PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DE CHILE

FACULTAD DE FÍSICA
INSTITUTO DE FÍSICA

COSMOLOGÍA DEPENDIENTE DE LA ESCALA

Revisión de los problemas de la Constante Cosmológica y de la constante de Hubble

por

FELIPE ANDRÉS CANALES CONTRERAS

Tesis presentada a la Facultad de Física de la
Pontificia Universidad Católica de Chile para
optar al grado académico de Magíster en Física

Profesor guía: Marcelo Loewe
Profesor co-guía: Benjamin Koch
Profesor corrector: Máximo Bañados
Profesor corrector: Alberto Faraggi

Noviembre, 2023
Santiago, Chile
© 2023, Felipe Andrés Canales Contreras

© 2023, Felipe Andrés Canales Contreras

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica que acredita al trabajo y a su autor.

AGRADECIMIENTOS

Mucho del interés que tengo por entender nuestro mundo es debido a la motivación que me dieron mis padres cuando yo era pequeño. Esto llevó a mis estudios en el área académica de Licenciatura en Astronomía y Magíster en Física, que no solo están más alejado de la lógica del mercado que el área profesional, sino que también entregan herramientas y habilidades muy útiles en muchos aspectos de la vida. Es por ello que debo agradecer a Erika, Miguel, y también a Danilo, Camila y a mi familia en general.

Por las enseñanzas, acompañamiento, paciencia durante mi trabajo y el tiempo invertido en discutir distintos tópicos de la física, estoy agradecido de los profesores guía Benjamin y Marcelo. También un agradecimiento especial a Ignacio por su apoyo y ayuda durante los primeros años de la licenciatura, que resultaron los más complicados.

Las experiencias universitarias han sido bastante agradables gracias a la compañía de mis amigos que me acompañaron en experiencias lúdicas. También fueron de apoyo para adquirir nuevos conocimientos. Gracias a Fernando, Juan, Leonardo, Cristóbal, Carlos, Karen, Loreto, Francisca, Javiera, Rodrigo, Sebastián, Felipe, Daniela, Javiera, Anthony, Alexis, Gonzalo, Diego y Antonia.

Los momentos de distensión con actividades dentro y fuera del área académica siempre han sido situaciones muy agradables. Por las conversaciones, la motivación y momentos de entretenimiento agradezco a Tania, Rebeca, Daniela, Isidora, Monserrat, Sofía, Laura, Javiera, Sebastián, Isabel, Amelia, Laura, Sofía, Martín y Facundo.

También expreso agradecimientos a mis amigos de infancia Víctor, Diego, Francisco, Ignacio, Roberto y Jaime, por todos los momentos vividos.

Este trabajo de tesis fue parcialmente financiado por el proyecto FONDECYT 1170107, etapa 2020 desde 01 de septiembre al 31 de diciembre 2020.

Índice general

AGRADECIMIENTOS **3**

ÍNDICE DE FIGURAS **6**

RESUMEN **7**

1. Introducción **8**

I. Problema de la Constante Cosmológica **9**

2. Cosmología clásica con Λ **10**
2.1. Universos de Friedman 10
2.2. Ecuaciones de Campo de Einstein para el vacío del universo 10
2.3. Universo inflacionario 11
2.4. Determinación observacional de Λ: Observaciones astronómicas 14

3. Energía de vacío en Teoría Cuántica de Campos **15**
3.1. Cuantización canónica 15
3.2. Energía de vacío en segunda cuantización 16
3.3. Determinación experimental de la energía de punto cero: Efecto Casimir . . 19
3.4. Determinación teórica de la energía de punto cero 19
3.5. Discrepancia en el valor de la energía de vacío 20

4. Gravedad dependiente de la escala **22**
4.1. Acción efectiva dependiente de la escala 22
4.2. Acción efectiva dependiente de la escala para gravedad 23
4.3. Evolución del universo inflacionario dependiente de la escala 24
4.4. Deflación del problema de la Constante Cosmológica 25

II. Tensión de la constante de Hubble **28**

5. Cosmología ΛCDM **29**
5.1. Evolución del universo en el modelo ΛCDM 29
5.1.1. Universo dominado por radiación 32
5.1.2. Universo dominado por materia 32
5.1.3. Universo dominado por Λ 32
5.2. Determinación de H_0 a partir de observaciones del universo temprano . . . 33
5.3. Determinación de H_0 a partir de observaciones del universo local 33

6. Cosmología ΛCDM dependiente de la escala **35**
6.1. Evolución del universo según ΛCDM modificado con la escala 35

7. Conclusiones **39**

A. Anexo I: Variación de la acción efectiva de gravedad pura dependiente de la escala **40**

Bibliografía **47**

Índice de figuras

4.1. Evolución de $G\Lambda$ en el tiempo 26
4.2. Espacio de parámetros ζ y N_e que explican en mayor medida el problema de la Constante Cosmológica 27

5.1. Evolución del factor de escala respecto al tiempo para la cosmología ΛCDM 31
5.2. Evolución de los parámetros de densidad Ω_{r}, Ω_{m} y Ω_{Λ} respecto al corrimiento al rojo z para la cosmología ΛCDM 31

6.1. Error porcentual de $H(t_{\mathrm{CMB}})$ dado por el modelo ΛCDM modificado con la escala respecto a $H(t_{\mathrm{CMB}})$ dado por las observaciones del Fondo Cósmico de Microondas 38

RESUMEN

En este trabajo de tesis se busca presentar algunos resultados que permitan guiar a la solución de dos de los grandes problemas de la cosmología moderna: el problema de la Constante Cosmológica y la tensión de la constante de Hubble.

El primer problema consiste en que la predicción teórica para el valor de la densidad de energía del vacío es 10^{120} veces mayor que la densidad de energía del vacío observada, mientras que el segundo problema se debe a la discrepancia que hay para el valor de la constante de Hubble dada por dos mediciones distintas.

Para guiar a las soluciones de los problemas, se plantea una acción de gravedad Einstein-Hilbert, incorporando efectos cuánticos al considerar tal acción, como una acción efectiva con acoples gravitacionales dependientes de la escala de renormalización.

Se encuentra que considerar acoples gravitacionales dependientes de la escala puede explicar un factor de 10^{66} de diferencia entre la energía de vacío observada y la teórica en el problema de la Constante Cosmológica, mientras que considerar acoples gravitacionales dependientes de la escala tiene el potencial de reducir la tensión de la constante de Hubble.

1. Introducción

A comienzo del siglo XX comenzaron a desarrollarse dos teorías que serían los pilares fundamentales de las teorías de la física moderna. Estas son la Mecánica Cuántica y la Relatividad. La Relatividad Especial y Relatividad General, que describen los fenómenos a altas velocidades y a la gravedad como consecuencia de la curvatura del espacio-tiempo respectivamente, han sido comprobadas a escalas astronómicas en múltiples ocasiones [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Por otro lado, la mecánica cuántica, que incluye una indeterminación intrínseca de las variables mecánicas, describe de buena manera los fenómenos físicos a escalas atómicas.

En un intento de poseer una teoría que explicara la creación y aniquilación de partículas, se estableció la Teoría Cuántica de Campos, la cual incorpora los principios de la Mecánica Cuántica y la Relatividad Especial. Las teorías derivadas de la Teoría Cuántica de Campos, como la Teoría Electrodébil y la Cromodinámica Cuántica son muy precisas en explicar los fenómenos y experimentos realizados en el área. Estás teorías explican tres de las fuerzas fundamentales de la naturaleza. La cuarta fuerza fundamental, la gravedad, en cambio, descrita por la Relatividad General es una teoría clásica.

Dentro de este panorama general, existen dos grandes problemas en la cosmología moderna que podrían apuntar al desencuentro entre la Relatividad General y la Teoría Cuántica de Campos. Por un lado, tenemos al problema de la Constante Cosmológica, y por otro lado, a la tensión de la constante de Hubble.

El problema de la Constante Cosmológica hace referencia a posibles concepciones erróneas de lo que es el vacío y de los efectos que puede tener su densidad de energía a escalas cosmológicas. Desde el descubrimiento de la expansión acelerada del universo, se le ha intentado dar una explicación a este fenómeno, por medio de la energía del espacio vacío. Desde la Teoría Cuántica de Campos se puede predecir un valor, el cual discrepa dramáticamente de lo observado.

Por otro lado, la tensión de la constante de Hubble hace referencia a que distintos métodos de medir la constante de Hubble no llegan a acuerdo cuando se consideran los errores de las mediciones. Un valor de la constante de Hubble lo entregan las observaciones de las velocidades de recesión de galaxias en el universo local (observaciones del universo tardío), y otro valor es obtenido a partir de observaciones del Fondo Cósmico de Microondas asumiendo la cosmología ΛCDM (observaciones del universo temprano).

Esta tesis presenta dos partes, una para tratar el problema de la Constante Cosmológica y otra para tratar la tensión de Hubble. En cada parte se describirá el marco teórico, se presentará el problema y finalmente se propondrá una forma de guiar a la solución.

Parte I.

Problema de la Constante Cosmológica

2. Cosmología clásica con Λ

2.1. Universos de Friedman

Una de las hipótesis principales de la cosmología moderna es el Principio Cosmológico, el cual describe al universo en escalas de tamaño suficientemente grandes como homogéneo e isotrópico. Bajo esas consideraciones se propone la métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), que respeta invariancia traslacional y rotacional en el espacio. El elemento de línea asociado a esta métrica en coordenadas esféricas es [7]

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a(t)^2\left(\frac{1}{1-\kappa r^2}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\,\mathrm{sen}^2(\theta)d\phi^2\right) \tag{2.1}$$

donde $a(t)$ es el factor de escala del universo y κ es la curvatura espacial. Un valor de $\kappa = 1$ representa un universo con geometría esférica, $\kappa = 0$ es un universo plano, mientras que $\kappa = -1$ describe un universo con geometría hiperbólica. Para lo que sigue se asumirá esta métrica considerando $\kappa = 0$, fundamentado en las observaciones cosmológicas [8].

2.2. Ecuaciones de Campo de Einstein para el vacío del universo

El principio de covariancia general nos permite escribir las Ecuaciones de Campo de Einstein de la Teoría de la Relatividad, no solo con un tensor de energía-momentum que describe la materia y la energía usual, sino también con un término extra que sea proporcional al tensor métrico. Así todas las soluciones matemáticas están consideradas

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} \tag{2.2}$$

donde la constante de proporcionalidad Λ es la llamada Constante Cosmológica.

Si el término con Λ se considera como aporte al contenido de materia y energía del universo, tiene sentido definir un tensor de energía-momentum para este término con Constante Cosmológica

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}g_{\mu\nu}\right) = \frac{8\pi G}{c^4}(T_{\mu\nu} + T^{\Lambda}_{\mu\nu}) \tag{2.3}$$

De esta manera se tiene que el tensor de energía-momentum total presenta dos contribuciones, energía-materia usual y la Constante Cosmológica

$$T^{\mathrm{tot}}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + T^{\Lambda}_{\mu\nu} \tag{2.4}$$

Este tensor de energía-momentum asociado a la Constante Cosmológica tiene la forma de un fluido perfecto y define una densidad de energía constante, invariante de Lorentz, que es intrínseca al espacio, ya que la cantidad de energía aumentará o disminuirá según se expanda o se contraiga el espacio, y dado que no está asociada a materia, se puede asociar a energía del espacio vacío. Esta energía produce una presión negativa que fuerza al universo a expandirse aceleradamente, y presenta una ecuación de estado de energía oscura

$$\rho_\Lambda = -T_0^{\Lambda 0} = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \qquad\qquad P_\Lambda = T_1^{\Lambda 1} = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G} = -\rho_\Lambda \tag{2.5}$$

De las Ecuaciones de Campo de Einstein, considerando la métrica FLRW (2.1), para un universo vacío (sin una contribución de un tensor de energía-momentum usual) y sin curvatura espacial, se deduce la ecuación de Friedman

$$\frac{\dot{a}(t)^2}{a(t)^2} = \frac{\Lambda c^2}{3} \tag{2.6}$$

La solución para esta ecuación diferencial es

$$a(t) = a_0 e^{t\sqrt{\Lambda c^2/3}} \tag{2.7}$$

que predice un crecimiento exponencial de las distancias en el universo, tal como se esperaría para una sustancia que presente una presión negativa.

2.3. Universo inflacionario

La cosmología ΛCDM (ver sección 5.1) provee un entendimiento base para la historia del universo, la formación de estructuras a gran escala y la expansión acelerada del universo actual. Sin embargo, existen problemas que este modelo no puede solucionar, como lo son la naturaleza de la energía oscura y las específicas condiciones iniciales en las cuales tuvo origen el universo, tanto en las perturbaciones de densidad primordial, como en el valor muy cercano a cero que se mide para la curvatura espacial κ para el universo actual.

Las observaciones cosmológicas del Fondo Cósmico de Microondas y la estructura a gran escala muestran que zonas muy alejadas del universo que no pudieron estar conectadas causalmente según la cosmología ΛCDM, presentan distribuciones de densidades, temperaturas y sobredensidades casi independientes de la escala, una situación típica de un sistema en equilibrio termodinámico. Es extremadamente poco probable que el universo se haya originado de condiciones tan específicas como lo es estar en equilibrio termodinámico.

La hipótesis de inflación propuesta por A. Guth [9] postula un período de crecimiento acelerado en el universo primigenio, previo a la época dominada por radiación, que da una explicación a observaciones de la curvatura espacial muy cercano a un universo espacialmente plano, y expande el horizonte causal por encima del largo de Hubble, permitiendo

el equilibrio termodinámico en zonas del universo que actualmente están muy alejadas.

Para entender cómo la curvatura espacial evoluciona en el tiempo se considera el parámetro de densidad asociado a curvatura espacial (5.6)

$$\frac{d}{dt}\Omega_\kappa(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\kappa c^2}{\dot{a}(t)^2}\right) = -\frac{2\kappa c^2 \ddot{a}(t)}{\dot{a}(t)^3} = -\frac{2\ddot{a}(t)}{\dot{a}(t)}\Omega_\kappa(t) \tag{2.8}$$

La ecuación describe que, para un universo en expansión acelerada ($\dot{a}(t) > 0$, $\ddot{a}(t) > 0$), el parámetro de densidad asociado a la curvatura espacial evoluciona acercándose a cero para cualquier signo de κ.

Por otro lado, los eventos que están conectados causalmente son eventos que permiten compartir información por medio de la luz o por medio de cualquier otro mecanismo con velocidad de propagación de la información menor que la velocidad de la luz. En el caso de la luz, el intervalo de un fotón es nulo

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 dr^2 = 0 \tag{2.9}$$

La distancia que separa un punto de inicio hasta un punto final en el recorrido de la luz en un universo de Friedman está dada por la siguiente expresión

$$D(t_1, t_0) = \int_{t_1}^{t_0} \frac{c}{a(t)} dt = \int_{\ln(a_1)}^{\ln(a_2)} \frac{c}{\dot{a}}\, d\ln(a) \tag{2.10}$$

lo que define un horizonte causal. En un universo en expansión desacelerada (como en las épocas dominadas por radiación y materia) el integrando $1/\dot{a}$ decrece hacia el pasado, por lo que hay una distancia finita recorrida por la luz desde el origen. Sin embargo, para el período de inflación, el crecimiento exponencialmente acelerado del universo permite que esta distancia recorrida sea arbitrariamente grande.

Una descripción efectiva de la época de inflación de crecimiento exponencial se puede obtener considerando un universo vacío con Constante Cosmológica en las Ecuaciones de Campo de Einstein (2.2). Luego, la solución (2.7) predice un crecimiento exponencial de las distancias en el universo. Sin embargo, esta manera de reproducir inflación no ofrece un mecanismo que ponga fin al proceso inflacionario y dé comienzo a la época del universo dominada por radiación.

En un modelo simple de inflación se puede considerar un campo escalar mínimamente acoplado a gravedad, que presente un potencial, acoplado también a campos de materia. A este campo se le denomina inflatón

$$S = \int \left[\frac{Rc^4}{16\pi G} - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) + \mathcal{L}_{\text{mat}} + \mathcal{L}_{\text{int}}\right]\sqrt{-g}\, d^4x \tag{2.11}$$

Las ecuaciones de movimiento para el campo métrico están dadas por

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\left[T^{\phi}_{\mu\nu} + T^{\text{mat}}_{\mu\nu}\right] = \frac{8\pi G}{c^4}\left[\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \left(\frac{1}{2}\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi + V(\phi)\right)g_{\mu\nu} + T^{\text{mat}}_{\mu\nu}\right] \tag{2.12}$$

mientras que la ecuación de movimiento para el inflatón es

$$\Box\phi - \frac{dV}{d\phi} = -\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{int}}}{\delta\phi} \tag{2.13}$$

Considerando la métrica FLRW (2.1), las ecuaciones de movimiento para (2.12) y (2.13) están dadas, respectivamente, por

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^4}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + Vc^2 + \rho_{\text{mat}}c^2\right) \tag{2.14}$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'c^2 = F[\phi, g_{\mu\nu}, ...] \tag{2.15}$$

donde H es la función de Hubble definida en (5.4). Un crecimiento del universo con gran aceleración $\ddot{a} \gg 0$, se da si se cumple la condición

$$\varepsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} + 1 \ll 1 \tag{2.16}$$

Si tenemos una evolución del universo inflacionario dominado por la dinámica del campo inflacionario, esto es, el término cinético y potencial del campo inflacionario tienen un mayor aporte a la densidad de energía que los campos de materia, entonces la ecuación anterior (2.16) se puede reescribir usando (2.14) y (2.15)

$$\varepsilon \approx \frac{3\dot{\phi}^2}{\dot{\phi}^2 + 2Vc^2} \ll 1 \tag{2.17}$$

La condición anterior implica que $\dot{\phi}^2 \ll Vc^2$, por lo que la mayor parte de la energía está contenida en el potencial del campo inflacionario

$$H^2 \approx \frac{8\pi G}{3c^2}V \tag{2.18}$$

lo que implica una presión negativa $P = T^{\phi 1}_{1} \approx -V$, tal como se esperaría para un universo en expansión acelerada.

La ruptura de la condición (2.17) ($\dot{\phi}^2 \not\ll Vc^2$) puede llevar al fin de la expansión acelerada y, por lo tanto, al fin de inflación. Términos de interacción en la densidad lagrangiana $\mathcal{L}_{\text{int}}$ permiten procesos físicos en los cuales la energía de las excitaciones del campo inflacionario puede transferirse a los demás campos de materia, creando las partículas del modelo estándar y, así, conducir a un universo dominado por radiación. Este proceso es conocido como recalentamiento [10].

2.4. Determinación observacional de Λ: Observaciones astronómicas

El modelo ΛCDM (ver sección 5.1) describe la dinámica de la expansión de las distancias en el universo, determinada por las densidades de energía de cada una de sus componentes. Las observaciones de las anisotropías del Fondo Cósmico de Microondas [8] junto con las observaciones de cúmulos de galaxias [11] y las mediciones de brillo de supernovas de tipo Ia [12] que determinan la aceleración del universo, también restringen los valores de los parámetros de densidad de energía de las componentes del universo Ω_{r}, Ω_{m} y Ω_Λ y el valor de la constante de Hubble H_0. Para el modelo ΛCDM sin curvatura espacial, las observaciones entregan valores $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_{\mathrm{m}} - \Omega_{\mathrm{r}} = 0{,}69$ y $H_0 = 67{,}4$ km s^{-1} Mpc^{-1}. Esto determina el valor de la Constante Cosmológica efectiva

$$\Lambda_{\mathrm{efe}} = \frac{3\Omega_\Lambda {H_0}^2}{c^2} = 1{,}08 \cdot 10^{-52}\ \mathrm{m}^{-2} = 4{,}32 \cdot 10^{-66} (\hbar c)^2\ \mathrm{eV}^2 \tag{2.19}$$

Por lo que la densidad de energía del vacío asociada a Λ, según (2.5) es

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} = 5{,}22 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{J/m}^3 = 2{,}48 \cdot 10^{-10} (\hbar c)^{-3}\ \mathrm{eV}^4 \tag{2.20}$$

Introducir la Constante Cosmológica en la Ecuaciones de Campo de Einstein permite describir la expansión acelerada del universo observada desde 1998 [13, 14]; sin embargo, esta descripción es efectiva, es decir, describe los fenómenos observados sin dar una explicación más fundamental de por qué el universo está en expansión acelerada, o de otra forma, no da una explicación básica a qué es la energía oscura.

3. Energía de vacío en Teoría Cuántica de Campos

3.1. Cuantización canónica

Teoría Cuántica de Campos describe a los sistemas físicos como estados cuánticos que pertenecen a un espacio de Fock ($\mathcal{F}$), el cual está definido como la suma de productos tensoriales de espacios de Hilbert de una partícula ($\mathcal{H}$)

$$\mathcal{F} = |0\rangle \oplus \mathcal{H} \oplus (\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}) \oplus ... \tag{3.1}$$

donde $|0\rangle$ es el vacío algebraico y representa ausencia de partículas. Esta estructura permite describir sistemas físicos con un número variable de partículas. Para expresar esto en un lenguaje matemático, se definen los operadores de creación ($\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}$) y de aniquilación ($\hat{a}_{\vec{p}}$), que crean y destruyen estados de partículas con momentum definido, es decir, actúan sobre el estado de vacío de la siguiente manera

$$(\hat{a}^\dagger_{\vec{p}1})^{n1}(\hat{a}^\dagger_{\vec{p}2})^{n2}... \, |0\rangle = \sqrt{n1_{\vec{p}1}!n2_{\vec{p}2}!...} \, \left|n1_{\vec{p}1}, n2_{\vec{p}2}, ...\right\rangle \tag{3.2a}$$

$$(\hat{a}_{\vec{p}1})^{n1}(\hat{a}_{\vec{p}2})^{n2}... \, \left|n1_{\vec{p}1}, n2_{\vec{p}2}, ...\right\rangle = \sqrt{n1_{\vec{p}1}!n2_{\vec{p}2}!...} \, |0\rangle \tag{3.2b}$$

Esta estructura es la misma que presenta un oscilador armónico en mecánica cuántica de una partícula. El formalismo de cuantización canónica describe a cada una de las partículas como las excitaciones de sus propios campos, los cuales se comportan como osciladores armónicos cuánticos en cada punto del espacio.

Por medio de la transformada de Fourier de los operadores de creación y aniquilación se definen los operadores de campo

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \frac{1}{(2E_{\vec{p}})^{1/2}} (\hat{a}_{\vec{p}} \, e^{ipx/\hbar} + \hat{a}^\dagger_{\vec{p}} \, e^{-ipx/\hbar}) \, d^3p \tag{3.3}$$

los cuales crean y destruyen partículas en eventos definidos. Los operadores de campo tienen asociado un momento conjugado

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} \tag{3.4}$$

En el formalismo de cuantización canónica, el proceso de cuantización viene dado por establecer relaciones de conmutación a tiempos iguales entre el operador de campo y el operador momento conjugado asociado

$$[\hat{\phi}(t,\vec{x}),\hat{\pi}(t,\vec{y})] = i\hbar c\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \tag{3.5}$$

lo que implica que los operadores de creación y aniquilación deben cumplir la siguiente relación de conmutación para bosones

$$[\hat{a}_{\vec{p}},\hat{a}^{\dagger}_{\vec{q}}] = \delta^3(\vec{p}-\vec{q}) \tag{3.6}$$

mientras que para fermiones, los operadores de creación y aniquilación cumplen una relación de anticonmutación

$$\{\hat{a}_{\vec{p}},\hat{a}^{\dagger}_{\vec{q}}\} = \delta^3(\vec{p}-\vec{q}) \tag{3.7}$$

En teorías no interactuantes, donde la densidad lagrangiana no contiene términos de tres o más campos, el estado fundamental de la teoría es el vacío algebraico $|0\rangle$; sin embargo, para teorías interactuantes el estado fundamental de la teoría $|\Omega\rangle$, en general, no coincide con el vacío algebraico. En teorías interactuantes se puede separar la densidad lagrangiana en dos partes, una densidad lagrangiana libre, la cual va a contener términos cinéticos y de masa, y otra parte interactuante, la cual va a contener términos donde se mezclan los campos

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathrm{L}} + \mathcal{L}_{\mathrm{I}} \tag{3.8}$$

Para la densidad hamiltoniana de la teoría se tiene [15]

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathrm{L}} + \mathcal{H}_{\mathrm{I}} \tag{3.9}$$

3.2. Energía de vacío en segunda cuantización

Para determinar de forma aproximada uno de los aportes a la energía de vacío se considera la densidad lagrangiana de la parte libre de un campo escalar real de masa m, donde las interacciones se desprecian

$$\mathcal{L}_{\mathrm{L}} = -\frac{1}{2}\hbar^2c^2\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2c^4\phi^2 \tag{3.10}$$

el momento conjugado asociado es

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} = \hbar^2c^2\partial_0\phi \tag{3.11}$$

La densidad hamiltoniana de la parte libre de la teoría estará dada por la transformada de Legendre de la densidad lagrangiana

$$\mathcal{H}_{\mathrm{L}} = \pi\partial_0\phi - \mathcal{L}_L = \frac{1}{2}\hbar^2c^2(\partial_0\phi)^2 + \frac{1}{2}\hbar^2c^2(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2c^4\phi^2 \tag{3.12}$$

por lo que el hamiltoniano de la teoría es el siguiente

$$\hat{H}_{\mathrm{L}} = \int \hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{L}}\, d^3x = \int \left(\frac{1}{2}\hbar^2c^2(\partial_0\hat{\phi})^2 + \frac{1}{2}\hbar^2c^2(\nabla\hat{\phi})^2 + \frac{1}{2}m^2c^4\hat{\phi}^2\right) d^3x \tag{3.13}$$

La expresión anterior se puede simplificar reemplazando el operador de campo (3.3), utilizando la identidad para la delta de Dirac $\delta^3(\vec{p}-\vec{q}) = \int \frac{e^{-i(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{x}/\hbar}}{(2\pi\hbar)^3}\, d^3x$ y la relación para la energía relativista ${E_{\vec{p}}}^2 = \vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4$. Se encuentra la siguiente expresión

$$\hat{H}_{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}\int E_{\vec{p}}\, (\hat{a}_{\vec{p}}\, \hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}} + \hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}}\, \hat{a}_{\vec{p}})\, d^3p \tag{3.14}$$

Usualmente en la literatura, en este punto, se introduce el ordenamiento normal de operadores, el cual es una prescripción para cambiar el orden de los operadores de creación y aniquilación. Así, las expresiones se escriben siempre con todos los operadores de creación $\hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}}$ a la izquierda y con los operadores de aniquilación $\hat{a}_{\vec{p}}$ a la derecha

$$N[\hat{H}_{\mathrm{L}}] = \frac{1}{2}\int E_{\vec{p}}\, (N[\hat{a}_{\vec{p}}\, \hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}}] + N[\hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}}\, \hat{a}_{\vec{p}}])\, d^3p = \int E_{\vec{p}}\, \hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}}\, \hat{a}_{\vec{p}}\, d^3p = \int E_{\vec{p}}\, \hat{n}_{\vec{p}}\, d^3p \tag{3.15}$$

donde $\hat{n}_{\vec{p}}$ es el operador número de partículas. Dado que se cumple $\hat{a}_{\vec{p}}\,|0\rangle = 0$, considerar el ordenamiento normal tiene el efecto de anular el valor de expectación del hamiltoniano en el estado de vacío. El introducir este ordenamiento normal no está restringido por las observaciones, ya que, en este contexto, los experimentos de física de partículas solo pueden medir diferencias de energías entre dos estados [16]; sin embargo, en contexto de gravitación, la materia y la energía se pueden detectar por su efecto en la curvatura del espacio-tiempo. Si no se considera el ordenamiento normal en (3.14) se obtiene la siguiente expresión al usar la relación de conmutación (3.6)

$$\hat{H}_{\mathrm{L}} = \int E_{\vec{p}} \left(\hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}}\, \hat{a}_{\vec{p}} + \frac{1}{2}\delta^3(\vec{0})\right) d^3p \tag{3.16}$$

En este hamiltoniano nuevamente se observa la analogía entre campos cuánticos y el oscilador armónico cuántico de una partícula. El valor de expectación del hamiltoniano en el estado fundamental de la teoría es

$$\langle 0|\hat{H}_{\mathrm{L}}|0\rangle = \int E_{\vec{p}} \left(\langle 0|\hat{n}_{\vec{p}}|0\rangle + \frac{1}{2}\delta^3(\vec{0})\right) d^3p = E_0 \tag{3.17}$$

El primer término en el paréntesis se anula dado que se está considerando el valor de expectación del operador de número $\hat{n}_{\vec{p}}$ en el estado de vacío. El segundo término en la integral estará presente siempre, independiente de cual sea el estado considerado para el valor de expectación, por lo que se interpreta como energía del vacío o energía de punto cero (E_0). En el segundo término, la delta se reescribe usando la transformada de Fourier

$$E_0 = \int \frac{1}{2} E_{\vec{p}} \int \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\, d^3x\, d^3p = \iint \frac{E_{\vec{p}}}{2(2\pi\hbar)^3}\, d^3p\, d^3x \tag{3.18}$$

Dado que E_0 es la energía de vacío, lo que está dentro de la integral de volumen representa la densidad de energía del vacío, que en coordenadas esféricas adquiere la siguiente forma

$$\rho_0 = \int \frac{E_{\vec{p}}}{2(2\pi\hbar)^3}\, d^3p = \int_0^\infty \frac{\vec{p}^{\,2}}{4\pi^2\hbar^3} \sqrt{\vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4}\, d|\vec{p}| \tag{3.19}$$

Todos los términos cinéticos y de masa de cada uno de los campos en la densidad lagrangiana aportan a la energía de vacío de manera análoga. Para campos de Dirac

$$\hat{\psi}(x) = \int \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \frac{1}{(2E_{\vec{p}})^{1/2}} \sum_{s=1}^{2} (u_s(p)\hat{a}_{\vec{p},s} e^{ipx/\hbar} + v_s(p)\hat{b}^\dagger_{\vec{p},s} e^{-ipx/\hbar})\, d^3p \tag{3.20a}$$

$$\hat{\bar{\psi}}(x) = \int \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \frac{1}{(2E_{\vec{p}})^{1/2}} \sum_{s=1}^{2} (\bar{u}_s(p)\hat{a}^\dagger_{\vec{p},s} e^{-ipx/\hbar} + \bar{v}_s(p)\hat{b}_{\vec{p},s} e^{ipx/\hbar})\, d^3p \tag{3.20b}$$

el hamiltoniano libre es

$$\hat{H}_{\mathrm{L}} = \int \sum_{s=1}^{2} E_{\vec{p}}\, (\hat{a}^\dagger_{\vec{p},s}\hat{a}_{\vec{p},s} + \hat{b}^\dagger_{\vec{p},s}\hat{b}_{\vec{p},s} - \delta^3(\vec{0}))\, d^3p \tag{3.21}$$

mientras que para campos vectoriales

$$\hat{A}^\mu(x) = \int \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \frac{1}{(2E_{\vec{p}})^{1/2}} \sum_{\lambda=1}^{2} (\varepsilon^\mu_\lambda(p)\hat{a}_{\vec{p},\lambda} e^{ipx/\hbar} + \varepsilon^{\mu *}_\lambda(p)\hat{a}^\dagger_{\vec{p},\lambda} e^{-ipx/\hbar})\, d^3p \tag{3.22}$$

el hamiltoniano libre es

$$\hat{H}_{\mathrm{L}} = \int \sum_{\lambda=1}^{2} E_{\vec{p}}\, (\hat{a}^\dagger_{\vec{p},\lambda}\hat{a}_{\vec{p},\lambda} + \delta^3(\vec{0}))\, d^3p \tag{3.23}$$

De esta manera, la energía de vacío recibirá un aporte de cada uno de los campos

$$\rho_0 = \sum_{i=1}^{N} N_i \int_0^\infty \frac{\vec{p}^{\,2}}{4\pi^2\hbar^3} \sqrt{\vec{p}^{\,2}c^2 + m_i^2c^4}\, d|\vec{p}| \tag{3.24}$$

De esta última ecuación, es claro que la densidad de energía del vacío diverge cuando se consideran todas las escalas de energía en la integral.

Cuando se consideran las interacciones, la energía de punto cero depende de una manera muy complicada de los parámetros de la densidad lagrangiana, y usualmente se asume $\langle\Omega|\hat{H}|\Omega\rangle = 0$, ya que solo diferencias de energía con el estado fundamental pueden ser medidas. Sin embargo, la energía de punto cero proviene del hecho que los campos presentan una naturaleza cuántica al cumplir relaciones de conmutación o anticonmutación, por lo que una estimación de la energía de punto cero puede ser calculada con (3.24).

3.3. Determinación experimental de la energía de punto cero: Efecto Casimir

En 1948, H. Casimir predijo la existencia de una fuerza sobre una placa contenida en una caja cúbica vacía de lado L [17]. La placa es paralela a dos de los lados de la caja, a una distancia a de un lado de la caja y a una distancia $L-a$ del otro lado de la caja. La fuerza se genera producto de la diferencia de energía de punto cero de las ondas electromagnéticas a cada lado de la placa.

De (3.24), la energía de punto cero para fotones dentro de la caja es

$$\rho_{0,\mathrm{EM}} = \frac{\hbar c}{16\pi^3}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty f(k/k_m)\left|\vec{k}\right| dk_x\, dk_y\, dk_z \tag{3.25}$$

En esta última expresión, se introduce un regulador $f(k/k_m)$ en la integral, el cual es cercano a 1 para $k/k_m \ll 1$, y cercano a 0 para $k/k_m > 1$, donde k_m es una escala propia del sistema. Este corte en la integral por medio de un regulador se introduce con el propósito de representar una situación más realista, en donde se suprimen modos de extrema alta frecuencia, ya que estos modos atravesarán o serán absorbidos por las paredes, por lo que no son relevantes para la energía de punto cero.

La energía de punto cero en cada lado de la caja dependerá del regulador. Sin embargo, la fuerza sobre la placa no dependerá del regulador, y está dada por

$$F = -\frac{dE}{da} = -\frac{\pi^2\hbar c}{240a^4}L^2 \tag{3.26}$$

Este resultado fue comprobado experimentalmente en 1997 [18].

3.4. Determinación teórica de la energía de punto cero

Como se puede ver de (3.24), la energía de punto cero de los campos diverge. Sin embargo, el problema de obtener infinito en algunos cálculos en teoría de campos se puede tratar asignando un corte en los intervalos de integración o introduciendo reguladores, como se vio para el efecto Casimir (ver sección 3.3). Realizar un corte en el intervalo de integración o introducir reguladores necesita de una escala característica del sistema, la

cual segrega el intervalo en el que las consideraciones físicas son válidas, del intervalo en el que algunos de los supuestos físicos no son válidos y la teoría falla en describir la realidad.

Con el fin de estimar numéricamente el valor de la energía de punto cero de los campos, se puede plantear un corte en la integral a alguna escala de energía X

$$\rho_0 \sim \int_0^X \frac{\vec{p}^{\,2}}{4\pi^2\hbar^3}\sqrt{\vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4}\; d|\vec{p}| \tag{3.27}$$

Para el contexto en el que se ha calculado la energía de punto cero (Teoría Cuántica de Campos), se asume un espacio-tiempo plano, es decir, la gravedad no juega un rol relevante. Sin embargo, no se espera que esto último sea válido para cualquier escala de energía. La escala de energía a la que se espera que gravedad comience a tener un rol importante en el contexto de física de partículas es la escala de Planck [16]

$$E_{\mathrm{P}} = m_{\mathrm{P}}c^2 = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} = 1{,}96 \cdot 10^9 \text{ J} = 1{,}22 \cdot 10^{19} \text{ GeV} \tag{3.28}$$

Para describir los fenómenos de la naturaleza a escalas de energía transplanckianas sería necesario poseer una teoría cuántica de la gravedad consistente.

Considerando la escala de Planck como punto de corte, la densidad de energía del vacío estará dada por

$$\rho_0 = \int_0^{m_{\mathrm{P}}c} \frac{\vec{p}^{\,2}}{4\pi^2\hbar^3}\sqrt{\vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4}\; d|\vec{p}| \approx \frac{{m_{\mathrm{P}}}^4c^5}{16\pi^2\hbar^3} \tag{3.29}$$

La aproximación de (3.29) considera el hecho que la masa de Planck es mucho mayor que la masa de cualquier partícula conocida $m_{\mathrm{P}} \gg m_i$. Esta densidad de energía de punto cero recién calculada es la suma sobre los modos normales del campo hasta el punto de corte

$$\rho_0 \approx \frac{{m_{\mathrm{P}}}^4c^5}{16\pi^2\hbar^3} = \frac{c^7}{16\pi^2G^2\hbar} = 2{,}96 \cdot 10^{111} \text{ J/m}^3 = 1{,}41 \cdot 10^{111}(\hbar c)^{-3} \text{ eV}^4 \tag{3.30}$$

3.5. Discrepancia en el valor de la energía de vacío

La energía del vacío observada (2.20) (asociada con la Constante Cosmológica efectiva (2.19)) presenta dos contribuciones: una dada por la energía de punto cero de los campos y otra dada por la contribución de un término de Constante Cosmológica como parámetro en la densidad lagrangiana (Λ_0)

$$\rho_\Lambda = \rho_0 + \rho_{\Lambda 0} \tag{3.31}$$

Por una parte se tienen los valores de densidad de energía del vacío dado por el modelo ΛCDM junto con observaciones astronómicas ρ_Λ. Por otra parte, se tiene la densidad de

energía del vacío obtenido de Teoría Cuántica de Campos ρ_0 (3.30) como resultado de la energía de punto cero de los campos. Al comparar la densidad de energía de punto cero de los campos con la densidad de energía de vacío observada, se encuentra que discrepan enormemente [19]

$$\frac{\rho_0}{\rho_\Lambda} \approx \frac{c^7}{16\pi^2 G^2 \hbar} \cdot \frac{8\pi G}{\Lambda c^4} = \frac{c^3}{2\pi\hbar} \cdot \frac{1}{G\Lambda} = 5{,}67 \cdot 10^{120} \tag{3.32}$$

Es poco probable que esta gran discrepancia sea entendida considerando ajustes específicos de los parámetros de la densidad lagrangiana que están presentes en ρ_0 y $\rho_{\Lambda 0}$. Este problema es conocido como el problema de la Constante Cosmológica.

4. Gravedad dependiente de la escala

4.1. Acción efectiva dependiente de la escala

Muchas de las teorías cuánticas de campos involucran integrales divergentes asociadas a diagramas de Feynman que representan amplitudes de probabilidad de procesos físicos. Para obtener resultados finitos y, por lo tanto, con sentido físico, se introducen primero procedimientos de regularización tales como regularización por corte en alguna escala en las integrales de momentum, regularización Pauli-Villars, regularización dimensional, etc., para luego introducir procedimientos de renormalización en los cuales se sustraen los términos divergentes para obtener resultados finitos. Estos procedimientos introducen naturalmente una escala de momentum (o de energía k) de la cual dependen los observables físicos y ciertos parámetros de la densidad lagrangiana, como masas y "constantes" de acoplamiento.

Para generalizar las ideas de dependencia en la escala en teoría de campos, K. Wilson plantea que se puede considerar los parámetros de la densidad lagrangiana como cantidades dependientes de la escala. Esto lleva a un conjunto de ecuaciones diferenciales llamadas ecuaciones del grupo funcional de renormalización, las cuales describen cómo cambian las constantes de acoplamiento cuando se explora la teoría a distintas escalas de energía.

El procedimiento de Wilson se introduce sobre el formalismo de cuantización funcional, aplicado en el funcional generatriz

$$Z[J] = Z_0 \int \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int \mathcal{L} - J\phi \; d^4x\right\}\mathcal{D}\phi \tag{4.1}$$

donde Z_0 es una constante de normalización.

El procedimiento se realiza en dos pasos, esquemáticamente esto es [20]:

1. En el espacio de momentum se corta la integral del funcional generatriz hasta una escala de momentum X, y se separan las componentes del campo de baja frecuencia (ϕ_{bf}) de las de alta frecuencia (ϕ_{af})

$$Z = \prod_{p<X} \int \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int \mathcal{L}[\phi_p] \; d^4x\right\}\mathcal{D}\phi_p = \iint \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int \mathcal{L}[\phi_{\text{bf}}, \phi_{\text{af}}] \; d^4x\right\}\mathcal{D}\phi_{\text{af}} \; \mathcal{D}\phi_{\text{bf}} \tag{4.2}$$

donde ϕ_{af} solo es distinta de cero para $bX \leq p < X$ ($b < 1$), mientras que ϕ_{bf} solo es distinta de cero para $p < bX$. Luego se integran las componentes con alta frecuencia del campo obteniéndose una densidad lagrangiana efectiva

$$Z = \iint \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int \mathcal{L}[\phi_{\rm bf}, \phi_{\rm af}]\, d^4x\right\}\mathcal{D}\phi_{\rm af}\, \mathcal{D}\phi_{\rm bf} = \int \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int \mathcal{L}_{\rm efe}[\phi]\, d^4x\right\}\mathcal{D}\phi \tag{4.3}$$

Con la densidad lagrangiana efectiva se puede explorar las funciones de correlación y los elementos de la matriz S, los cuales involucran integrales hasta el momentum de corte X.

2. Se reescalan los momenta para restaurar la escala de momentum k sobre la cual se estaba integrando originalmente $p \to p' = bp$. Esto produce transformaciones de escalamiento del campo.

Aplicaciones sucesivas de este procedimiento describirán cómo cambian las constantes de acoplamiento y la densidad lagrangiana de la teoría con el cambio de la escala, es decir, describe la física de manera efectiva a distintas escalas de energía.

El método de Wilson es una de las maneras con la cual se puede introducir dependencia en la escala en la integral funcional. Otra manera de introducir límites de momentum es considerar un corte suave en el funcional generatriz [21]

$$Z_k[J] = Z_0 \int \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int (\mathcal{L} - J\phi)\, d^4x - \Delta S_k\right\}\mathcal{D}\phi \tag{4.4}$$

donde ΔS_k, que actúa como un regulador infrarrojo, es una función que puede ser elegida con libertad, pero debe cumplir con $\Delta S_k \to 0$ para $k \to 0$. El funcional generatriz $Z[J]$ define el funcional generatriz para las funciones de Green conectadas $W[J]$

$$Z_k[J] = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}W_k[J]\right\} \tag{4.5}$$

y su transformada de Legendre da como resultado la acción efectiva dependiente de la escala

$$\Gamma_k[\phi] = W_k[J] - \int J\phi\, d^4x - \Delta S_k[\phi] \tag{4.6}$$

la cual incorpora todas las correcciones cuánticas en las funciones de correlación. Aquí cabe destacar que k es el parámetro a través de la trayectoria del grupo de renormalización, que permite moverse por el espacio de teoría, entre una acción clásica S $(k \to \infty)$, hasta la acción efectiva usual sin dependencia en la escala Γ_0 $(k \to 0)$. Esta descripción guía a ecuaciones que describen la manera en que corren los acoples con la escala.

4.2. Acción efectiva dependiente de la escala para gravedad

Para tratar de entender el problema de la Constante Cosmológica en el universo inflacionario, se plantea gravedad como una teoría de campos efectiva, considerando una

acción de Einstein-Hilbert efectiva con constantes de acoplamiento gravitacionales G_k y Λ_k dependientes de la escala en un escenario de gravedad pura [22]

$$\Gamma_k[g_{\mu\nu}] = \int \frac{R - 2\Lambda_k}{2\kappa_k}\sqrt{-g}\, d^4x \tag{4.7}$$

donde $\kappa = 8\pi G/c^4$ es la constante de Einstein. Este tipo de escenarios ha sido estudiado en diversos artículos [23, 24, 25]. En este punto es necesario establecer la escala de renormalización k en términos de las variables físicas del sistema en consideración $k(x, ...)$ [26, 27]. Esta relación no es única y puede ser fijada por la intuición física del problema que se está tratando. Si se consideran acoples dependientes de la escala, y la escala, a su vez, dependiente de las coordenadas, entonces por transitividad, los acoples dependen de las coordenadas: $G(k(x)) = G(x)$, $\Lambda(k(x)) = \Lambda(x)$.

Se varía la acción efectiva respecto al campo métrico

$$\delta\Gamma_k = \delta \int \frac{R - 2\Lambda_k}{2\kappa_k}\sqrt{-g}\, d^4x = 0 \tag{4.8}$$

lo cual implica las siguientes ecuaciones de movimiento (ver anexo I)

$$G_{\mu\nu} = -\Lambda_k g_{\mu\nu} - \Delta t_{\mu\nu} \tag{4.9}$$

donde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein y el tensor introducido por la dependencia de los acoples gravitacionales en la escala está dado por [26, 27]

$$\Delta t_{\mu\nu} = G_k(g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)\frac{1}{G_k} \tag{4.10}$$

4.3. Evolución del universo inflacionario dependiente de la escala

En la sección anterior (sección 4.2) se consideraron acoples gravitacionales dependientes de la escala de renormalización k, lo cual llevó a ecuaciones de movimiento con acoples dependientes de las coordenadas. Sin embargo, por las variables de las cuales depende la métrica, la única variable relevante es la coordenada temporal t. Así, las dos únicas ecuaciones independientes de (4.9) se pueden escribir como

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\Lambda c^2}{3} + \frac{\dot{a}\dot{G}}{aG} \tag{4.11a}$$

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2\ddot{a}}{a} = \Lambda c^2 + \frac{2\dot{a}\dot{G}}{aG} - \frac{2\dot{G}^2}{G^2} + \frac{\ddot{G}}{G} \tag{4.11b}$$

Estas son las ecuaciones de Friedman modificadas y no representan un sistema de ecuaciones diferenciales cerrado, ya que el sistema de ecuaciones diferenciales cuenta con dos ecuaciones y tres incógnitas: $a(t)$, $G(t)$ y $\Lambda(t)$.

Considerando el sistema físico que se plantea, esto es, un universo vacío (sin materia usual), una señal tipo luz no detecta ninguna densidad de energía de fondo, por lo cual se impone la condición de energía nula [28] para el tensor de energía-momentum efectivo

$$T^{\text{efe}}_{\mu\nu}\ell^\mu\ell^\nu = \Delta t_{\mu\nu}\ell^\mu\ell^\nu = 0 \tag{4.12}$$

donde ℓ^μ es un vector tipo luz que satisface la ecuación geodésica, $\ell^\mu = \dfrac{C_0}{a}\left(1, \dfrac{1}{a}, 0, 0\right)$, y C_0 es una constante. Esta condición completa el sistema de ecuaciones diferenciales. La ecuación (4.12) está dada explícitamente por

$$\frac{2\dot{G}^2}{G^2} - \frac{\ddot{G}}{G} + \frac{\dot{a}\dot{G}}{aG} = 0 \tag{4.13}$$

La solución del sistema de ecuaciones diferenciales (4.11) y (4.13) está dada por

$$a(t) = a_0 e^{t\sqrt{\Lambda_0 c^2/3}} \tag{4.14a}$$

$$G(t) = \frac{G_0}{1+\zeta a(t)} \tag{4.14b}$$

$$\Lambda(t) = \Lambda_0 \frac{1+2\zeta a(t)}{1+\zeta a(t)} \tag{4.14c}$$

donde a_0, G_0, Λ_0 y ζ son constantes de integración arbitrarias, de las cuales ζ actúa como parámetro de control de dependencia en la escala. Si el parámetro $\zeta \to 0$, se recupera la solución clásica en la cual los acoples gravitacionales son constantes. La solución también describe un universo inflacionario en expansión acelerada dada por la solución para el factor de escala (4.14a).

4.4. Deflación del problema de la Constante Cosmológica

El problema de la Constante Cosmológica está parametrizado por el término $1/G\Lambda$ (3.32). Dado que ahora se tiene un escenario en el que las "constantes" de acoplamiento gravitacionales dependen del tiempo, se puede entender el problema de la Constante Cosmológica con esta variación en el tiempo del parámetro $G(t)\Lambda(t)$, considerando que los cálculos teóricos hacen referencia a una época temprana del universo, preinflacionaria, mientras que las determinaciones observacionales hacen referencia al universo actual.

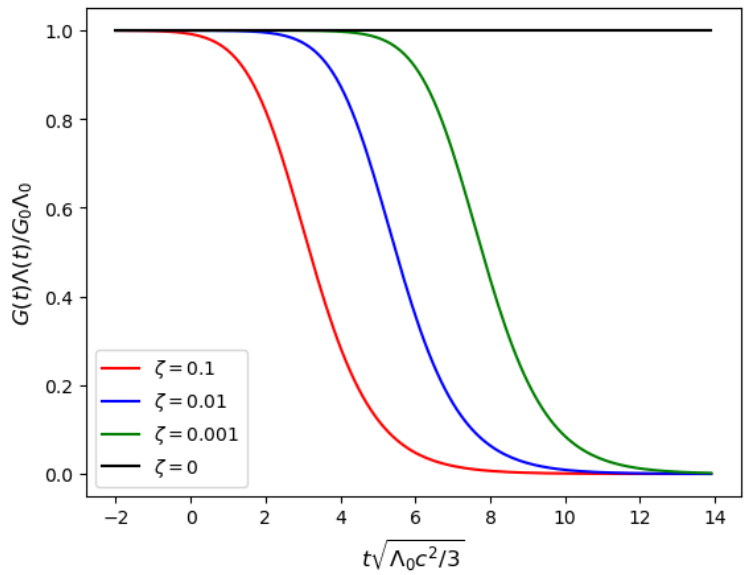

Figura 4.1.: El gráfico muestra la evolución en el tiempo del término $G(t)\Lambda(t)$ dado por las soluciones (4.14b) y (4.14c). Este gráfico muestra cómo varía en el tiempo el término que parametriza el problema de la Constante Cosmológica.

Se impone condiciones sobre las funciones de la solución (4.14). Al inicio de inflación ($t_i = 0$) imponemos

$$a(t_i) = 1 \tag{4.15}$$

$$\frac{2\pi\hbar}{c^3} G(t_i)\Lambda(t_i) \approx 1 \tag{4.16}$$

esta última relación determina que no hay discrepancia entre el valor teórico y el observacional de la energía de vacío relativos a esa época del universo.

Para el fin de inflación se impone

$$G(t_f) \approx G_N \tag{4.17}$$

$$\frac{2\pi\hbar}{c^3} G(t_f)\Lambda(t_f) \approx 5 \cdot 10^{-66} \tag{4.18}$$

donde en (4.17) G_N es la constante de gravitación universal actual y el valor de (4.18) está dado por la magnitud de la partícula más masiva del modelo estándar (cuark top).

Como se vio en la sección 2.3, inflación da una explicación a la planitud del universo si se considera

$$\frac{a(t_f)}{a(t_i)} = e^{N_e} \tag{4.19}$$

donde $N_e \geq 60$ [29]. De las ecuaciones (4.15), (4.16) y (4.17) se encuentra

$$a_0 = 1 \tag{4.20a}$$

$$t_f = N_e \sqrt{\frac{3}{\Lambda_0 c^2}} \tag{4.20b}$$

$$G_0 = G_N(1 + \zeta e^{N_e}) \tag{4.20c}$$

$$\Lambda_0 = \frac{(1+\zeta)^2}{G_N(1+2\zeta)(1+\zeta e^{N_e})} \tag{4.20d}$$

Con estas condiciones impuestas, la evolución de las soluciones para inflación queda dependiendo solo de dos parámetros ζ y N_e. Para obtener una región en el espacio de estos dos parámetros que cumplan las condiciones anteriormente mencionadas, se permite un rango de valores sobre la condición (4.18)

$$5 \cdot 10^{-71} < \frac{2\pi\hbar}{c^3} G(t_f)\Lambda(t_f) < 5 \cdot 10^{-61} \tag{4.21}$$

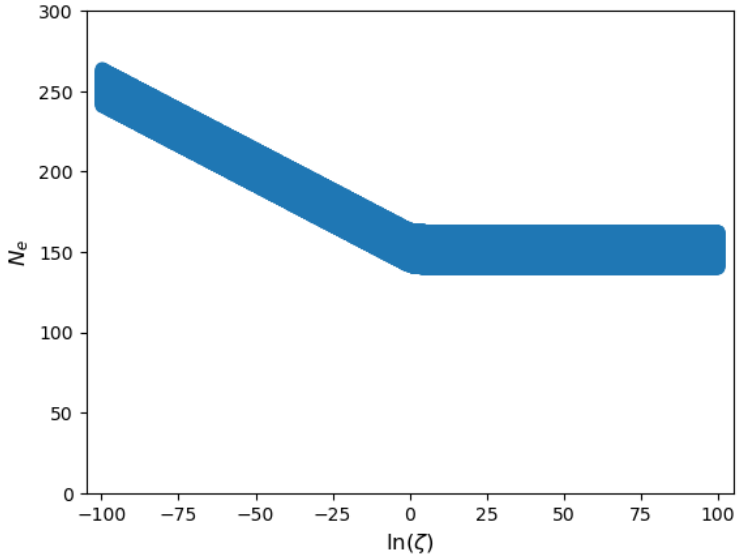

Figura 4.2.: Valores de ζ y N_e que cumplen las condiciones impuestas para el problema de la Constante Cosmológica.

De la figura 4.2 se observa que la condición (4.21) no contradice el límite observacional $N_e \geq 60$ para obtener un universo observable plano.

Parte II.

Tensión de la constante de Hubble

5. Cosmología ΛCDM

5.1. Evolución del universo en el modelo ΛCDM

La cosmología estándar es descrita por el modelo ΛCDM (Constante Cosmológica y materia oscura fría), que da una explicación a observaciones astronómicas, como la expansión acelerada, la cantidad de helio que se formó en el universo temprano, y cómo las fluctuaciones de densidad primordiales evolucionan hasta formar las estructuras a gran escala del universo que se observan actualmente. ΛCDM también determina el crecimiento del factor de escala, considerando el principio cosmológico a grandes escalas y la métrica de Friedman (2.1). También considera la existencia de tres componentes como contenido energético en el universo (radiación, materia y energía de vacío) descritos, en promedio, como fluidos perfectos, es decir, presentan un tensor de energía-momentum dado por

$$T^{\mu\nu} = \left(\frac{\rho + P}{c^2}\right) U^\mu U^\nu + P g^{\mu\nu} \tag{5.1}$$

donde U^μ es la 4-velocidad del centro de momentum del fluido. El tensor de energía-momentum de cada una de esas tres componentes se conserva independientemente

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu}_{\text{rad}} = \nabla_\mu T^{\mu\nu}_{\text{mat}} = \nabla_\mu T^{\mu\nu}_{\Lambda} = 0 \tag{5.2}$$

Las tres componentes energéticas que llenan el universo se describen a continuación:

- Radiación: Esta categoría incluye fotones y partículas relativistas de baja masa como los neutrinos. Su ecuación de estado es $P_{\text{r}} = \dfrac{\rho_{\text{r}}}{3}$, que junto con la ecuación de conservación (5.2) determinan la densidad de energía de radiación $\rho_{\text{r}}(t) = \dfrac{\rho_{\text{r}0}}{a(t)^4}$.

- Materia: Aquí se considera materia no relativista, toda la materia bariónica y la materia oscura fría. Para el universo actual $\rho_{\text{m}} \gg P_{\text{m}}$, por lo que se puede despreciar la presión de materia $P_{\text{m}} \approx 0$, aunque para el remoto pasado del universo esta situación podría no haber sido cierta. La densidad de energía asociada a materia, deducida de la ecuación de conservación y ecuación de estado es $\rho_{\text{m}}(t) = \dfrac{\rho_{\text{m}0}}{a(t)^3}$.

- Constante Cosmológica: Energía intrínseca del espacio asociada con la constante Λ. La ecuación de estado de esta energía, obtenida en (2.5), es $P_\Lambda = -\dfrac{\Lambda c^4}{8\pi G} = -\rho_\Lambda$.

De las Ecuaciones de Campo de Einstein (2.2) para este modelo, se obtiene la ecuación de Friedman

$$\frac{\dot{a}(t)^2}{a(t)^2} + \frac{\kappa c^2}{a(t)^2} = \frac{8\pi G}{3c^2}\left(\frac{\rho_{\mathrm{r}0}}{a(t)^4} + \frac{\rho_{\mathrm{m}0}}{a(t)^3} + \rho_\Lambda\right) \tag{5.3}$$

donde $\rho_{\mathrm{i}0}$ es la densidad de la componente del fluido i en la edad actual del universo t_{hoy}, ya que el factor de escala actual se define como la unidad $a(t_{\mathrm{hoy}}) = 1$. Se define la función de Hubble

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \tag{5.4}$$

Evaluar este parámetro en el tiempo actual, define la llamada constante de Hubble $H(t_0) = H_0 = h \cdot 100\ \mathrm{km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}}$.

En (5.3) se pueden identificar tres tipos de términos, en el lado izquierdo se tiene un término dinámico y un término de curvatura espacial, mientras que al lado derecho se tiene términos de contenido energético. La relación entre el término dinámico y los términos energéticos va a depender de qué valor tome la constante de curvatura espacial κ. Un universo crítico (con curvatura espacial nula $\kappa = 0$) define una densidad de energía crítica en el universo según (5.3)

$$\rho_c(t) = \frac{3c^2 H(t)^2}{8\pi G} \tag{5.5}$$

Se definen los parámetros de densidad $\Omega_i = \rho_i/\rho_c$ para radiación, materia, Constante Cosmológica y curvatura espacial

$$\Omega_i(t) = \frac{8\pi G \rho_i(t)}{3c^2 H(t)^2} \qquad \Omega_\Lambda(t) = \frac{\Lambda c^2}{3H(t)^2} \qquad \Omega_\kappa(t) = \frac{\kappa c^2}{\dot{a}(t)^2} = \frac{\kappa c^2}{a(t)^2 H(t)^2} \tag{5.6}$$

Se puede reescribir ecuación (5.3) en términos de estos parámetros

$$1 + \Omega_\kappa(t) = \Omega_{\mathrm{r}}(t) + \Omega_{\mathrm{m}}(t) + \Omega_\Lambda(t) \tag{5.7}$$

Según lo anterior, hay cinco constantes a determinar para el universo actual, H_0, $\Omega_{\mathrm{r}0}$, $\Omega_{\mathrm{m}0}$, Ω_Λ y Ω_κ; sin embargo, solo cuatro de ellas son parámetros libres, ya que la ecuación de clausura (5.7) fija la restante. Con las observaciones del Fondo Cósmico de Microondas se infieren valores para los parámetros $h = 0{,}674$, $\Omega_{\mathrm{m}0}h^2 = 0{,}143$, $\Omega_{\Lambda 0}h^2 = 0{,}315$, $\Omega_{\kappa 0}h^2 = 4,58 \cdot 10^{-4}$ [8] y $\Omega_{\mathrm{r}0}h^2 = 4{,}15 \cdot 10^{-5}$ [30]. A partir de tales parámetros y de ecuación (5.3), se obtiene la dinámica del universo y se encuentran las épocas de dominio de cada uno de los contenidos del universo. Los códigos en lenguaje de programación Python de las soluciones numéricas pueden ser encontrados en [31].

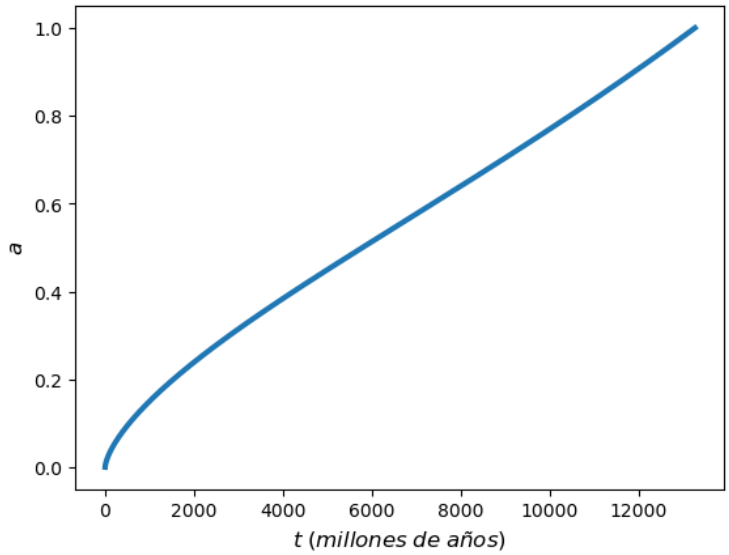

Figura 5.1.: Evolución del factor de escala en el tiempo para el modelo ΛCDM, asumiendo un valor $H_0 = 73{,}84$ km s^{-1} Mpc^{-1}.

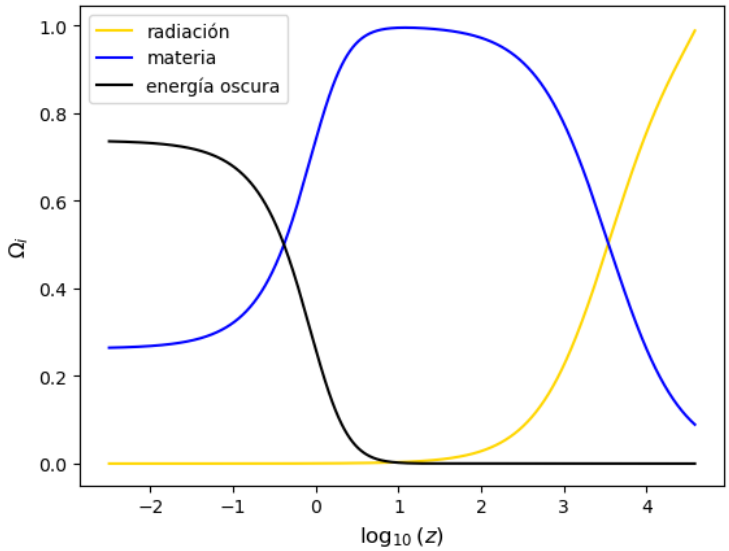

Figura 5.2.: Evolución de los parámetros de densidad $\Omega_{\rm i}$ para el modelo ΛCDM respecto al corrimiento al rojo dado por $z = \frac{1}{a} - 1$. Se asume un valor $H_0 = 73{,}84$ km s^{-1} Mpc^{-1}. En dorado para radiación $\Omega_{\rm r}$, en azul para materia $\Omega_{\rm m}$ y en negro para Constante Cosmológica Ω_Λ.

La solución numérica de (5.3) se muestra en la figura 5.1, de la cual se infiere un tiempo para el universo actual $t_0 = 16100$ millones de años desde el momento que $a = 0$. En la figura 5.2 se observan tres épocas distintas en el universo, definidas por la componente energética dominante en el universo. La época de igualdad entre dos componentes define la transición entre el dominio de un elemento sobre los otros. El universo comienza dominado por radiación, luego domina materia, y actualmente domina la Constante Cosmológica.

5.1.1. Universo dominado por radiación

En la época del universo dominada por radiación, la ecuación de Friedman es

$$\frac{\dot{a}(t)^2}{a(t)^2} = \frac{8\pi G}{3c^2}\frac{\rho_{\mathrm{r0}}}{a(t)^4} \tag{5.8}$$

y el factor de escala en esta época evoluciona de acuerdo a

$$a(t) = \left(\sqrt{\frac{32\pi G\rho_{\mathrm{r0}}}{3c^2}}t + {a_0}^2\right)^{1/2} \tag{5.9}$$

5.1.2. Universo dominado por materia

En la época del universo dominada por materia, la ecuación de Friedman es

$$\frac{\dot{a}(t)^2}{a(t)^2} = \frac{8\pi G}{3c^2}\frac{\rho_{\mathrm{m0}}}{a(t)^3} \tag{5.10}$$

y el factor de escala en esta época se comporta como

$$a(t) = \left(\sqrt{\frac{6\pi G\rho_{\mathrm{m0}}}{c^2}}t + {a_0}^{3/2}\right)^{2/3} \tag{5.11}$$

5.1.3. Universo dominado por Λ

En la época del universo dominada por Constante Cosmológica, la ecuación de Friedman es

$$\frac{\dot{a}(t)^2}{a(t)^2} = \frac{\Lambda c^2}{3} \tag{5.12}$$

donde la solución para el factor de escala es

$$a(t) = a_0 e^{t\sqrt{\Lambda c^2/3}} \tag{5.13}$$

5.2. Determinación de H_0 a partir de observaciones del universo temprano

La evolución del factor de escala según el modelo ΛCDM mostrada en la figura 5.1 indica que las distancias en el universo eran menores en tiempos anteriores al actual. Esto implica que tanto las temperaturas como las densidades de la materia y la radiación fueron mayores hacia el pasado, por lo que existió un período al comienzo del universo en el que la temperatura tuvo que ser lo suficientemente alta como para mantener los átomos de hidrógeno ionizados. En este estado, el plasma caliente de protones y electrones interactuaba con los fotones por medio de procesos como la dispersión Thomson. En tiempos posteriores, cuando el plasma se enfrió por debajo de los 3000 K ($z = 1100$), ocurrió el periodo de recombinación, en el cual los electrones libres se unen a los núcleos formando átomos neutros, desacoplando radiación de materia, y permitiendo un camino libre medio para los fotones mucho mayor. Debido a la expansión del universo, esa radiación actualmente se detecta en el rango de las microondas, por lo que se le llama Fondo Cósmico de Microondas.

El Fondo Cósmico de Microondas presenta pequeñas inhomogeneidades de temperatura debido a fluctuaciones de densidad del plasma con el cual interactuaba. Estas fluctuaciones en la densidad del plasma es lo que se conoce como Oscilaciones Acústicas de Bariones, y se ven reflejadas en las estructuras a gran escala del universo actual. Las anisotropías se pueden caracterizar como $\Delta(\vec{x}) = (n(\vec{x}) - \bar{n})/\bar{n}$ [32], donde n y $\bar{n}$ son la densidad y la densidad promedio respectivamente. Luego, el espectro de potencias $P(k)$ está definido a través de la relación

$$\langle \hat{\Delta}(\vec{k})\hat{\Delta}(\vec{k}')\rangle = (2\pi)^3 P(k)\delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \tag{5.14}$$

donde $\hat{\Delta}(\vec{k})$ es la transformada de Fourier de $\Delta(\vec{x})$, y el promedio en el lado izquierdo de la ecuación es un promedio sobre toda la distribución.

Análisis del Fondo Cósmico de Microondas determinan el valor de la Constante de Hubble [8]

$$H_{0,\mathrm{CMB}}^{\Lambda\mathrm{CDM}} = 67{,}4 \pm 0{,}5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \tag{5.15}$$

El subíndice se debe a que este valor es obtenido del Fondo Cósmico de Microondas, mientras que el superíndice se debe a que ese valor de H_0 asume la cosmología ΛCDM.

5.3. Determinación de H_0 a partir de observaciones del universo local

La evolución del universo dado por la cosmología ΛCDM describe que la función de Hubble H (5.4) varía en el tiempo. Sin embargo, si se observa el universo local, la función de Hubble no cambia significativamente, por lo que el valor de la constante de Hubble también puede ser inferido observando la velocidad de recesión de objetos en el universo

local. El método consiste en recolectar datos de velocidades y distancias a galaxias para generar un ajuste para la siguiente relación que considera la ley de Hubble

$$z = \frac{v}{c} = \frac{H_0 D}{c} \tag{5.16}$$

donde z es el corrimiento al rojo, v es la velocidad de recesión y D es la distancia desde la Tierra a los objetos. Se consideró que para velocidades mucho menores que la velocidad de la luz $z \approx v/c$. Esta relación es válida para $DH_0 \ll c$. Las observaciones indican [33]

$$H_{0,\text{local}} = 74{,}0 \pm 1{,}4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \tag{5.17}$$

Al comparar los valores de la constante de Hubble determinada por el Fondo Cósmico de Microondas junto con el modelo ΛCDM y mediciones del universo local, se ve que no hay un intervalo en el que coincidan al considerar sus incertezas observacionales. Esto es conocido como la tensión de la constante de Hubble [34].

6. Cosmología ΛCDM dependiente de la escala

6.1. Evolución del universo según ΛCDM modificado con la escala

Como se vio en la sección 4.2, introducir la escala en los acoples gravitacionales de la acción da como resultado términos extras en las ecuaciones de movimiento respecto a las Ecuaciones de Campo de Einstein de la Relatividad General. Este escenario se puede analizar para intentar entender la tensión de la constante de Hubble.

Ahora se describirán las épocas cosmológicas de dominio de radiación, materia y Constante Cosmológica en este escenario cosmológico dependiente de la escala. La acción del sistema es

$$\Gamma_k[g_{\mu\nu}, ...] = \int \left[\frac{R - 2\Lambda_k}{2\kappa_k} + \mathcal{L}_{\mathrm{M},k} \right] \sqrt{-g}\, d^4x \tag{6.1}$$

La densidad lagrangiana $\mathcal{L}_{\mathrm{M},k}$ va a contener términos que representan todo el contenido energético del universo que no está asociado con energía oscura: campos de radiación, campos de materia, y además términos en la densidad lagrangiana que describan todas las posibles interacciones entre ellos, pudiendo transferir energía de un cierto campo a otro, como los procesos de aniquilación partícula-antipartícula, sin necesariamente conservar el tensor de energía-momentum de cada uno. Esta densidad lagrangiana puede contener constantes de acoplamiento que también dependen de la escala

$$\mathcal{L}_{\mathrm{M},k} = \mathcal{L}_{\mathrm{rad}} + \mathcal{L}_{\mathrm{mat}} + \mathcal{L}_{\mathrm{int},k} \tag{6.2}$$

Variando la acción (6.1) respecto al tensor métrico, se obtienen ecuaciones de movimiento (ver anexo I)

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_k}{c^4} \left(T^{\mathrm{rad}}_{\mu\nu} + T^{\mathrm{mat}}_{\mu\nu} \right) - \Lambda_k g_{\mu\nu} - \Delta t_{\mu\nu} \tag{6.3}$$

El tensor de energía-momentum de materia y energía usuales aparece en las ecuaciones de movimiento producto de agregar una densidad lagrangiana de materia en la acción. El tensor de energía-momentum está definido como

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\mathcal{L}_{\mathrm{M},k}\sqrt{-g})}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{6.4}$$

En este caso, el considerar las interacciones entre los campos da como resultado la no conservación de los tensores de energía-momentum para radiación y materia. Lo anterior implica que las densidades de energía de radiación, materia y energía oscura ya no se comportan como en el modelo ΛCDM

$$\nabla^{\mu} T^{\text{rad}}_{\mu\nu} \neq 0 \quad \rightarrow \quad \rho_r(t) \neq \frac{\rho_{\text{r}0}}{a(t)^4} \tag{6.5a}$$

$$\nabla^{\mu} T^{\text{mat}}_{\mu\nu} \neq 0 \quad \rightarrow \quad \rho_{\text{m}}(t) \neq \frac{\rho_{\text{m}0}}{a(t)^3} \tag{6.5b}$$

$$\nabla^{\mu} T^{\Lambda}_{\mu\nu} \neq 0 \quad \rightarrow \quad \rho_{\Lambda}(t) \neq \rho_{\Lambda 0} \tag{6.5c}$$

Al no tener las ecuaciones de conservación usuales de la cosmología ΛCDM (5.2), el sistema queda indeterminado en su solución. Para la métrica FLRW, las dos ecuaciones independientes de (6.3) y la condición de energía nula no son suficientes para determinar todas las incógnitas del problema: $a(t)$, $G(t)$, $\Lambda(t)$, $\rho_{\text{r}}(t)$ y $\rho_{\text{m}}(t)$.

Se plantea una solución al problema considerando lo siguiente:

- Los efectos de introducir la escala no modifican considerablemente la evolución cosmológica respecto a la cosmología ΛCDM, es decir, el factor de escala y los parámetros de densidad no cambian considerablemente respecto a la cosmología ΛCDM.

- La presión, al igual que en la cosmología ΛCDM, se relaciona con la densidad de energía como $P = \omega\rho$. Donde $\omega = \frac{1}{3}$ para radiación, $\omega = 0$ para materia y $\omega = -1$ para energía oscura.

- Las condiciones iniciales para la solución numérica se fijan con los valores de constantes medidas para el universo local, $a(t_0) = 1$, $\dot{a}(t_0) = H_{0,\text{local}}$ (dado por ecuación (5.17)), $G(t_0) = G_N$, $\Lambda(t_0) = \Lambda_{\text{efe}}$ (dado por ecuación (2.19) pero considerando $H_{0,\text{local}}$) y $\kappa = 0$.

- El valor de $\rho_{\text{r}0}$ se asumirá igual a la cosmología ΛCDM, mientras que $\dot{G}(t_0)$ y $\rho_{\text{m}0}$ se consideraran parámetros libres.

- La solución es aproximada ya que se considera que solo la componente del universo que domina evoluciona determinada por el sistema de ecuaciones diferenciales. Las dos componentes no dominantes evolucionarán de acuerdo a ΛCDM. Por ejemplo, en la época dominada por materia, tanto radiación y energía oscura evolucionarán de igual manera que en ΛCDM, mientras que la densidad de energía asociada a materia evolucionará de acuerdo a las ecuaciones con dependencia en la escala.

- Se resuelven numéricamente tres sistemas de ecuaciones diferenciales. Se comienza con el universo actual, que está dominado por energía oscura. Se hace evolucionar el primer sistema de ecuaciones diferenciales hacia el pasado, hasta que se cumpla la condición $\rho_{\Lambda} = \rho_{\text{m}}$. Luego se considera el segundo sistema de ecuaciones diferenciales hasta que se cumpla la condición $\rho_{\text{m}} = \rho_{\text{r}}$. Finalmente, se considera el tercer sistema de ecuaciones diferenciales

hasta que se cumpla $a = 0$.

- Se impone continuidad en $a(t)$, $G(t)$, $\Lambda(t)$, $\rho_\Lambda(t)$ $\rho_{\rm m}(t)$, $\rho_{\rm r}(t)$.

El sistema de ecuaciones diferenciales a resolver está conformado por: la condición de energía nula (4.12)

$$\frac{\dot{a}(t)\dot{G}(t)}{a(t)G(t)} + \frac{2\dot{G}(t)^2}{G(t)^2} - \frac{\ddot{G}(t)}{G(t)} = 0 \tag{6.6}$$

más dos ecuaciones de Friedman modificadas. Para cada época, las ecuaciones de Friedman modificadas son:

- Para la época dominada por energía oscura

$$\frac{\dot{a}(t)^2}{a(t)^2} = \frac{\Lambda(t)c^2}{3} + \frac{8\pi G(t)}{3c^2}\frac{\rho_{\rm m0}}{a(t)^3} + \frac{8\pi G(t)}{3c^2}\frac{\rho_{\rm r0}}{a(t)^4} + \frac{\dot{a}(t)\dot{G}(t)}{a(t)G(t)} \tag{6.7a}$$

$$\frac{\dot{a}(t)^2}{a(t)^2} + \frac{2\ddot{a}(t)}{a(t)} = \Lambda(t)c^2 - \frac{8\pi G(t)}{c^2}\frac{\rho_{\rm r0}}{3a(t)^4} + \frac{2\dot{a}(t)\dot{G}(t)}{a(t)G(t)} - \frac{2\dot{G}(t)^2}{G(t)^2} + \frac{\ddot{G}(t)}{G(t)} \tag{6.7b}$$

- Para la época dominada por materia

$$\frac{\dot{a}(t)^2}{a(t)^2} = \frac{\Lambda c^2}{3} + \rho_{\rm m}(t) + \frac{8\pi G(t)}{3c^2}\frac{\rho_{\rm r0}}{a(t)^4} + \frac{\dot{a}(t)\dot{G}(t)}{a(t)G(t)} \tag{6.8a}$$

$$\frac{\dot{a}(t)^2}{a(t)^2} + \frac{2\ddot{a}(t)}{a(t)} = \Lambda c^2 - \frac{8\pi G(t)}{c^2}\frac{\rho_{\rm r0}}{3a(t)^4} + \frac{2\dot{a}(t)\dot{G}(t)}{a(t)G(t)} - \frac{2\dot{G}(t)^2}{G(t)^2} + \frac{\ddot{G}(t)}{G(t)} \tag{6.8b}$$

-Para la época dominada por radiación

$$\frac{\dot{a}(t)^2}{a(t)^2} = \frac{\Lambda c^2}{3} + \frac{8\pi G(t)}{3c^2}\frac{\rho_{\rm m0}}{a(t)^3} + \rho_{\rm r}(t) + \frac{\dot{a}(t)\dot{G}(t)}{a(t)G(t)} \tag{6.9a}$$

$$\frac{\dot{a}(t)^2}{a(t)^2} + \frac{2\ddot{a}(t)}{a(t)} = \Lambda c^2 - \frac{8\pi G(t)}{c^2}\frac{\rho_{\rm r}(t)}{3} + \frac{2\dot{a}(t)\dot{G}(t)}{a(t)G(t)} - \frac{2\dot{G}(t)^2}{G(t)^2} + \frac{\ddot{G}(t)}{G(t)} \tag{6.9b}$$

Para un rango de valores de $\dot{G}(t_0)$ y $\rho_{\rm m0}$, se determina el error porcentual entre el valor de $H(t)$ evaluado en el tiempo de emisión del Fondo Cósmico de Microondas dado por este modelo $H_{\rm CMB,mod}$, y el valor determinado observacionalmente para H en el mismo instante $H_{\rm CMB,obs}$. Los códigos en lenguaje de programación Python de las soluciones numéricas pueden ser encontrados en [31].

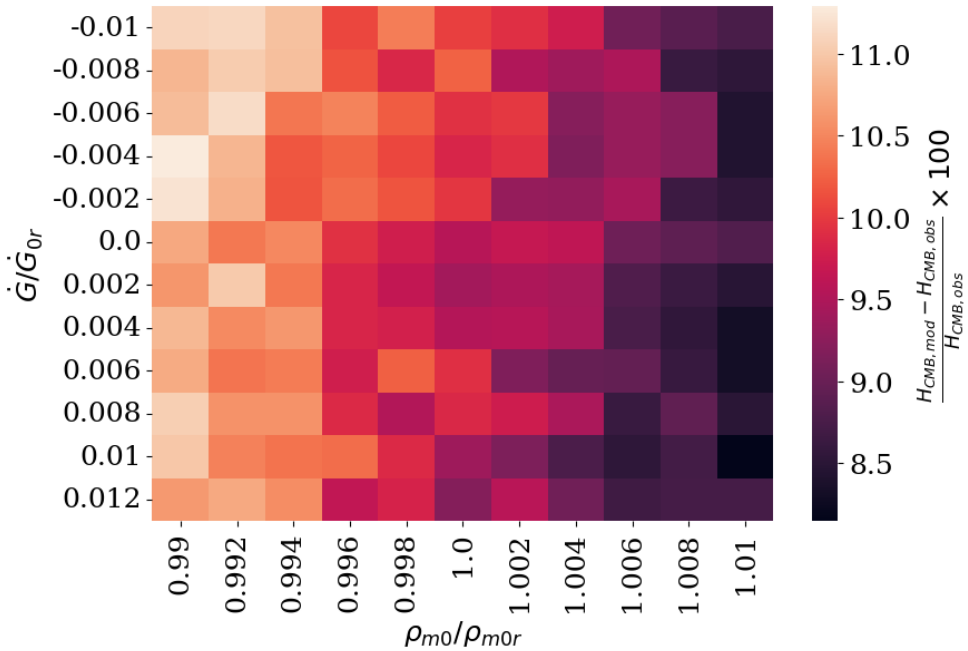

Figura 6.1.: Gráfico que muestra el error porcentual entre $H_{\mathrm{CMB,mod}}$ y $H_{\mathrm{CMB,obs}}$ para distintos valores de $\dot{G}$ y ρ_{m0}. Los parámetros en los ejes son $\dot{G}_{\mathrm{0r}} = 1{,}59 \cdot 10^{-28}\ \mathrm{m^3\ kg^{-1}\ s^{-3}}$ y $\rho_{\mathrm{m0r}} = 2{,}41 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{J\ m^{-3}}$.

En la figura 6.1 se observa que el error entre $H_{\mathrm{CMB,mod}}$ y $H_{\mathrm{CMB,obs}}$ es menor para mayores valores de ρ_{m0}, mientras que no hay una tendencia clara para el rango de valores considerados para $\dot{G}$, por lo que es necesario extender ese rango de valores para determinar que la dependencia en la escala pueda resolver la tensión de Hubble.

7. Conclusiones

En esta tesis se presentan los problemas de la Constante Cosmológica y la tensión de la constante de Hubble. El primero de estos se refiere a la discrepancia entre un valor teórico y un valor experimental para la energía del vacío, mientras que, para el segundo, refiere a la discrepancia entre dos valores observacionales para la constante de Hubble. En ambos problemas se incorporan efectos cuánticos. Para intentar entender tales discrepancias mencionadas, el principal planteamiento es introducir la dependencia en la escala en los acoples gravitacionales: la constante de Newton G_k y la Constante Cosmológica Λ_k en la acción efectiva de gravedad.

Para el problema de la Constante Cosmológica, se puede verificar que al considerar la dependencia en la escala de los acoples gravitacionales, se encuentra que las variables dinámicas del problema dependen fuertemente del tiempo, tal como se esperaría en una época de evolución violenta del universo como lo es inflación. También, se puede entender que el problema de la Constante Cosmológica es un problema de comparar cantidades $(G(t)\Lambda(t))$ en distintos momentos de la evolución del universo. Las observaciones astronómicas apuntan a un momento actual del universo, mientras que la predicción teórica apunta a un momento muy temprano del universo, previo al proceso de inflación cosmológica. Se plantea que esta idea errónea podría ser el origen de la enorme discrepancia para la "constante" Λ.

Respecto a considerar acoples gravitacionales dependientes de la escala para modificar el modelo ΛCDM e intentar entender la tensión de Hubble, los resultados no indican que se pueda reducir la tensión de manera importante para el espacio de parámetros explorado en la figura 6.1. Sin embargo, considerar un espacio de parámetros mayor, se podría encontrar una reducción en la discrepancia para el valor de H_0.

A. Anexo I: Variación de la acción efectiva de gravedad pura dependiente de la escala

Se varía la acción respecto al campo métrico para obtener las ecuaciones de movimiento

$$\delta\Gamma_k = \delta \int \frac{R - 2\Lambda_k}{2\kappa_k}\sqrt{-g}\, d^4x = \int \frac{1}{2\kappa_k}\delta R\sqrt{-g} + \frac{R - 2\Lambda_k}{2\kappa_k}\delta\sqrt{-g}\, d^4x \tag{A.1}$$

Para el primer término dentro de la integral se tiene que

$$\delta R = R_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta} \tag{A.2}$$

El segundo término de la ecuación anterior lo podemos reescribir expandiendo el tensor de Ricci

$$\begin{aligned}\delta R_{\alpha\beta} &= \delta R^{\rho}{}_{\alpha\rho\beta} \\ &= \delta(\partial_\rho \Gamma^{\rho}{}_{\beta\alpha} - \partial_\beta \Gamma^{\rho}{}_{\rho\alpha} + \Gamma^{\rho}{}_{\rho\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\alpha} - \Gamma^{\rho}{}_{\beta\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\alpha}) \\ &= \partial_\rho \delta\Gamma^{\rho}{}_{\beta\alpha} - \partial_\beta \delta\Gamma^{\rho}{}_{\rho\alpha} + \delta\Gamma^{\rho}{}_{\rho\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\alpha} + \Gamma^{\rho}{}_{\rho\sigma}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\alpha} - \delta\Gamma^{\rho}{}_{\beta\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\alpha} - \Gamma^{\rho}{}_{\beta\sigma}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\alpha}\end{aligned} \tag{A.3}$$

Ahora se suma y resta $\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\rho}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\sigma\alpha}$

$$\begin{aligned}\delta R_{\alpha\beta} =& \partial_\rho \delta\Gamma^{\rho}{}_{\beta\alpha} - \partial_\beta \delta\Gamma^{\rho}{}_{\rho\alpha} + \delta\Gamma^{\rho}{}_{\rho\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\alpha} + \Gamma^{\rho}{}_{\rho\sigma}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\alpha} \\ &- \delta\Gamma^{\rho}{}_{\beta\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\alpha} - \Gamma^{\rho}{}_{\beta\sigma}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\alpha} + \Gamma^{\sigma}{}_{\beta\rho}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\sigma\alpha} - \Gamma^{\sigma}{}_{\beta\rho}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\sigma\alpha}\end{aligned} \tag{A.4}$$

Al reorganizar términos y usando la simetría en los índices inferiores de los símbolos de Christoffel

$$\begin{aligned}\delta R_{\alpha\beta} =& \partial_\rho \delta\Gamma^{\rho}{}_{\beta\alpha} + \Gamma^{\rho}{}_{\sigma\rho}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\alpha} - \Gamma^{\sigma}{}_{\beta\rho}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\sigma\alpha} - \Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\rho}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\beta\sigma} \\ &- (\partial_\beta \delta\Gamma^{\rho}{}_{\rho\alpha} + \Gamma^{\rho}{}_{\sigma\beta}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\alpha} - \Gamma^{\sigma}{}_{\rho\beta}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\sigma\alpha} - \Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\beta}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\rho\sigma}) \\ =& \nabla_\rho \delta\Gamma^{\rho}{}_{\beta\alpha} - \nabla_\beta \delta\Gamma^{\rho}{}_{\rho\alpha}\end{aligned} \tag{A.5}$$

Al reemplazar este último resultado en (A.2) se obtiene

$$
\begin{aligned}
\delta R &= R_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta}(\nabla_\rho \delta\Gamma^\rho{}_{\beta\alpha} - \nabla_\beta \delta\Gamma^\rho{}_{\rho\alpha}) = R_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} + \nabla_\rho(g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\rho{}_{\beta\alpha}) - \nabla_\beta(g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\rho{}_{\rho\alpha}) \\
&= R_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} + \nabla_\rho(g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\rho{}_{\beta\alpha} - g^{\alpha\rho}\delta\Gamma^\beta{}_{\beta\alpha}) \\
&= R_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\rho((g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\rho{}_{\beta\alpha} - g^{\alpha\rho}\delta\Gamma^\beta{}_{\beta\alpha})\sqrt{-g}) \\
&= R_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\rho J^\rho
\end{aligned} \tag{A.6}
$$

En la tercera línea se ha usado la relación $\nabla_\rho A^\rho = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\rho(A^\rho\sqrt{-g})$ y se ha definido $J^\rho = \sqrt{-g}(g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\rho{}_{\beta\alpha} - g^{\alpha\rho}\delta\Gamma^\beta{}_{\beta\alpha})$. Para el segundo término de (A.1) se tiene que

$$
\delta\sqrt{-g} = -\frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} \tag{A.7}
$$

Reemplazando (A.6) y (A.7) en (A.1) se obtiene

$$
\begin{aligned}
\delta\Gamma_k &= \int \frac{1}{2\kappa_k}\left(R_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} + \frac{\partial_\rho J^\rho}{\sqrt{-g}}\right)\sqrt{-g} - \frac{R-2\Lambda_k}{4\kappa_k}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}\ d^4x \\
&= \int \frac{1}{\kappa_k}\left(R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2}g_{\alpha\beta} + \Lambda_k g_{\alpha\beta}\right)\frac{\sqrt{-g}}{2}\delta g^{\alpha\beta} + \frac{\partial_\rho J^\rho}{2\kappa_k}\ d^4x
\end{aligned} \tag{A.8}
$$

El término que contiene J^ρ se puede reescribir utilizando integración por partes

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\partial_\rho J^\rho}{2\kappa_k}\ d^4x &= \int \frac{c^4}{16\pi G_k}\partial_\rho((g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\rho{}_{\beta\alpha} - g^{\alpha\rho}\delta\Gamma^\beta{}_{\beta\alpha})\sqrt{-g})\ d^4x \\
&= \int \partial_\rho\left(\frac{c^4\sqrt{-g}}{16\pi G_k}(g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\rho{}_{\beta\alpha} - g^{\alpha\rho}\delta\Gamma^\beta{}_{\beta\alpha})\right)d^4x \\
&\quad - \int \partial_\rho\left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right)(g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\rho{}_{\beta\alpha} - g^{\alpha\rho}\delta\Gamma^\beta{}_{\beta\alpha})\sqrt{-g}\ d^4x
\end{aligned} \tag{A.9}
$$

En la primera integral se usa el teorema de la divergencia produciendo una integral de superficie en los límites de la variedad

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\partial_\rho J^\rho}{2\kappa_k}\ d^4x =& \oint \frac{c^4}{16\pi G_k}(g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\rho{}_{\beta\alpha} - g^{\alpha\rho}\delta\Gamma^\beta{}_{\beta\alpha})n_\rho\sqrt{-g}\ d^3x \\
&- \int \partial_\rho\left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right)g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\rho{}_{\beta\alpha}\sqrt{-g}\ d^4x + \int \partial_\rho\left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right)g^{\alpha\rho}\delta\Gamma^\beta{}_{\beta\alpha}\sqrt{-g}\ d^4x \\
=& 0 + I_1 + I_2
\end{aligned} \tag{A.10}
$$

Al considerar un espacio-tiempo sin frontera, el primer término al lado derecho de (A.10) se anula, ya que la variación del campo se anula en infinito.

El tercer término de (A.10) se puede reescribir usando la relación $\Gamma^{\beta}{}_{\beta\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\alpha\sqrt{-g} = \partial_\alpha \ln\left(\sqrt{-g}\right)$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int \partial_\rho \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right) g^{\alpha\rho}\delta\Gamma^{\beta}{}_{\beta\alpha}\sqrt{-g}\; d^4x \\
&= \int \partial_\rho \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right) g^{\alpha\rho}\delta\left(\partial_\alpha \ln\sqrt{-g}\right)\sqrt{-g}\; d^4x \\
&= \int \partial_\rho \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right) g^{\alpha\rho}\partial_\alpha\left(\delta \ln\sqrt{-g}\right)\sqrt{-g}\; d^4x \\
&= \int \partial_\rho \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right) \partial^\rho\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\delta\sqrt{-g}\right)\sqrt{-g}\; d^4x \\
&= \int \partial^\rho \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right) \partial_\rho\left(-\frac{g_{\mu\nu}}{2}\delta g^{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\; d^4x \\
&= \int -\frac{1}{2}\nabla^\rho \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right) \nabla_\rho\left(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\; d^4x
\end{aligned}
\tag{A.11}
$$

A la derecha de la ecuación (A.11) se agrega convenientemente un término nulo de superficie

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int \partial_\rho \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right) g^{\alpha\rho}\delta\Gamma^{\beta}{}_{\beta\alpha}\sqrt{-g}\; d^4x \\
&= \int -\frac{1}{2}\nabla^\rho \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right) \nabla_\rho\left(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\; d^4x + \oint \frac{1}{2}\nabla^\rho\left(\frac{1}{16\pi G_k}\right) g_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} n_\rho\; d^3x \\
&= \int -\frac{1}{2}\nabla^\rho \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right) \nabla_\rho\left(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\; d^4x + \int \partial_\rho\left(\frac{1}{2}\nabla^\rho\left(\frac{1}{16\pi G_k}\right) g_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\right) d^4x \\
&= \int -\frac{1}{2}\nabla^\rho \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right) \nabla_\rho\left(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\; d^4x + \int \frac{1}{2}\nabla_\rho\left(\nabla^\rho\left(\frac{1}{16\pi G_k}\right) g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\; d^4x \\
&= \int \frac{1}{2}\nabla_\rho\nabla^\rho\left(\frac{1}{16\pi G_k}\right) g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\; d^4x \\
&= \int \frac{G_k}{2\kappa_k} g_{\mu\nu}\nabla^2\left(\frac{1}{G_k}\right)\frac{\sqrt{-g}}{2}\delta g^{\mu\nu}\; d^4x
\end{aligned}
\tag{A.12}
$$

El segundo término de (A.10) se puede reescribir expandiendo los símbolos de Christoffel

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int -\partial_\rho \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right) g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\rho{}_{\beta\alpha}\sqrt{-g}\; d^4x \\
&= \int -\partial_\rho \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right) g^{\alpha\beta}\delta\left(\frac{g^{\rho\sigma}}{2}(\partial_\alpha g_{\sigma\beta} + \partial_\beta g_{\sigma\alpha} - \partial_\sigma g_{\beta\alpha})\right)\sqrt{-g}\; d^4x \\
&= \int -\partial_\rho \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right) g^{\alpha\beta}\delta g^{\rho\sigma}(\partial_\alpha g_{\sigma\beta} + \partial_\beta g_{\sigma\alpha} - \partial_\sigma g_{\beta\alpha})\frac{\sqrt{-g}}{2}\; d^4x \\
&\quad - \int \partial_\rho \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right) g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma}(\partial_\alpha \delta g_{\sigma\beta} + \partial_\beta \delta g_{\sigma\alpha} - \partial_\sigma \delta g_{\beta\alpha})\frac{\sqrt{-g}}{2}\; d^4x \\
&= \int -\partial_\rho \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right) \delta g^{\rho\sigma}(\partial^\beta g_{\sigma\beta} + \partial^\alpha g_{\sigma\alpha} - g^{\alpha\beta}\partial_\sigma g_{\beta\alpha})\frac{\sqrt{-g}}{2}\; d^4x \\
&\quad - \int \partial_\rho \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right) g^{\rho\sigma}\partial^\beta \delta g_{\sigma\beta} + g^{\rho\sigma}\partial^\alpha \delta g_{\sigma\alpha} - g^{\rho\sigma} g^{\alpha\beta}\partial_\sigma \delta g_{\beta\alpha}\frac{\sqrt{-g}}{2}\; d^4x \\
&= \int -\partial_\rho \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right) \left[\delta g^{\rho\sigma}(2\partial^\beta g_{\sigma\beta} - g^{\alpha\beta}\partial_\sigma g_{\beta\alpha}) + g^{\rho\sigma}(2\partial^\beta \delta g_{\sigma\beta} - g^{\alpha\beta}\partial_\sigma \delta g_{\beta\alpha})\right]\frac{\sqrt{-g}}{2}\; d^4x \\
&= \int -\partial_\rho \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right) \left[2\partial^\beta g_{\sigma\beta}\delta g^{\rho\sigma} - g^{\alpha\beta}\partial_\sigma g_{\beta\alpha}\delta g^{\rho\sigma} + 2g^{\rho\sigma}\partial^\beta \delta g_{\sigma\beta} - g^{\alpha\beta}\partial^\rho \delta g_{\beta\alpha}\right]\frac{\sqrt{-g}}{2}\; d^4x \\
&= \int \partial_\rho \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right) \left[-2\partial^\beta g_{\sigma\beta}\delta g^{\rho\sigma} - g_{\alpha\beta}\partial_\sigma g^{\alpha\beta}\delta g^{\rho\sigma} - 2g^{\rho\sigma}\partial^\beta \delta g_{\sigma\beta} + g^{\alpha\beta}\partial^\rho \delta g_{\beta\alpha}\right]\frac{\sqrt{-g}}{2}\; d^4x \\
&= \int \partial_\rho \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right) \left[-2\partial^\beta g_{\sigma\beta}\delta g^{\rho\sigma} - g_{\alpha\beta}\partial_\sigma g^{\alpha\beta}\delta g^{\rho\sigma} - 2g^{\rho\sigma} g^{\beta\alpha}\partial_\alpha \delta g_{\sigma\beta}\right]\frac{\sqrt{-g}}{2}\; d^4x \\
&\quad + \int \partial_\rho \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right) \left[\partial^\rho(g^{\alpha\beta}\delta g_{\beta\alpha}) - \partial^\rho g^{\alpha\beta}\delta g_{\beta\alpha}\right]\frac{\sqrt{-g}}{2}\; d^4x \\
&= \int \partial_\rho \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right) \left[-2\partial^\beta g_{\sigma\beta}\delta g^{\rho\sigma} - g_{\alpha\beta}\partial_\sigma g^{\alpha\beta}\delta g^{\rho\sigma} - 2g^{\rho\sigma}\partial_\alpha(g^{\beta\alpha}\delta g_{\sigma\beta})\right]\frac{\sqrt{-g}}{2}\; d^4x \\
&\quad + \int \partial_\rho \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right) \left[2g^{\rho\sigma}\partial_\alpha g^{\beta\alpha}\delta g_{\sigma\beta} - \partial^\rho(g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}) - \partial^\rho g^{\alpha\beta}\delta g_{\beta\alpha}\right]\frac{\sqrt{-g}}{2}\; d^4x \\
&= \int \partial_\rho \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right) \left[-2\partial^\beta g_{\sigma\beta}\delta g^{\rho\sigma} - g_{\alpha\beta}\partial_\sigma g^{\alpha\beta}\delta g^{\rho\sigma} + 2g^{\rho\sigma}\partial_\alpha(g_{\beta\sigma}\delta g^{\beta\alpha})\right]\frac{\sqrt{-g}}{2}\; d^4x \\
&\quad + \int \partial_\rho \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right) \left[-2g_{\sigma\beta}\partial_\alpha g^{\beta\alpha}\delta g^{\sigma\rho} - \partial^\rho g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}\partial^\rho \delta g^{\alpha\beta} - \partial^\rho g^{\alpha\beta}\delta g_{\beta\alpha}\right]\frac{\sqrt{-g}}{2}\; d^4x
\end{aligned}
\tag{A.13}
$$

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int -\partial_\rho \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right) g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\rho{}_{\beta\alpha}\sqrt{-g}\; d^4x \\
&= \int \partial_\rho \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right) \left[-2\partial^\beta g_{\sigma\beta}\delta g^{\rho\sigma} - g_{\alpha\beta}\partial_\sigma g^{\alpha\beta}\delta g^{\rho\sigma} + 2g^{\rho\sigma}\partial_\alpha g_{\beta\sigma}\delta g^{\beta\alpha}\right] \frac{\sqrt{-g}}{2}\; d^4x \\
&\quad + \int \partial_\rho \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right) \left[2g^{\rho\sigma} g_{\beta\sigma}\partial_\alpha\delta g^{\beta\alpha} + 2g^{\beta\alpha}\partial_\alpha g_{\sigma\beta}\delta g^{\sigma\rho} - \partial^\rho g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}\right] \frac{\sqrt{-g}}{2}\; d^4x \\
&\quad + \int \partial_\rho \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right) \left[-g_{\alpha\beta}\partial^\rho\delta g^{\alpha\beta} - \delta(g_{\alpha\beta}\partial^\rho g^{\alpha\beta}) + g_{\alpha\beta}\partial^\rho\delta g^{\alpha\beta}\right] \frac{\sqrt{-g}}{2}\; d^4x \\
&= \int \partial_\rho \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right) \left[-2\partial^\beta g_{\sigma\beta}\delta g^{\rho\sigma} - g_{\alpha\beta}\partial_\sigma g^{\alpha\beta}\delta g^{\rho\sigma} + 2g^{\rho\sigma}\partial_\alpha g_{\beta\sigma}\delta g^{\beta\alpha} + 2\delta^\rho{}_\beta\partial_\alpha\delta g^{\beta\alpha}\right] \frac{\sqrt{-g}}{2}\; d^4x \\
&\quad + \int \partial_\rho \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right) \left[2\partial^\beta g_{\sigma\beta}\delta g^{\sigma\rho} - \partial^\rho g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} - \delta(g_{\alpha\beta}\partial^\rho g^{\alpha\beta})\right] \frac{\sqrt{-g}}{2}\; d^4x \\
&= \int \partial_\rho \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right) \left[-g_{\alpha\beta}\partial_\sigma g^{\alpha\beta}\delta g^{\rho\sigma} + 2g^{\rho\sigma}\partial_\alpha g_{\beta\sigma}\delta g^{\beta\alpha} + 2\partial_\alpha\delta g^{\rho\alpha}\right] \frac{\sqrt{-g}}{2}\; d^4x \\
&\quad + \int \partial_\rho \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right) \left[-\partial^\rho g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} - \delta(g_{\alpha\beta}\partial^\rho g^{\alpha\beta})\right] \frac{\sqrt{-g}}{2}\; d^4x
\end{aligned}
\tag{A.14}
$$

Se renombran índices y se reordenan los términos

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int -\partial_\rho \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right) g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\rho{}_{\beta\alpha}\sqrt{-g}\; d^4x \\
&= \int \partial_\sigma \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right) \left(-g_{\alpha\beta}\partial_\mu g^{\alpha\beta}\delta g^{\mu\sigma} + 2\partial_\mu\delta g^{\mu\sigma} + 2g^{\sigma\rho}\partial_\mu g_{\rho\alpha}\delta g^{\mu\alpha} - \partial^\sigma g_{\alpha\mu}\delta g^{\mu\alpha}\right) \frac{\sqrt{-g}}{2}\; d^4x \\
&\quad - \int \partial_\sigma \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right) \delta(g_{\alpha\beta}\partial^\sigma g^{\alpha\beta})\frac{\sqrt{-g}}{2}\; d^4x
\end{aligned}
\tag{A.15}
$$

La última integral al lado derecho de la ecuación anterior es igual al término de (A.11), por lo que producirá el término al lado derecho de (A.12). Este término se lleva al lado izquierdo de la ecuación anterior

$$
\begin{aligned}
&I_1 - I_2 \\
&= \int -\partial_\rho \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right) g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\rho{}_{\beta\alpha}\sqrt{-g}\ d^4x - \int \frac{1}{4\kappa_k} G_k g_{\mu\nu}\nabla^2\left(\frac{1}{G_k}\right)\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\ d^4x \\
&= \int \partial_\sigma \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right)\left(-g_{\alpha\beta}\partial_\mu g^{\alpha\beta}\delta g^{\mu\sigma} + 2\partial_\mu\delta g^{\mu\sigma} + 2g^{\sigma\rho}\partial_\mu g_{\rho\alpha}\delta g^{\mu\alpha} - \partial^\sigma g_{\alpha\mu}\delta g^{\mu\alpha}\right)\frac{\sqrt{-g}}{2}\ d^4x \\
&= \int \partial_\sigma \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right)\left(-g_{\alpha\beta}\partial_\mu g^{\alpha\beta}\delta g^{\mu\sigma} + 2\partial_\mu\delta g^{\mu\sigma} + 2g^{\sigma\rho}\partial_\mu g_{\rho\alpha}\delta g^{\mu\alpha} - g^{\sigma\rho}\partial_\rho g_{\alpha\mu}\delta g^{\mu\alpha}\right)\frac{\sqrt{-g}}{2}\ d^4x \\
&= \int \partial_\nu \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right)\left(-g_{\alpha\beta}\partial_\mu g^{\alpha\beta}\delta g^{\mu\nu} + 2\partial_\mu\delta g^{\mu\nu} + 2g^{\nu\sigma}\partial_\mu g_{\sigma\alpha}\delta g^{\mu\alpha} - g^{\nu\sigma}\partial_\sigma g_{\alpha\mu}\delta g^{\mu\alpha}\right)\frac{\sqrt{-g}}{2}\ d^4x \\
&= \int \partial_\nu \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right)\left(-\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\alpha\beta}\partial_\mu g^{\alpha\beta}\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\partial_\mu\delta g^{\mu\nu}\right)\ d^4x \\
&\quad + \int (2g^{\alpha\sigma}\partial_\mu g_{\sigma\nu}\delta g^{\mu\nu} - g^{\alpha\sigma}\partial_\sigma g_{\nu\mu}\delta g^{\mu\nu})\partial_\alpha\left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right)\frac{\sqrt{-g}}{2}\ d^4x
\end{aligned}
\tag{A.16}
$$

Se agrega convenientemente un término de borde que sea nulo

$$
\begin{aligned}
&I_1 - I_2 \\
&= \int -\partial_\rho \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right) g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\rho{}_{\beta\alpha}\sqrt{-g}\ d^4x - \int \frac{1}{4\kappa_k} G_k g_{\mu\nu}\nabla^2\left(\frac{1}{G_k}\right)\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\ d^4x \\
&= \oint -\partial_\nu \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right)\delta g^{\mu\nu} n_\mu\sqrt{-g}\ d^3x \\
&\quad + \int \partial_\nu\left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right)(\partial_\mu\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\partial_\mu\delta g^{\mu\nu})\ d^4x \\
&\quad + \int (g^{\alpha\sigma}\partial_\mu g_{\sigma\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\alpha\sigma}\partial_\nu g_{\sigma\mu}\delta g^{\mu\nu} - g^{\alpha\sigma}\partial_\sigma g_{\nu\mu}\delta g^{\mu\nu})\partial_\alpha\left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right)\frac{\sqrt{-g}}{2}\ d^4x \\
&= \int -\partial_\mu\left(\partial_\nu\left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right)\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\right) d^4x + \int \partial_\nu\left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right)\partial_\mu(\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu})\ d^4x \\
&\quad + \int \frac{g^{\alpha\sigma}}{2}(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\nu\mu})\ \partial_\alpha\left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right)\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\ d^4x \\
&= \int -\partial_\mu\partial_\nu\left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right)\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\ d^4x + \int \Gamma^\alpha{}_{\nu\mu}\ \partial_\alpha\left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right)\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\ d^4x \\
&= \int -\left(\partial_\mu\partial_\nu\left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right) - \Gamma^\alpha{}_{\nu\mu}\partial_\alpha\left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right)\right)\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\ d^4x \\
&= \int -\nabla_\mu\partial_\nu\left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right)\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\ d^4x \\
&= \int -\frac{G_k}{2\kappa_k}\nabla_\mu\nabla_\nu\left(\frac{1}{G_k}\right)\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\ d^4x
\end{aligned}
\tag{A.17}
$$

Por lo que se deduce que

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int -\partial_\rho \left(\frac{c^4}{16\pi G_k}\right) g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\rho{}_{\beta\alpha}\sqrt{-g}\; d^4x \\
&= \int \frac{G_k}{2\kappa_k} g_{\mu\nu}\nabla^2 \left(\frac{1}{G_k}\right)\frac{\sqrt{-g}}{2}\delta g^{\mu\nu}\; d^4x - \int \frac{G_k}{\kappa_k}\nabla_\mu\nabla_\nu\left(\frac{1}{G_k}\right)\frac{\sqrt{-g}}{2}\delta g^{\mu\nu}\; d^4x
\end{aligned} \tag{A.18}
$$

Reemplazando (A.12) y (A.18) en (A.10), y esto, a su vez, en (A.8), se obtiene

$$
\begin{aligned}
\delta\Gamma_k &= \int \left(R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2}g_{\alpha\beta} + \Lambda_k g_{\alpha\beta}\right)\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa_k}\delta g^{\alpha\beta} + G_k\left(-\nabla_\mu\nabla_\nu + g_{\mu\nu}\Box\right)\left(\frac{1}{G_k}\right)\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa_k}\delta g^{\mu\nu}\; d^4x \\
&= \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} + \Lambda_k g_{\mu\nu} + G_k(-\nabla_\mu\nabla_\nu + g_{\mu\nu}\Box)\left(\frac{1}{G_k}\right)\right)\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa_k}\delta g^{\mu\nu}\; d^4x \\
&= \int (G_{\mu\nu} + \Lambda_k g_{\mu\nu} + \Delta t_{\mu\nu})\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa_k}\delta g^{\mu\nu}\; d^4x
\end{aligned} \tag{A.19}
$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein, y el tensor $\Delta t_{\mu\nu}$ introducido por la dependencia en la escala está dado por [26, 27]

$$
\Delta t_{\mu\nu} = G_k(g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)\frac{1}{G_k} \tag{A.20}
$$

Considerando la variación igual a cero $\delta\Gamma_k = 0$, se obtienen las ecuaciones de movimiento para el campo métrico

$$
G_{\mu\nu} = -\Lambda_k g_{\mu\nu} - \Delta t_{\mu\nu} \tag{A.21}
$$

Bibliografía

[1] A. A. Michelson and E. W. Morley, "On the relative motion of the Earth and the luminiferous ether," *American Journal of Science* **s3-34** no.˜203, (11, 1887) 333–345.

[2] F. W. Dyson, A. S. Eddington, and C. Davidson, "IX. A determination of the deflection of light by the Sun's gravitational field, from observations made at the total eclipse of may 29, 1919," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character* **220** no.˜571-581, (1920) 291–333. `https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rsta.1920.0009`.

[3] S. R. G. Joyce, M. A. Barstow, J. B. Holberg, H. E. Bond, S. L. Casewell, and M. R. Burleigh, "The gravitational redshift of Sirius B," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **481** no.˜2, (Sep, 2018) 2361–2370. `https://doi.org/10.1093%2Fmnras%2Fsty2404`.

[4] **GRAVITY** Collaboration, Abuter, R., Amorim, A., Anugu, N., Bauböck, M., Benisty, M., Berger, J. P., Blind, N., Bonnet, H., Brandner, W., Buron, A., Collin, C., Chapron, F., Clénet, Y., dCoudé u Foresto, V., de Zeeuw, P. T., Deen, C., Delplancke-Ströbele, F., Dembet, R., Dexter, J., Duvert, G., Eckart, A., *et al.*, "Detection of the gravitational redshift in the orbit of the star S2 near the galactic centre massive black hole," *Astronomy & Astrophysics* **615** (2018) L15. `https://doi.org/10.1051%2F0004-6361%2F201833718`.

[5] **LIGO Scientific and Virgo** Collaboration, B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, M. R. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. X. Adhikari, V. B. Adya, C. Affeldt, M. Agathos, K. Agatsuma, Aggarwal, *et al.*, "Observation of gravitational waves from a binary black hole merger," *Phys. Rev. Lett.* **116** (Feb, 2016) 061102. `https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.061102`.

[6] **The Event Horizon Telescope** Collaboration, K. Akiyama, A. Alberdi, W. Alef, K. Asada, R. Azulay, A.-K. Baczko, D. Ball, M. Baloković, J. Barrett, D. Bintley, L. Blackburn, W. Boland, K. L. Bouman, G. C. Bower, M. Bremer, *et al.*, "First M87 Event Horizon Telescope results. IV. Imaging the central supermassive black hole," *The Astrophysical Journal Letters* **875** no.˜1, (Apr, 2019) L4. `https://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/ab0e85`.

[7] Friedman, A., "Über die Krümmung des Raumes," *Zeitschrift für Physik* **10** (Jan., 1922) 377–386. `https://doi.org/10.1007/BF01332580`.

[8] **Planck** Collaboration, Aghanim, N., Akrami, Y., Ashdown, M., Aumont, J., Baccigalupi, C., Ballardini, M., Banday, A. J., Barreiro, R. B., Bartolo, N., Basak,

S., Battye, R., Benabed, K., Bernard, J.-P., Bersanelli, M., Bielewicz, P., Bock, J. J., Bond, J. R., Borrill, J., Bouchet, F. R., Boulanger, F., Bucher, M., Burigana, C., Butler, R. C., Calabrese, E., Cardoso, J.-F., Carron, J., Challinor, A., , *et al.*, "Planck 2018 results - VI. Cosmological parameters," *Astronomy & Astrophysics* **641** (2020) A6. https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833910.

[9] A. H. Guth, "Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems," *Phys. Rev. D* **23** (Jan, 1981) 347–356. https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.23.347.

[10] L. Kofman, A. D. Linde, and A. A. Starobinsky, "Towards the theory of reheating after inflation," *Phys. Rev. D* **56** (1997) 3258–3295, arXiv:hep-ph/9704452.

[11] S. W. Allen, R. W. Schmidt, A. C. Fabian, and H. Ebeling, "Cosmological constraints from the local X-ray luminosity function of the most X-ray-luminous galaxy clusters," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **342** no.˜1, (Jun, 2003) 287–298. https://doi.org/10.1046%2Fj.1365-8711.2003.06550.x.

[12] R. A. Knop, G. Aldering, R. Amanullah, P. Astier, G. Blanc, M. S. Burns, A. Conley, S. E. Deustua, M. Doi, R. Ellis, S. Fabbro, G. Folatelli, A. S. Fruchter, G. Garavini, S. Garmond, K. Garton, R. Gibbons, G. Goldhaber, T. S. C. Project, *et al.*, "New constraints on Ω_{M}, Ω_{Λ}, and ω from an independent set of 11 high-redshift supernovae observed with the Hubble Space Telescope," *The Astrophysical Journal* **598** no.˜1, (Nov, 2003) 102. https://dx.doi.org/10.1086/378560.

[13] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P. M. Garnavich, R. L. Gilliland, C. J. Hogan, S. Jha, R. P. Kirshner, B. Leibundgut, M. M. Phillips, D. Reiss, B. P. Schmidt, R. A. Schommer, R. C. Smith, J. Spyromilio, C. Stubbs, N. B. Suntzeff, and J. Tonry, "Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a Cosmological Constant," *The Astronomical Journal* **116** no.˜3, (Sep, 1998) 1009. https://dx.doi.org/10.1086/300499.

[14] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R. A. Knop, P. Nugent, P. G. Castro, S. Deustua, S. Fabbro, A. Goobar, D. E. Groom, I. M. Hook, A. G. Kim, M. Y. Kim, J. C. Lee, N. J. Nunes, R. Pain, C. R. Pennypacker, R. Quimby, C. Lidman, R. S. Ellis, M. Irwin, R. G. McMahon, P. Ruiz-Lapuente, N. Walton, B. Schaefer, B. J. Boyle, A. V. Filippenko, T. Matheson, A. S. Fruchter, N. Panagia, H. J. M. Newberg, W. J. Couch, and T. S. C. Project, "Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae," *The Astrophysical Journal* **517** no.˜2, (Jun, 1999) 565. https://dx.doi.org/10.1086/307221.

[15] M. D. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 3, 2014.

[16] M. Peskin and D. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*. Frontiers in Physics. Avalon Publishing, 1995. https://books.google.cl/books?id=EVeNNcslvX0C.

[17] H. B. G. Casimir, "On the attraction between two perfectly conducting plates," *Indag. Math.* **10** no. 4, (1948) 261–263.

[18] S. K. Lamoreaux, "Demonstration of the Casimir force in the 0.6 to 6μm range," *Phys. Rev. Lett.* **78** (Jan, 1997) 5–8. https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.78.5.

[19] S. Weinberg, "The Cosmological Constant problem," *Rev. Mod. Phys.* **61** (Jan, 1989) 1–23. https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.61.1.

[20] T. Lancaster and S. J. Blundell, *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*. Oxford University Press, 04, 2014. https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199699322.001.0001.

[21] C. Wetterich, "Exact evolution equation for the effective potential," *Physics Letters B* **301** no.˜1, (1993) 90–94. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037026939390726X.

[22] F. Canales, B. Koch, C. Laporte, and Ángel Rincón, "Cosmological Constant problem: deflation during inflation," *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2020** no.˜01, (Jan, 2020) 021. https://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2020/01/021.

[23] A. Bonanno and M. Reuter, "Renormalization group improved black hole spacetimes," *Physical Review D* **62** no.˜4, (Jul, 2000) . https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.62.043008.

[24] D. F. Litim and J. M. Pawlowski, "Completeness and consistency of renormalization group flows," *Physical Review D* **66** no.˜2, (Jul, 2002) . https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.66.025030.

[25] M. Reuter and H. Weyer, "Running Newton constant, improved gravitational actions, and galaxy rotation curves," *Physical Review D* **70** no.˜12, (Dec, 2004) . https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.70.124028.

[26] M. Reuter and H. Weyer, "Renormalization group improved gravitational actions: A Brans-Dicke approach," *Physical Review D* **69** no.˜10, (May, 2004) . https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.69.104022.

[27] M. Reuter and H. Weyer, "Running Newton constant, improved gravitational actions, and galaxy rotation curves," *Phys. Rev. D* **70** (Dec, 2004) 124028. https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.70.124028.

[28] M. Visser and C. Barceló, "Energy conditions and their cosmological implications," in *COSMO-99*. World Scientific, Sep, 2000. https://doi.org/10.1142%2F9789812792129_0014.

[29] C. Patrignani, "Review of Particle Physics," *Chinese Physics C* **40** no.˜10, (Oct, 2016) 100001. https://dx.doi.org/10.1088/1674-1137/40/10/100001.

[30] D. J. Fixsen, "The temperature of the cosmic microwave background,". https://doi.org/10.1088%2F0004-637x%2F707%2F2%2F916.

[31] https://github.com/facanales/Tesis-Magister.

[32] S. Dodelson, *Modern Cosmology.* Academic Press, Amsterdam, 2003.

[33] A. G. Riess, S. Casertano, W. Yuan, L. M. Macri, and D. Scolnic, "Large Magellanic Cloud cepheid standards provide a 1 % foundation for the determination of the Hubble constant and stronger evidence for physics beyond ΛCDM," *The Astrophysical Journal* **876** no.˜1, (May, 2019) 85. https://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/ab1422.

[34] L. Verde, T. Treu, and A. G. Riess, "Tensions between the early and late universe," *Nature Astronomy* **3** no.˜10, (Sep, 2019) 891–895. https://doi.org/10.1038%2Fs41550-019-0902-0.