PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

POLÍTICAS DE PRICING ÓPTIMAS PARA EMPRESAS QUE ENFRENTAN CONSUMIDORES ESTRATÉGICOS

FRANCISCA ANDREA VALENZUELA ZANOCCO

Tesis presentada a la Dirección de Investigación y Postgrado
como parte de los requisitos para optar al grado de
Magister en Ciencias de la Ingeniería

Profesor Supervisor:
JUAN CARLOS FERRER ORTIZ

Santiago de Chile, Agosto 2008

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

POLÍTICAS DE PRICING ÓPTIMAS PARA EMPRESAS QUE ENFRENTAN CONSUMIDORES ESTRATÉGICOS

FRANCISCA ANDREA VALENZUELA ZANOCCO

Miembros del Comité:
JUAN CARLOS FERRER ORTIZ
NICOLÁS MAJLUF SAPAG
HUGO MORA CARRASCO
MARIO DURÁN TORO

Tesis presentada a la Dirección de Investigación y Postgrado
como parte de los requisitos para optar al grado de
Magister en Ciencias de la Ingeniería

Santiago de Chile, Agosto 2008

A mis padres, Víctor y Gilda

AGRADECIMIENTOS

Quisiera agradecer a mi profesor supervisor, Juan Carlos Ferrer, por su guía y todo el apoyo brindado durante el desarrollo de esta tesis. También agradezco a los profesores Nicolás Majluf, Hugo Mora y Mario Durán, miembros de mi comisión, por sus valiosos comentarios y sugerencias que permitieron mejorar la calidad de este trabajo.

Finalmente, no puedo dejar de mencionar a mis padres, quienes me apoyaron constantemente y me ayudaron a perseverar cuando el trabajo se tornaba más complicado.

INDICE GENERAL

INDICE DE FIGURAS

INDICE DE TABLAS

RESUMEN

Este trabajo estudia políticas de precios óptimas para empresas monopolistas que enfrentan una demanda agregada incierta formada por consumidores estratégicos. Se desarrolló un modelo de *pricing* suponiendo que los consumidores consideran dos aspectos al tomar sus decisiones de compra: que su valoración decae en el tiempo y que existe una probabilidad de no encontrar el producto en el futuro.

Se mostró que si los consumidores están muy dispuestos a postergar sus compras, mientras más profundos son los descuentos que se aplican sobre los precios, mayor es el precio que debe fijar la empresa al comienzo del horizonte de planeación. Por el contrario, cuando los consumidores están menos dispuestos a esperar, los precios que fija el modelo son más bajos para aumentar la probabilidad de que el inventario se venda durante los primeros períodos y que los descuentos más grandes nunca se lleven a cabo.

Los resultados fueron comparados con los de un modelo de referencia en que los consumidores son miopes. Se determinó que la demanda total por el producto durante toda la temporada de venta es mayor cuando los consumidores son estratégicos. A través de experimentos numéricos se encontró que una empresa que asume incorrectamente que sus consumidores son miopes, cuando éstos son estratégicos en sus decisiones de compra puede percibir pérdidas importantes en sus ingresos. El mayor impacto se manifiesta en compañías que aplican grandes descuentos, manejan poco inventario, y se enfrentan a clientes cuyas valoraciones decaen lentamente y estiman que la probabilidad de quiebres de inventario es baja.

Palabras Claves: Revenue management, decisiones de pricing, markdown, comportamiento estratégico del consumidor.

ABSTRACT

This work studies optimal pricing policies for monopolistic companies that face an uncertain aggregate demand composed of strategic costumers. A pricing model was developed assuming that consumers consider two issues when they make their purchase decisions: that their valuations decline over time and that there is a probability of not finding the product in the future.

It was shown that when the consumers are willing to delay their purchases, the larger are the price discounts, the higher is the price that the company must set at the beginning of the planning horizon. By contrast, when consumers are less willing to wait, the prices set by the model are lower, to increase the probability that inventory is sold during the first periods and that the largest discounts never take place.

The results were compared to those of a reference model in which the consumers are myopic. It was determined that total product demand over the entire selling season is larger when consumers are strategic. Through numerical experiments it was found that a company which incorrectly assumes consumers are myopic when in fact they are strategic in their purchase decisions, may incur significant revenue losses. The greatest impact is felt by companies that apply big discounts, manage a small inventory, and face costumers whose valuations decline slowly with time and who estimate that the probability of stock-outs is low.

Keywords: Revenue management, pricing decisions, markdown, strategic consumer behavior.

1. INTRODUCCIÓN

Determinar el precio correcto a cobrar por un producto es, sin duda, una de las decisiones más complejas que enfrentan las compañías. En el pasado, la carencia de información precisa acerca de la demanda y los altos costos asociados a los cambios de precios, hacían que éstos se mantuvieran prácticamente estáticos a lo largo del horizonte de venta.

Hoy en día, el escenario es bastante diferente: las empresas disponen de enormes repositorios de información de los que pueden recoger datos acerca de la demanda que enfrentan, los avances tecnológicos permiten cambiar los precios fácilmente y sin costo, y existen múltiples herramientas de soporte a la toma de decisiones para analizar los datos de la demanda (Elmaghraby y Keskinocak, 2003). En consecuencia, las empresas han incorporado estrategias de *pricing* dinámico para sus productos, y las políticas de precios son actualmente una componente fundamental de su operación diaria (Bitran y Caldentey, 2003).

El problema general que los modelos de *pricing* dinámico intentan resolver, puede ser descrito en términos simples como "vender el producto correcto a la persona correcta en el instante correcto". Esta frase hace mucho sentido cuando se piensa que las empresas quieren vender sus productos a los consumidores que están más dispuestos a pagar por ellos, con el fin de lograr mayores utilidades. El problema está en que si se espera mucho tiempo a que los mejores compradores aparezcan, puede pasar la temporada completa y la empresa no será capaz de deshacerse de todo el inventario, lamentando no haber vendido sus productos a compradores con menor valoración. Por esta razón, las empresas deben equilibrar ambos escenarios a medida que transcurre la temporada de venta, manejando el precio de los productos.

Uno de los mecanismos de *pricing* dinámico más ampliamente utilizado es el *markdown*. Éste consiste en que el precio del producto se hace bajar en el tiempo de acuerdo a un calendario pre-establecido. El descenso de los precios continúa hasta que se venden todos los productos, o bien, hasta que el precio llega a un nivel mínimo definido por el vendedor. El camino que siguen los precios puede fijarse previamente, o puede irse determinando en función del inventario sobrante y el tiempo que queda hasta el final del horizonte de venta.

El uso de este tipo de mecanismos tiene claras ventajas, puesto que provee la flexibilidad necesaria para alcanzar a todos los consumidores con diferentes valoraciones por el producto, logrando así aumentar los beneficios percibidos. Sin embargo, hay que tomar en cuenta que existe una contraposición de intereses propia de este tipo de problema. Así como las compañías están constantemente tratando de mejorar sus estrategias de precios para lograr la mayor cantidad de beneficio posible, los consumidores están constantemente modificando sus planes de compra para pagar lo menos posible.

En la mayoría de los trabajos realizados en el área del *pricing* dinámico, se asume que los clientes son miopes, es decir, que éstos realizan sus compras si su precio de reserva[1] es mayor o igual que el precio del producto, sin tomar en cuenta los precios futuros. Sin embargo, cada día los consumidores tienen acceso a más información acerca de los precios, por lo que ellos pueden ir aprendiendo el esquema de precios de las compañías y, en muchos casos, terminar comprando sólo en liquidación.

La política de precios que se escoja, influencia el comportamiento de los consumidores y, en consecuencia, también la ganancia de la compañía. Por esta razón, se hace necesario incorporar a los modelos de *pricing* el comportamiento estratégico de los consumidores, considerando que éstos están conscientes de que los precios van a ir descendiendo y que tomarán en cuenta todo el camino de precios al momento de decidir cuándo realizar su compra.

En este trabajo se realizará un modelo de *pricing* multi-período que permita obtener políticas de precios óptimas a una empresa monopolista que enfrenta una demanda agregada incierta, formada por consumidores estratégicos que deciden cuándo comprar considerando que su valoración decae en el tiempo y que existe una probabilidad de no encontrar el producto en el futuro.

El resto de este trabajo se organiza como sigue. En la sección 2 se presenta una exhaustiva revisión de la literatura. En la sección 3 se especifica paso a paso el desarrollo de un modelo de *pricing* que incorpora el comportamiento estratégico de los consumidores.

[1]El precio de reserva corresponde al máximo precio que los clientes están dispuestos a pagar por un producto.

Luego, en la sección 4 se describen algunas características del modelo propuesto y se analiza la solución óptima en casos especiales. En la sección 5 se resumen los resultados de una serie de experimentos numéricos. Finalmente en la sección 6 se presentan las principales conclusiones y se proponen algunas extensiones para trabajos futuros.

2. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

Todo sistema de *pricing* dinámico está basado en un modelo de demanda que trata de reflejar la forma en que los consumidores responden a los cambios de precios. El modelo más extendido en la literatura considera que la demanda es una función del precio cobrado en cada instante del tiempo. Gallego y Ryzin (1994) modelan las llegadas de los clientes utilizando un proceso de *Poisson*, cuya tasa es función del precio que se cobra por el producto. Formulan el problema de *pricing* dinámico como un problema de control de intensidad, en el que se desea encontrar el camino de precios óptimo. Feng y Gallego (1995) modelan la demanda de la misma forma, pero para lograr un objetivo diferente: decidir el momento óptimo para aplicar un cambio de precio. Chen y Simchi-Levi (2004) intentan abordar el problema de coordinar las decisiones de *pricing* e inventario, para lo cual consideran que la demanda es una función genérica que depende del precio. Algo muy similar ocurre con el trabajo de Federgruen y Heching (1999).

Existen otros modelos que han incorporado mayor complejidad en el tratamiento de la demanda. Éste es el caso de Bitran y Mondschein (1997). La llegada de clientes a la tienda está dada por una distribución de *Poisson* con una tasa de llegada que es función de los patrones generales de compra, en lugar de una función del precio específico del producto en consideración. La población de potenciales compradores se encuentra caracterizada por una distribución de precios de reserva por el producto, la cual es conocida por el vendedor. Por su parte, Smith y Achabal (1998) desarrollan un modelo para determinar precios óptimos de liquidación que toma en cuenta el impacto que tiene en los consumidores el nivel de inventario en exhibición y los cambios en las tasas de ventas debido a efectos estacionales. La tasa de ventas corresponde a la multiplicación de tres efectos separables: la estacionalidad de la demanda, el efecto del inventario y la sensibilidad de la demanda al precio.

Todos estos modelos suponen implícitamente que los consumidores son miopes, esto es, que no anticipan descuentos futuros y comprarán el producto si su precio de reserva es menor que el precio al que se ofrece el producto. En su reciente libro, Talluri y Ryzin (2004) indican que el supuesto de consumidores miopes provee una aproximación aceptable cuando los clientes son relativamente espontáneos a la hora de tomar sus decisiones, o bien, cuando no tienen suficiente tiempo o información para comportarse estratégicamente. Sin embargo, para productos más caros y durables[1] y cuando la información está disponible, este supuesto se hace menos realista. Cuando compran bienes durables, los clientes son más pacientes y pueden acelerar o posponer sus compras para obtener un precio menor. Los autores argumentan que el no tomar en cuenta el comportamiento estratégico del consumidor, puede reducir significativamente los beneficios esperados del *pricing* dinámico.

Son pocos los autores que han desarrollado trabajos en que la determinación de precios aborda el tema del comportamiento estratégico de los consumidores (ver anexo A para una detallada clasificación de los trabajos previos de *pricing* dinámico que fueron revisados). Los primeros trabajos que comienzan a incluir este aspecto provienen de la literatura económica, más específicamente del monopolio de bienes durables (Stokey, 1979; Besanko y Winston, 1990). En general, estos modelos se basan en el supuesto de que los clientes anticipan cambios en los precios futuros y, en respuesta a ello, ajustan sus tiempos de compra para lograr la mayor utilidad posible. Sin embargo, no consideran restricciones de capacidad ni tampoco en los tiempos de venta. Estos estudios concluyen que las estrategias de *markdown* son óptimas. Besanko y Winston (1990) comparan esta política con la política óptima para un monopolista que enfrenta consumidores miopes y encuentran que ante cualquier escenario, los precios son siempre menores con consumidores estratégicos que con consumidores miopes.

Los modelos de *pricing* más recientes, incorporan la idea de que la utilidad que entrega el producto a los consumidores disminuye en el tiempo. Por ejemplo, Levin, McGill, y Nediak (2006) modelan el comportamiento estratégico a través de un factor de descuento por período que se aplica a las utilidades de los consumidores. Cuando este factor es grande, los consumidores se comportan miopemente, mientras que cuando el descuento de las utilidades futuras es pequeño, los clientes se inclinan más a esperar si es que anticipan bajos precios. Aviv y Pazgal (2008) consideran el problema enfrentado por una compañía que anuncia

[1]Los bienes durables corresponden a aquéllos que pueden ser utilizados por períodos largos y que, por tanto, se adquieren de manera poco frecuente. Muchas categorías importantes de *retail* – ropa, bienes deportivos y dispositivos electrónicos – pueden ser considerados como bienes durables.

futuros descuentos en los precios. La valoración de los clientes decae exponencialmente a medida que transcurre la temporada de venta. Los clientes tienen la posibilidad de comprar inmediatamente o volver cuando hay un descuento en el precio. Los autores desarrollan una trayectoria de precios óptima que depende del inventario. Ambos trabajos prueban que una compañía que ignora el comportamiento estratégico del consumidor puede recibir beneficios totales mucho menores que una que usa la política de precios de equilibrio estratégico.

Elmaghraby, Gulcu, y Keskinocak (2008) también estudian políticas de descuentos, pero en su modelo los consumidores pueden tener demandas por más de una unidad del producto. El objetivo de la compañía es fijar una secuencia decreciente de dos precios. Los consumidores, por su parte, deben decidir cuántas unidades comprar en cada período. La inteligencia del comprador se incorpora suponiendo que éste maximiza su utilidad, considerando que en el futuro puede no haber suficiente inventario como para satisfacer su demanda. Otro paper que toma en cuenta la idea de que los consumidores reaccionarán ante la posibilidad de no encontrar el producto en el futuro, debido a quiebres de inventario es Liu y vanRyzin (2008). En lugar de analizar decisiones de precios, los autores consideran decisiones de inventario. Desarrollan un modelo para estudiar las condiciones bajo las cuales es óptimo para un vendedor crear escasez (manteniendo un inventario de productos bajo), con el fin de introducir un riesgo de racionamiento que desincentive el comportamiento estratégico del consumidor. Los autores analizan los casos en que los clientes son neutrales y aversos al riesgo. Concluyen que cuando existe un segmento más o menos grande de clientes que tienen altas valoraciones y son aversos al riesgo, conviene racionar la capacidad.

A diferencia de los papers nombrados anteriormente, Gallien (2006) no asume una trayectoria de precios decreciente en el tiempo. En el contexto del comercio electrónico, considera un mecanismo de *pricing* dinámico diseñado por un monopolista que ofrece sus productos a compradores sensibles al tiempo. El mecanismo óptimo resulta en precios que van aumentando. Su (2007) tampoco impone restricciones a la política de *pricing*, la secuencia de precios puede ser creciente o decreciente en el tiempo. El autor estudia un modelo en que los clientes pertenecen a cuatro clases diferentes, que se caracterizan por su valor en dos dimensiones: valoración alta versus baja y comportamiento miope versus estratégico. Hay un costo de espera asociado a cada consumidor. Un costo de espera infinito correspondería a un consumidor miope, mientras que los clientes con un costo de espera finito podrán retrasar sus compras estratégicamente. La política de precios utilizada es una en la que el vendedor se compromete a un camino de precios con una función de racionamiento que especifica la fracción de la demanda que es satisfecha en cualquier momento del tiempo. El paper demuestra que los *markups* son óptimos cuando los consumidores de alta valoración son más estratégicos, mientras que los *markdowns* son óptimos si los consumidores de alta valoración son más miopes. Xu y Hopp (2004) también intentan comprender cómo las características de los clientes y de los bienes y servicios pueden impactar las estrategias de *pricing* de una industria. Estudian un modelo de tiempo continuo con consumidores estratégicos cuya sensibilidad al precio varía en el tiempo. Muestran que los precios deberían disminuir cuando los clientes se vuelven muy sensibles al precio en el tiempo y que deberían aumentar en el caso contrario.

El modelo desarrollado en este trabajo asume que los precios siguen una trayectoria decreciente e incorpora simultáneamente los dos principales aspectos de la decisión de compra de los consumidores estratégicos que se han modelado en la literatura revisada: el hecho de que su valoración decae en el tiempo y que existe un riesgo de no encontrar el producto en el futuro.

3. EL MODELO

En esta sección se estudia el problema enfrentado por una empresa monopólica que desea maximizar el beneficio obtenido al vender un inventario limitado de productos durante un horizonte de venta finito compuesto por K períodos. Para incentivar las ventas, la empresa anuncia a los consumidores que ofrecerá un descuento fijo por período. La empresa dispone de una cierta cantidad de inventario, que no podrá reponer. Al final del horizonte de venta, los ítemes que no fueron vendidos se pierden.

Los consumidores llegan a la tienda de acuerdo a un proceso de *Poisson* no homogéneo, cuya tasa es función de los patrones generales de compra. La población de potenciales clientes está caracterizada por precios de reserva que corresponden a variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con una función de distribución de probabilidades, conocida por la empresa.

Los consumidores se comportan estratégicamente por lo que no necesariamente comprarán el producto en el mismo período en que arriban a la tienda. Dado que conocen la trayectoria que seguirán los precios, están conscientes de que su excedente puede aumentar si deciden postergar su compra. Sin embargo, a medida que transcurre la temporada de venta el producto disminuye la utilidad que entrega a los consumidores. Además existe una posibilidad de que el producto no se encuentre disponible en el futuro, debido a quiebres de inventario. Los consumidores considerarán este *trade-off* a la hora de tomar sus decisiones de compra.

Para explicar cómo se construye el modelo desarrollado en este trabajo, se comenzará por describir el modelo de *pricing* que utilizaría la empresa si es que sus consumidores fuesen miopes. Luego se especifica la forma en que se supondrá que los consumidores estratégicos toman sus decisiones de compra. Finalmente se mostrará cómo se incorpora la estrategicidad de los consumidores al modelo básico para consumidores miopes.

3.1. Modelo de *Pricing*: Caso Consumidor Miope

Recordemos que la estrategia de *pricing* de la empresa consiste en fijar un precio p al comienzo del horizonte de venta y ofrecer un descuento fijo por período. Estos descuentos son definidos arbitrariamente de acuerdo a las políticas de venta de la empresa. De esta forma, la única decisión que la empresa debe tomar es el precio que pondrá al producto al comienzo del horizonte de venta, puesto que los precios de los períodos siguientes se encuentran completamente determinados por el precio inicial.

Este tipo de estrategia fue estudiada por Bitran y Mondschein (1997) para el caso de consumidores miopes. Los autores formularon un modelo matemático que determina el precio inicial óptimo. Antes de presentar el modelo matemático, es necesario introducir la siguiente notación:

q_k: descuento ofrecido en el período k, expresado como una fracción de p.

$D_k(p_k)$: variable aleatoria que representa a la demanda agregada por el producto en el período k. Corresponde a un proceso de *Poisson* no homogéneo de tasa $\mu_k(p_k)$. De esta forma, la función de probabilidad para el número de compradores efectivos en el período k está dada por

$$\mathbb{P}\{D_k(p_k) = j\} = \frac{e^{-\mu_k(p_k)}\mu_k(p_k)^j}{j!}.$$

$VF_k(c,p)$: ingreso total esperado, acumulado desde el período k hasta el fin del horizonte de venta, si el inventario al comienzo del período es c y el precio al comienzo de la temporada es p.

El modelo matemático que intenta maximimizar el ingreso total esperado de ofrecer un inventario de c productos durante K períodos, utilizando la política de precios planteada anteriormente, corresponde a:

$$\max_{p\geq 0}\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\big[\min(c,j)p + VF_2(c-\min(c,j),p)\big]\cdot\mathbb{P}\{D_1(p)=j\}\right\}, \tag{3.1}$$

donde

$$
\begin{aligned}
VF_k(c,p) &= \sum_{j=0}^{\infty} \big[\min(c,j)q_k p + VF_{k+1}(c-\min(c,j),p)\big] \\
&\quad \times \mathbb{P}\{D_k(q_k p)=j\}, \qquad \forall\, 1<k\leq K \\
VF_{K+1}(c,p) &= 0 \qquad \forall\, c,p \\
VF_k(0,p) &= 0 \qquad \forall\, k,p.
\end{aligned}
$$

Este modelo puede reescribirse como:

$$
\max_{p\geq 0}\left\{\sum_{j=0}^{c}\big[(j-c)p+VF_2(c-j,p)\big]\cdot\mathbb{P}\{D_1(p)=j\}+cp\right\}, \tag{3.2}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
VF_k(c,p) &= \sum_{j=0}^{c} \big[(j-c)q_k p + VF_{k+1}(c-j,p)\big] \\
&\quad \times \mathbb{P}\{D_k(q_k p)=j\} + q_k pc, \qquad \forall\, 1<k\leq K \\
VF_{K+1}(c,p) &= 0 \qquad \forall\, c,p \\
VF_k(0,p) &= 0 \qquad \forall\, k,p.
\end{aligned}
$$

La llegada de clientes a la tienda corresponde a un proceso de *Poisson* con tasa λ_t. El precio de reserva de estos clientes tiene una función de distribución acumulada de probabilidades $F_t(p)$ en el instante t. Como los consumidores son miopes, compran el producto sólo si su precio de reserva es mayor o igual al precio al que se ofrece el producto. La tasa de demanda efectiva en el instante t será entonces $\lambda_t(1-F_t(p))$.

Para determinar la tasa de demanda agregada de un período k, deben integrarse todas las llegadas que ocurren a lo largo de ese período, obteniendo finalmente:

$$
\mu_k(p_k) = \int_{l_{k-1}}^{l_k} \lambda_t(1-F_t(p_k))dt, \tag{3.3}
$$

donde l_k es el instante en que finaliza el k-ésimo período.

3.2. Proceso de Toma de Decisión del Consumidor Estratégico

Un consumidor estratégico escoge comprar el producto en el período en que se maximiza su excedente esperado. En caso de que éste nunca llegue a ser positivo, el consumidor preferirá simplemente no adquirir el producto. Se realizarán dos supuestos básicos acerca de los consumidores, que determinarán la forma en la que ellos calculan su excedente esperado.

SUPUESTO 3.1. *El precio de reserva de un consumidor decae exponencialmente a medida que transcurre la temporada de venta. Su valor inicial $r_{k,k}$ está dado por una distribución de probabilidades conocida que depende del período de arribo k.*

El precio de reserva de un cliente cuando han transcurrido t unidades de tiempo desde el momento de su arribo en el período k, corresponde a $r_k(t) = r_{k,k} \cdot e^{-\beta \cdot t}$. El parámetro β determina la velocidad con que decae la valoración que los clientes tienen por el producto. La figura 3.1(a) muestra el decaimiento del precio de reserva, como una proporción del precio de reserva inicial, para distintos valores de β. Para valores grandes, el precio de reserva decae más rápido, por lo que los consumidores estarán menos dispuestos a postergar sus compras en espera de precios menores. Esto ocurría por ejemplo, con artículos que están de moda, o bien, con vestuario de estación. Por el contrario, si β tiene un valor pequeño, los consumidores serán más estratégicos, y esperarán a que el precio disminuya para realizar sus compras. Este podría ser el caso de los electrodomésticos.

Ahora bien, dado que el precio de reserva de los clientes disminuye a lo largo de un período y el precio del producto se mantiene, si los clientes son racionales comprarán justo en el momento en que se produce un cambio en los precios, que es justamente el momento en que el excedente de un período es máximo. Parece razonable entonces discretizar el conjunto de precios de reserva de los clientes, definiendo el precio de reserva que tiene un cliente durante el período j, dado que arribó a la tienda en el período k como:

$$r_{j,k} = r_{k,k} \cdot e^{-\beta(l_{j-1} - l_{k-1})} \quad \forall\, j > k, \tag{3.4}$$

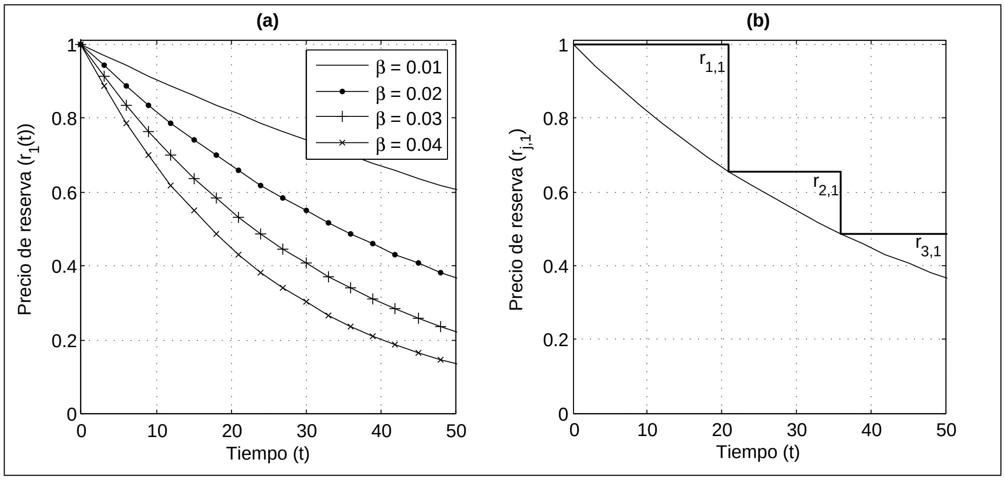

FIGURA 3.1. (a) Decaimiento del precio de reserva para distintos valores de β. (b) Discretización de la función de decaimiento del precio de reserva para 3 períodos.

donde l_k corresponde al instante en que termina el k-ésimo período y $l_0 = 0$. En la figura 3.1(b) se puede observar la discretización de la función de decaimiento del precio de reserva de un cliente que llega al comienzo de un horizonte de tiempo compuesto de 3 períodos de 21, 15 y 14 días respectivamente.

SUPUESTO 3.2. *Los clientes que llegan a la tienda durante el período k estiman una probabilidad $g_k(t)$ de encontrar el producto en cualquier instante t que cumpla con $l_{k-1} < t < l_K$. Por simplicidad matemática, pero sin perder generalidad, consideraremos que esta función es igual para todos los clientes que arriban en el mismo período.*

El fundamento detrás de este supuesto es que los clientes temen no encontrar el producto en el futuro. Puede que los demás consumidores sean menos pacientes y decidan comprar el producto en el mismo instante en que arriban en la tienda, en lugar de esperar por precios más bajos.

La función $g_k(t)$ debe cumplir tres importantes propiedades:

- Si $t' > t$ entonces $g_k(t') < g_k(t)$ (i.e. la función $g_k(t)$ es estrictamente decreciente en t). Mientras más cerca está el fin de la temporada, menos productos deberían quedar, y menor será la probabilidad de encontrarlo.

- $g_k(l_{k-1}) = 1$ y $g_k(l_K) = 0$. En el momento en que los consumidores llegan a la tienda, su estimación de la probabilidad de encontrar el producto es 1, puesto que saben que éste se encuentra disponible. Por otra parte, los consumidores creen que finalizado el horizonte de venta no quedará ningún producto, por lo que su estimación de la probabilidad de encontrarlo es 0.
- $g_k(t) \leq g_{k+1}(t)$. La probabilidad de encontrar el producto, estimada por un consumidor que llega en un período, es menor que la estimada por un consumidor que llega en un período posterior. Analicemos el caso en que la empresa decide vender el producto durante 4 períodos. Una persona que llega en el primer período estimará que existe una probabilidad muy baja de encontrar el producto en el último período, en cambio, una persona que llega en el tercer período y puede ver que éste aún se encuentra disponible, estimará que es bastante probable que en el próximo período aún queden productos a la venta.

Se decidió utilizar una función de la forma:

$$g_k(t) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{t - l_{k-1}}{l_K - l_{k-1}}\right)^a & \forall t,\ l_{k-1} \leq t \leq l_K \\ 0 & \forall t,\ t < l_{k-1} \end{cases} \tag{3.5}$$

donde a es una constante tal que $a > 0$.

Esta función cumple todas las propiedades nombradas anteriormente y además, a través del parámetro a, provee la flexibilidad de modelar distintos grados de “optimismo” en las estimaciones de los consumidores. Tal como se observa en la figura 3.2(a), si $0 < a < 1$ se tiene que la probabilidad de encontrar el producto cae rápidamente durante la primera fracción del horizonte de venta. Con $a = 1$ la función $g_k(t)$ corresponde a una recta y la probabilidad cae de manera constante en el tiempo. Finalmente con $a > 1$ esta probabilidad es muy cercana a 1 en la primera parte del horizonte de venta y cae cada vez más rápido cuando se acerca el fin de la temporada. Mientras mayor es el valor de a mayores son las probabilidades de encontrar el producto que estiman los clientes y, por lo tanto, más dispuestos se encuentran a postergar sus compras.

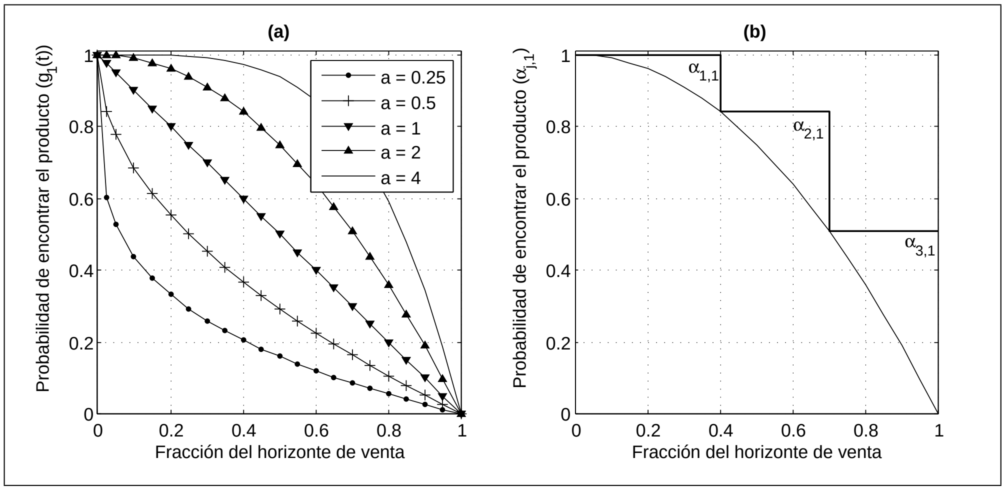

FIGURA 3.2. (a) Probabilidad de encontrar el producto en el futuro para distintos valores de a. (b) Discretización de la probabilidad para 3 períodos.

Dado que la probabilidad de encontrar el producto en el futuro es una función decreciente en el tiempo, si los clientes intentan maximizar su utilidad esperada, comprarán sólo en los instantes en que se producen los cambios de precios. De esta forma, son relevantes sólo aquéllos puntos de la función $g_k(t)$ que coinciden con el inicio de cada período (ver figura 3.2(b)). De forma equivalente a lo que se hizo con el decaimiento exponencial de las valoraciones de los clientes, se define la probabilidad $\alpha_{j,k}$ de encontrar el producto en el período j que estima un cliente que llega en el período k como:

$$\alpha_{j,k} = g_k(l_{j-1}) \quad \forall j \geq k.$$

Finalmente, en base a los supuestos presentados previamente, se construyó el siguiente modelo matemático para la decisión de un consumidor estratégico que llega a la tienda en el período k.

$$\max_{x_j} \left\{ \sum_{j=k}^{K} (r_{k,k} \cdot e^{-\beta(l_{j-1}-l_{k-1})} - p_j) \cdot \alpha_{j,k} \cdot x_j \right\} \tag{3.6}$$

$$\text{s.a} \qquad \sum_{j=k}^{K} x_j \leq 1$$

$$x_j \in \{0,1\} \qquad \forall j$$

donde:

$$p_k \;=\; \text{precio de venta fijado por el retailer para el período } k\ (p_k \geq p_{k+1}).$$

$$x_k \;=\; \begin{cases} 1 & \text{si el cliente compra el producto en el } k\text{–ésimo período.} \\ 0 & \text{si el cliente no compra el producto en el } k\text{–ésimo período.} \end{cases}$$

El cliente debe elegir el período para el cual el valor esperado de su excedente es mayor. Estos excedentes corresponden a los términos que acompañan a las variables de decisión, x_j, en la función objetivo. La primera restricción simplemente obliga al cliente a comprar en un sólo período, o bien, a no comprar. La segunda restricción establece la naturaleza binaria de las variables de decisión.

3.3. Modelo de *Pricing*: Caso Consumidor Estratégico

En el modelo de *pricing* presentado en la sección 3.1, el comportamiento del consumidor se ve reflejado a través de la tasa de demanda $\mu_k(p_k)$. Para el caso específico en que los consumidores son miopes, esta tasa es calculada como se muestra en (3.3). El modelo desarrollado en esta sección incorpora al cálculo de esta tasa, el modelo inter-temporal de maximización de utilidad (3.6) usado por los consumidores estratégicos para escoger el período en que realizan sus compras.

Recordemos que el consumidor realizará la compra en el período en que su excedente es mayor. De esta forma, el valor óptimo del problema planteado en (3.6) está dado simplemente por:

$$\begin{aligned} \max \big\{ 0, (r_{k,k} - p_k) \cdot \alpha_{k,k}, (r_{k,k} \cdot e^{-\beta(l_k - l_{k-1})} - p_{k+1}) \cdot \alpha_{(k+1),k}, \\ (r_{k,k} \cdot e^{-\beta(l_{k+1} - l_{k-1})} - p_{k+2}) \cdot \alpha_{(k+2),k}, \dots \big\} . \end{aligned} \tag{3.7}$$

La empresa conoce con exactitud los valores del factor de decaimiento del precio de reserva, la estimación de la probabilidad de encontrar el producto y la distribución acumulada del precio de reserva $F_k(p)$ de los consumidores. Dado que la única variable dentro

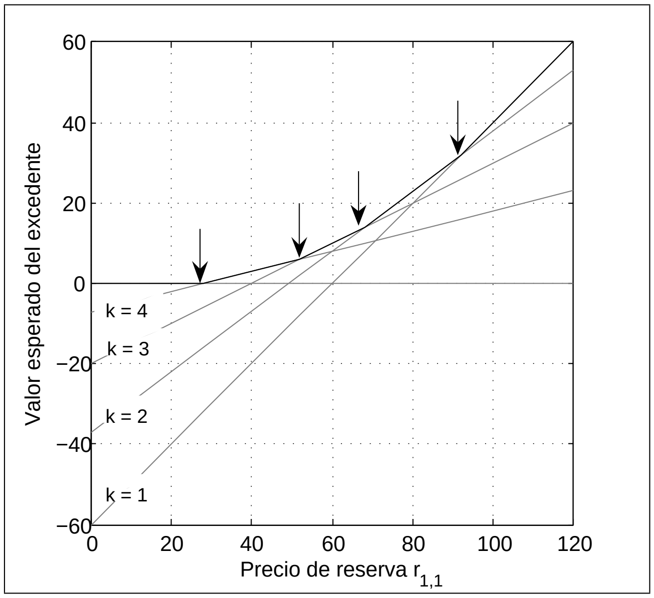

FIGURA 3.3. Cálculo de puntos críticos

de la expresión en (3.7) es el precio de reserva inicial $r_{k,k}$ del cliente, cada uno de sus elementos corresponde a una recta. Variando los valores de $r_{k,k}$ dentro del dominio de $F_k(p)$ se pueden obtener los valores críticos del precio de reserva, entre los cuales el cliente elige cierto período para comprar.

Veamos cómo se encuentran los valores críticos del precio de reserva de los clientes que llegan en el primer período, para una instancia particular del problema compuesta de 4 períodos. En la figura 3.3 se observan las 5 rectas correspondientes de la ecuación (3.7), para valores de $r_{1,1}$ entre 0 y 120. La envolvente superior de esta familia de funciones, es decir, la curva que se forma al unir los máximos sobre todo el dominio de $F_k(p)$, representa el máximo excedente esperado en función del precio de reserva. Se indican con una flecha los puntos donde esta nueva función no es diferenciable, que corresponden a los valores críticos de $r_{1,1}$ para los cuales el comprador pasa a comprar en otro período.

$$B_{0,k} + \sum_{j=k}^{K} B_{j,k} = 1, \tag{3.8}$$

donde $B_{0,k}$ es la probabilidad de que un cliente que llega en el k-ésimo período termine no comprando.

El orden en que se ubicarán las rectas correspondientes a los excedentes esperados en cada uno de los períodos, dependerá de la magnitud de los descuentos de los precios, del decaimiento de la valoración de los clientes por el producto y de la forma en que éstos estiman la probabilidad de encontrar el producto en el futuro. Por esta razón, no es posible escribir una expresión cerrada para la probabilidad de que un cliente decida comprar el producto en cada período, excepto en el caso particular en que los descuentos entre dos períodos consecutivos son mayores que los decaimientos en el precio de reserva de los clientes. Este resultado se plantea formalmente en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 3.1. *Si entre todo par de períodos consecutivos del horizonte de venta, la caída del precio del producto es mayor que la caída del precio de reserva de los clientes, i.e. si:*

$$\frac{q_j}{q_{j+1}} > e^{-\beta(l_{j-1}-l_j)} \quad \forall\, 1 \le j < K,$$

entonces para cada período existe un rango de precios de reserva entre los cuales se hace conveniente comprar. De esta forma, la probabilidad $B_{j,k}$ de encontrar el producto en el período j, estimada por un cliente que llega a la tienda en el período k, es siempre distinta de 0 y está dada por:

$$B_{j,k} = \begin{cases} 1 - F(q_j p) & \text{si } k = j = K \\ 1 - F\left(\frac{(q_k - \alpha_{(k+1),k}\cdot q_{k+1})p}{1-\alpha_{(k+1),k}\cdot e^{-\beta(l_k - l_{k-1})}}\right) & \text{si } k = j < K \\ F\left(\frac{(\alpha_{(j-1),k}\cdot q_{j-1} - \alpha_{j,k}\cdot q_j)p}{\alpha_{(j-1),k}\cdot e^{-\beta(l_{j-2}-l_{k-1})} - \alpha_{j,k}\cdot e^{-\beta(l_{j-1}-l_{k-1})}}\right) & \text{si } k < j < K \\ \quad -F\left(\frac{(\alpha_{j,k}\cdot q_j - \alpha_{(j+1),k}\cdot q_{j+1})p}{\alpha_{j,k}\cdot e^{-\beta(l_{j-1}-l_{k-1})} - \alpha_{(j+1),k}\cdot e^{-\beta(l_j - l_{k-1})}}\right) & \\ F\left(\frac{(\alpha_{(K-1),k}\cdot q_{K-1} - \alpha_{K,k}\cdot q_K)p}{\alpha_{(K-1),k}\cdot e^{-\beta(l_{K-2}-l_{k-1})} - \alpha_{K,k}\cdot e^{-\beta(l_{K-1}-l_{k-1})}}\right) - F\left(\frac{q_K p}{e^{-\beta(l_{K-1}-l_{k-1})}}\right) & \text{si } k < j = K. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Para que sea conveniente comprar en todos los períodos, el excedente obtenido al adquirir el producto en cada período debe ser máximo y positivo, para algún intervalo de precios de reserva. Gráficamente, esto significa que las rectas de excedente esperado para todos los períodos, deben formar parte de la envolvente superior (ver figura 3.3).

Por otra parte, se cumple que:

$$\alpha_{k,k} > \alpha_{k+1,k}e^{-\beta(l_k - l_{k-1})} > \ldots > \alpha_{K,k}e^{-\beta(l_{K-1} - l_{k-1})}$$

y adicionalmente,

$$-q_k\alpha_{k,k}p < -q_{k+1}\alpha_{k+1,k}p < \ldots < -q_K\alpha_{K,k}p.$$

Esto significa que las pendientes de las rectas correspondientes a los excedentes esperados en cada período, disminuyen mientras más avanzado se encuentra éste en la temporada de venta, y que los interceptos con el eje y, se hacen menos negativos. Bajo estas condiciones, la única forma de que sea conveniente comprar en un período cualquiera j, es que la recta correspondiente al excedente del período $j-1$, comience a ser positiva para un precio de reserva mayor que la recta del excedente del período j. En otras palabras, mientras mayor es el período, menor debe ser el precio de reserva para el cual la recta de excedente esperado corta al eje x.

Generalizando, para que existan probabilidades de que los clientes compren en todos los períodos deberá cumplirse que:

$$q_k p > \frac{q_{k+1}p}{e^{-\beta(l_k - l_{k-1})}} > \ldots > \frac{q_K p}{e^{-\beta(l_{K-1} - l_{k-1})}}.$$

Tal como se observa en la figura 3.3, los puntos críticos $r_{(j \cap j-1)}$ (en que un cliente en particular pasaría de comprar en el período j al período $j-1$) corresponden a la intersección entre las rectas de los excedentes esperados de los períodos involucrados y están dados por:

$$r_{(j \cap j-1)} = \frac{(\alpha_{(j-1),k} \cdot q_{j-1} - \alpha_{j,k} \cdot q_j)p}{\alpha_{(j-1),k} \cdot e^{-\beta(l_{j-2} - l_{k-1})} - \alpha_{j,k} \cdot e^{-\beta(l_{j-1} - l_{k-1})}} \quad \forall\, k < j \leq K.$$

Para obtener el valor de $B_{j,k}$, se debe calcular la probabilidad de que el precio de reserva se encuentre dentro del rango en que el excedente esperado del consumidor en el período j es máximo, delimitado por el o los puntos críticos correspondientes. Así se obtiene finalmente que:

$$B_{j,k} = \begin{cases} 1 - F(r_{(0\cap j)}) & \text{si } k = j = K \\ 1 - F(r_{(j+1\cap j)}) & \text{si } k = j < K \\ F(r_{(j\cap j-1)}) - F(r_{(j+1\cap j)}) & \text{si } k < j < K \\ F(r_{(j\cap j-1)}) - F(r_{(0\cap j)}) & \text{si } k < j = K \end{cases}$$

donde $r_{(0\cap j)}$ es la intersección entre la recta de excedente esperado del período j y el eje x.

□

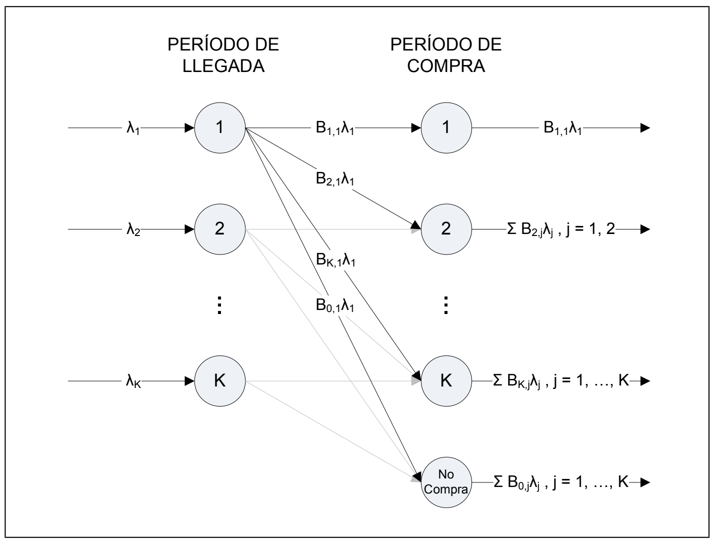

FIGURA 3.4. Descomposición del proceso de llegada al período k.

La llegada de clientes a la tienda durante el período k, puede descomponerse en un total de $K - k + 2$ procesos: $K - k + 1$ procesos de llegada de clientes que deciden comprar en los períodos $k, k + 1, ..., K$ y un proceso de llegada de clientes que nunca comprará porque su precio de reserva siempre es menor que el precio al que se ofrecen los productos. Por propiedades del proceso de *Poisson*, la tasa de llegada de cada uno de estos procesos está dada por:

$$\lambda_{j,k} = \lambda_k \cdot B_{j,k} \qquad k \leq j \leq K. \tag{3.9}$$

Finalmente, se obtiene que el proceso de llegada de compradores efectivos a un período k cualquiera, es igual a la suma de los clientes que llegan durante cada uno de los períodos hasta k y eligen comprar en k (ver figura 3.4). Dado que todos estos sub-procesos distribuyen

Poisson, se puede concluir que el proceso de llegada de compradores al k-ésimo período es también un proceso de *Poisson*, cuya tasa está dada por:

$$\mu_k(p_k) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{k,i}(p_k) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot B_{k,i}(p_k). \tag{3.10}$$

Entonces para incorporar el comportamiento estratégico del consumidor al modelo de *pricing* presentado en la sección 3.1, basta con reemplazar la expresión para las tasas efectivas de demanda $\mu_k(p_k)$ calculada en (3.3) por la expresión (3.10).

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

A continuación se examinan algunas características del modelo de *pricing* propuesto en la sección 3.3. Dado que no es posible encontrar una expresión cerrada para la solución óptima de este problema, se presenta un análisis de lo que ocurre en una serie de casos especiales, en que los parámetros que caracterizan el comportamiento de los consumidores tienen valores extremos.

4.1. Tasa de Demanda Efectiva

Es posible notar de manera más o menos intuitiva que un consumidor miope tiene opciones más limitadas que un consumidor estratégico para adquirir el producto. A diferencia de los consumidores miopes, si los consumidores estratégicos no valoran lo suficiente el producto como para comprarlo al precio al que se encuentra en el mismo momento en que arriban a la tienda, podrán aplazar su compra a un período posterior si es que esperan que los descuentos sean convenientes para ellos.

Por esta razón, sería esperable que la demanda total por el producto durante toda la temporada de venta, fuese mayor si los consumidores son estratégicos que si éstos son miopes. Este hecho se plantea formalmente en la proposición 4.1.

PROPOSICIÓN 4.1. *Cuando los consumidores son estratégicos, el valor esperado de la demanda agregada durante todo el horizonte de venta es mayor que el valor esperado de la demanda agregada en el caso en que los consumidores son miopes, si existe un par de períodos entre los cuales la caída del precio del producto es mayor que la caída del precio de reserva de los clientes, i.e. si la trayectoria de precios cumple:*

$$\frac{q_j}{q_k} < e^{-\beta(l_{j-1}-l_{k-1})}$$

para algún par de períodos (j,k) *tal que* $1 \leq k < j \leq K$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $D_k^E(p_k)$ la variable aleatoria que representa la demanda agregada por el producto en el período k si los consumidores son estratégicos y $D_k^M(p_k)$, la misma variable en el caso miope.

Queremos demostrar que:

$$\mathbb{E}\Big\{\sum_{k=1}^{K} D_k^E(p_k)\Big\} > \mathbb{E}\Big\{\sum_{k=1}^{K} D_k^M(p_k)\Big\}.$$

Se define $D_k(p_k) = T_k(p_k) - N_k(p_k)$, donde $T_k(p_k)$ es la variable aleatoria que representa la llegada de clientes a la tienda en el período k, y $N_k(p_k)$ la variable aleatoria que corresponde a los clientes que llegan a la tienda en el período k, pero que deciden no comprar. Así se tendrá que:

$$\mathbb{E}\Big\{\sum_{k=1}^{K}[T_k^E(p_k) - N_k^E(p_k)]\Big\} > \mathbb{E}\Big\{\sum_{k=1}^{K}[T_k^M(p_k) - N_k^M(p_k)]\Big\}.$$

Dado que las variables de llegada $T_k(p_k)$ tienen la misma distribución tanto en el caso miope como en el caso estratégico, se obtiene:

$$\mathbb{E}\Big\{\sum_{k=1}^{K} N_k^E(p_k)\Big\} < \mathbb{E}\Big\{\sum_{k=1}^{K} N_k^M(p_k)\Big\}$$

$$\sum_{k=1}^{K} \lambda_k B_{0,k}(p_k) < \sum_{k=1}^{K} \lambda_k F_k(p_k).$$

Para que se cumpla esta desigualdad es necesario que:

$$B_{0,k}(p_k) < F_k(p_k)$$

para algún período k. Recordando el método para calcular las probabilidades $B_{j,k}$ propuesto en la sección 3.3, es posible notar que:

$$B_{0,k}(p_k) = F_k(r_x) - F_k(0),$$

donde

$$
\begin{aligned}
r_x &= \min\left\{p_k, \frac{p_{k+1}}{e^{-\beta(l_k-l_{k-1})}}, \frac{p_{k+2}}{e^{-\beta(l_{k+1}-l_{k-1})}}, \ldots, \frac{p_K}{e^{-\beta(l_K-l_{k-1})}}\right\} \\
&= \min\left\{q_k p, \frac{q_{k+1}p}{e^{-\beta(l_k-l_{k-1})}}, \frac{q_{k+2}p}{e^{-\beta(l_{k+1}-l_{k-1})}}, \ldots, \frac{q_K p}{e^{-\beta(l_K-l_{k-1})}}\right\}.
\end{aligned}
$$

Como $F_k(0) = 0$, buscamos simplemente que $F_k(r_x) < F_k(p_k)$, o sea, que $r_x < p_k$ puesto que $F_k(\cdot)$ es una función creciente. Para que se cumpla esta condición basta con que:

$$
\begin{aligned}
\frac{q_j}{e^{-\beta(l_{j-1}-l_{k-1})}} &< q_k \\
\frac{q_j}{q_k} &< e^{-\beta(l_{j-1}-l_{k-1})},
\end{aligned}
$$

para algún par de períodos (j, k) tal que $1 \leq k < j \leq K$. $\square$

Esta proposición tiene una interesante consecuencia práctica. Así como la demanda efectiva esperada durante todo el horizonte de venta puede ser mayor en el caso estratégico que en el caso miope, también podrá serlo la venta perdida si es que el inventario está muy ajustado al número de potenciales clientes. En consecuencia, el ignorar el comportamiento estratégico de los consumidores al fijar los precios, no sólo llevará a ingresos sub-óptimos, sino que también podrá provocar un costo de imagen importante para la empresa.

4.2. Alto Factor de Decaimiento

Si el precio de reserva de un cliente decae muy rápidamente, es esperable que no tenga mucho sentido para él posponer su compra a períodos posteriores. En el extremo, cuando el factor de decaimiento β tiende a infinito, el precio de reserva del cliente es prácticamente nulo en los períodos siguientes al de su arribo. De esta forma, el único momento en que su excedente podría ser positivo corresponde al período en que llega a la tienda. Esta idea nos lleva a plantear la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 4.2. *Cuando el factor de decaimiento β tiende a infinito, un cliente estratégico se comportará de la misma forma que un consumidor miope. En este caso, resolver* *el problema de pricing de una empresa que enfrenta a una población de consumidores estratégicos será equivalente a resolver el problema para consumidores miopes.*

DEMOSTRACIÓN. Si el factor de decaimiento β se hace infinitamente grande, el problema enfrentado por un consumidor estratégico que llega a la tienda en el período k es el siguiente:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\beta\to\infty} \max \Big\{0, (r_{k,k} - p_k), (r_{k,k} \cdot e^{-\beta(l_k - l_{k-1})} - p_{k+1}) \cdot \alpha_{(k+1),k}, \\
&\qquad\qquad (r_{k,k} \cdot e^{-\beta(l_{k+1} - l_{k-1})} - p_{k+2}) \cdot \alpha_{(k+2),k}, \ \ldots \Big\} \\
&= \max \Big\{0, (r_{k,k} - p_k), -p_{k+1} \cdot \alpha_{(k+1),k}, -p_{k+2} \cdot \alpha_{(k+2),k}, \ \ldots \Big\} \\
&= \max \{0, (r_{k,k} - p_k)\},
\end{aligned}$$

puesto que $p_j > 0$ y $\alpha_{j,k} > 0 \ \forall \ (j,k)$. El problema del consumidor se reduce a escoger entre dos opciones: comprar en el mismo período en que arriba a la tienda, o bien, no comprar. De esta forma, se tendrá:

$$B_{j,k} = \begin{cases} 1 - F(p_k) & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

En consecuencia,

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot B_{k,i} = \lambda_k \cdot B_{k,k} = \lambda_k (1 - F(p_k)),$$

que es la misma tasa utilizada en el modelo del consumidor miope. Así el problema de una empresa que enfrenta a una población de consumidores estratégicos, cuyo factor de decaimiento β tiende a infinito, es el mismo problema que enfrenta una empresa cuyos consumidores son miopes. Por lo tanto, ambos problemas de optimización tienen la misma solución óptima. $\square$

4.3. Producto no Disponible en el Futuro

En el caso en que los clientes estiman que existe una probabilidad extremadamente baja de encontrar el producto en el futuro, tampoco hay incentivos para postergar la compra. El excedente esperado será prácticamente nulo en todos los períodos posteriores al momento en que el cliente arriba a la tienda. Por esta razón, si el cliente decidiera comprar el producto, lo haría sólo en el mismo período en que llegó. Esta idea intuitiva y otras conclusiones se resumen en la proposición 4.3.

PROPOSICIÓN 4.3. *Cuando la probabilidad α_{jk} de encontrar el producto en cualquier período j mayor que el período de arribo k tiende a cero (i.e. cuando el parámetro a tiende a cero), un cliente estratégico se comportará de la misma forma que un consumidor miope. En este caso, resolver el problema de pricing de una empresa que enfrenta a una población de consumidores estratégicos será equivalente a resolver el problema para consumidores miopes.*

DEMOSTRACIÓN. Si el parámetro a se acerca a cero, el problema enfrentado por un consumidor estratégico que llega en el período k es el siguiente:

$$\begin{aligned}
&\lim_{a\to 0} \max \big\{0, (r_{k,k} - p_k), (r_{k,k} \cdot e^{-\beta(l_k - l_{k-1})} - p_{k+1}) \cdot \alpha_{(k+1),k}, \\
&\qquad (r_{k,k} \cdot e^{-\beta(l_{k+1} - l_{k-1})} - p_{k+2}) \cdot \alpha_{(k+2),k}, \ \dots \big\} \\
&= \max \big\{0, (r_{k,k} - p_k), (r_{k,k} \cdot e^{-\beta(l_k - l_{k-1})} - p_{k+1}) \cdot 0, \\
&\qquad (r_{k,k} \cdot e^{-\beta(l_{k+1} - l_{k-1})} - p_{k+2}) \cdot 0, \ \dots \big\} \\
&= \max \{0, (r_{k,k} - p_k)\},
\end{aligned}$$

puesto que

$$\lim_{a\to 0} \alpha_{j,k} = \lim_{a\to 0} 1 - (\frac{l_{j-1} - l_{k-1}}{l_K - l_{k-1}})^a = 0 \quad \forall\, j > k.$$

El problema del consumidor se reduce a escoger entre dos opciones: comprar en el mismo período en que arriba a la tienda, o bien, no comprar nunca. De manera equivalente a lo que se hizo en la demostración de la proposición 4.2, se obtiene que el problema de una empresa que enfrenta una población de consumidores estratégicos, cuyo parámetro a tiende a cero, es igual al problema en el caso en que los consumidores son miopes. Por lo tanto, ambos tienen la misma solución óptima. $\square$

4.4. Producto Altamente Disponible y Sin Decaimiento

A diferencia de lo que ocurre en los dos casos anteriores, si el precio de reserva de los consumidores decae muy poco de un período a otro y además los clientes estiman que el producto no alcanzará a agotarse cuando termine la temporada de venta, ellos deberían estar muy dispuestos a postergar su compra. Sería esperable que mientras más cercano a 0 es el factor de decaimiento y más cercana a 1 la probabilidad de encontrar el producto en el futuro, mayor fuera la cantidad de clientes que decide aplazar su compra a los períodos finales del horizonte de venta. Siguiendo esta intuición se formula la proposición 4.4.

PROPOSICIÓN 4.4. *Cuando el parámetro β tiende a 0 y la probabilidad α_{jk} de encontrar el producto en cualquier período j mayor que el período de arribo k tiende a 1 (i.e. cuando el parámetro a tiende a infinito), todos los consumidores postergan su compra hasta el último período del horizonte de venta. De esta forma, el problema de pricing de la empresa se reduce a maximizar el ingreso esperado del último período.*

Si adicionalmente el nivel de inventario que se mantiene en la tienda es muy grande en comparación con la demanda (i.e. si el inventario tiende a infinito), se puede afirmar que el precio inicial fijado por el modelo propuesto será mayor que el precio que fijaría el modelo de pricing para consumidores miopes.

DEMOSTRACIÓN. Si el factor de decaimiento β se hace prácticamente nulo y el parámetro a tiende a infinito, el problema enfrentado por un consumidor estratégico que arriba a la tienda en el período k es el siguiente:

$$\lim_{\substack{\beta\to 0\\ a\to\infty}} \max\Big\{0, (r_{k,k} - p_k), (r_{k,k}\cdot e^{-\beta(l_k - l_{k-1})} - p_{k+1})\cdot \alpha_{(k+1),k},$$

$$(r_{k,k}\cdot e^{-\beta(l_{k+1} - l_{k-1})} - p_{k+2})\cdot \alpha_{(k+2),k},\ \ldots\Big\}$$

$$= \max\left\{0, (r_{k,k} - p_k), (r_{k,k} - p_{k+1}), (r_{k,k} - p_{k+2}),\ \ldots\right\}.$$

Dado que la trayectoria de precios es decreciente en el tiempo, se tendrá que:

$$(r_{0k} - p_k) < (r_{0k} - p_{k+1}) < (r_{0k} - p_{k+2}) < \cdots < (r_{0k} - p_K).$$

En consecuencia, el consumidor estratégico debe escoger simplemente entre comprar en el último período del horizonte de venta, o bien, no adquirir nunca el producto. Entonces tendremos:

$$\max\Big\{0, (r_{k,k} - p_K)\Big\}.$$

De esta forma, la probabilidad B_{jk} de que un cliente que arriba a la tienda en el período k compre el producto en el período j está dada por:

$$B_{j,k} = \begin{cases} 1 - F(p_j) & \text{si } j = K \\ 0 & \text{si } j \neq K. \end{cases}$$

Así, la tasa de demanda efectiva $\mu_k(p_k)$ está dada por:

$$\mu_k(p_k) = \begin{cases} (1 - F(p_k))\sum_{i=1}^{k} \lambda_i & \text{si } k = K \\ 0 & \text{si } k \neq K. \end{cases}$$

El problema de *pricing* de la empresa será entonces:

$$
\begin{aligned}
&\max_{p\geq 0}\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\big[\min(c,j)p+VF_2(c-\min(c,j),p)\big]\cdot\mathbb{P}\{D_1(p)=j\}+cp\right\}\\
=&\max_{p\geq 0}\left\{-cp+VF_2(c,p)+cp\right\}=\max_{p\geq 0}\left\{-cq_kp+VF_3(c,p)+cq_kp\right\}\\
&\vdots\\
=&\max_{p\geq 0}\left\{VF_K(c,p)\right\}.
\end{aligned}
$$

Esto significa que la empresa deberá simplemente maximizar el ingreso esperado por las compras realizadas en el último período. Si además se tiene que el nivel de inventario tiende a infinito, el problema que debe resolver la empresa corresponde a:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{c\to\infty}\max_{p\geq 0}\{VF_K(c,p)\}\\
=&\lim_{c\to\infty}\max_{p\geq 0}\{\sum_{j=0}^{\infty}[\min(c,j)q_Kp]\cdot\mathbb{P}\{D_K(q_Kp)=j\}\}\\
=&\max_{p\geq 0}\{\sum_{j=0}^{\infty}[jq_Kp]\cdot\mathbb{P}\{D_K(q_Kp)=j\}\}\\
=&\max_{p\geq 0}\{\mu_K\}\\
=&\max_{p\geq 0}\{\lambda_1q_Kp(1-F(q_Kp))+\lambda_2q_Kp(1-F(q_Kp))+\cdots+\lambda_Kq_Kp(1-F(q_Kp))\}\\
=&\max_{p\geq 0}\{\lambda_1h(q_Kp)+\lambda_2h(q_Kp)+\cdots+\lambda_Kh(q_Kp)\},
\end{aligned}
$$

donde $h(p)=p(1-F(p))$. El precio que optimiza esta función es p^*, es decir, $h(p^*)\geq h(p)\ \forall p$. De esta forma, el precio inicial p^E que maximiza el ingreso esperado de la empresa en el caso estratégico es $p^E=p^*/q_K$.

Por otra parte, tal como fue demostrado en Bitran y Mondschein (1997), en el caso en que los consumidores son miopes, si el inventario tiende a infinito el modelo de maximización puede reescribirse como:

$$\max_{p\geq 0}\{\lambda_1 h(p) + \lambda_2 h(q_2 p) + \cdots + \lambda_K h(q_K p)\}.$$

Asumiendo que $h(p)$ es una función cuasicóncava (hecho que es cierto para las distribuciones *Weibull*, exponencial y uniforme), el precio inicial p^M que maximiza el ingreso esperado en el caso miope es menor que p^E. $\square$

5. RESULTADOS NUMÉRICOS

En esta sección se presenta una serie de experimentos computacionales que buscan mostrar el comportamiento de la solución óptima del modelo de *pricing* desarrollado, en función del nivel de inventario inicial manejado por la empresa y de los parámetros que caracterizan a la población de consumidores (β y a). Además se determina la magnitud de la pérdida en la que se incurre al utilizar erróneamente un modelo para consumidores miopes cuando los consumidores son estratégicos al realizar sus decisiones de compra.

En los experimentos se considera un horizonte de venta de 15 días compuesto por cuatro períodos, el primero de 6 días y los tres siguientes de 3 días cada uno. La empresa enfrenta una tasa promedio de demanda de 70 clientes por el producto, la cual se distribuye uniformemente durante toda la temporada. El precio de reserva de los consumidores tiene una distribución *Weibull* de media 202,8 y desviación estándar 56,5.

Para resolver este problema se utilizó un algoritmo de búsqueda directa llamado *Nelder–Mead Simplex Search*. Este algoritmo busca máximos locales realizando evaluaciones sucesivas de la función objetivo, sin necesidad de calcular su gradiente (para mayores detalles acerca del algoritmo utilizado consultar anexo B). Bajo ciertas condiciones la función objetivo del problema de *pricing* que se intenta resolver puede poseer más de un máximo local. Para encontrar el máximo global se utilizó este algoritmo en conjunto con un método heurístico llamado *multi-start hill climbing* (ver Martí, 2003), el cual inicia la búsqueda desde distintos puntos con el fin de explorar mejor el espacio de soluciones factibles y no quedar atrapado en óptimos locales.

5.1. Sensibilidad Respecto al Nivel de Inventario Inicial

En la figura 5.1 se puede observar lo que ocurre con el precio inicial a medida que aumenta el nivel de inventario existente al comienzo del horizonte de venta, para diferentes valores del parámetro β. En el caso miope el precio inicial del producto decrece cuando aumenta el nivel de inventario. Además mientras más profundos son los descuentos que se

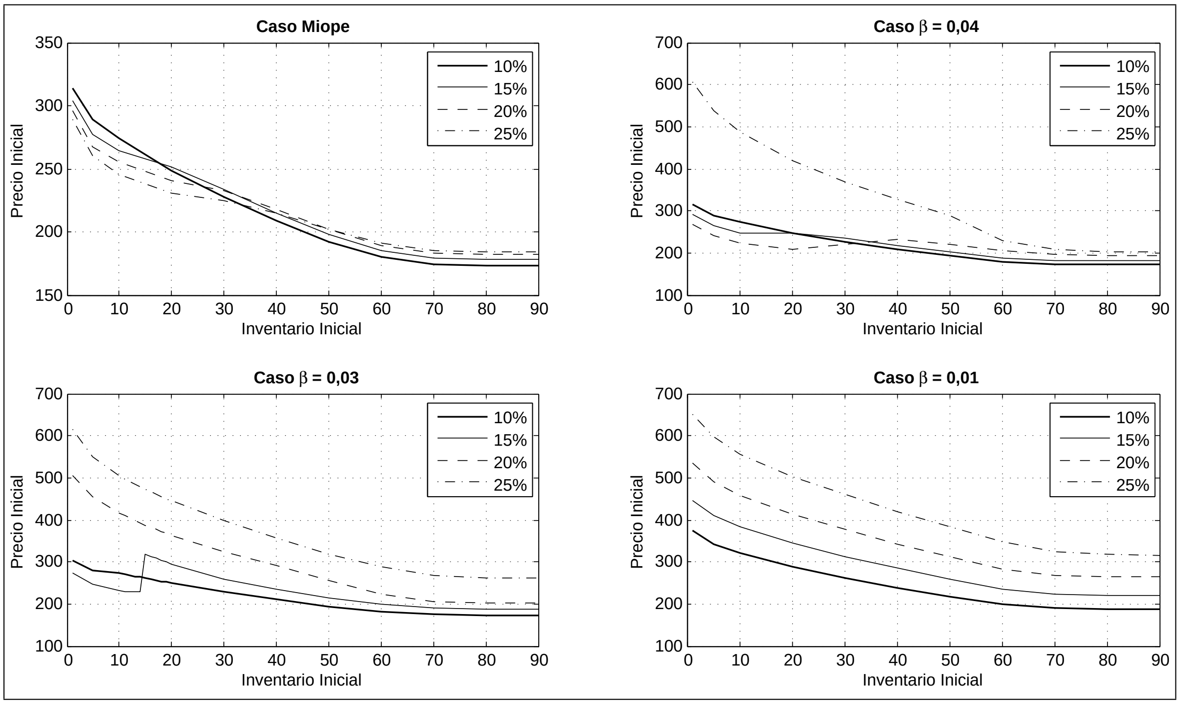

FIGURA 5.1. Precio inicial en función del nivel de inventario inicial para $a = 2$ y cuatro niveles distintos de β.

aplican a los precios, menor es el precio inicial del producto hasta alcanzar cierto nivel de inventario, para el cual comienza a regir la relación inversa.

Esta situación se explica claramente en Bitran y Mondschein (1997). Cuando el inventario es pequeño y los descuentos son grandes, se debe comenzar poniendo un precio bajo, que permita a la empresa vender todo el inventario durante los primeros períodos del horizonte de venta, de modo que los descuentos más profundos nunca se lleven a cabo. Al contrario, cuando el inventario es grande es difícil que éste se venda completamente durante los primeros períodos. El precio inicial deberá ser más alto, para que cuando tengan lugar los descuentos más profundos, la tarifa media no llegue a ser demasiado baja.

A diferencia de lo que ocurre en el caso miope, cuando los consumidores son suficientemente estratégicos en sus decisiones de compra (ver caso $\beta = 0,01$ de la figura 5.1), mientras mayores son los descuentos, mayor es el precio inicial al que deben ponerse los productos para cualquier nivel de inventario. Esto se produce porque en la medida que aumentan los descuentos, mayor se hace también el incentivo que tienen los clientes a aplazar sus compras. De esta forma, es bastante probable que la mayor parte del inventario se venda durante los últimos períodos del horizonte de venta, cuando los descuentos son muy elevados. Para que el precio al que se venden los productos no sea muy bajo, el precio al comienzo de la temporada deberá ser más alto. La proposición 5.1 generaliza esta afirmación. Para valores de β intermedios se puede observar que se produce una transición entre lo que ocurre en el caso miope y estratégico.

PROPOSICIÓN 5.1. *Si los consumidores están muy dispuestos a postergar su compra (i.e. cuando β tiende a 0 y a tiende a infinito), mientras más profundos son los descuentos mayor es el precio que debe fijarse al comienzo del horizonte de venta, sea cual sea el nivel de inventario inicial.*

DEMOSTRACIÓN. Tal como se concluyó en la demostración de la proposición 4.4, el problema de *pricing* de la empresa cuando los consumidores están muy dispuestos a postergar su compra está dado por:

$$\begin{aligned}
&\max_{p\geq 0}\Big\{VF_K(c,p)\Big\}\\
=&\max_{p\geq 0}\Big\{\sum_{j=0}^{c}[(j-c)q_Kp\cdot\mathbb{P}\{D_K(q_Kp)=j\}]+q_Kpc\Big\}\\
=&\max_{p\geq 0}\Big\{f(q_Kp)\Big\}.
\end{aligned}$$

Sea p^* tal que $f(q_Kp^*)\geq f(q_Kp)\ \forall p$. Mientras menor es el valor de q_K, es decir, mientras mayor es el porcentaje de descuento aplicado por período, mayor es el precio que debe ponerse a los productos al comienzo del horizonte de venta. $\square$

5.2. Sensibilidad Respecto al Factor de Decaimiento

Se estudió el comportamiento del precio inicial fijado por el modelo en 9 escenarios diferentes, correspondientes a las combinaciones entre 3 niveles de inventario inicial (10, 35

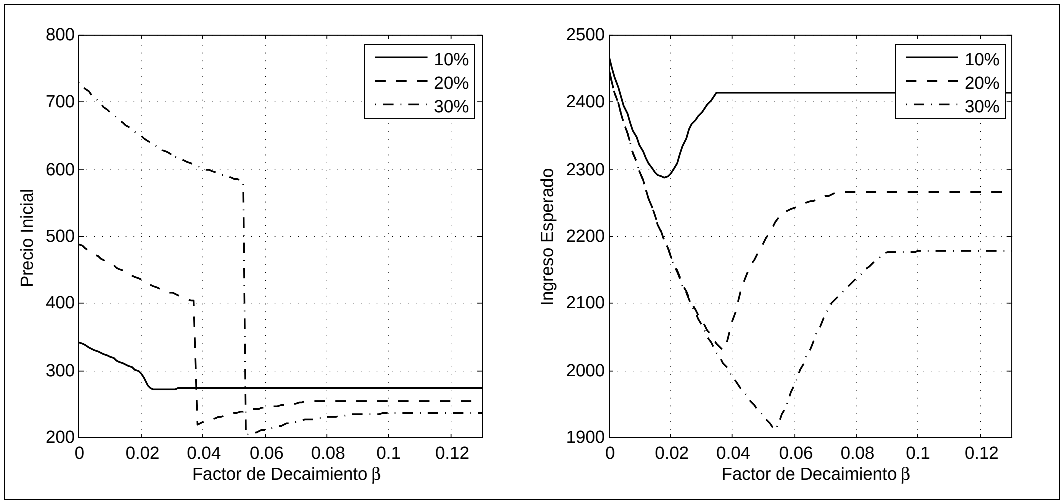

FIGURA 5.2. Precio inicial e ingreso esperado en función del factor de decaimiento para 10 unidades de inventario y $a = 2$.

y 60 unidades) y 3 porcentajes de descuento por período (10%, 20% y 30%). Los resultados obtenidos se encuentran en el anexo C.1. En todos los experimentos computacionales realizados se observa que cuando el factor de decaimiento del precio de reserva de los consumidores es muy cercano a cero, el precio fijado en el caso estratégico es mayor que el precio fijado en el caso miope. Este resultado es bastante esperable, puesto que para valores pequeños de β es altamente probable que la mayor parte de las ventas se produzca en los últimos períodos, cuando los descuentos son muy profundos.

A medida que aumenta el valor de β, los clientes están menos dispuestos a postergar su compra y el precio inicial comienza a descender poco a poco, acercándose al precio fijado por el modelo miope. Para inventarios bajos (10 y 35 unidades), llegado un cierto factor de decaimiento se produce una caída abrupta en los precios que los deja por debajo del nivel fijado por el modelo miope. Justamente en este punto, los ingresos esperados tienen su valor mínimo (ver figura 5.2).

Para comprender lo que ocurre en este caso, es necesario tener claro que en el modelo en estudio existen dos estrategias que pueden llevar a la empresa a obtener resultados muy similares. La primera consiste en mantener precios bajos, que incentiven una mayor cantidad de demanda y permitan que el inventario se venda durante los primeros períodos. La segunda es fijar precios más altos, que produzcan demandas agregadas menores y que hagan bastante probable que el inventario se venda al finalizar el horizonte de venta. La estrategia más adecuada dependerá del factor de decaimiento del precio de reserva de los consumidores. Cuando β es pequeño, los clientes están muy dispuestos a postergar sus compras, por lo que se hace conveniente una estrategia de precios altos. El ingreso esperado de utilizar esta estrategia va disminuyendo a medida que aumenta β. En consecuencia, para factores de decaimiento altos, es mejor pasar a una estrategia de precios bajos que hace que el ingreso esperado vaya aumentando.

Recordemos que para niveles bajos del factor de decaimiento de los precios de reserva, el precio inicial de los productos aumenta mientras más pronunciados son los descuentos. Por esta razón, tal como se observa en la figura 5.2, la magnitud del salto que se produce en los precios al variar β, es mayor cuando los descuentos aplicados son más grandes. Finalmente, cuando el nivel de inventario es alto, deja de producirse el salto en los precios fijados por el modelo estratégico. En este caso, a medida que aumenta el factor de decaimiento el precio disminuye lentamente hasta converger al precio que entrega el modelo miope.

5.3. Sensibilidad Respecto a la Probabilidad de Encontrar el Producto en el Futuro

En cuanto al efecto que tiene una variación en el parámetro a en la solución óptima, se distinguen dos comportamientos (ver figura 5.3). Cuando β es pequeño, a medida que a aumenta, crece también el precio aplicado hasta converger al valor que debería fijarse si la probabilidad de encontrar el producto en el futuro fuera siempre igual a 1. Al mismo tiempo, el ingreso esperado de la empresa disminuye. En este caso, el precio de reserva de los consumidores, decae muy poco período a período. Si adicionalmente aumenta la probabilidad de encontrar el producto, gran parte de los clientes postergará sus compras a los últimos períodos del horizonte de venta. Por esta razón, el precio debe crecer.

Por otra parte, cuando β es grande, mientras mayor es la probabilidad estimada por los consumidores de encontrar el producto en el futuro, menor es el precio fijado por el modelo. La valoración de los clientes decae rápidamente, por lo que el modelo fija una estrategia de precios bajos. Sin embargo, a medida que el valor de a aumenta, los clientes tienen más incentivos a postergar sus compras. El precio inicial debe ir disminuyendo para lograr que las compras se realicen en los primeros períodos, de modo que los descuentos nunca se lleven a cabo. Como consecuencia, los ingresos esperados también disminuyen. El detalle de los resultados obtenidos al variar el valor parámetro a se presenta en el anexo C.2.

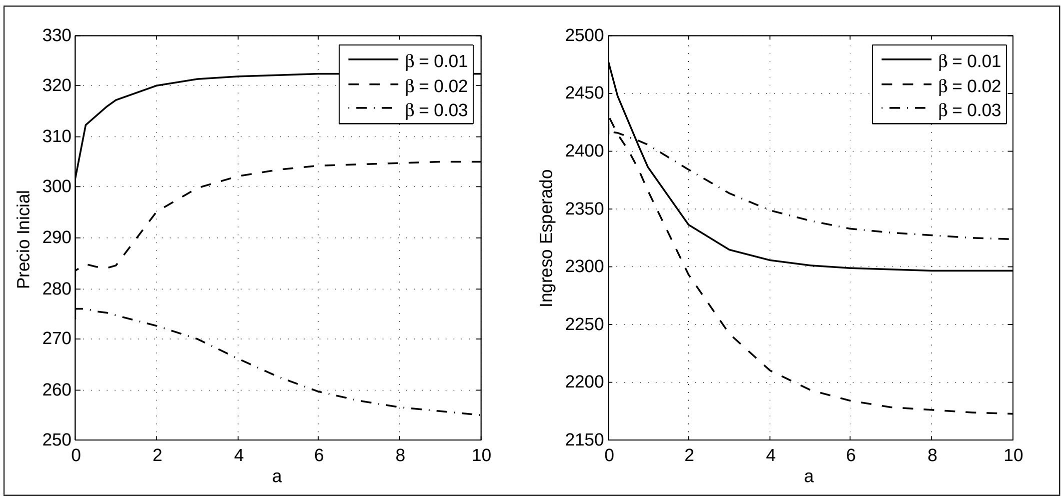

FIGURA 5.3. Precio inicial e ingreso esperado en función del parámetro a para 10 unidades de inventario y 10% de descuento por período y 3 niveles de β.

5.4. Magnitud del Error al Ignorar el Comportamiento Estratégico

Estudios previos (Besanko y Winston, 1990; Levin et al., 2006; Aviv y Pazgal, 2008) han determinado que una incorrecta categorización del comportamiento de los consumidores puede conducir a la empresa a pérdidas considerables en sus ingresos. En esta sección se determina la forma en que las características de los consumidores y el escenario de inventario y descuentos escogido por la empresa afectan la brecha que se produce en los ingresos. De los experimentos numéricos realizados se obtuvieron 4 conclusiones principales acerca de la magnitud del error que se comete al suponer que los consumidores son miopes, cuando éstos son estratégicos en sus decisiones de compra.

Mientras mayor es la profundidad de los descuentos, mayor es el error. A medida que aumentan los descuentos aplicados a los precios, aumenta también la disposición de los clientes a postergar sus compras a los últimos períodos del horizonte de venta. La tarifa promedio a la que finalmente se vende el producto, es cada vez más pequeña e inferior a la que espera una empresa que ignora que los consumidores son estratégicos. En consecuencia, los ingresos obtenidos serán también inferiores (ver Tabla 5.1).

Mientras mayor es el nivel de inventario, menor es el error. Cuando el nivel de inventario crece, se hace cada vez menos probable que todos los productos puedan ser vendidos durante los primeros períodos. Una empresa que utiliza un modelo para consumidores miopes, fijará precios considerando que inevitablemente buena parte de los productos se venderá al finalizar la temporada. De esta forma, la diferencia que se obtiene al comparar esta estructura de precios con la que se elegiría de considerar un modelo para consumidores estratégicos, es pequeña tanto en precios como en ingresos esperados (ver Tabla 5.1).

Mientras mayor es el factor de decaimiento del precio de reserva, menor es el error. Cuando β crece, disminuye la disposición de los clientes a postergar sus compras, puesto que su precio de reserva decae cada vez más rápido. Dado este comportamiento poco estratégico de los consumidores, el ignorar la posibilidad de que éstos aplacen sus compras a períodos posteriores tiene muy poco impacto en los ingresos (ver Tabla 5.2).

Mientras mayor es la probabilidad de encontrar el producto en el futuro, mayor es el error. Si la probabilidad estimada por los consumidores de encontrar el producto en el futuro es alta, gran parte de ellos realizará sus compras en los últimos períodos. El resultado es similar a lo que ocurre cuando aumenta la profundidad de los descuentos. Tanto la tarifa media como los ingresos obtenidos serán menores a los esperados por la empresa (ver Tabla 5.2).

TABLA 5.1. Brecha porcentual en el ingreso resultante de ignorar el comportamiento estratégico para distintos niveles de inventario y profundidad de descuentos. Se considera β = 0,01 y a = 2.

	% de Descuento			
Inventario	**10**	**15**	**20**	**25**
1	6,56%	17,97%	29,26%	39,13%
10	6,23%	16,82%	28,43%	39,25%
20	5,77%	14,01%	24,84%	36,00%
30	5,24%	13,17%	21,56%	31,74%
40	4,51%	12,15%	20,15%	28,66%
50	3,51%	10,19%	18,49%	26,44%
60	2,37%	7,34%	15,65%	23,62%
70	1,49%	4,89%	12,50%	20,56%
80	1,20%	3,96%	11,02%	18,95%
90	1,18%	3,85%	10,80%	18,66%

TABLA 5.2. Brecha porcentual en el ingreso resultante de ignorar el comportamiento estratégico para distintos niveles de niveles de factor de decaimiento y del parámetro a. Se considera un inventario de 10 unidades y un 20% de descuento por período.

	Factor de Decaimiento β			
a	**0,01**	**0,03**	**0,05**	**0,07**
1	21,31%	4,22%	0,48%	0,01%
2	28,43%	15,14%	2,36%	0,05%
3	29,39%	19,40%	4,04%	0,09%
4	31,86%	23,28%	4,93%	0,12%
5	35,91%	28,08%	5,64%	0,13%
6	39,11%	31,76%	6,39%	0,13%
7	41,44%	34,09%	7,16%	0,13%
8	42,69%	35,45%	7,86%	0,13%
9	43,09%	36,21%	8,45%	0,13%
10	43,15%	36,59%	8,91%	0,13%

6. CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS

En este trabajo se desarrolló un modelo que permite definir políticas de precios óptimas para empresas que enfrentan una población de consumidores estratégicos, que conscientes de que los precios siguen una trayectoria decreciente en el tiempo, evalúan postergar sus compras en espera de descuentos.

Algunos autores ya habían realizado esfuerzos por incorporar el comportamiento estratégico de los consumidores a los modelos de *pricing*. Sin embargo, todos sus estudios suponen que la estrategicidad puede ser descrita a través de una única componente (un decaimiento en el precio de reserva de los clientes, o una estimación del riesgo de quiebres de inventario, o un costo asociado a la espera, etc.). Este trabajo considera de manera simultánea en la modelación de la decisión de los consumidores dos de estas atenuantes para el aplazamiento de las compras: un decaimiento en la valoración que los clientes tienen por el producto y una estimación de la probabilidad de no encontrar el producto en períodos futuros. Adicionalmente, en este trabajo se eliminan algunas de las simplificaciones realizadas en estudios previos, tales como tomar un horizonte de venta de tan sólo dos períodos (Elmaghraby et al., 2008; Aviv y Pazgal, 2008), o considerar que el número de potenciales clientes es un número fijo conocido (Liu y vanRyzin, 2008; Levin et al., 2006; Su, 2007).

Una primera conclusión que se obtuvo del estudio del comportamiento de los consumidores, es que la demanda total por el producto durante toda la temporada de venta es mayor cuando los consumidores son estratégicos que cuando éstos son miopes. Clientes cuyos precios de reserva son menores que el precio al que se ofrecen los productos en el período en que arriban a la tienda, son potenciales compradores en períodos más avanzados del horizonte de venta. De esta forma, un modelo que ignora que los consumidores pueden postergar sus compras subestimará la demanda agregada por el producto.

A través de una serie de experimentos computacionales se concluyó que si los consumidores están muy dispuestos a postergar sus compras, mientras más profundos son los descuentos que se aplican sobre los precios, mayor es el precio que debe fijarse al comienzo del horizonte de venta, sea cual sea el nivel de inventario inicial. Este precio se encuentra por encima del que se obtendría de considerarse que los consumidores son miopes. Ahora bien, si el decaimiento en la valoración de los consumidores es grande y su estimación de la probabilidad de encontrar el producto en el futuro es pequeña, esta relación de precios se da sólo para inventarios altos. En otro caso (cuando el inventario es pequeño) mientras mayor es el descuento, menor es el precio que debe fijarse.

Se intentó determinar lo que ocurría cuando una empresa asume incorrectamente que sus consumidores son miopes, cuando éstos son estratégicos en sus decisiones de compra. Se encontró que este error puede llevar a pérdidas importantes en los ingresos de la empresa. Sin duda, el mayor impacto se da en firmas que aplican descuentos importantes a los precios, manejan un inventario de productos reducido, y se enfrentan a clientes cuyas valoraciones decaen lentamente y estiman que la probabilidad de quiebres de inventario es baja.

En trabajos futuros sería interesante incorporar heterogeneidad en la población de consumidores, tanto en la distribución de sus precios de reserva y su respectiva declinación como en el optimismo con que realizan sus estimaciones de la probabilidad de encontrar el producto en el futuro. Además podría considerarse lo que ocurre cuando existe una firma competidora, cuyas estrategias de precios tienen un impacto en la decisión de los clientes. Finalmente podrían incorporarse técnicas de aprendizaje al modelo, que permitan a la empresa ajustar mejor sus estimaciones de los parámetros que caracterizan el comportamiento estratégico de sus consumidores.

BIBLIOGRAFIA

Aviv, Y., y Pazgal, A. (2008). Optimal Pricing of Seasonal Products in the Presence of Forward-Looking Consumers. *Manufacturing & Service Operations Management*, *10*(3), 339-359.

Besanko, D., y Winston, W. (1990). Optimal Price Skimming by a Monopolist Facing Rational Consumers. *Management Science*, *36*(5), 555–567.

Bitran, G., y Caldentey, R. (2003). Commissioned Paper: An Overview of Pricing Models for Revenue Management. *Manufacturing & Service Operations Management*, *5*(3), 203–229.

Bitran, G., y Mondschein, S. (1997). Periodic Pricing of Seasonal Products in Retailing. *Management Science*, *43*(1), 64–79.

Chen, X., y Simchi-Levi, D. (2004). Coordinating Inventory Control and Pricing Strategies with Random Demand and Fixed Ordering Cost: The Infinite Horizon Case. *Operations Research*, *52*(6), 887–896.

Elmaghraby, W., Gulcu, A., y Keskinocak, P. (2008). Designing Optimal Preannounce Markdowns in the Presence of Rational Customers with Multiunit Demands. *Manufacturing & Service Operations Management*, *10*(1), 126-148.

Elmaghraby, W., y Keskinocak, P. (2003). Dynamic Pricing in the Presence of Inventory Considerations: Research, Overview, Current Practices and Future Directions. *Management Science*, *49*(10), 1287–1309.

Federgruen, A., y Heching, A. (1999). Combined Pricing and Inventory Control under Uncertainty. *Operations Research*, *47*(3), 454–475.

Feng, Y., y Gallego, G. (1995). Optimal Starting Times for End-of-Season Sales and Optimal Stopping Times for Promotional Fares. *Management Science*, *41*(8), 1371–1391.

Gallego, G., y Ryzin, G. van. (1994). Optimal Dynamic Pricing of Inventories with Stochastic Demand over Finite Horizons. *Management Science*, *40*(8), 999–1020.

Gallien, J. (2006). Dynamic Mechanism Design for Online Commerce. *Operations Research*, *54*(2), 291–310.

Lagarias, J., Reeds, J., Wright, M., y Wright, P. (1998). Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Algorithm in Low Dimensions. *SIAM Journal on Optimization*, *9*(1), 112–147.

Levin, Y., McGill, J., y Nediak, M. (2006). *Optimal Dynamic Pricing of Perishable Items by a Monopolist Facing Strategic Consumers.* (Working Paper, Queen's University)

Liu, Q., y vanRyzin, G. (2008). Strategic Capacity Rationing to Induce Early Purchases. *Management Science*, *54*(6), 1115–1131.

Martí, R. (2003). Multi–start Methods, Chapter 12. In F. Glover y G. Kochenberger (Eds.), *Handbook of metaheuristics* (pp. 355–368). Springer.

Nelder, J., y Mead, R. (1965). A Simplex Method for Function Minimization. *Computer Journal*, *7*(4), 308–313.

Smith, S., y Achabal, D. (1998). Clearance Pricing and Inventory Policies for Retail Chains. *Management Science*, *44*(3), 285–300.

Stokey, N. (1979). Intertemporal Price Discrimination. *The Quarterly Journal of Economics*, *93*(3), 355–371.

Su, X. (2007). Intertemporal Pricing with Strategic Customer Behavior. *Management Science*, *53*(5), 726-741.

Talluri, K., y Ryzin, G. van. (2004). *The Theory and Practice of Revenue Management*. Springer.

Xu, X., y Hopp, W. (2004). *Customer Heterogeneity and Strategic Behavior in Revenue Management: A Martingale Approach.* (Working paper, Northwestern University)

ANEXO A. CLASIFICACIÓN ESTUDIOS DE *PRICING* DINÁMICO

En esta sección se presenta una clasificación de los estudios previos de *pricing* dinámico que fueron revisados para realizar este trabajo. Cada paper fue categorizado en términos del tipo de problema que se resuelve y de los supuestos que se realizan en los modelos desarrollados con respecto a las características de la demanda, de los consumidores y la información de la que dispone la empresa. Finalmente, utilizando la misma categorización, se sitúa el modelo desarrollado en esta tesis en el contexto de la literatura existente.

Los aspectos considerados para realizar esta clasificación de los trabajos se enumeran a continuación.

(i) *Estructura de la demanda.* La demanda puede ser agregada, si no se distinguen las demandas individuales de cada consumidor; por una unidad o por múltiples unidades del producto.

(ii) *Llegadas.* Se puede suponer que los clientes llegan uno a uno (llegadas secuenciales), o bien, que todos están presentes al comienzo del horizonte de venta (simultáneas).

(iii) *Demanda determinística o estocástica.* La demanda puede ser determinística, o bien, puede corresponder a una variable aleatoria.

(iv) *Universo de consumidores.* El conjunto de consumidores potenciales del producto puede corresponder a un número finito, o puede ser infinito.

(v) *Estrategicidad.* Los consumidores pueden presentar un comportamiento de compra estratégico, si toman en cuenta toda la trayectoria de precios al decidir el momento en que realizan sus compras; o miope en caso contrario.

(vi) *Interacciones entre consumidores.* La decisión de un consumidor puede ser afectada por el comportamiento de compra del resto de los consumidores. Se distinguirán los casos en que esta interacción entre consumidores es modelada al analizar las decisiones de *pricing*.

(vii) *Información de la que dispone el consumidor.* Al realizar sus decisiones de compra, el consumidor puede disponer de distintos niveles de información. Por ejemplo, en algunos casos conoce sólo el precio al que se encuentra el producto al momento de visitar la tienda, en otros, conoce perfectamente la trayectoria completa que seguirán los precios y el momento exacto en que se realizarán los cambios.

(viii) *Variable de decisión.* Los modelos revisados plantean problemas en que la variable de decisión puede ser el instante de tiempo en que se realiza un cambio de precio, el precio a fijar en un determinado período, o bien, el inventario que se debe tener disponible.

(ix) *Propiedades del mecanismo de* pricing. La empresa puede imponer ciertas restricciones a los precios de sus productos. Se puede exigir que las trayectorias sean crecientes o decrecientes, que los precios provengan de una lista finita, un número de cambio de precios limitado, etc.

(x) *Reposición de inventario.* En algunos casos la empresa puede reponer el inventario en medio de la temporada, en otros, las reposiciones no son posibles.

(xi) *Capacidad de venta.* La empresa mantiene un número finito de inventario, o bien, tiene una capacidad de venta ilimitada.

(xii) *Horizonte de venta.* El horizonte de venta considerado puede ser infinito, o bien, consistir de un número finito de períodos.

(xiii) *Información de la empresa con respecto a la demanda.* Se puede suponer que la empresa conoce con exactitud la demanda que enfrentará (información completa de la demanda), o bien, que conoce únicamente la distribución de la que ésta proviene (información incompleta).

(xiv) *Información de la empresa con respecto a las valoraciones.* La empresa conoce con precisión la valoración de cada consumidor (información completa de las valoraciones), o bien, conoce únicamente la distribución de la éstas provienen (información incompleta).

Criterios de Clasificación		Stokey (1979)	Besanko y Winston (1990)	Gallego y van Ryzin (1994)
Características de la demanda	Estructura	Una unidad.	Una unidad.	Agregada.
	Llegadas	Simultáneas. Todos los consumidores están presentes al comienzo del horizonte de venta.	Simultáneas. Todos los consumidores están presentes al comienzo del horizonte de venta.	Secuenciales.
	Determinística / Estocástica	Determinística.	Determinística.	Estocástica.
	Universo de consumidores	Finito.	Finito.	Infinito.
Características del consumidor	Estrategicidad	Estratégico. Los consumidores anticipan cambios de precios y ajustan sus tiempos de compra para maximizar su utilidad.	Estratégico. Los consumidores anticipan cambios de precios y ajustan sus tiempos de compra para maximizar su utilidad.	Miope.
	Interacciones entre consumidores	No se consideran.	No se consideran.	No se consideran.
	Información de la que dispone	La trayectoria de precios es conocida.	La trayectoria de precios es conocida.	Sólo el precio del producto en el período de arribo.
Problema que se resuelve	Variable de decisión	Precio.	Precio.	Precio.
	Propiedades del mecanismo de *pricing*	El precio es revisado continuamente en el tiempo. La trayectoria no es necesariamente decreciente.	Secuencia decreciente de n precios.	El precio es revisado continuamente en el tiempo. Trayectoria no necesariamente decreciente.
	Reposición de inventario	Sin reposición.	Sin reposición.	Sin reposición.
	Capacidad de venta	Ilimitada.	Ilimitada.	Limitada.
	Horizonte de venta	Infinito.	Infinito.	Finito.
Información de la que dispone la empresa	Demanda	Completa. Conoce perfectamente el tamaño del universo de consumidores.	Completa. Conoce perfectamente el tamaño del universo de consumidores.	Incompleta. Proceso de *Poisson* con intensidad conocida, cuya tasa es función del precio.
	Valoraciones	Incompleta. Función de distribución conocida.	Incompleta. Función de distribución conocida.	No son modeladas explícitamente.

FIGURA A.1. Clasificación estudios previos de *pricing* dinámico.

Criterios de Clasificación		Feng y Gallego (1995)	Bitran y Mondschein (1997)	Smith y Achabal (1998)
Características de la demanda	Estructura	Agregada.	Una unidad.	Agregada.
	Llegadas	Secuenciales.	Secuenciales.	Secuenciales.
	Determinística / Estocástica	Estocástica.	Estocástica.	Determinística.
	Universo de consumidores	Infinito.	Infinito.	Infinito.
Características del consumidor	Estrategicidad	Miope.	Miope.	Miope.
	Interacciones entre consumidores	No se consideran.	No se consideran.	No se consideran.
	Información de la que dispone	Sólo el precio del producto en el período de arribo.	Sólo el precio del producto en el período de arribo.	Sólo el precio del producto en el período de arribo.
Problema que se resuelve	Variable de decisión	Tiempo óptimo para un cambio de precio.	Precio.	Precio.
	Propiedades del mecanismo de *pricing*	Secuencia de dos precios, no necesariamente decreciente.	El precio es revisado continuamente en el tiempo. Trayectoria no necesariamente decreciente./ Secuencia de precios.	Secuencia decreciente de precios.
	Reposición de inventario	Sin reposición.	Sin reposición.	Sin reposición.
	Capacidad de venta	Limitada.	Limitada.	Limitada.
	Horizonte de venta	Finito.	Finito.	Finito.
Información de la que dispone la empresa	Demanda	Incompleta. Proceso de *Poisson* con intensidad conocida.	Incompleta. Proceso de *Poisson* con intensidad conocida que es función de los patrones generales de compra.	Incompleta. Tasa de ventas conocida $x(p, I, t)$ corresponde a la multiplicación de 3 efectos separables: la estacionalidad de la demanda, el efecto del inventario y la sensibilidad de la demanda al precio.
	Valoraciones	No son modeladas explícitamente.	Incompleta. Función de distribución conocida.	No son modeladas explícitamente.

FIGURA A.2. Clasificación estudios previos de *pricing* dinámico (Continuación).

Criterios de Clasificación		Federgruen y Heching (1999)	Chen y Simchi-Levi (2004)	Xu y Hopp (2004)
Características de la demanda	Estructura	Agregada.	Agregada.	Agregada.
	Llegadas	Secuenciales.	Secuenciales.	Secuenciales.
	Determinística / Estocástica	Estocástica.	Estocástica.	Estocástica.
	Universo de consumidores	Finito.	Finito.	Infinito.
Características del consumidor	Estrategicidad	Miope.	Miope.	Estratégico. Su sensibilidad al precio varía en el tiempo.
	Interacciones entre consumidores	No se consideran.	No se consideran.	No se consideran.
	Información de la que dispone	Sólo el precio del producto en el período de arribo.	Sólo el precio del producto en el período de arribo.	Sólo el precio del producto en el período de arribo.
Problema que se resuelve	Variable de decisión	Precio / Inventario.	Precio / Inventario.	Precio.
	Propiedades del mecanismo de *pricing*	Un precio fijo es determinado al comienzo de cada período. Se consideran dos modelos: uno en que los precios pueden moverse arbitrariamente y otro en que sólo pueden descender.	Las decisiones de precio e inventario son realizadas al comienzo de cada período.	No se especifican propiedades del mecanismo utilizado.
	Reposición de inventario	Con reposición.	Con reposición.	Sin reposición.
	Capacidad de venta	Limitada.	Limitada.	Limitada.
	Horizonte de venta	Finito / Infinito.	Finito.	Finito.
Información de la que dispone la empresa	Demanda	Incompleta. Función genérica que depende del precio. El precio a su vez depende del estado del sistema.	Incompleta. Función genérica que depende del precio.	Incompleta. Proceso de *Poisson* con intensidad conocida, cuya tasa es función del precio.
	Valoraciones	No son modeladas explícitamente.	No son modeladas explícitamente.	Incompleta e indirecta. Se conoce la función del excedente del consumidor $v(p,t)$.

FIGURA A.3. Clasificación estudios previos de *pricing* dinámico (Continuación).

Criterios de Clasificación		Levin et al. (2006)	Gallien (2006)	Su (2007)
Características de la demanda	Estructura	Una unidad.	Una unidad.	Una unidad.
	Llegadas	Simultáneas. Todos los consumidores están presentes al comienzo del horizonte de venta.	Secuenciales.	Secuenciales.
	Determinística / Estocástica	Estocástica.	Estocástica.	Determinística.
	Universo de consumidores	Finito.	Finito.	Finito.
Características del consumidor	Estrategicidad	Estratégico. Se aplica un factor de descuento por período a las utilidades de los consumidores.	Estratégico.	Estratégico. Se asocia a cada consumidor un costo de espera.
	Interacciones entre consumidores	Sí.	Sí.	No son modeladas explícitamente.
	Información de la que dispone	Inventario y consumidores que aún no han comprado el producto.	Sólo el precio del producto en el período de arribo.	Conoce tanto la política de precios como de racionamiento del *retailer*.
Problema que se resuelve	Variable de decisión	Precio.	Precio.	Precio / Inventario inicial.
	Propiedades del mecanismo de *pricing*	No se especifican restricciones para la política de *pricing*.	La trayectoria de precios puede ser tanto creciente como decreciente.	La trayectoria de precios puede ser tanto creciente como decreciente. Considera una función de racionamiento que especifica la fracción de la demanda satisfecha.
	Reposición de inventario	Sin reposición.	Sin reposición.	Sin reposición.
	Capacidad de venta	Limitada.	Limitada.	Limitada.
	Horizonte de venta	Finito.	Infinito.	Finito.
Información de la que dispone la empresa	Demanda	Incompleta. Proceso de conteo cuya intensidad depende del tiempo y el precio.	Incompleta. Las llegadas al sistema corresponden a un proceso de renovación.	Completa. La demanda es modelada como continua y sigue un flujo determinístico a tasa constante.
	Valoraciones	Incompleta. Función de distribución conocida.	Incompleta. Valoraciones aleatorias e independientes procedentes de una distribución conocida.	Completa. Una fracción de los consumidores tiene una valoración alta y otra fracción una baja.

FIGURA A.4. Clasificación estudios previos de *pricing* dinámico (Continuación).

Criterios de Clasificación		Liu y van Ryzin (2008)	Aviv y Pazgal (2008)	Elmaghraby et al. (2008)
Características de la demanda	Estructura	Una unidad.	Una unidad.	Múltiples unidades.
	Llegadas	Simultáneas. Todos los consumidores están presentes al comienzo del horizonte de venta.	Secuenciales.	Simultáneas. Todos los consumidores están presentes al comienzo del horizonte de venta.
	Determinística / Estocástica	Determinística / Estocástica.	Estocástica.	Determinística.
	Universo de consumidores	Finito, pero grande.	Infinito.	Finito.
Características del consumidor	Estrategicidad	Estratégico. Consumidores evalúan el riesgo de no encontrar el producto en el futuro.	Estratégico. Sus valoraciones por el producto decaen a medida que transcurre la temporada de venta.	Estratégico.
	Interacciones entre consumidores	No son modeladas explícitamente.	Sí.	Sí.
	Información de la que dispone	Completa. Valoraciones, precios y racionamiento.	Descuentos anunciados / Descuentos no anunciados.	Trayectoria de precios es anunciada.
Problema que se resuelve	Variable de decisión	Inventario.	Precio.	Precio.
	Propiedades del mecanismo de *pricing*	Secuencia decreciente de dos precios.	Secuencia decreciente de dos precios.	Secuencia decreciente de precios.
	Reposición de inventario	Sin reposición.	Sin reposición.	Sin reposición.
	Capacidad de venta	Limitada.	Limitada.	Limitada.
	Horizonte de venta	Finito.	Finito.	Finito.
Información de la que dispone la empresa	Demanda	Incompleta. El tamaño del mercado potencial es conocido.	Incompleta. Proceso de *Poisson* con intensidad conocida independiente de la política de precio y del nivel de inventario en la tienda.	Completa. Las características de la demanda son de conocimiento común.
	Valoraciones	Incompleta. Función de distribución conocida.	Completa. Valoraciones conocidas.	Completa. Conjunto de valoraciones conocido / Incompleta. Función de distribución conocida.

FIGURA A.5. Clasificación estudios previos de *pricing* dinámico (Continuación).

Criterios de Clasificación		Este Trabajo
Características de la demanda	Estructura	Una unidad.
	Llegadas	Secuenciales.
	Determinística / Estocástica	Estocástica.
	Universo de consumidores	Infinito.
Características del consumidor	Estrategicidad	Estratégico. Consumidores evalúan el riesgo de no encontrar el producto en el futuro. Sus valoraciones por el producto decaen a medida que transcurre la temporada de venta.
	Interacciones entre consumidores	No son modeladas explícitamente.
	Información de la que dispone	La trayectoria de precios es conocida.
Problema que se resuelve	Variable de decisión	Precio.
	Propiedades del mecanismo de *pricing*	Secuencia decreciente de precios.
	Reposición de inventario	Sin reposición.
	Capacidad de venta	Limitada.
	Horizonte de venta	Finito.
Información de la que dispone la empresa	Demanda	Incompleta. Proceso de *Poisson* con intensidad conocida, cuya tasa es función del precio y del tiempo.
	Valoraciones	Incompleta. Función de distribución conocida.

FIGURA A.6. Clasificación de este trabajo.

ANEXO B. NELDER-MEAD SIMPLEX SEARCH

En esta sección se explica en detalle el algoritmo *Nelder-Mead Simplex Search* (ver Nelder y Mead, 1965; Lagarias, Reeds, Wright, y Wright, 1998), utilizado para determinar la solución óptima del modelo desarrollado en este trabajo. El algoritmo corresponde a una técnica de búsqueda directa que requiere solamente de evaluaciones sucesivas de la función objetivo para encontrar un óptimo local y que, por lo tanto, no necesita calcular el gradiente de la función objetivo para elegir una dirección de búsqueda. Para efectos de este trabajo se utilizó la versión del algoritmo programada en *Matlab* 7.1, correspondiente a la función *fminsearch*.

Un *simplex* es una figura geométrica de $n + 1$ vértices en un espacio de n dimensiones. El algoritmo genera un *simplex* inicial y lo hace evolucionar hacia la vecindad de un óptimo local a través de 5 transformaciones geométricas (reflexión, expansión, contracción interna, contracción externa y multi–contracción). La figura B.1 muestra las transformaciones posibles para un *simplex* en un espacio de 2 dimensiones.

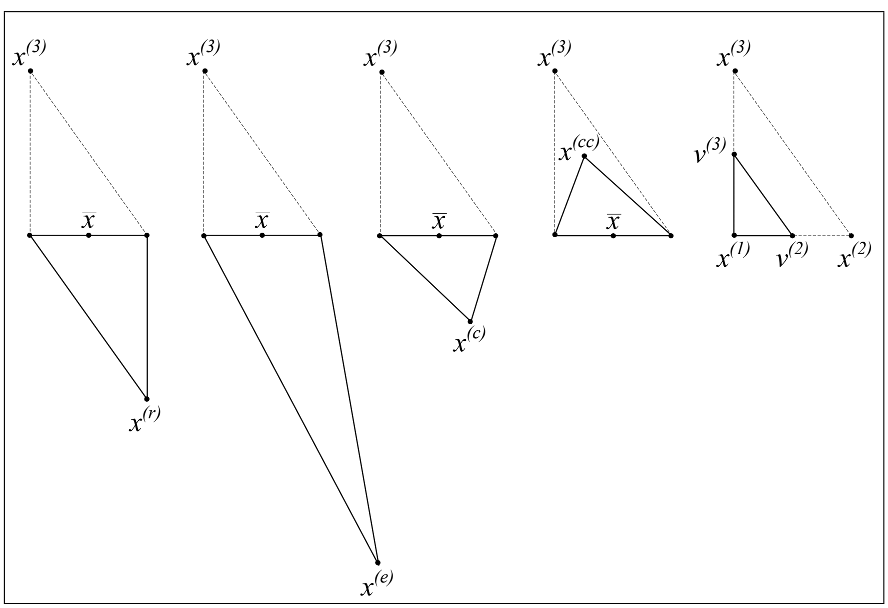

FIGURA B.1. Transformaciones posibles para un *simplex* en 2 dimensiones. De izquierda a derecha: reflexión, expansión, contracción externa, contracción interna y multi–contracción. $\boldsymbol{x}^{(3)}$ es el peor vértice en el *simplex* original, el cual se muestra con una línea punteada.

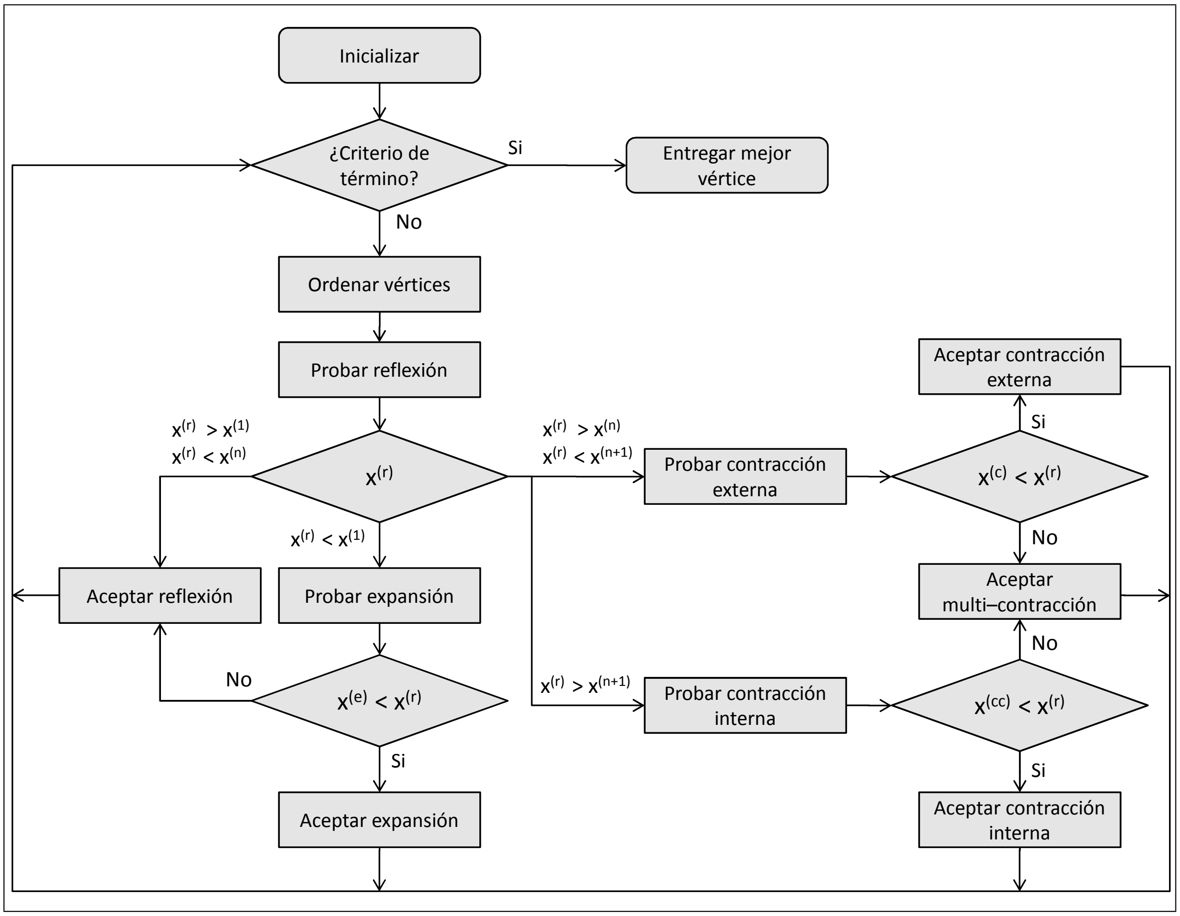

FIGURA B.2. Diagrama de flujos de la etapa de intensificación

En cada iteración, el algoritmo realiza únicamente comparaciones entre los valores de la función objetivo de los vértices del *simplex* de manera de definir la transformación más adecuada para realizar. Después de cada transformación, el peor vértice del *simplex* actual es reemplazado por uno nuevo.

A continuación se presenta una descripción formal de este algoritmo y su diagrama de flujo en la figura B.2.

(i) *Generación del simplex inicial:* La mejor solución encontrada durante la etapa de diversificación es utilizada como uno de vértices del *simplex* inicial, digamos $\boldsymbol{x}^{(1)}$.

Los otros n vértices son generados mediante la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{x}^{(i)} = \boldsymbol{x}^{(1)} + 0.05 \cdot \boldsymbol{x}^{(1)}(i-1) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_{i-1} \qquad i = 2, \ldots, n+1 \tag{B.1}$$

donde $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ son n vectores ortogonales unitarios.

(ii) *Ordenamiento de los vértices:* Ordenar y re–etiquetar los vértices como $\boldsymbol{x}^{(1)}$, $\boldsymbol{x}^{(2)}$, $\boldsymbol{x}^{(3)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(n+1)}$, de manera que

$$f\big(\boldsymbol{x}^{(1)}\big) \leq f\big(\boldsymbol{x}^{(2)}\big) \leq \cdots \leq f\big(\boldsymbol{x}^{(n+1)}\big).$$

(iii) *Cálculo del centroide:* Calcular el centroide, o centro de gravedad, de los n mejores vértices, definido como

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\boldsymbol{x}^{(i)}}{n}. \tag{B.2}$$

Éste es necesario para realizar a futuro las transformaciones geométricas al *simplex*.

(iv) *Probar reflexión:* Calcular el punto que se produce al reflejar el peor vértice del *simplex* con respecto al centro de gravedad $\bar{\boldsymbol{x}}$. Este punto es definido como

$$\boldsymbol{x}^{(r)} = \bar{\boldsymbol{x}} + \alpha\big(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^{(n+1)}\big) = (1+\alpha)\bar{\boldsymbol{x}} - \alpha\boldsymbol{x}^{(n+1)}, \tag{B.3}$$

donde α es un constante que cumple con $\alpha > 0$.

A continuación se realiza una de las siguientes instrucciones dependiendo del valor de $f\big(\boldsymbol{x}^{(r)}\big)$.

(a) *Expansión:* Si el punto de la reflexión resulta ser mejor que todos los vértices del *simplex*, esto es $f\big(\boldsymbol{x}^{(r)}\big) < f\big(\boldsymbol{x}^{(1)}\big)$, entonces la dirección de búsqueda parece ser efectiva y se debe probar una expansión del *simplex* reflejado en esa misma dirección. El punto de la expansión se define como

$$\boldsymbol{x}^{(e)} = \bar{\boldsymbol{x}} + \beta\big(\boldsymbol{x}^{(r)} - \bar{\boldsymbol{x}}\big) = (1+\alpha\beta)\bar{\boldsymbol{x}} - \alpha\beta\boldsymbol{x}^{(n+1)}, \tag{B.4}$$

donde β es una constante que cumple con $\beta > 1$ y $\beta > \alpha$.

Reemplazar $\boldsymbol{x}^{(n+1)}$ en el nuevo *simplex* por el mejor punto entre $\boldsymbol{x}^{(r)}$ y $\boldsymbol{x}^{(e)}$ y luego volver al paso 2.

(b) *Aceptar reflexión:* Si el punto de la reflexión resulta ser un punto medio–bajo del *simplex*, esto es $f\big(\boldsymbol{x}^{(1)}\big) \leq f\big(\boldsymbol{x}^{(r)}\big) < f\big(\boldsymbol{x}^{(n)}\big)$, entonces se debe reemplazar a $\boldsymbol{x}^{(n+1)}$ en el nuevo *simplex* por el punto de la reflexión y luego volver al paso 2.

(c) *Contracción externa:* Si el punto de la reflexión resulta ser un punto medio–alto del *simplex*, esto es $f\big(\boldsymbol{x}^{(n)}\big) \leq f\big(\boldsymbol{x}^{(r)}\big) < f\big(\boldsymbol{x}^{(n+1)}\big)$, entonces el *simplex* es muy grande y se debe probar contrayéndolo hacia su exterior. El punto de la contracción externa se define como

$$\boldsymbol{x}^{(c)} = \bar{\boldsymbol{x}} + \gamma\big(\boldsymbol{x}^{(r)} - \bar{\boldsymbol{x}}\big) = (1 + \alpha\gamma)\bar{\boldsymbol{x}} - \alpha\gamma\boldsymbol{x}^{(n+1)}, \tag{B.5}$$

donde γ es una constante que cumple con $0 < \gamma < 1$.

Si el punto de la contracción externa resulta ser mejor que el punto de la reflexión, esto es $f\big(\boldsymbol{x}^{(c)}\big) \leq f\big(\boldsymbol{x}^{(r)}\big)$, entonces se debe reemplazar a $\boldsymbol{x}^{(n+1)}$ en el nuevo *simplex* por el punto de la contracción externa y luego volver al paso 2. En otro caso se debe realizar una multi–contracción (ir al paso 5).

(d) *Contracción interna:* Si el punto de la reflexión resulta ser peor que todos los vértices del *simplex*, esto es $f\big(\boldsymbol{x}^{(r)}\big) \geq f\big(\boldsymbol{x}^{(n+1)}\big)$, entonces el *simplex* es muy grande y se debe probar contrayéndolo hacia su interior. El punto de la contracción interna se define como

$$\boldsymbol{x}^{(cc)} = \bar{\boldsymbol{x}} - \gamma\big(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^{(n+1)}\big) = (1 - \gamma)\bar{\boldsymbol{x}} + \gamma\boldsymbol{x}^{(n+1)}, \tag{B.6}$$

Si el punto de la contracción interna resulta ser mejor que el punto de la reflexión, esto es $f\big(\boldsymbol{x}^{(cc)}\big) < f\big(\boldsymbol{x}^{(r)}\big)$, entonces se debe reemplazar a $\boldsymbol{x}^{(n+1)}$ en el nuevo *simplex* por el punto de la contracción interna y luego volver al paso 2. En otro caso se debe realizar una multi–contracción (ir al paso 5).

(v) *Multi–contracción:* Si nada más da buenos resultados, se debe reducir el tamaño del *simplex*, modificando todos los vértices menos $\boldsymbol{x}^{(1)}$. Los nuevos vértices son definidos por

$$\boldsymbol{v}^{(i)} = \boldsymbol{x}^{(1)} + \delta\big(\boldsymbol{x}^{(i)} - \boldsymbol{x}^{(1)}\big), \quad i = 2, \ldots, n+1. \tag{B.7}$$

donde δ es una constante que cumple con $0 < \delta < 1$.

Reemplazar los vértices $\boldsymbol{x}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(n+1)}$ en el nuevo *simplex* por $\boldsymbol{v}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(n+1)}$ y volver al paso 2. Este nuevo *simplex* más pequeño es capaz de dar pasos más pequeños hacia el óptimo.

La búsqueda termina cuando se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:

(i) Se alcanza el número máximo de iteraciones ($200 \cdot n$).

(ii) Se alcanza el número máximo de evaluaciones de la función objetivo ($200 \cdot n$).

(iii) El diámetro del *simplex*, definido como:

$$\max_{1 < i \leq n+1} \left\| \boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(i)} \right\|, \tag{B.8}$$

se hace menor que 10^{-4}.

(iv) La diferencia entre el valor de la función objetivo del peor vértice (el $n+1$ que tiene el mayor $f(x)$) y el del mejor vértice (el vértice 1 que tiene el menor $f(x)$) se hace menor que 10^{-4}.

ANEXO C. RESUMEN EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

A continuación se recogen los resultados obtenidos de los experimentos numéricos realizados. Se considera un horizonte de venta de 15 días compuesto por cuatro períodos, el primero de 6 días y los tres siguientes de 3 días cada uno. La empresa enfrenta una tasa promedio de demanda de 70 clientes por el producto, la cual se distribuye uniformemente durante toda la temporada. El precio de reserva de los consumidores tiene una distribución *Weibull* de media 202,8 y desviación estándar 56,5.

En la primera sección de tablas se muestra un barrido del factor de decaimiento del precio de reserva β en 9 escenarios diferentes, correspondientes a las combinaciones entre 3 niveles de inventario inicial (10, 35 y 60 unidades) y 3 porcentajes de descuento por período (10%, 20% y 30%). En la segunda sección se presentan los resultados obtenidos al variar el exponente de la función de probabilidad de encontrar el producto en el futuro a en varios escenarios. En cada caso se muestran el precio inicial fijado por el modelo para consumidores estratégicos, el ingreso esperado en caso de fijar ese precio y las diferencias porcentuales del precio e ingreso fijado por un modelo para consumidores miopes con respecto a los valores que entrega el modelo propuesto en este trabajo.

C.1. Decaimiento del Precio de Reserva

TABLA C.1. Precio, ingreso esperado y variación porcentual con respecto al caso miope para un inventario de 10 unidades, descuento de 10% por período y $a = 2$. En este caso el precio entregado por el modelo miope es 274.

β	Precio Inicial	Ingreso	1 - IM/IE
0	342	2466	11,55%
0,005	331	2396	8,98%
0,01	320	2336	6,23%
0,015	309	2296	3,09%
0,02	295	2293	0,42%
0,025	272	2347	0,00%
0,03	273	2385	0,00%
0,035	274	2414	0,00%
0,04	274	2415	0,00%
0,045	274	2415	0,00%
0,05	274	2415	0,00%
0,055	274	2415	0,00%
0,06	274	2415	0,00%
0,065	274	2415	0,00%
0,07	274	2415	0,00%
0,075	274	2415	0,00%
0,08	274	2415	0,00%
0,085	274	2415	0,00%
0,09	274	2415	0,00%
0,095	274	2415	0,00%
0,1	274	2415	0,00%
0,105	274	2415	0,00%
0,11	274	2415	0,00%
0,115	274	2415	0,00%
0,12	274	2415	0,00%
0,125	274	2415	0,00%
0,13	274	2415	0,00%

TABLA C.2. Precio, ingreso esperado y variación porcentual con respecto al caso miope para un inventario de 35 unidades, descuento de 10% por período y $a = 2$. En este caso el precio entregado por el modelo miope es 218.

β	**Precio Inicial**	**Ingreso**	**1 - IM/IE**
0	269	6858	11,00%
0,005	260	6690	8,04%
0,01	249	6566	4,91%
0,015	239	6515	2,55%
0,02	230	6510	1,04%
0,025	222	6502	0,18%
0,03	219	6504	0,02%
0,035	218	6508	0,00%
0,04	218	6508	0,00%
0,045	218	6508	0,00%
0,05	218	6508	0,00%
0,055	218	6508	0,00%
0,06	218	6508	0,00%
0,065	218	6508	0,00%
0,07	218	6508	0,00%
0,075	218	6508	0,00%
0,08	218	6508	0,00%
0,085	218	6508	0,00%
0,09	218	6508	0,00%
0,095	218	6508	0,00%
0,1	218	6508	0,00%
0,105	218	6508	0,00%
0,11	218	6508	0,00%
0,115	218	6508	0,00%
0,12	218	6508	0,00%
0,125	218	6508	0,00%
0,13	218	6508	0,00%

TABLA C.3. Precio, ingreso esperado y variación porcentual con respecto al caso miope para un inventario de 60 unidades, descuento de 10% por período y $a = 2$. En este caso el precio entregado por el modelo miope es 180.

β	**Precio Inicial**	**Ingreso**	**1 - IM/IE**
0	217	8974	6,44%
0,005	208	8812	3,98%
0,01	200	8717	2,37%
0,015	194	8623	1,31%
0,02	188	8496	0,54%
0,025	183	8327	0,08%
0,03	181	8257	0,01%
0,035	180	8225	0,00%
0,04	180	8224	0,00%
0,045	180	8224	0,00%
0,05	180	8224	0,00%
0,055	180	8224	0,00%
0,06	180	8224	0,00%
0,065	180	8224	0,00%
0,07	180	8224	0,00%
0,075	180	8224	0,00%
0,08	180	8224	0,00%
0,085	180	8224	0,00%
0,09	180	8224	0,00%
0,095	180	8224	0,00%
0,1	180	8224	0,00%
0,105	180	8224	0,00%
0,11	180	8224	0,00%
0,115	180	8224	0,00%
0,12	180	8224	0,00%
0,125	180	8224	0,00%
0,13	180	8224	0,00%

TABLA C.4. Precio, ingreso esperado y variación porcentual con respecto al caso miope para un inventario de 10 unidades, descuento de 20% por período y $a = 2$. En este caso el precio entregado por el modelo miope es 255.

β	**Precio Inicial**	**Ingreso**	**1 - IM/IE**
0	489	2447	33,03%
0,005	473	2369	30,72%
0,01	459	2297	28,43%
0,015	446	2231	26,13%
0,02	435	2171	23,46%
0,025	424	2119	19,80%
0,03	415	2075	15,14%
0,035	407	2041	9,54%
0,04	223	2074	5,87%
0,045	231	2148	3,83%
0,05	236	2190	2,36%
0,055	242	2229	1,16%
0,06	245	2243	0,59%
0,065	248	2252	0,24%
0,07	251	2260	0,05%
0,075	255	2266	0,00%
0,08	255	2266	0,00%
0,085	255	2266	0,00%
0,09	255	2266	0,00%
0,095	255	2266	0,00%
0,1	255	2266	0,00%
0,105	255	2266	0,00%
0,11	255	2266	0,00%
0,115	255	2266	0,00%
0,12	255	2266	0,00%
0,125	255	2266	0,00%
0,13	255	2266	0,00%

TABLA C.5. Precio, ingreso esperado y variación porcentual con respecto al caso miope para un inventario de 35 unidades, descuento de 20% por período y $a = 2$. En este caso el precio entregado por el modelo miope es 225.

β	**Precio Inicial**	**Ingreso**	**1 - IM/IE**
0	386	6680	26,08%
0,005	373	6471	23,46%
0,01	360	6269	20,79%
0,015	347	6080	17,92%
0,02	334	5908	14,55%
0,025	321	5758	10,62%
0,03	308	5627	6,44%
0,035	293	5528	2,39%
0,04	222	5531	0,02%
0,045	221	5660	0,04%
0,05	223	5769	0,01%
0,055	224	5865	0,01%
0,06	225	5909	0,00%
0,065	225	5940	0,00%
0,07	225	5966	0,00%
0,075	225	5985	0,00%
0,08	225	5985	0,00%
0,085	225	5985	0,00%
0,09	225	5985	0,00%
0,095	225	5985	0,00%
0,1	225	5985	0,00%
0,105	225	5985	0,00%
0,11	225	5985	0,00%
0,115	225	5985	0,00%
0,12	225	5985	0,00%
0,125	225	5985	0,00%
0,13	225	5985	0,00%

TABLA C.6. Precio, ingreso esperado y variación porcentual con respecto al caso miope para un inventario de 60 unidades, descuento de 20% por período y $a = 2$. En este caso el precio entregado por el modelo miope es 189.

β	**Precio Inicial**	**Ingreso**	**1 - IM/IE**
0	307	8737	20,98%
0,005	295	8504	18,49%
0,01	283	8284	15,65%
0,015	272	8074	12,12%
0,02	260	7877	8,12%
0,025	243	7735	4,56%
0,03	223	7705	2,50%
0,035	211	7739	1,60%
0,04	205	7768	1,07%
0,045	200	7764	0,64%
0,05	196	7720	0,27%
0,055	192	7641	0,04%
0,06	191	7629	0,02%
0,065	190	7628	0,01%
0,07	190	7621	0,00%
0,075	189	7611	0,00%
0,08	189	7611	0,00%
0,085	189	7611	0,00%
0,09	189	7611	0,00%
0,095	189	7611	0,00%
0,1	189	7611	0,00%
0,105	189	7611	0,00%
0,11	189	7611	0,00%
0,115	189	7611	0,00%
0,12	189	7611	0,00%
0,125	189	7611	0,00%
0,13	189	7611	0,00%

TABLA C.7. Precio, ingreso esperado y variación porcentual con respecto al caso miope para un inventario de 10 unidades, descuento de 30% por período y $a = 2$. En este caso el precio entregado por el modelo miope es 237.

β	**Precio Inicial**	**Ingreso**	**1 - IM/IE**
0	730	2447	51,94%
0,005	707	2369	50,16%
0,01	685	2297	48,39%
0,015	666	2231	46,64%
0,02	649	2170	44,94%
0,025	634	2116	43,16%
0,03	622	2068	40,85%
0,035	611	2026	37,29%
0,04	602	1991	32,21%
0,045	594	1960	25,90%
0,05	586	1932	18,54%
0,055	206	1923	11,28%
0,06	212	1979	7,20%
0,065	218	2032	3,95%
0,07	224	2083	1,78%
0,075	228	2115	0,83%
0,08	231	2137	0,36%
0,085	233	2159	0,12%
0,09	235	2176	0,02%
0,095	236	2177	0,01%
0,1	236	2178	0,00%
0,105	237	2178	0,00%
0,11	237	2179	0,00%
0,115	237	2179	0,00%
0,12	237	2179	0,00%
0,125	237	2179	0,00%
0,13	237	2179	0,00%

TABLA C.8. Precio, ingreso esperado y variación porcentual con respecto al caso miope para un inventario de 35 unidades, descuento de 30% por período y a = 2. En este caso el precio entregado por el modelo miope es 213.

β	**Precio Inicial**	**Ingreso**	**1 - IM/IE**
0	579	6646	44,31%
0,005	560	6428	42,18%
0,01	542	6212	39,96%
0,015	524	5998	37,62%
0,02	506	5788	35,07%
0,025	488	5583	32,03%
0,03	470	5386	28,17%
0,035	453	5201	23,42%
0,04	435	5038	18,05%
0,045	416	4901	12,52%
0,05	398	4791	7,12%
0,055	381	4701	1,95%
0,06	192	4818	1,20%
0,065	196	4948	0,96%
0,07	198	5067	0,77%
0,075	201	5150	0,52%
0,08	204	5219	0,31%
0,085	206	5283	0,16%
0,09	208	5336	0,07%
0,095	209	5355	0,04%
0,1	210	5372	0,02%
0,105	211	5386	0,01%
0,11	212	5399	0,00%
0,115	213	5411	0,00%
0,12	213	5419	0,00%
0,125	213	5419	0,00%
0,13	213	5419	0,00%

TABLA C.9. Precio, ingreso esperado y variación porcentual con respecto al caso miope para un inventario de 60 unidades, descuento de 30% por período y $a = 2$. En este caso el precio entregado por el modelo miope es 190.

β	**Precio Inicial**	**Ingreso**	**1 - IM/IE**
0	472	8473	36,90%
0,005	456	8198	34,41%
0,01	438	7925	31,82%
0,015	420	7658	29,08%
0,02	400	7406	25,92%
0,025	378	7180	22,20%
0,03	356	6986	18,00%
0,035	337	6815	13,50%
0,04	322	6651	8,80%
0,045	308	6486	3,99%
0,05	197	6380	0,09%
0,055	197	6510	0,12%
0,06	198	6621	0,17%
0,065	198	6711	0,20%
0,07	198	6777	0,21%
0,075	197	6820	0,19%
0,08	196	6839	0,12%
0,085	193	6833	0,04%
0,09	191	6810	0,00%
0,095	191	6819	0,00%
0,1	191	6825	0,00%
0,105	191	6828	0,00%
0,11	191	6830	0,00%
0,115	191	6829	0,00%
0,12	190	6828	0,00%
0,125	190	6828	0,00%
0,13	190	6828	0,00%

C.2. Probabilidad de Encontrar el Producto en el Futuro

TABLA C.10. Precio, ingreso esperado y variación porcentual con respecto al caso miope para un inventario de 10 unidades, descuento de 10% por período y β = 0,01. En este caso el precio entregado por el modelo miope es 274.

a	Precio Inicial	Ingreso	1 - IM/IE
0,25	312	2447	1,77%
0,5	314	2426	2,16%
0,75	316	2405	2,70%
1	317	2386	3,36%
2	320	2336	6,23%
3	321	2315	8,74%
4	322	2306	10,22%
5	322	2301	11,25%
6	322	2299	11,94%
7	322	2297	12,42%
8	322	2297	12,76%
9	323	2297	12,95%
10	323	2297	13,03%

TABLA C.11. Precio, ingreso esperado y variación porcentual con respecto al caso miope para un inventario de 10 unidades, descuento de 10% por período y β = 0,02. En este caso el precio entregado por el modelo miope es 274.

a	Precio Inicial	Ingreso	1 - IM/IE
0,25	285	2414	0,12%
0,5	284	2401	0,17%
0,75	284	2385	0,17%
1	285	2367	0,17%
2	295	2293	0,42%
3	300	2242	1,43%
4	302	2210	2,84%
5	303	2193	4,11%
6	304	2184	5,05%
7	305	2179	5,73%
8	305	2176	6,19%
9	305	2174	6,59%
10	305	2173	6,88%

TABLA C.12. Precio, ingreso esperado y variación porcentual con respecto al caso miope para un inventario de 10 unidades, descuento de 10% por período y β = 0,03. En este caso el precio entregado por el modelo miope es 274.

a	Precio Inicial	Ingreso	1 - IM/IE
0,25	276	2415	0,00%
0,5	276	2413	0,00%
0,75	275	2410	0,04%
1	275	2406	0,04%
2	273	2385	0,04%
3	270	2364	0,08%
4	266	2349	0,15%
5	262	2339	0,32%
6	260	2333	0,52%
7	258	2329	0,69%
8	256	2327	0,82%
9	256	2325	0,91%
10	255	2323	0,97%

TABLA C.13. Precio, ingreso esperado y variación porcentual con respecto al caso miope para un inventario de 10 unidades, descuento de 20% por período y β = 0,01. En este caso el precio entregado por el modelo miope es 255.

a	Precio Inicial	Ingreso	1 - IM/IE
0,25	456	2329	6,68%
0,5	457	2316	11,09%
0,75	458	2307	16,25%
1	459	2302	21,31%
2	459	2297	28,43%
3	459	2297	29,39%
4	459	2297	31,86%
5	459	2297	35,91%
6	459	2297	39,11%
7	459	2297	41,44%
8	459	2297	42,69%
9	459	2297	43,09%
10	459	2297	43,15%

TABLA C.14. Precio, ingreso esperado y variación porcentual con respecto al caso miope para un inventario de 10 unidades, descuento de 20% por período y β = 0,03. En este caso el precio entregado por el modelo miope es 255.

a	**Precio Inicial**	**Ingreso**	**1 - IM/IE**
0,25	249	2226	0,13%
0,5	243	2184	0,65%
0,75	236	2141	1,73%
1	411	2115	4,22%
2	415	2075	15,14%
3	416	2069	19,40%
4	416	2068	23,28%
5	416	2068	28,08%
6	416	2068	31,76%
7	416	2068	34,09%
8	416	2068	35,45%
9	416	2068	36,21%
10	416	2068	36,59%

TABLA C.15. Precio, ingreso esperado y variación porcentual con respecto al caso miope para un inventario de 10 unidades, descuento de 20% por período y β = 0,07. En este caso el precio entregado por el modelo miope es 255.

a	**Precio Inicial**	**Ingreso**	**1 - IM/IE**
0,25	255	2266	0,00%
0,5	254	2265	0,00%
0,75	254	2264	0,01%
1	253	2263	0,01%
2	251	2260	0,05%
3	250	2257	0,09%
4	250	2256	0,12%
5	250	2256	0,13%
6	250	2255	0,13%
7	250	2255	0,13%
8	250	2255	0,13%
9	250	2255	0,13%
10	250	2255	0,13%

TABLA C.16. Precio, ingreso esperado y variación porcentual con respecto al caso miope para un inventario de 10 unidades, descuento de 30% por período y β = 0,01. En este caso el precio entregado por el modelo miope es 237.

a	Precio Inicial	Ingreso	1 - IM/IE
0,25	685	2299	11,37%
0,5	685	2297	18,41%
0,75	685	2297	25,87%
1	685	2297	34,47%
2	685	2297	48,39%
3	685	2297	49,42%
4	685	2297	49,46%
5	685	2297	50,11%
6	685	2297	52,90%
7	685	2297	58,01%
8	685	2297	62,27%
9	685	2297	64,18%
10	685	2297	64,58%

TABLA C.17. Precio, ingreso esperado y variación porcentual con respecto al caso miope para un inventario de 10 unidades, descuento de 30% por período y β = 0,03. En este caso el precio entregado por el modelo es miope 237.

a	Precio Inicial	Ingreso	1 - IM/IE
0,25	229	2103	0,39%
0,5	619	2078	3,96%
0,75	621	2072	9,50%
1	621	2069	16,94%
2	622	2068	40,85%
3	622	2068	43,66%
4	622	2068	43,84%
5	622	2068	44,31%
6	622	2068	47,11%
7	622	2068	51,93%
8	622	2068	55,89%
9	622	2068	58,47%
10	622	2068	59,86%

TABLA C.18. Precio, ingreso esperado y variación porcentual con respecto al caso miope para un inventario de 10 unidades, descuento de 30% por período y β = 0,07. En este caso el precio entregado por el modelo miope es 237.

a	Precio Inicial	Ingreso	1 - IM/IE
0,25	236	2167	0,01%
0,5	234	2155	0,05%
0,75	233	2143	0,13%
1	231	2131	0,26%
2	224	2083	1,78%
3	218	2043	4,50%
4	215	2015	6,63%
5	212	1989	8,33%
6	210	1968	9,63%
7	208	1950	10,66%
8	207	1936	11,50%
9	205	1924	12,18%
10	205	1914	12,73%

TABLA C.19. Precio, ingreso esperado y variación porcentual con respecto al caso miope para un inventario de 35 unidades, descuento de 20% por período y β = 0,01. En este caso el precio entregado por el modelo miope es 225.

a	Precio Inicial	Ingreso	1 - IM/IE
0,25	353	6592	9,11%
0,5	354	6519	10,68%
0,75	355	6461	12,43%
1	356	6406	14,66%
2	360	6268	20,83%
3	362	6230	25,21%
4	363	6217	27,89%
5	363	6213	30,15%
6	363	6212	31,78%
7	363	6211	33,09%
8	363	6211	34,15%
9	363	6211	34,76%
10	363	6211	34,97%

TABLA C.20. Precio, ingreso esperado y variación porcentual con respecto al caso miope para un inventario de 35 unidades, descuento de 20% por período y β = 0,03. En este caso el precio entregado por el modelo miope es 225.

a	**Precio Inicial**	**Ingreso**	**1 - IM/IE**
0,25	291	6107	1,39%
0,5	295	6020	1,45%
0,75	299	5934	1,69%
1	302	5855	2,21%
2	308	5627	6,44%
3	311	5481	10,33%
4	314	5415	14,19%
5	315	5389	17,32%
6	316	5380	19,65%
7	316	5377	21,36%
8	316	5376	22,59%
9	316	5376	23,44%
10	316	5376	24,00%

TABLA C.21. Precio, ingreso esperado y variación porcentual con respecto al caso miope para un inventario de 35 unidades, descuento de 20% por período y β = 0,07. En este caso el precio entregado por el modelo miope es 225.

a	**Precio Inicial**	**Ingreso**	**1 - IM/IE**
0,25	226	5990	0,00%
0,5	226	5987	0,00%
0,75	226	5984	0,00%
1	226	5980	0,00%
2	225	5966	0,00%
3	225	5954	0,00%
4	224	5947	0,00%
5	224	5942	0,01%
6	224	5938	0,01%
7	224	5936	0,01%
8	224	5934	0,01%
9	223	5933	0,01%
10	223	5932	0,01%

TABLA C.22. Precio, ingreso esperado y variación porcentual con respecto al caso miope para un inventario de 35 unidades, descuento de 30% por período y β = 0,01. En este caso el precio entregado por el modelo miope es 213.

a	**Precio Inicial**	**Ingreso**	**1 - IM/IE**
0,25	535	6328	17,08%
0,5	538	6275	21,17%
0,75	539	6241	25,67%
1	541	6222	30,76%
2	542	6212	39,99%
3	542	6211	43,35%
4	542	6211	46,59%
5	542	6211	49,97%
6	542	6211	52,50%
7	542	6211	54,64%
8	542	6211	56,71%
9	542	6211	58,14%
10	542	6211	58,73%

TABLA C.23. Precio, ingreso esperado y variación porcentual con respecto al caso miope para un inventario de 35 unidades, descuento de 30% por período y β = 0,03. En este caso el precio entregado por el modelo miope es 213.

a	**Precio Inicial**	**Ingreso**	**1 - IM/IE**
0,25	459	5713	7,55%
0,5	460	5639	9,95%
0,75	462	5570	12,76%
1	464	5507	15,80%
2	470	5386	28,17%
3	471	5376	32,69%
4	472	5376	36,52%
5	472	5376	40,47%
6	472	5376	43,78%
7	472	5376	46,49%
8	472	5376	48,59%
9	472	5376	50,16%
10	472	5376	51,25%

TABLA C.24. Precio, ingreso esperado y variación porcentual con respecto al caso miope para un inventario de 35 unidades, descuento de 30% por período y β = 0,07. En este caso el precio entregado por el modelo es miope 213.

a	Precio Inicial	Ingreso	1 - IM/IE
0,25	214	5393	0,00%
0,5	212	5349	0,01%
0,75	209	5303	0,04%
1	207	5255	0,11%
2	198	5067	0,77%
3	192	4926	1,71%
4	188	4838	2,69%
5	185	4770	3,63%
6	182	4719	4,49%
7	180	4678	5,24%
8	179	4644	5,86%
9	178	4617	6,36%
10	177	4594	6,75%