



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

UN MODELO GENERAL DE INTERFERENCIA INTERPORTADORA EN OFDM

MARTÍN ANDRÉS GARCÍA PALOMER

Tesis presentada a la Dirección de Investigación y Postgrado
como parte de los requisitos para optar al grado de
Magister en Ciencias de la Ingeniería

Profesor Supervisor:
CHRISTIAN OBERLI

Santiago de Chile, Mayo 2008

© MMVII, MARTÍN ANDRÉS GARCÍA PALOMER



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

UN MODELO GENERAL DE INTERFERENCIA INTERPORTADORA EN OFDM

MARTÍN ANDRÉS GARCÍA PALOMER

Miembros del Comité:

CHRISTIAN OBERLI

VLADIMIR MARIANOV

MIGUEL RÍOS

LUCIANO AHUMADA

LUCIANO CHIANG

Tesis presentada a la Dirección de Investigación y Postgrado
como parte de los requisitos para optar al grado de
Magister en Ciencias de la Ingeniería

Santiago de Chile, Mayo 2008

© MMVII, MARTÍN ANDRÉS GARCÍA PALOMER

A mi familia

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer primero a mi profesor supervisor, Christian Oberli, ya que su orientación fue fundamental en el desarrollo de esta tesis. Gracias a su ayuda y paciencia para revisar cada detalle pude desarrollar una muy gratificante investigación, culminada en esta tesis y un artículo que esperamos publicar.

Me gustaría agradecer además al personal administrativo y docente del Departamento de Ingeniería Eléctrica. Todos ellos, de una forma u otra, hicieron de mis jornadas en el departamento un agradable trabajo. También debo agradecer a mis compañeros tesisistas Constanza Estela y Dan Landau, ya que sus consejos y comentarios sin duda enriquecieron este documento.

Finalmente, quiero agradecer muy especialmente a mi familia y a mi polola, Maria-josé. Gracias a su apoyo en todo este tiempo pude tener siempre las mejores fuerzas para desarrollar este trabajo.

INDICE GENERAL

AGRADECIMIENTOS	iv
INDICE DE FIGURAS	vii
INDICE DE TABLAS	ix
RESUMEN	x
ABSTRACT	xii
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Organización de la Tesis	2
2. CANALES VARIANTES EN EL TIEMPO: NOCIONES FUNDAMENTALES	3
2.1. Caracterización determinística de canales variantes en el tiempo	3
Ejemplo 1: Canal con desvanecimiento plano en frecuencia que varía en el tiempo	7
Ejemplo 2: Canal variante en el tiempo con múltiples trayectorias	8
Ejemplo 3: Transmisión de un tono de duración finita por un canal variante en el tiempo con múltiples trayectorias	9
2.2. Caracterización estadística de canales variantes en el tiempo	10
Ejemplo 4: Densidad espectral de potencia de la señal recibida en el Ejemplo 2	11
3. MODELO DE TRANSMISIÓN	14
3.1. Modelo determinístico	14
3.2. Análisis estadístico de la ICI	26
3.3. Simulaciones	34
4. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO	42
4.1. Revisión de los Resultados y Comentarios Generales	42
4.2. Comparación de la Soluciones	43
4.3. Temas de Investigación Futura	43

BIBLIOGRAFIA 45

ANEXO A. Derivación de la densidad espectral de potencia de Jakes 48

ANEXO B. Modelo de simulación de canales WSSUS con densidad Doppler de
Jakes 51

ANEXO C. Extensión a Network MIMO 56

C.1. Extensión del modelo 57

INDICE DE FIGURAS

2.1 Respuesta al impulso tiempo-variante de un sistema discreto a un impulso en $n = 5$ (gráfico superior: entrada, gráfico inferior: respuesta).	5
2.2 Respuesta al impulso tiempo-variante de un sistema discreto. En rojo se indica la respuesta del canal a un impulso en $n = 3$	6
2.3 Ejemplos de respuestas al impulso tiempo y Doppler-variante de un canal móvil. En la izquierda, se indica en rojo como varía el canal en $\tau = 2$ y en la derecha su respectiva respuesta Doppler-variante.	7
2.4 Densidad Doppler de Jakes.	13
2.5 Densidades Doppler de los modelos Gaussianos.	13
3.1 Rendimiento teórico de un sistema OFDM bajo canales móviles a diferentes velocidades. Se consideran parámetros de un sistema WiMAX.	32
3.2 Rendimiento teórico de un sistema OFDM bajo diferentes CFO. Se consideran parámetros de un sistema WiMAX.	33
3.3 Diagrama de bloques del simulador OFDM utilizado	34
3.4 Contribución individual de movilidad (curva A), CFO (curvas B1 y B2) y SFO (curvas C1 y C2) a la SIR. Las curvas continuas son la evaluación de (3.44) y los marcadores representan los resultados de la simulación. Los parámetros de sistema son de WiMAX (512 subportadoras en 5 MHz con una portadora central de 3.5 GHz).	36
3.5 SINR para diferentes CFO en función del tiempo de coherencia del canal. Las curvas continuas representan la evaluación de (3.44) y los marcadores los resultados de la simulación. Los parámetros del sistema son como en la Figura 3.4 con $\Gamma = 7$ dB.	37
3.6 SINR como en la Figura 3.5 para $\Gamma = 12$ dB.	38

3.7 SINR en función del CFO para niveles de SNR $\Gamma = \{7, 12, 18\}$ dB. El tiempo de coherencia del canal es de 5 símbolos OFDM. Las curvas continuas representan la evaluación de (3.44) y los marcadores los resultados de la simulación. Los parámetros del sistema son como en la Figura 3.4.	39
3.8 SIR en función del CFO. Obtenidos según (3.44) con un canal estático, SNR $\Gamma = \infty$ y parámetros de sistema como en la Figura 3.4.	40
3.9 SIR en función de la movilidad. Obtenidos según (3.44) sin CFO, SNR $\Gamma = \infty$ y parámetros de sistema como en la Figura 3.4. Valores seleccionados de CFO son dados para comparar (marcadores $\times$, importados desde la Figura 3.8).	41
B.1 Comparación de densidad de potencia Doppler teórica con la obtenida en la simulación en 50 iteraciones.	53
B.2 Simulación de la respuesta al impulso tiempo-variante para $\tau = 1$ y $T_c = 0.5 T_s$ durante 5 símbolos OFDM.	55
C.1 Ejemplo de sistema Network MIMO	57

INDICE DE TABLAS

2.1 Densidades Doppler espectrales de potencia.	12
B.1 Valores de ϵ sugeridos en el modelo de simulación.	53

RESUMEN

OFDM es una técnica efectiva para la transmisión inalámbrica de datos a altas tasas siempre que se mantenga la ortogonalidad entre las subportadoras. Esta ortogonalidad se puede perder por varios factores, entre los que se cuentan: desplazamiento de frecuencia de muestreo (en inglés *sampling frequency offset*, SFO), desplazamiento de frecuencia portadora (*carrier frequency offset*, CFO) y la variación temporal del canal (debido a la movilidad). La pérdida de ortogonalidad se manifiesta como interferencia inter-portadora (*inter-carrier interference*, ICI) la que puede degradar significativamente al sistema. Esta tesis presenta un nuevo modelo, más general que los reportados en la literatura, para el efecto conjunto de los tres factores mencionados en un sistema OFDM.

El modelo encontrado indica que la ICI puede ser representada como la suma de tres términos estadísticamente independientes: uno que representa el efecto de la sincronización imperfecta (CFO y SFO), otro representando el efecto de la movilidad del canal y un tercer término que modela el efecto conjunto de los tres fenómenos. Se presenta una expresión de covarianza que permite también generar ICI en simulaciones en forma directa como ruido Gaussiano correlacionado en frecuencia. Además, se encontraron expresiones exactas para cuantificar el desempeño de cualquier sistema OFDM bajo movilidad o sincronización imperfecta.

Las expresiones del modelo fueron verificadas mediante la simulación computacional de transmisiones en un sistema de parámetros WiMAX. Estos resultados entregan los rangos de operación en que predominan los diferentes factores en la degradación de la transmisión. Se comprobó que en la mayoría de los casos de interés el SFO es despreciable y que en etapas de adquisición se impone el efecto del CFO por sobre la movilidad.

Palabras Claves: OFDM, movilidad, efecto Doppler, desplazamiento de frecuencia portadora, desplazamiento de frecuencia de muestreo, interferencia inter-portadora.

ABSTRACT

OFDM is an effective technique for high-speed data transmission over wireless channels as long as orthogonality between subcarriers is maintained. Loss of orthogonality produces intercarrier interference (ICI) that can lead to significant channel degradation, and may be caused by three factors: sampling frequency offset (SFO), carrier frequency offset (CFO) and channel time variation. This paper models the joint effect of these factors in an OFDM system.

The model shows that ICI may be represented as the sum of the effects of three statistically independent terms: imperfect synchronization, channel mobility and joint effects. A covariance expression is derived that allows ICI to be generated directly in a simulation as frequency-correlated Gaussian noise. Also, an exact expression was found for measuring the performance of any OFDM system under mobility or synchronization offsets.

The results of the model were verified computationally via simulations of a WiMAX-type environment. The simulations also indicated the operating ranges over which the different interference factors were dominant in impacting system degradation. It was proven that in practical scenarios the main degradation is due to CFO.

Keywords: OFDM, mobility, Doppler spread, carrier frequency offset, sampling frequency offset, inter-carrier interference.

1. INTRODUCCIÓN

OFDM se ha establecido como la técnica preferida para la transmisión inalámbrica de datos en canales de banda ancha. Entre las aplicaciones comerciales de OFDM se destacan la transmisión de datos en redes de área local (IEEE802.11a, 1999), su aplicación en televisión digital terrestre (ETSI-DVB, 2004) y la alternativa de combinar OFDM con MIMO para sistemas celulares de próxima generación (Foschini, Karakayali, & Valenzuela, 2006). Esto es así ya que mediante el uso de varias subportadoras ortogonales en un símbolo de larga duración y con un prefijo cíclico de tamaño adecuado es posible eliminar completamente la interferencia inter-símbolo (en inglés inter-symbolic interference, ISI) producida por la dispersión temporal del canal.

Entre las desventajas de OFDM destaca su sensibilidad a factores que producen la pérdida de ortogonalidad entre las subportadoras. Estos factores son principalmente: la falta de sincronización entre frecuencia de muestreo (sampling frequency offset, SFO en inglés) y frecuencia portadora (carrier frequency offset, CFO) entre el transmisor y receptor y la variación temporal del canal. Como consecuencia de la pérdida de ortogonalidad, el receptor percibe una interferencia entre las subportadoras (inter-carrier interference, ICI) que puede degradar considerablemente el desempeño del sistema.

En la literatura, varios autores han enfrentado el problema de modelar y mitigar la ICI en OFDM. En (Oberli, 2007) se propone un algoritmo de trackeo que mitiga la distorsión conjunta del SFO y CFO usando un modelo de señal similar al presentado aquí. Para modelar la ICI producida por la movilidad en OFDM, el enfoque preferido por múltiples autores, como en (Mostofi & Cox, 2005), (Hou & Chen, 2005), (Jeon, Chang, & Cho, 1999) y sus referencias, consiste en un modelo de señal discreto para expresar analíticamente el término de ICI. Sin embargo, la omisión del efecto de la duración finita del símbolo OFDM en este tipo de modelos hace que se entreguen expresiones simplificadas y por ende, aproximadas.

Asimismo, aparte de las simplificaciones mencionadas, aún no existe en la literatura un modelo generalizado que incluya todos los factores que hacen perder la ortogonalidad al

sistema (CFO, SFO y movilidad). Hay múltiples propuestas para enfrentar individualmente la ICI producida por los diferentes factores (Oberli, 2007) (Stamoulis, Diggavi, & Al-Dhahir, 2002), pero no existe un modelo general que indique las condiciones exactas en que la sincronización imperfecta y la movilidad inciden en forma conjunta sobre la ICI. Este trabajo entrega las herramientas para modelar la ICI bajo cualquier circunstancia de CFO, SFO y movilidad y determina la degradación producida en el sistema producto de la ICI debido a los diferentes factores.

1.1. Organización de la Tesis

El resto de este documento se organiza de la siguiente manera. Primero, el capítulo 2 resume los conceptos más relevantes sobre canales variantes en el tiempo. Estos conceptos se utilizarán en el resto de la tesis. Luego, el capítulo 3 detalla el desarrollo del modelo de señal generalizado bajo condiciones de SFO, CFO y movilidad. En este capítulo se encuentran los aportes más relevantes del documento y su contenido ha resultado en un artículo enviado a IEEE Transactions on Wireless Communications (García & Oberli, 2008). Los principales resultados incluyen un análisis estadístico y simulaciones computacionales para verificar las expresiones teóricas del modelo. Finalmente, el capítulo 4 resume las conclusiones más relevantes de este trabajo. Entre los Anexos, se destaca el C, en que se presenta la extensión de modelo a Network MIMO.

2. CANALES VARIANTES EN EL TIEMPO: NOCIONES FUNDAMENTALES

Los canales variantes en el tiempo o “móviles” pueden ser representados como sistemas lineales que varían en el tiempo (en inglés, linear time variant, LTV). La variación temporal hace que no se pueda representar al sistema mediante una respuesta al impulso o una respuesta de frecuencia determinada, como sucede en los sistemas lineales invariantes en el tiempo (linear time invariant, LTI). En los sistemas LTV es necesario un tratamiento matemático especial para modelarlos correctamente.

2.1. Caracterización determinística de canales variantes en el tiempo

Para caracterizar los sistemas variantes en el tiempo (Bello, 1963) propone una serie de funciones que permiten representar el comportamiento de estos sistemas tanto en el dominio de la frecuencia como en el del tiempo.

Bello argumenta que cualquier dispositivo de una entrada y una salida puede ser representado mediante operadores que relacionan la entrada y la salida en los dominios de interés. Si $x(t)$ y $X(f)$ representan la entrada del sistema en el tiempo y en la frecuencia, respectivamente, e $y(t)$ e $Y(f)$ representan la salida en los mismos dominios, entonces se puede escribir

$$\begin{aligned} y(t) &= O_{tt}[x(t)] & Y(f) &= O_{ff}[X(f)] \\ y(t) &= O_{tf}[X(f)] & Y(f) &= O_{ft}[x(t)]. \end{aligned} \quad (2.1)$$

En el caso de dispositivos lineales, tales como canales inalámbricos variantes en el tiempo, Bello recuerda que las 4 ecuaciones de (2.1) pueden ser expresadas formalmente como operadores integrales con kernels K asociados. Es decir,

$$y(t) = \int x(s)K_1(t, s)ds \quad Y(f) = \int X(l)K_2(f, l)dl \quad (2.2)$$

$$y(t) = \int X(f)K_3(t, f)df \quad Y(f) = \int x(t)K_4(f, t)dt. \quad (2.3)$$

La interpretación física de las funciones de kernel en (2.2) y (2.3) se puede ver al entregar un impulso al sistema, tanto en el dominio del tiempo como en frecuencia. Se puede ver que si se excita el sistema con un impulso $x(t) = \delta(t - \xi)$ su respuesta es $K_1(t, \xi)$ en el dominio del tiempo y $K_4(f, \xi)$ en frecuencia. Es decir, $K_1(t, s)$ y $K_4(f, s)$ representan la respuesta en los dominios del tiempo y frecuencia, respectivamente, a un impulso ocurrido en el instante $t = s$. Las funciones K_2 y K_3 tienen una interpretación similar, pero no son relevantes en este trabajo.

Si se considera la primera ecuación de (2.2) con $s = t - \tau$ como variable de integración, se obtiene

$$\begin{aligned} y(t) &= \int x(t - \tau) K_1(t, t - \tau) d\tau \\ y(t) &= \int x(t - \tau) h(t, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde $h(t, \tau) = K_1(t, t - \tau)$ es la respuesta al impulso del sistema observada en el instante t debido a un impulso ocurrido en $t - \tau$, es decir, τ segundos antes de la observación. Bello llama a esta función la *respuesta al impulso tiempo-variante*. Esta función permite representar completamente a un sistema LTV de la misma forma que un sistema LTI es representado por la respuesta al impulso convencional.

Debido a la causalidad, los límites de integración en (2.4) son en general de cero a infinito. Entonces si un sistema, ya sea continuo o discreto, es causal, es posible relacionar las entrada y salida en el dominio del tiempo como sigue:

$$y(t) = \int_0^\infty h(t, \tau) x(t - \tau) d\tau \quad (2.5)$$

$$y[n] = \sum_l h[n, l] x[n - l]. \quad (2.6)$$

Es importante entender el significado de la función $h(t, \tau)$ para distintos impulsos en distintos instantes de observación. Para esto, considere la Figura 2.1, donde se muestra la respuesta de un sistema discreto a un impulso ocurrido en $n = 5$. Note que esta respuesta se describe cambiando los índices n y l de la función $h[n, l]$ debido a que pese a que el instante

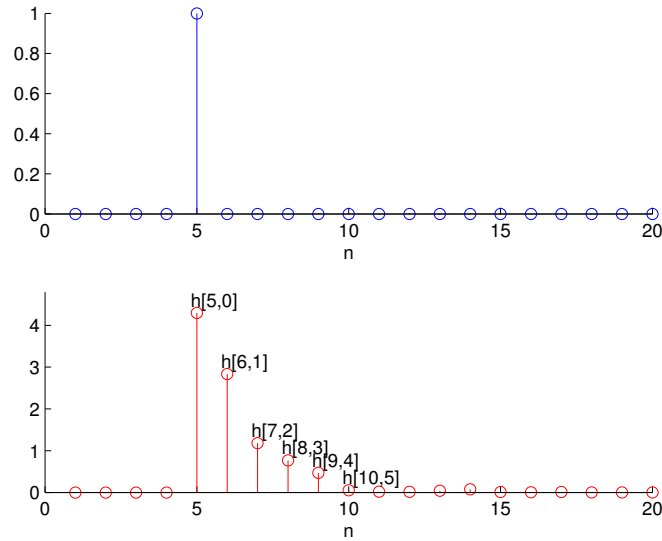


FIGURA 2.1. Respuesta al impulso tiempo-variante de un sistema discreto a un impulso en $n = 5$ (gráfico superior: entrada, gráfico inferior: respuesta).

en que ocurre el impulso es fijo, los instantes de observación (n) van cambiando, y por ende, el tiempo transcurrido desde el impulso (l) también. La Figura 2.2 ilustra la idea para el mismo ejemplo anterior. En rojo se indica la respuesta a un impulso ocurrido en $n = 3$, como la de la Figura 2.1. Observe que se obtienen diferentes respuestas dependiendo del instante en que se aplica el impulso.

En la literatura a menudo se representa el canal móvil como una sucesión de canales estáticos —con sus respectivas respuestas al impulso— que representan el canal que se “observa” en cada momento, intentando representar separadamente un canal para cada instante. Si bien esto puede tener sentido intuitivo, en realidad no es correcto, ya que al aplicar un impulso al sistema, la salida necesariamente debe ocupar también la evolución de canales posteriores al instante de aplicación del impulso, como se ve en la Figura 2.2. Por eso, hay que tener mucho cuidado con no confundir el dominio τ (o l en el caso discreto) con el tiempo cronológico usado en las respuestas al impulso convencionales.

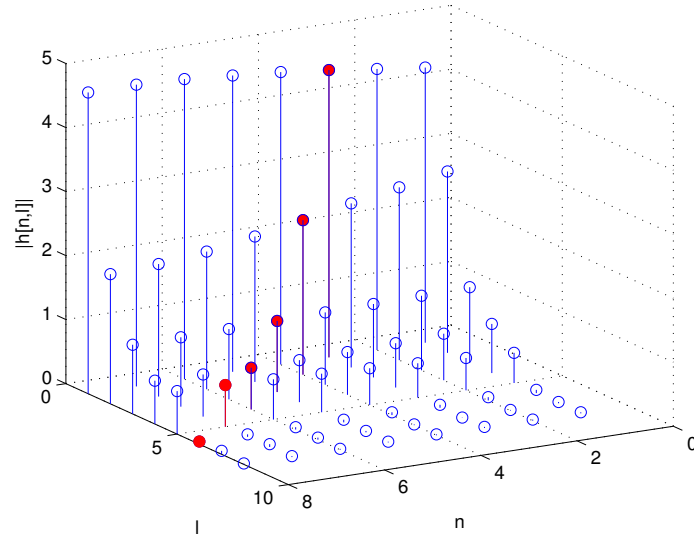


FIGURA 2.2. Respuesta al impulso tiempo-variante de un sistema discreto. En rojo se indica la respuesta del canal a un impulso en $n = 3$.

Otra forma interesante de describir el canal móvil se obtiene si se calcula la transformada de Fourier en t de la respuesta al impulso tiempo-variante,

$$s(f, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) e^{-j2\pi f t} dt \quad (2.7)$$

$$s[k, l] = \sum_n h[n, l] e^{\frac{-j2\pi k n}{N}}. \quad (2.8)$$

Bello denomina esta función la *respuesta al impulso Doppler-variante*. Esta respuesta representa el efecto de la variación temporal del canal en el dominio de la frecuencia. La Figura 2.3 muestra un ejemplo de variación del canal para un retardo $\tau = 2$ en un ambiente con movilidad y su correspondiente respuesta al impulso Doppler-variante. A medida que aumenta la velocidad del canal, $s(f, \tau)$ se vuelve más ancho en frecuencia. Si el canal es estático, para cada retardo τ se tiene un impulso en $f = 0$ y el conjunto de estos impulsos equivaldrían a la respuesta al impulso tradicional de los sistemas LTI.

Para modelar exactamente el efecto en frecuencia y el significado general de $s(f, \tau)$, consideremos los siguientes ejemplos.

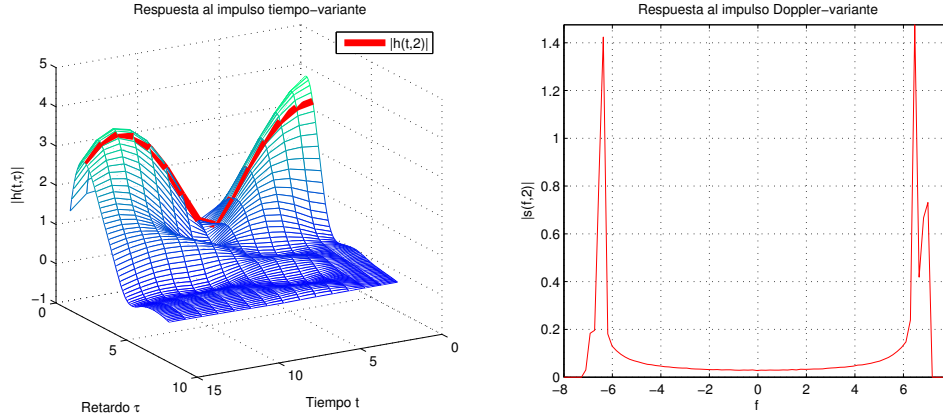


FIGURA 2.3. Ejemplos de respuestas al impulso tiempo y Doppler-variante de un canal móvil. En la izquierda, se indica en rojo como varía el canal en $\tau = 2$ y en la derecha su respectiva respuesta Doppler-variante.

Ejemplo 1: Canal con desvanecimiento plano en frecuencia que varía en el tiempo

La única trayectoria de este canal tiene un retardo $\tau = 0$, por lo que su respuesta al impulso tiempo-variante es

$$h(t, \tau) = h(t, 0)\delta(\tau). \quad (2.9)$$

Suponiendo ausencia de ruido térmico, se transmite una portadora pura compleja de frecuencia p Hertz y duración infinita. Es decir, se transmite una señal $x(t) = e^{j2\pi ft}$ de manera que

$$\begin{aligned} X(f) &= \mathcal{F}\{x(t)\} \\ &= \delta(f - p). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Entonces, usando (2.5), la salida del sistema es

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^\infty h(t, \tau)x(t - \tau)d\tau \\ &= \int_0^\infty h(t, 0)\delta(\tau)x(t - \tau)d\tau \\ &= h(t, 0)x(t). \end{aligned} \quad (2.11)$$

En el dominio de la frecuencia la señal recibida es igual a

$$\begin{aligned}
Y(f) &= \mathcal{F}\{y(t)\} \\
&= \mathcal{F}\{h(t, 0)x(t)\} \\
&= \mathcal{F}\{h(t, 0)\} *_f \mathcal{F}\{x(t)\} \\
&= s(f, 0) * \delta(f - p) \\
&= s(f - p, 0).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

De (2.12) se desprende que la señal recibida, vista en el dominio de la frecuencia, corresponde exactamente a la respuesta al impulso Doppler-variante centrada en la portadora p . Es por ello que la respuesta al impulso Doppler-variante $s(f, \tau)$ es comúnmente denominada simplemente “dispersión Doppler”. Si el canal es estático, $s(f - p, 0) = \delta(f - p)$ lo que indica que la salida del sistema corresponde al tono puro sin distorsiones. Se puede deducir entonces, que para canales variantes en el tiempo $s(f, \tau)$ representa la dispersión en frecuencia producida por la variación temporal de la respuesta al impulso tiempo variante $h(t, \tau)$ en un retardo τ .

Ejemplo 2: Canal variante en el tiempo con múltiples trayectorias

Se puede mostrar fácilmente que si se transmite la misma portadora compleja pura de frecuencia p que en el Ejemplo 1 a través de un canal de multi-trayectorias se recibe

$$\begin{aligned}
Y(f) &= \int_0^\infty \mathcal{F}\{h(t, \tau)x(t - \tau)\} d\tau \\
&= \int_0^\infty s(f, \tau) *_f [\delta(f - p)e^{-j2\pi\tau f}] d\tau \\
&= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty s(f - \xi, \tau)\delta(\xi - p)e^{-j2\pi\tau\xi} d\xi d\tau \\
&= \int_0^\infty s(f - p, \tau)e^{-j2\pi\tau p} d\tau.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

El resultado muestra que la dispersión Doppler total de la señal recibida está dada por la integral de las dispersiones Doppler de cada trayectoria, multiplicadas por los fasores correspondientes a sus respectivos retardos τ .

Es interesante notar la dualidad entre la variabilidad temporal de un canal y el desvanecimiento selectivo en frecuencia. Si un canal es estático (en el tiempo) pero selectivo en frecuencia, se produce dispersión de trayectorias en el tiempo que puede generar interferencia inter-simbólica (ISI). En cambio, un canal con desvanecimiento plano en frecuencia pero variante en el tiempo, sufre de dispersión en el dominio de la frecuencia (dispersión Doppler) que puede producir interferencia entre portadoras (ICI) en una transmisión de multiportadoras.

Ejemplo 3: Transmisión de un tono de duración finita por un canal variante en el tiempo con múltiples trayectorias

En la práctica, las transmisiones reales siempre están limitadas en el tiempo (al contrario de los ejemplos anteriores, en que se asumieron transmisiones de portadoras puras de duración infinita), lo que afecta su comportamiento en el dominio de la frecuencia. Esto hace necesario extender el Ejemplo 2 para el caso de una portadora de duración finita. Considere que se transmite la misma señal limitada en el tiempo al lapso entre t_0 y $t_0 + T$. Entonces, la respuesta en frecuencia de la señal recibida es

$$\begin{aligned}
 Y(f) &= \int_0^\infty \mathcal{F} \left\{ h(t, \tau) x(t - \tau) \Pi \left(\frac{t - (t_0 + \frac{T}{2})}{T} \right) \right\} d\tau \\
 &= \int_0^\infty \underbrace{s(f, \tau) * [T \text{sinc}(fT) e^{-j2\pi f(t_0 + \frac{T}{2})}]}_{s^\square(f, \tau)} * [\delta(f - p) e^{-j2\pi \tau p}] d\tau \\
 &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty s^\square(f - \xi, \tau) \delta(\xi - p) e^{-j2\pi \tau \xi} d\xi d\tau \\
 &= \int_0^\infty s^\square(f - p, \tau) e^{-j2\pi \tau p} d\tau, \tag{2.14}
 \end{aligned}$$

donde se usa la notación $s^\square(f, \tau)$ para definir a la respuesta al impulso Doppler-variante limitada en el tiempo. Esta expresión es similar a $s(f, \tau)$ salvo que está convolucionada por

una función sinc $(\cdot)$ correspondiente a la respuesta de frecuencia de la función rectangular usada para limitar la duración de la portadora.

2.2. Caracterización estadística de canales variantes en el tiempo

Para caracterizar el desempeño esperado de un sistema de comunicaciones inalámbricas para una familia completa de canales que el sistema deberá enfrentar en la práctica, es necesario extender las nociones anteriores de $h(t, \tau)$ y $s(f, \tau)$ y plantear algunos supuestos que indiquen la forma en que distribuye la energía del canal en todos los dominios de interés.

Estos supuestos fueron presentados por Bello en su artículo (Bello, 1963). En él, el autor planteó que las señales asociadas a diferentes retardos τ no tienen ninguna correlación. Esto tiene sentido pues cada retardo está asociado a una trayectoria particular dada por la topografía del canal observada en ese instante. Además planteó que el canal se comporta en general como un proceso estocástico estacionario en el sentido amplio. Estos dos supuestos en conjunto hacen que el canal sea conocido como WSSUS (en inglés, wide sense stationary with uncorrelated scattering).

El modelo WSSUS es ampliamente usado como una aproximación simple pero correcta de los canales observados empíricamente (Cox, 1973), (Bug, Wengerter, Gaspard, & Jakoby, 2002), (Pätzold, 2002). Este modelo significa que la dispersión Doppler $s(f, \tau)$ se comporta como un proceso sin correlación tanto en el dominio de los retardos como en frecuencia, lo que matemáticamente se expresa como

$$E[s(f_1, \tau_1)s^*(f_2, \tau_2)] = \delta(f_2 - f_1)\delta(\tau_2 - \tau_1)S_{ss}(f_1, \tau_1), \quad (2.15)$$

donde $S_{ss}(f, \tau)$ es llamada la *función de scattering*. Ella representa el equivalente de banda-base de la densidad espectral de potencia de la dispersión Doppler producida por la variación en el tiempo de la trayectoria con un retardo τ .

Ejemplo 4: Densidad espectral de potencia de la señal recibida en el Ejemplo 2

Retomando la transmisión de una portadora pura del Ejemplo 2, interesa determinar la densidad espectral de potencia de la señal recibida. Ésta es conocida como la densidad espectral de potencia Doppler (a menudo llamada simplemente “densidad Doppler”) y representa la forma en que se distribuye en frecuencia la potencia de una portadora pura transmitida en un ambiente con movilidad. Volviendo a (2.13), se obtiene

$$\begin{aligned}
 S(f) &= \mathbb{E}[Y(f)Y^*(f)] \\
 &= \mathbb{E}\left[\int_0^\infty s(f-p, \tau_1)e^{-j2\pi\tau_1 p}d\tau_1 \int_0^\infty s^*(f-p, \tau_2)e^{j2\pi\tau_2 p}d\tau_2\right] \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{E}[s(f-p, \tau_1)s^*(f-p, \tau_2)]e^{j2\pi(\tau_2-\tau_1)p}d\tau_1 d\tau_2 . \quad (2.16)
 \end{aligned}$$

Si en (2.16) se asumen las propiedades WSSUS dadas por (2.15), se obtiene

$$\begin{aligned}
 S(f) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{E}[s(f-p, \tau_1)s^*(f-p, \tau_2)]e^{j2\pi(\tau_2-\tau_1)p}d\tau_1 d\tau_2 \\
 &= \int_0^\infty S_{ss}(f, \tau)d\tau . \quad (2.17)
 \end{aligned}$$

El resultado anterior indica que la densidad espectral de potencia Doppler corresponde a la suma infinitesimal de las dispersiones ocurridas en todos los retardos τ del canal.

Distintos modelos han sido propuestos para representar a $S(f)$. El más común es el llamado modelo de Jakes, que en realidad fue desarrollado analíticamente por Clarke (Clarke, 1968) y posteriormente perpetuado por Jakes en (Jakes, 1994). El desarrollo analítico que lleva a este modelo está detallado en el Anexo A. El supuesto principal en que se basa este modelo es que el ángulo de llegada de las ondas en el móvil distribuye uniforme en $[0, 2\pi]$. Este supuesto en general es válido sólo para canales con retardos pequeños (menores a $0.5 \mu s$) (Pätzold, 2002). Para canales con retardos mayores, habitualmente se hace el supuesto que los ángulos en que los rayos llegan al móvil distribuyen normal, lo que resulta en una densidad Doppler con la forma de la campana de Gauss (Cox, 1973).

La Tabla 2.1 (Pätzold, 2002) muestra las distintas densidades Doppler para cada caso. Los valores A_i en los modelos de Gauss se eligen tal que la energía total de la dispersión

TABLA 2.1. Densidades Doppler espectrales de potencia.

Tipo	Densidad espectral de potencia Doppler $S(kf_\delta)$	Retardo de propagación τ
Jakes	$\frac{1}{\pi f_m \sqrt{1-(f/f_m)^2}}$	$0 \leq \tau \leq 0.5 \mu s$
Gauss I	$G(A_1; -0.8f_m; 0.05f_m)$ $+G(A_1/10; 0.4f_m; 0.1f_m)$	$0.5 \leq \tau \leq 2 \mu s$
Gauss II	$G(A_2; 0.7f_m; 0.1f_m)$ $+G(A_2/10^{1.5}; -0.4f_m; 0.15f_m)$	$\tau \geq 2 \mu s$

La función de Gauss se define como:

$$G(A_i; f_i; s_i) = A_i \exp \left\{ -\frac{(f - f_i)^2}{2s_i^2} \right\}$$

Doppler sea igual a 1 ($\int S(f) = 1$). Note que en todos los modelos la dispersión Doppler se encuentra acotada entre $-f_m$ y f_m en que f_m es la dispersión Doppler máxima y corresponde a $\frac{v}{\lambda}$ donde v es la velocidad del móvil receptor y λ es la longitud de onda de la portadora. Las Figuras 2.4 y 2.5 ilustran las densidades Doppler de los modelos de Jakes y Gauss, respectivamente. La asimetría en el caso de las densidades Gaussianas se debe a que estos modelos consideran correlación entre las componentes reales e imaginarias del canal, lo que hace que tengan una función de autocorrelación compleja.

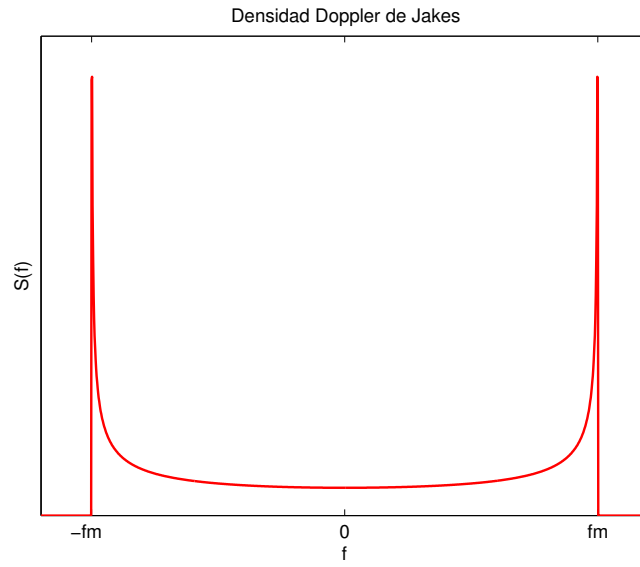


FIGURA 2.4. Densidad Doppler de Jakes.

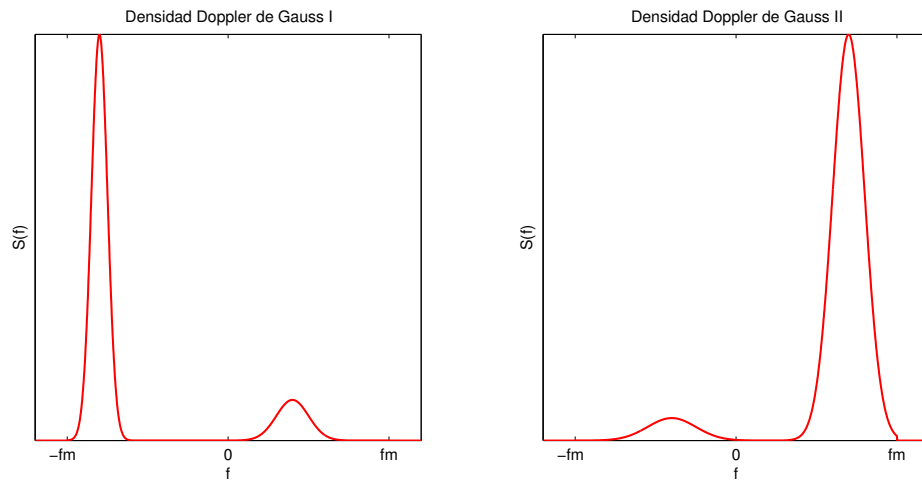


FIGURA 2.5. Densidades Doppler de los modelos Gaussianos.

3. MODELO DE TRANSMISIÓN

En este capítulo se desarrollará el modelo de sistema OFDM incluyendo los efectos de movilidad, CFO y SFO. Para esto, se seguirán pasos similares a (Oberli, 2007), pero ahora incluyendo el efecto de la variación temporal del canal utilizando las nociones introducidas en el capítulo 2. Posteriormente, se determinarán las propiedades estadísticas de los términos de ICI y se compararán estos resultados teóricos con los obtenidos mediante simulaciones de un sistema OFDM con movilidad y sincronización imperfecta.

3.1. Modelo determinístico

Primero modelamos la señal de tiempo continuo t del m -ésimo símbolo OFDM con prefijo cíclico usando notación compleja de banda base como sigue:

$$x_m(t) = \Pi\left(\frac{t - (m + \frac{1}{2})T_g + T_e}{T_g}\right) \cdot \sum_{\nu=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} X_m(\nu) e^{j2\pi\nu\delta_t(t-mT_g)}. \quad (3.1)$$

En (3.1) $X_m(\nu)$ representa la modulación en la subportadora ν de un total de N_s subportadoras. La separación entre subportadoras es $\delta_t = \frac{1}{N_s T}$ Hertz, donde T es el período de muestreo usado en el transmisor. El prefijo cíclico tiene N_e muestras y su duración es $T_e = N_e T$ segundos. De esta manera, el símbolo OFDM completo tiene $N_g = N_e + N_s$ muestras y una duración de $T_g = N_g T$ segundos. El símbolo j representa a la unidad imaginaria $\sqrt{-1}$. Finalmente, la función $\Pi(x)$ representa la función rectangular de valor unitario para x entre $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ y cero fuera de ese rango.

Por otra parte, la relación entrada-salida de un sistema lineal variante en el tiempo se describe como en (2.5)

$$y(t) = \int_0^\infty h(t, \tau) x(t - \tau) d\tau, \quad (3.2)$$

donde $x(t)$ y $y(t)$ corresponden a las señales de entrada y salida en el dominio del tiempo, respectivamente. La función $h(t, \tau)$ es la respuesta al impulso tiempo-variante del canal y representa la respuesta observada en el instante t debido a un impulso ocurrido en $t - \tau$.

Al reemplazar (3.1) en (3.2) e introduciendo un CFO de Δf Hertz, se obtiene que la señal recibida es modulada por un fasor $e^{j2\pi\Delta f t}$ de la siguiente manera:

$$y_m(t) = e^{j2\pi\Delta f t} \cdot \int_0^\infty \Pi\left(\frac{t - \tau - (m + \frac{1}{2})T_g + T_e}{T_g}\right) \cdot \sum_{\nu=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} X_m(\nu) e^{j2\pi\nu\delta_t(t-\tau-mT_g)} h(t, \tau) d\tau + n(t). \quad (3.3)$$

A continuación se muestrea la señal recibida (3.3) con una tasa de muestreo desplazada con un SFO de ΔT segundos con respecto a la tasa utilizada en el transmisor. Esto es, el muestreo se realiza en los instantes $p(T + \Delta T)$ donde T es el periodo de muestreo del transmisor. Y si se asume que previamente a la operación de muestreo se ha realizado un filtrado adecuado a la señal tal que el término de ruido $n(t)$ esté limitado en la banda de interés, se puede decir que los instantes de muestreo para el m -ésimo símbolo OFDM son $t = p(T + \Delta T) + mN_g(T + \Delta T)$, con $p = 0, \dots, N_s - 1$. Entonces, la operación de muestreo implícitamente retira el prefijo cíclico y extrae el símbolo OFDM en la ventana “correcta”, salvo un desfase acumulado debido a ΔT . La función de muestreo $\sqcup(\cdot)$ que representa esta operación es

$$\sqcup\left(\frac{t}{T + \Delta T}\right) = (T + \Delta T) \Pi\left(\frac{t - (\frac{1}{2}N_s + mN_g)(T + \Delta T)}{N_s(T + \Delta T)}\right) \cdot \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(t - p(T + \Delta T) - mN_g(T + \Delta T)), \quad (3.4)$$

donde $\delta(\cdot)$ es la función de muestreo o delta de Dirac. En (3.4), el factor de escalamiento $T + \Delta T$ asegura conservación de energía en el proceso de muestreo. Entonces, aplicando

(3.4) a (3.3) se obtiene

$$\begin{aligned}
y_m(t) &= (T + \Delta T) \sqcap \left(\frac{t - (\frac{1}{2}N_s + mN_g)(T + \Delta T)}{N_s(T + \Delta T)} \right) \\
&\cdot \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(t - p(T + \Delta T) - mN_g(T + \Delta T)) \\
&\cdot \left\{ e^{j2\pi\Delta ft} \cdot \int_0^{\infty} \sqcap \left(\frac{t - \tau - (m + \frac{1}{2})T_b + T_e}{T_b} \right) \right. \\
&\cdot \sum_{\nu=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} X_m(\nu) e^{j2\pi\nu\delta_t(t-\tau-mT_b)} h(t, \tau) d\tau + n(t) \left. \right\} \\
&= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(t - p(T + \Delta T) - mN_g(T + \Delta T)) \\
&\cdot (T + \Delta T) \sum_{\nu=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} X_m(\nu) e^{j2\pi\Delta ft} \\
&\cdot \underbrace{\sqcap \left(\frac{t - (\frac{1}{2}N_s + mN_g)(T + \Delta T)}{N_s(T + \Delta T)} \right)}_{\sqcap(\clubsuit)} \\
&\cdot \int_0^{\infty} \underbrace{\sqcap \left(\frac{t - \tau - (m + \frac{1}{2})T_g + T_e}{T_g} \right)}_{\sqcap(\spadesuit)} h(t, \tau) \\
&\cdot e^{j2\pi\nu\delta_t(t-\tau-mT_g)} d\tau + \sqcup \left(\frac{t}{T + \Delta T} \right) \cdot n(t), \tag{3.5}
\end{aligned}$$

donde $mN_g(T + \Delta T) \leq t \leq (mN_g + N_s - 1)(T + \Delta T)$. Si la duración del prefijo cíclico es suficientemente grande de manera que $h(t, \tau) \equiv 0$ para todo $\tau > T_e$ en todo instante t , entonces un análisis cuidadoso de (3.5) muestra que la presencia de $\sqcap(\clubsuit)$ permite la eliminación de $\sqcap(\spadesuit)$. Esto ocurre así debido a la condición de T_e y a la posición de las funciones $\sqcap(\cdot)$ con m y ΔT en el rango de interés. Si se junta $\sqcap(\clubsuit)$ con la serie en p , es

posible llegar a una simplificación mayor,

$$\begin{aligned}
y_m(t) = & (T + \Delta T) \sum_{p=0}^{N_s-1} \sum_{\nu=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} X_m(\nu) e^{j2\pi\Delta f t} e^{-j2\pi\nu\delta_t m T_g} \\
& \cdot \delta(t - p(T + \Delta T) - mN_g(T + \Delta T)) \\
& \cdot \int_0^\infty h(t, \tau) e^{j2\pi\nu\delta_t(t-\tau)} \\
& \cdot \Pi\left(\frac{t - (\frac{1}{2}N_s + mN_g)(T + \Delta T)}{N_s(T + \Delta T)}\right) d\tau \\
& + \sqcup\left(\frac{t}{T + \Delta T}\right) \cdot n(t).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

La expresión (3.6) es una señal continua en el dominio del tiempo. Es continua debido a que la función $\sqcup(\cdot)$ lo es, pero tiene valor igual a cero en todos los instantes excepto en $t = p(T + \Delta T) + mN_g(T + \Delta T)$, con $p = 0, \dots, N_s - 1$.

Para recuperar los símbolos en una implementación real de un sistema OFDM, se haría necesario calcular la FFT (Fast Fourier Transform) de estas N_s muestras. Este procedimiento es equivalente a calcular la transformada de Fourier continua respecto a t con el origen fijado en la primera muestra. Es decir, la transformada de $y_m(t + mN_g(T + \Delta T))$,

$$\begin{aligned}
Y_m(f) = & \mathcal{F}\{y_m(t + mN_g(T + \Delta T))\} \\
= & \mathcal{F}\{y_m(t)\} e^{j2\pi f m N_g(T + \Delta T)} \\
= & (T + \Delta T) \int_{-\infty}^\infty \left(\sum_{p=0}^{N_s-1} \sum_{\nu=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} X_m(\nu) \right. \\
& \cdot \delta(t - p(T + \Delta T) - mN_g(T + \Delta T)) e^{j2\pi\Delta f t} e^{-j2\pi\nu\delta_t m T_b} \\
& \left. \int_0^\infty h(t, \tau) \Pi(\clubsuit) e^{j2\pi\nu\delta_t(t-\tau)} d\tau \right) e^{-j2\pi f t} dt \cdot e^{j2\pi f m N_g(T + \Delta T)} \\
& + N(f).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Si se define la función $\psi(t, \tau)$

$$\begin{aligned} \psi(t, \tau) = & (T + \Delta T) \sum_{p=0}^{N_s-1} \sum_{\nu=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} X_m(\nu) \delta(t - p(T + \Delta T) - mN_g(T + \Delta T)) \\ & \cdot e^{j2\pi\Delta f t} e^{-j2\pi\nu\delta_t m T_b} e^{j2\pi\nu\delta_t(t-\tau)}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

se puede reescribir (3.7),

$$\begin{aligned} Y_m(f) = & \int_0^\infty \underbrace{\int_{-\infty}^\infty \square(\clubsuit) h(t, \tau) \psi(t, \tau) e^{-j2\pi f t} dt d\tau}_{\mathcal{F}_t\{\square(\clubsuit) h(t, \tau) \psi(t, \tau)\}} e^{j2\pi f m N_g(T + \Delta T)} \\ & + N(f). \end{aligned} \quad (3.9)$$

En (3.9), $\mathcal{F}_t\{\cdot\}$ representa la transformada en t del producto $\square(\clubsuit) h(t, \tau) \psi(t, \tau)$ para un retardo τ de la respuesta al impulso tiempo-variante. Esta transformada es igual a

$$\mathcal{F}_t\{\square(\clubsuit) h(t, \tau) \psi(t, \tau)\} = s^\square(f, \tau) *_f \Psi(f, \tau),$$

donde $*_f$ denota convolución continua en el dominio de la frecuencia, $s^\square(f, \tau)$ es la respuesta al impulso Doppler-variante del canal para el retardo τ durante la duración del símbolo dada por $\square(\clubsuit)$ y $\Psi(f, \tau)$ es la transformada de Fourier en t de $\psi(t, \tau)$ definido en

(3.8). Es decir,

$$\begin{aligned}
s^\square(f, \tau) &= \mathcal{F} \{ \square(\clubsuit) h(t, \tau) \} \\
&= \mathcal{F} \left\{ \square \left(\frac{t - (\frac{1}{2}N_s + mN_g)(T + \Delta T)}{N_s(T + \Delta T)} \right) \right\} *_f \mathcal{F} \{ h(t, \tau) \} \\
&= N_s(T + \Delta T) \text{sinc} (f N_s(T + \Delta T)) e^{-j2\pi f (\frac{1}{2}N_s + mN_g)(T + \Delta T)} *_f s(f, \tau) \\
&= \int_{mN_g(T + \Delta T)}^{(N_s + mN_g)(T + \Delta T)} h(t, \tau) e^{-j2\pi f t} dt
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
\Psi(f, \tau) &= \mathcal{F} \{ \psi(t, \tau) \} \\
&= \mathcal{F} \left\{ (T + \Delta T) \sum_{p=0}^{N_s-1} \sum_{\nu=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} X_m(\nu) \right. \\
&\quad \cdot \delta(t - p(T + \Delta T) - mN_g(T + \Delta T)) \\
&\quad \left. \cdot e^{j2\pi \Delta f t} e^{-j2\pi \nu \delta_t m T_b} e^{j2\pi \nu \delta_t (t - \tau)} \right\}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Al desarrollar la expresión de (3.11) se obtiene

$$\begin{aligned}
\Psi(f, \tau) &= (T + \Delta T) \sum_{p=0}^{N_s-1} \sum_{\nu=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} X_m(\nu) e^{-j2\pi \nu \delta_t m T_b} e^{-j2\pi \nu \delta_t \tau} \\
&\quad \cdot \mathcal{F} \left\{ \delta(t - p(T + \Delta T) - mN_g(T + \Delta T)) \right. \\
&\quad \left. \cdot e^{j2\pi \Delta f t} e^{j2\pi \nu \delta_t t} \right\}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Usando la propiedad del cedazo de la transformada de Fourier, es fácil comprobar que en general

$$\mathcal{F} \{ f(t) \delta(t - a) \} = f(a) e^{-j2\pi f a}. \tag{3.13}$$

Entonces, se verifica que (3.12) es igual a

$$\begin{aligned}
\Psi(f, \tau) &= (T + \Delta T) \sum_{p=0}^{N_s-1} \sum_{\nu=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} X_m(\nu) e^{-j2\pi\nu\delta_t m T_b} e^{-j2\pi\nu\delta_t \tau} \\
&\quad \cdot e^{-j2\pi(f-\Delta f-\nu\delta_t)(p(T+\Delta T)+mN_g(T+\Delta T))} \\
&= (T + \Delta T) \sum_{\nu=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} X_m(\nu) e^{-j2\pi\nu\delta_t m T_b} e^{-j2\pi\nu\delta_t \tau} \\
&\quad \cdot e^{-j2\pi(f-\Delta f-\nu\delta_t)mN_g(T+\Delta T)} \sum_{p=0}^{N_s-1} e^{-j2\pi(f-\Delta f-\nu\delta_t)p(T+\Delta T)}. \quad (3.14)
\end{aligned}$$

Se puede identificar en (3.14) una serie geométrica y su evaluación es directa:

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{N_s-1} e^{-j2\pi(f-\Delta f-\nu\delta_t)p(T+\Delta T)} &= \frac{1 - e^{-j2\pi(f-\Delta f-\nu\delta_t)(T+\Delta T)N_s}}{1 - e^{-j2\pi(f-\Delta f-\nu\delta_t)(T+\Delta T)}} \\
&= e^{-j\pi(f-\Delta f-\nu\delta_t)(T+\Delta T)(N_s-1)} \\
&\quad \cdot \frac{\sin[\pi(f-\Delta f-\nu\delta_t)(T+\Delta T)N_s]}{\sin[\pi(f-\Delta f-\nu\delta_t)(T+\Delta T)]}.
\end{aligned}$$

Entonces (3.11) queda finalmente

$$\begin{aligned}
\Psi(f, \tau) &= (T + \Delta T) \sum_{\nu=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} X_m(\nu) e^{-j2\pi\nu\delta_t m T_b} e^{-j2\pi(f-\Delta f-\nu\delta_t)(T+\Delta T)(mN_g+\frac{N_s-1}{2})} \\
&\quad \cdot \frac{\sin[\pi(f-\Delta f-\nu\delta_t)(T+\Delta T)N_s]}{\sin[\pi(f-\Delta f-\nu\delta_t)(T+\Delta T)]} e^{-j2\pi\nu\delta_t \tau}. \quad (3.15)
\end{aligned}$$

Ahora uniendo los resultados de (3.15) y (3.9) se obtiene

$$\begin{aligned}
Y_m(f) &= \int_0^\infty [s^\square(f, \tau) *_f \Psi(f, \tau)] d\tau e^{j2\pi f m N_g (T + \Delta T)} + N(f) \\
&= \int_0^\infty s^\square(f, \tau) *_f \left\{ (T + \Delta T) \sum_{\nu = -\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2} - 1} X_m(\nu) e^{-j2\pi \nu \delta_t m T_b} \right. \\
&\quad \cdot e^{-j2\pi (f - \Delta f - \nu \delta_t)(T + \Delta T) \left(m N_g + \frac{N_s - 1}{2} \right)} \\
&\quad \cdot \frac{\sin[\pi (f - \Delta f - \nu \delta_t)(T + \Delta T) N_s]}{\sin[\pi (f - \Delta f - \nu \delta_t)(T + \Delta T)]} e^{-j2\pi \nu \delta_t \tau} \left. \right\} d\tau \cdot e^{j2\pi f m N_g (T + \Delta T)} \\
&\quad + N(f). \tag{3.16}
\end{aligned}$$

La expresión (3.16) representa en forma exacta el espectro continuo de una señal OFDM recibida en un canal variante en el tiempo con CFO Δf Hertz y SFO de ΔT segundos. En la práctica, esta señal es observada a la salida de la FFT en el receptor en las frecuencias $f = l\delta_r$, con $-\frac{N_s}{2} \leq l \leq \frac{N_s}{2} - 1$ y $\delta_r = \frac{1}{N_s(T + \Delta T)}$ igual a la separación de las frecuencias de observación de las subportadoras en el receptor. Entonces, para evaluar (3.16) en estas frecuencias específicas, hay que considerar que

$$e^{-j2\pi \nu \delta_t m T_b} e^{j2\pi f m N_g (T + \Delta T)} = e^{j2\pi (l - \nu) \delta_t m T_b}$$

y

$$\begin{aligned}
(f - \Delta f - \nu \delta_t)(T + \Delta T) &= \left[\frac{l}{N_s(T + \Delta T)} - \Delta f - \nu \delta_t \right] (T + \Delta T) \\
&= \frac{l}{N_s} - \Delta f(T + \Delta T) - \frac{\nu}{N_s T} (T + \Delta T) \\
&= \frac{l - \nu}{N_s} - \Delta f T \left(1 + \frac{\Delta T}{T} \right) - \frac{\nu}{N_s} \frac{\Delta T}{T}.
\end{aligned}$$

En esta expresión $\Delta f T$ y $\Delta T/T$ representan el CFO y SFO normalizados respectivamente. El análisis a continuación, entonces, no depende del ancho de banda de la transmisión.

Al muestrear, la integral de convolución en frecuencia se transforma en una sumatoria, con el diferencial df igual a $\delta_r = \frac{1}{N_s(T + \Delta T)}$. El término $s^\square(l\delta_r, \tau)$ es evaluado en las

frecuencias discretas l con $\delta_r = \frac{1}{N_s(T+\Delta T)}$ igual a la separación de las muestras. Además, para conservar la energía en el muestreo, hay que multiplicar por el intervalo de muestreo δ_r . Entonces, considerando todo esto en (3.16) para una frecuencia $l = k$ resulta

$$\begin{aligned}
Y_m(k) = & \frac{1}{N_s^2(T+\Delta T)} \sum_{d=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} \sum_{\nu=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} X_m(\nu) e^{j2\pi(d-\nu)\delta_t m T_g} \\
& \cdot e^{-j2\pi\left[\frac{d-\nu}{N_s} - \frac{\nu}{N_s} \frac{\Delta T}{T} - \Delta f T(1 + \frac{\Delta T}{T})\right] \left(m N_g + \frac{N_s-1}{2}\right)} \\
& \cdot \frac{\sin\left\{\pi\left[\frac{d-\nu}{N_s} - \frac{\nu}{N_s} \frac{\Delta T}{T} - \Delta f T(1 + \frac{\Delta T}{T})\right] N_s\right\}}{\sin\left\{\pi\left[\frac{d-\nu}{N_s} - \frac{\nu}{N_s} \frac{\Delta T}{T} - \Delta f T(1 + \frac{\Delta T}{T})\right]\right\}} \\
& \cdot \int_0^\infty s^\square((k-d)\delta_r, \tau) e^{-j2\pi\nu\delta_t\tau} d\tau + N(k). \tag{3.17}
\end{aligned}$$

Si se separa el término de $\nu = d$ de la segunda sumatoria se obtiene

$$\begin{aligned}
Y_m(k) = & \frac{1}{N_s(T+\Delta T)} \sum_{d=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} X_m(d) \lambda(d, d) \\
& \cdot \int_0^\infty s^\square((k-d)\delta_r, \tau) e^{-j2\pi d\delta_t\tau} d\tau \\
& + \frac{1}{N_s(T+\Delta T)} \sum_{d=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} \sum_{\substack{\nu=-\frac{N_s}{2} \\ \nu \neq d}}^{\frac{N_s}{2}-1} X_m(\nu) \lambda(d, \nu) \\
& \cdot \int_0^\infty s^\square((k-d)\delta_r, \tau) e^{-j2\pi\nu\delta_t\tau} d\tau + N(k), \tag{3.18}
\end{aligned}$$

en que usa la función $\lambda(d, \nu)$ que representa los efectos en fase y magnitud de la ICI,

$$\begin{aligned}
\lambda(d, \nu) = & \frac{1}{N_s} e^{j2\pi(d-\nu)\delta_t m T_b} \\
& \cdot e^{-j2\pi\left[\frac{d-\nu}{N_s} - \frac{\nu}{N_s} \frac{\Delta T}{T} - \Delta f T(1 + \frac{\Delta T}{T})\right] \left(m N_b + \frac{N_s-1}{2}\right)} \\
& \cdot \frac{\sin\left\{\pi\left[\frac{d-\nu}{N_s} - \frac{\nu}{N_s} \frac{\Delta T}{T} - \Delta f T(1 + \frac{\Delta T}{T})\right] N_s\right\}}{\sin\left\{\pi\left[\frac{d-\nu}{N_s} - \frac{\nu}{N_s} \frac{\Delta T}{T} - \Delta f T(1 + \frac{\Delta T}{T})\right]\right\}}. \tag{3.19}
\end{aligned}$$

Nuevamente, extraemos el término $d = k$ en ambas sumas en d para obtener

$$Y_m(k) = \frac{\lambda(k, k)}{N_s(T + \Delta T)} X_m(k) \int_0^\infty s^\square(0, \tau) e^{-j2\pi k \delta_t \tau} d\tau + I(k) + W(k) + Q(k) + N(k), \quad (3.20)$$

donde se definen los términos de ICI

$$I(k) = \frac{1}{N_s(T + \Delta T)} \sum_{\substack{d=-\frac{N_s}{2} \\ d \neq k}}^{\frac{N_s}{2}-1} X_m(d) \lambda(d, d) \cdot \int_0^\infty s^\square((k-d)\delta_r, \tau) e^{-j2\pi d \delta_t \tau} d\tau, \quad (3.21)$$

$$W(k) = \frac{1}{N_s(T + \Delta T)} \sum_{\substack{\nu=-\frac{N_s}{2} \\ \nu \neq k}}^{\frac{N_s}{2}-1} X_m(\nu) \lambda(k, \nu) \cdot \int_0^\infty s^\square(0, \tau) e^{-j2\pi \nu \delta_t \tau} d\tau \quad (3.22)$$

y

$$Q(k) = \frac{1}{N_s(T + \Delta T)} \sum_{\substack{d=-\frac{N_s}{2} \\ d \neq k}}^{\frac{N_s}{2}-1} \sum_{\substack{\nu=-\frac{N_s}{2} \\ \nu \neq d}}^{\frac{N_s}{2}-1} X_m(\nu) \lambda(d, \nu) \cdot \int_0^\infty s^\square((k-d)\delta_r, \tau) e^{-j2\pi \nu \delta_t \tau} d\tau. \quad (3.23)$$

Estos representan la ICI producida por la movilidad, la sincronización imperfecta y el efecto conjunto de ambas, respectivamente.

Por último, se puede desarrollar el término que multiplica a $X_m(k)$ en (3.20) usando (3.10),

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda(k, k)}{N_s(T + \Delta T)} \cdot \int_0^\infty s^\square(0, \tau) e^{-j2\pi k \delta_t \tau} d\tau \\
&= \lambda(k, k) \int_0^\infty \underbrace{\frac{1}{N_s(T + \Delta T)} \int_{mN_g(T + \Delta T)}^{(N_s + mN_g)(T + \Delta T)} h(t, \tau) dt}_{\triangleq \bar{h}_\tau} \\
&\quad \cdot e^{-j2\pi k \delta_t \tau} d\tau \cdot \\
&= \lambda(k, k) \int_0^\infty \bar{h}_\tau e^{-j2\pi k \delta_t \tau} d\tau \\
&= \lambda(k, k) \bar{H}(k), \tag{3.24}
\end{aligned}$$

en que $\bar{h}_\tau$ es el promedio de la respuesta al impulso tiempo-variante para un retardo τ y $\bar{H}(k)$ es el promedio *temporal* del canal visto en la portadora k durante la transmisión de un símbolo OFDM. El mismo razonamiento se puede hacer para reconocer a $\bar{H}(\nu)$ en (3.22).

Considerando todo esto, se obtiene finalmente que la señal que recibe el receptor en la subportadora k es

$$Y_m(k) = \lambda(k, k) \bar{H}(k) X_m(k) + I(k) + W(k) + Q(k) + N(k). \tag{3.25}$$

Los resultados de (3.21), (3.22), (3.23), (3.24) y (3.25) son determinísticos y exactos. Representan los efectos en la ICI en un ambiente de movilidad con SFO y CFO para una realización del canal dada. Se puede notar que si el canal es estático, el término (3.21) se hace nulo y si hay condiciones ideales de sincronización (esto es, $\Delta f = 0$ y $\Delta T = 0$) el término (3.22) se vuelve cero debido a que $\lambda(k, \nu)$ es nulo. La expresión (3.23) se vuelve cero en cualquiera de los dos casos. Vale decir, $Q(k)$ representa la degradación adicional que se presenta cuando existen problemas de sincronización además de la movilidad.

En (3.21) se puede observar que la interferencia en una subportadora k producida por la movilidad es la suma de las señales de todas las demás subportadoras ponderadas por la integral de $s^\square((k - d)\delta_r, \tau)$, cuyo valor depende de la movilidad. Este valor tiene valores distintos a cero sólo cuando d se encuentra en la vecindad de k , pero su valor es despreciable

en las portadoras más lejanas. La cantidad de portadoras que contiene esta vecindad está determinada por el grado de movilidad del canal. Por ejemplo, para un sistema de $N_s = 1024$ subportadoras en 2 MHz con una portadora de 3.5 GHz y a 100 km/h, cerca del 5% de la energía de cada subportadora k se va a sus dos vecinas $k + 1$ y $k - 1$.

En forma similar, en (3.22) representa la ICI debido a los SFO y CFO mediante la función $\lambda(d, \nu)$. Se puede ver en (3.19) que la función $\sin(\cdot)/\sin(\cdot)$ representa a la atenuación producida en la subportadora y el efecto que tiene la ICI en ella. A medida que aumentan Δf o ΔT esta función empieza a desplazarse, produciendo distorsiones entre las subportadoras. Para el caso sin movilidad pero con SFO y CFO, se puede observar que este término es idéntico al determinado en (Oberli, 2007). Obviando el efecto del SFO y la movilidad, algunos autores han encontrado expresiones similares a (3.22) para ilustrar el efecto aislado del CFO (Moose, 1994), (Armstrong, 1999).

Si, en cambio, se asumen condiciones de sincronización perfectas (esto es, $\Delta T = 0$ y $\Delta f = 0$, con lo que (3.22) se hace cero) se puede determinar el efecto aislado de la movilidad en la ICI. La expresión (3.21), en este caso, es similar a la utilizada por muchos autores (Hou & Chen, 2005), (Jeon et al., 1999), (Mostofi & Cox, 2005), (Russell & Stuber, 1995), donde mediante diferentes notaciones en todos los casos se describe la interferencia como la suma de las respuestas al impulso Doppler-variante de las demás subportadoras. Sin embargo, estos autores utilizan un enfoque discreto diferente al entregado acá, en que se simplifica el efecto de la duración finita de los símbolos enviados en la ICI.

El término (3.23) es nuevo ya que nunca antes había sido modelado el efecto conjunto de la movilidad y la sincronización imperfecta. Esto nos indica que el escenario con problemas de sincronización y variación temporal es particularmente perjudicial para el rendimiento del sistema. Sin embargo, como se verá más adelante, este término es en general muy pequeño y afecta en condiciones de mucha movilidad y desfases de frecuencia portadora.

3.2. Análisis estadístico de la ICI

El objetivo de esta sección es analizar las propiedades estadísticas teóricas de la ICI en base a las expresiones encontradas en la sección anterior. Específicamente, determinaremos la matriz de covarianza de la interferencia entre las subportadoras, cuyos elementos están dados por $E[\{I(k_1) + W(k_1) + Q(k_1)\}\{I(k_2) + W(k_2) + Q(k_2)\}^*]$.

Especificar las propiedades de la ICI es de especial interés puesto que si bien es comúnmente aceptado (Russell & Stuber, 1995) que la ICI tiene propiedades Gaussianas (lo que es fácil de ver en (3.21), (3.22) y (3.23) según el teorema de límite central para N_s suficientemente grande), su covarianza estadística exacta entre subportadoras aún no ha sido descrita en la literatura. Conocerla permitirá generar ICI como ruido Gaussiano correlacionado en frecuencia, lo que puede simplificar enormemente la complejidad computacional en simulaciones.

En las derivaciones que siguen, asumiremos un canal WSSUS como en (2.15) con la densidad Doppler espectral de potencia de Jakes (Clarke, 1968),

$$S(f) = \begin{cases} \frac{1}{\pi f_m \sqrt{1 - (\frac{f}{f_m})^2}} & \text{si } |f| \leq f_m \\ 0 & \text{si } |f| > f_m \end{cases} \quad (3.26)$$

Definimos la función $S^\square(f)$ como la densidad Doppler de potencia de un tono acotado en el tiempo, es decir, es igual a la densidad Doppler convolucionada con una función $\text{sinc}^2(\cdot)$,

$$S^\square(f) = \text{sinc}^2(f N_s(T + \Delta T)) *_f S(f). \quad (3.27)$$

Esta expresión corresponde a la densidad espectral de potencia de $s^\square(f, \tau)$ en (2.14) considerando el efecto de todos los retardos τ .

Con estas consideraciones, calculamos a continuación los elementos de correlación. Para mayor simplicidad algebraica definimos $\varphi(k) = W(k) + Q(k)$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\{I(k_1) + \varphi(k_1)\} \{I(k_2) + \varphi(k_2)\}^*] &= \\ \mathbb{E}[I(k_1)I^*(k_2)] + \mathbb{E}[I(k_1)W^*(k_2)] &+ \\ + \mathbb{E}[\varphi(k_1)I^*(k_2)] + \mathbb{E}[\varphi(k_1)W^*(k_2)]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Primero, para el término producido por la movilidad,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I(k_1)I^*(k_2)] &= \frac{1}{N_s^2(T + \Delta T)^2} \sum_{\substack{d_1 = -\frac{N_s}{2} \\ d_1 \neq k_1}}^{\frac{N_s}{2}-1} \sum_{\substack{d_2 = -\frac{N_s}{2} \\ d_2 \neq k_2}}^{\frac{N_s}{2}-1} \mathbb{E}[X_m(d_1)X_m^*(d_2)] \\ &\cdot \lambda(d_1, d_1)\lambda^*(d_2, d_2) \\ &\cdot \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{E}[s^\square((k_1 - d_1)\delta_r, \tau_1)s^\square((k_2 - d_2)\delta_r, \tau_2)^*] \\ &\cdot e^{j2\pi\delta_t(d_2\tau_2 - d_1\tau_1)} d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Usando (2.15), se puede ver fácilmente que

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[s^\square((k_1 - d_1)\delta_r, \tau_1)s^\square((k_2 - d_2)\delta_r, \tau_2)^*] \\ &= \left. \text{sinc}(fN_s(T + \Delta T))^2 * S_{ss}(f, \tau) \right|_{f=(k-d)\delta_r} \\ &\cdot N_s^2(T + \Delta T)^2 \delta(\tau_2 - \tau_1) \delta_{k_2-d_2, k_2-d_1}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde $\delta_{p,q}$ es el delta de Kronecker, definido como

$$\delta_{p,q} = \begin{cases} 1 & \text{if } p = q \\ 0 & \text{if } p \neq q \end{cases} \quad (3.31)$$

Si además se considera (2.17), (3.27) y el hecho que los símbolos enviados no están correlacionados y tienen una energía promedio E_s , se puede simplificar (3.29) a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I(k_1)I^*(k_2)] &= \delta_{k_2,k_1} E_s \sum_{\substack{d=-\frac{N_s}{2} \\ d \neq k_1}}^{\frac{N_s}{2}-1} \lambda(d, d) \lambda^*(d, d) \\ &\quad \cdot S^\square((k_1 - d)\delta_r). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Siguiendo los mismos pasos y siguiendo las mismas consideraciones, para $\varphi(k)$, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(k_1)\varphi^*(k_2)] &= E_s \sum_{d=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} \sum_{\substack{\nu=-\frac{N_s}{2} \\ \nu \neq d \\ \nu \neq d+k_2-k_1}}^{\frac{N_s}{2}-1} S^\square((k_1 - d)\delta_r) \\ &\quad \cdot \lambda(d, \nu) \lambda^*(d + k_2 - k_1, \nu). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Y las correlaciones cruzadas se pueden obtener directamente:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I(k_1)\varphi^*(k_2)] &= (1 - \delta_{k_2,k_1}) E_s \sum_{\substack{d=-\frac{N_s}{2} \\ d \neq k_1}}^{\frac{N_s}{2}-1} \lambda^*(d + k_1 - k_2, d) \lambda(d, d) \\ &\quad \cdot S^\square((k_1 - d)\delta_r) \end{aligned} \quad (3.34)$$

y

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(k_1)I^*(k_2)] &= (1 - \delta_{k_2,k_1}) E_s \sum_{\substack{d=-\frac{N_s}{2} \\ d \neq k_1}}^{\frac{N_s}{2}-1} \lambda(d + k_2 - k_1, d) \lambda^*(d, d) \\ &\quad \cdot S^\square((k_1 - d)\delta_r). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Entonces, reemplazando (3.32), (3.33), (3.34) y (3.35) en (3.28) se obtienen los elementos (k_1, k_2) de la matriz de correlación,

$$\begin{aligned} E [\{I(k_1) + W(k_1) + Q(k_1)\}\{I(k_2) + W(k_2) + Q(k_2)\}^*] = \\ E_s \delta_{k_2, k_1} \sum_{\substack{d=-\frac{N_s}{2} \\ d \neq k_1}}^{\frac{N_s}{2}-1} \lambda(d, d) \lambda^*(d, d) S^\square((k_1 - d)\delta_r) \end{aligned} \quad (3.36a)$$

$$+ E_s \sum_{d=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} \sum_{\substack{\nu=-\frac{N_s}{2} \\ \nu \neq d \\ \nu \neq d+k_2-k_1}}^{\frac{N_s}{2}-1} S^\square((k_1 - d)\delta_r) \quad (3.36b)$$

$$\begin{aligned} \cdot \lambda(d, \nu) \lambda^*(d + k_2 - k_1, \nu) \\ + E_s (1 - \delta_{k_2, k_1}) \sum_{\substack{d=-\frac{N_s}{2} \\ d \neq k_1}}^{\frac{N_s}{2}-1} S^\square((k_1 - d)\delta_r) \\ \cdot [\lambda(d + k_2 - k_1, d) \lambda^*(d, d) + \lambda^*(d + k_1 - k_2, d) \lambda(d, d)]. \end{aligned} \quad (3.36c)$$

Note que el término (3.36a) es cero para todos los pares de subportadoras $k_1 \neq k_2$. Esto significa que la ICI producida por la movilidad, $I(k)$, es estadísticamente independiente entre las diferentes subportadoras. No se puede decir lo mismo para (3.36b) donde se muestra que el término $\varphi(k) = W(k) + Q(k)$ se comporta como ruido correlacionado en frecuencia. Observe además que el término de covarianzas cruzadas (3.36c) es cero para todos los pares de subportadoras $k_1 = k_2$. Esto nos indica que existe algún grado de independencia estadística entre los términos de ICI en una misma subportadora.

La matriz de covarianza entre subportadoras encontrada en (3.36) permite generar ICI como ruido Gaussiano correlacionado en frecuencia. Para esto, basta con diseñar un filtro apropiado que asegure las condiciones de correlación deseadas según la matriz encontrada. El hecho de que la ICI tiene un grado de correlación entre subportadoras puede ser aprovechado en el diseño de algoritmos eficientes de trackeo para mitigar los efectos de la sincronización imperfecta bajo condiciones de movilidad.

En el contexto de este trabajo, lo que nos interesa es encontrar expresiones de la ICI que permitan comparar y analizar su comportamiento. Para esto, es útil hacer $k_1 = k_2 = k$ en (3.36) de manera de evaluar la potencia esperada en cada subportadora. En ese caso se obtiene que la potencia de la ICI en cada subportadora es

$$\begin{aligned} E[\{I(k) + W(k) + Q(k)\} \\ \cdot \{I(k) + W(k) + Q(k)\}^*] = S_I(k) + S_W(k) + S_Q(k), \end{aligned} \quad (3.37)$$

donde $S_I(k)$, $S_W(k)$ y $S_Q(k)$ representan la potencia de la ICI en la subportadora k producida por la movilidad, la sincronización imperfecta y el efecto conjunto de ambas, respectivamente. Éstas se obtienen directamente de la evaluación de (3.36a) y (3.36b) para $k_1 = k_2 = k$ y separando el término $d = k$ en (3.36b) de manera de obtener la potencia del término $Q(k)$. Sus expresiones son

$$S_I(k) = E_s \sum_{\substack{d=-\frac{N_s}{2}-1 \\ d \neq k}}^{\frac{N_s}{2}-1} \lambda(d, d) \lambda^*(d, d) S^\square((k - d)\delta_r), \quad (3.38)$$

$$S_W(k) = E_s \sum_{\substack{\nu=-\frac{N_s}{2} \\ \nu \neq k}}^{\frac{N_s}{2}-1} S^\square(0) \lambda(k, \nu) \lambda^*(k, \nu), \quad (3.39)$$

y

$$S_Q(k) = E_s \sum_{\substack{d=-\frac{N_s}{2} \\ d \neq k}}^{\frac{N_s}{2}-1} \sum_{\substack{\nu=-\frac{N_s}{2} \\ \nu \neq d}}^{\frac{N_s}{2}-1} S^\square((k - d)\delta_r) \lambda(d, \nu) \lambda^*(d, \nu). \quad (3.40)$$

Note que la potencia de la ICI es exactamente igual a la suma de las potencias de $I(k)$, $W(k)$ y $Q(k)$. Esto significa que en el contexto de una subportadora k los 3 términos de ICI son estadísticamente independientes entre sí.

Por último, usando (3.25), (3.24) y asumiendo un canal WSSUS, se puede calcular la potencia de la señal que se recibe en la portadora k ,

$$\begin{aligned} S_X(k) &= E\{\lambda(k, k)X(k)\bar{H}(k) \lambda^*(k, k)X(k)^*\bar{H}(k)^*\} \\ &= E_s \cdot \lambda(k, k)\lambda^*(k, k) S^\square(0). \end{aligned} \quad (3.41)$$

En rigor, (3.38), (3.39), (3.40) y (3.41) tienen valores diferentes para cada subportadora. Sin embargo en la práctica, cuando el ancho de banda de la transmisión es mucho mayor al ancho de banda de la dispersión Doppler, son prácticamente constantes en frecuencia. Esto es porque la función $S^\square(\cdot)$ tiene valores relevantes sólo en la vecindad de la subportadora k , lo que asegura homogeneidad en la mayoría de las subportadoras excepto aquellas en los extremos, las que están expuestas a una ICI menor debido a que son afectadas por una menor cantidad de subportadoras.

La expresión (3.41) indica la cantidad de energía promedio que se mantiene en una portadora cuando hay sincronización imperfecta y movilidad. El resto de la energía es entregada a las demás subportadoras en forma de ICI según las expresiones (3.38), (3.39) y (3.40). Entonces, el cuociente $\eta = \frac{S_X(k)}{E_s}$ corresponde a la fracción de energía perdida en la subportadora k . Si se asume sincronización perfecta, se puede utilizar (3.41) para calcularlo explícitamente como una medida de la degradación del sistema debido a la movilidad del canal. Utilizando el modelo de Clarke en (3.26), se obtiene que el valor exacto de η a una velocidad v con longitud de onda λ es

$$\eta_v = \int_{-\frac{v}{\lambda}}^{\frac{v}{\lambda}} \frac{\lambda \operatorname{sinc}(f N_s T)^2}{\pi v \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda f}{v}\right)^2}} df. \quad (3.42)$$

Al evaluar la integral en (3.42) se puede obtener una medida del desempeño de cualquier sistema OFDM bajo condiciones de movilidad. Por ejemplo, para un sistema como WiMAX (IEEE802.16a, 2003) de 512 subportadoras en 5 MHz con una portadora de 3.5 GHz, la Figura 3.1 muestra el rendimiento η_v para diferentes velocidades del canal. Se puede observar que para velocidades menores a 1000 km/h el sistema mantiene al menos el 80%

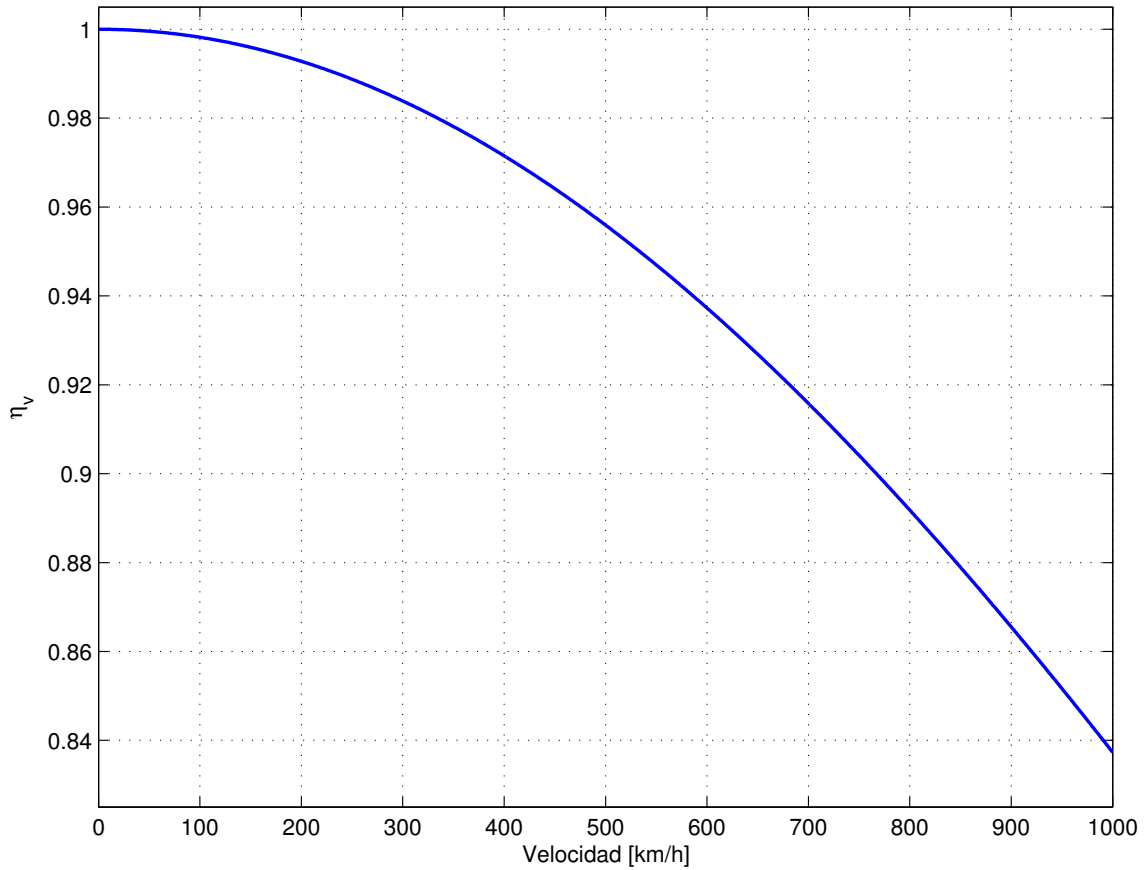


FIGURA 3.1. Rendimiento teórico de un sistema OFDM bajo canales móviles a diferentes velocidades. Se consideran parámetros de un sistema WiMAX.

de la energía en las subportadoras, lo que significa que un sistema de estas características tiene inmunidad a la dispersión Doppler bajo condiciones típicas de movilidad. Si el sistema tuviese menor separación entre subportadoras (lo que ocurre en un sistema con mayor cobertura, por ejemplo) se tendría una menor resistencia a la movilidad. El desempeño del sistema depende además de otros factores además de la movilidad, como las condiciones de sincronización y la razón señal a ruido. Pero aún así la expresión (3.42) puede ser útil como una primera aproximación para predecir el comportamiento de cualquier sistema en ambientes móviles.

Si por otro lado consideramos el mismo cociente para el caso sin movilidad pero con un CFO de Δf Hertz y un SFO de ΔT segundos podemos obtener el rendimiento del sistema bajo sincronización imperfecta. Usando (3.19) y (3.41) y aproximando $\frac{\nu}{N_s} \frac{\Delta T}{T} \approx 0$,

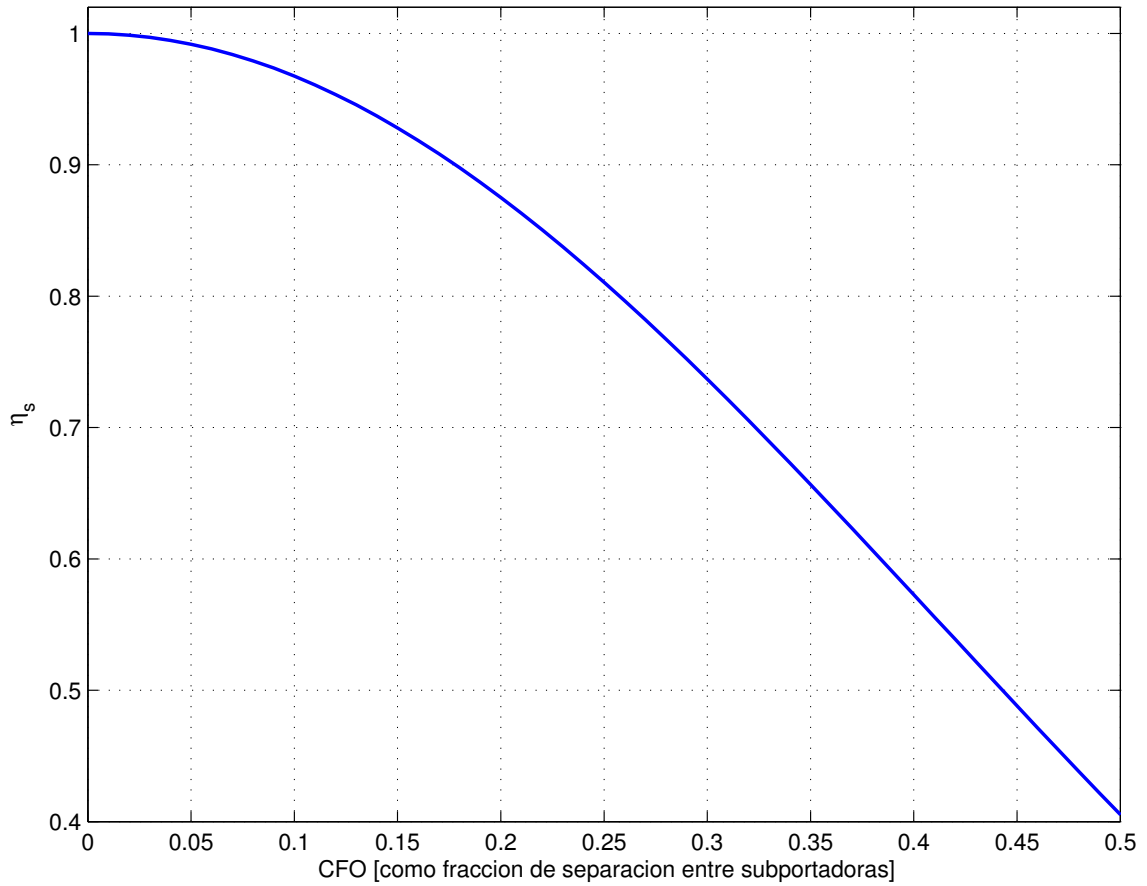


FIGURA 3.2. Rendimiento teórico de un sistema OFDM bajo diferentes CFO. Se consideran parámetros de un sistema WiMAX.

se obtiene

$$\eta_s = \frac{1}{N_s^2} \frac{\sin^2 \left\{ \pi \left[\Delta f T \left(1 + \frac{\Delta T}{T} \right) \right] N_s \right\}}{\sin^2 \left\{ \pi \left[\Delta f T \left(1 + \frac{\Delta T}{T} \right) \right] \right\}}. \quad (3.43)$$

Entonces, evaluando (3.43) para los mismos parámetros WiMAX del ejemplo anterior en diferentes valores de CFO, se obtiene la degradación graficada en la Figura 3.2. Se puede apreciar que la caída del rendimiento del sistema es bastante fuerte a medida que aumenta el CFO. Para un CFO de 0.3 se tiene una pérdida de más de 80% de la energía en la subportadora, es decir un rendimiento similar al obtenido en un sistema con movilidad a 1000 km/h como se vio en la Figura anterior. Esto parece indicar que un CFO tiene mayor incidencia que la movilidad en la ICI, lo que verificaremos en más detalle en la sección siguiente.

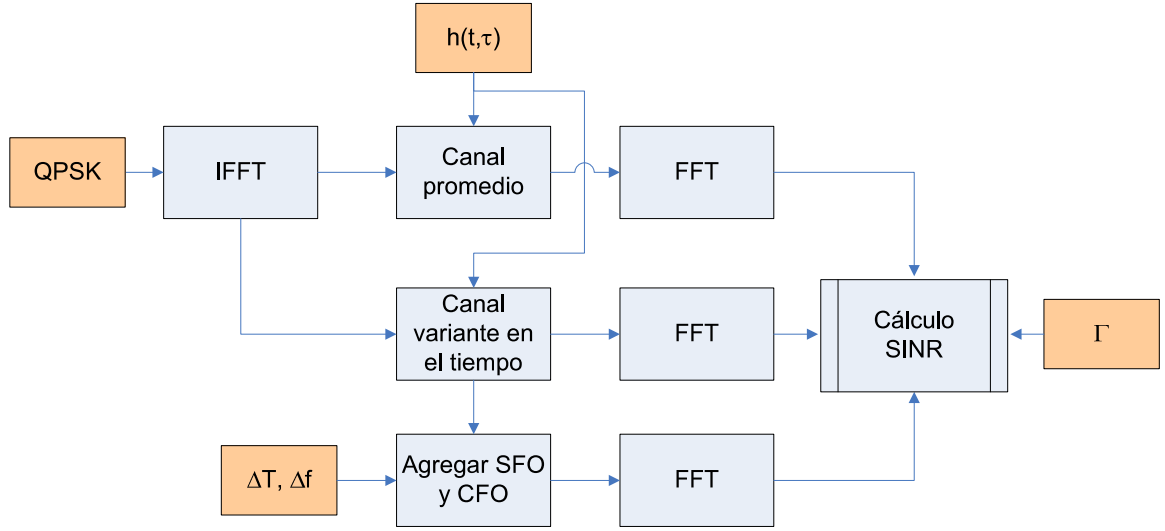


FIGURA 3.3. Diagrama de bloques del simulador OFDM utilizado

3.3. Simulaciones

Interesa validar computacionalmente los resultados teóricos de las secciones anteriores. Para ello, se comparará la razón señal a ruido más interferencia (SINR) teórica según las expresiones obtenidas en la sección 3.2 con la entregada por un simulador de sistema OFDM con movilidad, CFO y SFO. Se evaluará el ruido térmico en el receptor tal que la transmisión tenga una razón señal a ruido (SNR) promedio igual a Γ cuando no hay ICI. Así, el parámetro Γ contiene los efectos de pérdida por distancia, desvanecimiento de sombra y ruido térmico en la transmisión. Entonces, considerando (3.38), (3.39), (3.40) y (3.41) se tiene que el valor teórico de la SINR en una subportadora k es

$$\text{SINR}(k) = \frac{S_X(k)}{S_I(k) + S_W(k) + S_Q(k) + \frac{E_s}{\Gamma}}. \quad (3.44)$$

Recordemos que las expresiones en (3.25) y (3.44) son esencialmente homogéneas en k , por lo que podemos considerar sólo $k = 0$ sin pérdida de generalidad. Supondremos además que la dispersión Doppler máxima f_m no difiere al cambiar la subportadora, ya que la variación en la longitud de onda λ en la práctica es despreciable.

La Figura 3.3 muestra el diagrama de bloques del simulador. En naranja se indican las entradas del sistema y en celeste los procesos simulados. Observe que se llevan a cabo simulaciones en paralelo bajo las diferentes condiciones de interés para luego calcular la SINR promedio entre las subportadoras. Se realizó la simulación del sistema completo para 300 canales diferentes transmitiendo distintos símbolos OFDM y para luego calcular la SINR promedio obtenida.

Se consideraron parámetros de un sistema tipo WiMAX móvil (IEEE802.16a, 2003) de $N_s = 512$ subportadoras y un prefijo de $N_e = 64$ en un ancho de banda de 5 MHz con una portadora central de 3.5 GHz. El canal se considera WSSUS usando el modelo de movilidad de Clarke (Clarke, 1968) con un retardo τ máximo igual al tamaño del prefijo cíclico. El tiempo de coherencia del canal fue estimado con la regla del pulgar $T_c = \frac{0.423}{f_m}$ (Rappaport, 2002) donde f_m es la dispersión Doppler máxima. Se medirá el CFO como fracción de la separación de las subportadoras y el SFO en partes por millón (ppm).

Para generar los canales se simulaban respuestas al impulso tiempo-variante $h(t, \tau)$ para cada τ en forma independiente. Se simulaban desvanecimientos según el modelo de Jakes usando un modelo autoregresivo de orden 100 y un sesgo de $\epsilon = 10^{-5}$ para asegurar estabilidad (Baddour & Beaulieu, 2005) (el Anexo B detalla este procedimiento). Los símbolos enviados son simulados como QPSK con energía promedio unitaria y se generaron en forma aleatoria para cada iteración.

El primer grupo de simulaciones fueron realizadas para evaluar en forma individual la contribución de CFO, SFO y movilidad en la razón señal a interferencia (SIR) en la ausencia de ruido térmico ($\Gamma = \infty$ dB). La Figura 3.4 muestra estas expresiones, con líneas continuas indicando la evaluación de (3.44) y marcadores para los valores simulados. La curva A muestra la SIR debido sólo a movilidad (S_X/S_I) cuando la sincronización es ideal. Se puede notar que cuando la sincronización no es perfecta, la SIR S_X/S_W es constante respecto al tiempo de coherencia del canal. La SIR es entonces en ese caso representada por las asíntotas B1 para el caso con CFO = 0.2 partes de la separación de subportadoras y SFO = 0 ppm, y C1 para el caso en que CFO = 0 y SFO = 20 ppm. En

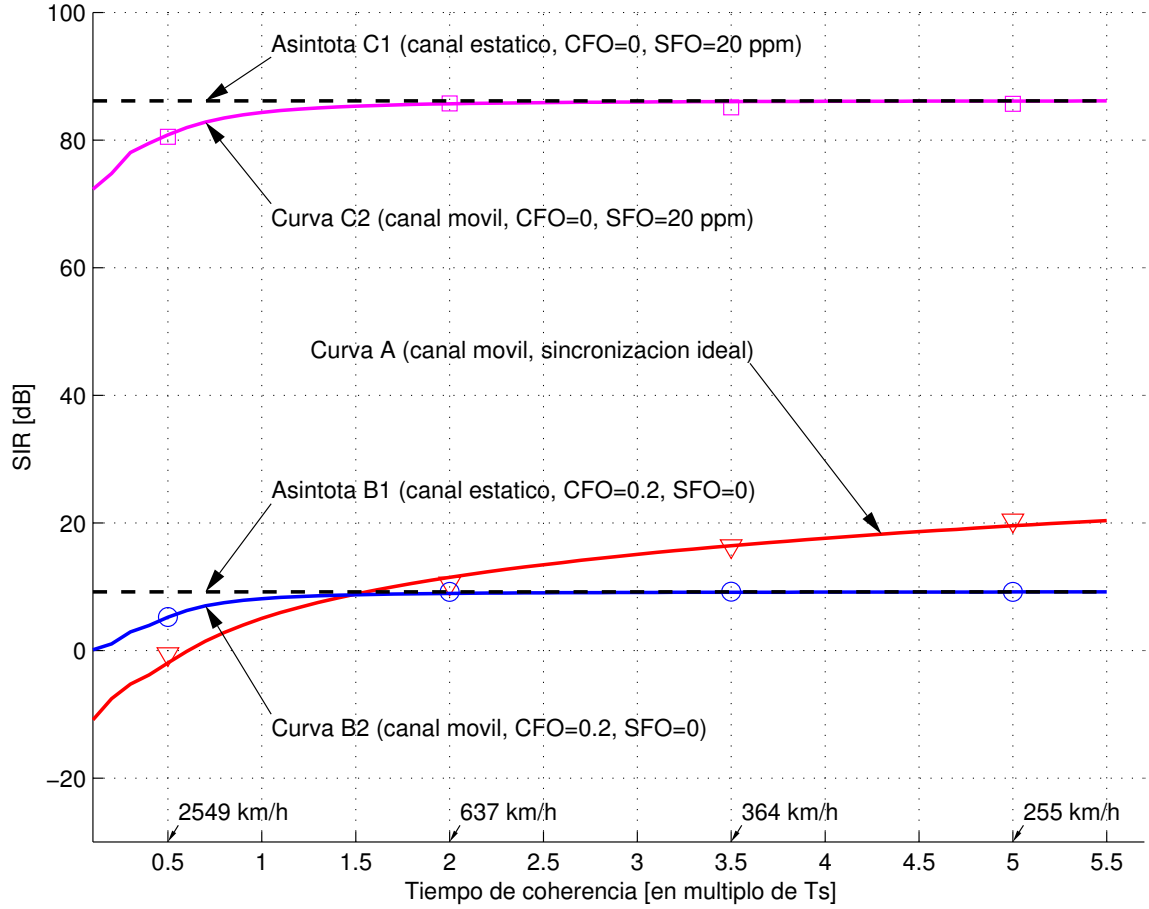


FIGURA 3.4. Contribución individual de movilidad (curva A), CFO (curvas B1 y B2) y SFO (curvas C1 y C2) a la SIR. Las curvas continuas son la evaluación de (3.44) y los marcadores representan los resultados de la simulación. Los parámetros de sistema son de WiMAX (512 subportadoras en 5 MHz con una portadora central de 3.5 GHz).

forma correspondiente, las curvas B2 y C2 ilustran los cuocientes $S_X/(S_W + S_Q)$. Ellas confirman que S_Q es relevante solo en transmisiones de extremadamente alta velocidad y no tiene mayor relevancia en sistemas actuales OFDM. En forma similar, la contribución del SFO a la SIR (curvas C1 y C2) es también despreciable comparado al efecto tanto de la movilidad como del CFO, aún con un valor grande de SFO como el usado acá.

A continuación se introduce ruido térmico y se evalúa la SINR para diferentes valores de CFO y tiempos de coherencia para comparar nuevamente los resultados entregados por las simulaciones. Las Figuras 3.5 y 3.6 muestran algunos de estos resultados para $\Gamma = 7$ dB

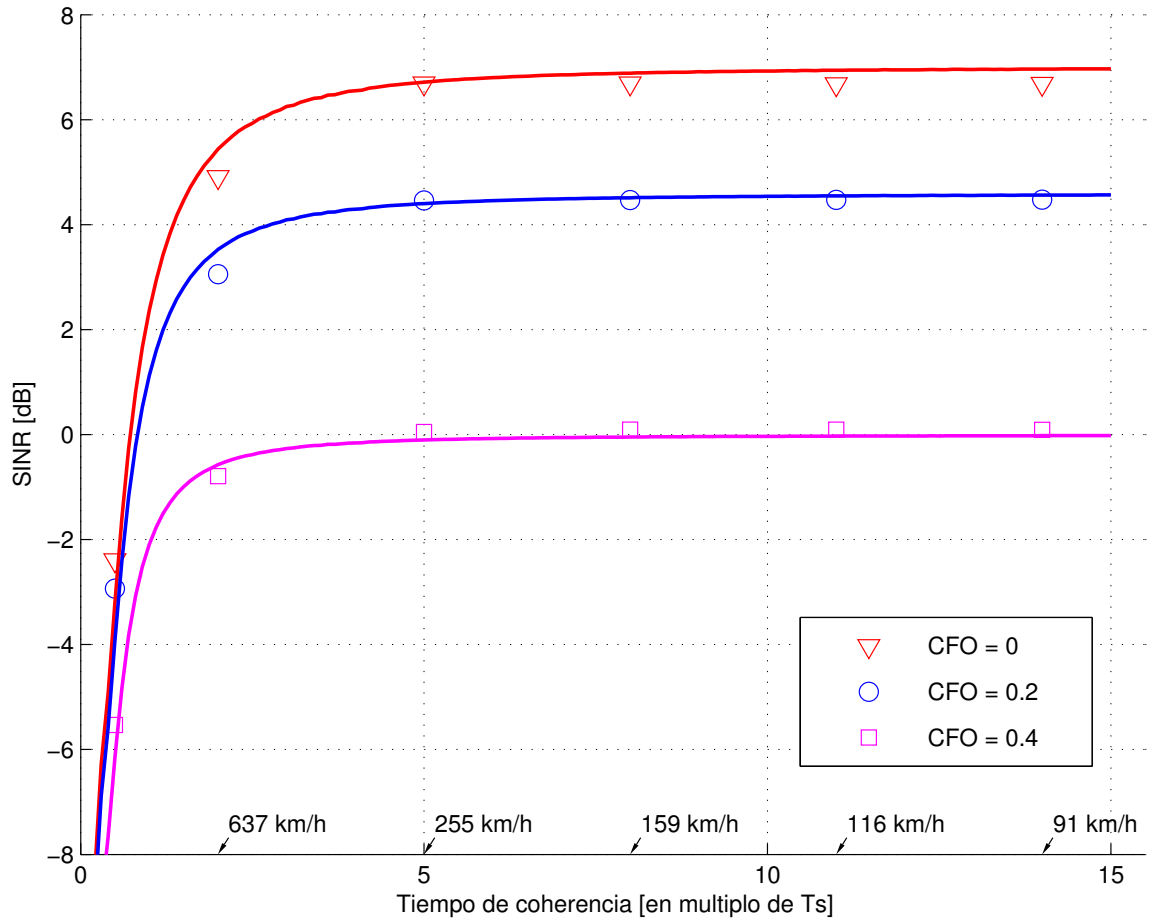


FIGURA 3.5. SINR para diferentes CFO en función del tiempo de coherencia del canal. Las curvas continuas representan la evaluación de (3.44) y los marcadores los resultados de la simulación. Los parámetros del sistema son como en la Figura 3.4 con $\Gamma = 7$ dB.

y $\Gamma = 12$ dB. Observe que para canales de alta movilidad, cuando el tiempo de coherencia es aproximadamente menor a 3 símbolos OFDM, la SINR es degradada dramáticamente, sin importar el nivel de CFO. Esto implica que para este rango de movilidad, la degradación producida por CFO es eclipsada por la degradación producto de la movilidad. En contraste para canales más lentos (tiempos de coherencia mayores), la ICI producida por el CFO domina en la SINR. Una representación gráfica de cómo varía la SINR con el CFO para diferentes niveles de ruido térmico está presentada en la Figura 3.7. Se muestra que para aprovechar al máximo la capacidad de OFDM en niveles de alta SNR se requiere una sincronización más ajustada.

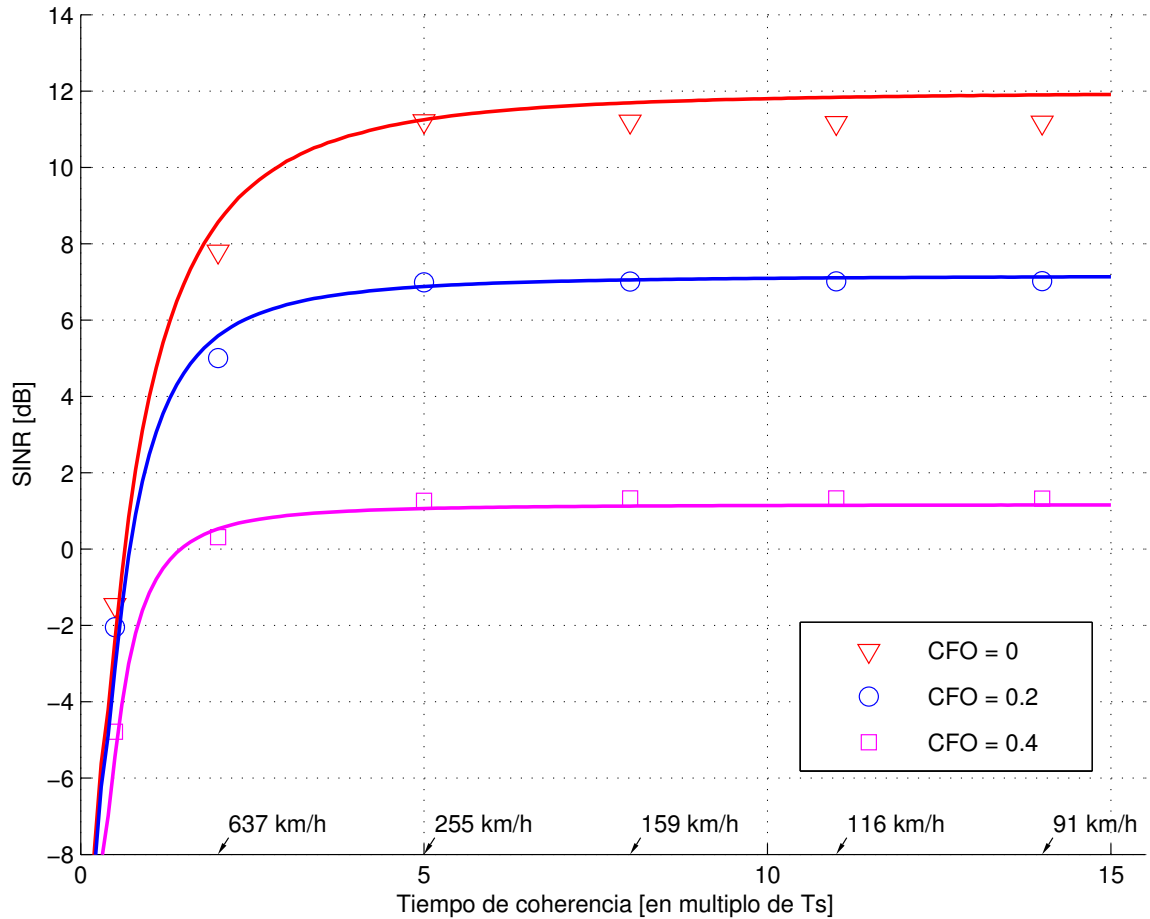


FIGURA 3.6. SINR como en la Figura 3.5 para $\Gamma = 12$ dB.

Las curvas superiores de las Figuras 3.5 y 3.6 presentan una leve discrepancia entre los valores teóricos y los entregados por la simulación. Como se discute en (Baddour & Beaulieu, 2005) (y se detalla en el Apéndice B), las ecuaciones mal condicionadas que resultan del enfoque autoregresivo usado acá dificultan la simulación exacta de canales lentos con las estadísticas de Clarke. Como una solución a esto, Baddour propone un mecanismo heurístico equivalente a sumar una pequeña cantidad de ruido al proceso de desvanecimiento del canal. Este efecto es igual a un pequeño aumento en el ruido térmico, lo que se revela en estas simulaciones cuando la ICI domina por sobre el ruido térmico, como en las curvas mencionadas. Cuando este sesgo de simulación es despreciable, sin embargo, los valores teóricos encajan bien con las simulaciones.

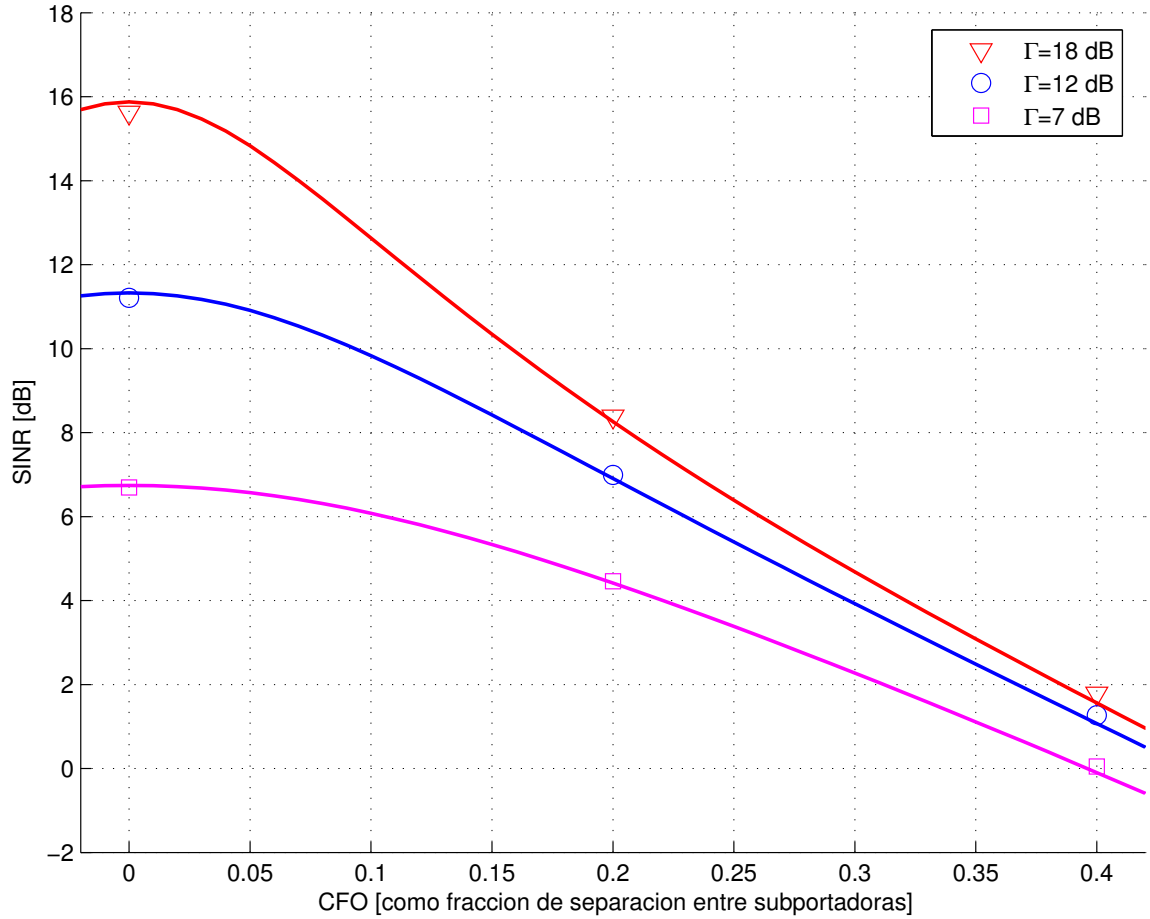


FIGURA 3.7. SINR en función del CFO para niveles de SNR $\Gamma = \{7, 12, 18\}$ dB. El tiempo de coherencia del canal es de 5 símbolos OFDM. Las curvas continuas representan la evaluación de (3.44) y los marcadores los resultados de la simulación. Los parámetros del sistema son como en la Figura 3.4.

Los valores de CFO usados (0.2 y 0.4) son adecuados para representar las condiciones iniciales de los lazos de trackeo después de una etapa de adquisición. Pero en trackeo de régimen permanente, valores RMS típicos del CFO residual están entre 0.01 ($\Gamma = 18$ dB) y 0.04 ($\Gamma = 7$ dB) (Oberli, 2007). Debido a las limitaciones del algoritmo de simulación discutidas anteriormente, la simulación de estos niveles de CFO en canales con tiempos de coherencia en el rango de interés entregan resultados inexactos. Sin embargo, se puede predecir ahora en forma precisa los niveles de SIR al evaluar (3.44). La Figura 3.8 muestra los valores de SIR debido solamente al CFO para un rango amplio de desplazamiento de frecuencia portadora. La sorprendente linealidad —en escala logarítmica— encontrada no

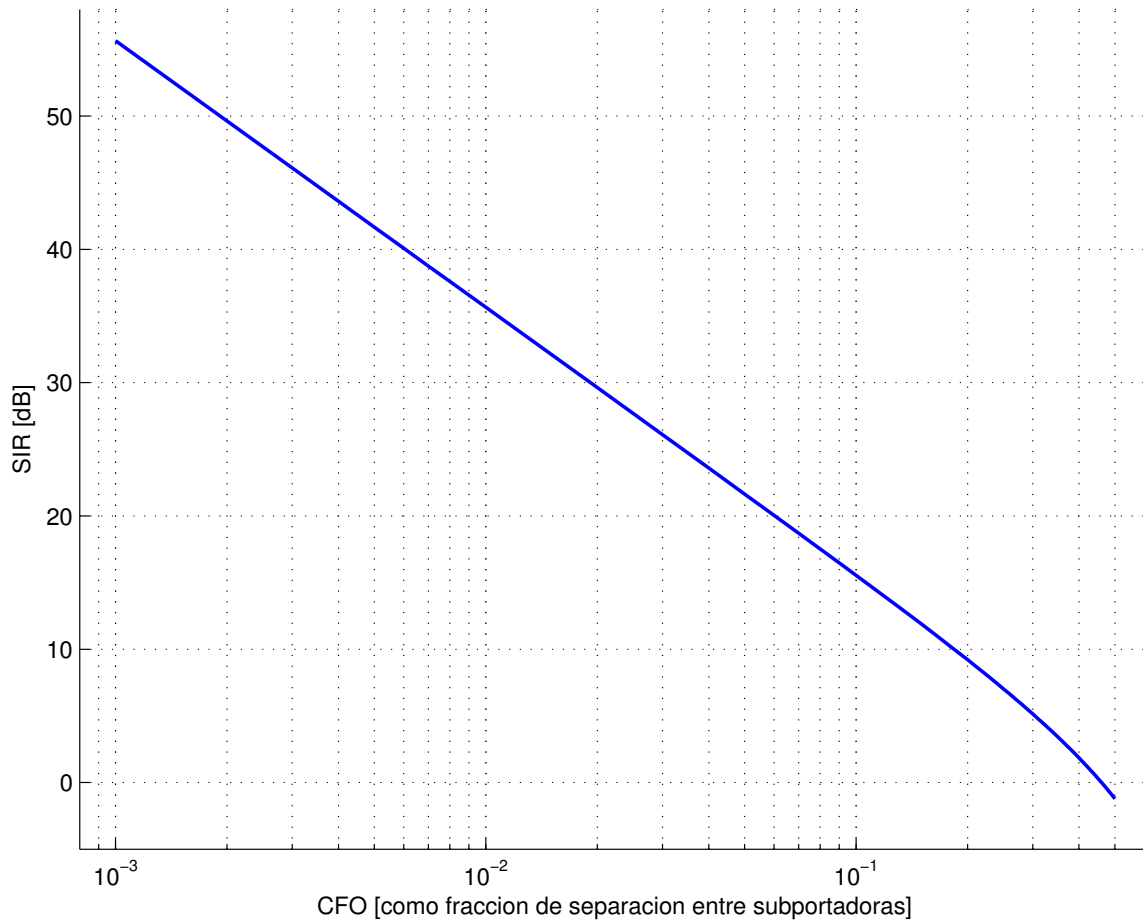


FIGURA 3.8. SIR en función del CFO. Obtenidos según (3.44) con un canal estático, SNR $\Gamma = \infty$ y parámetros de sistema como en la Figura 3.4.

es para nada evidente en las ecuaciones. Para los valores residuales de CFO entregados anteriormente, el nivel de SIR está entre 25 dB y 35 dB. En forma similar, la Figura 3.9 presenta la SIR para un amplio rango de velocidades. Para velocidades menores a 150 km/h, la SIR es mayor a 25 dB. Observe que las Figuras 3.8 y 3.9, usadas con un nivel de SNR Γ permiten comparar rápidamente los tres efectos en la ICI y su contribución a la SINR sin la necesidad de recurrir a largas simulaciones.

Observe que si olvidamos el efecto del SFO y asumimos una longitud de onda fija, el único parámetro de sistema que afecta al modelo es la duración del símbolo $T_s = N_s T$ (o, en frecuencia, la separación entre subportadoras $\delta_i = \frac{1}{N_s T}$). Esto significa que para sistemas con símbolos OFDM de igual duración, el modelo entrega exactamente los mismos

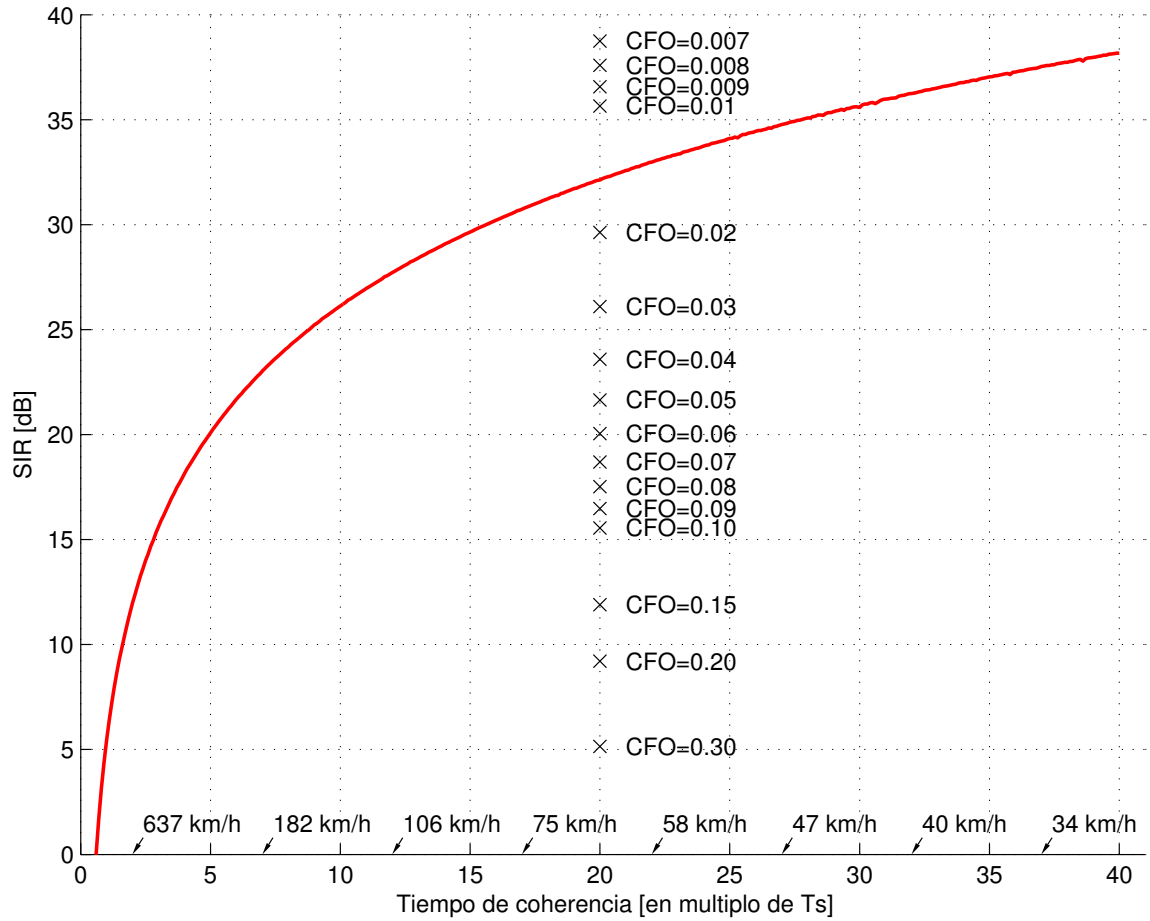


FIGURA 3.9. SIR en función de la movilidad. Obtenidos según (3.44) sin CFO, $\text{SNR } \Gamma = \infty$ y parámetros de sistema como en la Figura 3.4. Valores seleccionados de CFO son dados para comparar (marcadores $\times$, importados desde la Figura 3.8).

valores de ICI producto de una combinación dada de Doppler y CFO. Como además en las Figuras 3.4-3.9 se han normalizado el tiempo de coherencia (a T_s) y el CFO (a δ_i), se desprende que los resultados graficados en ellas se pueden extender para cualquier sistema con la misma duración de símbolo OFDM (e.g para diferentes tipos de WiMAX móvil (IEEE802.16a, 2003)).

4. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

4.1. Revisión de los Resultados y Comentarios Generales

En este trabajo se presentó un modelo generalizado de interferencia inter-portadora (ICI) en OFDM bajo condiciones simultáneas de desplazamientos de frecuencias de muestreo y portadora con variación temporal del canal. El modelo nos indica que la ICI se comporta como la suma de tres términos: un término correspondiente a la sincronización imperfecta producto de desplazamientos de frecuencia portadora y de muestreo, otro término que corresponde a la interferencia producida por el efecto Doppler producto de la movilidad y un tercer término que representa el efecto conjunto de los otros dos efectos en el receptor. Este último término es un hallazgo que la literatura no ha reportado hasta hoy. Para los dos primeros términos se ha formulado un modelo exacto, más preciso que los modelos presentes en la literatura.

En el contexto de una subportadora, se demostró que los tres términos de ICI son estadísticamente independientes, lo que significa que se puede considerar el comportamiento de cada uno de ellos por separado. Además, se encontró una expresión exacta para la matriz de covarianza entre subportadoras de la ICI. Esta matriz indica la forma en que está correlacionada la ICI entre dos subportadoras y entrega las herramientas para generar ICI en forma exacta a partir de ruido blanco correlacionándolo en frecuencia. Ello puede simplificar tareas de simulación de canales móviles significativamente.

El análisis estadístico de la ICI también permitió evaluar la caída de rendimiento en un sistema OFDM, definido como el porcentaje de energía que se mantiene en una subportadora en los casos de movilidad pura y problemas de sincronización. La evaluación de estas expresiones de rendimiento para los parámetros de un sistema WiMAX móvil indicaron que en los rangos de velocidad entre 0 y 250 km/h predomina la degradación por el CFO —sin trackeo— por sobre la movilidad.

4.2. Comparación de la Soluciones

El modelo estadístico encontrado para la ICI fue comparado con resultados obtenidos mediante la simulación de 300 canales estadísticamente independientes sometidos a condiciones de movilidad, CFO y SFO. Se observó que las expresiones teóricas se ajustan bien a los valores simulados. Se concluye que el modelo propuesto es adecuado para representar canales inalámbricos cuando hay movilidad y/o sincronización imperfecta.

Se comprobó que en un sistema con parámetros de WiMAX el efecto de la movilidad es menor al efecto que tiene un desplazamiento de frecuencia portadora durante la etapa de adquisición. También se comprobó que en términos de razón señal a interferencia, el efecto del desplazamiento de frecuencia de muestreo es despreciable tanto frente al efecto de la movilidad como frente al desplazamiento de frecuencia portadora. Se concluye entonces que a cualquier velocidad es fundamental un algoritmo de trackeo que mitigue el efecto de CFO.

Para niveles de sincronización en régimen permanente, se entregaron las herramientas para comparar el efecto del CFO con la movilidad en la SINR para cualquier condición. Como referencia, para velocidades menores a 150 km/h se encontró que la SIR producto del CFO residual está entre 25 y 35 dB mientras la SIR producto de la movilidad es mayor que 25 dB.

4.3. Temas de Investigación Futura

Es importante recalcar el carácter teórico de los resultados presentados en este trabajo. Si bien fueron corroborados computacionalmente mediante simulaciones, es de gran interés validarlos mediante experimentos en terreno.

Un ámbito que está generando creciente interés en la comunidad científica es el uso de OFDM en sistemas MIMO (Foschini et al., 2006). Los resultados presentados acá se pueden extender directamente al caso MIMO, y permitirán modelar sistemas network

MIMO basados en OFDM bajo diversos niveles de movilidad y sincronización imperfecta. Los primeros pasos en esta dirección se presentan en el Anexo C.

Finalmente, cabe recordar que las expresiones encontradas modelan la señal y la ICI en el receptor, antes de ser decodificada. Es decir, este trabajo no presenta herramientas de estimación de canal, ecualización o trackeo. Un tema de investigación, entonces, sería explotar el modelo propuesto para desarrollar nuevos mecanismos de estimación o trackeo que compensen el efecto de la ICI.

BIBLIOGRAFIA

- Armstrong, J. (1999, March). Analysis of new and existing methods of reducing intercarrier interference due to carrier frequency offset in OFDM. *IEEE Transactions on Communications*, 47(3), 365–369.
- Baddour, K. E., & Beaulieu, N. C. (2005, July). Autoregressive modeling for fading channel simulation. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 4(4), 1650–1662.
- Bello, P. (1963, December). Characterization of randomly time-variant linear channels. *Communications, IEEE Transactions on [legacy, pre - 1988]*, 11(4), 360–393.
- Bug, S., Wengerter, C., Gaspard, I., & Jakoby, R. (2002). WSSUS - channel models for broadband mobile communication systems. In *Vehicular technology conference, 2002. VTC spring 2002. IEEE 55th* (Vol. 2, pp. 894–898).
- Clarke, R. (1968). A statistical theory of mobile radio reception. *Bell System Tech. Journal*, 47, 957-1000.
- Cox, D. (1973, November). 910 MHz urban mobile radio propagation: Multipath characteristics in new york city. *Communications, IEEE Transactions on [legacy, pre - 1988]*, 21(11), 1188–1194.
- ETSI-DVB. (2004). *Digital video broadcasting (DVB); framing structure, channel coding and modulation for digital terrestrial television* (No. EN 300 744 V1.5.1 (2004-06)).
- Foschini, G. J., & Gans, M. J. (1998). On limits of wireless communications in a fading environment when using multiple antennas. *Wireless Personal Communications*, 6, 311–335.
- Foschini, G. J., Karakayali, K., & Valenzuela, R. A. (2006, August). Coordinating multiple antenna cellular networks to achieve enormous spectral efficiency. In *Communications, IEE proceedings-* (Vol. 153, pp. 548–555).

- García, M., & Oberli, C. (2008). A general model for inter-carrier interference for OFDM [in review]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*.
- Hou, W.-S., & Chen, B.-S. (2005, September). ICI cancellation for OFDM communication systems in time-varying multipath fading channels. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 4(5), 2100–2110.
- Huang, H., & Valenzuela, R. A. (2005, September). Fundamental simulated performance of downlink fixed wireless cellular networks with multiple antennas. In *Personal, indoor and mobile radio communications, 2005. PIMRC 2005. IEEE 16th international symposium on* (Vol. 1, pp. 161–165).
- IEEE802.11a. (1999). *Part 11: Wireless LAN medium access control (MAC) and physical layer (PHY) specifications — high-speed physical layer in the 5 ghz band*.
- IEEE802.16a. (2003). *Part 16: Air interface for fixed broadband wireless access systems — amendment 2: Medium access control modifications and additional physical layer specifications for 2-11 ghz*.
- Jakes, W. C. (1994). *Microwave mobile communications* (2 ed.). Wiley-IEEE Press.
- Jeon, W. G., Chang, K. H., & Cho, Y. S. (1999, January). An equalization technique for orthogonal frequency-division multiplexing systems in time-variant multipath channels. *IEEE Transactions on Communications*, 47(1), 27–32.
- Karakayali, M. K., Foschini, G. J., & Valenzuela, R. A. (2006, August). Network coordination for spectrally efficient communications in cellular systems. *IEEE [see also IEEE Personal Communications] Wireless Communications*, 13(4), 56–61.
- Medbo, J., Hallenberg, H., & Berg, J. E. (1999, July). Propagation characteristics at 5 GHz in typical radio-LAN scenarios. In *Vehicular technology conference, 1999 IEEE 49th* (Vol. 1, pp. 185–189). Houston, TX, USA.
- Moose, P. H. (1994, October). A technique for orthogonal frequency division multiplexing frequency offset correction. *IEEE Transactions on Communications*, 42(10), 2908–2914.
- Mostofi, Y., & Cox, D. C. (2005, March). ICI mitigation for pilot-aided OFDM mobile systems. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 4(2), 765–774.

- Oberli, C. (2007, July). ML-based tracking algorithms for MIMO-OFDM. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 6(7), 2630–2639.
- Pätzold, M. (2002). *Mobile fading channels*. John Wiley & Sons.
- Rappaport, T. S. (2002). *Wireless communications: Principles & practice*. Prentice Hall.
- Russell, M., & Stuber, G. L. (1995, July). Interchannel interference analysis of OFDM in a mobile environment. In *Vehicular technology conference, 1995 IEEE 45th* (Vol. 2, pp. 820–824). Chicago, IL.
- Stamoulis, A., Diggavi, S., & Al-Dhahir, N. (2002, October). Intercarrier interference in MIMO OFDM. *Signal Processing, IEEE Transactions on [see also Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE Transactions on]*, 50(10), 2451–2464.

ANEXO A. DERIVACIÓN DE LA DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA DE JAKES

La derivación de la densidad Doppler de Jakes se basa en los siguientes supuestos:

- La propagación de las ondas electromagnéticas ocurre en un plano bi-dimensional horizontal y el receptor se encuentra en el centro de un área de scattering isotrópico.
- Los ángulos de recepción α de las ondas recibidas distribuyen uniformemente en el intervalo $[-\pi, \pi]$.
- El patrón de radiación de la antena receptora es omnidireccional.

Entonces, debido al segundo supuesto se tiene que los ángulos de llegada de las ondas α son variables aleatorias con la densidad de probabilidad

$$p_{\alpha}(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{si } \alpha \in [-\pi, \pi] \\ 0 & , \text{ en otros casos} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Se sigue entonces que las frecuencias Doppler asociadas a los ángulos α ,

$$f = f(\alpha) = f_m \cos(\alpha) \quad (\text{A.2})$$

son también variables aleatorias. Recordemos que la dispersión Doppler máxima $f_m = \frac{v}{\lambda}$ depende de la longitud de onda λ de la portadora y la velocidad v del móvil.

Se puede calcular la función de densidad de probabilidad de las frecuencias Doppler en (A.2) usando la propiedad de las funciones de variables aleatorias. Entonces tenemos (Pätzold, 2002) (Clarke, 1968)

$$p_f(f) = \sum_{\nu=1}^m \frac{p_{\alpha}(\alpha_{\nu})}{\left| \frac{d}{d\alpha} f(\alpha) \right|_{\alpha=\alpha_{\nu}}}, \quad (\text{A.3})$$

donde m es el número de soluciones de la ecuación (A.2) en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Para $|f| > f_m$, esta ecuación no tiene soluciones reales y, en consecuencia, $p_f(f) = 0$ para $|f| > f_m$. Debido a las características de la función inversa del coseno, para $|f| < f_m$

existen dos soluciones de la ecuación (A.2) dentro del intervalo $[-\pi, \pi]$. Estas son

$$\alpha_1 = -\alpha_2 = \arccos\left(\frac{f}{f_m}\right), \quad (\text{A.4})$$

de manera que $m = 2$. Después de un poco de álgebra y usando (A.2)-(A.4), se puede encontrar el siguiente resultado para la función de densidad de probabilidad de las frecuencias Doppler:

$$p_f(f) = \begin{cases} \frac{1}{\pi f_m \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_m}\right)^2}} & \text{si } |f| < f_m, \\ 0 & \text{si } |f| > f_m. \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Se puede demostrar (Pätzold, 2002) que la densidad de probabilidad (A.5) es directamente proporcional a la densidad espectral Doppler $S(f)$,

$$S(f) = k \cdot p_f(f). \quad (\text{A.6})$$

En consecuencia, si deseamos que la potencia total Doppler sea unitaria

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(f) df = k \cdot \int_{-\infty}^{\infty} p_f(f) df = 1 \quad (\text{A.7})$$

y consideramos que en general para cualquier densidad de probabilidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_f(f) df = 1 \quad (\text{A.8})$$

tenemos que en (A.6) k tiene que tener valor 1. Entonces, se tiene en definitiva que la densidad de potencia Doppler es igual a

$$S(f) = \begin{cases} \frac{1}{\pi f_m \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_m}\right)^2}} & \text{si } |f| \leq f_m \\ 0 & \text{si } |f| > f_m. \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Se puede calcular la transformada de Fourier inversa a (A.9) para obtener la función de autocorrelación según el teorema de Wiener-Khinchin. Esta es

$$R(\tau) = \mathcal{F}^{-1} \{S(f)\} = J_0(2\pi f_m \tau).$$

ANEXO B. MODELO DE SIMULACIÓN DE CANALES WSSUS CON DENSIDAD DOPPLER DE JAKES

En este Anexo se detallará el procedimiento utilizado para simular una respuesta al impulso tiempo-variante según el modelo de Jakes y los supuestos WSSUS especificados en el Capítulo 2. El modelo utilizado fue basado en el trabajo de Baddour (Baddour & Beaulieu, 2005) y fue la herramienta usada en las simulaciones del Capítulo 3.

Lo que se busca es generar en forma independiente para cada retardo l una función $h[n, l]$ que varía en n según el modelo de Jakes. Esto tanto en su componente real como en su componente imaginaria, que distribuyen Gaussianas. Para esto, primero generamos un proceso $x[n] + jy[n]$ tal que tengan una autocorrelación

$$E[x[q]x^*[q+n]] = J_0(2\pi f_D |n|) \quad (\text{B.1})$$

$$= R[n] \quad (\text{B.2})$$

donde $f_D = f_m T$ es la dispersión Doppler máxima normalizada al periodo de muestreo. Lo mismo para $y[n]$.

Para obtener este comportamiento, pasaremos $x[n]$ e $y[n]$ por un proceso autoregresivo de orden p , de la siguiente manera (los mismos pasos se hacen para $y[n]$ de aquí en adelante)

$$x[n] = - \sum_{k=1}^p a_k x[n-k] + w[n] \quad (\text{B.3})$$

donde $w[k]$ es ruido Gaussiano complejo de varianza σ_p con partes real e imaginaria no correlacionadas. Los parámetros $a_1, a_2, \dots, a_p$ y σ_p determinan el modelo autoregresivo a utilizar y son elegidos de manera de cumplir (B.1). En general, la relación que deben tener estos parámetros con la función de autocorrelación deseada $R[n]$ está dada por (Baddour & Beaulieu, 2005)

$$R[k] = \begin{cases} - \sum_{m=1}^p a_m R[k-m], & \text{si } k \geq 1 \\ - \sum_{m=1}^p a_m R[-m] + \sigma_p^2, & \text{si } k = 0 \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

O, en forma matricial para $k = 1, 2, \dots, p$

$$\mathbf{R}\mathbf{a} = -\mathbf{v} \quad (\text{B.5})$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} R[0] & R[-1] & \cdots & R[-p+1] \\ R[1] & R[0] & \cdots & R[-p+2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R[p-1] & R[p-2] & \cdots & R[0] \end{bmatrix} \\ \mathbf{a} &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{v} &= \begin{bmatrix} R[1] & R[2] & \cdots & R[p] \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

y

$$\sigma_p^2 = R[0] + \sum_{k=1}^p a_k R[-k] \quad (\text{B.7})$$

Entonces, dada una función de autocorrelación $R[n]$ como en (B.1) se pueden resolver las ecuaciones de (B.5) y (B.7) para obtener los parámetros $a_1, a_2, \dots, a_p$ y σ_p .

Sin embargo, hay que notar que al resolver la ecuación matricial (B.5) pueden haber problemas si la matriz $\mathbf{R}$ deja de ser invertible. Esto puede producir inestabilidades en la simulación y entregar valores incorrectos. Para solucionar esto, Baddour propone una solución heurística: sumar un pequeño valor ϵ a la diagonal de la matriz $\mathbf{R}$ de manera de asegurar que sea invertible. El costo de sumar este valor es que se le agrega un ruido muy pequeño a la simulación que puede ser evidente cuando hay poca movilidad y alta razón señal a ruido. Baddour sugiere diferentes valores de ϵ según el nivel de movilidad. Estos valores se muestran en la Tabla B.1.

La Figura B.1 muestra la densidad espectral de potencia promedio obtenida con el método simulado en 50 iteraciones comparado con la densidad teórica de Jakes de (3.26) para una frecuencia de dispersión Doppler máxima de $f_m = 15$ kHz con un muestreo a 20

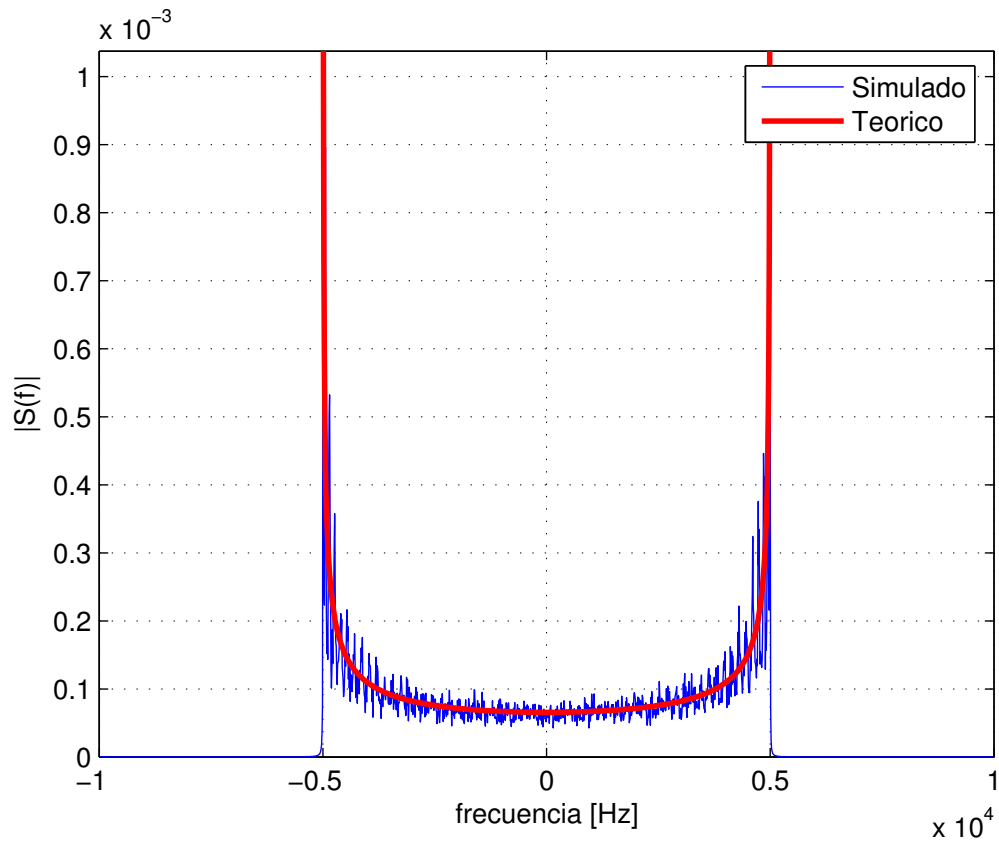


FIGURA B.1. Comparación de densidad de potencia Doppler teórica con la obtenida en la simulación en 50 iteraciones.

TABLA B.1. Valores de ϵ sugeridos en el modelo de simulación.

f_m	ϵ
0.001	10^{-5}
0.005	10^{-6}
0.01	10^{-7}
0.05	10^{-8}

kHz. Se puede observar que aún con pocas iteraciones, los valores simulados se ajustan bastante bien a los teóricos.

Considerando todo esto, el código de MATLAB utilizado para simular un proceso de desvanecimiento es

```
function out=Jakes_sim(P,M, fm, fs, epsilon)
```

```

%P: orden modelo
%M: cantidad de muestras
%fm: densidad Doppler maxima normalizada
%fs: periodo muestreo
%epsilon: sesgo para asegurar estabilidad

for p=1:P+1
    R(p)=besselj(0,2*pi*fm*(p-1)/fs); % autocorrelacion de Jakes
end
R_matrix=toeplitz(R(1:P))+eye(P)*epsilon; % sumando epsilon
AR=-inv(R_matrix)*R(2:P+1)'; % resolviendo las ecuaciones
sigma_u=R_matrix(1,1)+R(2:P+1)*AR;
K=2000;
h=filter(1,[1 AR.'],wgn(M+K,1,10*log10(sigma_u),'complex'));
out=h(K+1:end,:); % Ignora las primeras K muestras

```

La Figura B.2 muestra la forma en que varía $h(t, \tau)$ durante 5 símbolos OFDM para $\tau = 1$ y un tiempo de coherencia de $0.5 T_s$ en un sistema de 256 subportadoras en 3.5 MHz en la banda de 3.5 GHz. Se puede observar que el comportamiento en el dominio del tiempo también se acerca a lo deseado.

Finalmente, se simuló el comportamiento en el dominio de los retardos τ (en el este caso discreto, l). Se asumió un decaimiento exponencial, como los encontrados típicamente en canales inalámbricos (Medbo, Hallenberg, & Berg, 1999). Entonces, se multiplicó el vector generado incluyendo este efecto en l

$$h[n, l] = Ae^{-\gamma l}[x(l) + jy(l)], \quad \forall n \quad (\text{B.8})$$

donde $x(l)$ e $y(l)$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas como Gaussianas con media cero y varianza unitaria. A y γ están dados de manera de mantener

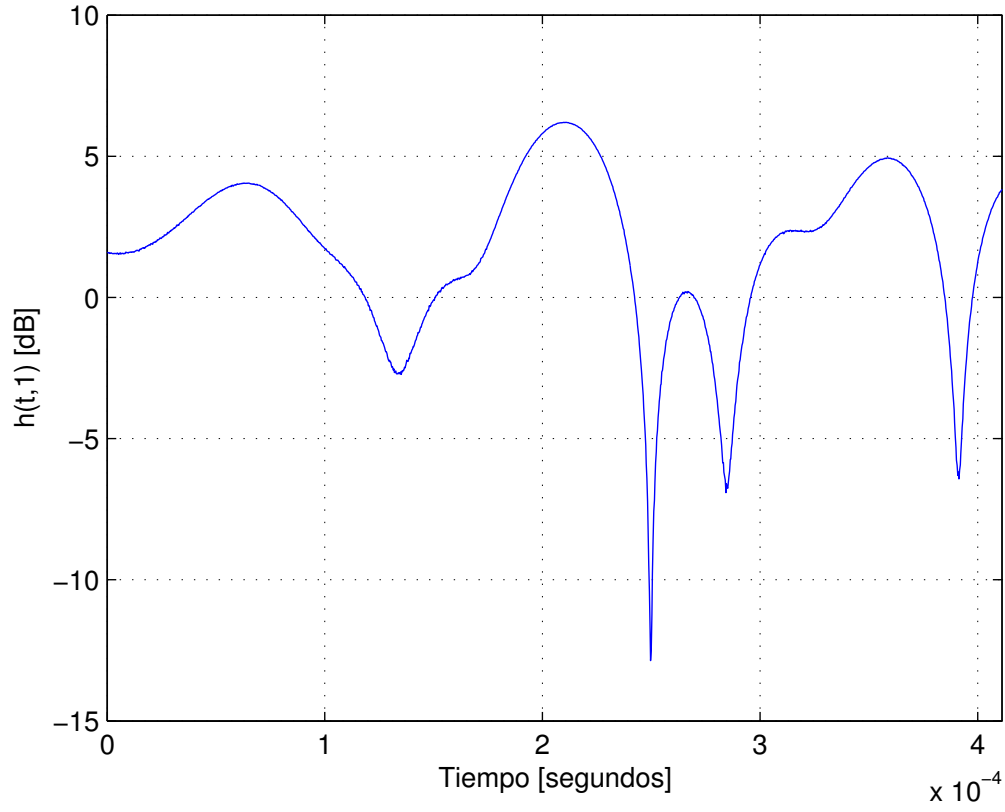


FIGURA B.2. Simulación de la respuesta al impulso tiempo-variante para $\tau = 1$ y $T_c = 0.5 T_s$ durante 5 símbolos OFDM.

energía unitaria en el canal,

$$A = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - 2e^{-2\gamma})} \quad (\text{B.9})$$

$$\gamma = \frac{T}{2\tau_{RMS}} \quad (\text{B.10})$$

donde T es la tasa de muestreo del sistema y τ_{RMS} es el retardo RMS del canal. Los retardos fueron limitados a un máximo de $16\tau_{RMS}$.

ANEXO C. EXTENSIÓN A NETWORK MIMO

Las redes inalámbricas de próxima generación entregarán acceso a aplicaciones de altas tasas de datos, como transmisión de video y navegación por Internet, en conjunto con aplicaciones de bajas tasas de datos, como la telefonía. Y así como ha existido una creciente demanda por servicios inalámbricos, los recursos de radio (espectro electromagnético y potencia de transmisión) siguen siendo en general escasos. Entonces, es claro que el diseño de sistemas espectralmente eficientes es un desafío importante en las futuras redes inalámbricas.

Una atractiva alternativa para aumentar la eficiencia espectral en sistemas celulares es combinar OFDM con acceso múltiple coordinado en el espacio (Foschini et al., 2006). Este tipo de sistemas son conocidos como Network MIMO.

En los sistemas celulares convencionales, cada estación base transmite señales a los usuarios presentes en el área de cobertura de la celda. Dependiendo de las condiciones del canal, la interferencia causada por celdas vecinas puede degradar fuertemente la calidad de la señal recibida. Entonces, la capacidad del enlace de bajada en los sistemas celulares está limitada por la interferencia entre celdas vecinas. Como en Network MIMO se conectan las estaciones base en un backbone de alto rendimiento y velocidad, existe la posibilidad de coordinar la transmisión de las estaciones base para mitigar la interferencia entre celdas vecinas y así mejorar la eficiencia espectral de la red. Mediante esta coordinación es posible aumentar notablemente la capacidad de los enlaces de bajada de los sistemas celulares (Karakayali, Foschini, & Valenzuela, 2006).

La transmisión coordinada en los sistemas celulares es especialmente efectiva cuando las estaciones base y los móviles cuentan con arreglos de antenas en un sistema MIMO. Esto lo indica la teoría de la información ya que la capacidad teórica de un enlace MIMO en un ambiente con mucho desvanecimiento crece esencialmente en forma lineal al aumentar el número de antenas (Foschini & Gans, 1998). Y esto es especialmente efectivo cuando la interferencia es baja, lo que hace que se logra coordinando las transmisiones de

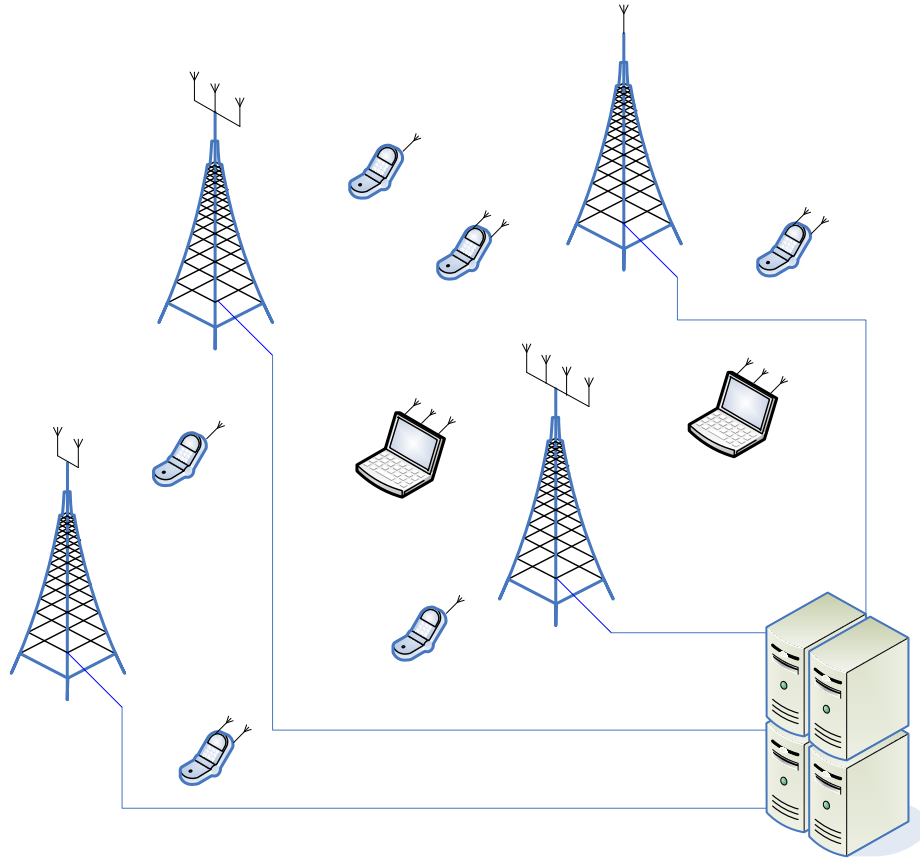


FIGURA C.1. Ejemplo de sistema Network MIMO

las estaciones base. Es posible aumentar aún más la capacidad del sistema usando sectorización (Huang & Valenzuela, 2005). La Figura C.1 muestra un ejemplo de sistemas Network MIMO usando arreglos de antenas.

Todos los beneficios de Network MIMO se pierden si no se tiene una razón a interferencia alta en los móviles. Por eso es de especial interés identificar y caracterizar la ICI producida en estos sistemas, lo que desarrollaremos a continuación.

C.1. Extensión del modelo

Se tienen N_t ramas transmisoras y N_r ramas receptoras que transmiten símbolos OFDM de N_s subportadoras. Cada transmisor y receptor tiene su propio oscilador, con sus respectivas frecuencias portadoras y periodos de muestreo. Para los transmisores se escribirán

T_i y f_i para el periodo de muestreo y frecuencia portadora, respectivamente. En forma similar en los receptores se usarán T_j y f_j . Las portadoras de los símbolos enviados están separadas entonces en $\delta_i = \frac{1}{N_s T_i}$ Hertz. Para mayor claridad se usará el símbolo j para representar la unidad imaginaria $\sqrt{-1}$.

En forma parecida al Capítulo 3, se representa primero la m -ésima señal transmitida en la rama i en banda base con prefijo cíclico en el tiempo continuo como

$$\begin{aligned} x_i(t) &= \Pi \left(\frac{t - (m + \frac{1}{2}) T_b + T_e}{T_b} \right) \sum_{\nu = -\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} X_i(\nu) e^{j2\pi\nu\delta_i(t-mT_b)} \\ &= \Pi \left(\frac{t - (m + \frac{1}{2}) N_g T_i + N_e T_i}{N_g T_i} \right) \sum_{\nu = -\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} X_i(\nu) e^{j2\pi\nu\delta_i(t-mN_g T_i)}. \end{aligned}$$

Todas las N_t señales se unen en el aire por lo que en cada antena receptora se recibe la superposición de todas las señales transmitidas. Entonces, usando (3.2), la señal recibida en la rama j es igual a

$$y_j(t) = \sum_{i=1}^{N_t} e^{j(\varphi_j - \varphi_i)} e^{j2\pi t(f_i - f_j)} \int_0^\infty x_i(t - \tau - \tau_i) h_{ji}(t, \tau) d\tau + n_j(t). \quad (\text{C.1})$$

Donde $h_{ji}(t, \tau)$ es la respuesta al impulso tiempo-variante del canal entre la antena transmisora i y la receptora j y $n_j(t)$ corresponde al ruido blanco en el receptor j . El fasor $e^{j2\pi t(f_i - f_j)}$ representa el desfase en la recepción debido a la diferencia entre las portadoras f_i y f_j . Se consideran los parámetros de fase y retardo iniciales τ_i y φ_i , respectivamente, para la transmisión i y τ_j y φ_j en la recepción j .

A continuación se muestrea la señal con un SFO en cada rama. Es decir, cada señal recibida es muestreada en los instantes $n \cdot T_j$ de manera que el m -ésimo bloque OFDM es muestreado en los instantes $t = nT_j + mN_g T_j$ con $n = 0, \dots, N_s - 1$. Se puede ver que la operación de muestreo implícitamente remueve el prefijo cíclico y recupera la señal

original con un SFO. La señal de muestreo que realiza este proceso es

$$\begin{aligned} \sqcup \left(m, \frac{t}{T_j} \right) = \\ T_j \sqcap \left(\frac{t - T_j \left(\frac{1}{2} N_s + m N_g \right)}{N_s T_j} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n T_j - m N_g T_j). \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

En (3.4) el factor T_j permite conservar la energía. Aplicando este muestreo a (C.1) se obtiene

$$\begin{aligned} y_j(t) = \\ T_j \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} e^{j(\varphi_j - \varphi_i)} X_i(\nu) e^{j2\pi t(f_i - f_j)} \delta(t - n T_j - m N_g T_j) \\ \cdot \underbrace{\sqcap \left(\frac{t - T_j \left(\frac{1}{2} N_s + m N_g \right)}{N_s T_j} \right)}_{\sqcap(\clubsuit)} \\ \cdot \left\{ \int_0^{\infty} \underbrace{\sqcap \left(\frac{t - \tau - \tau_i - \left(m + \frac{1}{2} \right) N_g T_i + N_e T_i}{N_g T_i} \right)}_{\sqcap(\spadesuit)} e^{j2\pi \nu \delta_i(t - \tau - \tau_i - m N_g T_i)} h_{ji}(t, \tau) d\tau \right\} \\ + \sqcup \left(m, \frac{t}{T_j} \right) n_j(t). \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Al igual que en el Capítulo 3, se puede eliminar $\sqcap(\spadesuit)$ en (C.3) debido a $\sqcap(\clubsuit)$ si se elige el tamaño del prefijo cíclico de manera que $h_{ji}(t, \tau) \equiv 0$ para todo $\tau > T_e$ en todo instante t en todos los canales. Entonces, uniendo $\sqcap(\clubsuit)$ con la suma en n se simplifica la

expresión (C.3) a

$$\begin{aligned}
y_j(t) &= T_j \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{n=0}^{N_s-1} \sum_{\nu=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} e^{j(\varphi_j-\varphi_i)} X_i(\nu) e^{j2\pi t(f_i-f_j)} \delta(t - nT_j - mN_gT_j) \\
&\quad \cdot e^{-j2\pi\nu\delta_i(mN_gT_i+\tau_i)} \int_0^\infty h(t, \tau) \Pi(\clubsuit) e^{j2\pi\nu\delta_i(t-\tau)} d\tau \\
&\quad + \sqcup\left(m, \frac{t}{T_j}\right) n_j(t).
\end{aligned} \tag{C.4}$$

Esta expresión corresponde a la señal continua recibida en el dominio del tiempo. Es continua debido a la función $\sqcup(\cdot)$ pero tiene valor igual a cero en todos los instantes excepto en $t = nT_j + mN_gT_j$ con $n = 0, \dots, N_s - 1$.

Para recuperar los símbolos en una implementación de OFDM, se haría necesario calcular la FFT en estas N_s muestras. Este procedimiento es equivalente a calcular la transformada de Fourier de $y_m(t + mN_gT_j + \tau_j)$ con τ_j el retardo del receptor. Si se calcula esta transformada se obtiene

$$\begin{aligned}
Y_j(f) &= \mathcal{F}\{y_j(t + mN_gT_j + \tau_j)\} \\
&= \mathcal{F}\{y_j(t)\} e^{j2\pi f(mN_gT_j + \tau_j)} \\
&= \int_{-\infty}^\infty \left(T_j \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{n=0}^{N_s-1} \sum_{\nu=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} e^{j(\varphi_j-\varphi_i)} X_i(\nu) e^{j2\pi t(f_i-f_j)} \right. \\
&\quad \cdot \delta(t - nT_j - mN_gT_j) e^{-j2\pi\nu\delta_i(mN_gT_i+\tau_i)} \\
&\quad \cdot \left. \int_0^\infty h_{ji}(t, \tau) \Pi(\clubsuit) e^{j2\pi\nu\delta_i(t-\tau)} d\tau \right) e^{-j2\pi ft} dt \cdot e^{j2\pi f(mN_gT_j + \tau_j)} \\
&\quad + N_j(f).
\end{aligned} \tag{C.5}$$

Si se define la función $\psi_{ji}(t, \tau)$,

$$\begin{aligned}
\psi_{ji}(t, \tau) &= T_j \sum_{n=0}^{N_s-1} \sum_{\nu=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} X_i(\nu) e^{j2\pi t(f_i-f_j)} \delta(t - nT_j - mN_gT_j) \\
&\quad \cdot e^{-j2\pi\nu\delta_i(mN_gT_i+\tau_i)} e^{j2\pi\nu\delta_i(t-\tau)}.
\end{aligned} \tag{C.6}$$

Entonces (C.5) se puede reescribir

$$Y_j(f) = \sum_{i=1}^{N_t} e^{j(\varphi_j - \varphi_i)} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \square(\clubsuit) h_{ji}(t, \tau) \psi_{ji}(t, \tau) e^{-j2\pi f t} dt d\tau \cdot e^{j2\pi f(mN_g T_j + \tau_j)} + N_j(f). \quad (C.7)$$

Se puede reconocer la transformada de Fourier del producto

$$\mathcal{F}_t \{ \square(\clubsuit) h_{ji}(t, \tau) \psi_{ji}(t, \tau) \} = s_{ji}^\square(f, \tau) *_f \Psi_{ji}(f, \tau).$$

donde $s_{ji}^\square(f, \tau)$ es la respuesta al impulso Doppler-variante del canal entre el transmisor i y el receptor j para el retardo τ durante la duración del símbolo dada por $\square(\clubsuit)$. El símbolo $*_f$ representa la convolución continua en frecuencia y $\Psi_{ji}(f, \tau)$ es la transformada de Fourier en t de $\psi(t, \tau)$ definido en (C.6). Es decir,

$$\begin{aligned} s_{ji}^\square(f, \tau) &= \mathcal{F} \{ \square(\clubsuit) h_{ji}(t, \tau) \} \\ &= \int_{mN_g T_j}^{(N_s + mN_g)T_j} h_{ji}(t, \tau) e^{-j2\pi f t} dt \end{aligned} \quad (C.8)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{ji}(f, \tau) &= \mathcal{F} \{ \psi_{ji}(t, \tau) \} \\ &= \mathcal{F} \left\{ T_j \sum_{n=0}^{N_s-1} \sum_{\nu=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} X_i(\nu) e^{j2\pi t(f_i - f_j)} \delta(t - nT_j - mN_g T_j) \cdot e^{-j2\pi \nu \delta_i(mN_g T_i + \tau_i)} e^{j2\pi \nu \delta_i(t - \tau)} \right\}. \end{aligned} \quad (C.9)$$

Al desarrollar la expresión de (C.9) se tiene

$$\begin{aligned} \Psi_{ji}(f, \tau) &= T_j \sum_{n=0}^{N_s-1} \sum_{\nu=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} X_i(\nu) e^{-j2\pi \nu \delta_i(mN_g T_i + \tau_i)} e^{-j2\pi \nu \delta_i \tau} \\ &\quad \cdot \mathcal{F} \left\{ \delta(t - nT_j - mN_g T_j) e^{j2\pi t(f_i - f_j)} e^{j2\pi \nu \delta_i t} \right\}. \end{aligned} \quad (C.10)$$

Usando la propiedad del cedazo, es fácil comprobar que

$$\mathcal{F} \{ f(t) \delta(t - a) \} = f(a) e^{-j2\pi f a}. \quad (C.11)$$

Entonces, (C.10) es igual a

$$\begin{aligned}
\Psi_{ji}(f, \tau) &= T_j \sum_{n=0}^{N_s-1} \sum_{\nu=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} X_i(\nu) e^{-j2\pi\nu\delta_i(mN_gT_i+\tau_i)} e^{-j2\pi\nu\delta_i\tau} \\
&\quad \cdot e^{-j2\pi(f+f_j-f_i-\nu\delta_i)(nT_j+mN_gT_j)} \\
&= T_j \sum_{\nu=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} X_i(\nu) e^{-j2\pi\nu\delta_i(mN_gT_i+\tau_i)} e^{-j2\pi\nu\delta_i\tau} \\
&\quad \cdot e^{-j2\pi(f+f_j-f_i-\nu\delta_i)mN_gT_j} \sum_{n=0}^{N_s-1} e^{-j2\pi(f+f_j-f_i-\nu\delta_i)nT_j}. \tag{C.12}
\end{aligned}$$

Se puede identificar una serie geométrica en (C.12) y su evaluación es directa,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N_s-1} e^{-j2\pi(f+f_j-f_i-\nu\delta_i)nT_j} &= \frac{1 - e^{-j2\pi(f+f_j-f_i-\nu\delta_i)T_jN_s}}{1 - e^{-j2\pi(f+f_j-f_i-\nu\delta_i)T_j}} \\
&= e^{-j\pi(f+f_j-f_i-\nu\delta_i)T_j(N_s-1)} \\
&\quad \cdot \frac{\sin[\pi(f+f_j-f_i-\nu\delta_i)T_jN_s]}{\sin[\pi(f+f_j-f_i-\nu\delta_i)T_j]}.
\end{aligned}$$

Entonces queda

$$\begin{aligned}
\Psi_{ji}(f, \tau) &= T_j \sum_{\nu=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} X_i(\nu) e^{-j2\pi\nu\delta_i(mN_gT_i+\tau_i)} e^{-j2\pi\nu\delta_i\tau} \\
&\quad \cdot e^{-j2\pi(f+f_j-f_i-\nu\delta_i)mN_gT_j} e^{-j\pi(f+f_j-f_i-\nu\delta_i)T_j(N_s-1)} \\
&\quad \cdot \frac{\sin[\pi(f+f_j-f_i-\nu\delta_i)T_jN_s]}{\sin[\pi(f+f_j-f_i-\nu\delta_i)T_j]}. \tag{C.13}
\end{aligned}$$

Reemplazando (C.13) en (C.7), se tiene que el espectro continuo de la señal recibida en la antena j es

$$\begin{aligned}
Y_j(f) &= \sum_{i=1}^{N_t} e^{j(\varphi_j - \varphi_i)} \int_0^\infty \{s_{ji}^\square(f, \tau) * \Psi_{ji}(f, \tau)\} d\tau e^{j2\pi f(mN_g T_j + \tau_j)} + N_j(f) \\
&= \sum_{i=1}^{N_t} e^{j(\varphi_j - \varphi_i)} \int_0^\infty \left\{ s_{ji}^\square(f, \tau) * T_j \sum_{\nu=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} X_i(\nu) e^{-j2\pi\nu\delta_i(mN_g T_i + \tau_i)} \right. \\
&\quad \cdot e^{-j2\pi(f+f_j-f_i-\nu\delta_i)mN_g T_j} e^{-j\pi(f+f_j-f_i-\nu\delta_i)T_j(N_s-1)} \\
&\quad \cdot \frac{\sin[\pi(f+f_j-f_i-\nu\delta_i)T_j N_s]}{\sin[\pi(f+f_j-f_i-\nu\delta_i)T_j]} e^{j2\pi f(mN_g T_j + \tau_j)} \left. \right\} e^{-j2\pi\nu\delta_i\tau} d\tau \\
&\quad + N_j(f). \tag{C.14}
\end{aligned}$$

En la práctica, una implementación de OFDM corresponde a la secuencia de $Y_j(f)$ en (C.14) muestreada en las frecuencias $f = \frac{l}{N_s T}$ donde l es el índice de subportadora con $-\frac{N_s}{2} \leq l \leq \frac{N_s}{2} - 1$. Al muestrear en frecuencia, la integral de convolución pasa a ser discreta y puede ser expresada como una sumatoria con el diferencial df igual a $\frac{1}{T_s} = \frac{1}{N_s T_j}$. El término $s^\square(\delta_j \cdot l, \tau)$ es evaluado en las frecuencias discretas l con $\delta_j = \frac{1}{N_s T_j}$ igual a la separación de las muestras en el receptor. También hay que multiplicar por el intervalo de muestreo δ_j para conservar la energía. Además, se puede asumir que $\tau_j = 0$ y $\varphi_j = 0 \quad \forall j$ porque los efectos de retardo y ruido de fase pueden ser considerados sin pérdida de generalidad como parte del canal. Entonces, considerando todo esto, del muestreo de (C.14) para una frecuencia $l = k$ resulta

$$\begin{aligned}
Y_j(k) &= \sum_{i=1}^{N_t} e^{-j\varphi_i} \int_0^\infty \left[\frac{1}{N_s^2 T_j} \sum_{d=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} s_{ji}^\square(\delta_j(k-d), \tau) \sum_{\nu=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} X_i(\nu) e^{-j2\pi\nu\delta_i(mN_g T_i + \tau_i)} \right. \\
&\quad \cdot e^{-j2\pi\left(\frac{d}{N_s T_j} + f_j - f_i - \nu\delta_i\right)mN_g T_j} e^{-j\pi\left(\frac{d}{N_s T_j} + f_j - f_i - \nu\delta_i\right)T_j(N_s-1)} \\
&\quad \cdot \frac{\sin\left[\pi\left(\frac{d}{N_s T_j} + f_j - f_i - \nu\delta_i\right)T_j N_s\right]}{\sin\left[\pi\left(\frac{d}{N_s T_j} + f_j - f_i - \nu\delta_i\right)T_j\right]} e^{j2\pi m N_g T_j \frac{d}{N_s T_j}} \left. \right] e^{-j2\pi\nu\delta_i\tau} d\tau \\
&\quad + N_j(k). \tag{C.15}
\end{aligned}$$

Si se considera que

$$\frac{d}{N_s T_j} + f_j - f_i - \nu \delta_i = \frac{1}{T_j N_s} \left(d - \nu \frac{T_j}{T_i} + (f_j - f_i) N_s T_j \right),$$

se puede reescribir (C.15)

$$\begin{aligned} Y_j(k) = & \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_t} \int_0^\infty \frac{1}{N_s T_j} \sum_{d=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} s_{ji}^\square(\delta_j(k-d), \tau) \sum_{\nu=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} e^{-j\varphi_i} X_i(\nu) \\ & \cdot e^{-j2\pi T_j(f_j-f_i)(mN_g+\frac{N_s-1}{2})} e^{-j2\pi\nu\delta_i(mN_g T_i+\tau_i-mN_g T_j)} e^{-j\pi\frac{1}{N_s}(d-\nu\frac{T_j}{T_i})(N_s-1)} \\ & \cdot \frac{\sin\left[\pi\left(d-\nu\frac{T_j}{T_i}\right) + \pi(f_j-f_i)T_j N_s\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{N_s}\left(d-\nu\frac{T_j}{T_i}\right) + \pi(f_j-f_i)T_j\right]} e^{-j2\pi\nu\delta_i\tau} d\tau + N_j(k). \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Si se separa el término $\nu = d$ de la segunda sumatoria y se considera que en los rangos de operación típicos $T_j/T_i \approx 1$,

$$\begin{aligned} Y_j(k) = & \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_t} \int_0^\infty \frac{1}{N_s T_j} \sum_{d=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} s_{ji}^\square(\delta_j(k-d), \tau) e^{-j\varphi_i} X_i(d) \\ & \cdot e^{-j2\pi T_j(f_j-f_i)(mN_g+\frac{N_s-1}{2})} e^{-j2\pi d\delta_i(mN_g T_i+\tau_i-mN_g T_j)} \\ & \cdot \frac{\sin[\pi(f_j-f_i)T_j N_s]}{\sin[\pi(f_j-f_i)T_j]} e^{-j2\pi d\delta_i\tau} d\tau \\ & + \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_t} \int_0^\infty \frac{1}{N_s T_j} \sum_{d=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} s_{ji}^\square(\delta_j(k-d), \tau) \sum_{\substack{\nu=-\frac{N_s}{2} \\ \nu \neq d}}^{\frac{N_s}{2}-1} e^{-j\varphi_i} X_i(\nu) \\ & \cdot e^{-j2\pi T_j(f_j-f_i)(mN_g+\frac{N_s-1}{2})} e^{-j2\pi\nu\delta_i(mN_g T_i+\tau_i-mN_g T_j)} e^{-j\pi\frac{1}{N_s}(d-\nu)(N_s-1)} \\ & \cdot \frac{\sin[\pi(d-\nu) + \pi(f_j-f_i)T_j N_s]}{\sin\left[\frac{\pi}{N_s}(d-\nu) + \pi(f_j-f_i)T_j\right]} e^{-j2\pi\nu\delta_i\tau} d\tau + N_j(k) \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

y si se extrae el término $X(k)$,

$$\begin{aligned}
Y_j(k) = & \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_t} \int_0^\infty \frac{1}{N_s T_j} s_{ji}^\square(0, \tau) e^{-j\varphi_i} X_i(k) \\
& \cdot e^{-j2\pi T_j(f_j - f_i)(mN_g + \frac{N_s - 1}{2})} e^{-j2\pi k \delta_i(mN_g T_i + \tau_i - mN_g T_j)} \\
& \cdot \frac{\sin[\pi(f_j - f_i)T_j N_s]}{\sin[\pi(f_j - f_i)T_j]} e^{-j2\pi k \delta_i \tau} d\tau \\
& + \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_t} \int_0^\infty \frac{1}{N_s T_j} \sum_{\substack{d=0 \\ d \neq k}}^{N_s - 1} s_{ji}^\square(\delta_j(k - d), \tau) e^{-j\varphi_i} X_i(d) \\
& \cdot e^{-j2\pi T_j(f_j - f_i)(mN_g + \frac{N_s - 1}{2})} e^{-j2\pi d \delta_i(mN_g T_i + \tau_i - mN_g T_j)} \\
& \cdot \frac{\sin[\pi(f_j - f_i)T_j N_s]}{\sin[\pi(f_j - f_i)T_j]} e^{-j2\pi d \delta_i \tau} d\tau \\
& + \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_t} \int_0^\infty \frac{1}{N_s T_j} \sum_{d=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2} - 1} s_{ji}^\square(\delta_j(k - d), \tau) \sum_{\substack{\nu=-\frac{N_s}{2} \\ \nu \neq d}}^{\frac{N_s}{2} - 1} e^{-j\varphi_i} X_i(\nu) \\
& \cdot e^{-j2\pi T_j(f_j - f_i)(mN_g + \frac{N_s - 1}{2})} e^{-j2\pi \nu \delta_i(mN_g T_i + \tau_i - mN_g T_j)} e^{-j\pi \frac{1}{N_s}(d - \nu)(N_s - 1)} \\
& \cdot \frac{\sin[\pi(d - \nu) + \pi(f_j - f_i)T_j N_s]}{\sin[\frac{\pi}{N_s}(d - \nu) + \pi(f_j - f_i)T_j]} e^{-j2\pi \nu \delta_i \tau} d\tau + N_j(k). \tag{C.18}
\end{aligned}$$

Se puede comprobar fácilmente usando (C.8) que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{N_s T_j} s_{ji}^\square(0, \tau) e^{-j2\pi k \delta_i \tau} d\tau &= \int_0^\infty \frac{1}{N_s T_j} \int_{mN_g T_j}^{(N_s + mN_g)T_j} h_{ji}(t, \tau) dt \\
&\cdot e^{-j2\pi k \delta_i \tau} d\tau \\
&= \int_0^\infty \bar{h}_{ji}(\tau) e^{-j2\pi k \delta_i \tau} d\tau \\
&= \bar{H}_{ji}(k). \tag{C.19}
\end{aligned}$$

Donde $\bar{h}_{ji}(\tau)$ es el promedio temporal durante la transmisión del símbolo de la respuesta al impulso del retardo τ del canal entre j e i . En forma similar, $\bar{H}_{ji}(k)$ es la transformada de Fourier de este promedio evaluada en la frecuencia k .

En forma parecida al Capítulo 3, definimos la función $\lambda_{ji}(d, \nu)$ que representa el efecto en magnitud y fase de la sincronización imperfecta entre el transmisor i y el receptor j de una portadora d a la ν . Su expresión es

$$\lambda_{ji}(d, \nu) = \frac{1}{N_s} e^{-j2\pi T_j(f_j - f_i)(mN_g + \frac{N_s - 1}{2})} e^{-j2\pi \nu \delta_i(mN_g T_i + \tau_i - mN_g T_j)} e^{-j\pi \frac{1}{N_s}(d - \nu)(N_s - 1)} \cdot \frac{\sin[\pi(d - \nu) + \pi(f_j - f_i)T_j N_s]}{\sin\left[\frac{\pi}{N_s}(d - \nu) + \pi(f_j - f_i)T_j\right]} e^{-j\varphi_i}. \quad (\text{C.20})$$

Entonces reemplazando en (C.18) y reordenando, se tiene que la señal recibida en la subportadora k es

$$\begin{aligned} Y_j(k) &= \sum_{i=1}^{N_t} \lambda_{ji}(k, k) \bar{H}_{ji}(k) X_i(k) \\ &+ \frac{1}{N_s T_j} \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{\substack{d=0 \\ d \neq k}}^{N_s - 1} \int_0^\infty s_{ji}^\square(\delta_j(k - d), \tau) e^{-j2\pi d \delta_i \tau} d\tau \\ &\cdot \lambda_{ji}(d, d) X_i(d) \\ &+ \frac{1}{N_s T_j} \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{d=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2} - 1} \sum_{\substack{\nu=-\frac{N_s}{2} \\ \nu \neq d}}^{\frac{N_s}{2} - 1} \int_0^\infty s_{ji}^\square(\delta_j(k - d), \tau) e^{-j2\pi \nu \delta_i \tau} d\tau \\ &\cdot \lambda_{ji}(d, \nu) X_i(\nu) \\ &+ N_j(k). \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Si se extrae el término $d = k$ en la sumatoria triple del segundo sumando y definimos a $I_j(k)$

$$\begin{aligned} I_j(k) &= \frac{1}{N_s T_j} \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{\substack{d=0 \\ d \neq k}}^{N_s - 1} \int_0^\infty s_{ji}^\square(\delta_j(k - d), \tau) e^{-j2\pi d \delta_i \tau} d\tau \\ &\cdot \lambda_{ji}(d, d) X_i(d), \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

se puede reescribir (C.21):

$$\begin{aligned}
Y_j(k) &= \sum_{i=1}^{N_t} \lambda_{ji}(k, k) \bar{H}_{ji}(k) X_i(k) \\
&+ I_j(k) \\
&+ \frac{1}{N_s T_j} \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{\substack{\nu=-\frac{N_s}{2} \\ \nu \neq k}}^{\frac{N_s}{2}-1} \int_0^\infty s_{ji}^\square(0, \tau) e^{-j2\pi\nu\delta_i\tau} d\tau \\
&\cdot \lambda_{ji}(k, \nu) X_i(\nu) \\
&+ \frac{1}{N_s T_j} \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{\substack{d=-\frac{N_s}{2} \\ d \neq k}}^{\frac{N_s}{2}-1} \sum_{\substack{\nu=-\frac{N_s}{2} \\ \nu \neq d}}^{\frac{N_s}{2}-1} \int_0^\infty s_{ji}^\square(\delta_j(k-d), \tau) e^{-j2\pi\nu\delta_i\tau} d\tau \\
&\cdot \lambda_{ji}(d, \nu) X_i(\nu) \\
&+ N_j(k).
\end{aligned} \tag{C.23}$$

Ahora usando (C.19) podemos definir los términos

$$W_j(k) = \frac{1}{N_s T_j} \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{\substack{\nu=-\frac{N_s}{2} \\ \nu \neq k}}^{\frac{N_s}{2}-1} \bar{H}_{ji}(\nu) \lambda_{ji}(k, \nu) X_i(\nu)$$

y

$$\begin{aligned}
Q_j(k) &= \frac{1}{N_s T_j} \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{\substack{d=-\frac{N_s}{2} \\ d \neq k}}^{\frac{N_s}{2}-1} \sum_{\substack{\nu=-\frac{N_s}{2} \\ \nu \neq d}}^{\frac{N_s}{2}-1} \int_0^\infty s_{ji}^\square(\delta_j(k-d), \tau) e^{-j2\pi\nu\delta_i\tau} d\tau \\
&\cdot \lambda_{ji}(d, \nu) X_i(\nu).
\end{aligned} \tag{C.24}$$

Los términos $I_j(k)$, $W_j(k)$ y $Q_j(k)$ representan la ICI vista en la portadora k producto de la movilidad, la sincronización imperfecta y el efecto conjunto de ambos, respectivamente. Se puede observar que para el caso de canales estáticos $I_j(k)$ y $Q_j(k)$ se hacen cero y $W_j(k)$ es idéntico al término encontrado en (Oberli, 2007). Para el caso de sincronización perfecta, $W_j(k)$ se hace cero y sólo $I_j(k)$ representa la ICI producto de la movilidad. El término $Q_j(k)$ modela el efecto conjunto producido cuando existen ambos tipos de ICI.

Así, tenemos que la señal recibida en la subportadora k de la rama j es

$$Y_j(k) = \sum_{i=1}^{N_t} \lambda_{ji}(k, k) \bar{H}_{ji}(k) X_i(k) + I_j(k) + W_j(k) + Q_j(k) + N_j(k). \quad (\text{C.25})$$

Al agrupar todas las señales $Y_j(k)$ en forma vectorial y usando notación matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} Y_1(k) \\ Y_2(k) \\ \vdots \\ Y_{N_r}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11}(k, k) \bar{H}_{11}(k) & \lambda_{12}(k, k) \bar{H}_{12}(k) & \cdots & \lambda_{1N_t}(k, k) \bar{H}_{1N_t}(k) \\ \lambda_{21}(k, k) \bar{H}_{21}(k) & \lambda_{22}(k, k) \bar{H}_{22}(k) & \cdots & \lambda_{2N_t}(k, k) \bar{H}_{2N_t}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{N_r1}(k, k) \bar{H}_{N_r1}(k) & \lambda_{N_r2}(k, k) \bar{H}_{N_r2}(k) & \cdots & \lambda_{N_rN_t}(k, k) \bar{H}_{N_rN_t}(k) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \\ \vdots \\ X_{N_t}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_1(k) \\ I_2(k) \\ \vdots \\ I_{N_r}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_1(k) \\ W_2(k) \\ \vdots \\ W_{N_r}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1(k) \\ Q_2(k) \\ \vdots \\ Q_{N_r}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1(k) \\ N_2(k) \\ \vdots \\ N_{N_r}(k) \end{bmatrix} \quad (\text{C.26})$$

O simplemente

$$\mathbf{Y}(k) = \bar{\mathbf{C}}(k) \cdot \mathbf{X}(k) + \mathbf{I}(k) + \mathbf{W}(k) + \mathbf{Q}(k) + \mathbf{N}(k) \quad (\text{C.27})$$

En que la matriz $\bar{\mathbf{C}}(k)$ tiene por elementos (i, j) a $\lambda_{ji}(k, k) \bar{H}_{ji}(k)$ y los vectores de ICI y ruido corresponden a la agrupación de los términos respectivos.