



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE  
ESCUELA DE INGENIERIA

**DE LA CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO  
DE ESTRUCTURA DE TASAS DE INTERÉS  
CON MATRIZ DE COVARIANZAS  
ESTOCÁSTICA. APLICACIÓN A LA  
VALORIZACIÓN DE INSTRUMENTOS DE  
RENTA FIJA.**

**RODRIGO DUFEU ABELIUK**

Tesis presentada a la Dirección de Investigación y Postgrado  
como parte de los requisitos para optar al grado de  
Magister en Ciencias de la Ingeniería

Profesor Supervisor:  
JAIME CASASSUS

Santiago de Chile, Abril 2009

© MMVII, RODRIGO DUFEU ABELIUK



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE  
ESCUELA DE INGENIERIA

**DE LA CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO  
DE ESTRUCTURA DE TASAS DE INTERÉS  
CON MATRIZ DE COVARIANZAS  
ESTOCÁSTICA. APLICACIÓN A LA  
VALORIZACIÓN DE INSTRUMENTOS DE  
RENTA FIJA.**

**RODRIGO DUFEU ABELIUK**

Miembros del Comité:

JAIME CASASSUS

GONZALO CORTAZAR

ALVARO DÍAZ

ALVARO SOTO

Tesis presentada a la Dirección de Investigación y Postgrado  
como parte de los requisitos para optar al grado de  
Magister en Ciencias de la Ingeniería

Santiago de Chile, Abril 2009

© MMVII, RODRIGO DUFEU ABELIUK

*A mi familia y Rosario, por  
acompañarme y darle sentido a todo  
lo que hago*

## **AGRADECIMIENTOS**

Deseo agradecer a mi profesor supervisor Jaime Casassus por su dedicación y apoyo en el desarrollo de esta tesis. Por su apoyo tanto en el ámbito académico como humano, haciendo de ésta una experiencia enriquecedora junto a Alfonso y Tomás.

Quiero agradecer también a mis amigos que leyeron la tesis y me dieron sus sinceros consejos y críticas. En particular, a Philippe.

Finalmente, muchas gracias a todo el que la lea.

## INDICE GENERAL

AGRADECIMIENTOS . . . . .	iv
INDICE DE FIGURAS . . . . .	vii
RESUMEN . . . . .	viii
ABSTRACT . . . . .	ix
1. INTRODUCCION . . . . .	1
2. HIPOTESIS Y FORMULACION DEL MODELO . . . . .	5
2.1. Fundamentos . . . . .	5
2.2. Los activos financieros . . . . .	5
2.3. Evidencia empírica . . . . .	8
2.4. El modelo base . . . . .	11
2.5. Incorporación del proceso de Wishart . . . . .	12
3. VALORIZACION DE INSTRUMENTOS DE RENTA FIJA . . . . .	15
3.1. El bono cero cupón libre de riesgo . . . . .	15
3.2. El bono cero cupón riesgoso . . . . .	17
3.3. Linealización de la ecuación de Ricatti matricial . . . . .	20
3.4. Valorización de una opción europea sobre el bono libre de riesgo . . . . .	21
3.5. Aplicaciones alternativas del modelo . . . . .	25
3.5.1. Estructura de tasa de interés . . . . .	25
3.5.2. Bonos corporativos . . . . .	27
4. IMPLICANCIAS DEL MODELO . . . . .	28
4.1. Relaciones del modelo planteado con los datos empíricos . . . . .	28
4.1.1. El bono del tesoro . . . . .	28
4.1.2. El swap . . . . .	29
4.1.3. El movimiento conjunto . . . . .	30

4.2.	Suposiciones sobre la estructura de premios por riesgo y el paso a la medida real	31
4.3.	El proceso de los precio bajo la medida real y más propiedades . . . . .	32
5.	CONSIDERACIONES PARA LA ESTIMACION . . . . .	35
5.1.	Simulación de un proceso de Wishart . . . . .	35
5.2.	Estimación . . . . .	36
6.	CONCLUSION . . . . .	37
	BIBLIOGRAFIA . . . . .	39
	ANEXO A. DESVIACIONES ESTANDARES Y CORRELACION . . . . .	41
	ANEXO B. RESULTADOS UTILES SOBRE EL PROCESO DE WISHART . . . . .	43
	B.1. Resultado 1 . . . . .	43
	B.2. Resultado 2 . . . . .	43
	B.3. Resultado 3 . . . . .	44
	B.4. Resultado 4 . . . . .	44
	ANEXO C. DERIVACION DE LOS PROCESOS DE LOS PRECIOS BAJO LA MEDIDA REAL . . . . .	45
	C.1. El bono . . . . .	45
	C.2. El swap . . . . .	46
	ANEXO D. EL BONO CORPORATIVO . . . . .	47

## INDICE DE FIGURAS

2.1 Correlación entre los cambios de las tasas <i>swap</i> y <i>yields</i> de bonos libres de riesgo con misma madurez. Las curvas en azul representan el coeficiente de correlación entre las tasas <i>swaps</i> y los <i>yields</i> de bonos libres de riesgo, mientras que las curvas en rojo y verde corresponden a las desviaciones estándares de las tasas respectivas. Las figuras de la izquierda fueron calculadas en base a una ventana móvil de 6 semanas mientras que las de la derecha consideran 30 semanas. . . . .	9
2.2 Correlación entre los cambios de las tasas <i>swaps</i> y <i>yields</i> de bonos libres de riesgo con distinta madurez. Las curvas en azul representan el coeficiente de correlación entre las tasas <i>swaps</i> y los <i>yields</i> de bonos libres de riesgo, mientras que las curvas en rojo y verde corresponden a las desviaciones estándares de las tasas respectivas. Las figuras de la izquierda fueron calculadas en base a una ventana móvil de 6 semanas mientras que las de la derecha consideran 30 semanas. . . . .	10
A.1 Correlación entre los cambios de los <i>yields</i> de bonos libres de riesgo con distintas madureces. Las curvas en azul representan el coeficiente de correlación entre los cambios en los <i>yields</i> de los bonos libres de riesgo, mientras que las curvas en rojo y verde corresponden a las desviaciones estándares de las tasas con madureces respectivas. . . . .	41
A.2 Correlación entre los cambios de las tasas <i>swaps</i> con distintas madureces. Las curvas en azul representan el coeficiente de correlación entre las tasas <i>swaps</i> , mientras que las curvas en rojo y verde corresponden a las desviaciones estándares de las tasas <i>swaps</i> con madureces respectivas. . . . .	42

## RESUMEN

A lo largo de este documento, se desarrolla un modelo que nace a partir de la intuición y evidencia empírica. En efecto, un análisis del comportamiento conjunto de los *swaps* de tasa de interés y los bonos libres de riesgo pone en evidencia las dificultades que tienen los modelos tradicionales de estructura de tasa de interés para explicar ciertas características empíricas. En particular, a partir de estas observaciones nace la necesidad de incluir una estructura de varianza-covarianza estocástica. La desatención de esta naturaleza tiene consecuencias directas en la valorización y la cobertura, subestimando los riesgos a los que se expone el inversionista. Peor aún, puede generar inconsistencias en la valorización relativa de instrumentos derivados. Por consiguiente, nadie puede dudar que las varianzas y covarianzas son de una importancia esencial al momento de valorizar.

De esta manera, se extiende el modelo Vasicek de estructura de tasas de interés gracias a la incorporación del proceso Wishart en la modelación de la dinámica de la varianza-covarianza. Su inclusión repercute entonces en las propiedades que son posibles deducir de los distintos instrumentos. Si bien aparecen desafíos importantes para la estimación de este nuevo modelo, su consistencia teórica con la evidencia empírica es un avance destacable.

**Palabras Claves:** Estructura de Tasas de Interés, Proceso de Wishart, Correlación Estocástica, Instrumentos de Renta Fija

## ABSTRACT

The present document develops a model based on intuition and empiric evidence. As a matter of fact, the analysis of the interplay between interest rate swaps and risk-free bonds dynamics, reveals the limitations of describing historical facts by using traditional term structure models. Specifically, it emphasizes the need of including a stochastic covariance matrix, by creating a more general version of a traditional term structure model. Omitting this stochastic behavior can have direct impact in valuation and hedging, since different sources of risk to which investors are exposed can be neglected. Moreover, it can create inconsistencies in derivatives' valuation. Therefore, nobody can truly doubt about the importance of variance and covariance modeling in valuation.

The incorporation of the Wishart process in the covariance dynamics modeling allows an extension of the Vasicek model for term structure of interest rates. Its inclusion has consequences in the models properties, which can be derived for fixed-income instruments. Even though the estimation of the model is challenging, its theoretical consistency with empirical evidence proves to be a remarkable improvement.

**Keywords:** Term Structure of Interest Rates, Wishart Process, Stochastic Correlation, Fixed-Income Security

## 1. INTRODUCCION

En los últimos años, la literatura en finanzas ha realizado diversos esfuerzos para poner en evidencia la necesidad de incluir en los modelos una estructura de varianza-covarianza menos rígida. Por un lado, Pérignon & Villa (2006) muestran que, en la medida que las condiciones económicas y políticas cambian en el tiempo, podría esperarse que la volatilidad de las tasas de interés también lo hiciera. En este mismo espíritu, otros autores han realizado un análisis del comportamiento de la estructura de la tasa de interés en el tiempo y la capacidad de los modelos para replicar estas características, como por ejemplo Dai & Singleton (2003). Además de la naturaleza estocástica de la volatilidad, podría intuirse que la totalidad de la matriz de varianza-covarianza de los factores que determinan la tasa de interés cambiara en el tiempo también. Con esta motivación, en el contexto del análisis de componentes principales y utilizando procedimientos formales, Pérignon & Villa (2006) ponen en manifiesto que el supuesto de una matriz de varianza-covarianza constante es rechazado de forma sistemática para el caso de los EE.UU. durante las últimas cuatro décadas. Más aún, este resultado continúa siendo válido excluyendo de la muestra los episodios de mayor volatilidad en la historia monetaria de ese país, como por ejemplo el primer shock del precio del petróleo de 1973 o la crisis bursátil de 1987. Por otro lado, Christiansen (2000) muestra que tanto las varianzas y covarianzas condicionales como los coeficientes de correlación de los retornos de los bonos son significativamente mayores en los días de anuncios de noticias macroeconómicas. Además, en días sin anuncios, los coeficientes de correlación son relativamente grandes y son mayores a medida de que los bonos se encuentren más cerca de su madurez. Finalmente, concluye que las emisiones de noticias macroeconómicas inducen un movimiento común en el mercado de bonos que fortalece las correlaciones.

En este mismo sentido, Silvennoinen & Terasvirta (2008) realizan una comparación entre distintos modelos GARCH multivariados, aplicándolos a un panel de datos de retornos diarios del índice de futuros S&P y de bonos de gobierno a 10 años. De esta forma, presentan evidencia empírica acerca de la naturaleza estocástica de las correlaciones. Si bien no hay

un consenso en la literatura acerca de cómo se relacionan estos instrumentos, es evidente notar que la hipótesis de correlación constante ha llevado a resultados contradictorios debido a que correlaciones negativas y positivas han sido encontradas a lo largo de los años. De esta manera, analizan cómo las correlaciones cambian en el tiempo gracias a la aplicación de distintos modelos de volatilidad estocástica <sup>1</sup>.

Por otro lado, Collin-Dufresne & Goldstein (2001) afirman que numerosos autores documentan un error significativo en la valoración entre *caps* y *swaptions* utilizando modelos multifactoriales tradicionales para la estructura de la tasa de interés. Por ejemplo, Jagannathan, Kaplin, & Sun (2001) muestran que al modelar la dinámica de la tasa de interés mediante un proceso de Cox, Ingersoll, Ross (CIR) multifactorial se generan errores en la valoración relativa de *caps* y *swaptions* demasiado grandes con respecto al *bid-ask spread*. De esta manera, Collin-Dufresne & Goldstein (2001) conjeturan que esta debilidad de la modelación puede deberse a las severas restricciones que se deben imponer sobre la estructura de varianza-covarianza en el marco *affine* de Duffie & Kan (1996) (i.e.  $\mathbb{A}_n(m)$ ). A modo de ejemplo, Dai & Singleton (2000) muestran que existe un importante *trade-off* entre flexibilidad en la modelación de las volatilidades y la admisibilidad de un modelo. Collin-Dufresne y Goldstein entregan entonces evidencia empírica para apoyar la hipótesis de existencia de una correlación estocástica. A pesar de que estos autores proponen que una última solución consiste en requerir una estructura de varianza-covarianza estocástica, Jagannathan et al. (2001) consideran, sin embargo, que es necesario salirse de la clase de modelos *affine* para acomodar modelos de volatilidad de forma más general. En la misma línea de Collin-Dufresne y Goldstein, Han (2007) desarrolla un modelo que incorpora una correlación estocástica utilizando herramientas matemáticas complejas. Los resultados que obtiene luego de la calibración son satisfactorios y apoyan entonces las conjeturas de, entre otros, Collin-Dufresne & Goldstein (2001) y Dai & Singleton (2003).

En esta línea, el proceso de Wishart, introducido por Bru (1991) e incorporado al campo de las finanzas por Gouriéroux, Jasiak, & Sufana (2004), ha sido sugerido como una forma conveniente para la representación de los *yields factors*. Esto ha permitido extender el espacio

---

<sup>1</sup>Ver figura 1 de Silvennoinen & Terasvirta (2008).

de los procesos *affines* caracterizados por Duffie & Kan (1996) al espacio de las matrices definidas positivas. Por otro lado, Gouriéroux (2006) expone que el proceso de Wishart puede ser visto como la extensión multifactorial natural del proceso CIR. El proceso de Wishart es por lo tanto útil para un análisis dinámico de múltiples variables de riesgo y puede ser interpretado también para describir la evolución estocástica de la matriz de varianza-covarianza. En efecto, presenta numerosas propiedades deseadas como estar restringido al conjunto de las matrices simétricas positivas definidas y tener una expresión *affine* para la transformada de Laplace. Recientemente, Buraschi, Porchia, & Trojani (2006) han encontrado aplicaciones a la resolución del problema de elección intertemporal de portafolio con riesgo de correlación.

El objetivo principal de esta tesis es desarrollar de manera independiente un modelo basado en herramientas matemáticas sencillas que permita la valorización conjunta de bonos libres de riesgo y *swaps* de tasa de interés. Así, consideraremos un marco teórico sustentado en las ideas de Duffie & Singleton (1999), el cual ya fue utilizado en Liu, Longstaff, & Mandell (2002) para analizar el precio de mercado del riesgo para el mercado de *swaps*. Sin embargo, la innovación viene por la inclusión de un proceso estocástico flexible para la matriz de varianzas-covarianzas siguiendo la línea de Fonseca, Grasselli, & Tebaldi (2005) y Buraschi et al. (2006). En efecto, en el marco *affine* de Duffie & Kan (1996) y Dai & Singleton (2000), los procesos gaussianos (i.e.  $\mathbb{A}_n(0)$ ) son aconsejables para describir correlaciones entre los factores, debido a la flexibilidad con respecto a las magnitudes y signos de las varianzas y covarianzas. Sin embargo, el precio que debe pagarse es que ninguno de los factores influye en las varianzas condicionales, de manera que  $\mathbb{A}_n(0)$  no es aconsejable para describir eventos con *heavy tail* o cambios en las volatilidades en el tiempo. En contraste, los procesos cuadráticos  $\mathbb{A}_n(n)$  son aconsejables para modelar la volatilidad pero al costo de que severas restricciones deben ser impuestas. En efecto, para ser admisible se debe verificar que las correlaciones condicionales de los factores sean cero y que sus correlaciones no condicionales sean no-negativas. Entre estos extremos, para un  $n$  dado, mientras  $m$  aumenta las restricciones sobre las correlaciones aumentan mientras que las volatilidades se vuelven más flexibles. Teniendo en cuenta que en el mercado de los bonos de gobierno, correlaciones

negativas entre los factores han sido presentadas en la literatura, parece interesante exhibir un modelo con una estructura de varianza-covarianza flexible, que generalice además a modelos utilizados frecuentemente en la estimación de la estructura de la tasa de interés como es el proceso Vasicek multifactorial.

De esta manera, el modelo propuesto es más general y permite deducir propiedades de los activos que no pueden ser replicadas por los modelos multi-factoriales tradicionales. Es importante notar que existen otros modelos que pretenden ser más flexibles, como por ejemplos los procesos *essentially* o *completely affine*. Sin embargo, éstos se centran en la modelación del premio por riesgo para pasar de la medida neutral a la histórica, de manera que pueden ser interpretados como la complejización de las preferencias del individuo. Además, persiste un *trade-off* en la modelación de las volatilidades y la correlación. A lo largo de esta tesis, se adopta un enfoque diferente, centrándose en la inclusión del proceso de Wishart a un modelo clásico para luego deducir importantes implicancias.

En un primer lugar, se presentarán los fundamentos matemáticos, financieros y empíricos necesarios para comprender el tema que se aborda y desarrollar el modelo. Luego, se deducirán las principales fórmulas de valorización en este nuevo marco. A partir de estos resultados, se presentarán entonces algunas de las propiedades posibles de extraer del modelo. Finalmente, se comentarán brevemente algunas consideraciones que deben ser tenidas en cuenta para la estimación del modelo.

## 2. HIPOTESIS Y FORMULACION DEL MODELO

### 2.1. Fundamentos

Las matemáticas han realizado grandes avances desde principios del siglo XX para ser capaces de otorgarle un valor a un activo financiero. En su tesis doctoral titulada “La Théorie de la Spéculation”, L. Bachelier modela por primera vez el movimiento de los precios y formula un principio fundamental en la teoría de finanzas: “la esperanza matemática del especulador es cero”, entendiendo que la esperanza es condicional a la información pasada. Es decir, acepta implícitamente el axioma de que los mercados evalúan los activos utilizando una medida neutral al riesgo. Presentó además, de manera independiente e innovadora, los primeros conceptos de movimiento browniano y la interpretación de este proceso como el límite de una caminata aleatoria.

Ahora, dada la necesidad de ligar algunos conceptos matemáticos con la intuición financiera, es importante definir el concepto probabilístico de martingala.

**Definición 2.1.** Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad. Sean  $\{\mathcal{A}_n\}$  una sucesión creciente de sub- $\sigma$ -álgebras de  $\mathcal{A}$  y sean  $\{X_n\}$  una sucesión de variables aleatorias tales que  $X_n$  es  $\mathcal{A}_n$ -medible.

Diremos que  $\{X_n, \mathcal{A}_n\}$  es una martingala si se cumple que

$$i) \mathbb{E}(|X_n|) < \infty \forall n, y$$

$$ii) \mathbb{E}(X_n | \mathcal{A}_{n-1}) = X_{n-1} \forall n.$$

La segunda condición puede ser interpretada como la esperanza de la riqueza de un jugador en un juego justo: no se puede esperar ganar más de lo que ya se tiene.

### 2.2. Los activos financieros

En una analogía pura con las bolsas de valores, existe una equivalencia entre la suposición de no-arbitraje, es decir, la inexistencia un portafolio que genere ganancias adicionales sin

ningún riesgo, a la existencia de una medida de probabilidad  $\mathbb{Q}$  en la cual el precio descontado de un activo sea una martingala.

De esta manera, una suposición estándar de no-arbitraje implica que el precio de un bono cero cupón libre de riesgo  $P(t, T)$  que paga 1 en su madurez en  $T$ , puede expresarse como

$$P(t, T) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}(e^{-\int_t^T r_s ds}), \quad (2.1)$$

donde  $r$  denota la tasa de interés instantánea y la esperanza se toma con respecto a la medida de probabilidad neutral al riesgo  $\mathbb{Q}$ .

Considerando que se trata de un bono cero cupón, el *yield*  $y_{P,t}^{\tau}$  de un bono  $P(t, T)$  que paga 1 en  $\tau = T - t$  es tal que

$$e^{-\tau y_{P,t}^{\tau}} = P(t, T). \quad (2.2)$$

De manera equivalente, se verifica que

$$y_{P,t}^{\tau} = -\frac{\ln P(t, T)}{\tau}. \quad (2.3)$$

Generalmente, se trabaja con el *yield* más que con el precio de un bono ya que es la manera estándar en la que actualmente se publican las *quotes*. Luego, a partir de esta ecuación, resulta evidente la ventaja de tener un precio exponencialmente *affine* en las variables de estado.

Por otro lado, un *swap* de tasa de interés es un contrato *Over The Counter* (OTC) para intercambiar directamente entre dos partes una secuencia de tasa flotante versus una tasa fija, la que se denomina *tasa swap*. Si consideramos un *swap* en  $t$  indexado a la tasa de la *London Interbank Offering Rate* (LIBOR) a 6 meses que vence en  $T$ , entonces hay  $2(T - t)$  fechas de pagos, en la cual el pago flotante en  $n + 1$  se calcula utilizando la tasa LIBOR a 6 meses del período  $n$ . Además, si consideramos que la parte flotante debe transarse a la par en las fechas de pago y suponiendo que la *tasa swap* debe escogerse para que el valor del contrato al inicio sea cero, entonces se obtiene que la *tasa swap*  $y_{S,t}^{\tau}$  satisface

$$y_{S,t}^{\tau} = 2 \frac{1 - S(t, T)}{\sum_{i=1}^n S(t, t + \frac{i}{2})}, \quad (2.4)$$

donde  $n = 2(T - t)$  corresponde al número de cupones del *swap*. Nótese que no es posible utilizar la tasa libre de riesgo para valorizar los flujos futuros de la parte fija. En cierto sentido, el riesgo que existe por las variaciones en las tasas LIBOR es traspasado a la pata fija.

En efecto, en el marco de Duffie & Singleton (1997, 1999) para la valorización de activos con riesgo de crédito, el evento de *default* es modelado como la realización de un proceso de Poisson con intensidad variable en el tiempo. Bajo ciertas condiciones sobre la naturaleza del *spread*<sup>1</sup>, demuestran que el precio del bono cero cupón riesgoso  $S(t, T)$  satisface

$$S(t, T) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}(e^{-\int_t^T (r_s + \lambda_s) ds}) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}(e^{-\int_t^T R_s ds}), \quad (2.5)$$

donde  $\lambda$  corresponde al proceso del *spread*. Utilizando este resultado, valorizar activos riesgosos no presenta mayores desafíos, ya que uno se focaliza en modelar la tasa de descuento más que preocuparse por el pago incierto. En otras palabras, los argumentos de no-arbitraje utilizados para bonos libres de riesgo son directamente aplicables para aquellos con riesgo de *default* reemplazando  $r$  por  $R$ . Más aún, Duffie & Singleton (1997, 1999) argumentan que este proceso puede incluir una componente de liquidez, de manera que un cambio en el *spread* puede deberse tanto a un cambio en el riesgo de *default* como de liquidez. Finalmente, dado que se utiliza la misma tasa de descuento para descontar los flujos futuros, se asume implícitamente que las probabilidades de *default* son simétricas.

Liu et al. (2002) tiene en consideración estas observaciones para aplicar este modelo al análisis del precio de mercado del riesgo crediticio y liquidez para los *swaps*. En efecto, para poder aplicar correctamente desde el punto de vista teórico este modelo de riesgo de *default* a la valorización de *swaps*, se hacen suposiciones implícitas. Por un lado, un riesgo del contrato *swaps* exógeno parece razonable, debido que los principales agentes son grandes instituciones financieras cuyo bienestar financiero no depende directamente de una deuda particular. Además, se asume que no existe riesgo de crédito adicional en la contraparte debido a requerimientos estándares, como por ejemplo el *marking-to-market*, y la similitud entre las contrapartes. Finalmente, se hace la débil suposición de que el riesgo inherente a las

---

<sup>1</sup>El proceso del *spread* debe corresponder a un riesgo de *default* exógeno, es decir, no depender del valor del activo.

tasas LIBOR, a partir de la cual se determinan las tasas *swap*, puede ser modelada como el riesgo de una única entidad <sup>2</sup>. De esta manera, se asume que el proceso del *spread* refleja el riesgo de crédito y liquidez inherente al mercado de *swaps*.

Construimos entonces un modelo paramétrico focalizado en el proceso de la tasa de descuento  $R_t$ , teniendo en mente que se desea construir un modelo para el mercado de los *swaps* sin precisar los mecanismos económicos que generan el *swap spread* con respecto a la curva libre de riesgo. Pero antes, presentamos una motivación empírica que justifica la intuición y la necesidad de incorporar una estructura de varianza-covarianza más flexible.

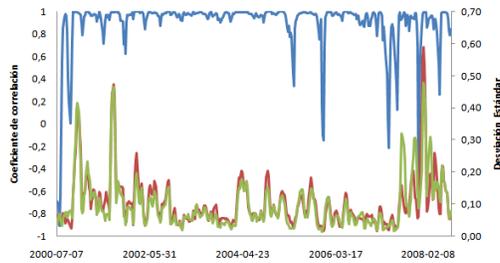
### 2.3. Evidencia empírica

En primer lugar, se realizó un análisis empírico sobre la evolución conjunta de los *yields* de bonos libres de riesgo y las tasas *swaps* para el caso de los EE.UU. Ambos *sets* de datos corresponden a la información de la tasa de interés y *swaps* respectivamente. Dado que las varianzas y covarianzas no son observables, se calcularon aproximaciones de éstas utilizando ventanas móviles de distintas duraciones. De esta manera, se consideraron de manera ilustrativa cuadros temporales de 6 y 30 semanas, tomando en cada una de éstas un único dato correspondiente al día viernes. Los datos fueron obtenidos de la serie H15 realizada por la Reserva Federal de los EE.UU., la que se encuentra disponible en su página web <sup>3</sup>. A partir de la información sobre los *yields* de los bonos y las tasas *swaps* se construyeron las figuras que se presentan a continuación.

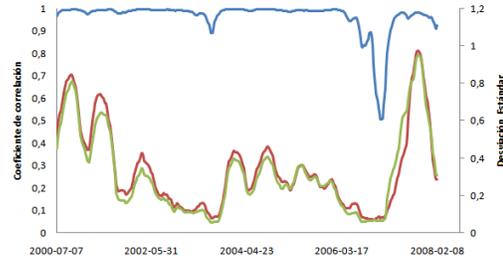
---

<sup>2</sup>La tasa LIBOR se calcula a partir de las *quotes* de un conjunto de 16 bancos, eliminando las 4 más altas y bajas, de manera que no debería representar el riesgo de crédito de ninguno de ellos en particular. Más aún, el conjunto de los bancos que se consideran puede cambiar en el tiempo también.

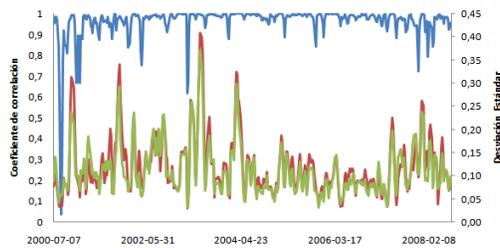
<sup>3</sup>[www.federalreserve.gov](http://www.federalreserve.gov)



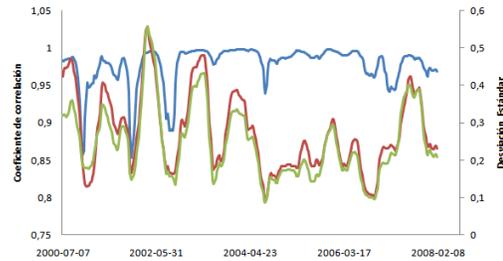
(a) *Swap* y bono libre de riesgo a 1 año.



(b) *Swap* y bono libre de riesgo a 1 año.



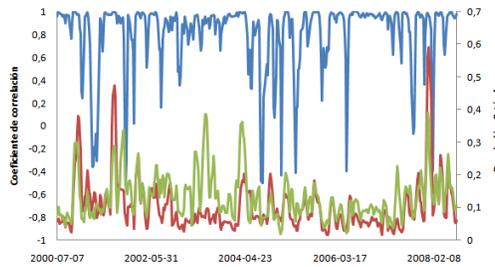
(c) *Swap* y bono libre de riesgo a 10 años.



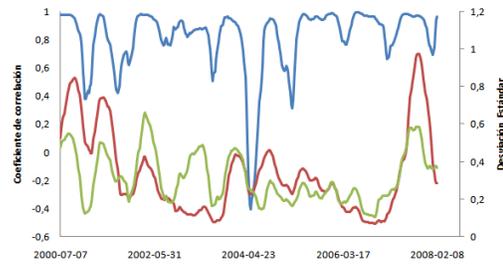
(d) *Swap* y bono libre de riesgo a 10 años.

FIGURA 2.1. Correlación entre los cambios de las tasas *swap* y *yields* de bonos libres de riesgo con misma madurez. Las curvas en azul representan el coeficiente de correlación entre las tasas *swaps* y los *yields* de bonos libres de riesgo, mientras que las curvas en rojo y verde corresponden a las desviaciones estándares de las tasas respectivas. Las figuras de la izquierda fueron calculadas en base a una ventana móvil de 6 semanas mientras que las de la derecha consideran 30 semanas.

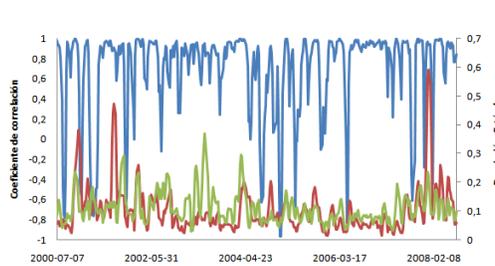
Es posible observar en la figura 2.1. que, aunque la correlación entre los cambios en las tasas de ambos instrumentos para las mismas madureces es muy cercana a uno, existen episodios en los cuales ésta varía significativamente. Dependiendo de cuantos datos se toman para calcular la correlación, su valor puede disminuir dramáticamente e incluso llegar a tomar valores negativos.



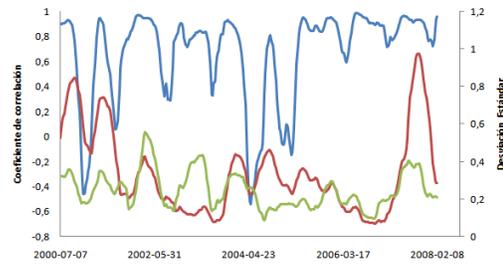
(a) *Swap* y bono libre de riesgo a 1 y 5 años respectivamente



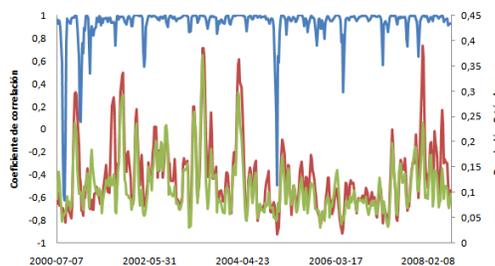
(b) *Swap* y bono libre de riesgo a 1 y 5 años respectivamente



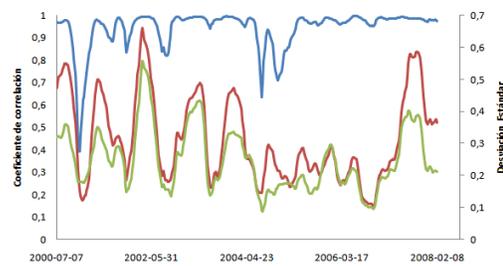
(c) *Swap* y bono libre de riesgo a 1 y 10 años respectivamente



(d) *Swap* y bono libre de riesgo a 1 y 10 años respectivamente



(e) *Swap* y bono libre de riesgo a 5 y 10 años respectivamente



(f) *Swap* y bono libre de riesgo a 5 y 10 años respectivamente

FIGURA 2.2. Correlación entre los cambios de las tasas *swaps* y *yields* de bonos libres de riesgo con distinta madurez. Las curvas en azul representan el coeficiente de correlación entre las tasas *swaps* y los *yields* de bonos libres de riesgo, mientras que las curvas en rojo y verde corresponden a las desviaciones estándares de las tasas respectivas. Las figuras de la izquierda fueron calculadas en base a una ventana móvil de 6 semanas mientras que las de la derecha consideran 30 semanas.

A partir de la figura 2.2. es posible deducir que la correlación entre los cambios de las tasas *swaps* a corto y los *yields* de los bonos libres de riesgo a mediano plazo tiene un comportamiento bastante más errático, oscilando entre valores positivos y negativos. Un resultado similar se obtiene si se consideran los *yields* de los bonos libres de riesgo a largo

plazo en vez de los mediano plazo. Sin embargo, al considerar el comportamiento para madureces a mediano y largo plazo se observa que su correlación es más homogénea, en general positiva y cercana a uno. De esta manera, se desprende que el comportamiento entre distintos segmentos de la curva de los *yields* depende de cuales se consideren.

## 2.4. El modelo base

Consideremos entonces un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ , donde  $\mathbb{Q}$  representa la medida neutral al riesgo. En una primera instancia, para ser capaces de determinar el precio de los bonos libres y *swaps*, es necesario especificar la dinámica de la tasa de interés  $r$  y el spread  $\lambda$ ; en este sentido, siguiendo a la literatura de Duffie & Kan (1996), Duffie & Singleton (1999) y Liu et al. (2002), entre otros, imponemos un marco *affine* en el cual las variables de interés pueden escribirse como combinación lineal de variables de estado no observables. En particular, proponemos

$$r = \delta_0 + X_1 \quad (2.6)$$

$$\lambda = \delta_1 + \gamma r + X_2 \quad (2.7)$$

donde  $\delta_0$  y  $\delta_1$  son constantes. Luego,  $r$  y  $\lambda$  están correlacionados directamente a través del parámetro  $\gamma$  e indirectamente por la correlación entre  $X_1$  y  $X_2$ .

Dada la formulación del problema, el riesgo descrito por el proceso del *spread* contiene de manera indistinguible el riesgo de crédito como de liquidez.

Ahora bien, para completar las definiciones, se hace preciso especificar la dinámica de las variables  $X_1$  y  $X_2$  bajo la medida  $\mathbb{Q}$ , la cual suponemos dada por un proceso Vasicek

$$\begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\kappa_1 X_1 \\ -\kappa_2 X_2 \end{pmatrix} dt + \Sigma_t^{1/2} \begin{pmatrix} dW_1 \\ dW_2 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

donde  $dW_1$  y  $dW_2$  son dos movimientos brownianos estándares independientes. A partir de estas especificaciones, es posible observar entonces a partir de la ecuación (2.8) que las variables de estado  $X_1$  y  $X_2$  reversionan a la media en 0, y por lo tanto, de (2.6) y (2.7), que  $r$  y  $\lambda$  reversionan a sus medias  $\delta_0$  y  $\delta_1 + \gamma\delta_0$  respectivamente.

Ahora, denotemos a la raíz positiva de la matriz de varianza-covarianza  $\Sigma_t^{1/2}$  por  $\begin{pmatrix} \sigma_t^{11} & \sigma_t^{12} \\ \sigma_t^{12} & \sigma_t^{22} \end{pmatrix}$ , de manera que se verifica

$$\Sigma_t = \begin{pmatrix} \Sigma_t^{11} & \Sigma_t^{12} \\ \Sigma_t^{12} & \Sigma_t^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sigma_t^{11})^2 + (\sigma_t^{12})^2 & \sigma_t^{11}\sigma_t^{12} + \sigma_t^{12}\sigma_t^{22} \\ \sigma_t^{11}\sigma_t^{12} + \sigma_t^{12}\sigma_t^{22} & (\sigma_t^{12})^2 + (\sigma_t^{22})^2 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Ahora bien, la raíz positiva de la matriz  $\Sigma$  existe y es única si y sólo si  $\Sigma$  es simétrica positiva definida, por lo que la elección del proceso que modele su dinámica es de crucial importancia. Además, esta condición asegura que ambos factores  $X_1$  y  $X_2$  sean estocásticos.

En particular, suponemos que la matriz de varianza-covarianza es estocástica y varía en el tiempo según un proceso que generaliza al proceso de Wishart y que ha sido utilizado, por ejemplo, en Buraschi et al. (2006).

## 2.5. Incorporación del proceso de Wishart

Sea  $dB_t$  una matriz de movimientos brownianos de  $2 \times 2$  independientes de  $dW_i, i = 1, 2$ . El proceso de difusión para  $\Sigma_t$  se define como

$$d\Sigma_t = (\Omega\Omega^T + M\Sigma_t + \Sigma_t M^T)dt + \Sigma_t^{1/2}dB_tQ + Q^TdB_t^T\Sigma_t^{1/2}, \quad (2.10)$$

donde  $\Omega, M, Q \in M_{2 \times 2}$  y  $\Omega$  es invertible mientras que  $\Omega\Omega^T = kQQ^T$  con grado de libertad  $k \in \mathbb{R}$  tal que  $k > 1$ .

Este proceso satisface varias propiedades importantes que lo hacen deseable para modelar la dinámica de una matriz de varianza-covarianza. Primero que nada, si  $\Omega\Omega^T \geq QQ^T$  entonces  $\Sigma_t$  es un proceso para la matriz de varianza-covarianza bien definido: bajo esta condición, el proceso de correlación se comporta bien y su valor permanece acotado entre -1 y +1. Además, el proceso es lo suficientemente flexible como para ajustarse a las estructuras empíricas observadas en finanzas. Por otro lado, bajo la suposición de que la matriz  $M$  es semi-definida negativa entonces se verifica que la estructura de las volatilidades presenta reversión a la media. Además, este proceso puede ser interpretado como la generalización

matricial de un proceso CIR para valores enteros de  $k$ . En efecto, tal como es mostrado en la proposición 4 de Gouriéroux (2006), el proceso de Cox-Ingersoll-Ross puede ser interpretado como el cuadrado de un proceso Ornstein-Uhlenbeck. Además, Gouriéroux deriva de manera sencilla el proceso de Wishart generalizando este hecho; para esto es necesario considerar  $K$  procesos Ornstein-Uhlenbeck  $n$ -dimensionales independientes

$$dx_{k,t} = Ax_{k,t}dt + QdW_{k,t}, k = 1, \dots, K \quad (2.11)$$

donde  $A$  y  $Q$  son matrices de  $n \times n$  con  $Q$  invertible. Si consideramos entonces el proceso matricial definido por

$$Y_t = \sum_{k=1}^K x_{k,t}x_{k,t}^T. \quad (2.12)$$

Luego, por construcción este proceso es tal que  $Y_t$  es una matriz estocástica de  $n \times n$  simétrica semidefinida positiva. Más aún, la matriz  $Y_t$  es definida positiva si  $K \geq n$ . Por otro lado, el *link* entre los procesos de Wishart y Ornstein-Uhlenbeck puede ser utilizado para adivinar la representación del proceso de Wishart por un proceso de difusión. En efecto, por simplicidad, consideremos el caso  $K = 1$ , donde  $Y_t = x_{1,t}x_{1,t}^T$ , con  $dx_{1,t} = Ax_{1,t}dt + QdW_{1,t}$  obteniéndose

$$\begin{aligned} dY_t &= Y_{t+dt} - Y_t \\ &= x_{1,t+dt}x_{1,t+dt}^T - x_{1,t}x_{1,t}^T \\ &\approx (x_{1,t} + Ax_{1,t}dt + QdW_{1,t})(x_{1,t} + Ax_{1,t}dt + QdW_{1,t})^T - x_{1,t}x_{1,t}^T \\ &\approx x_{1,t}x_{1,t}^T A^t dt + Ax_{1,t}x_{1,t}^T dt + Q\mathbb{E}(dW_{1,t}dW_{1,t}^T)Q^T \\ &\quad + x_{1,t}dW_{1,t}^T Q^T + QdW_{1,t}x_{1,t}^T \\ &= (x_{1,t}x_{1,t}^T A^T + Ax_{1,t}x_{1,t}^T + QQ^T)dt + x_{1,t}dW_{1,t}^T Q^T + QdW_{1,t}x_{1,t}^T, \end{aligned} \quad (2.13)$$

conservando únicamente los términos relevantes; esto es, de hecho, el lema de Itô. Sin embargo, esta expresión es difícil de usar ya que no aparece explícitamente el proceso  $Y_t$  en el lado derecho de la parte estocástica. A pesar de esto, es posible adivinar la forma del proceso de difusión dado por (2.10) y demostrar que efectivamente corresponde al proceso  $Y_t$  definido en (2.12). Utilizando entonces esta definición del proceso de Wishart es posible deducir que su esperanza y varianza son *affine* en las variables de estado, tal como lo muestra la ecuación del anexo (B.1). Sin embargo, la dinámica de la correlación es no-lineal, obteniéndose que

el *drift* y la volatilidad instantánea del proceso es cuadrática y cúbica en  $\rho$ ; las expresiones pueden encontrarse en Buraschi et al. (2006).

Ahora, si bien la simetricidad del proceso de  $\Sigma$  se deduce directamente de la ecuación diferencial estocástica (2.10) o de su derivación a partir de los procesos CIR, la propiedad de ser positiva definida es menos obvia. Para ver este resultado, es útil repetir el argumento presentado en Gourieroux & Sufana (2005). Consideremos una forma cuadrática, digamos  $a^T \Sigma_t a$ , donde  $a$  es un vector  $n$ -dimensional. Esta forma cuadrática define un proceso unidimensional con *drift*

$$\mathbb{E}_t[d(a^T \Sigma_t a)] = (a^T \Omega \Omega^T a + a^T M \Sigma_t a + a^T \Sigma_t M^T a) dt \quad (2.14)$$

y volatilidad

$$V_t[d(a^T \Sigma_t a)] = 4(a^T \Sigma a)(a^T Q^T Q a) dt, \quad (2.15)$$

donde  $V_t$  denota la varianza condicional en la información disponible en el instante  $t$ ; ver anexo (B.1). De esta manera, cuando la matriz  $\Sigma_t$  alcanza el borde del conjunto de las matrices simétricas positivas definidas, existe un vector  $a$  que satisface  $a^T \Sigma_t a = 0$  y  $\Sigma_t a = 0$ . En este caso, se obtiene que

$$V_t[d(a^T \Sigma_t a)] = 0 \quad (2.16)$$

y

$$\mathbb{E}_t[d(a^T \Sigma_t a)] = (a^T \Omega \Omega^T a) dt > 0. \quad (2.17)$$

de manera que se tiene una reflexión a la positividad siempre que  $\Omega$  sea invertible.

Finalmente, en analogía con los resultados conocidos para este tipo de procesos, se verifica que  $\Omega \Omega^T$  está relacionado con la media a largo plazo de las volatilidades  $\Sigma_\infty$  mediante la siguiente ecuación lineal

$$-\Omega \Omega^T = M \Sigma_\infty + \Sigma_\infty M^T. \quad (2.18)$$

En resumen, suponemos que la evolución de las variables de estado  $X_1$  y  $X_2$  es condicionalmente Gaussiana y que su matriz de varianza-covarianza estocástica sigue un proceso de Wishart.

### 3. VALORIZACION DE INSTRUMENTOS DE RENTA FIJA

#### 3.1. El bono cero cupón libre de riesgo

El precio de un bono libre de riesgo  $P(t, T)$  en el tiempo  $t$  que paga 1 en  $T$  puede expresarse, bajo la medida neutral al riesgo, como

$$P(t, T) = \mathbb{E}_t^Q(e^{-\int_t^T r_s ds}). \quad (3.1)$$

Por otro lado, tal como es remarcado en Gourieroux (2006), toda combinación lineal de una matriz simétrica  $\Sigma$  puede ser escrita como  $Tr[A\Sigma]$ , donde  $A$  es otra matriz simétrica. Con esto en mente, es posible formular la siguiente proposición

**PROPOSICIÓN 3.1.** *El precio del bono libre de riesgo  $P(t, T)$  es exponencialmente affine en las variables de estado  $X_1$  y  $\Sigma$ . Además, definiendo  $\tau = T - t$  como el tiempo restante para el pago, éste puede escribirse como*

$$P(X_1, \Sigma_t, t, T) = e^{a_0(t, T) - a_1(\tau)X_1 - Tr[A(\tau)\Sigma_t]} \quad (3.2)$$

donde  $Tr(\cdot)$  denota al operador traza. La función  $a_1(t)$  viene dada por

$$a_1(\tau) = \frac{1 - \exp(-\kappa_1\tau)}{\kappa_1} \quad (3.3)$$

mientras que  $a_0(t)$  satisface la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$a_0(t, T)' - \delta_0 - Tr(\Omega\Omega^T A(\tau)) = 0 \quad (3.4)$$

con condición de borde  $a_0(T, T) = 0$ .

Por otro lado, la matriz simétrica  $A(\tau)$  satisface la siguiente ecuación matricial de Ricatti

$$-\frac{dA(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{2}R(\tau) - A(\tau)M - M^T A(\tau) + 2A(\tau)Q^T Q A(\tau) \quad (3.5)$$

donde  $R(\tau) = \begin{pmatrix} a_1(\tau)^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  y  $A$  satisface la condición de borde  $A(0) = 0$ .

En la ecuación (3.5) es posible observar que la ecuación obtenida es consistente con la suposición sobre la simetricidad de la matriz  $A$ . Además, las condiciones de borde son obtenidas a partir de la igualdad  $P(T, T) = 1$  y, utilizando el hecho que  $A$  es simétrica y agrupando en las variables de estado, se deduce entonces que la única posibilidad que  $Tr[A(0)\Sigma] = 0$  resulta de imponer que  $A(0) = 0$ . Por otro lado, para efectos de simulación es importante notar que  $a_1(t)$  tiene solución cerrada mientras que  $a_0(t)$  y  $a_2(t)$  pueden obtenerse a través de métodos numéricos.

**DEMOSTRACIÓN 3.1.** *Basta probar que  $e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T)$  es una  $Q$ -martingala. En efecto, si así fuera se tendría que*

$$e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T) = \mathbb{E}_t^Q(e^{-\int_0^T r_s ds} P(T, T)). \quad (3.6)$$

*Dado que las condiciones de borde implican que  $P(T, T) = 1$  se cumple que*

$$P(t, T) = \mathbb{E}_t^Q(e^{-\int_t^T r_s ds}). \quad (3.7)$$

*Para probar que  $e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T)$  es efectivamente una  $Q$ -martingala se debe aplicar el lema de Itô a la expresión (3.2) y utilizar las ecuaciones (3.4), (3.3) y (3.5) para observar que*

$$\mathbb{E}_t^Q(dP(t, T) - r_t P(t, T)dt) = 0. \quad (3.8)$$

*Hay que notar, sin embargo, que en estricto rigor la ecuación (3.8) es un abuso de notación, ya que  $P(t, T)$  no es una variable aleatoria: para cada instante  $t$  se conocen los precios de mercado del bono con madurez  $T$ .*

*Por otro lado, utilizando la fórmula del producto, se tiene que*

$$d(e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T)) = e^{-\int_0^t r_s ds} (dP(t, T) - r_t P(t, T)dt), \quad (3.9)$$

de donde se deduce que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_t^Q(d(e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T))) &= \mathbb{E}_t^Q(e^{-\int_0^t r_s ds}(dP(t, T) - r_t P(t, T)dt)) \\ &= e^{-\int_0^t r_s ds} \mathbb{E}_t^Q((dP(t, T) - r_t P(t, T)dt)) \\ &= 0.\end{aligned}\tag{3.10}$$

En la última igualdad se ha utilizado el hecho que  $e^{-\int_0^t r_s ds}$  es  $t$ -medible y la igualdad (3.8). La verificación de la igualdad (3.8) no se presenta a este nivel debido a que es análoga a la que se presenta a continuación para el caso de un activo riesgoso.

### 3.2. El bono cero cupón riesgoso

El precio de un activo riesgoso  $S(t, T)$  en el tiempo  $t$  que paga 1 en  $T$  puede expresarse, siguiendo a Duffie & Singleton (1999) como:

$$S(t, T) = \mathbb{E}_t^Q(e^{-\int_t^T (r_s + \lambda_s) ds}).\tag{3.11}$$

A partir de esta expresión, es posible formular la siguiente proposición

**PROPOSICIÓN 3.2.** *El precio del activo riesgoso  $S(X_1, X_2, \Sigma_t, t, T)$  es exponencialmente affine en las variables de estado  $X_1$ ,  $X_2$  y  $\Sigma_t$ . Además, definiendo  $\tau = T - t$  como el tiempo faltante para el pago, éste puede escribirse como*

$$S(X_1, X_2, \Sigma_t, t, T) = e^{b_0(t, T) - b_1(\tau)X_1 - b_2(\tau)X_2 - Tr[B(\tau)\Sigma_t]}\tag{3.12}$$

donde  $Tr(\cdot)$  denota al operador traza. Las funciones  $b_1(t)$  y  $b_2(t)$  vienen dadas por

$$b_1(\tau) = \frac{1 - \exp(-\kappa_1 \tau)}{\kappa_1} (1 + \gamma)\tag{3.13}$$

$$b_2(\tau) = \frac{1 - \exp(-\kappa_2 \tau)}{\kappa_2}\tag{3.14}$$

mientras que  $b_0(t)$  satisface la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$b_0(t, T)' - \delta_0(1 + \gamma) - \delta_1 - Tr(\Omega \Omega^T B(\tau)) = 0\tag{3.15}$$

con condición de borde  $b_0(T, T) = 0$ . Por otro lado, la matriz simétrica  $B(\tau)$  satisface la siguiente ecuación matricial de Ricatti

$$-\frac{dB(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{2}T(\tau) - B(\tau)M - M^T B(\tau) + 2B(\tau)Q^T Q B(\tau) \quad (3.16)$$

donde  $T(\tau) = \begin{pmatrix} b_1(\tau)^2 & b_1(\tau)b_2(\tau) \\ b_1(\tau)b_2(\tau) & b_2(\tau)^2 \end{pmatrix}$  y  $B$  satisface  $B(0) = 0$ .

En la ecuación (3.16) es posible observar que la ecuación obtenida es consistente con la suposición sobre la simetricidad de la matriz  $B$ .

**DEMOSTRACIÓN 3.2.** *La demostración es análoga a la interior, pero la ecuación (3.8) debe ser modificada por*

$$\mathbb{E}_t^Q(dS(t, T) - (r_t + \lambda_t)S(t, T)dt) = 0. \quad (3.17)$$

De esta manera, aplicando el lema de Itô a la expresión propuesta para el precio del activo riesgoso  $S(t)$  y denotando por  $\mathcal{L}_\Sigma$  al generador infinitesimal del proceso de Wishart, es posible expresar el lado izquierdo de la ecuación (3.17) como

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t^Q(dS(t, T) - (r_t + \lambda_t)S(t, T)dt) &= S(t, T)[b'_0(t, T) + b'_1(\tau)X_1 + b'_2(\tau)X_2 + Tr(B'(\tau)\Sigma_t) \\ &\quad + \kappa_1 b_1(\tau)X_1 + \kappa_2 b_2(\tau)X_2 + \frac{1}{2}b_1^2(\tau)\Sigma_t^{11} + \frac{1}{2}b_2^2(\tau)\Sigma_t^{22} \\ &\quad + b_1(\tau)b_2(\tau)\Sigma_t^{12}] + \mathcal{L}_\Sigma S(t, T) \\ &\quad - (\delta_0(1 + \gamma) + \delta_1 + (1 + \gamma)X_1 + X_2)S(t, T). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Ahora, siguiendo a Fonseca et al. (2005) es posible escribir el generador infinitesimal para el proceso de Wishart  $\mathcal{L}_\Sigma$  de manera matricial a través de la siguiente expresión

$$\mathcal{L}_\Sigma = Tr[(\Omega\Omega^T + M\Sigma + \Sigma M^T)\mathcal{D} + 2\Sigma\mathcal{D}Q Q^T \mathcal{D}], \quad (3.19)$$

donde  $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \Sigma_{11}} & \frac{\partial}{\partial \Sigma_{12}} \\ \frac{\partial}{\partial \Sigma_{12}} & \frac{\partial}{\partial \Sigma_{22}} \end{pmatrix}$ .

De esta manera, utilizando esta relación, reemplazando la forma funcional supuesta para el valor del activo riesgoso  $S(t, T)$ , notando que  $\mathcal{D}S = -B(\tau)S$  y simplificando por

$S(t, T) \neq 0$  la ecuación (3.17) puede reescribirse como

$$\begin{aligned}
& b'_0(t, T) + b'_1(\tau)X_1 + b'_2(\tau)X_2 + Tr[B'(\tau)\Sigma] + \kappa_1 b_1(\tau)X_1 + \kappa_2 b_2(\tau)X_2 + \frac{1}{2}Tr[T(\tau)\Sigma] + \\
& Tr[-(\Omega\Omega^T + M\Sigma + \Sigma M^T)B(\tau) + 2\Sigma B(\tau)QQ^T B(\tau)] - (\delta_0(1 + \gamma) + \delta_1 \\
& +(1 + \gamma)X_1 + X_2) = 0,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\text{donde } T(\tau) = \begin{pmatrix} b_1^2(\tau) & b_1(\tau)b_2(\tau) \\ b_1(\tau)b_2(\tau) & b_2^2(\tau) \end{pmatrix}.$$

De esta manera, agrupando según las variables de estado se obtiene que (3.17) es equivalente a

$$\begin{aligned}
& (b'_0(t, T) - \delta_0(1 + \gamma) - \delta_1 - Tr[\Omega\Omega^T(\tau)B(\tau)]) + (b'_1(\tau) + \kappa_1 b_1(\tau) - (1 + \gamma))X_1 + (b'_2(\tau) \\
& - \kappa_2 b_2(\tau) - 1)X_2 + Tr[B'(\tau)\Sigma + \frac{1}{2}T(\tau)\Sigma - (M\Sigma + \Sigma M^T)B(\tau) + 2\Sigma B(\tau)QQ^T B(\tau)] = 0,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

de donde se obtienen las ecuaciones (3.13)-(3.16).

Finalmente, es importante destacar que el modelo planteado para la estructura de la tasa de interés libre de riesgo es consistente con la evidencia encontrada por Dai & Singleton (2000) y Duffee (2002) sobre la cantidad de factores que afectan los *yields* del tesoro. Además, Longstaff, Santa-Clara, & Schwartz (2001) indican la presencia de al menos tres factores significativos en la dinámica de la estructura de la tasa de interés.

Ahora, siguiendo a Fonseca et al. (2005) es posible obtener una solución en forma cerrada para esta ecuación de Ricatti mediante su linealización, doblando la dimensión del problema. Sin embargo, a diferencia de la ecuación obtenida por estos autores, la inclusión de los términos  $R(\tau)$  y  $T(\tau)$  hace que la solución que es posible obtener a partir de este método requiera de integración, haciéndolo perder utilidad práctica. De todas maneras, presentamos el método y la solución para ambas ecuaciones.

### 3.3. Linealización de la ecuación de Ricatti matricial

En efecto, consideremos a modo de ejemplo la ecuación (3.16) para la valorización del bono riesgoso y sea

$$B(\tau) = F^{-1}(\tau)G(\tau), \quad (3.22)$$

donde  $F \in LG(2, \mathbb{R})$ , el conjunto de las matrices reales invertibles de  $2 \times 2$  y  $G \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ , el conjunto de las matrices reales de  $2 \times 2$ . De esta manera, se verifica que

$$\frac{d}{d\tau}[F(\tau)B(\tau)] - \frac{dF(\tau)}{d\tau}B(\tau) = F(\tau)\frac{dB(\tau)}{d\tau}, \quad (3.23)$$

y utilizando la ecuación anterior se obtiene por lo tanto

$$\frac{dG(\tau)}{d\tau} - \frac{dF(\tau)}{d\tau}B(\tau) = -G(\tau)M - \frac{1}{2}F(\tau)T(\tau) - (F(\tau)M^T + 2G(\tau)Q^TQ)B(\tau) \quad (3.24)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dG(\tau)}{d\tau} = -\frac{1}{2}F(\tau)T(\tau) - G(\tau)M \\ \frac{dF(\tau)}{d\tau} = F(\tau)M^T + 2G(\tau)Q^TQ \end{cases} \quad (3.25)$$

Este sistema de ecuaciones puede ser escrito en forma compacta y ser resuelto a través del método de exponenciación. En efecto,

$$\frac{d}{d\tau}(G(\tau) \ F(\tau)) = (G(\tau) \ F(\tau)) \begin{pmatrix} -M & 2QQ^T \\ -\frac{1}{2}T(\tau) & M^T \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

$$\Leftrightarrow (G(\tau) \ F(\tau)) = (G(0) \ F(0)) \exp \int_0^\tau \begin{pmatrix} -M & 2QQ^T \\ -\frac{1}{2}T(s) & M^T \end{pmatrix} ds \quad (3.27)$$

$$\Leftrightarrow (G(\tau) \ F(\tau)) = (B(0) \ \mathbb{I}_n) \exp \int_0^\tau \begin{pmatrix} -M & 2QQ^T \\ -\frac{1}{2}T(s) & M^T \end{pmatrix} ds \quad (3.28)$$

$$\Leftrightarrow (G(\tau) \ F(\tau)) = (B(0)U_{11}(\tau) + U_{21}(\tau) \ B(0)U_{12} + U_{22}\mathbb{I}_n), \quad (3.29)$$

donde

$$\begin{pmatrix} U_{11}(\tau) & U_{12}(\tau) \\ U_{21}(\tau) & U_{22}(\tau) \end{pmatrix} = \exp \int_0^\tau \begin{pmatrix} -M & 2QQ^T \\ -\frac{1}{2}T(s) & M^T \end{pmatrix} ds \quad (3.30)$$

Y, de manera que  $B(0) = 0$ , la ecuación (3.22) implica finalmente que

$$B(\tau) = U_{22}^{-1}(\tau)U_{21}(\tau). \quad (3.31)$$

De manera análoga, para el bono libre de riesgo se verifica que

$$A(\tau) = V_{22}^{-1}(\tau)V_{21}(\tau), \quad (3.32)$$

donde

$$\begin{pmatrix} V_{11}(\tau) & V_{12}(\tau) \\ V_{21}(\tau) & V_{22}(\tau) \end{pmatrix} = \exp \int_0^\tau \begin{pmatrix} -M & 2QQ^T \\ -\frac{1}{2}R(s) & M^T \end{pmatrix} ds \quad (3.33)$$

Así, las ecuaciones (3.31) y (3.32) representan fórmulas cerradas para las soluciones de las ecuaciones matriciales de Ricatti que se derivan del problema de valorización. Sin embargo, la necesidad de integración hace que estas fórmulas sean menos valiosas.

### 3.4. Valorización de una opción europea sobre el bono libre de riesgo

Aplicando el lema de Itô es posible deducir que, bajo la medida neutral al riesgo, se verifica <sup>1</sup>

$$\frac{dP(t, \tau)}{P(t, \tau)} = rdt - Tr[(\Sigma^{1/2}dB_tQ + Q^T dB_t^T \Sigma^{1/2})A(\tau)] - a_1(\tau)(\sigma_{11}dW_1 + \sigma_{12}dW_2). \quad (3.34)$$

Si consideramos entonces un instante futuro  $T_0$  y recordamos que  $\tau = T_0 - t$  entonces la ecuación (3.34) refleja la evolución de la rentabilidad de un bono en particular que se acerca a su fecha de pago de cupón.

Ahora, siguiendo a Duffie, Pan, & Singleton (2000), para resolver el problema de valorización de una opción europea basta calcular la función característica del proceso de

---

<sup>1</sup>Ver apéndice C

retorno  $Y(t) = \ln P(t)$ , el cual por el lema de Itô satisface

$$dY(t) = (r - \frac{1}{2}Tr[(4A(\tau)Q^TQA(\tau) + R(\tau))\Sigma_t])dt - Tr[(\Sigma^{1/2}dB_tQ + Q^TdB_t^T\Sigma^{1/2})A(\tau)] - a_1(\tau)(\sigma_{11}dW_1 + \sigma_{12}dW_2), \quad (3.35)$$

$$\text{donde } R(\tau) = \begin{pmatrix} a_1(\tau)^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora, construimos una solución explícita al problema de valorización siguiendo en base a técnicas de transformadas de Fourier. El pago de una opción europea sobre el bono libre de riesgo con ejercicio en  $T_0$  puede escribirse como

$$C_P(t = T_0) = (P(T_0) - K)\mathbf{1}_{\{P(T_0) > K\}}. \quad (3.36)$$

El precio de una opción sobre el bono en el instante  $t$  antes de la expiración puede expresarse entonces por

$$\begin{aligned} C_P(t) &= \mathbb{E}_t^Q[\exp(-\int_t^{T_0} r_s ds)(P(T_0) - K)\mathbf{1}_{\{P(T_0) > K\}}] \\ &= \mathbb{E}_t^Q[\exp(-\int_t^{T_0} r_s ds)e^{\ln P(T_0)}\mathbf{1}_{\{\ln P(T_0) > \ln K\}}] \\ &\quad - K\mathbb{E}_t^Q[\exp(-\int_t^{T_0} r_s ds)\mathbf{1}_{\{\ln P(T_0) > \ln K\}}] \\ &= \Psi_{t,1}(\ln K) - K\Psi_{t,0}(\ln K), \end{aligned} \quad (3.37)$$

donde se ha definido

$$\Psi_{t,a}(k) = \mathbb{E}_t^Q[\exp(-\int_t^{T_0} r_s ds)e^{a\ln P(T_0)}\mathbf{1}_{\{\ln P(T_0) > k\}}]. \quad (3.38)$$

Para evaluar esta expresión, introducimos entonces la siguiente transformación

$$\psi_t(\alpha) = \mathbb{E}_t^Q[\exp(-\int_t^{T_0} r_s ds)e^{\alpha\ln P(T_0)}] \quad (3.39)$$

para algun valor complejo  $\alpha$ .

Ahora, notemos que

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_{t,a}(k)}{\psi_t(a)} &= \mathbb{E}_t^Q[\frac{\exp(-\int_t^{T_0} r_s ds)e^{a\ln P(T_0)}}{\psi_t(a)}\mathbf{1}_{\{\ln P(T_0) > k\}}] \\ &= \mathbb{E}_t^{\tilde{P}}[\mathbf{1}_{\{\ln P(T_0) > k\}}] = \tilde{P}_t(\ln P(T_0) > k), \end{aligned} \quad (3.40)$$

donde la medida de probabilidad  $\tilde{P}$  equivalente a  $Q$  se define mediante la siguiente derivada de Radon-Nykodim

$$\frac{d\tilde{P}}{dQ} = \frac{\exp(-\int_t^{T_0} r_s ds) \exp(\alpha \ln P(T_0))}{\psi_t(a)}. \quad (3.41)$$

Siguiendo a Heston (1993) y Duffie et al. (2000), es posible ocupar la fórmula de Lévy para la transformada inversa de Fourier, obteniendo

$$\Psi_{t,a}(k) = \frac{\psi_t(a)}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im}[\psi_t(a + iv)] e^{-ivk}}{v} dv. \quad (3.42)$$

Note que la evaluación de  $\Psi_{t,a}(k)$  requiere del cálculo de una única integral numérica. De esta manera, para evaluar el precio de la opción basta con encontrar una expresión explícita para la transformada de la ecuación (3.39)

Primero, es necesario obtener el generador infinitesimal de  $(X_1, \Sigma_t, Y_t)$ . De esta manera, comencemos con el siguiente resultado preliminar

**PROPOSICIÓN 3.3.** *El generador infinitesimal de  $(X_1, \Sigma_t, Y_t)$  viene dado por*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X_1, \Sigma_t, Y_t} = & Tr[(\Omega\Omega^T + M\Sigma + \Sigma M^T)\mathcal{D} + 2\Sigma\mathcal{D}Q Q^T\mathcal{D}] + (r - \frac{1}{2}Tr[(4A(\tau)Q^TQA(\tau) \\ & + R(\tau))\Sigma_t])\frac{\partial}{\partial Y} + \frac{1}{2}Tr[(4A(\tau)Q^TQA(\tau) + R(\tau))\Sigma_t]\frac{\partial^2}{\partial Y^2} - \kappa_1 X_1 \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{1}{2}\Sigma_{11} \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} \\ & + \Sigma_{11} a_1(\tau) \frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial Y} - 2Tr[A(\tau)\Sigma_t\mathcal{D}Q^TQ]\frac{\partial}{\partial Y}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

En la ecuación (3.43), es posible distinguir la contribución de cada uno de los procesos. El primer término de la primera línea corresponde al generador de  $\Sigma$ , los tres términos siguientes vienen de  $Y_t$  y los dos últimos de la segunda línea de  $X_1$ . Finalmente, en la tercera línea aparecen los términos cruzados entre  $X_1$  y  $Y$  y también de  $\Sigma$  e  $Y$ , recordando que  $\Sigma$  es independiente de  $X_1$ .

De esta manera, formulamos la siguiente proposición

**PROPOSICIÓN 3.4.** *Sea  $\psi_t(a)$  la transformada definida en la ecuación (3.39) más arriba, es decir*

$$\psi_t(\alpha) = \mathbb{E}_t^Q[\exp(-\int_t^{T_0} r_s ds) e^{\alpha \ln P(T_0)}] \quad (3.44)$$

para algun valor complejo  $\alpha$ . Entonces, ésta admite la siguiente expresión exponencialmente affine en las variables de estado

$$\psi_t(\alpha) = \exp(C_0(t) + C_1(t)X_{1,t} + C_2(t)Y_t + Tr[C(t)\Sigma_t]) \quad (3.45)$$

donde las funciones determinísticas  $C_0$ ,  $C_1$  y  $C_2$  satisfacen

$$C_2(t) = \alpha \quad (3.46)$$

$$C_1'(t) = \frac{1 - \exp(\kappa_1 t)}{\kappa_1}(\alpha - 1) \quad (3.47)$$

$$Tr[\Omega\Omega^T C(t)] - \delta_0(1 - \alpha) - C_0'(t) = 0 \quad (3.48)$$

y la matriz simétrica  $C$  satisface la siguiente ecuación de Riccati matricial

$$\begin{aligned} -C'(t) &= C(t)M + M^T C(t) + 2C(t)Q^T Q C(t) - \frac{1}{2}(4A(\tau)Q^T Q A(\tau) + R(\tau))(\alpha - \alpha^2) \\ &\quad + J(t) - 2\alpha C(t)Q^T Q A(t) \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\text{donde } J(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}C_1^2(t) + \alpha a_1(\tau)C_1(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

DEMOSTRACIÓN 3.3. La demostración consiste en probar que el proceso

$$X(t) = \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right) \exp(C_0(t) + C_1(t)X_{1,t} + C_2(t)Y_t + Tr[C(t)\Sigma_t]) \quad (3.50)$$

es una  $Q$ -martingala. En efecto, si así fuera, se tendría que

$$\begin{aligned} X(t) &= \mathbb{E}_t^Q[X(T_0)] \\ &= \mathbb{E}_t^Q[\exp(-\int_0^{T_0} r_s ds) \exp(C_0(T_0) + C_1(T_0)X_{1,T_0} + C_2(T_0)Y_{T_0} + Tr[C(T_0)\Sigma_{T_0}])] \\ &= \mathbb{E}_t^Q[\exp(-\int_0^{T_0} r_s ds) \exp(\alpha Y_{T_0})], \end{aligned} \quad (3.51)$$

donde se han utilizado las condiciones de borde  $C_0(T_0) = C_1(T_0) = 0$ ,  $C_2(T_0) = \alpha$  y  $C(t) = 0$ . Dividiendo entonces por  $\exp(-\int_0^t r_s ds)$  se obtiene finalmente que

$$\exp(C_0(t) + C_1(t)X_{1,t} + C_2(t)Y_t + Tr[C(t)\Sigma_t]) = \mathbb{E}_t^Q[\exp(-\int_t^{T_0} r_s ds) e^{\alpha \ln P(T_0)}]. \quad (3.52)$$

Luego, basta probar que  $X$  es una martingala. Si denotamos por  $\tilde{X}_t$  al proceso definido por  $\exp(C_0(t) + C_1(t)X_{1,t} + C_2(t)Y_t + Tr[C(t)\Sigma_t])$  entonces, por analogía con las demostraciones anteriores, basta probar que

$$\mathbb{E}_t^Q[d\tilde{X}_t - r_t\tilde{X}_tdt] = 0, \quad (3.53)$$

o equivalentemente, utilizando la expresión para el generador del trio  $(X_1, \Sigma_t, Y_t)$ , y reemplazando por la forma funcional supuesta y simplificando, se obtiene la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} & C'_{0,t} + C'_{1,t}X_{1,t} + C'_{2,t}Y_t + Tr[C'_t\Sigma] + Tr[(\Omega\Omega^T + M\Sigma + \Sigma M^T)C_t] + 2\Sigma C_t Q Q^T C_t \\ & + (r - \frac{1}{2}Tr[(4A(\tau)Q^T Q A(\tau) + R(\tau))\Sigma])C_{2,t} + \frac{1}{2}Tr[(4A(\tau)Q^T Q A(\tau) + R(\tau))\Sigma]C_{2,t}^2 \\ & - \kappa_1 X_1 C_{1,t} + \frac{1}{2}\Sigma_{11}C_{1,t}^2 + \Sigma_{11}a_1(\tau)C_{1,t}C_{2,t} - 2C_{2,t}Tr[A(\tau)\Sigma C_t Q^T Q] - r = 0, \end{aligned} \quad (3.54)$$

de donde, utilizando el hecho que  $r = (\delta_0 + X_1)$  y agrupando según las variables de estado se obtienen las ecuaciones (3.46)-(3.49).

La valorización de una opción sobre un *swap* contiene la complejidad propia a los instrumentos con más de un cupón por lo que se evitará su solución en forma cerrada. Sin embargo, la metodología para valorizar una opción sobre un bono cero cupón riesgoso es análoga a la de uno libre de riesgo.

### 3.5. Aplicaciones alternativas del modelo

#### 3.5.1. Estructura de tasa de interés

Siguiendo al modelo utilizado por RiskAmerica para estimar la estructura de la tasa de interés, si se considera que la tasa de interés  $r$  puede escribirse como

$$\lambda = \delta + X_1 + X_2, \quad (3.55)$$

donde la dinámica de las variables  $X_1$  y  $X_2$  satisface

$$\begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\kappa_1 X_1 \\ -\kappa_2 X_2 \end{pmatrix} dt + \Sigma_t^{1/2} \begin{pmatrix} dW_1 \\ dW_2 \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

y la matriz de varianza-covarianza tiene la siguiente dinámica

$$d\Sigma_t = (\Omega\Omega^T + M\Sigma_t + \Sigma_t M^T)dt + \Sigma_t^{1/2} dB_t Q + Q^T dB_t^T \Sigma_t^{1/2}. \quad (3.57)$$

Teniendo en cuenta las consideraciones y definiciones presentadas a lo largo de la tesis, el precio de un bono libre de riesgo viene dado por la ecuación (3.12) correspondiente a la del activo riesgoso, donde las funciones  $b_0$ ,  $b_1$  y  $B$  resuelven las ecuaciones (3.15)-(3.16). La única condición que se necesita imponer para que la fórmula de valorización sea correcta consiste en exigir que  $\gamma = 0$  y  $\delta_0 + \delta_1 = \delta$ .

En este caso, el precio del bono  $P(t, T)$  viene dado por

$$P(X_1, X_2, \Sigma_t, t, T) = e^{b_0(t, T) - b_1(\tau)X_1 - b_2(\tau)X_2 - Tr[B(\tau)\Sigma_t]}. \quad (3.58)$$

A partir de esta ecuación parece razonable exigir que la matriz  $B(\tau)$  sea positiva definida. En efecto, esta suposición es consistente con la intuición, al notar que el precio del bono  $P(t, T)$  satisface entonces

$$P(X_1, X_2, \Sigma_t, t, T) = e^{b_0(t, T) - b_1(\tau)X_1 - b_2(\tau)X_2 - Tr[B(\tau)\Sigma_t]} \leq e^{b_0(t, T) - b_1(\tau)X_1 - b_2(\tau)X_2}. \quad (3.59)$$

Es decir, el máximo valor que puede tomar el bono se alcanza en ausencia de riesgo para la matriz de varianza-covarianza de los factores que determinan la tasa de interés.

Una posible ventaja de este modelo con respecto al utilizado diariamente por RiskAmerica es que, a pesar de tener una cantidad similar de factores utilizados para explicar la dinámica de la tasa de interés, incorpora varianzas y covarianzas estocásticas, de manera que posiblemente no sería necesario recalibrar tan seguido los parámetros para ajustarse a las variaciones en la manera en que se comportan los *yields* de los bonos a distintas madureces. En efecto, este modelo presenta diversas propiedades que no son posibles de conseguir en la ausencia de volatilidades estocásticas. Finalmente, este modelo está en acuerdo con las observaciones

realizadas por Pérignon & Villa (2006) sobre una estructura de varianza-covarianza no constante para los factores que determinan la tasa de interés en los EE.UU.

En momentos en los cuales las volatilidades aumentan y las correlaciones parecen cambiar como parece suceder actualmente, los modelos no se ajustan bien. ¿Podrá este modelo capturar mayor información y ser más flexible para acomodarse mejor a estos cambios en el comportamiento de los bonos libres de riesgo?

### **3.5.2. Bonos corporativos**

Finalmente, otra aplicación del modelo planteado es la valorización de bonos corporativos. De manera intuitiva, el riesgo de *default* de un bono corporativo depende de la tasa de interés, pues por ejemplo si ésta sube entonces su costo de endeudamiento es más alto, y la probabilidad de quiebra mayor.

Además, en Duffie & Singleton (1999) se afirma que existe fuerte evidencia de que el *spread* con respecto a la curva cero libre de riesgo varía con el ciclo económico. Y en oposición con lo planteado anteriormente, en períodos de recesión económica las tasas exigidas a los bonos con riesgo de *default* tienden a aumentar, mientras que las tasas de interés se encuentran típicamente bajo sus medias a largo plazo. De esta manera, podría pensarse que la correlación entre los bonos libres de riesgo y los corporativos sea variante en el tiempo e irrestricta en signo. Parece interesante exhibir entonces un modelo para la valorización de bonos corporativos, en el cual hayan factores comunes a la tasa de interés y al proceso del *spread* que tengan una correlación estocástica. Las fórmulas de valorización para los bonos corporativos corresponden a las del activo  $S$  y algunas propiedades que se derivan para este activo se encuentran en el anexo D.

## 4. IMPLICANCIAS DEL MODELO

### 4.1. Relaciones del modelo planteado con los datos empíricos

Como se expuso en la sección empírica del estudio, la correlación entre los cambios de las tasas *swaps* y los *yield* de bonos libres de riesgo parece variar en el tiempo e incluso cambiar de signo dependiendo del segmento de la curva de los *yield* que se considera. A continuación, se presenta una justificación formal de porqué el modelo propuesto es lo suficientemente flexible como para adaptarse a este hecho.

#### 4.1.1. El bono del tesoro

Para analizar la tasa de interés de descuento asociada al bono libre de riesgo, es necesario en primer lugar deducir el *yield*  $y_{P,t}^{\tau}$  de un bono cero-cupón que paga en  $\tau = T - t$  definido por el valor que satisface

$$e^{-y_{P,t}^{\tau}\tau} = P(t, T). \quad (4.1)$$

Utilizando entonces la expresión obtenida en (3.2) se obtiene

$$y_{P,t}^{\tau} = -\frac{1}{\tau}(a_0(t, T) - a_1(\tau)X_1 - Tr[A(\tau)\Sigma_t]). \quad (4.2)$$

Parece razonable pedir que la matriz  $A$  sea, además de simétrica, positiva definida para asegurar la positividad del *yield*, aunque quizás no sea una condición necesaria. Además, una propiedad importante del modelo propuesto es que la covarianza instantánea en los cambios de los *yields* para madureces fijas pero distintas  $\tau_1$  y  $\tau_2$  es variante en el tiempo de manera estocástica. En efecto, a partir de (4.2) y el resultado del anexo (B.6) se deduce que esta covarianza viene dada por

$$\begin{aligned} \frac{1}{dt}Cov_t[dy_{P,t}^{\tau_1}, dy_{P,t}^{\tau_2}] &= \frac{1}{\tau_1\tau_2}(4Tr[A(\tau_1)\Sigma_t A(\tau_2)Q^T Q] + a_1(\tau_1)a_1(\tau_2)\Sigma_{11}) \\ &= \frac{1}{\tau_1\tau_2}(4Tr[A(\tau_2)Q^T Q A(\tau_1)\Sigma_t] + Tr[H(\tau_1, \tau_2)\Sigma_t]) \\ &= \frac{1}{\tau_1\tau_2}(Tr[(4A(\tau_2)Q^T Q A(\tau_1) + H(\tau_1, \tau_2))\Sigma_t]), \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\text{donde } H(\tau_1, \tau_2) = \begin{pmatrix} a_1(\tau_1)a_1(\tau_2) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, si se cumple que la matriz  $4A(\tau_2)Q^TQA(\tau_1) + H(\tau_1, \tau_2)$  es indefinida (i.e. no es ni positiva ni negativa definida) entonces el primer término del lado derecho de la ecuación de arriba puede variar de signo. Esta propiedad puede deducirse en analogía con el resultado de B.5.

Cabe destacar que en la ecuación (4.17), se trata de la evolución de un bono manteniendo  $\tau$  fijo. Es decir, se trata de la dinámica del precio de un bono con madurez constante. Esto es consistente con la manera en que actualmente se cotizan en bolsa los bonos. Alternativamente, se puede dejar que  $\tau$  disminuya a medida que el tiempo pase, lo que equivale a observar el proceso del *yield* de un bono en particular.

#### 4.1.2. El swap

Para presentar resultados que demuestren que las mismas propiedades que se obtienen para los bonos del tesoro pueden extenderse de manera análoga a los *swaps* sobre la tasa de interés, se analizó la tasa *swap*  $y_{S,t}^\tau$ . En efecto, ésta satisface

$$y_{S,t}^\tau = 2 \frac{1 - S(t, T)}{\sum_{i=1}^n S(t, t + \frac{i}{2})}, \quad (4.4)$$

donde  $n = 2(T - t)$  corresponde al número de cupones del *swap*. Esta expresión se deduce a partir del hecho que el *swap* está emitido a la par, y utilizando la tasa de descuento ajustada por riesgo para descontar los flujos futuros.

Utilizando entonces la expresión obtenida en (3.12) y aplicando el lema de Itô se obtiene que la parte de difusión del proceso de  $y_{S,t}^\tau$  puede expresarse como

$$\begin{aligned} dy_{S,t}^\tau - \mathbb{E}_t^Q(dy_{S,t}^\tau) &= 2(c_1(t, T)(dX_1 - \mathbb{E}_t^Q(dX_1)) + c_2(t, T)(dX_2 - \mathbb{E}_t^Q(dX_2)) \\ &\quad + Tr[C(t, T)(d\Sigma - \mathbb{E}_t^Q(d\Sigma))]), \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde

$$c_1(t, T) = \frac{b_1(\tau)S(t, T) \sum_{i=1}^n S(t, t + \frac{i}{2}) + (1 - S(t, T)) \sum_{i=1}^n b_1(\frac{i}{2})S(t, t + \frac{i}{2})}{(\sum_{i=1}^n S(t, t + \frac{i}{2}))^2} \quad (4.6)$$

$$c_2(t, T) = \frac{b_2(\tau)S(t, T) \sum_{i=1}^n S(t, t + \frac{i}{2}) + (1 - S(t, T)) \sum_{i=1}^n b_2(\frac{i}{2})S(t, t + \frac{i}{2})}{(\sum_{i=1}^n S(t, t + \frac{i}{2}))^2} \quad (4.7)$$

$$C(t, T)_{i,j} = \frac{B_{i,j}(\tau)S(t, T) \sum_{i=1}^n S(t, t + \frac{i}{2}) + (1 - S(t, T)) \sum_{i=1}^n B_{i,j}(\frac{i}{2})S(t, t + \frac{i}{2})}{(\sum_{i=1}^n S(t, t + \frac{i}{2}))^2} \quad (4.8)$$

De esta manera, no aparece una condición clara sobre la matriz  $B$  para asegurar la positividad del *yield*. Por otro lado, al igual que para el bono del tesoro, una propiedad importante del modelo propuesto es que la covarianza instantánea en los cambios de los *yields* para madureces fijas pero distintas  $\tau_1$  y  $\tau_2$  sigue una dinámica estocástica. En efecto, a partir de (4.4) y el resultado del anexo (B.6) se deduce que esta covarianza viene dada por

$$\begin{aligned} \frac{1}{dt} Cov_t[dy_{S,t}^{\tau_1}, dy_{S,t}^{\tau_2}] &= 4\frac{1}{\tau_1\tau_2}(4Tr[C(\tau_1)\Sigma_t C(\tau_2)Q^T Q] + c(\tau_1)^T \Sigma_t c(\tau_2)) \\ &= 4\frac{1}{\tau_1\tau_2}(4Tr[C(\tau_1)\Sigma_t C(\tau_2)Q^T Q] + Tr[J(\tau_1, \tau_2)\Sigma_t]) \\ &= 4\frac{1}{\tau_1\tau_2}Tr[(4C(\tau_2)Q^T Q C(\tau_1) + J(\tau_1, \tau_2))\Sigma_t], \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\text{donde } c(\tau) = \begin{pmatrix} c_1(\tau) \\ c_2(\tau) \end{pmatrix} \text{ y } J(\tau_1, \tau_2) = \begin{pmatrix} c_1(\tau_1)c_1(\tau_2) & \frac{c_1(\tau_1)c_2(\tau_2)+c_2(\tau_1)c_1(\tau_2)}{2} \\ \frac{c_1(\tau_1)c_2(\tau_2)+c_2(\tau_1)c_1(\tau_2)}{2} & c_2(\tau_1)c_2(\tau_2) \end{pmatrix}.$$

De esta manera, si se cumple que la matriz  $4B(\tau_2)Q^T QB(\tau_1) + J(\tau_1, \tau_2)$  es indefinida (i.e. no es ni positiva ni negativa definida) entonces el primer término del lado derecho de la ecuación (4.9) puede variar de signo. Esta propiedad puede observarse a partir del resultado (B.5).

### 4.1.3. El movimiento conjunto

Dado que se tienen fórmulas cerradas para los *yields* del bono del tesoro y los *swap*, es posible obtener una expresión para la manera en que ambos *yields* tienden a moverse para madureces dadas. Más específicamente, utilizando las ecuaciones (4.2) y (4.5) es posible

deducir que la covarianza de ambos viene dada por

$$\begin{aligned}
\frac{1}{dt} Cov_t[dy_{S,t}^{\tau_1}, dy_{P,t}^{\tau_2}] &= \frac{1}{\tau_1 \tau_2} (4Tr[A(\tau_1)\Sigma_t B(\tau_2)Q^T Q] + d(\tau_1)^T \Sigma_t f(\tau_2)) \\
&= \frac{1}{\tau_1 \tau_2} (4Tr[A(\tau_1)\Sigma_t B(\tau_2)Q^T Q] + Tr[F(\tau_1, \tau_2)\Sigma_t]) \\
&= \frac{1}{\tau_1 \tau_2} Tr[(4A(\tau_2)Q^T Q B(\tau_1) + F(\tau_1, \tau_2))\Sigma_t],
\end{aligned} \tag{4.10}$$

donde  $d(\tau) = \begin{pmatrix} a_1(\tau) \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $f(\tau) = \begin{pmatrix} c_1(\tau) \\ c_2(\tau) \end{pmatrix}$  y  $F(\tau_1, \tau_2) = \begin{pmatrix} a_1(\tau_1)c_1(\tau_2) & \frac{a_1(\tau_1)c_2(\tau_2)}{2} \\ \frac{a_1(\tau_1)c_2(\tau_2)}{2} & 0 \end{pmatrix}$ .

De esta manera, si se cumple que la matriz  $4A(\tau_2)Q^T Q B(\tau_1) + F(\tau_1, \tau_2)$  es indefinida (i.e. no es ni positiva ni negativa definida) entonces el primer término del lado derecho de la ecuación (4.10) puede variar de signo. Esta propiedad puede observarse a partir del resultado (B.5).

## 4.2. Suposiciones sobre la estructura de premios por riesgo y el paso a la medida real

A partir de la expresión (3.2) y (3.12) es posible deducir la varianza instantánea de los activos  $P$  y  $S$  respectivamente bajo la medida neutral al riesgo y, por ende, también bajo la real. En efecto, la transformación de Girsanov afecta solo al valor esperado del proceso, pero no su varianza instantánea.

En primer lugar, se especificarán los procesos de los activos  $P$  y  $S$  bajo la medida histórica o real asumiendo una estructura lineal para el premio por riesgo y luego se presentaran algunas propiedades adicionales que se deducen del modelo planteado. De esta manera, y siguiendo a Fonseca et al. (2005), asumimos que para el proceso de la matriz de varianza covarianza se cumple que

$$dB_t = d\tilde{B}_t + \Sigma^{1/2} \Lambda Q^T dt, \tag{4.11}$$

donde  $d\tilde{B}_t$  es una matriz de movimientos brownianos independientes bajo la medida real  $\mathbb{P}$  y  $\Lambda$  es una matriz simétrica de constantes. De esta manera, se verifica que el premio por riesgo es *affine* en las variables de estado y además que el proceso de Wishart sea invariante bajo esta transformación. Es decir, el cambio de la medida neutral al riesgo a la real preserva la

distribución del proceso. En efecto

$$\begin{aligned}
d\Sigma_t &= (\Omega\Omega^T + M\Sigma_t + \Sigma_t M^T)dt + \Sigma_t^{1/2}dB_tQ + Q^TdB_t^T\Sigma_t^{1/2} \\
&= (\Omega\Omega^T + M\Sigma_t + \Sigma_t M^T)dt + \Sigma_t^{1/2}(d\tilde{B}_t + \Sigma_t^{1/2}\Lambda Q^T dt)Q \\
&\quad + Q^T(d\tilde{B}_t + \Sigma_t^{1/2}\Lambda Q^T dt)^T\Sigma_t^{1/2} \\
&= (\Omega\Omega^T + M\Sigma_t + \Sigma_t M^T + \Sigma\Lambda Q^TQ + Q^TQ\Lambda\Sigma)dt + \Sigma_t^{1/2}d\tilde{B}_tQ + Q^Td\tilde{B}_t^T\Sigma_t^{1/2} \\
&= (\Omega\Omega^T + (M + Q^TQ\Lambda)\Sigma_t + \Sigma_t(M + Q^TQ\Lambda)^T)dt + \Sigma_t^{1/2}d\tilde{B}_tQ + Q^Td\tilde{B}_t^T\Sigma_t^{1/2} \\
&= (\Omega\Omega^T + \tilde{M}\Sigma_t + \Sigma_t\tilde{M}^T)dt + \Sigma_t^{1/2}d\tilde{B}_tQ + Q^Td\tilde{B}_t^T\Sigma_t^{1/2},
\end{aligned} \tag{4.12}$$

donde se definió  $\tilde{M} = M + Q^TQ\Lambda$ .

Además, para el proceso de  $X_1$  y  $X_2$  se especifican también los premios por riesgo como

$$dW_t = d\tilde{W}_t + \Sigma^{1/2}\Theta dt, \tag{4.13}$$

donde  $dW_t = \begin{pmatrix} dW_1 \\ dW_2 \end{pmatrix}$  y  $\Theta$  es un vector de constantes de  $2 \times 1$ . Con esta suposición, el proceso de  $X_1$  y  $X_2$  queda definido por

$$\begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\kappa_1 X_1 \\ -\kappa_2 X_2 \end{pmatrix} dt + \Sigma^{1/2}dW_t = \begin{pmatrix} -\kappa_1 X_1 \\ -\kappa_2 X_2 \end{pmatrix} dt + \Sigma^{1/2}(d\tilde{W}_t + \Sigma^{1/2}\Theta dt), \tag{4.14}$$

de manera que

$$\begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\kappa_1 X_1 \\ -\kappa_2 X_2 \end{pmatrix} + \Sigma\Theta dt + \Sigma^{1/2}d\tilde{W}_t. \tag{4.15}$$

De esta manera, el paso de la medida neutral al riesgo  $\mathbb{Q}$  a la real  $\mathbb{P}$  queda definido por la martingala exponencial

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_t} = e^{\left(-\int_0^t Tr[Q\Lambda\Sigma_s^{1/2}d\tilde{B}_s + \Theta\Sigma_s^{1/2}d\tilde{W}_s] - \frac{1}{2}\int_0^t Tr[Q\Lambda\Sigma_s\Lambda Q^T + \Theta\Sigma_s\Theta]ds\right)}. \tag{4.16}$$

### 4.3. El proceso de los precio bajo la medida real y más propiedades

En base a la fórmula de valorización dada por la ecuación (3.2) es posible entonces obtener el proceso asociado al precio del bono libre de riesgo bajo la medida neutral al riesgo.

Utilizando luego las relaciones obtenidas en la subsección anterior, se obtiene finalmente que el proceso del precio del bono  $P(\Sigma, X_1, \tau)$  bajo la medida real satisface

$$\frac{dP(\Sigma, X_1, \tau)}{P(\Sigma, X_1, \tau)} = (r + e_{P,t}^\tau)dt - Tr[(\Sigma^{1/2}d\tilde{B}_t Q + Q^T d\tilde{B}_t^T \Sigma^{1/2})A(\tau)] - a_1(\tau)(\sigma_{11}d\tilde{W}_1 + \sigma_{12}d\tilde{W}_2), \quad (4.17)$$

donde el exceso de retorno del bono del tesoro  $e_{P,t}^\tau$  viene dado por

$$\begin{aligned} e_{P,t}^\tau &= -Tr[(\Sigma \Lambda Q^T Q + Q^T Q \Lambda \Sigma)A] - a_1(\tau)(\Sigma_{11}\Theta_1 + \Sigma_{12}\Theta_2) \\ &= -Tr[(\Lambda Q^T Q + A Q^T Q \Lambda + M(\tau))\Sigma] \end{aligned} \quad (4.18)$$

definiendo  $M(\tau) = \begin{pmatrix} a_1(\tau)\theta_1 & \frac{a_1(\tau)\theta_2}{2} \\ \frac{a_1(\tau)\theta_2}{2} & 0 \end{pmatrix}$ .

Cabe destacar que en la ecuación (4.17), se trata de la evolución de un bono manteniendo  $\tau$  fijo. Es decir, se trata de la dinámica del precio de un bono con madurez constante. Esto es consistente con la manera en que actualmente se cotizan en bolsa los bonos. Alternativamente, se puede dejar que  $\tau$  disminuya a medida que el tiempo pase, lo que equivale a observar el proceso del *yield* de un bono en particular.

Por otro lado, utilizando el resultado (B.6) la volatilidad instantánea del bono viene dada por

$$\begin{aligned} v_t^\tau &= 4Tr[A(\tau)\Sigma_t A(\tau)Q^T Q] + a_1(\tau)^2 \Sigma_{11} \\ &= Tr[(4A(\tau)Q^T Q A(\tau) + R(\tau))\Sigma_t], \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde  $R(\tau) = \begin{pmatrix} a_1(\tau)^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Evidencia empírica establece que los bonos tienen un exceso de retorno cercano a cero en promedio, pero toman valores positivos; ver Ang & Piazzesi (2003). Esto quiere decir que la razón de sharpe,  $\frac{e_t}{\sqrt{v_t}}$  es pequeña para todas las madureces  $\tau$ . El modelo propuesto al parecer puede replicar esta característica, si por ejemplo que  $\Lambda Q^T Q + A Q^T Q \Lambda + M(\tau)$  es indefinida para algún  $\tau$ .

De manera análoga, se obtiene que el proceso del precio del bono riesgoso  $S(\Sigma, X_1, X_2, \tau)$  satisface bajo la medida real

$$\begin{aligned} \frac{dS(\Sigma, X_1, X_2, \tau)}{S(\Sigma, X_1, X_2, \tau)} &= (r_t + \lambda_t + e_{S,t}^\tau)dt - Tr[(\Sigma^{1/2}d\tilde{B}_tQ + Q^T d\tilde{B}_t\Sigma^{1/2})B(\tau)] \\ &\quad - b_1(\tau)(\sigma_{11}d\tilde{W}_1 + \sigma_{12}d\tilde{W}_2) - b_2(\tau)(\sigma_{12}d\tilde{W}_1 + \sigma_{22}d\tilde{W}_2), \end{aligned} \quad (4.20)$$

donde el exceso de retorno del *swap*  $e_{S,t}^\tau$  viene dado por

$$e_{S,t}^\tau = Tr[\Sigma\Lambda Q^T Q + Q^T Q\Lambda^T \Sigma] - b_1(\tau)u_1^T \Sigma\Theta - b_2(\tau)u_2^T \Sigma\Theta. \quad (4.21)$$

De esta manera, intuyendo que los hechos observados para el exceso de retorno de los bonos deberían extenderse a los *swaps*, el modelo es capaz de incorporar esta propiedad.

## 5. CONSIDERACIONES PARA LA ESTIMACION

### 5.1. Simulación de un proceso de Wishart

En primer lugar, recordemos que el proceso de Wishart satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$d\Sigma_t = (\Omega\Omega^T + M\Sigma_t + \Sigma_t M^T)dt + \Sigma_t^{1/2}dB_tQ + Q^T dB_t^T \Sigma_t^{1/2}, \Sigma_0 = \Sigma. \quad (5.1)$$

Luego, para cada  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $h > 0$ , integrando en el intervalo  $[t, t+h]$  se obtiene

$$\Sigma_{t+h} = \Sigma_t + \Omega\Omega^T h + \int_t^{t+h} M\Sigma_s ds + \int_t^{t+h} \Sigma_s M^T ds + \int_t^{t+h} \Sigma_s^{1/2} dB_s Q + \int_t^{t+h} Q^T dB_s^T \Sigma_s^{1/2}. \quad (5.2)$$

Así, una manera fácil de aproximar las integrales estocásticas para hacer una simulación numérica conveniente es utilizar es esquema de Euler.

$$\widehat{\Sigma}_{t+h} = \widehat{\Sigma}_t + (\Omega\Omega^T + M\widehat{\Sigma}_t + \widehat{\Sigma}_t M^T)h + \widehat{\Sigma}_t^{1/2}(B_{t+h} - B_t)Q + Q^T(B_{t+h}^T - B_t^T)\widehat{\Sigma}_t^{1/2}, \quad (5.3)$$

donde  $\widehat{\Sigma}$  corresponde al proceso de Wishart discretizado. Por otro lado, dada la propiedad de incrementos estacionarios e independientes del movimiento browniano, la distribución de  $B_{t+h} - B_t$  es  $\mathcal{N}(0, h\mathbb{I}_{2 \times 2})$ . De esta manera, la ecuación (5.3) es útil para simular  $\widehat{\Sigma}$  para cualquier paso temporal fijo  $h$ .

Sin embargo, las propiedades interesantes del proceso se pierden en la discretización y puede volverse negativa definida antes de  $T$ . Para resolver este problema, al observar que  $\widehat{\Sigma} \rightarrow \Sigma$  cuando  $h \rightarrow 0$ , uno esperaría que  $\widehat{\Sigma}$  permaneciera positiva definida para un  $h$  suficientemente pequeño. Luego, introducimos un paso temporal variable.

Supongamos entonces que conocemos los valores del proceso de Wishart y los movimientos brownianos discretizado  $(\widehat{\Sigma}_0, \widehat{\Sigma}_h, \widehat{\Sigma}_{2h}, \dots, \widehat{\Sigma}_t)$  y  $(0, B_h, B_{2h}, \dots, B_t)$ . Supongamos entonces que, al calcular  $\widehat{\Sigma}_{t+h}$  de acuerdo a (5.3) esta matriz es negativa definida, i.e, al menos su menor valor propio es negativo. Luego, dividimos el paso temporal a la mitad y calculamos  $\widehat{\Sigma}_{t+\frac{h}{2}}$  y verificamos si la matriz obtenida es positiva definida. Iteramos este procedimiento

hasta que, ojalá,  $\widehat{\Sigma}_{t+\frac{h}{2^n}}$  se positiva semidefinida o el paso temporal sea menor que cierto valor definido en base a la precisión numérica.

Para obtener el valor de  $\widehat{\Sigma}_{t+\frac{h}{2}}$ , se necesita conocer  $B_{t+\frac{h}{2}}$  condicional a los valores de  $(0, B_h, B_{2h}, \dots, B_t, B_{t+h})$ . Debido a las propiedades markovianas del movimiento browniano, esto es equivalente a calcular a dibujar  $B_{t+\frac{h}{2}}$  condicional a  $(B_t, B_{t+h})$ .

$$(B_{t+\frac{h}{2}} - B_t) / (B_t = X, B_{t+h} = X + Y) \stackrel{d}{=} \frac{1}{2}Y + \frac{h}{2}Z, \quad (5.4)$$

donde  $Z$  distribuye normal estándar.

## 5.2. Estimación

Ahora, debido a la no linealidad del problema, parece razonable proponer para la estimación un filtro de Kalman no lineal, utilizando las ecuaciones de transición definidas por el modelo y las ecuaciones de medida derivadas en las fórmulas de valorización. Otros métodos de estimación que puede ser propuesto es el filtro de particulas, que requiere un mayor esfuerzo computacional pero tiene ventajas con respecto al filtro de Kalman extendido debido a la alta no linealidad del problema y a la existencia de un proceso no gaussiano. La pregunta de cual método es mejor queda abierta a futuros desarrollos. En efecto, el problema de la estimación representa un gran desafío, pues las características del problema hacen que la convergencia de métodos como el filtro de Kalman extendido no estén asegurados.

## 6. CONCLUSION

La naturaleza estocástica en los factores que influyen en la tasa de interés han sido un tema revelante en las finanzas. Quizás por la simplicidad o por una manera progresiva de razonar, los primeros modelos siempre asumieron una estructura de varianzas y covarianzas constantes en el tiempo. A pesar de que numerosos esfuerzos se han realizado para justificar el carácter estocástico de las volatilidades y covolatilidades, pareciera que ningún intento se hizo en un principio para determinar que éstas fueran constantes, llevando a numerosas contradicciones. Más aún, se han encontrado inconsistencias entre la estructuras de la tasa de interés en la práctica y la teoría.

Se ha desarrollado a lo largo de este estudio un modelo más general, que mantiene una forma relativamente sencilla y se han derivado las propiedades que se deducen de éste, exhibiendo explícitamente algunas de sus propiedades más importantes. Para lograr este objetivo, se ha generalizado un proceso comúnmente utilizado para modelar la estructura de tasas de interés a través de la incorporación de un proceso para modelar la dinámica de la matriz de varianza-covarianza. Si bien este proceso ha sido utilizado por Gouriéroux (2006) para describir los *yields factors*, el modelo propuesto lo incorpora en base a su interpretación como matriz de varianza-covarianza.

Sin embargo, en un problema común de los modelos de volatilidad estocástica, se tiene un número relativamente importante de parámetros a estimar, lo que puede llevar a problemas de identificación. Si se tiene en consideración además que métodos numéricos son necesarios para resolver las fórmulas de valorización, la no-linealidad del problema y la presencia de un proceso no-gaussiano, la complejidad de la estimación puede parecer una debilidad importante.

Sin una calibración no es posible entonces afirmar las virtudes y ventajas sobre un modelo tradicional que justifique dicho esfuerzo adicional. A modo personal, la mayor consistencia teórica con la evidencia empírica ya es suficiente. Además, esta capacidad del modelo le entrega ventajas considerables para problemas de *hedging* y valorización. En efecto, la

valorización de activos que dependen crucialmente de la estructura de volatilidad puede ser otra ventaja comparativa que hace de este modelo, un modelo más completo.

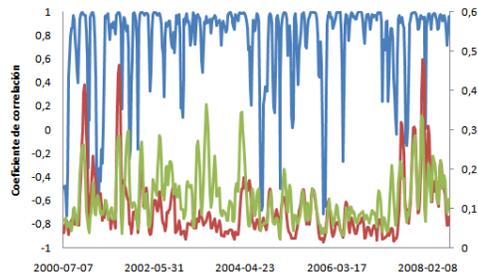
Finalmente, la estimación del modelo representa una motivación por sí misma, dada la dificultad del problema. De esta manera, es un desarrollo futuro natural que permitiría comprender de mejor manera los alcances del modelo propuesto.

## BIBLIOGRAFIA

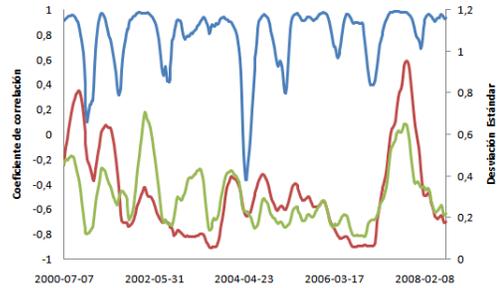
- Ang, A., & Piazzesi, M. (2003, May). A no-arbitrage vector autoregression of term structure dynamics with macroeconomic and latent variables. *Journal of Monetary Economics*, 50(4), 745-787.
- Bru, M. (1991). Wishart processes. *Journal of Theoretical Probability*, 4, 725-743.
- Buraschi, A., Porchia, P., & Trojani, F. (2006, May). Correlation hedging. *Working Paper*.
- Christiansen, C. (2000). Macroeconomic announcement effects on the covariance structure of government bond returns. *Journal of Empirical Finance*, 7, 479-507.
- Collin-Dufresne, P., & Goldstein, R. (2001). Stochastic correlation and the relative pricing of caps and swaptions in a generalized-affine framework. *Working Paper*.
- Dai, Q., & Singleton, J. (2000). Specification analysis of affine term structure of interest rates. *The Journal of Finance*, 55(5), 1943-1978.
- Dai, Q., & Singleton, K. (2003). Term structure dynamics in theory and reality. *Review of Financial Studies*, 16(3), 631-678.
- Duffee, G. (2002). Term premia and interest rate forecasts in affine models. *Journal of Finance*, 57, 405-443.
- Duffie, D., & Kan, R. (1996). A yield-factor model of interest rates. *Mathematical Finance*, 6(4), 379-406.
- Duffie, D., Pan, J., & Singleton, K. (2000). Transform analysis and option pricing for affine jump-diffusions. *Econometrica*, 68, 1343-1376.
- Duffie, D., & Singleton, K. (1997). An econometric model of the term structure of interest-rate swap yields. *Journal of Finance*, 52(4), 1287-1321.
- Duffie, D., & Singleton, K. (1999). Modeling term structures of defaultable bonds. *The Review of Financial Studies*, 12(4), 687-720.
- Fonseca, J. da, Grasselli, M., & Tebaldi, C. (2005). Wishart multi-dimensional stochastic volatility. *Working Paper*.

- Gourieroux, C. (2006). Continuous time wishart process for stochastic risk. *Econometric Reviews*, 25, 177-217.
- Gourieroux, C., Jasiak, J., & Sufana, R. (2004). The wishart autoregressive process of multivariate stochastic volatility. *Working Paper, CREST, CEPREMAP, and University of Toronto*.
- Gourieroux, C., & Sufana, R. (2005). Derivative pricing with wishart multivariate stochastic volatility: Application to credit risk. *Working Paper*.
- Han, B. (2007). Stochastic volatilities and correlations of bond yields. *The Journal of Finance*, 62(3), 1491-1524.
- Heston, S. (1993). A closed form solution for options with stochastic volatility. *Review of Financial Studies*, 6, 327-343.
- Jagannathan, R., Kaplin, A., & Sun, S. G. (2001, December). *An evaluation of multi-factor cir models using libor, swap rates, and cap and swaption prices* (NBER Working Papers No. 8682). National Bureau of Economic Research, Inc.
- Liu, J., Longstaff, F., & Mandell, R. (2002). The market price of credit risk: An empirical analysis of interest rate swap spreads. *NBER Working Paper(W8990)*.
- Longstaff, F., Santa-Clara, P., & Schwartz, E. (2001). The relative valuation of caps and swaptions: Theory and empirical evidence. *Journal of Finance*, 56, 2067-2109.
- Pérignon, C., & Villa, C. (2006). Sources of time variation in the covariance matrix of interest rates. *Journal of Business*, 79(3), 1535-1550.
- Silvennoinen, A., & Terasvirta, T. (2008, January). Multivariate garch models. *SSE/EFI Working Paper Series in Economics and Finance(669)*.

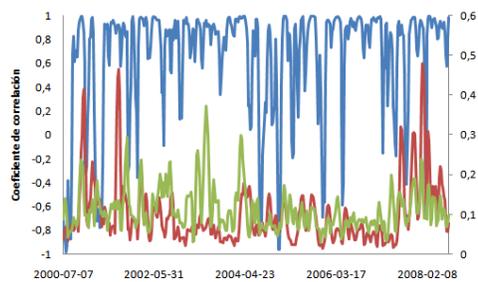
## ANEXO A. DESVIACIONES ESTANDARES Y CORRELACION



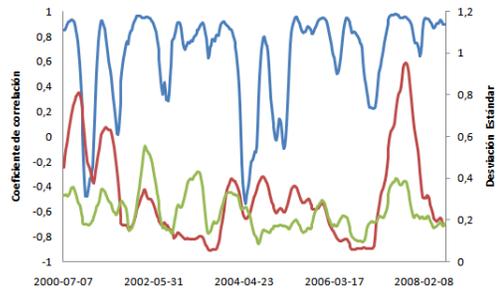
(a) Bono libre de riesgo a 1 y 5 años respectivamente



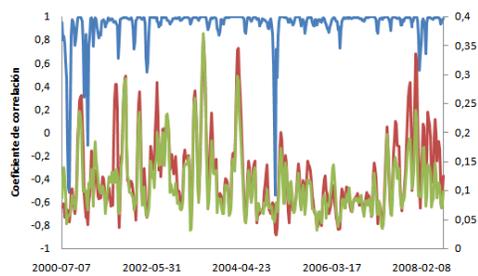
(b) Bono libre de riesgo a 1 y 5 años respectivamente



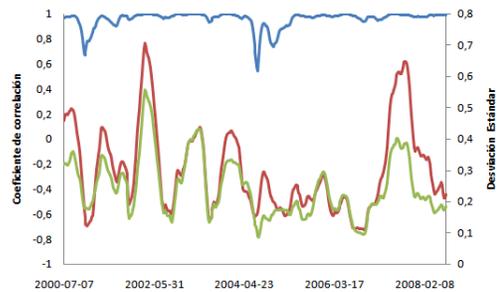
(c) Bono libre de riesgo a 1 y 10 años respectivamente



(d) Bono libre de riesgo a 1 y 10 años respectivamente

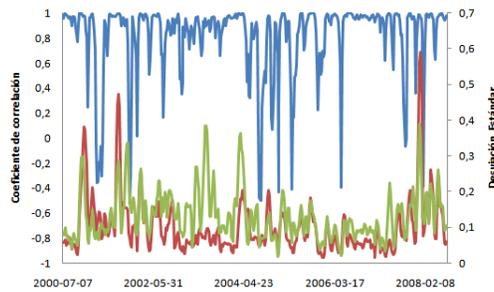


(e) Bono libre de riesgo a 5 y 10 años respectivamente

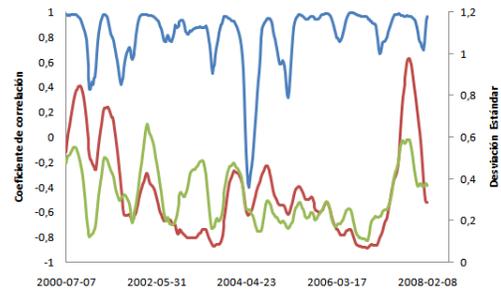


(f) Bono libre de riesgo a 5 y 10 años respectivamente

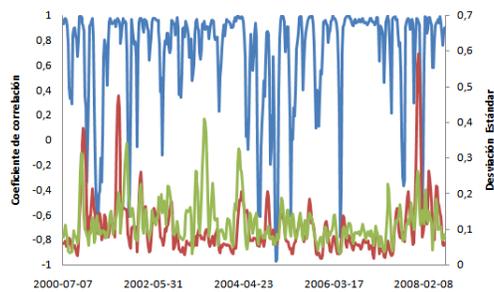
FIGURA A.1. Correlación entre los cambios de los *yields* de bonos libres de riesgo con distintas madureces. Las curvas en azul representan el coeficiente de correlación entre los cambios en los *yields* de los bonos libres de riesgo, mientras que las curvas en rojo y verde corresponden a las desviaciones estándares de las tasas con madureces respectivas.



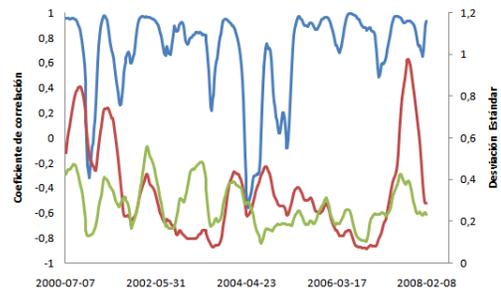
(a) *Swaps* a 1 y 5 años respectivamente



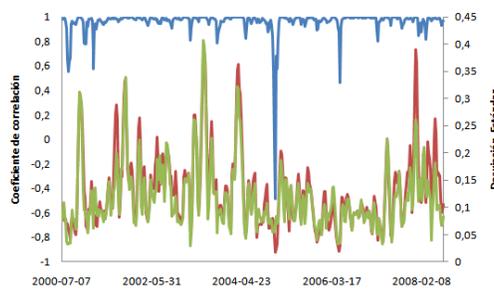
(b) *Swaps* a 1 y 5 años respectivamente



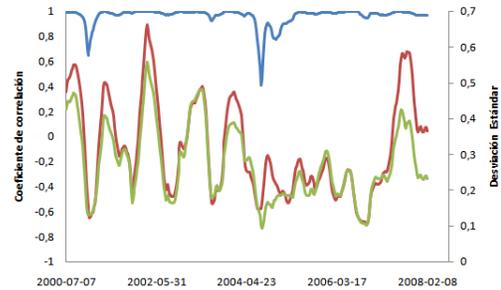
(c) *Swaps* a 1 y 10 años respectivamente



(d) *Swaps* a 1 y 10 años respectivamente



(e) *Swaps* a 5 y 10 años respectivamente



(f) *Swaps* a 5 y 10 años respectivamente

FIGURA A.2. Correlación entre los cambios de las tasas *swaps* con distintas madureces. Las curvas en azul representan el coeficiente de correlación entre las tasas *swaps*, mientras que las curvas en rojo y verde corresponden a las desviaciones estándares de las tasas *swaps* con madureces respectivas.

## ANEXO B. RESULTADOS UTILES SOBRE EL PROCESO DE WISHART

### B.1. Resultado 1

El siguiente resultado facilita el computo de los momentos de segundo orden de formas cuadráticas del proceso de Wishart, ver Gouriéroux (2006)

$$\begin{aligned}
 & Cov_t(\alpha^T d\Sigma_t \alpha, \beta^T d\Sigma_t \beta) \\
 &= Cov_t[\alpha^T (\Sigma_t^{1/2} dB_t Q + Q^T dB_t^T \Sigma_t^{1/2}) \alpha, \beta^T (\Sigma_t^{1/2} dB_t Q + Q^T dB_t^T \Sigma_t^{1/2}) \beta] \\
 &= \mathbb{E}_t[(\alpha^T \Sigma_t^{1/2} dB_t Q \alpha + \alpha^T Q^T dB_t^T \Sigma_t^{1/2} \alpha)(\beta^T \Sigma_t^{1/2} dB_t Q \beta + \beta^T Q^T dB_t^T \Sigma_t^{1/2} \beta)] \\
 &= 4(\alpha^T \Sigma_t \beta \alpha^T Q^T Q \beta) dt
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

en donde se ha usado el hecho de que para cualquier vector n-dimensional u y v se cumple

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_t[dB_t u v^T dB_t] &= \mathbb{E}_t[dB_t^T u v^T dB_t^T] = v u^T dt \\
 \mathbb{E}_t[dB_t u v^T dB_t^T] &= \mathbb{E}_t[dB_t^T u v^T dB_t] = v^T u \mathbb{I}_n dt
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

### B.2. Resultado 2

Dada una matriz de Wishart de  $n \times n$  y vectores arbitrarios n-dimensionales a, b, c y f, se verifica que la covarianza entre formas cuadráticas asociadas a la matriz de Wishart viene dada por

$$Cov_t[a^T d\Sigma_t b, c^T d\Sigma_t f] = [a^T Q^T Q f b^T \Sigma_t c + a^T Q^T Q c b^T \Sigma_t f + b^T Q^T Q f a^T \Sigma_t c + b^T Q^T Q c a^T \Sigma_t f] \tag{B.3}$$

De esta manera, es directo verificar las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
 \langle d\Sigma_{11}, d\Sigma_{11} \rangle_t &= 4\Sigma_{11}(q_{11}^2 + q_{21}^2) dt \\
 \langle d\Sigma_{12}, d\Sigma_{12} \rangle_t &= (\Sigma_{11}(q_{11}^2 + q_{22}^2) + 2\Sigma_{12}(q_{11}q_{12} + q_{21}q_{22}) + \Sigma_{22}(q_{11}^2 + q_{21}^2)) dt \\
 \langle d\Sigma_{22}, d\Sigma_{22} \rangle_t &= 4\Sigma_{22}(q_{12}^2 + q_{22}^2) dt \\
 \langle d\Sigma_{11}, d\Sigma_{12} \rangle_t &= 2(\Sigma_{11}(q_{11}q_{12} + q_{21}q_{22}) + \Sigma_{12}(q_{11}^2 + q_{21}^2)) dt \\
 \langle d\Sigma_{11}, d\Sigma_{22} \rangle_t &= 4\Sigma_{12}(q_{11}q_{12} + q_{21}q_{22}) dt \\
 \langle d\Sigma_{11}, d\Sigma_{22} \rangle_t &= 2(\Sigma_{12}(q_{12}^2 + q_{22}^2) + \Sigma_{22}(q_{11}q_{12} + q_{21}q_{22})) dt
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

donde  $\Sigma_{ij}$  y  $q_{ij}$  denotan el elemento  $(i, j)$  de las matrices  $\Sigma$  y  $Q$  respectivamente.

### B.3. Resultado 3

Si  $\Sigma_t$  es un proceso de Wishart y  $C$  es una matriz simétrica positiva definida, entonces el proceso escalar  $Tr[C\Sigma_t]$  es positivo.

En efecto, la matriz  $C$  admite una descomposición espectral  $C = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i u_i^T$ , donde  $\lambda_i$  son valores propios positivos y  $u_i, i = 1, \dots, n$ , los vectores propios asociados. Así

$$\begin{aligned} Tr[C\Sigma_t] &= Tr[\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i u_i^T \Sigma_t] = \sum_{i=1}^n \lambda_i Tr[u_i u_i^T \Sigma_t] \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i Tr[u_i^T \Sigma_t u_i] = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i^T \Sigma_t u_i > 0 \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

dado que es el operador traza es conmutativo y la matriz  $\Sigma_t$  es positiva definida.

### B.4. Resultado 4

Para matrices cuadradas simétricas  $A$  y  $C$ , se cumple

$$Cov_t[Tr(Ad\Sigma_t), Tr(Cd\Sigma_t)] = 4Tr[A\Sigma_t C Q^T Q] \quad (\text{B.6})$$

Para derivar el resultado se debe considerar directamente el producto

$$\begin{aligned} &Cov_t[Tr(Ad\Sigma_t), Tr(Cd\Sigma_t)] \\ &= \mathbb{E}_t(Tr[A\Sigma_t^{1/2} dB_t Q + A Q^T dB_t^T \Sigma_t^{1/2}] Tr[C\Sigma_t^{1/2} dB_t Q + C Q^T dB_t^T \Sigma_t^{1/2}]) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

y aplicar repetidamente el hecho que

$$Tr[Q A \Sigma_t^{1/2} dB_t] = vec(\Sigma_t^{1/2} A Q^T)^T vec(dB_t) \quad (\text{B.8})$$

y notar que

$$vec(dB_t) vec(dB_t)^T = \mathbb{I}_{n^2} dt \quad (\text{B.9})$$

donde  $vec$  denota la operación de extraer los elementos de una matriz en un vector.

## ANEXO C. DERIVACION DE LOS PROCESOS DE LOS PRECIOS BAJO LA MEDIDA REAL

### C.1. El bono

Para una función  $\Phi(\Sigma, X_1, t)$  de clase  $C^2$  en las primeras dos variables y  $C^1$  en la tercera, se cumple por el lema de Itô que

$$\begin{aligned} d\Phi = & \left( \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \mathcal{L}_\Sigma\Phi - \kappa_1 X_1 \frac{\partial\Phi}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial X_1^2} \Sigma_{11} \right) dt + Tr[(\Sigma^{1/2} dB_t Q + Q^T dB_t^T \Sigma^{1/2}) \mathcal{D}\Phi] \\ & + \frac{\partial\Phi}{\partial X_1} (\sigma_{11} dW_1 + \sigma_{12} dW_2) \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Así, se obtiene que el *drift* asociado a su proceso viene dado por

$$\begin{aligned} \frac{1}{dt} \mathbb{E}_t^Q(dP) &= \frac{\partial P}{\partial t} + \mathcal{L}_\Sigma P - \kappa_1 X_1 \frac{\partial P}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial X_1^2} \Sigma_{11} \\ &= rP, \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

en virtud de la ecuación (3.8). Además, se verifica que  $\mathcal{D}P = -A(\tau)P$ , de manera que la parte de difusión del proceso de  $P_t$  viene dado por

$$dP_t - \mathbb{E}_t^Q(dP) = -Tr[(\Sigma^{1/2} dB_t Q + Q^T dB_t^T \Sigma^{1/2}) A(\tau)P] - a_1(\tau)P(\sigma_{11} dW_1 + \sigma_{12} dW_2). \quad (\text{C.3})$$

A partir de estos resultados, es posible deducir entonces el proceso del precio  $P$  del bono libre de riesgo bajo la medida real

$$\begin{aligned} dP &= rPdt - Tr[(\Sigma^{1/2} dB_t Q + Q^T dB_t^T \Sigma^{1/2}) A(\tau)P] - Pd(\tau)^T \Sigma^{1/2} dW_t \\ &= rPdt - Tr((\Sigma^{1/2} (d\tilde{B}_t + \Sigma^{1/2} \Lambda Q^T dt) Q + Q^T (d\tilde{B}_t + \Sigma^{1/2} \Lambda Q^T dt)^T \Sigma^{1/2}) A(\tau)P) \\ &\quad - Pd(\tau)^T \Sigma^{1/2} (d\tilde{W}_t + \Sigma^{1/2} \Theta dt) \\ &= (rP - Tr[(\Sigma \Lambda Q^T Q + Q^T Q \Lambda \Sigma) A P] - Pd(\tau)^T \Sigma \Theta) dt \\ &\quad - Tr[(\Sigma^{1/2} d\tilde{B}_t Q + Q^T d\tilde{B}_t^T \Sigma^{1/2}) A(\tau)P] - Pd(\tau)^T \Sigma^{1/2} d\tilde{W}_t \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

donde  $d(\tau) = \begin{pmatrix} a_1(\tau) \\ 0 \end{pmatrix}$ .

## C.2. El swap

En base a una aplicación directa del lema de Itô a la fórmula de valorización dada por la ecuación (3.12), y utilizando la relación obtenida en (3.17) es posible deducir el proceso del precio del bono corporativo bajo la medida neutral al riesgo. En efecto, se verifica que

$$\begin{aligned}
dS &= \left( \frac{\partial S}{\partial t} - \kappa_1 X_1 \frac{\partial S}{\partial X_1} - \kappa_2 X_2 \frac{\partial S}{\partial X_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial X_1^2} \Sigma_{11} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial X_2^2} \Sigma_{22} + \frac{\partial S}{\partial X_1} \frac{\partial S}{\partial X_2} \Sigma_{12} + \mathcal{L}_\Sigma S \right) dt \\
&+ Tr[(\Sigma^{1/2} dB_t Q + Q^T dB_t^T \Sigma^{1/2}) \mathcal{D}S] + \frac{\partial S}{\partial X_1} (\sigma_{11} dW_1 + \sigma_{12} dW_2) \\
&+ \frac{\partial S}{\partial X_2} (\sigma_{12} dW_1 + \sigma_{22} dW_2) \\
&= (r_t + \lambda_t) S dt - Tr[(\Sigma^{1/2} dB_t Q + Q^T dB_t^T \Sigma^{1/2}) B(\tau) S] - b_1(\tau) S (\sigma_{11} dW_1 + \sigma_{12} dW_2) \\
&- b_2(\tau) S (\sigma_{12} dW_1 + \sigma_{22} dW_2)
\end{aligned} \tag{C.5}$$

De esta manera, el proceso del activo S bajo la medida neutral al riesgo viene dada por

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{S} &= (r_t + \lambda_t) dt - Tr[(\Sigma^{1/2} dB_t Q + Q^T dB_t^T \Sigma^{1/2}) B(\tau)] - b_1(\tau) (\sigma_{11} dW_1 + \sigma_{12} dW_2) \\
&- b_2(\tau) (\sigma_{12} dW_1 + \sigma_{22} dW_2) \\
&= (r_t + \lambda_t) dt - Tr[(\Sigma^{1/2} dB_t Q + Q^T dB_t^T \Sigma^{1/2}) B(\tau)] - b_1(\tau) u_1^T \Sigma^{1/2} dW_t \\
&- b_2(\tau) u_2^T \Sigma^{1/2} dW_t
\end{aligned} \tag{C.6}$$

donde  $u_1$  y  $u_2$  son los vectores de la base canónica de  $\mathbb{R}^2$ .

Finalmente, de manera análoga al precio del bono del tesoro se deriva entonces su proceso bajo la medida real, el cual viene dado por

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{S} &= (r_t + \lambda_t) dt - Tr[(\Sigma^{1/2} (d\tilde{B}_t + \Sigma^{1/2} \Lambda Q^T dt) Q + Q^T (d\tilde{B}_t + \Sigma^{1/2} \Lambda Q^T dt)^T \Sigma^{1/2}) B(\tau)] \\
&- b_1(\tau) u_1^T \Sigma^{1/2} (d\tilde{W}_t + \Sigma^{1/2} \Theta dt) - b_2(\tau) u_2^T \Sigma^{1/2} (d\tilde{W}_t + \Sigma^{1/2} \Theta dt) \\
&= (r_t + \lambda_t + Tr[\Sigma \Lambda Q^T Q + Q^T Q \Lambda^T \Sigma] - b_1(\tau) u_1^T \Sigma \Theta - b_2(\tau) u_2^T \Sigma \Theta) dt \\
&- Tr[(\Sigma^{1/2} d\tilde{B}_t Q + Q^T d\tilde{B}_t \Sigma^{1/2}) B(\tau)] - b_1(\tau) u_1^T \Sigma^{1/2} d\tilde{W}_t - b_2(\tau) u_2^T \Sigma^{1/2} d\tilde{W}_t
\end{aligned} \tag{C.7}$$

## ANEXO D. EL BONO CORPORATIVO

Por simplicidad, para presentar resultados que demuestren que las mismas propiedades que se obtienen para los bonos del tesoro pueden extenderse de manera análoga a los bonos corporativos, se analizó el *yield*  $y_t^{\tau}$  de un bono corporativo cero-cupón. Este tipo de bono no es tan común, pero es útil para mostrar las propiedades que pueden deducirse en marco del proceso de Wishart. En efecto, el *yield*  $y_t^{\tau}$  satisface

$$e^{-y_t^{\tau}\tau} = S(t, T) \quad (D.1)$$

Utilizando entonces la expresión obtenida en (3.12) se obtiene

$$y_t^{\tau} = -\frac{1}{\tau}(b_0(t, T) - b_1(\tau)X_1 - b_2(\tau)X_2 - Tr[B(\tau)\Sigma_t]) \quad (D.2)$$

Parece razonable pedir que la matriz  $B$  sea, además de simétrica, positiva definida para asegurar la positividad del *yield*, aunque quizás no sea una condición necesaria. Además, una propiedad importante del modelo propuesto es que la covarianza instantánea en los cambios de los *yields* para madureces fijas pero distintas  $\tau_1$  y  $\tau_2$  es variante en el tiempo de manera estocástica. En efecto, a partir de (D.2) y el resultado del anexo (B.6) se deduce que esta covarianza viene dada por

$$\begin{aligned} \frac{1}{dt}Cov_t[dy_t^{\tau_1}, dy_t^{\tau_2}] &= \frac{1}{\tau_1\tau_2}(4Tr[B(\tau_1)\Sigma_t B(\tau_2)Q^T Q] + b(\tau_1)^T \Sigma_t b(\tau_2)) \\ &= \frac{1}{\tau_1\tau_2}(4Tr[B(\tau_1)\Sigma_t B(\tau_2)Q^T Q] + Tr[L(\tau_1, \tau_2)\Sigma_t]) \\ &= \frac{1}{\tau_1\tau_2}Tr[(4B(\tau_2)Q^T Q B(\tau_1) + L(\tau_1, \tau_2))\Sigma_t] \end{aligned} \quad (D.3)$$

$$\text{donde } b(\tau) = \begin{pmatrix} b_1(\tau) \\ b_2(\tau) \end{pmatrix} \text{ y } L(\tau_1, \tau_2) = \begin{pmatrix} b_1(\tau_1)b_1(\tau_2) & \frac{b_1(\tau_1)b_2(\tau_2)+b_2(\tau_1)b_1(\tau_2)}{2} \\ \frac{b_1(\tau_1)b_2(\tau_2)+b_2(\tau_1)b_1(\tau_2)}{2} & b_2(\tau_1)b_2(\tau_2) \end{pmatrix}$$

De esta manera, si se cumple que la matriz  $B(\tau_2)Q^T Q B(\tau_1) + L(\tau_1, \tau_2)$  es indefinida (i.e. no es ni positiva ni negativa definida) entonces el primer término del lado derecho de la ecuación de arriba puede variar de signo. Esta propiedad puede observarse a partir del resultado B.5.