



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

CÓMO ESTIMAR ESTRUCTURAS DE FUTUROS DE LARGO PLAZO SIN INFORMACIÓN OBSERVABLE: EL CASO DE LA PLATA Y EL COBRE

FRANCISCO ETEROVIC ALLIENDE

Tesis para optar al grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Profesor Supervisor:
GONZALO CORTÁZAR S.

Santiago de Chile, Marzo, 2010.

© 2010, Francisco Eterovic



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

**CÓMO ESTIMAR ESTRUCTURAS DE
FUTUROS DE LARGO PLAZO SIN
INFORMACIÓN OBSERVABLE: EL CASO
DE LA PLATA Y EL COBRE**

FRANCISCO JAVIER ETEROVIC ALLIENDE

Tesis presentada a la Comisión integrada por los profesores:

GONZALO CORTÁZAR

JORGE VERA

AUGUSTO CASTILLO

LEONARDO VANZI

Para completar las exigencias del grado de
Magister en Ciencias de la Ingeniería

Santiago de Chile, Marzo, 2010.

A mis padres, hermanos y amigos

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero agradecer al profesor Gonzalo Cortázar por el tiempo dedicado y el constante apoyo a lo largo de la realización de esta tesis. Sus consejos y orientación me han permitido comprender los fundamentos de un trabajo de investigación y han sido sumamente importantes en mi formación profesional.

También quiero agradecer a Claudio Tapia, Héctor Ortega y Francisco Fainé por su valiosa ayuda y por los gratos momentos vividos durante la realización de este trabajo.

Un reconocimiento especial para todos los integrantes del FinLabUC y RiskAmerica, por su importante ayuda y por el gran apoyo prestado durante la realización de este trabajo.

Se agradece también el apoyo financiero proporcionado por Fondecyt (Proyecto 1070771).

Finalmente, quiero agradecer a mi familia y amigos, por su gran apoyo y porque siempre han estado conmigo.

INDICE GENERAL

DEDICATORIA	ii
AGRADECIMIENTOS	iii
INDICE GENERAL	iv
INDICE DE TABLAS	vi
INDICE DE FIGURAS	vii
RESUMEN	ix
ABSTRACT	x
1. INTRODUCCION	1
2. MODELOS PARA LA ESTIMACIÓN DE PRECIOS	4
2.1 Nociones Básicas	4
2.2 Desarrollo de los Modelos Existentes	5
3. DECISIONES DE INVERSIÓN EN RECURSOS NATURALES	8
3.1 Mercados de Futuros de Commodities	9
3.2 Debilidades para la Valorización	10
4. MODELO PROPUESTO	12
4.1 Modelo Multicommodity Modificado (MM)	13
4.2 Precios de Contratos Futuros	19
4.3 ¿Por qué utilizar sólo el proceso de la variable de estado no estacionaria como común para todos los commodities?	19
4.4 Estructura de Volatilidad de Contratos Futuros	¡Error! Marcador no definido.
5. METODOLOGIA DE ESTIMACIÓN	22
5.1 El Filtro de Kalman	22
5.2 Metodología de Estimación Conjunta	25
5.2.1 Efecto de la Estimación Conjunta en la Estimación de Ambas Etapas de Estimación	25
6. ANÁLISIS EMPÍRICO	27
6.1 Paneles de Datos Utilizados	27
6.1.1 Contratos Futuros de Plata	28
6.1.2 Contratos Futuros de Cobre	30
6.1.3 Contratos Futuros de Petróleo Brent	32
6.1.4 Contratos Futuros de Petróleo WTI	33
6.2 Estimación de Modelos	33
6.3 Resultados	38

6.3.1	Ajuste de Precios	38
6.3.2	Ajuste de Volatilidad	¡Error! Marcador no definido.
7.	CONCLUSIONES	47
8.	BIBLIOGRAFÍA	49
9.	ANEXOS	51
9.A.	Modelos para la Estimación de Precios Existentes	51
9.B.	Valorización de Futuros	60
9.C.	Estructura de Volatilidad	64

INDICE DE TABLAS

Tabla 6.1. Parámetros estimados para los modelos de Plata.....	35
Tabla 6.2. Parámetros estimados para los modelos de Cobre.....	36
Tabla 6.3. Parámetros estimados para los modelos de Brent.....	37
Tabla 6.4. Comparación de errores para modelo individual y <i>multicommodity</i> y <i>multicommodity</i> modificado (MM). Error Medio (EM) y Raíz Cuadrada del Error Cuadrático Medio (RECM).....	40
Tabla 6.5. Comparación de errores para modelo individual, <i>multicommodity</i> y <i>multicommodity</i> modificado (MM). Error Medio (EM) y Raíz Cuadrada del Error Cuadrático Medio (RECM).....	43
Tabla 6.6. Comparación de errores para modelo individual, <i>multicommodity</i> y <i>multicommodity</i> modificado (MM). Error Medio (EM) y Raíz Cuadrada del Error Cuadrático Medio (RECM)	46

INDICE DE FIGURAS

Figura 3.1. Plazos de Contratos para diversos <i>commodities</i> existentes en enero de 2010.....	9
Figura 3.2. Volatilidad de retornos del precio spot anualizados y correlación de retornos diarios para diversos <i>commodities</i>	10
Figura 4.1. Valores de los ponderadores u_i , los que representan el peso por variable de estado al calcular el precio de un futuro.....	20
Figura 4.2. Diferencia de la curva utilizando todas las variables de estado y utilizando sólo la variable de estado no estacionaria (sólo x_1).....	21
Figura 5.1. Parámetros estimados en cada etapa de la Estimación Conjunta.....	26
Figura 6.1. Paneles de datos utilizados para las estimaciones.....	28
Figura 6.2. Paneles de datos utilizados para la estimación de la Plata.....	39
Figura 6.3. Paneles de datos utilizados para la estimación del Cobre.....	31
Figura 6.4. Paneles de datos utilizados para la estimación del Petróleo Brent.....	33
Figura 6.5. Curvas de Plata para el 13/04/2004.....	39
Figura 6.6. Curvas de Plata para el 25/04/2008.....	39
Figura 6.7. RECM promedio para los distintos modelos y distintos plazos de vencimiento.....	41
Figura 6.8. Probabilidad acumulada de errores de extrapolación para los distintos modelos.....	41
Figura 6.9. Curva de Cobre para el 30/06/2004.....	42

Figura 6.10. Curva de Cobre para el 05/12/2008.....	42
Figura 6.11. Probabilidad acumulada de errores de extrapolación para los distintos modelos.....	44
Figura 6.12. Probabilidad acumulada de errores de extrapolación para los distintos modelos.....	44
Figura 6.13. RECM promedio para los distintos modelos de cobre y distintos plazos de vencimiento.....	45
Figura 9.14. Volatilidad empírica de la Plata vs. Volatilidad teórica de los modelos estimados.....	66
Figura 9.15. Volatilidad empírica del Cobre vs. Volatilidad teórica de los modelos estimados.....	66
Figura 9.16. Volatilidad empírica del Brent vs. Volatilidad teórica de los modelos estimados.....	67

RESUMEN

Existe una gran cantidad de literatura donde se modelan procesos estocásticos de estructuras de futuros para *commodities*. Ha sido demostrado que modelos con varios factores de riesgo son capaces de ajustar tanto el nivel como la estructura de volatilidad de las transacciones observadas con errores razonablemente bajos.

Uno de los problemas del mercado de futuros de *commodities* es lo relativamente corto que son sus contratos. Esto plantea un problema en la valorización de inversiones a largo plazo, las que usualmente requieren extrapolar la estructura de futuros observada. Se ha desarrollado poca investigación en el cómo realizar de buena manera dicha extrapolación y el nivel de error introducido. Cortázar et al (2008) propone un modelo *multicommodity*, el que estima conjuntamente dos *commodities*, donde uno cuenta con contratos más largos que el otro, mostrando que los precios futuros de un *commodity* pueden contener información muy útil para estimar el proceso estocástico del otro con contratos más cortos. Ellos implementan su procedimiento utilizando *commodities* muy correlacionados entre ellos, como el WTI y Brent.

En esta tesis se analiza la utilización de precios de contratos futuros de largo plazo de petróleo para ayudar a la estimación del largo plazo del cobre y la plata. Se comienza analizando el rendimiento del modelo *multicommodity* de Cortázar et al (2008), aplicado a petróleo-cobre y petróleo-plata, que tienen niveles de correlación sustancialmente menores que los contratos de WTI-Brent. Se muestra que para estos *commodities* con menores niveles de correlación, el modelo *multicommodity* parece no ser tan efectivo. A continuación se propone un modelo *multicommodity* modificado, que cuenta con una estructura más simple y una mayor facilidad en la estimación, el que utiliza el proceso de largo plazo no estacionario del petróleo para ayudar a la estimación de los precios futuros de largo plazo del cobre y la plata, obteniendo un mejor ajuste que si se utilizara un modelo individual o *multicommodity*.

ABSTRACT

There is an extensive literature on modeling the stochastic process of commodity futures. It has been shown that models with several risk factors are able to adequately fit both the level and the volatility structure of observed transactions with reasonable low errors.

One of the problems commodities futures markets have is the relatively short term maturities of their contracts, which typically range for a few years. This poses a problem for valuing long term investments which requires extrapolating the observed term structure. There has been little work on how to effectively do this extrapolation and the error level introduced. Cortazar et al (2008) proposes a multi-commodity model that jointly estimates two commodity futures contracts, one with much longer maturity contracts than the other, showing that futures prices of one commodity may be useful information for estimating the stochastic process of another which has shorter maturity contracts. They implement their procedure using highly correlated commodities like WTI and Brent.

In this thesis we analyze using prices of long term oil futures contracts to help estimate long term copper and silver prices. We start by analyzing the performance of the Cortazar et al (2008) multi-commodity model now applied to oil-copper and oil-silver commodities which have much lower correlation than the WTI-Brent contracts. We show that for these commodities with lower correlation the multi-commodity seems not to be effective. We then propose a modified multi-commodity model with a much simpler structure and easier to estimate which uses the non-stationary long term process of oil to help estimate long term copper and silver futures prices, achieving a much better fit than using available individual or multi-commodity models.

1. INTRODUCCION

Las inversiones en recursos naturales han destacado por ser muy difíciles de valorizar. Éstas generalmente requieren grandes inversiones, las que son irreversibles y que producen ingresos por un gran periodo de tiempo. Para valorizar estas inversiones usando la metodología del Flujo de Caja Descontado, las predicciones del precio de los *commodities* en el largo plazo tienen que ser realizadas en conjunto con las estimaciones de las tasas de descuento riesgosas.

El problema es que los precios de los *commodities* son extremadamente volátiles, por lo que predecirlos es de extrema dificultad. Durante la crisis que se ha vivido en el último tiempo, se ha podido percibir su alta volatilidad, lo que se debe principalmente a la constante variación existente en la oferta y en la demanda, la que aumenta en estos periodos de crisis, debido al desconocimiento de lo que deparará el futuro y al constante cambio en las percepciones de la economía.

Debido a estas razones, es de gran importancia lograr un acabado entendimiento del comportamiento de estos mercados, ya que es un tema crucial al buscar una correcta valorización de derivados asociados a dichos *commodities*, analizar decisiones de inversión o incluso para considerar inversiones financieras.

Buscando solucionar dichos problemas, es que en la literatura se ha utilizado una gran cantidad de modelos para describir el comportamiento de los precios en los *commodities*. Uno de los primeros modelos desarrollados es el de Brennan y Schwartz (1985), quienes plantean un modelo de un factor para el cobre, en el cuál su precio spot es estocástico.

Como una manera de aumentar la precisión de las estimaciones, se han ido generando modelos que cuentan con dinámicas más complejas y con una mayor cantidad de factores estocásticos. Así, Gibson y Schwartz (1990) proponen un modelo de dos factores para el petróleo, los que caracterizan al precio spot y al retorno por conveniencia como las variables estocásticas. Más adelante, en Schwartz (1997), se plantea un modelo con 1, 2 y 3 factores estocásticos, incorporando para este último un proceso para la tasa de interés, el que es estimado con datos externos al mercado de futuros.

Luego Schwartz y Smith (2000) plantean un modelo de dos factores estocásticos, donde uno representa las variaciones de largo plazo y el otro las de corto plazo. Cortázar y Schwartz (2003) implementan un modelo de tres factores estocásticos muy similar al desarrollado en Schwartz (1997), pero logrando una formulación más parsimoniosa y simple de estimar.

En el último tiempo, un nuevo tipo de modelos ha surgido, tratando de generalizar las experiencias anteriores. Basado en el trabajo de Dai y Singleton (2000), quienes desarrollan una familia de modelos *affine* para ajustar la estructura de tasas de interés, basados en factores canónicos y que no son observables. Casassus y Collin-Dufresne (2005) proponen un modelo de tres factores con un premio por riesgo variable. Cortázar y Naranjo (2006) plantean un modelo de N factores que generaliza, a través de la formulación canónica, casos particulares descritos en la literatura histórica.

Como se ha visto, la literatura ha ido tendiendo hacia una construcción de modelos basados en variables explicativas no observables o latentes, llamadas variables de estado. Esto es debido a que, como se explicaba anteriormente, los precios de los *commodities* son generados en un sistema macroeconómico muy complejo, existiendo diversos de estos factores económicos que afectan los precios.

Estos factores económicos son capturados a través de las variables de estado, las cuales siguen una dinámica determinada por los parámetros estructurales del modelo, donde ambos, variables y parámetros, se estiman a partir de los datos. Las variables de estado van cambiando a medida que se resuelve la incertidumbre en la economía, mientras que los parámetros se suponen estables, debido a que representan características del sistema económico.

Como una manera de tomar en cuenta la información que comparten distintos *commodities* debido al sistema macroeconómico en que están inmersos, Cortázar, Milla y Severino (2008), buscan utilizar información de algunos *commodities* para mejorar la estimación de otros, de los cuales se tenga menos información. Esto se hace a través de utilizar algunas variables de estado comunes entre ambos *commodities*.

Este modelo es testeado sólo con *commodities* altamente correlacionados, para los cuales logra un gran ajuste, pero a su vez tiene asociado una gran complejidad, debido a que aumenta considerablemente el número de variables total del modelo a medida que aumenta la cantidad de *commodities* que se quieren estimar, al igual que las observaciones de precios.

En este trabajo se pretende modificar el modelo *multicommodity*, de manera de simplificar su estimación y de lograr mejores niveles de ajuste para *commodities* que no presenten tan alto nivel de correlación, el cual sólo restringe los parámetros estructurales del modelo, pero no así sus variables de estado.

Así, las hipótesis planteadas en esta investigación son la existencia de información útil para la estimación del comportamiento del proceso de largo plazo de un *commodity*, la que puede ser extraída del proceso de otro *commodity* con una mayor cantidad de transacciones de contratos de largo plazo. También se plantea que un modelo conjunto en el cual los *commodities* estimados sólo comparten los procesos de las variables de estado, pero no sus valores, será más simple de estimar y tendrá un mejor comportamiento cuando las correlaciones entre los precios de ambos *commodities* no sea muy alta.

El resto de esta tesis se organiza de la siguiente manera. Los modelos de precios de *commodities* son presentados en el capítulo 2. En el capítulo 3 se presenta el por qué las decisiones de inversión en recursos naturales son tan complejas. El capítulo 4 presenta el modelo propuesto. En el capítulo 5 se ilustra la metodología de estimación utilizada. El capítulo 6 presenta el análisis empírico realizado, describiendo los datos utilizados y los resultados de la investigación. Finalmente en el capítulo 7 se concluye respecto a las hipótesis planteadas en función de los resultados obtenidos.

2. MODELOS PARA LA ESTIMACIÓN DE PRECIOS

En este capítulo se presentará un breve resumen de la literatura existente sobre los modelos de estimación de precios y como éstos han ido evolucionando en el tiempo, además de un pequeño resumen sobre algunos temas que son básicos para un correcto entendimiento del desarrollo que seguirá este trabajo.

2.1 Nociones Básicas

Como fue mencionado anteriormente, para la calibración de modelos realizada en esta tesis, se utilizarán precios de los contratos futuros sobre *commodities*, específicamente Plata, Cobre y Petróleos WTI y Brent.

Un futuro es un contrato entre dos partes, donde se fija el precio al que se va a transar un activo en alguna fecha futura determinada, llamada vencimiento, madurez o plazo del contrato.. La parte que se compromete a comprar el activo subyacente se dice que tiene una posición larga en el futuro, mientras que la contraparte se dice que tiene una posición corta.

El precio de un contrato futuro que está por vencerse se llama precio *spot* del activo subyacente. En el caso de *commodities* físicos, como por ejemplo los analizados en esta tesis (Plata, Cobre y Petróleo), el precio *spot* puede ser distinto al precio contado, dado que por lo general en un contrato futuro se especifican sólo algunos lugares específicos para la entrega del *commodity*. En el caso de *commodities* financieros, como las monedas, el problema es menor, debido a la no existencia de costos asociados a su transporte.

Por otro lado, la valorización moderna de los derivados financieros en general está basada en el concepto que en equilibrio no deben existir oportunidades de arbitraje¹. Este enfoque fue el que permitió a Black y Scholes (1973) encontrar el valor de una opción escrita sobre una acción y que desde entonces ha sido la base de los principales desarrollos en el área.

¹ Se entiende una oportunidad de arbitraje como una opción de generar ganancias sin riesgo alguno, por ejemplo, comprando un activo en un mercado y vendiéndolo en otro, generando un retorno positivo en dicha transacción.

Bajo ciertas condiciones de regularidad, la ausencia de oportunidades de arbitraje implica que el valor de cualquier activo se puede calcular como el valor esperado de sus flujos bajo una medida de probabilidad equivalente, descontados a la tasa de interés libre de riesgo. A esta medida de probabilidad se le llama medida ajustada por riesgo, medida neutral al riesgo o medida de la martingala equivalente. Para ajustar por riesgo un proceso estocástico gobernado por una ecuación diferencial estocástica, sólo basta con ajustar el *drift* o tendencia del proceso. El ajuste del *drift* del proceso se realiza a través de una variable llamada precio de mercado del riesgo, lo que será analizado con mayor profundidad en el capítulo 4.

2.2 Desarrollo de los Modelos Existentes

En la literatura existen diversos modelos para describir el comportamiento estocástico de los precios de *commodities*, los cuales pueden ser clasificados en modelos estacionarios y no estacionarios, siendo la mayor parte de éstos de la segunda categoría.

La principal diferencia entre ambos tipos de modelos es que los primeros se caracterizan porque las perturbaciones sufridas son transitorias y no tienen un efecto permanente en la dinámica de los precios, mientras que en los modelos no estacionarios, la dinámica de precios si puede ir incorporando las perturbaciones anteriores, de tal manera que los valores de largo plazo son modificados de forma permanente.

A continuación se muestra una pequeña revisión bibliográfica con algunos de los modelos más importantes de precios de *commodities* presentes en la literatura².

En 1985, Brennan y Schwartz plantean uno de los primeros modelos utilizados para estudiar la dinámica de los precios de *commodities*. En éste se supone que el precio *spot* de un *commodity* sigue un proceso browniano geométrico, por lo que corresponde a un modelo no estacionario.

² Para un mayor detalle de los modelos planteados, en el anexo A se explican sus formulaciones matemáticas.

Más adelante, como una manera de mejorar el ajuste, Gibson y Schwartz en 1990, plantean un modelo no estacionario de dos factores (dándolo así mayor flexibilidad al modelo), que supone nuevamente un proceso browniano geométrico para el precio *spot* y un proceso con reversión a la media para el retorno por conveniencia. Al igual que todos los modelos antes descritos, el premio por riesgo del mercado es constante.

En 1997, Schwartz plantea un proceso de uno, dos y tres factores, donde el modelo de tres factores entrega mayor flexibilidad que los modelos antes descritos, ajustando mejor a los datos. Para el primer caso se plantea un proceso con reversión a la media tipo Ornstein-Uhlenbeck para el logaritmo del precio *spot*. El modelo de dos factores representa una reformulación del planteado por Gibson y Schwartz (1990). Por último el modelo de tres factores, representa uno no estacionario, que extiende el modelo de Gibson y Schwartz (1990) agregando un factor estocástico que representa la tasa de interés. La estimación de este último factor se realiza con instrumentos financieros que están fuera del mercado de *commodities*.

Otro modelo de dos factores es propuesto por Schwartz y Smith en el 2000, el que se enfoca en separar los efectos de corto y largo plazo que afectan los precios, en este caso se plantea un modelo para el logaritmo del precio *spot*, que depende del nivel de equilibrio de los precios *spot* y de las perturbaciones de corto plazo. Nuevamente el proceso planteado corresponde a un proceso no estacionario.

En el 2003 Cortázar y Schwartz, presentan un modelo no estacionario de dos y tres factores, detallando una metodología simple de estimación de las variables de estado.

Hasta ahora, todos los modelos propuestos toman un premio por riesgo constante. Así, Casassus y Collin-Dufresne en el 2005, desarrollan un modelo estacionario que incorpora un premio por riesgo variable, y que utiliza 3 factores canónicos, es decir, que no tiene una interpretación económica explícita, utilizando una cantidad de parámetros económicamente identificables. Este trabajo se basa en los artículos de Duffie y Kan (1996), Dai y Singleton (2000) y Duffie, Pan y Singleton (2000).

Más adelante, en el 2006, Cortázar y Naranjo presentan modelos de N factores no estacionarios basados en la representación canónica introducida por Dai y Singleton (2000).

La gran ventaja de esto es que representa una generalización de todos los modelos antes descritos, dando además la posibilidad de utilizar la cantidad de factores que sean necesarios, permitiendo distintas flexibilidades de ajuste según la complejidad del comportamiento de los precios.

Por último, Cortázar, Milla y Severino (2008) resuelven un problema diferente, presentando un modelo *multicommodity*, en el cual se estima más de un *commodity* al mismo tiempo, permitiendo la utilización de información conjunta para ambos *commodities*. En este caso se plantea un modelo no estacionario en el cual ambos *commodities* comparten algunas de las variables de estado.

3. DECISIONES DE INVERSIÓN EN RECURSOS NATURALES

Las inversiones en proyectos relacionados con recursos naturales tienen una gran dificultad para poder ser valorizadas. Esto se debe principalmente a que para poder valorizarlas utilizando la tradicional metodología del Flujo de Caja Descontado se debe al mismo tiempo predecir el precio que el *commodity* tendrá en el largo plazo y estimar la tasa de descuento riesgosa.

Por otro lado, estas inversiones cuentan con una gran variedad de flexibilidades, tanto operacionales como de inversión, disponibles para los gerentes, los que pueden reaccionar de manera óptima a los diversos escenarios que pueden ser expuestos debido a la gran volatilidad de precios existente en los mercados de *commodities*. Estas flexibilidades también son dejadas de lado en la valoración por Flujo de Caja Descontado, subvalorando dichos proyectos.

Como una forma de poder enfrentar estos diversos problemas de valoración de proyectos relacionados con recursos naturales, es que se desarrolla una extensa literatura que recomienda el uso de la teoría de opciones reales y argumentos de no arbitraje para valorizar dichos activos.

Así, se valorizan los activos según el flujo de caja esperado bajo una medida neutral al riesgo, descontado los flujos a la tasa libre de riesgo. Bajo esta metodología, no es necesario el cálculo del premio por riesgo ni del precio esperado, sino que sólo estos estimadores ajustados por riesgo.

Este tipo de valoración es muy conveniente cuando existen mercados de futuros, debido a que los precios de los futuros representan el precio esperado de un *commodity* ajustado por riesgo, haciendo innecesaria la predicción de precios.

A continuación se analizarán los mercados de futuros y los inconvenientes derivados de la, algunas veces, inexistencias de contratos futuros a plazos suficientemente largos.

3.1 Mercados de Futuros de *Commodities*

En la actualidad existe un activo mercado para muchos futuros de *commodities*. Las principales bolsas en que éstos se transan son NYMEX (ó COMEX), que viene de su nombre en inglés “*New York Mercantile EXchange*” (ó “*COMmodity EXchange*”); LME, de la sigla en inglés “*London Metal Exchange*”; e ICE (“*InterContinental Exchange*”).

Dentro de estas bolsas se transan una gran cantidad de contratos para distintos *commodities*. En la figura 3.1 se pueden observar los plazos para los que se transan contratos futuros para algunos de estos *commodities*. Se puede ver con color negro las fechas (lo que representa los plazos de los contratos) para las cuales existe el vencimiento de algún contrato.

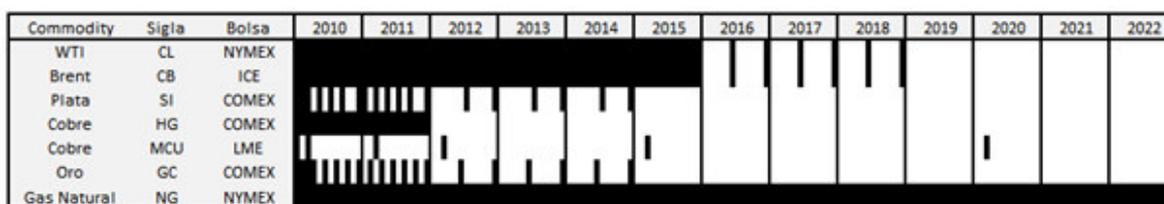


Figura 3.1. Plazos de Contratos para diversos *commodities* existentes en enero de 2010.

En la figura 3.1 nos damos cuenta que para algunos *commodities*, como sería el caso del gas natural, existe una gran cantidad de plazos a los que se transan contratos, llegando hasta los 12 años y entregando así una gran cantidad de información al mercado. En cambio, en el caso de otros *commodities*, como podría ser el caso del cobre transado en COMEX, sólo existen contratos que vencen dos años después.

Por otro lado, los precios de los *commodities* son extremadamente volátiles. En la tabla 3.2 se puede ver la volatilidad de los retornos del precio spot anualizados para algunos *commodities*, mostrando por qué estimar los precios de largo plazo y el premio por riesgo de los *commodities* es una tarea tan difícil. En la tabla 3.2 también se muestra como los retornos diarios de los *commodities* expuestos correlacionan entre sí, lo que, como será expuesto más adelante, puede entregar información relevante para la estimación de los procesos de precios de *commodities*.

	Volatilidad	Correlación de Retornos				
		WTI	Brent	Oro	Cobre	Gas Natural
Plata	37,8%	30,3%	32,5%	79,4%	44,9%	14,1%
WTI	42,5%		85,4%	28,4%	37,8%	33,6%
Brent	38,4%			29,7%	40,1%	33,6%
Oro	21,2%				40,1%	12,6%
Cobre	37,3%					11,2%
Gas Natural	53,7%					

Figura 3.2. Volatilidad de retornos del precio spot anualizados y correlación de retornos diarios para diversos *commodities* de Enero del 2004 a Octubre del 2009.

3.2 Debilidades para la Valorización

La baja madurez de los contratos futuros para algunos *commodities*, como fue observado en la tabla 3.1, genera un gran desafío a la hora de valorizar flujos de caja en el largo plazo. Para estos casos, es necesario calibrar un modelo de estructura de futuros, para así obtener la curva extrapolada para plazos mayores a los que existen contratos.

Como se mostró en el capítulo anterior, existen variados modelos para estimar precios de contratos futuros, los que en general ajustan bastante bien a los datos observados, tanto en nivel de precios, como en volatilidad. A pesar de esto, no ha existido mucho trabajo en torno a cómo hacer esta extrapolación de manera correcta y el nivel del error inducido.

Cortázar, Milla y Severino (2008) muestra cómo un modelo individual para un *commodity* que presenta un buen ajuste en las observaciones de mercado existentes, puede inducir un gran error al extrapolar estos valores a plazos más allá del último precio de mercado con que se cuenta.

Así, presentan el modelo *multicommodity*, el que estima de manera conjunta contratos futuros de más de un *commodity*, donde uno de estos cuenta con observaciones considerablemente más largas que el otro, mostrando que los precios de largo plazo de un *commodity* pueden entregar información muy útil para estimar el proceso estocástico de otro con observaciones más cortas.

Ellos implementan su modelo sólo con parejas de *commodities* con gran correlación, como los petróleos WTI y Brent, obteniendo mucho mejores extrapolaciones, pero sin analizar qué es lo que pasa cuando dicho nivel de correlación es menor. Por otro lado, la complejidad de este modelo es considerablemente mayor a la de un modelo individual, debido principalmente al aumento en la cantidad de variables de estado calculadas y de la matriz de observaciones.

En esta tesis, se analiza cómo los contratos de largo plazo del petróleo pueden ayudar a estimar los precios de largo plazo del cobre y la plata, *commodities* que, como se vio en la tabla 3.2, tienen un nivel de correlación bajo con el petróleo WTI. Primero se analizará el comportamiento del modelo *multicommodity*, ahora aplicado a estas nuevas parejas de *commodities* (WTI – Cobre y WTI – Plata), mostrando que la estimación no es tan efectiva como cuando la correlación es mayor, por ejemplo WTI – Brent, por lo que en el siguiente capítulo se propondrá un modelo *multicommodity* modificado (MM). Para más información de Cortázar, Milla y Severino, en el anexo A se entrega la formulación matemática de este modelo.

4. MODELO PROPUESTO

Como manera de solucionar los problemas mencionados en el capítulo anterior, se presenta el modelo *multicommodity* modificado (MM), el que cuenta con una estructura más simple que el modelo *multicommodity*. Éste utiliza el proceso no estacionario de largo plazo del petróleo para ayudar a estimar el proceso de largo plazo de otro *commodity*, que para este trabajo serán el cobre y la plata.

El modelo toma la visión presentada en Schwartz y Smith (2000), la que establece que el precio se mueve en reacción a dos tipos de *shocks*. El primer tipo corresponde a *shocks* de corto plazo, los que son estacionarios y que son responsables de las desviaciones transitorias del equilibrio de largo plazo, mientras que el segundo tipo de *shocks* afecta los movimientos de largo plazo, los que tienen un efecto que persiste e introducen un proceso de precios no estacionario.

Así, en el modelo *multicommodity* modificado (MM), todos los *commodities* estimados siguen un proceso no estacionario, compartiendo los procesos de ciertas variables de estado, específicamente las no estacionarias, que explican los *shocks* de largo plazo, permitiendo así el traspaso de información desde un *commodity* del que se tiene información de precios de contratos futuros en el largo plazo hacia otros en los cuales no se tiene información.

También, en este capítulo, se analizará cómo valorizar los contratos futuros, lo que será de gran relevancia a la hora de analizar el desempeño del modelo, el que debería ajustar de mejor manera los precios.

4.1 Modelo *Multicommodity* Modificado (MM)

A continuación se presenta el modelo propuesto, en término de sus características básicas:

La variable dependiente será definida como el logaritmo del precio *spot* del *commodity* i (S_i), la que es llamada Y_i . Se supone que S_i sigue una distribución normal.

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_i \\ \vdots \\ Y_m \end{bmatrix}_t = \log \begin{bmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_i \\ \vdots \\ S_m \end{bmatrix}_t \quad i = 1, \dots, m \text{ commodities}$$

Por otro lado, el proceso que sigue la variable Y_i (para el *commodity* i) puede ser descrito como:

$$Y_{it} = \sum_j x_{jt}$$

Donde j representa las variables de estados asociadas al *commodity* i , y x_{jt} representa la posición j en un vector de n variables de estado (X_t), es decir, Y_{it} es igual a la suma de las variables de estado asociadas al *commodity* i . Cada uno de los m *commodities* tiene asociadas una variable de estado no estacionaria, y nf_i variables de estado estacionarias, las que seguirán el siguiente proceso:

$$dx_{jt} = \alpha_j \mu dt + \beta_j \sigma_1 dw_{jt} \quad j = 1, \dots, m$$

$$dx_{jt} = (-k_j x_{jt}) dt + \sigma_j dw_{jt} \quad j = m + 1, \dots, n$$

Donde α_j representa un ponderador de la tendencia de largo plazo del *commodity* j , que relaciona la tendencia de largo plazo del primer *commodity* con el j , al igual que β_j relaciona las volatilidades. También n representa la cantidad de variables de estado total del modelo ($n = \sum_i (nf_i + 1)$) y dw_{jt} representa la componente j de un vector de incrementos de Wiener multivariado, que satisface $(dw_t)(dw_t)' = \Theta dt$, es decir, los incrementos pueden estar correlacionados entre sí.

Esto representa que las primeras m variables de estado siguen un proceso browniano, el que le dará el carácter de no estacionario al modelo, mientras que las restantes variables de estado siguen un proceso con reversión a la media tipo Ornstein-Uhlenbeck.

Así, planteándolo de manera matricial para m commodities, el modelo será:

$$Y_t = H X_t$$

Con

$$H = \begin{bmatrix} \overbrace{1 \dots 0 \dots 0}^m & \overbrace{1 \dots 1}^{nf_1} & \dots & \overbrace{0 \dots 0}^{nf_i} & \dots & \overbrace{0 \dots 0}^{nf_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \dots 1 \dots 0 & 0 \dots 0 & \dots & 1 \dots 1 & \dots & 0 \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \dots 0 \dots 1 & 0 \dots 0 & \dots & 0 \dots 0 & \dots & 1 \dots 1 \end{bmatrix}$$

Donde H entrega la relación existente entre las variables de estado y el logaritmo del precio spot. Por otro lado, la dinámica de las variables de estado estará dada por:

$$dx_t = (\alpha\mu - Kx_t)dt + \Sigma dw_t$$

Con

$$(dw_t)'(dw_t) = \Theta dt$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mu = \left[\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right] m$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & k_{m+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \beta_1 \sigma_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \beta_m \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_{m+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Donde la matriz K es llamada matriz de reversión, $\Omega = \Sigma\Theta\Sigma'$ representa la matriz de varianza-covarianza, dw_t es un vector de incrementos de un proceso de Wiener multivariado, por último α y μ representan vectores de constantes.

Aquí se puede ver que los primeros m elementos de la matriz K son cero, lo que representa que una de las variables de estado sigue un proceso no estacionario para cada uno de los m *commodities*.

Para efectos de simplificar la estimación de los modelos de precios, en esta tesis se supondrá que el precio de mercado del riesgo es constante e independiente del nivel de las variables de estado^{3 4}:

³ Como en Schwartz (1997) y Schwartz y Smith (2000).

⁴ En su forma más general, pero conservando la distribución normal de las variables de estado bajo la medida de probabilidad ajustada por riesgo, el vector de precios de mercado del riesgo se puede representar como se indica en Casassus y Collin-Dufresne (2005) por:

$$\lambda = \lambda_c + \Lambda x$$

$$\lambda = \lambda_c$$

Esta simplificación busca por un lado evitar los problemas mencionados anteriormente (y por lo tanto simplificar el problema de la estimación) y disminuir considerablemente el número de parámetros a estimar.

Sin embargo, el análisis realizado permite extender sin problema los modelos para el precio spot de manera de incorporar una especificación más general del precio de mercado del riesgo, como se propone en Casassus y Collin-Dufresne (2005).

Dado lo anterior el proceso ajustado por riesgo para las variables de estado será:

$$dx_t = (\alpha\mu - \lambda - Kx_t)dt + \Sigma dw_t^*$$

Donde λ es un vector de constantes de dimensión $n \times 1$.

Así, el modelo se puede resumir de la siguiente manera:

$$Y_t = H X_t$$

Donde λ_c es un vector y Λ es una matriz de constantes que relaciona el valor del precio de mercado del riesgo con el nivel de las variables de estado del modelo. Si la dinámica bajo la medida de probabilidad histórica está dada por:

$$dx_t = (\mu - Kx_t)dt + \Sigma dw_t$$

Bajo la medida de probabilidad ajustada por riesgo será:

$$dx_t = (\mu - \lambda_c - K^*x_t)dt + \Sigma dw_t^*$$

Donde $K^* = K + \Lambda$ y dw_t^* representa un vector de incrementos de un proceso de Wiener multivariado bajo la medida ajustada por riesgo.

Nótese que bajo esta especificación del precio de mercado del riesgo, la dinámica del precio spot bajo la medida de probabilidad ajustada por riesgo es distinta a la dinámica bajo la medida histórica. En este sentido, si bajo la medida histórica la matriz de reversión K tenía algún valor propio igual a cero, bajo la medida ajustada por riesgo esta matriz puede tener todos sus valores propios estrictamente mayores que cero y ser un proceso estacionario. Sin embargo, lo contrario también puede ocurrir. Si la matriz K tiene sus valores propios estrictamente mayores que cero, el proceso ajustado por riesgo puede tener una raíz unitaria. De hecho, para una especificación general del precio de mercado del riesgo, si se supone que bajo la medida de probabilidad histórica los valores propios de la matriz de reversión son todos distintos, esto puede no cumplirse bajo la medida de probabilidad ajustada por riesgo.

$$dx_t = (\alpha\mu - \lambda - Kx_t)dt + \Sigma dw_t^*$$

Con

$$H = \begin{bmatrix} \overbrace{1 \cdots 0 \cdots 0}^m & \overbrace{1 \cdots 1 \cdots 0 \cdots 0}^{nf_1} & \overbrace{0 \cdots 0 \cdots 0 \cdots 0}^{nf_i} & \overbrace{0 \cdots 0}^{nf_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \cdots 1 \cdots 0 & 0 \cdots 0 \cdots 1 \cdots 1 & \cdots 0 \cdots 0 & \cdots 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \cdots 0 \cdots 1 & 0 \cdots 0 \cdots 0 \cdots 0 & \cdots 0 \cdots 0 & \cdots 1 \cdots 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mu = \left. \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right\} m$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_1 \\ \lambda_{m+1} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & k_{m+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \beta_1 \sigma_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \beta_m \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_{m+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Debido a que no existe información suficiente para estimar el valor de las variables α_i y β_i , y estos valores podrían ser mayores o menores a 1, dependiendo de la relación que tengan con el *commodity* del que se tiene información en el largo plazo, es que para esta investigación se tomarán dichas variables como 1, debido a que es el mejor estimador a priori que se podría asumir.

Por ejemplo, un modelo para dos *commodities* en el que ambos tienen 2 variables de estado, el modelo utilizado sería:

$$\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} X_{t(4 \times 1)}$$

$$dx_t = (\mu - \lambda - Kx_t)dt + \Sigma dw_t^*$$

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu \\ \mu \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & 1 \end{bmatrix}$$

4.2 Precios de Contratos Futuros

Sea $F(S_t, t, T)$ el precio de un contrato futuro en la fecha t con vencimiento en la fecha T . La madurez del contrato es entonces $\tau = T - t$. Como se demuestra en Cox, Ingersoll y Ross (1981), el precio de este contrato futuro es simplemente el valor esperado del precio spot en T bajo la medida de probabilidad ajustada por riesgo. Formalmente, se tiene que:

$$F(S_t, t, T) = E_t^Q(S_T) = \exp\left(E_t^Q(Y_T) + \frac{1}{2}V_t^Q(Y_T)\right)$$

Donde $E_t^Q(\cdot)$ representa el valor esperado bajo la probabilidad ajustada por riesgo Q . Como se puede observar en el anexo B, la expresión para el precio de un futuro será:

$$F(S_t, t, T) = \exp\left(x_1(t) + \sum_{j=2}^N e^{-k_j(T-t)} x_j(t) + \left(\mu - \lambda_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)(T-t) - \sum_{j=2}^N \frac{1 - e^{-k_j(T-t)}}{k_j} \lambda_j + \frac{1}{2} \sum_{j,l \neq 1}^N \sigma_j \sigma_l \rho_{jl} \frac{1 - e^{-(k_j+k_l)(T-t)}}{k_j + k_l}\right)$$

4.3 ¿Por qué utilizar sólo el proceso de la variable de estado no estacionaria como común para todos los *commodities*?

Como fue explicado anteriormente, las variables de estado que comparten procesos debiesen ser las que explicasen la estructura de la curva en el largo plazo, ya que ahí es donde se quiere estimar precios utilizando información cruzada.

Por otro lado, el precio de un futuro, como antes fue descrito, puede ser formulado como:

$$F(x_t, t, T) = e^{Ux_t + v}$$

Siendo U una matriz de $n \times 1$ y v un escalar.

Por lo que podríamos decir que la importancia que tiene la variable de estado i esta dada por el factor U_i , ya que a mayor valor de este término, mayor es la importancia que se le da a dicha variable de estado.

En la figura 4.1 se puede ver los valores que toman los distintos términos del vector U_i para un modelo de cobre estimado en esta investigación, siendo esta tendencia repetida para los distintos casos que se analizan en esta tesis. Este caso corresponde a un modelo que utiliza 3 variables de estado, siendo la primera la que sigue un proceso no estacionario.

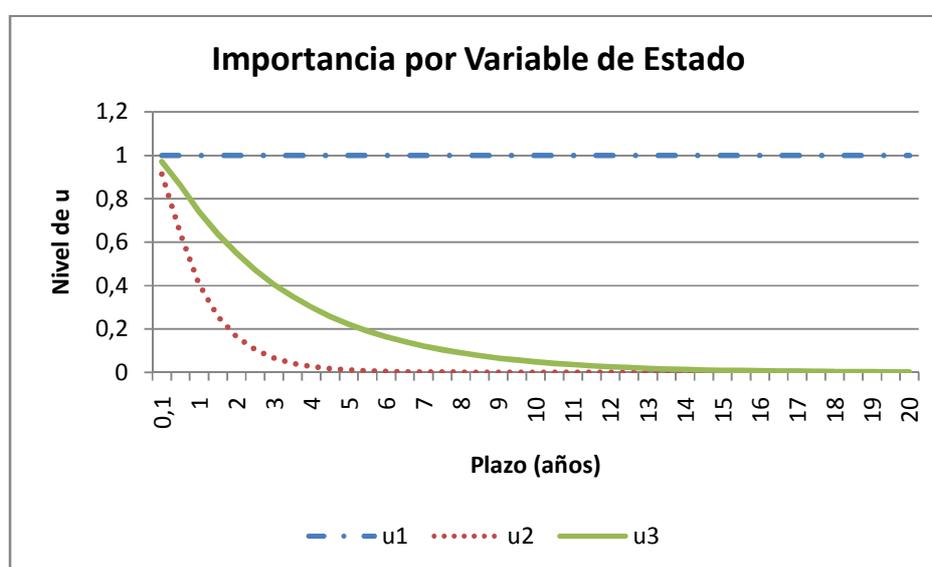


Figura 4.1. Valores de los ponderadores u_i , los que representan el peso por variable de estado al calcular el precio de un futuro.

Se puede ver que a medida que avanzan los años, la importancia de las variables de estado estacionarias disminuye considerablemente y, por otro lado, la importancia de la variable de estado no estacionaria se mantiene constante para los distintos plazos. Esto comprueba que la variable de estado que entregará más información en el largo plazo es la no estacionaria.

Por otro lado, se calculó el error que existía entre la curva de futuros que se obtenía al utilizar todas las variables de estado y la calculada si todas las variables de estado estacionarias fuesen cero, analizando así la importancia que tiene la variable de estado no estacionaria. Así, podemos ver en la figura 4.2 que si sólo dejamos la variable de estado no estacionaria,

entonces ambas curvas se van pareciendo más a medida que avanza el tiempo, lo que también muestra que para el largo plazo la variable de estado no estacionaria es la que nos va a entregar mayor información.

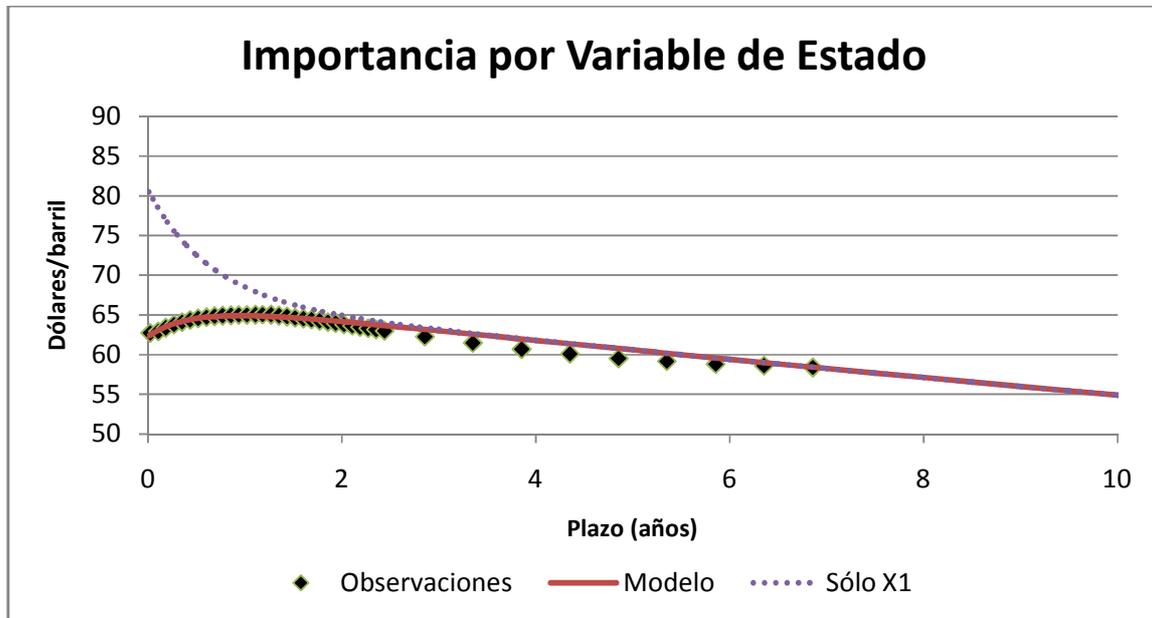


Figura 4.2. Curvas de futuros utilizando todas las variables de estado y utilizando sólo la variable de estado no estacionaria (sólo x_1).

Se puede ver que a medida que avanzan los años, la importancia de las variables de estado estacionarias disminuye considerablemente, lo que se ve representado por la similitud de las curvas en el largo plazo.

5. METODOLOGIA DE ESTIMACIÓN

La metodología de estimación permite, utilizando los datos, determinar los valores de los distintos parámetros que definen la dinámica de las variables de estado.

La metodología utilizada para la estimación de las variables de estado del modelo corresponde a una adaptación del Filtro de Kalman (Kalman (1960)). Esta metodología, ideada originalmente para controlar procesos de ingeniería y automatización, permite el cálculo recursivo de estimadores óptimos de variables de estado no observables, utilizando toda la información disponible hasta algún instante de tiempo. Para estimar los parámetros del modelo se utiliza el método de máxima verosimilitud.

En este caso se optará por la utilización del Filtro de Kalman para paneles incompletos, fundamentalmente por los buenos resultados que esta metodología ha tenido para el caso de modelos de *commodities* y tasas de interés. (Sørensen, 2002; Cortázar & Naranjo, 2006; Cortázar, Schwartz & Naranjo, 2007).

5.1 El Filtro de Kalman

La aplicación del Filtro de Kalman es posible para modelos dinámicos multifactoriales que puedan ser representados en el **espacio de estados**, el que queda definido por medio de ecuaciones de medida y de transición.

La **ecuación de medida**. Para cada instante del tiempo ésta ecuación relaciona un vector de variables observables z_t con un vector de variables no observables llamadas variables de estado, x_t :

$$z_t = H_t x_t + d_t + v_t \quad v_t \sim N(0, R_t)$$

Donde z_t es un vector de dimensión $m \times 1$, H_t es una matriz de $m \times n$, d_t es un vector de $m \times 1$ y v_t es un vector de errores Gaussianos no correlacionados entre sí, con media cero y

matriz de varianza-covarianza R_t . Este último término permite la incorporación de errores de medición en los datos observados.

La **ecuación de transición**. Describe la dinámica de las variables de estado:

$$x_t = A_t x_{t-1} + c_t + w_t \quad w_t \sim N(0, Q_t)$$

Donde A_t es una matriz de dimensión $n \times n$, c_t un vector de dimensión $n \times 1$ y w_t es un vector de errores Gaussianos no correlacionados entre sí, con media cero y matriz de varianza-covarianza Q_t .

El Filtro de Kalman es un proceso iterativo que entrega estimadores óptimos de las variables de estado, \hat{x}_t , dada toda la información hasta el instante t . Este proceso se puede dividir en dos etapas, la primera corresponde a la etapa de predicción, y la segunda a la etapa de actualización.

Sea P_t la matriz de varianza-covarianza de los errores de estimación:

$$P_t = E(x_t - \hat{x}_t)(x_t - \hat{x}_t)'$$

Luego, dados \hat{x}_{t-1} y P_{t-1} , los que incluyen toda la información hasta el instante $t - 1$, el estimador de las variables de estado y de la matriz de varianza-covarianza de los errores de estimación en el momento t están dados por:

$$\hat{x}_{t|t-1} = A_t \hat{x}_{t-1} + c_t$$

$$P_{t|t-1} = A_t P_{t-1} A_t' + Q_t$$

Estas ecuaciones corresponden a la etapa de predicción.

El pronóstico del vector variables de estado permite realizar una predicción sobre las variables observadas:

$$\hat{z}_{t|t-1} = H_t \hat{x}_{t|t-1} + d_t$$

Cuando hay nueva información (z_t), se incorpora para obtener una mejor estimación de las variables de estado y de la matriz de varianza-covarianza de los errores:

$$\hat{x}_t = \hat{x}_{t|t-1} + P_{t|t-1} H_t' F_t^{-1} (z_t - \hat{z}_{t|t-1}) \quad (5.1)$$

$$P_t = P_{t|t-1} - P_{t|t-1} H_t' F_t^{-1} H_t P_{t|t-1} \quad (5.2)$$

Con

$$F_t = H_t P_{t|t-1} H_t' + R_t \quad (5.3)$$

La ecuación 5.3 muestra la varianza de la predicción de las innovaciones. Las ecuaciones 5.1 y 5.2 corresponden a la etapa de actualización⁵. Esta etapa corresponde al cálculo de la esperanza condicional de las variables de estado (x_t) dado la historia de observaciones z_1, z_2, \dots, z_{t-1} y la nueva información disponible z_t .

Para el uso de paneles de datos incompletos, la dimensión de las filas, m , de los vectores z_t , d_t y v_t , y de las matrices H_t y R_t , que en la forma tradicional del filtro es constante, pasa a ser ahora una variable del tipo m_t , y corresponde al número de observaciones de las que se disponga en t . La etapa de estimación permanece inalterada.

En este caso el filtro es utilizado para la estimación de las variables de estado del modelo. La estimación de los parámetros ($\hat{\Psi}$) se realiza mediante el método de máxima verosimilitud. Este método consiste en la maximización del logaritmo de la función de verosimilitud de las innovaciones:

$$\log L(\Psi) = -\frac{1}{2} \sum_t (z_t - z_t^-)' F_t^{-1} (z_t - z_t^-)$$

Bajo ciertas condiciones de regularidad, se tiene que $\hat{\Psi}$ distribuye asintóticamente normal con media Ψ (parámetros verdaderos) y varianza dada por $I(\Psi)^{-1}$, con⁶:

⁵ Ver Harvey (1989).

⁶ La diagonal de esta matriz contiene las varianzas de los errores de estimación.

$$I(\Psi) = \frac{\partial^2 \log L(\Psi)}{\partial \Psi \partial \Psi'}$$

Dado que no hay una expresión analítica para la matriz de información ($I(\Psi)$), las segundas derivadas deben ser calculadas de forma numérica. La evaluación de la matriz de información entrega detalles adicionales sobre la identificación de los parámetros.

5.2 Metodología de Estimación Conjunta

Para el caso de la estimación conjunta que se realiza para el modelo MM, ésta será desarrollada en dos etapas, por un lado comenzará con la estimación del *commodity* del que se tiene información en el largo plazo, para continuar con la del que se quiere estimar sus precios en plazos que no se tiene información.

La primera etapa se llevará a cabo con la finalidad de obtener el proceso que debe seguir la variable de estado no estacionaria, ya que como se explicó anteriormente, dicha variable de estado es la que nos permitirá transferir información entre ambos *commodities*.

Como segunda etapa, se estimará un modelo individual para el *commodity* del que se tiene sólo información en el corto plazo, pero se restringirá el proceso de la variable de estado no estacionaria al que fue obtenido en la primera etapa de estimación.

5.2.1 Efecto de la Estimación Conjunta en Ambas Etapas de Estimación

En el caso de la estimación del primer modelo, correspondiente al *commodity* del cual se tiene información en el largo plazo, la variación que se ha realizado a la metodología para lograr esta estimación conjunta no la afecta de ninguna manera, siendo realizada de la misma manera que una estimación individual clásica.

Para la estimación del segundo *commodity*, del cual sólo se tiene información en el corto plazo, si existen algunas modificaciones, esto debido a que, como se explico en el capítulo 3,

existen ciertos parámetros que son compartidos por ambos *commodities* y, por lo tanto, no deben ser reestimados. De esta manera, la estimación del modelo se realizará como un modelo individual, fijando algunos parámetros, los que fueron obtenidos de la primera etapa de estimación.

De esta manera, en la figura 5.1 puede ser observado qué parámetros deben ser estimados en cada modelo y, por lo tanto, cómo varía la cantidad de parámetros a ser estimados para las distintas etapas de la estimación.

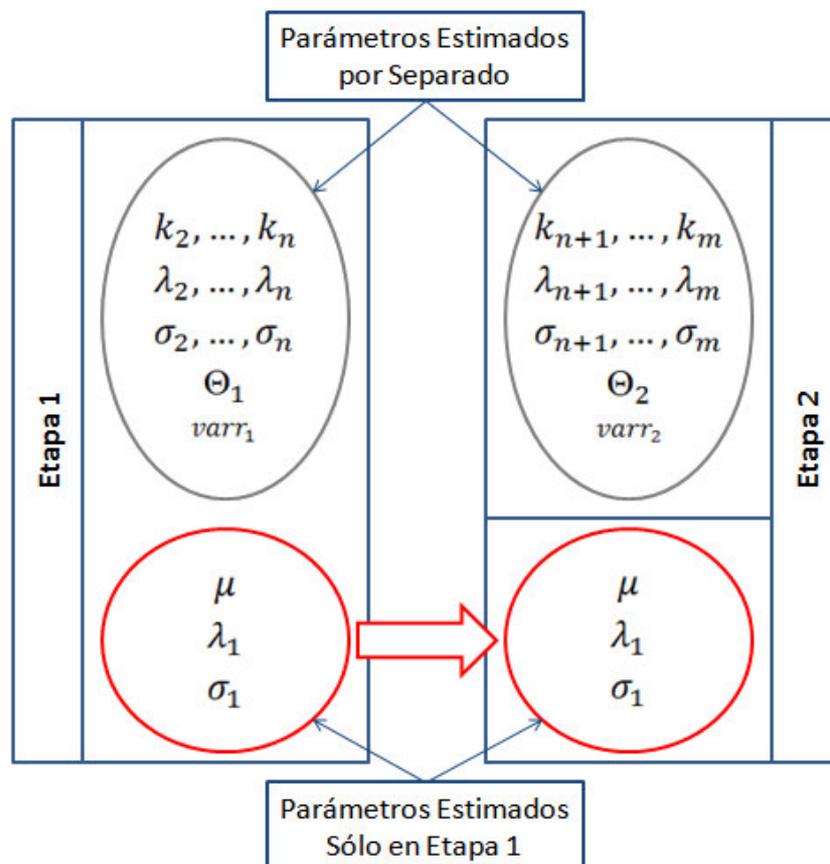


Figura 5.1. Parámetros estimados en cada etapa de la Estimación Conjunta. Se muestra en la parte superior los parámetros independientes de cada etapa (que deben ser estimados en dicha etapa) y en la parte inferior los parámetros compartidos, estimados sólo en la etapa 1.

6. ANÁLISIS EMPÍRICO

Para realizar el análisis empírico se analizarán tres *commodities* -la Plata, el Cobre y el Petróleo Brent- utilizando para todos los casos como *commodity* largo el Petróleo WTI. Para cada uno de estos *commodities*, se estimarán tres modelos, uno individual, uno *multicommodity* y uno *multicommodity* modificado (MM).

Para analizar la capacidad de extrapolación de la curva en el largo plazo de los distintos modelos, sólo se utilizará información del corto plazo para las estimaciones, dejando las observaciones más largas como una medida de desempeño de las curvas obtenidas, analizando el nivel de ajuste logrado en dichas observaciones.

Las estimaciones para los distintos modelos se realizarán utilizando el filtro de Kalman para paneles incompletos (Cortázar y Naranjo 2006), como fue explicado en la sección 5.

Los resultados se compararán a de su ajuste en precios, comparando los precios de las transacciones de largo plazo y los obtenidos con los distintos modelos.

6.1 Paneles de Datos Utilizados

Los datos utilizados consisten en las observaciones diarias de precios de cierre de contratos futuros de los distintos *commodities* a estimar.

Para todos los *commodities* anteriormente descritos existirán cuatro paneles de datos, como puede ser observado en la figura 6.1. Estos paneles de datos serán:

- *In Sample*: es el panel de datos que se utilizará para la estimación de los parámetros y las variables de estado del modelo.
- *Out of Sample 1*: es el panel de datos utilizado para el cálculo de las variables de estado, pero que no son utilizados para la calibración de parámetros.
- *Out of Sample 2*: este panel de datos no es utilizado para la estimación de parámetros ni para el cálculo de las variables de estado, sino que sólo es utilizado para medir el

desempeño de la estimación de precios realizada por el modelo durante el periodo de tiempo en que **si** se utilizó información para la estimación de parámetros.

- *Out of Sample 3*: este panel de datos no es utilizado para la estimación de parámetros ni para el cálculo de las variables de estado, sino que sólo es utilizado para medir el desempeño de la estimación de precios realizada por el modelo durante el periodo de tiempo en que **no** se utilizó información para la estimación de parámetros.

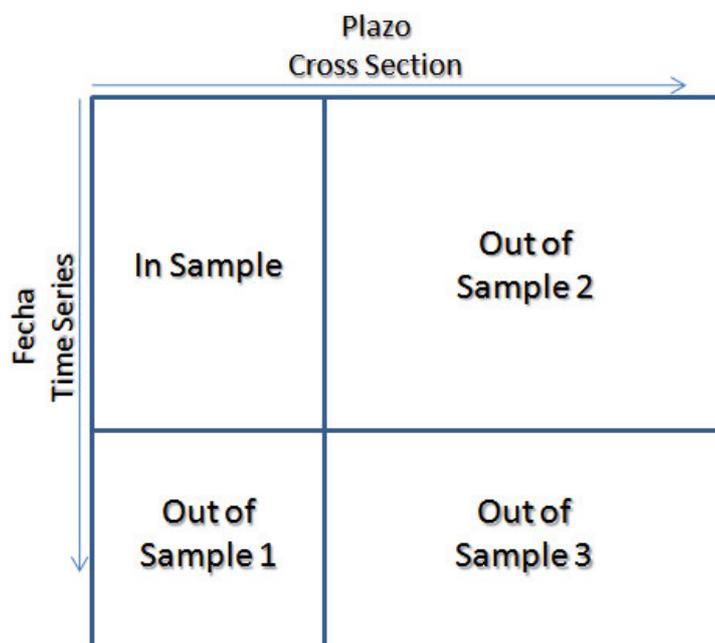


Figura 6.1. Paneles de datos utilizados para las estimaciones.

A continuación se explica más detalladamente los datos utilizados para la estimación de cada uno de los *commodities* analizados.

6.1.1 Contratos Futuros de Plata

Los contratos futuros de plata utilizados para calibrar los modelos corresponden a los futuros transados en NYMEX, cuyos vencimientos varían entre 1 mes y 5 años. Estos contratos son

valorizados en centavos de dólar por onza troy (unidad de medida utilizada en metales preciosos).

El panel de datos utilizado está formado por los precios de todos los contratos diarios desde enero del 2004 hasta octubre del 2009 y se separará en los cuatro diferentes paneles de datos antes mencionados. Los datos utilizados en cada panel de datos, como también se explica en la figura 6.2, son:

- *In Sample*: Se utilizarán los contratos hasta dos años desde enero del 2004 hasta diciembre del 2007.
- *Out of Sample 1*: Se utilizarán los contratos hasta dos años desde enero del 2008 hasta octubre del 2009.
- *Out of Sample 2*: Se utilizarán los contratos de más de dos años desde enero del 2004 hasta diciembre del 2007.
- *Out of Sample 3*: Se utilizarán los contratos de más de dos años desde enero del 2008 hasta octubre del 2009.

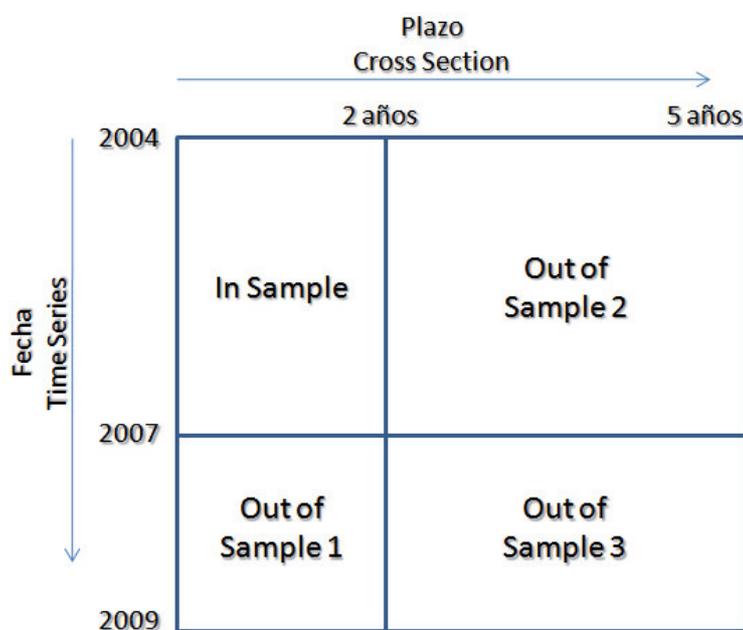


Figura 6.2. Paneles de datos utilizados para la estimación de la Plata.

6.1.2 Contratos Futuros de Cobre

Los contratos futuros de cobre utilizados para calibrar los modelos corresponden a los futuros transados en COMEX y LME. En el caso de los contratos transados en LME, hoy en día son 6 contratos diarios, cuyos vencimientos varían entre 1 mes y 10,25 años. Para el caso de los contratos transados en COMEX, existen 24 contratos, cuyos vencimientos van desde 1 mes a 2 años. En el caso de estos últimos, sólo utilizaremos 5 de estos contratos, para darles una importancia similar a ambos mercados. Los contratos serán seleccionados con la finalidad de rellenar los espacios en los cuales no existe información en LME, que serán los más cercanos a 6, 9, 12, 18 y 21 meses. Los precios utilizados son en centavos de dólar por libra.

El panel de datos utilizado son todos los contratos diarios desde enero de 2004 hasta octubre del 2009 y se separará en los cuatro diferentes paneles de datos antes mencionados. Los datos utilizados en cada panel de datos, como también se explica en la figura 6.3, son:

- *In Sample*: Se utilizarán los contratos hasta dos años desde enero del 2004 hasta diciembre del 2007.
- *Out of Sample 1*: Se utilizarán los contratos hasta dos años desde enero del 2008 hasta octubre del 2009.
- *Out of Sample 2*: Se utilizarán los contratos de más de dos años desde enero del 2004 hasta diciembre del 2007.
- *Out of Sample 3*: Se utilizarán los contratos de más de dos años desde enero del 2008 hasta octubre del 2009.

Es importante destacar que el contrato a 10,25 años transado en la bolsa LME, sólo existe desde fines del año 2008, por lo que sólo será agregado al panel de datos "*Out of Sample 3*".

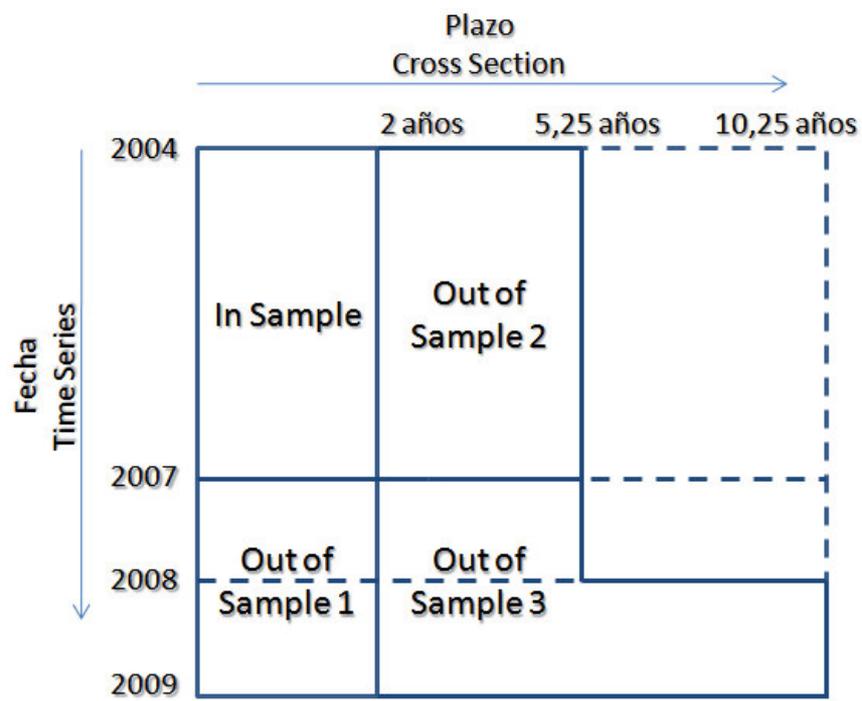


Figura 6.3. Paneles de datos utilizados para la estimación del Cobre.

6.1.3 Contratos Futuros de Petróleo Brent

Este *commodity* se comparará con los resultados publicados en Cortázar, Milla y Severino (2008), por lo que los datos utilizados serán los mismos que los utilizados en dicha investigación. Los contratos futuros de petróleo Brent utilizados para calibrar los modelos corresponden a los futuros transados en ICE, los que van desde 1 mes a 7 años. Estos contratos son transados en dólares por barril.

El panel de datos utilizado son todos los contratos diarios desde enero del 2001 hasta diciembre del 2006 y se separará en tres diferentes subgrupos, como también se explica en la figura 6.4:

- *In Sample*: Se utilizarán los contratos hasta 2,5 años desde enero del 2001 hasta diciembre del 2004.
- *Out of Sample 1*: Se utilizarán los contratos hasta 2,5 años desde enero del 2005 hasta diciembre del 2006.
- *Out of Sample 3*⁷: Se utilizarán los contratos de más de 2,5 años desde enero del 2005 hasta diciembre del 2006.

El panel de datos *Out of Sample 2* no es utilizado en Cortázar, Milla y Severino (2008).

⁷ Este panel de datos es denominado "*Extreme Out of Sample*" en Cortázar, Milla y Severino (2008).

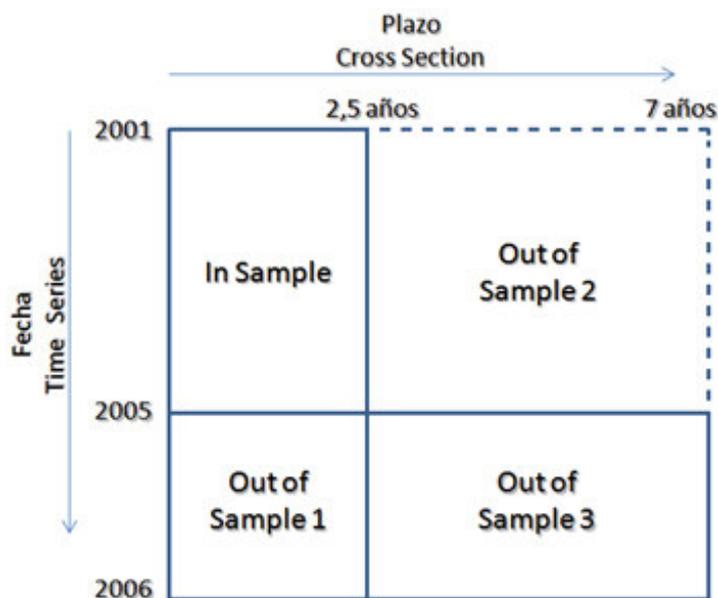


Figura 6.4. Paneles de datos utilizados para la estimación del Petróleo Brent.

6.1.4 Contratos Futuros de Petróleo WTI

Este *commodity* será el utilizado para las estimaciones conjuntas, es por esto que se deberá estimar también un modelo individual para sus precios de contratos futuros. El modelo estimado será uno de 3 factores, utilizando toda la información existente desde enero de 2004 hasta octubre de 2009.

6.2 Estimación de Modelos

Como se explico anteriormente, se realizarán tres estimaciones para cada *commodity* a analizar. Es importante destacar que en el caso del petróleo Brent sólo se estima un modelo MM, comparándolo con los resultados del modelo individual y *multicommodity* publicados en Cortázar, Milla y Severino (2008). Para la plata y el cobre se realizaron las tres estimaciones, las que corresponden a un modelo individual, un modelo *multicommodity* y un modelo MM, donde estos últimos dos modelos utilizan el petróleo WTI como *commodity* largo.

Así, para analizar el desempeño que tiene el modelo MM, se comparará cada una de las estimaciones realizadas, con una de un modelo individual con la misma cantidad de factores y también con un modelo *multicommodity* con un factor común y $(nf - 1)$ factores independientes para cada commodity, siendo nf la cantidad de factores con que se estimó tanto el modelo MM como el individual.

En el caso de la plata y el cobre, los modelos individuales y MM estimados serán de tres factores. Para el caso del modelo *multicommodity*, se estimarán un modelo (1,2,2), es decir, tendrá un factor común y dos factores independientes para cada *commodity*. Para el petróleo Brent, sólo se estimará un modelo MM de cuatro factores, de manera de hacerlo comparable con lo publicado en Cortázar, Milla y Severino (2008), donde al petróleo Brent se le asignaban los mismos 4 factores de riesgo.

En las tablas 6.1, 6.2 y 6.3 se muestran los parámetros obtenidos en los tres modelos estimados para cada uno de los *commodities* utilizados, donde se incluyen los obtenidos en Cortázar, Milla y Severino (2008) para el Brent.

Se puede observar que todos los parámetros de los modelos estimados son significativos.

Parámetro	Individual	Multicommodity	Multicommodity Modificado
k_2	0,904 (0,004)	0,275 (0,001)	0,770 (0,000)
k_3	0,300 (0,003)	0,798 (0,003)	0,316 (0,000)
k_4	-	0,131 (0,001)	-
k_5	-	0,412 (0,002)	-
σ_1	0,219 (0,000)	0,359 (0,000)	0,275 (0,008)
σ_2	0,165 (0,001)	0,151 (0,0101)	0,145 (0,001)
σ_3	0,197 (0,000)	0,216 (0,001)	0,220 (0,000)
σ_4	-	0,453 (0,002)	-
σ_5	-	0,304 (0,001)	-
ρ_{12}	-0,133 (0,002)	0,121 (0,001)	-0,177 (0,008)
ρ_{13}	-0,217 (0,001)	-0,122 (0,001)	-0,217 (0,000)
ρ_{14}	-	0,046 (0,001)	-
ρ_{15}	-	0,139 (0,001)	-
ρ_{23}	-0,341 (0,003)	0,149 (0,005)	-0,528 (0,001)
ρ_{24}	-	-0,154 (0,007)	-
ρ_{25}	-	-0,107 (0,008)	-
ρ_{34}	-	-0,177 (0,001)	-
ρ_{35}	-	0,111 (0,008)	-
ρ_{45}	-	-0,138 (0,001)	-
λ_1	0,102 (0,011)	0,054 (0,000)	0,197 (0,001)
λ_2	-0,413 (0,069)	0,318 (0,001)	-0,405 (0,054)
λ_3	0,219 (0,061)	0,276 (0,001)	0,162 (0,068)
λ_4	-	0,105 (0,000)	-
λ_5	-	0,185 (0,001)	-
μ	0,062 (0,010)	0,005 (0,000)	0,164 (0,002)
ξ_{CL}	-	0,018 (0,000)	-
ξ_{SI}	0,002 (0,000)	0,011 (0,000)	0,002 (0,000)
δ	-	0,997 (0,004)	-

Tabla 6.1. Parámetros estimados para los modelos de Plata.

Parámetro	Individual	Multicommodity	Multicommodity Modificado
k_2	2,853 (0,225)	0,797 (0,033)	1,659 (0,087)
k_3	0,585 (0,031)	0,483 (0,014)	0,386 (0,007)
k_4	-	0,306 (0,001)	-
k_5	-	0,100 (0,000)	-
σ_1	0,363 (0,013)	0,260 (0,000)	0,275 (0,008)
σ_2	0,199 (0,020)	0,424 (0,007)	0,315 (0,015)
σ_3	0,410 (0,016)	0,362 (0,007)	0,727 (0,042)
σ_4	-	0,500 (0,005)	-
σ_5	-	0,287 (0,003)	-
ρ_{12}	-0,227 (0,112)	0,460 (0,062)	0,395 (0,114)
ρ_{13}	-0,250 (0,020)	-0,186 (0,003)	-0,484 (0,035)
ρ_{14}	-	-0,500 (0,008)	-
ρ_{15}	-	-0,172 (0,003)	-
ρ_{23}	0,099 (0,033)	-0,201 (0,016)	-0,645 (0,009)
ρ_{24}	-	0,209 (0,003)	-
ρ_{25}	-	-0,404 (0,010)	-
ρ_{34}	-	-0,085 (0,001)	-
ρ_{35}	-	-0,077 (0,002)	-
ρ_{45}	-	-0,448 (0,006)	-
λ_1	0,238 (0,030)	0,149 (0,000)	0,197 (0,001)
λ_2	0,320 (0,115)	0,363 (0,007)	0,531 (0,147)
λ_3	0,388 (0,160)	0,271 (0,003)	-0,754 (0,219)
λ_4	-	0,138 (0,002)	-
λ_5	-	0,051 (0,000)	-
μ	0,057 (0,028)	0,119 (0,000)	0,164 (0,002)
ξ_{CL}	-	0,013 (0,000)	-
ξ_{HG}	0,024 (0,000)	0,011 (0,000)	0,024 (0,000)
δ	-	0,994 (0,035)	-

Tabla 6.2. Parámetros estimados para los modelos de Cobre.

Parámetro	Individual	Multicommodity	Multicommodity Modificado
k_2	0,460 (0,006)	0,384 (0,005)	0,451 (0,000)
k_3	0,697 (0,005)	0,911 (0,002)	0,927 (0,000)
k_4	6,951 (0,094)	0,435 (0,001)	6,951 (0,026)
σ_1	0,252 (0,003)	0,196 (0,000)	0,424 (0,000)
σ_2	0,885 (0,007)	0,178 (0,003)	0,886 (0,000)
σ_3	1,000 (0,006)	0,336 (0,003)	1,000 (0,000)
σ_4	0,121 (0,005)	0,080 (0,003)	0,178 (0,001)
ρ_{12}	-0,567 (0,003)	-0,389 (0,022)	-0,567 (0,001)
ρ_{13}	0,525 (0,003)	0,370 (0,020)	0,525 (0,000)
ρ_{14}	-0,055 (0,002)	-0,192 (0,017)	-0,110 (0,000)
ρ_{23}	-0,965 (0,011)	-0,589 (0,004)	-0,965 (0,000)
ρ_{24}	0,275 (0,025)	0,180 (0,007)	0,275 (0,000)
ρ_{34}	-0,310 (0,023)	-0,087 (0,006)	-0,310 (0,000)
λ_1	0,051 (0,001)	0,022 (0,000)	0,079 (0,000)
λ_2	-0,068 (0,359)	0,046 (0,058)	0,583 (0,279)
λ_3	0,213 (0,450)	-0,003 (0,138)	0,692 (0,356)
λ_4	-0,179 (0,080)	0,017 (0,000)	-0,179 (0,094)
μ	0,000 (0,001)	0,002 (0,000)	0,001 (0,000)
ξ_{CL}	-	0,005 (0,000)	-
ξ_{CB}	0,003 (0,000)	0,008 (0,000)	0,003 (0,000)
δ_{11}	-	1,000 (0,001)	-
δ_{12}	-	1,000 (0,000)	-
δ_{13}	-	1,000 (0,002)	-
δ_{14}	-	-	-
δ_{21}	-	1,000 (0,001)	-
δ_{22}	-	1,000 (0,000)	-
δ_{23}	-	1,000 (0,000)	-
δ_{24}	-	1,000 (0,003)	-

Tabla 6.3. Parámetros estimados para los modelos de Brent.

6.3 Resultados

Para analizar los resultados de las estimaciones se utilizará el Ajuste de Precios, que mide el error respecto a los precios reales existentes para los contratos futuros de los *commodities* modelados. Por otro lado, en el anexo C se puede ver el ajuste de volatilidad, el que mide las diferencias entre la estructura de volatilidad teórica extraída del modelo y la empírica extraída de los datos⁸.

6.3.1 Ajuste de Precios

En esta sección se verá el comportamiento del modelo en *commodities* con distintos niveles de correlación, partiendo de los menos correlacionados a los más. En estos casos, se analizarán tres cosas por separado:

- Con el set de datos definido *In Sample* se analizará que tan bien ajusta el modelo en el periodo donde se utilizaron los datos tanto para calibrar parámetros como para calcular las variables de estado.
- Con el set de datos definido *Out of Sample 1* se analizará que tan bien sirve el modelo para tener una extrapolación *time series*, es decir, se busca observar que tan bien funciona el modelo para calcular curvas de futuros diarias sin tener la necesidad de recalibrar los parámetros todos los días.
- Con los sets de datos definidos *Out of Sample 2 y 3* se analizará la precisión con que el modelo estima precios futuros en periodos donde no existe información, permitiendo así una extrapolación *cross-section* de las curvas.

Así, el análisis de los subconjuntos de datos antes descritos para los distintos *commodities* estudiados se ve a continuación:

⁸ Para este trabajo se le entrego mayor relevancia al ajuste de precio. Para lograr mejores ajustes de volatilidad muchas veces hay que estimar modelos con un mayor número de factores, por ejemplo en Cortázar, Milla y Severino (2008) fue necesario utilizar 4 factores para estimar el Brent, cuando con sólo 3 ya se logra un buen ajuste de precios.

a) Plata

En las figuras 6.5 y 6.6 se pueden observar las estimaciones logradas con los tres modelos para el día 13 de abril del 2004 y el 25 de abril del 2008 respectivamente. Tal como se explicó anteriormente, todos los contratos a un plazo mayor de 2 años son incluidos en el set de datos *Out of Sample* 2 o 3, dependiendo de si en dichas fechas se utilizó información para estimar los parámetros estructurales del modelo o no. En el caso de las figuras 6.5 y 6.6 se pueden ver ambos set de datos. Estos son los datos que utilizaremos para comprobar la capacidad de estimar precios del modelo para plazos en los cuales no se tiene información.

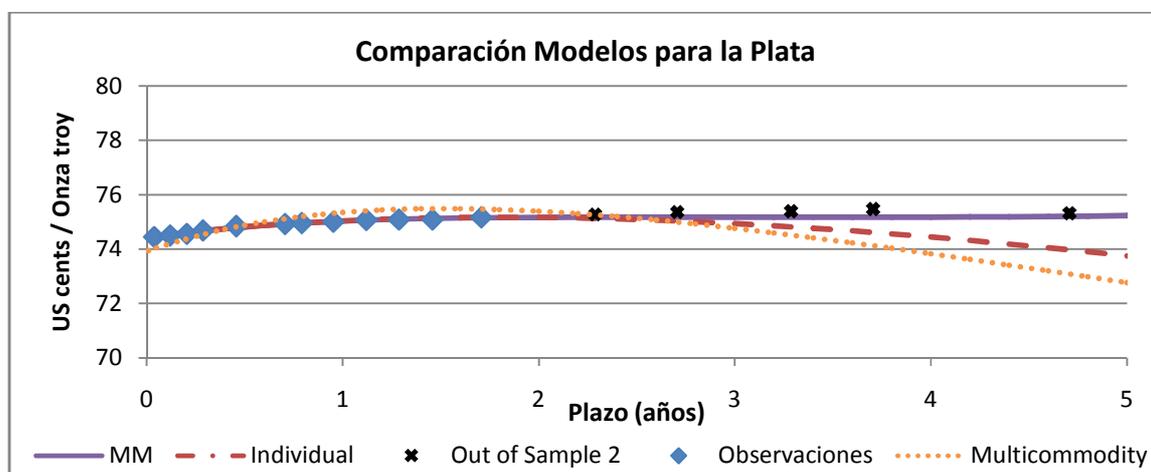


Figura 6.5. Curvas de Plata para el 13/04/2004.

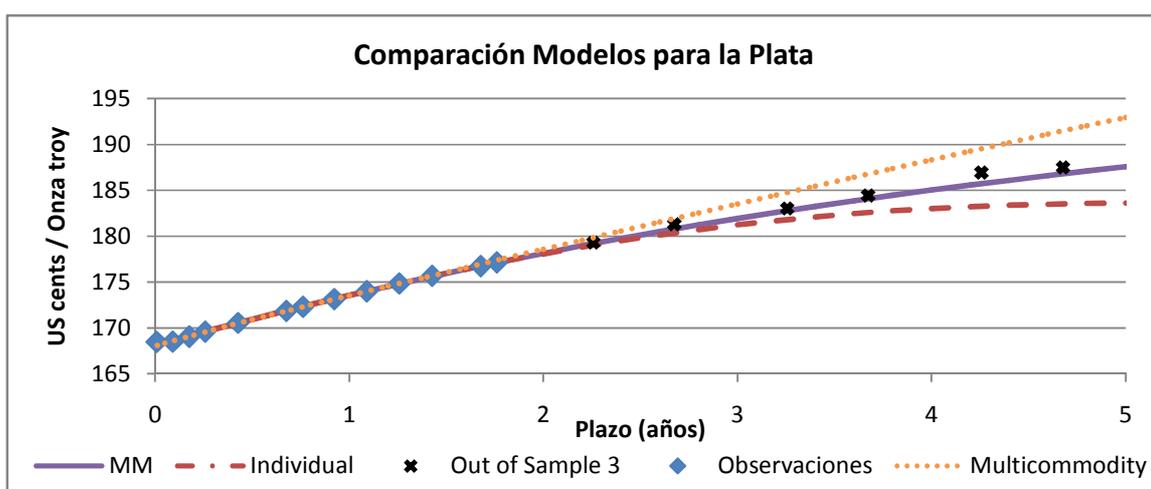


Figura 6.6. Curvas de Plata para el 25/04/2008.

Se puede observar que para ambos días, donde se representan set de datos distintos, el modelo MM entrega mejores resultados de ajuste.

Por otro lado, en la tabla 6.4 se pueden observar los errores para los distintos set de datos descritos anteriormente. Se puede observar que los errores que el modelo MM presenta en el periodo en que se tiene información (primeros dos años de *cross-section*, representado en los paneles de datos *In Sample* y *Out of Sample 1*) son del nivel del modelo individual, los que a su vez son inferiores a los obtenidos en el modelos *multicommodity*. Por otro lado, al analizar la extrapolación de la curva (representados en los paneles de datos *Out of Sample 2* y *Out of Sample 3*), se puede ver que para este caso, en que los *commodities* tienen un nivel bajo de correlación, el modelo MM es sustancialmente mejor que los otros dos modelos, obteniendo errores significativamente inferiores.

	EM Plata Individual	EM Plata Multi.	EM Plata MM	RECM Plata Individual	RECM Plata Multi.	RECM Plata MM
<i>In Sample</i>	0,00%	0,00%	0,00%	0,09%	0,22%	0,09%
<i>Out of Sample 1</i>	0,00%	0,01%	0,00%	0,05%	0,18%	0,04%
<i>Out of Sample 2</i>	-1,05%	0,52%	-0,35%	1,68%	2,41%	1,15%
<i>Out of Sample 3</i>	-1,65%	1,48%	-0,82%	2,08%	2,22%	1,10%

Tabla 6.4. Comparación de errores para modelo individual, *multicommodity* y *multicommodity* modificado (MM). Error Medio (EM) y Raíz Cuadrada del Error Cuadrático Medio (RECM).

En la figura 6.7 se puede observar como la mejora en estimación de precios de contratos futuros va mejorando aún más a medida que aumenta el plazo en el cual se está estimando precios.

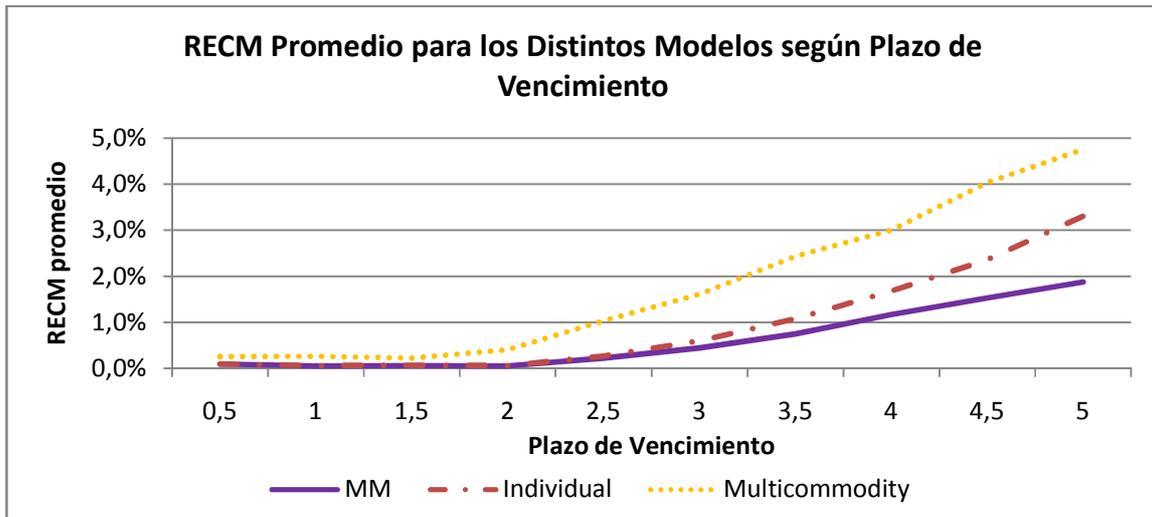


Figura 6.7. RECM promedio para los distintos modelos y distintos plazos de vencimiento.

Por otro lado, en la figura 6.8 se puede observar la probabilidad acumulada de que un error de extrapolación esté en cierto nivel. Es decir, dado un error establecido, se muestra cuál es la probabilidad que el error sea de dicho nivel o menor. Esto es calculado con las observaciones de largo plazo históricas desde enero del 2004 hasta octubre del 2009 y sus respectivas estimaciones para los distintos modelos.

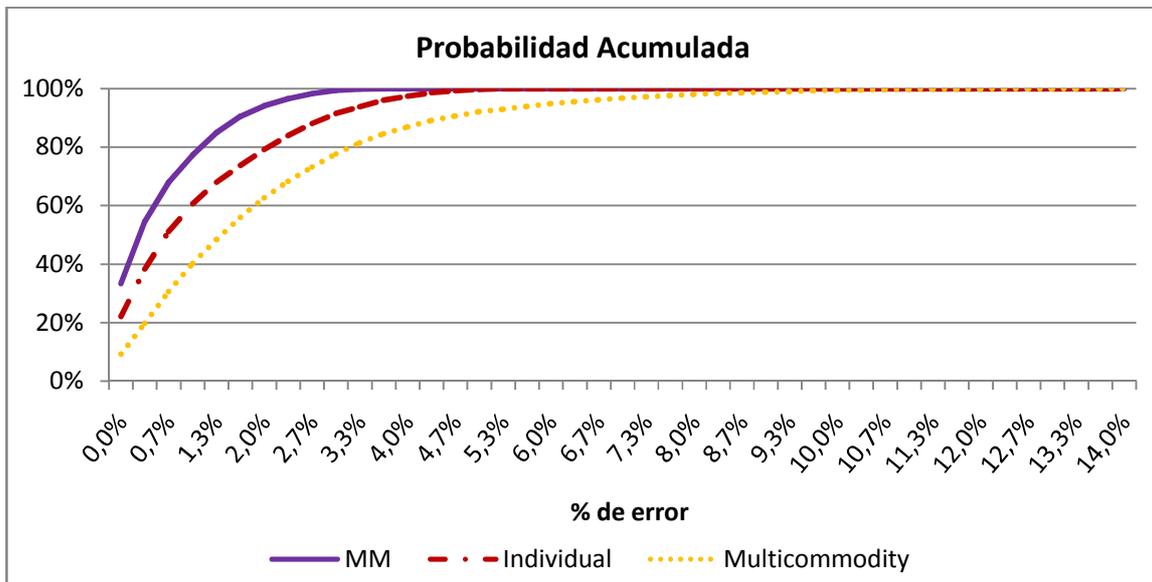


Figura 6.8. Probabilidad acumulada de errores de extrapolación para los distintos modelos.

b) *Cobre*

En las figuras 6.9 y 6.10 se pueden observar las estimaciones logradas con los tres modelos para los días 30 de junio del 2004 y 5 de diciembre del 2008 respectivamente.

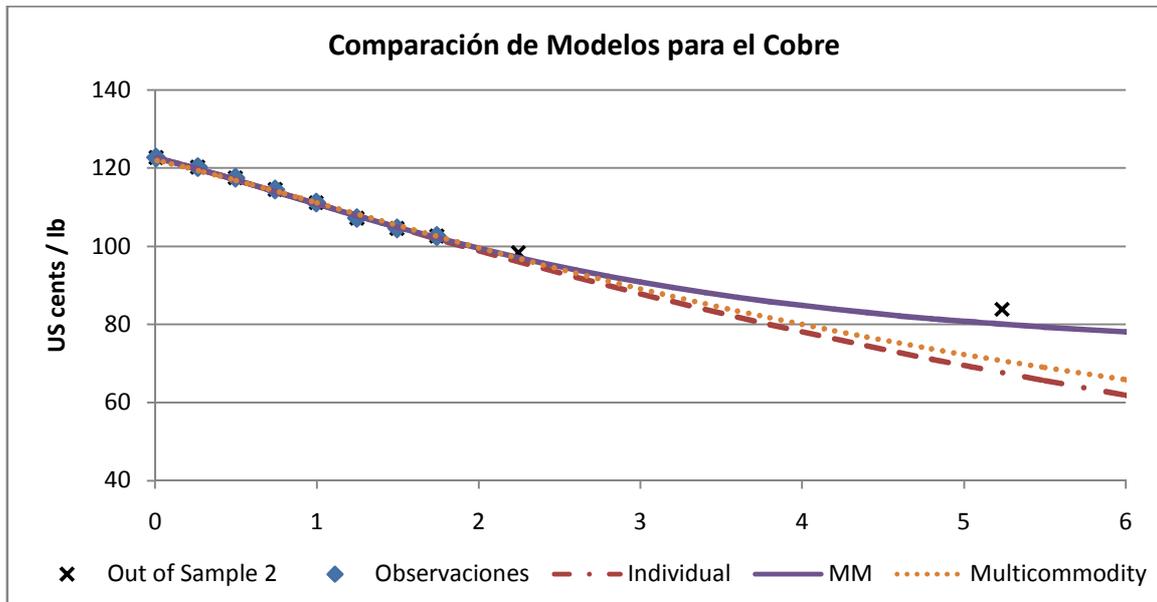


Figura 6.9. Curva de Cobre para el 30/06/2004.

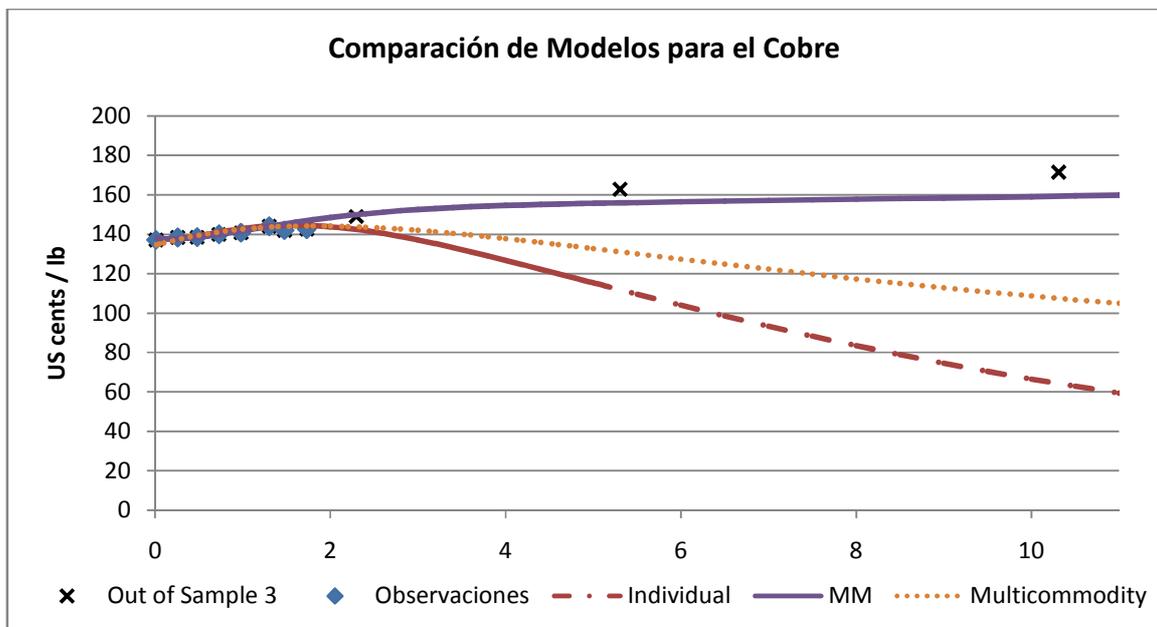


Figura 6.10. Curva de Cobre para el 05/12/2008.

Se puede observar que para ambos días, donde se representan sets de datos distintos, el modelo MM entrega mejores resultados de ajuste. También se observa que el modelo *multicommodity* se comporta mejor que el modelo individual, dando la intuición que el hecho de utilizar la información proporcionada por otro *commodity* para hacer la extrapolación de la curva de futuros si ayuda al ajuste.

Por otro lado, en la tabla 6.5 compara los errores de los distintos modelos para los distintos set de datos descritos anteriormente.

	EM Cobre Individual	EM Cobre Multi.	EM Cobre MM	RECM Cobre Individual	RECM Cobre Multi.	RECM Cobre MM
<i>In Sample</i>	0,03%	-0,11%	0,00%	2,25%	2,33%	2,26%
<i>Out of Sample 1</i>	0,02%	-0,34%	-0,01%	0,62%	0,84%	0,60%
<i>Out of Sample 2</i>	-5,08%	-3,71%	3,61%	10,86%	9,61%	8,70%
<i>Out of Sample 3</i>	-22,75%	-16,27%	-2,31%	31,14%	21,67%	5,71%

Tabla 6.5. Comparación de errores para modelo individual, *multicommodity* y *multicommodity* modificado (MM). Error Medio (EM) y Raíz Cuadrada del Error Cuadrático Medio (RECM).

Se puede observar que los errores que el modelo MM presenta en el periodo en que se tiene información (primeros dos años de *cross-section*, representado en los paneles de datos *In Sample* y *Out of Sample 1*) son del nivel del modelo individual y del *multicommodity*. Por otro lado, al analizar la extrapolación de la curva (representados en los paneles de datos *Out of Sample 2* y *Out of Sample 3*), se puede ver que para este caso, en que los *commodities* tienen bajos niveles de correlación, el modelo MM es sustancialmente mejor que los otros dos modelos, obteniendo errores significativamente inferiores.

Por otro lado, en las figuras 6.11 y 6.12 se puede observar la probabilidad acumulada de que un error de extrapolación esté en cierto nivel para las observaciones de cobre a 5,25 años y 10,25 años respectivamente. En la figura 6.13 se puede observar cómo la mejora en estimación de precios de contratos futuros obtenida por el modelo MM va aumentando a medida que aumenta el plazo en el cual se está estimando precios.

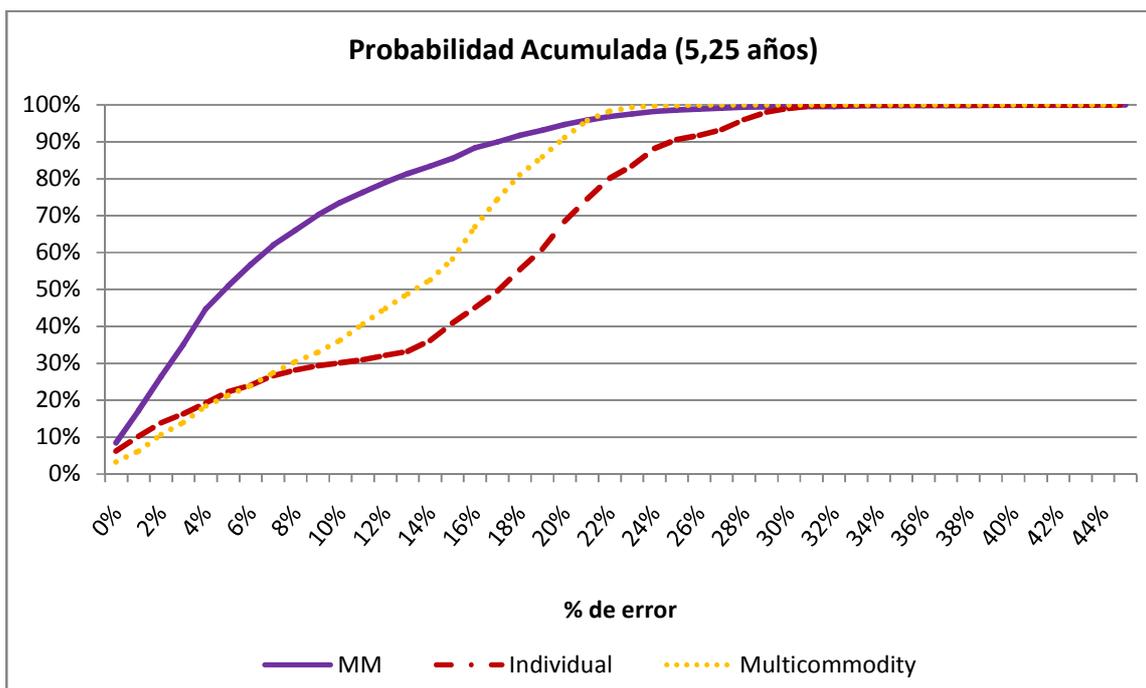


Figura 6.11. Probabilidad acumulada de errores de extrapolación para los distintos modelos.

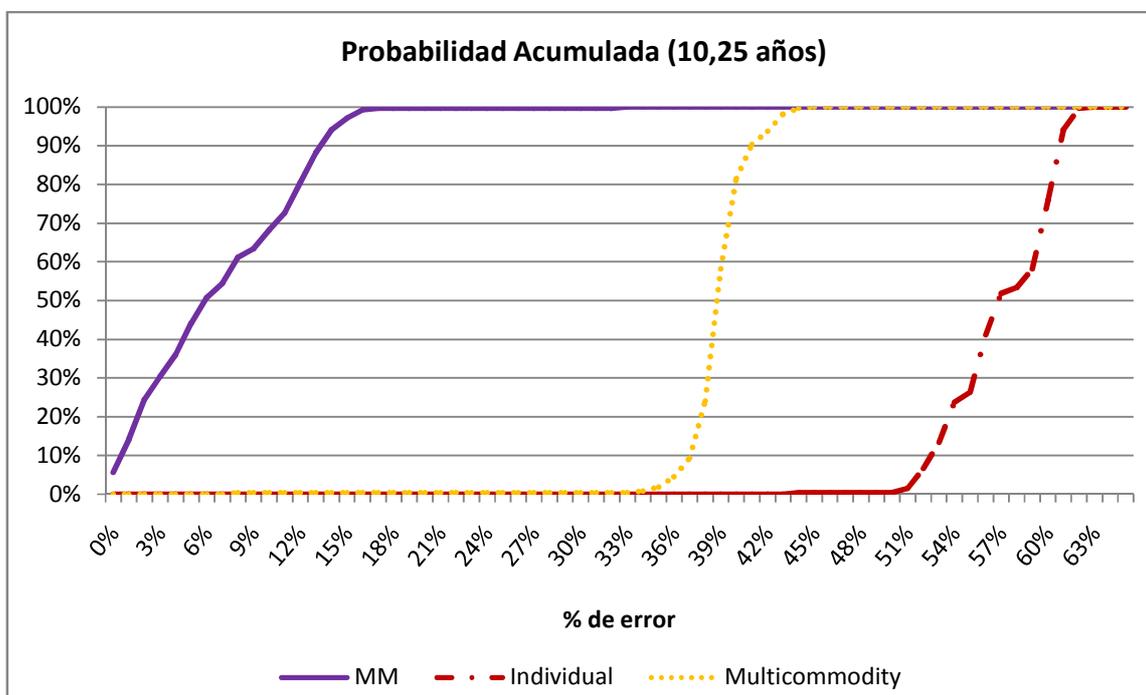


Figura 6.12. Probabilidad acumulada de errores de extrapolación para los distintos modelos.

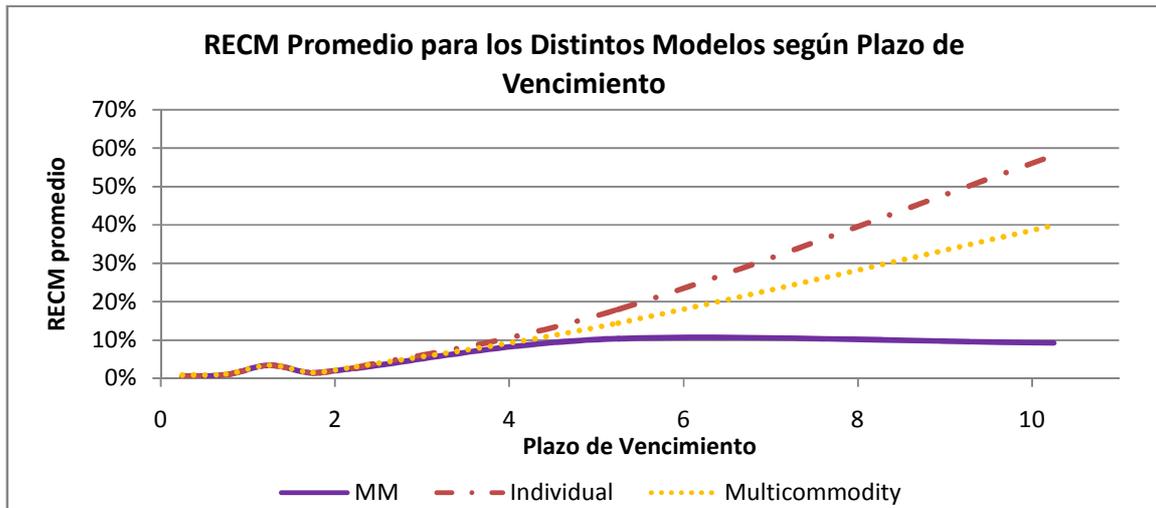


Figura 6.13. RECM promedio para los distintos modelos de cobre y distintos plazos de vencimiento.

A través de las últimas tres figuras se puede observar cómo la estimación obtenida con el modelo MM es consistentemente mejor durante todo el periodo de estimación, ya que se puede ver que para todos los plazos estudiados, el modelo MM obtiene mejores resultados.

c) *Petróleo Brent*

En el caso de petróleo Brent, el *benchmark* será los resultados publicados en Cortázar, Milla y Severino (2008). Así, en la tabla 6.6 se pueden observar los errores para los distintos set de datos descritos anteriormente. En este caso, como se decía anteriormente, los errores del modelo individual y del *multicommodity* son los publicados.

	EM Brent Individual	EM Brent Multi.	EM Brent MM	RECM Brent Individual	RECM Brent Multi.	RECM Brent MM
<i>In Sample</i>	0,00%	-0,01%	0,00%	0,31%	0,80%	0,31%
<i>Out of Sample 1</i>	1,17%	0,36%	-0,10%	2,86% ⁹	1,06%	0,32%
<i>Out of Sample 3</i> ¹⁰	4,26%	1,56%	-1,60%	5,15%	1,74%	2,39%

Tabla 6.6. Comparación de errores para modelo individual, *multicommodity* y *multicommodity* modificado (MM). Error Medio (EM) y Raíz Cuadrada del Error Cuadrático Medio (RECM)¹¹.

Se puede observar que en los sets de datos *In Sample* y *Out of Sample 1* los modelos individual y MM dan un mejor ajuste que el modelo *multicommodity*. Esto se debe a que estos set de datos son los utilizados para calcular las variables de estado, las que tienen mayor libertad para ajustar en los modelos individual y MM que en el modelo *multicommodity*.

En el caso del set de datos *Out of Sample 3*, se puede observar que el modelo MM se comporta mejor que el modelo individual, pero la mejor extrapolación se logra con el modelo *multicommodity*, lo que se puede deber al nivel de correlación que tienen estos *commodities*, ya que al tener un nivel de correlación tan alto, el hecho de compartir también el valor de las variables de estado puede aportar más información que el proceso por sí sólo. Como se vio anteriormente, a menores niveles de correlación esto no ocurría, y el modelo MM lograba el mejor ajuste.

⁹ Según la investigación desarrollada en esta tesis, este número no sería correcto y debiese ser 0,11%.

¹⁰ Denominado "*Extreme Out of Sample*" en Cortázar, Milla y Severino (2008).

¹¹ En Cortázar, Milla y Severino (2008) no existe el set de datos *Out of Sample 2*.

7. CONCLUSIONES

En esta tesis se propone un nuevo modelo para la estimación de precios de contratos futuros en periodos donde no existe información del *commodity* que se estima, pero que si existe para otros *commodities*.

La hipótesis es que, al estar inmersos en un sistema macroeconómico complejo y que afecta de alguna manera a todos los *commodities* existentes, es posible extraer información valiosa de un *commodity*, para así mejorar la estimación de otro para el cual no existe información de contratos en el largo plazo.

Para lograr la estimación antes descrita, se utilizó un modelo que considera que algunas variables de estado de los *commodities* siguen los mismos procesos, específicamente la variable no estacionaria, debido a que ésta explica la mayoría de la estructura de la curva en el largo plazo. Estos modelos son basados en el desarrollo de Cortázar y Naranjo (2006), quienes plantean un modelo de precios que contiene el mínimo número de parámetros y permite obtener fórmulas cerradas de valorización de contratos futuros cuando se suponen premios por riesgo constantes.

En la literatura vimos que se planteaban dos distintas maneras para la estimación de precios futuros y posterior extrapolación de la curva para el largo plazo. Por un lado estaba la estimación individual del modelo, la que entregaba el beneficio de la simplicidad, pero a su vez, entrega curvas que no dan ninguna seguridad con respecto a la estimación de precios para plazos en los que no se tiene información.

Por otro lado, existe la aproximación que desarrollan Cortázar, Milla y Severino (2008), quienes plantean un modelo en que los *commodities* comparten variables de estado (tanto el proceso como el valor de la variable de estado), restringiendo de gran manera el modelo, pero teniendo grandes resultados en *commodities* con alta correlación, beneficio que no se mantiene al disminuir la correlación de los *commodities* analizados. Por otro lado, la complejidad que tiene el modelo *multicommodity* es considerablemente mayor a la del modelo individual, debido a que tanto la matriz de observaciones como la cantidad de variables de

estado crece considerablemente a medida que se quieren estimar más *commodities* de forma conjunta.

El modelo planteado muestra en todos los ejemplos analizados tener un mejor ajuste en la estimación de precios de contratos futuros en el largo plazo que el modelo individual, teniendo un nivel de complejidad similar. Por otro lado, vemos como el ajuste mejora con respecto al modelo *multicommodity* a medida que la correlación de los *commodities* disminuye. Esto se explica debido a que las restricciones que plantea el modelo MM son considerablemente menores que las exigidas por el modelo *multicommodity*. Por otro lado, el modelo MM da la alternativa de realizar un proceso considerablemente más simple que el *multicommodity*.

En el desarrollo de esta investigación se realizaron estimaciones para distintos *commodities*, mostrando resultados que destacan el poder de extrapolación que la estimación conjunta, a través del modelo planteado, puede exhibir.

Las estimaciones se hicieron para la Plata, el Cobre y el Petróleo Brent, mostrando para todos los *commodities* mejoras considerables en la estimación de precios en el largo plazo, cuando no existe información, con respecto a la estimación individual, con un nivel de complejidad similar. Comparando con el modelo *multicommodity*, los resultados también muestran resultados similares en *commodities* altamente correlacionados, y mejoras sustanciales en *commodities* con bajos niveles de correlación, con un menor nivel de complejidad.

En resumen, a través de esta investigación, se refuerza la idea planteada por Cortázar, Milla y Severino (2008), que al estar inmerso en un sistema macroeconómico complejo, los *commodities* comparten información, principalmente de la tendencia en el largo plazo, la que puede ser obtenida a través de la dinámica de sus factores de riesgo, obteniendo mejoras sustanciales en la estimación de precios de contratos de largo plazo de *commodities*, para los cuales no exista información de mercado.

8. BIBLIOGRAFÍA

BLACK, F. y SCHOLES, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, Vol. 81, 637-654.

BRENNAN, M.J. y SCHWARTZ, E.S. (1985). Evaluating natural resources investments. *Journal of Business*, Vol. 58, N° 2, 135-157.

CASASSUS, J., y COLLIN-DUFRESNE, P. (2005). Stochastic Convenience Yield implied from Commodity Futures and Interest Rates. *The Journal of Finance*, 60, 2283- 2331.

CORTAZAR, G., MILLA, C., Y SEVERINO, F. (2008). A multicommodity model of futures prices: using futures prices of one commodity to estimate the stochastic process of another, *Journal of Futures Markets*. Vol. 26. N° 6, 537-560

CORTAZAR, G., y NARANJO, L. F. (2006). An N-Factor Gaussian Model of Oil Futures. *Journal of Futures Markets*. Vol. 26. N° 3, 243-268

CORTAZAR, G., y SCHWARTZ, E. S. (2003). Implementing a stochastic model for oil futures prices. *Energy Economics*, 25, 215-238.

CORTAZAR, G., SCHWARTZ, E. S. y NARANJO, L.F (2007). Term structure estimation in markets with infrequent trading. *International Journal of Finance & Economics*, Vol. 12, N°4, 353-369.

COX, J., INGERSOLL, J y ROSS, S (1981). A Re-examination of Traditional Hypotheses about the Term Structure of Interest Rates. *The Journal of Finance*, Vo. 36, N°4, 769-799.

DAI, Q. y SINGLETON, K.J. (2000). Specification analysis of affine term structure models. *The Journal of Finance*, Vol. 55, N° 5, 1943-1978.

DUFFIE, D. y KAN, R. (1996). A Yield-Factor Model of Interest Rates. *Mathematical Finance*, Vol. 6, N°4, 379-406.

DUFFIE, D., PAN, J., y SINGLETON, K. J. (2000). Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-diffusions. *Econometrica*, 68, 1343-1376.

GIBSON, R. y SCHWARTZ, E.S. (1990). Stochastic convenience yield and the pricing of oil contingent claims. *The Journal of Finance*, Vol. 45, N° 3, 959-976.

HARVEY, A. C. (1989). *Forecasting, structural time series models and the Kalman filter*, Cambridge University Press, Cambridge.

KALMAN, R.E. (1960). A new approach lo linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering, Transactions of the ASME*, Vol. 82, 35-45.

SCHWARTZ, E.S. (1997). The stochastic behaviour of commodity prices: Implications for valuation and hedging. *The Journal of Finance*, Vol. 52, N° 3, 923-973.

SCHWARTZ, E. S., y SMITH, J. E. (2000). Short-term variations and long-term dynamics in commodity prices. *Management Science*, 46, 893-911.

SØRENSEN, C. (2002). Modeling seasonality in agricultural commodity futures. *Journal of Futures Markets*, Vol. 22, 393-426.

9. ANEXOS

9.A. Modelos para la Estimación de Precios Existentes

a) *Modelo de Brennan y Schwartz (1985)*

Uno de los primeros modelos utilizados para estudiar la dinámica de los precios de commodities corresponde al de Brennan y Schwartz (1985), quienes suponen que el precio spot de un commodity sigue un proceso browniano geométrico. El modelo propuesto por estos autores es el siguiente:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dz_t$$

Donde S_t corresponde al precio spot, μ es la tasa de rentabilidad esperada neta y σ la volatilidad instantánea del retorno.

Al ajustar por riesgo, el proceso queda de la siguiente forma:

$$dS_t = (r - \delta)S_t dt + \sigma S_t dz_t$$

Donde r es la tasa de interés libre de riesgo y δ el retorno por conveniencia, los cuales se asumen constantes.

En este caso, por ser un movimiento browniano geométrico, el modelo es no estacionario.

b) *Modelo de Gibson y Schwartz (1990)*

El modelo propuesto por estos autores corresponde a un modelo no estacionario, el cual supone que el precio spot de un commodity sigue un proceso browniano geométrico, y que el retorno por conveniencia del commodity siga un proceso con reversión a la media.

$$dS_t = (r - \delta_t)S_t dt + \sigma_1 S_t dz_1(t)$$

$$d\delta_t = \kappa(\alpha - \delta_t)dt + \sigma_2 S_t dz_2(t)$$

Con

$$(dz_1)(dz_2) = \rho dt$$

Donde S_t es el precio spot del commodity y δ_t el retorno por conveniencia.

Ajustando por riesgo, los procesos quedan:

$$dS_t = (r - \delta_t - \lambda_1)S_t dt + \sigma_1 S_t dz_1^*(t)$$

$$d\delta_t = \kappa(\alpha - \delta_t - \lambda_2)dt + \sigma_2 S_t dz_2^*(t)$$

Con

$$(dz_1^*)(dz_2^*) = \rho dt$$

En este caso, nuevamente tenemos que los precios de mercado del riesgo de los factores son constantes.

c) *Modelo de Schwartz (1997)*

Plantea un proceso de 1, 2 y 3 factores. Para el primer caso, utiliza un proceso con reversión a la media del tipo Ornstein-Uhlenbeck para el logaritmo del precio spot:

$$\ln S_t = x_t$$

$$dx_t = \kappa(\alpha - x_t)dt + \sigma_t dz_t$$

Donde α corresponde al valor esperado de largo plazo, κ es la velocidad de reversión y σ la volatilidad instantánea.

El proceso ajustado por riesgo en este caso es:

$$dx_t = (\kappa(\alpha - x_t) - \lambda)dt + \sigma_t dz_t$$

Este modelo forma parte de la familia de modelos de tipo estacionario y tiene un precio de mercado del riesgo constante.

El modelo de dos factores sólo representa una reformulación del planteado por Gibson y Schwartz (1990).

Por último, el modelo de tres factores representa uno no estacionario que extiende el modelo de Gibson y Schwartz (1990), siendo el modelo siguiente el propuesto:

$$dS_t = (\mu_t - \delta_t)S_t dt + \sigma_1 S_t dz_1(t)$$

$$d\delta_t = \kappa(\alpha - \delta_t)dt + \sigma_2 S_t dz_2(t)$$

$$d\mu_t = a(m - \mu_t)dt + \sigma_3 S_t dz_3(t)$$

Con

$$(dz_1)(dz_2) = \rho_1 dt$$

$$(dz_2)(dz_3) = \rho_2 dt$$

$$(dz_1)(dz_3) = \rho_3 dt$$

Donde S_t corresponde al precio spot, δ_t al retorno por conveniencia y μ_t a la media de largo plazo. Los parámetros κ y a representan las velocidades de reversión de los respectivas factores.

El modelo ajustado por riesgo permite premios por riesgo constante y queda de la siguiente manera:

$$dS_t = (r_t - \delta_t)S_t dt + \sigma_1 S_t dz_1^*(t)$$

$$d\delta_t = \kappa(\hat{\alpha} - \delta_t)dt + \sigma_2 S_t dz_2^*(t)$$

$$dr_t = a(m^* - r_t)dt + \sigma_3 S_t dz_3^*(t)$$

Con

$$(dz_1^*)(dz_2^*) = \rho_1 dt$$

$$(dz_2^*)(dz_3^*) = \rho_2 dt$$

$$(dz_1^*)(dz_3^*) = \rho_3 dt$$

$$\hat{\alpha} = \alpha - \frac{\lambda_2}{\kappa}$$

$$m^* = m - \frac{\lambda_3}{a}$$

En este caso, se tiene que una de las variables de estado tiene un significado económico específico, esta variable de estado corresponde a la tasa de interés r_t . Bajo esta perspectiva, la estimación de la tasa de interés puede realizarse con instrumentos financieros que no dependen del precio del commodity como pueden ser bonos del tesoro norteamericano.

d) *Modelo de Schwartz y Smith (2000)*

Estos autores proponen un modelo no estacionario de dos factores estocásticos, donde uno representa el nivel de equilibrio de los precios spot y el otro las perturbaciones de corto plazo. El modelo propuesto es el siguiente:

$$\ln S_t = \xi_t + \chi_t$$

$$d\xi_t = \mu_\xi dt + \sigma_\xi dz_\xi(t)$$

$$d\chi_t = -\kappa\chi_t dt + \sigma_\chi dz_\chi(t)$$

Con

$$(d\xi_t)(d\chi_t) = \rho_{\xi\chi} dt$$

El factor ξ_t representa el nivel de equilibrio del precio spot y el factor χ_t representa las perturbaciones de corto plazo. Las variaciones del primer factor mencionado, se espera que

persistan en el tiempo, las del segundo factor no. El parámetro μ_ξ es la tasa esperada de largo plazo a la cual crece el nivel de equilibrio del precio spot.

El modelo ajustado por riesgo, que en este caso también presenta precios de mercado del riesgo constantes, es el siguiente:

$$\begin{aligned}d\xi_t &= (\mu_\xi - \lambda_\xi)dt + \sigma_\xi dz_\xi^*(t) \\d\chi_t &= (-\kappa\chi_t - \lambda_\chi)dt + \sigma_\chi dz_\chi^*(t)\end{aligned}$$

Con

$$(dz_\xi^*)(dz_\chi^*) = \rho_{\xi\chi}dt$$

e) *Modelo de Cortázar y Schwartz (2003)*

Se presenta un modelo de dos y tres factores no estacionario, detallando una metodología simple de estimación de las variables de estado. El modelo de dos factores es el siguiente:

$$\begin{aligned}dS_t &= (v - y_t)S_t dt + \sigma_1 S_t dz_1(t) \\dy_t &= -\kappa y_t dt + \sigma_2 dz_2(t)\end{aligned}$$

Con

$$(dz_1)(dz_2) = \rho_{12}dt$$

Donde S_t es el precio del commodity e y_t representa un retorno por conveniencia modificado (se le ha restado la fracción de largo plazo).

Definiendo λ_i (constante) como el premio por riesgo para cada uno de los factores, podemos escribir el proceso en la medida ajustada por riesgo de la siguiente forma:

$$dS_t = (v - y_t - \lambda_1)S_t dt + \sigma_1 S_t dz_1^*(t)$$

$$dy_t = (-\kappa y_t - \lambda_2)dt + \sigma_2 dz_2^*(t)$$

Con

$$(dz_1^*)(dz_2^*) = \rho_{12}dt$$

El modelo de tres factores utiliza los mismos dos factores antes descritos, agregando un tercer factor para el término v . Así, el modelo de tres factores sería:

$$dS_t = (v_t - y_t)S_t dt + \sigma_1 S_t dz_1(t)$$

$$dy_t = -\kappa y_t dt + \sigma_2 dz_2(t)$$

$$dv_t = a(\bar{v} - v_t)dt + \sigma_3 dz_3(t)$$

Con

$$(dz_1)(dz_2) = \rho_{12}dt$$

$$(dz_2)(dz_3) = \rho_{23}dt$$

$$(dz_1)(dz_3) = \rho_{13}dt$$

Utilizando el término λ_i definido anteriormente, podemos escribir el proceso ajustado por riesgo como:

$$dS_t = (v - y_t - \lambda_1)S_t dt + \sigma_1 S_t dz_1^*(t)$$

$$dy_t = (-\kappa y_t - \lambda_2)dt + \sigma_2 dz_2^*(t)$$

$$dv_t = (a(\bar{v} - v_t) - \lambda_3)dt + \sigma_3 dz_3^*(t)$$

Con

$$(dz_1^*)(dz_2^*) = \rho_{12}dt$$

$$(dz_2^*)(dz_3^*) = \rho_{23}dt$$

$$(dz_1^*)(dz_3^*) = \rho_{13}dt$$

f) *Modelo de Casassus y Collin-Dufresne (2005)*

El modelo desarrollado por estos autores corresponde a un modelo estacionario que utiliza 3 factores canónicos y la mayor cantidad de parámetros que hacen que sea económicamente identificable. El modelo presentado por estos autores está basado en los trabajos de Duffie y Kan (1996), Dai y Singleton (2000) y Duffie, Pan y Singleton (2000).

La especificación del modelo ajustado por riesgo es la siguiente¹²:

$$dY_t = -\kappa^*Ydt + dZ^*$$

Donde

$$\kappa^* = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & 0 \\ \kappa_{31} & \kappa_{32} & \kappa_{33} \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$dZ^* = \begin{bmatrix} dz_1^* \\ dz_2^* \\ dz_3^* \end{bmatrix}$$

Con dZ^* movimientos brownianos independientes.

¹² La notación fue modificada respecto al documento original

Por otro lado, la especificación del proceso bajo la medida histórica es la siguiente:

$$dZ^Q = dZ + (\beta_{0Y} + \beta_{1Y}Y)dt$$

$$dY = (\beta_{0Y} - (\kappa^Q - \beta_{1Y})Y)dt + dZ$$

Con β_{0Y} vector de 3×1 y β_{1Y} matriz de 3×3 .

Con el término $-\beta_{1Y} * Y$, Casassus y Collin-Dufresne representan el premio por riesgo, el cual depende del nivel del vector de estados de ese momento, luego a diferencia de los modelos anteriores, presentan un premio por riesgo variable.

g) *Modelo de Cortázar y Naranjo (2006)*

Estos autores presentan una serie de modelos no estacionarios de N factores (1, 2, 3 y 4) basados en la representación canónica introducida por Dai y Singleton (2000).

En este modelo, el proceso para el precio spot del commodity puede ser descrito como:

$$\ln S_t = 1'x_t + \mu t$$

$$dx_t = -Kx_t dt + \Sigma dw_t$$

Donde x_t es un vector de N variables de estado, μ la tasa de crecimiento de largo plazo constante, K la matriz de reversión y Σ una matriz diagonal con las desviaciones estándar instantáneas.

El proceso ajustado por riesgo del modelo planteado es el siguiente:

$$dx_t = (-Kx_t - \lambda)dt + \Sigma dw_t$$

Donde λ representa a un vector que contiene los premios por riesgo, los que son constantes.

h) *Modelo de Cortázar, Milla y Severino (2008)*

Plantean un modelo basado en lo desarrollado en Cortázar y Naranjo (2006), pero generalizado para más de un commodity, teniendo algunas variables de estado comunes entre ellos. Así, el modelo se puede plantear, para uno de los commodities, de la siguiente manera:

$$\ln S_t = \delta' x_t + \mu t$$

$$dx_t = (-Kx_t - \lambda)dt + \Sigma dw_t$$

Donde δ es un vector compuesto por los factores por los que debe multiplicar cada variable de estado, según la importancia que tenga cada una de éstas para dicho commodity. Así, el modelo general para estimar más de un commodity de forma conjunta será:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_i \\ \vdots \\ Y_m \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} \log S_1 \\ \vdots \\ \log S_i \\ \vdots \\ \log S_m \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} \overbrace{1 \dots 1}^p & \overbrace{1 \dots 1}^{k_1} & \dots & \overbrace{1 \dots 1}^{k_i} & \dots & \overbrace{0 \dots 0}^{k_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_{i1} & \dots & \delta_{ip} & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \delta_{m1} & \dots & \delta_{mp} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} X_t + \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \delta_{i1} \\ \vdots \\ \delta_{m1} \end{bmatrix} \mu_t$$

9.B. Valorización de Futuros

Como ha sido establecido anteriormente, el proceso que siguen las variables de estado es:

$$dx_t = (\mu - \lambda - Kx_t)dt + \Sigma dw_t^*$$

Donde K es una matriz diagonal de dimensiones $n \times n$, Σ es una matriz de dimensión $n \times n$, dw_t^* es un vector de incrementos de un proceso de Wiener de dimensión $n \times 1$ que pueden estar correlacionados entre sí, $(dw_t^*)(dw_t^*)' = \Theta dt$, μ y λ son vectores de $n \times 1$ con constantes. Se supone además que la matriz de varianza-covarianza instantánea $\Omega = \Sigma\Theta\Sigma'$ debe ser estrictamente definida positiva.

Se define el siguiente vector de estados:

$$y_t = e^{Kt}X_t$$

Aplicando el Lema de Ito a y_t , se obtiene:

$$dy_t = e^{Kt}dX_t + Ke^{Kt}X_t$$

$$dy_t = e^{Kt}((\mu - \lambda - KX_t)dt + \Sigma dw_t^*) + Ke^{Kt}X_t$$

$$dy_t = e^{Kt}(\mu - \lambda)dt + e^{Kt}\Sigma dw_t^*$$

Nótese que se ha utilizado la propiedad que la matriz exponencial conmuta con su exponente, es decir, $e^{Kt}K = Ke^{Kt}$.

Integrando la ecuación anterior:

$$\int_t^T dy_t = \int_t^T e^{Ks}(\mu - \lambda)ds + \int_t^T e^{Ks}\Sigma dw_s^*$$

$$y_T - y_t = \left(\int_t^T e^{Ks} ds \right) (\mu - \lambda) + \int_t^T e^{Ks}\Sigma dw_s^*$$

$$y_T = y_t + \left(\int_t^T e^{Ks} ds \right) (\mu - \lambda) + \int_t^T e^{Ks} \Sigma dw_s^*$$

Reemplazando $y_t = e^{Kt} X_t$ en la ecuación anterior:

$$e^{KT} X_T = e^{Kt} X_t + \left(\int_t^T e^{Ks} ds \right) (\mu - \lambda) + \int_t^T e^{Ks} \Sigma dw_s^*$$

$$X_T = e^{-K(T-t)} X_t + e^{-KT} \left(\int_t^T e^{Ks} ds \right) (\mu - \lambda) + e^{-KT} \left(\int_t^T e^{Ks} \Sigma dw_s^* \right)$$

Definiendo el siguiente cambio de variable:

$$T - s = \tau$$

$$ds = -d\tau$$

Entonces:

$$X_T = e^{-K(T-t)} X_t + \left(\int_0^{T-t} e^{-K\tau} d\tau \right) (\mu - \lambda) + \left(\int_t^T e^{-K\tau} \Sigma dw_\tau^* \right)$$

Sea $E_t(\cdot)$ y $Cov_t(\cdot)$ el valor esperado y la varianza-covarianza condicional a la información en el tiempo t . Entonces se tiene que:

$$E_t(X_T) = e^{-K(T-t)} X_t + \left(\int_0^{T-t} e^{-K\tau} d\tau \right) (\mu - \lambda)$$

$$Cov_t(X_T) = \int_0^{T-t} e^{-K\tau} \Sigma \Theta \Sigma' (e^{-K\tau})' d\tau$$

Sabemos que la matrices que definen los procesos son:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \rho_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma\Theta\Sigma' = \Omega = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_1\sigma_n\rho_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_n\sigma_1\rho_{n1} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto tenemos que:

$$e^{Kt} = \begin{bmatrix} e^{-k_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{-k_n t} \end{bmatrix}$$

$$\int_0^{T-t} e^{-K\tau} d\tau = \begin{bmatrix} \frac{1 - e^{-k_1(T-t)}}{k_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1 - e^{-k_n(T-t)}}{k_n} \end{bmatrix}$$

Así, el valor esperado y la varianza-covarianza condicional serán:

$$E_t(X_i(T)) = e^{-k_i(T-t)}X_i(t) + \left(\frac{1 - e^{-k_i(T-t)}}{k_i}\right)(\mu_i - \lambda_i)$$

$$Cov_t(X_i(T), X_j(T)) = \sigma_i\sigma_j\rho_{ij} \frac{1 - e^{-(k_i+k_j)(T-t)}}{k_i + k_j}$$

Para el caso de las variables no estacionarias, las que tienen una reversión a la media igual a 0, el valor esperado y la varianza-covarianza condicional serán:

$$E_t(X_i(T)) = X_i(t) + (T - t)(\mu_i - \lambda_i)$$

$$Cov_t(X_i(T), X_j(T)) = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} (T - t)$$

Entonces, tenemos que la esperanza y varianza-covarianza serán:

$$E_t^Q(X_i(T)) = \begin{cases} X_i(t) + (\mu_i - \lambda_i)(T - t) & i = 1 \\ e^{-k_i(T-t)} X_i(t) + \left(\frac{1 - e^{-k_i(T-t)}}{k_i} \right) (\mu_i - \lambda_i) & i = 2, \dots, nf + 1 \end{cases}$$

$$Cov_t^Q(X_i(T), X_j(T)) = \begin{cases} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} (T - t) & i = 1; j = 1 \\ \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \left(\frac{1 - e^{-(k_i+k_j)(T-t)}}{(k_i + k_j)} \right) & i \neq 1; j \neq 1 \end{cases}$$

Como Y_T está definido como una suma de variables de estado, su esperanza será:

$$E_t^Q(Y(T)) = X_1(t) + (\mu - \lambda_1)(T - t) + \sum_{i=2}^{nf+1} e^{-k_i(T-t)} X_i(t) - \left(\frac{1 - e^{-k_i(T-t)}}{k_i} \right) \lambda_i$$

$$Var_t^Q(Y(T)) = \sigma_1^2 (T - t) + \sum_{i=2}^{nf+1} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \left(\frac{1 - e^{-(k_i+k_j)(T-t)}}{(k_i + k_j)} \right)$$

Por lo tanto, como:

$$F(S_t, t, T) = E_t^Q(S_t) = \exp \left(E_t^Q(Y_t) + \frac{1}{2} V_t^Q(Y_t) \right)$$

$$F(S_t, t, T) = \exp \left(x_1(t) + \sum_{j=2}^N e^{-k_j(T-t)} x_j(t) + \left(\mu - \lambda_1 + \frac{1}{2} \sigma_1^2 \right) (T - t) \right. \\ \left. - \sum_{j=2}^N \frac{1 - e^{-k_j(T-t)}}{k_j} \lambda_j + \frac{1}{2} \sum_{j,l \neq 1}^N \sigma_j \sigma_l \rho_{jl} \frac{1 - e^{-(k_j+k_l)(T-t)}}{k_j + k_l} \right)$$

9.C. Estructura de Volatilidad

9.C.1 Estructura de Volatilidad

Por estructura de volatilidad se entenderá la volatilidad instantánea de los retornos de los contratos futuros de una cierta madurez. Luego, si $F_j(X_j, t, T)$ es el precio de un futuro con madurez $\tau = T - t$, la volatilidad instantánea $\sigma_F(\tau)$ se obtiene del proceso que siguen los retornos del futuro, o sea:

$$\frac{dF}{F} = \mu_F dt + \sigma_F dW_F$$

Sin embargo, aplicando el lema de Ito a $F_j(X_j, t, T)$ se obtiene:

$$\frac{dF}{F} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} (dx_i)(dx_j) + \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial t} dt$$

Además se tiene que:

$$\left(\frac{dF}{F}\right)\left(\frac{dF}{F}\right) = \sigma_F^2 dt$$

Entonces:

$$\sigma_F^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \left(\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x_i}\right) \left(\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x_j}\right)$$

Luego, para calcular la volatilidad instantánea de los retornos de un futuro sólo basta calcular las derivadas parciales del precio del futuro con respecto a las variables de estado del modelo.

Así,

$$\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x_i} = \begin{cases} 1 & i = 1 \\ e^{-k_i \tau} & i = 2, \dots, nf + 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, la volatilidad instantánea del futuro es:

$$\sigma_F^2(\tau) = \sigma_1^2 + \sum_{i,j \neq 1} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} e^{-(k_i + k_j)\tau}$$

Una propiedad del modelo no-estacionario es que la volatilidad instantánea de los retornos de un futuro de muy largo plazo converge a un valor constante dado por la volatilidad instantánea de $x_1(t)$.

$$\sigma_F^2(t, \infty) = \sigma_1^2$$

Para el caso del modelo no-estacionario, toda la incertidumbre recae sobre la variable de estado $x_1(t)$ que no exhibe reversión a la media. Por lo tanto, la volatilidad instantánea de los futuros de largo plazo debe converger a un valor constante dado por la volatilidad de $x_1(t)$.

Este hecho puede tener implicancias significativas al momento de valorizar opciones sobre contratos futuros así como proyectos de inversión dentro del marco de las opciones reales, cuando los plazos considerados son muy lejanos.

9.C.2 Estructura de Volatilidad de los Modelos Estimados

Por último, la estructura de volatilidad se puede extraer del modelo utilizando el marco teórico descrito en el Anexo C.1

A continuación se presentan las estructuras de volatilidades para las tres parejas de commodities estudiadas.

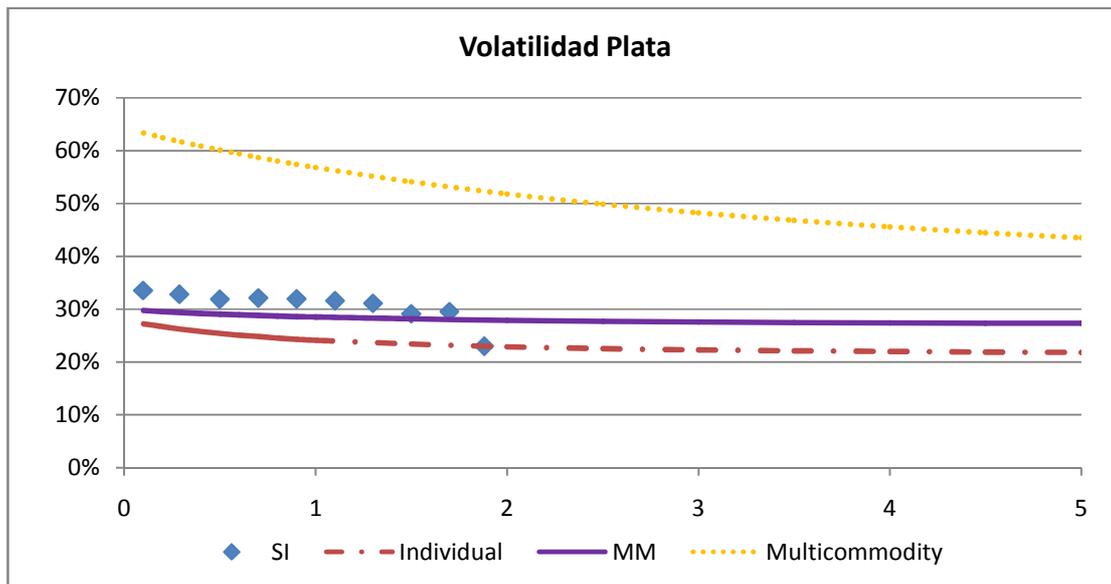


Figura 9.1. Volatilidad empírica de la Plata vs. Volatilidad teórica de los modelos estimados.

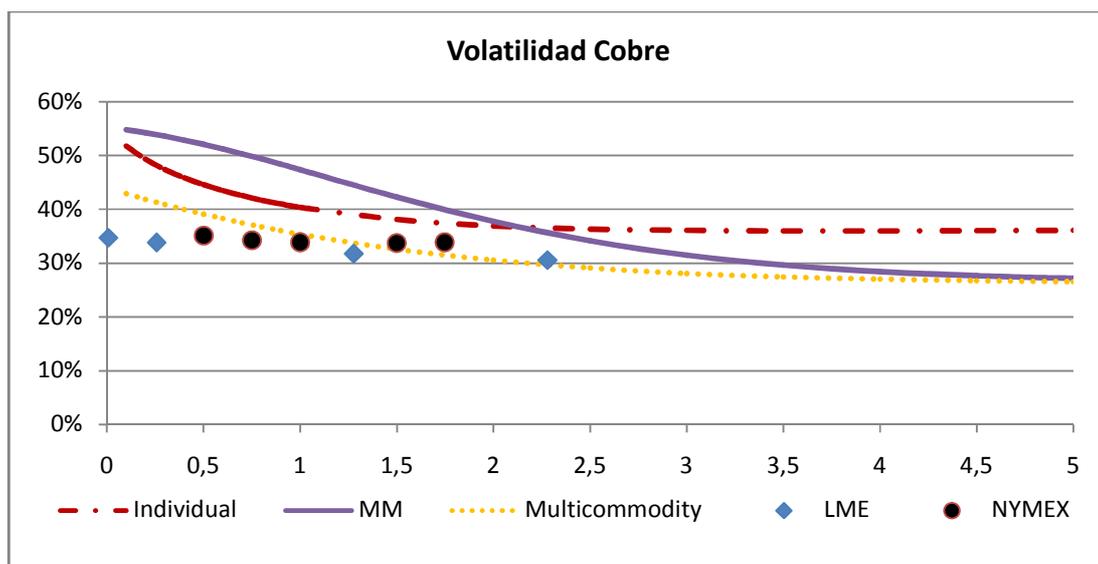


Figura 9.2. Volatilidad empírica del Cobre vs. Volatilidad teórica de los modelos estimados.

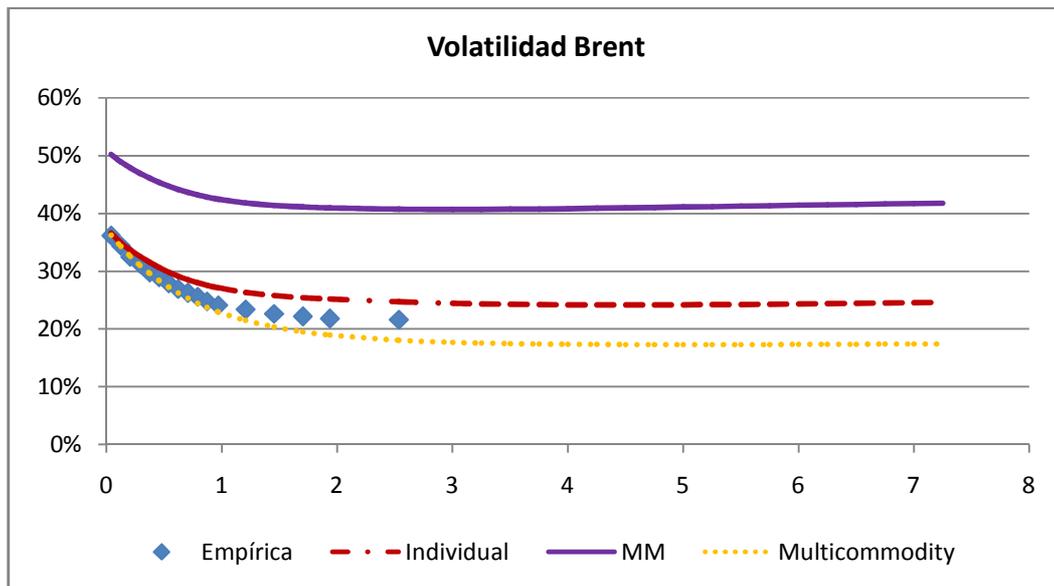


Figura 9.3. Volatilidad empírica del Brent vs. Volatilidad teórica de los modelos estimados

En las figuras 9.1, 9.2 y 9.3 se puede ver como la estructura de volatilidad del modelo MM es de un nivel similar a las entregadas por los modelos individual y *multicommodity*, mostrando un ajuste adecuado para todos los *commodities* analizados, siendo algunas veces mejores y otras peores.