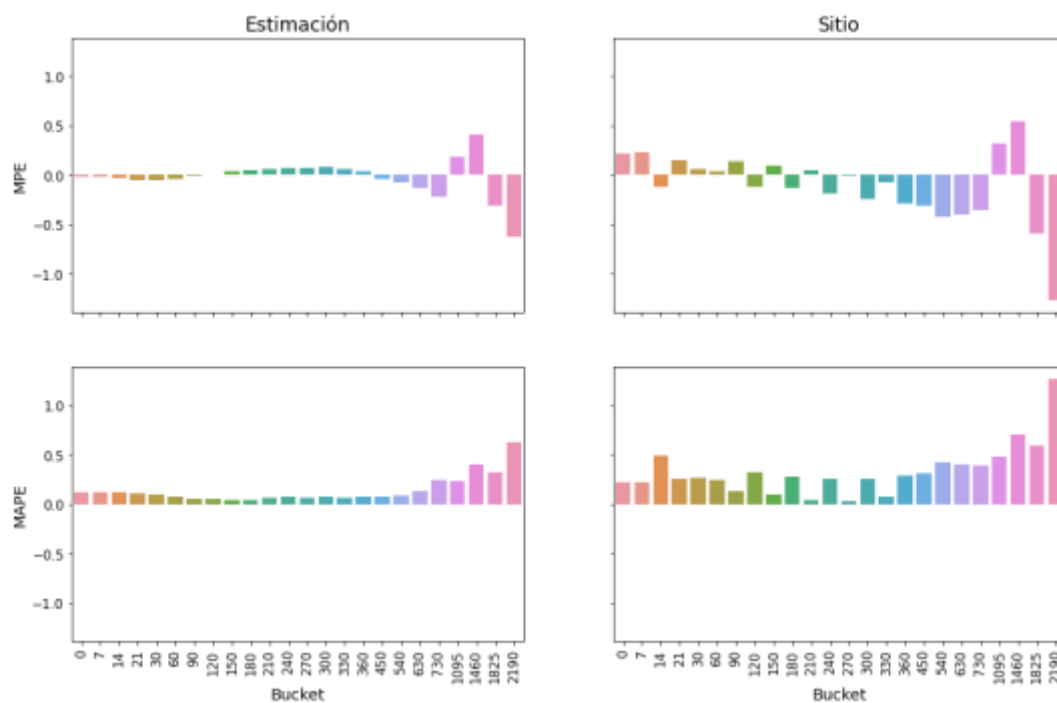


Figura 6-17: Distribución del MPE y MAPE por *bucket* de los modelos para el oro en período fuera de la muestra.

En último lugar, la dispersión del MPE por *bucket* de la figura 6-18 termina por confirmar los excelentes resultados del modelo de la estimación. En ella se observa que el modelo del alumno tiene una dispersión muy reducida y centrada en cero, al

mismo tiempo que elimina la presencia de datos por debajo del primer cuartil en todos los plazos.

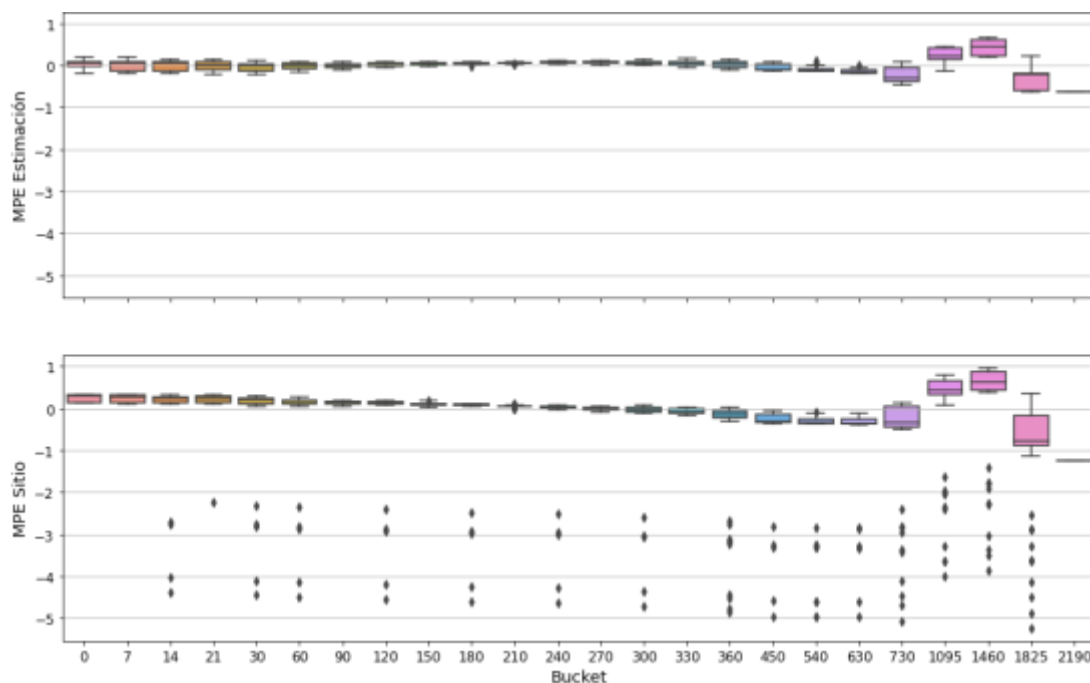


Figura 6-18: Dispersión del MPE por *bucket* de los modelos para el oro en período fuera de la muestra.

6.3.4 Ajuste a la Estructura de Volatilidad

Las figuras 6-19 y 6-20 permiten estudiar el ajuste de los modelos a la estructura de volatilidad de los contratos futuros, dado que muestran la volatilidad de la curva de precios futuros de los modelos en un período *in-sample* y *out-of-sample*.

En el período dentro de la muestra, se aprecia claramente una sobreestimación por parte del modelo desarrollado por alumno. Al estudiar este comportamiento inequívoco, se identificó la falta de un dato en una fecha particular del período señalado. Ante la ausencia de esta información en las bases de datos, el modelo sobreestimó la volatilidad de la curva, provocando un desajuste en el gráfico.

Para corroborar que esta situación no afectase el ajuste del modelo a las transacciones, y se logre el objetivo de superar el ajuste del sitio de RiskAmerica, se revisó día a día la curva de precios futuros de la estimación y su ajuste a las transacciones, donde no se identificaron problemas y se prosiguió con el análisis.

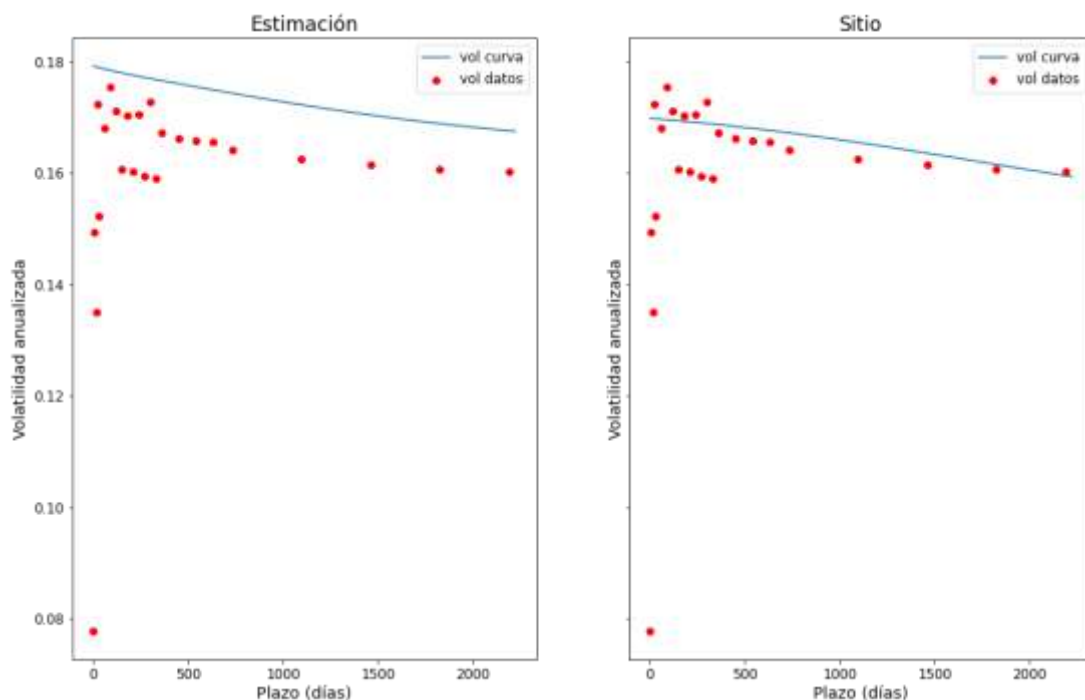


Figura 6-19: Ajuste a la estructura de volatilidad de modelos para el oro en período dentro de la muestra.

En el período fuera de la muestra, se empezó por confirmar la completitud de datos en las bases de datos de la empresa. Luego, tal como señala la figura 6-20, se cumple que la estimación posee un robusto ajuste a la estructura de volatilidad de las transacciones en todos los plazos. Por el contrario, el modelo del sitio subestima la volatilidad de los datos en todas las duraciones de los contratos futuros.

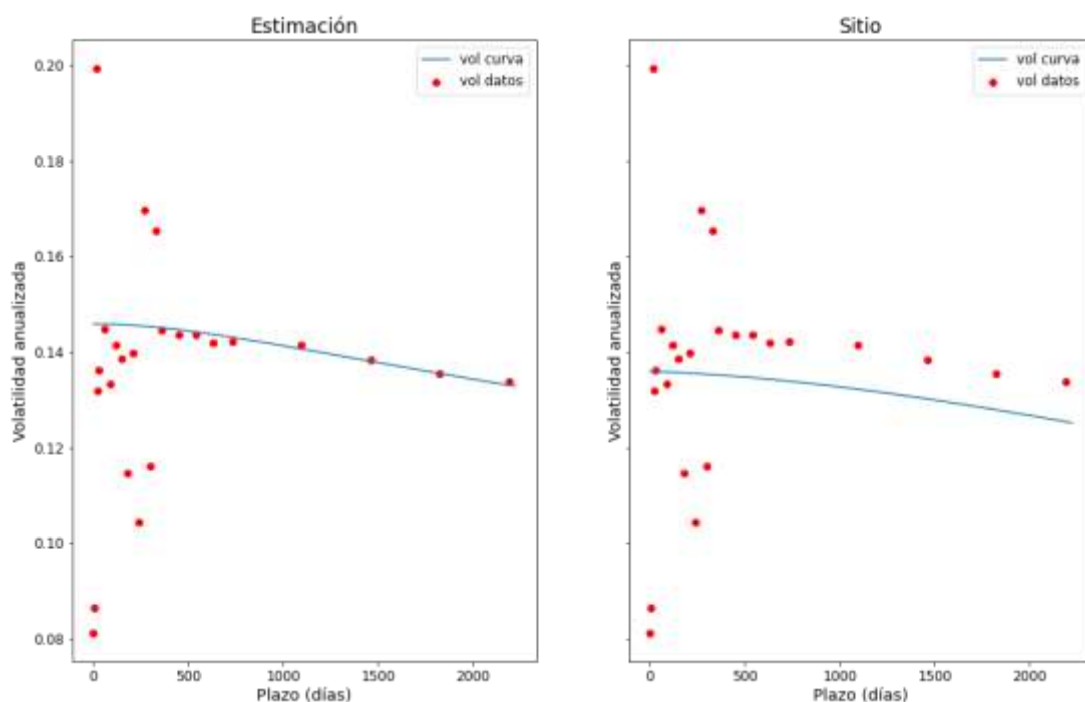


Figura 6-20: Ajuste a la estructura de volatilidad de modelos para el oro en período fuera de la muestra.

6.3.5 Conclusiones preliminares para el Oro

Al analizar los resultados presentados, se concluye que la estimación del alumno mejora el cálculo de precios de futuros respecto al modelo de RiskAmerica. Esto se

sustenta por un excelente resultado de los errores en todo el período de estimación, la reducción significativa de datos con dispersión por fuera del intervalo de estimación entre el primer y tercer cuartil, y un excelente ajuste a la estructura de volatilidad de las transacciones en el período fuera de la muestra.

Por último, la figura 6-21 enseña las transacciones reales y las curvas de precios futuros de la estimación y el sitio al día 12 de noviembre de 2021. El gráfico denota un mejor ajuste de la curva de precios de la estimación en transacciones superiores a 1100 días de plazo, y a diferencia del modelo del sitio, no sobreestima el precio de los contratos de más largo plazo.

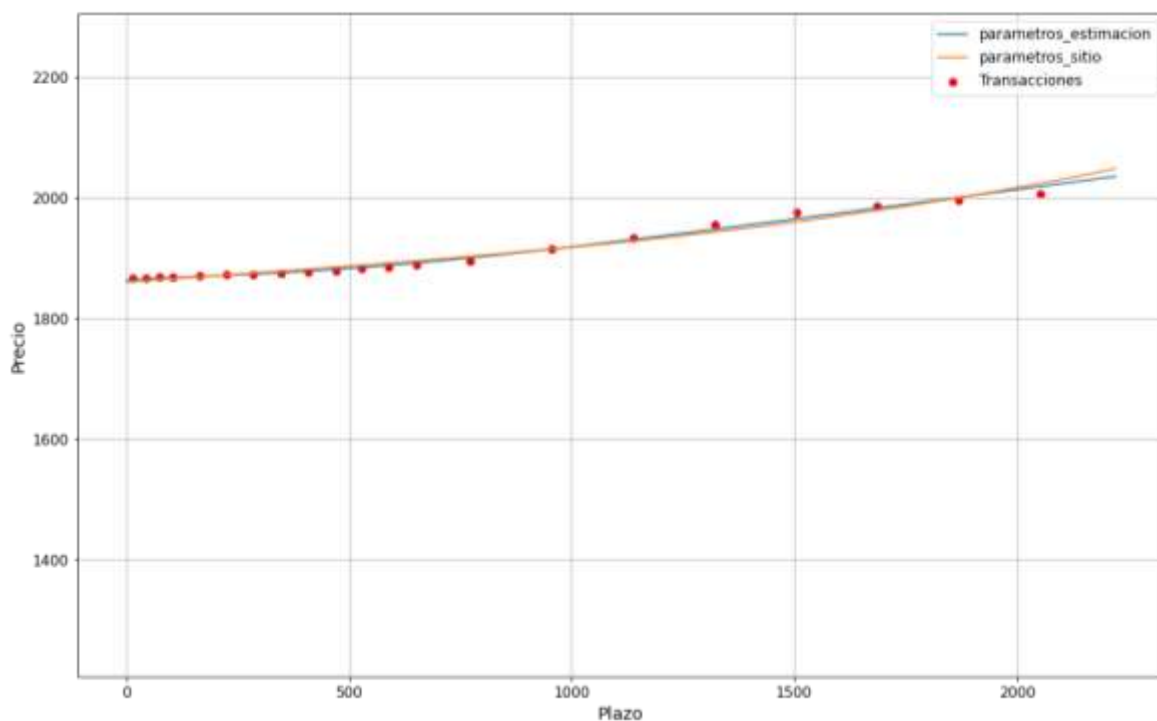


Figura 6-21: Transacciones y curva de precios futuros de oro al día 12/11/2021.

7. CONCLUSIONES

Esta tesis estudió la calibración de un modelo de precios de *commodities* no-estacionario de 3 factores de incertidumbre para el petróleo WTI, el cobre y el oro. El objetivo fue mejorar la estimación de precios futuros realizada por la empresa RiskAmerica SpA, usando toda la información disponible de contratos futuros provenientes de la *New York Mercantile Exchange* y la *New York Commodity Exchange*.

A partir de los resultados empíricos obtenidos, es posible concluir que la utilización de las técnicas analíticas mostradas permitió estudiar el comportamiento del modelo propuesto por Cortázar y Naranjo, y mejorar el ajuste realizado por RiskAmerica a las transacciones de contratos futuros de estos *commodities* y su estructura de volatilidad empírica.

También se destaca la importancia de analizar las transacciones de futuros provenientes de la bolsa de comercio, dado que reflejan información actualizada sobre el ajuste global de inventarios de *commodities* y su nivel de precio. Por ejemplo, al estudiar los datos del petróleo se observan períodos de elevada volatilidad, lo que afecta la flexibilidad que poseen los parámetros estructurales. Dada esta estructura de los datos, podría ser necesario recalibrar los parámetros del petróleo en un plazo más corto que para el cobre o el oro, cuya estimación muestra resultados más robustos en cuanto a error absoluto y sesgo del modelo.

BIBLIOGRAFIA

Alquist, R., Kilian, L. y Vigfusson, R. (2013). Forecasting the price of oil. *Handbook of Economic Forecasting*, 2(A), 427–508.

Baumeister, C. y Kilian, L. (2015). Forecasting the real price of oil in a changing world: A forecast combination approach, 33(3), 338–351.

Chiang, I., Ethan, H., Hughen, W. y Sagi, J. (2015). Estimating oil risk factors using information from equity and derivatives markets. *J. Finance*, 70(2), 769–804.

Cortázar, G. y Eterovic, F. (2010). Can oil prices help estimate commodity futures prices? The cases of copper and silver. *Resources Policy*, 35(4), 283–291.

Cortázar, G. y Naranjo, L. (2006). An N-factor Gaussian model of oil futures. *J. Futures Markets*, 26(3), 243–268.

Cortázar, G., Millard, C., Ortega, H. y Schwartz, E. (2018). Commodity price forecasts, futures prices, and pricing models. *J. Futures Markets*, 26(3), 243–268.

Cortázar, G. y Schwartz, E. (2003). Implementing a stochastic model for oil futures prices. *Management Science*, 65(9), 4141–4155.

Cortázar, G., Kovacevic, I. y Schwartz, E. (2015). Expected commodity returns and pricing models. *Energy Economics*, 49(5), 60–71.

Cortázar, G., Schwartz, E. y Naranjo, L. (2007). Term-structure estimation in markets with infrequent trading. *Internat. J. Financial Econom.*, 12(4), 353–369.

Hull, J. (2012). Options, futures, and other derivatives. *Boston Prentice Hall*, 6ta ed., 1-17.