



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

LOCALIZACION DE ESTACIONAMIENTOS DE PARK AND RIDE USANDO METODOLOGIAS P-HUB

MANUEL FELIPE AROS VERA

Tesis para optar al grado de
Magister en ciencias de la Ingeniería

Profesor Supervisor:
VLADIMIR MARIANOV

Santiago de Chile, diciembre, 2011

© 2011, Felipe Aros



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

LOCALIZACION DE ESTACIONAMIENTOS DE PARK AND RIDE USANDO METODOLOGIAS P-HUB

MANUEL FELIPE AROS VERA

Tesis presentada a la Comisión integrada por los profesores:

VLADIMIR MARIANOV K.

JORGE VERA A.

GABRIEL GUTIERREZ J.

ALFREDO SERPELL B.

Para completar las exigencias del grado de Magister en ciencias de la
Ingeniería

Santiago de Chile, diciembre, 2011

a Theresa Marie

AGRADECIMIENTOS

Quisiera dar gracias a Dios por el camino recorrido para completar mi formación académica. Muy especialmente quiero agradecer a la Pontificia Universidad Católica de Chile por acogerme y desde un comienzo, con el Premio Padre Hurtado, ayudarme a crecer profesional y personalmente. Los años que compartí, crecí, sufrí y disfruté en el campus San Joaquín son un tesoro que me acompañará siempre. Quiero expresar también mi mayor admiración y gratitud hacia mi profesor supervisor, Vladimir Marianov. Desde el primer momento en que pedí su guía supo aconsejarme, corregirme, ayudarme y enseñarme a ser prolijo y cauto. También quisiera expresar mis agradecimientos al profesor Juan Carlos Ferrer y su grupo de investigación Pricing UC.

Tanto o más importante que lo académico es mi formación personal y familiar. Quiero en estas breves palabras expresar mi más profundo agradecimiento a mi familia. Mi padre, Manuel Alfonso, desde siempre ha sido mi apoyo y ejemplo a seguir, su figura me acompaña en cada momento de mi vida y me motiva a ser cada día mejor. De la misma manera mi madre María y mi madre Sara han sido y serán siempre pilares fundamentales en mi vida. No hay errores en mi frase anterior, Dios me bendijo con la sabiduría y entereza de mi madre María y la fuerza y tenacidad de madre Sara. Quiero también entregar mis más sinceros agradecimientos a mi tío Carlos Aros y su familia. El ha sido desde que nací un ejemplo a seguir y un apoyo tremendo, muchas gracias por todo. A mi padrino, el padre Juan Roberto Julio, quien ha sido parte fundamental en mi formación y no puedo dejar de expresar mi más profunda admiración hacia su persona. Quisiera también agradecer a mi hermano Alexis y su familia, a mi tía Sonia, Rafael y los pinguinos, y mis hermanos Ivan Alfonso y Fernando Jesús.

Finalmente quiero dar las gracias a mi esposa Theresa Marie Ward, gracias a ella fui capaz de salir adelante y lograr mis objetivos, día a día me enseña a caminar. Theresa es la luz de mi futuro y la alegría de mi presente.

ÍNDICE GENERAL

AGRADECIMIENTOS	iii
ÍNDICE GENERAL.....	iv
ÍNDICE DE FIGURAS.....	v
RESUMEN.....	vi
ABSTRACT.....	vii
1. CAPÍTULO INTRODUCTORIO.....	1
1.1 Introducción	1
1.2 Revisión de literatura	4
1.3 Definición del problema y formulación matemática.....	8
1.3.1 Marco conceptual y matemático.....	8
1.3.2 Linealización de la regla gravitacional	11
1.4 Análisis numérico.....	14
1.4.1 Localizando 3 P&R considerando $A_k=0.5$, $\lambda=2$, $\alpha = 1$	14
1.4.2 Influencia de la atracción y λ ($\alpha = 1.0$)	18
1.5 Caso de estudio: P&R en Queens, New York.....	20
1.6 Conclusiones y trabajo futuro	24
2. P-HUB APPROACH FOR THE OPTIMAL PARK-AND-RIDE FACILITY LOCATION PROBLEM.....	27
BIBLIOGRAFÍA	62

ÍNDICE DE FIGURAS

	Pág.
FIGURA 1: Orígenes, destinos y candidatos del ejemplo numérico	15
FIGURA 2: Resultados para diferentes combinaciones de A_k y λ	20
FIGURA 3: Caso de estudio de Queens.....	22
FIGURA 4: Comparación de resultados	24

ÍNDICE DE TABLAS

	Pág.
TABLA 1: Porcentaje de viajes ocupando P&R 3.....	17
TABLA 2: Porcentaje de viajes ocupando P&R 8.....	17
TABLA 3: Porcentaje de viajes ocupando P&R 6.....	17
TABLA 4: Porcentaje de viajes ocupando auto.....	17
TABLA 5: Influencia de A_k y λ en la localización óptima.....	19
TABLA 6: Resumen de resultados de la evaluación	23

RESUMEN

Los Park and Ride (P&R) son estacionamientos en dónde usuarios pueden dejar su auto y ocupar un sistema de transporte público para alcanzar su destino final. El concepto es simple y permite aprovechar cada modo de transporte en las mejores condiciones del transporte. Para resolver el problema de dónde localizar dichos estacionamientos proponemos un modelo mixto lineal. Los P&R son modelados como hubs o puntos de transbordo con capacidad limitada. El modelo determina las localizaciones óptimas maximizando la ocupación de los P&R. El comportamiento de los usuarios es modelado mediante la ocupación de la regla gravitacional. Para ello aplicamos el concepto de costo generalizado y la atracción de dichos estacionamientos como parámetros. Para problemas de dimensiones pequeñas proponemos una linealización del modelo gravitacional, que es algo totalmente nuevo y que permite formular el problema como mixto lineal. Para resolver problemas de mayores dimensiones ocupamos exitosamente una modificación del “Heuristic Concentration Integer”. Experimentos numéricos incluyendo el caso de estudio de Queens en New York son entregados junto con los pasos siguientes en la investigación.

Palabras Claves: Park and Ride, localización, p-hub, regla gravitacional, heuristic concentration integer (HCI).

ABSTRACT

Park and Ride facilities (P&R) are car parks where users can transfer to public transportation to reach their final destination. We propose a mixed linear programming formulation to determine the optimal location of a preset number of Park and Ride (P&R) facilities. These facilities are modeled here as limited capacity hubs, and the model locates the P&R facilities in such a way as to maximize their usage, considering that commuters can either use the service or choose to travel by car to their destinations. A p-hub approach is applied considering users' generalized cost and attractiveness of each P&R facility as input for the gravity rule. For small instances of the problem, we propose a novel linearization of the gravity rule, which allows transforming the binary nonlinear programming problem into a mixed linear programming formulation. A modification of the Heuristic Concentration Integer (HCI) procedure is applied to solve larger instances of the problem. Numerical experiments are delivered, including a case in Queens, NY. Further research is proposed.

Keywords: Park and Ride, Location, p-hub, gravity rule, heuristic concentration integer (HCI).

1. CAPÍTULO INTRODUCTORIO

Este capítulo tiene por finalidad entregar tanto el marco de trabajo, como los principales análisis y conclusiones desarrollados. Es importante señalar que este capítulo entrega una fotografía parcial de la investigación puesto que el artículo enviado para publicación, expuesto a cabalidad en el capítulo 2 y principal de esta tesis, muestra en detalle lo realizado.

1.1 Introducción

La congestión es uno de los problemas más importantes y complejos a resolver en el futuro cercano en nuestras grandes ciudades. Los estacionamientos de “Park and Ride” (P&R) ofrecen la posibilidad de transportar usuarios al centro de la ciudad, que son normalmente los lugares con mayor nivel de congestión, mediante la utilización de algún medio de transporte público. Entre dichos modos de transporte podemos encontrar metro, bus, y tren. El concepto de P&R es muy simple: los usuarios manejan hasta el estacionamiento donde dejan su auto y abordan el transporte público para llegar a su destino final. Por lo tanto, los usuarios ocupan su vehículo en la parte menos congestionada de su viaje y un sistema de transporte más eficiente y rápido en la parte del viaje que normalmente es más congestionada. Las consecuencias de este cambio de

modo de transporte incluyen una disminución en la congestión, ahorros por parte de los usuarios en tiempo de viaje y costo y un incremento de la utilización del transporte público. Como condición para un buen funcionamiento de estos sistemas se requiere que el transporte público sea eficiente y confiable, de otra manera los usuarios no se verán atraídos a utilizar el P&R.

Los factores descritos anteriormente son relevantes para la operación del P&R posterior a su implementación. Sin embargo, existe una pregunta incluso más básica que no ha sido completamente respondida: dónde ubicar dichos estacionamientos de tal modo que los usuarios se sientan atraídos a dejar su auto a favor del transporte público. Es importante señalar que, aún cuando son las autoridades y agencias las que determinan la implementación de estos sistemas, no son sino los usuarios finales quienes determinan si la implementación fue exitosa o no. Además de la localización del P&R es importante considerar otros factores relevantes en la implementación. Por ejemplo, un P&R con acceso a metro presenta efectivamente un nivel de atracción mayor a los usuarios simplemente porque el metro normalmente ofrece un mejor servicio cuando lo comparamos, por ejemplo, con los buses.

La pregunta de dónde localizar un P&R ha sido normalmente analizada y respondida en base a la experiencia de implementaciones previas (AASHTO, 2004), análisis de demanda (Abdul Hamid, Mohamad, & Karim, 2007; Hendricks & Outwater, 1998; Keck & Liou, 1976), y modelos de optimización (Farhan & Murray, 2008; Wang, Yang, &

Lindsey, 2004). Nosotros proponemos una nueva metodología basada en las formulaciones de p-hub y la regla gravitacional (Reilly, 1931) para determinar el nivel de demanda que cada P&R recibirá. Con respecto a la regla gravitacional, nuestra formulación no solamente propone su utilización para poder considerar el efecto de competencia cuando dichos estacionamientos se encuentran muy cercanos unos de otros, sino también desarrollamos una linealización de dicha regla. Esta linealización de la regla gravitacional es completamente nueva y permite formular un problema que originalmente es entero no lineal en un problema mixto lineal. Esta formulación es un importante aporte a la literatura que estudia localización óptima bajo interacción entre los candidatos. Finalmente, pero no menos importante es la consideración de capacidad de cada uno de los candidatos para localizar un P&R. En la práctica no es sólo escaso sino caro encontrar espacio para implementar un P&R.

En resumen, nuestro modelo considera los P&R como parte integral del sistema de transporte de una ciudad y evalúa su implementación considerando demanda y capacidad. Lo anterior se suma a la inclusión de competencia entre los candidatos a implementar dichos estacionamientos haciendo nuestro modelo más realista al describir de manera más completa el comportamiento de los usuarios que la actual literatura en la materia.

Es simple entender que la demanda por servicio de transporte es esencialmente un tráfico que va desde un origen a un destino, posiblemente distintos para cada usuario en

el sistema. De esta manera, los P&R pueden ser considerados como puntos de transbordo donde los usuarios simplemente cambian de modo de transporte para llegar a su destino final. En la evaluación de sistemas de transporte, tanto los orígenes como los destinos son agrupados en zonas de análisis de transporte (TAZ por su sigla en inglés “transportation analysis zones”). Esta caracterización de los usuarios obedece a la necesidad de disminuir el tamaño del problema enfrentado. De otra manera sería necesario tener tantos orígenes y destinos como usuarios y destinos existen en una red de transporte respectivamente.

Este capítulo introductorio presenta primero una extensa revisión de literatura para luego dar paso a la formulación tanto conceptual como matemática del problema de localizar estacionamientos de P&R. Posteriormente el análisis está centrado en ejemplos y la aplicación de nuestra metodología al caso de estudio de Queens en New York. Finalmente presentamos conclusiones y trabajo futuro.

1.2 Revisión de literatura

La localización de P&R ha sido normalmente evaluada de acuerdo a buenas prácticas de planificación, operación y mantenimiento (AASHTO, 2004). La literatura está centrada en las características que un P&R debe exhibir para ser más atractivo a los usuarios (AASHTO, 1992, 2004; Burns, 1979; Spillar, 1997). Lamentablemente muchas de estas

recomendaciones confluyen en un set de requerimientos que no hacen más que reflejar la experiencia tanto de planificadores urbanos como de las agencias a cargo de la evaluación de P&R en casos particulares y, por ende, aplican sólo a casos puntuales. En efecto, Holguin-Veras et al. (2012) destaca que estas recomendaciones produce más bien un conjunto de reglas muchas veces contradictorias y confusas con respecto a la ubicación óptima de un P&R. Sólo algunas recomendaciones son coherentes en términos de planificación tales como: cercanía a arterias principales en las ciudades y buena accesibilidad a dichas arterias (Burns, 1979), y posición relativa con respecto a la congestión (O'Flaherty, 1997; Spillar, 1997). Otra consideración importante está relacionada con el comportamiento de usuarios frente a los P&R y cómo mejorar la percepción de calidad de dichas instalaciones (Abdul Hamid, et al., 2007). Finalmente, existen algunos modelos de optimización que consideran la instalación espacial de los P&R. Farhan and Murray (2008) proponen un modelo de optimización multiobjetivo que considera como primordial tres componentes: la presencia y preferencia por instalaciones ya existentes, la cercanía a principales arterias y la cobertura de usuarios. Por su parte Wang et al. (2004) considera una ciudad mono céntrica para desarrollar un modelo de optimización que instala P&R en un corredor servido por un servicio de trenes.

Nosotros proponemos un nuevo modelo para evaluar la instalación de P&R considerando cada uno de estos estacionamientos como puntos de transbordo o “hubs”.

Este concepto es comúnmente ocupado en aerolíneas y redes de telecomunicaciones para expresar el punto en el que confluyen personas o servicios para luego dirigirse al destino final. Por tanto en el caso de los P&R la idea es que los usuarios llegan a dicha instalación y cambian de modo de transporte para continuar con su viaje. El tramo del viaje entre el P&R y el destino final tiene un factor descuento (ahorros) puesto que se está ocupando un sistema de transporte más eficiente y rápido. Para determinar el nivel de demanda que cada P&R recibirá ocupamos la regla gravitacional. Esta regla relaciona la atracción y el costo de cada P&R para determinar la proporción de usuarios en el sistema que preferirá ocupar P&R en vez de auto. La idea de las funciones de atracción fue formulada por Reilly (1931) al relacionar tamaño y distancia al éxito o fracaso de un negocio. Este modelo parece ser más realista que el propuesto por Hotelling (1929) que produce una irreal asignación de “todo o nada” a la instalación más cercana (Drezner & Drezner, 2011). La regla gravitacional fue aplicada por Drezner y Drezner (2001) al problema de instalación de hubs en la industria aérea. En este caso los usuarios van desde origen a destino a través de un hub particular. Posteriormente, Drezner y Drezner (2006) aplicaron la regla gravitacional a tres diferentes problemas: p-median, minimización de varianza y una formulación multi objetivo que considera las dos primeras. Por su parte, Eiselt y Marianov (2009) aplicaron la regla gravitacional nuevamente a la industria aérea para localizar hubs ocupando tiempo y distancia considerando que cada ruta puede utilizar hasta dos hubs.

La formulación básica de la regla gravitacional fue propuesta por O'Kelly (1986). Para el lector interesado en ahondar en estas metodologías, Alumur y Kara (2008) y Kara y Taner (2011) ofrecen completas revisiones de literatura relacionada con esta área de investigación. En este trabajo en especial nos concentraremos en la literatura más relacionada con el problema que enfrentamos. La motivación para la aplicación de la regla gravitacional reside en que la demanda por transporte está relacionada a pares origen-destino en vez de puntos específicos. El problema de p -hub es la consecuencia natural de localizar p instalaciones o hubs. Desde su formulación por O'Kelly (1986) y posterior análisis por Campbell (1996), este problema ha concentrado gran atención tanto en su definición como en su modo de solución. Este problema es NP-hard y la literatura está enfocada en hacer posible su solución en problemas de grandes dimensiones (Abdinnour-Helm & Venkataramanan, 1998; Ernst & Krishnamoorthy, 1996, 1998; Skorin-Kapov, Skorin-Kapov, & O'Kelly, 1996). La teoría y aplicación de hubs es extensamente ocupada en la industria aérea, redes de comunicaciones, y servicios de despacho (Eiselt & Marianov, 2009; Marianov, Serra, & ReVelle, 1999; O'Kelly, 1986). En el caso de la industria aérea los hubs permiten concentrar el tráfico de usuarios permitiendo ocupar aviones más grandes y obtener mayores ingresos debido a las economías de escala producidas.

En el caso de nuestra investigación, los P&R actúan naturalmente como hubs puesto que atraen usuarios permitiendo el transbordo modal desde sus autos a transporte público. De

acuerdo a la caracterización propuesta por Marianov (1999) y Eiselt y Marianov (2009), esta investigación puede ser descrita como un problema de asignación múltiple en condiciones de competencia donde los hubs tienen capacidad limitada. En otras palabras, nosotros buscamos localizar p hubs de un conjunto de candidatos con capacidad limitada donde los usuarios deciden si ocupar el sistema de acuerdo a su costo, atracción y conveniencia comparada con el modo auto.

1.3 Definición del problema y formulación matemática

Esta sub sección muestra primero conceptualmente el problema para posteriormente desarrollar un modelo matemático de resolución. Una contribución importante está dada por la linealización de la regla gravitacional que ocupamos para describir el comportamiento de los usuarios y que hace el problema no lineal.

1.3.1 Marco conceptual y matemático

La manera más simple de entender el problema de instalar un sistema de P&R al sistema de transporte público es pensar en grandes ciudades como New York, Londres, o Los Angeles. En estas ciudades cada día se trasladan cientos, muchas veces millones, de personas desde sus residencias hacia diferentes puntos del centro de la ciudad con

diferentes motivos: trabajo, recreación, y compras, por nombrar algunos. Cuando estas personas tienen la posibilidad de ocupar un P&R se ven enfrentados a la disyuntiva de simplemente manejar hasta el destino final o bien ocupar su automóvil hasta el P&R donde pueden estacionar y luego ocupar un sistema de transporte que, idealmente, es más eficiente y barato. Como hemos señalado anteriormente, los sistemas de P&R permiten a los usuarios aprovechar los beneficios tanto de sus autos como del sistema de transporte público. Esto se da puesto que los usuarios manejan en el tramo de su viaje que menos probablemente estará congestionado y luego ocupan un sistema eficiente y barato para el tramo más congestionado de su viaje. Por tanto, para cada par origen-destino (i,j) existe una demanda conocida y definida como h_{ij} . Definimos la variable binaria x_k que toma valor de 1 si el P&R k es seleccionado y 0 si no. El costo de ocupar auto para viajar entre i y j está dado por g_{ija} mientras que el costo de ocupar el P&R k para llegar al destino final es definido como g_{ijk} . Tanto g_{ija} como g_{ijk} consideran todos los componentes del costo respectivo tales como: tiempo, tarifas, parking y similares. Este concepto es normalmente conocido como costo generalizado y no es más que la unificación de todos los costos relacionados al transportes. Es importante notar que $g_{ijk}=\alpha g_{ija}$ donde $\alpha \leq 1$ es un factor de descuento que expresa la existencia de economías de escala cuando se ocupa un P&R. Además el parámetro A_k representa el nivel de atracción del P&R k . Puesto que naturalmente los usuarios tienden a favorecer el uso del auto por sobre el transporte público, normalmente $A_k < 1$ para todos los P&R. Este

coeficiente intenta capturar todos los factores relevantes que hacen de un P&R más o menos atractivo para los usuarios. Entre estas características se pueden contar la capacidad del estacionamiento, cercanía con arterias principales, conectividad, facilidad de acceso, seguridad y otros servicios relacionados. De acuerdo a la regla gravitacional y de manera similar a Eiselt y Marianov (2009) la proporción de usuarios seleccionando el P&R k esta dado por:

$$P_{ijk} = \frac{x_k A_k g_{ijk}^{-\lambda}}{A_a g_{ija}^{-\lambda} + \sum_{l \in K} x_l A_l g_{ijl}^{-\lambda}} \quad (1)$$

Donde λ define que tan sensibles son los usuarios al costo del P&R respectivo. De esta forma un alto valor de λ define usuarios más sensibles al costo y, por ende, más propensos a sencillamente elegir el modo más barato. Por otra parte la atracción del P&R naturalmente aumenta la demanda cuando dicho parámetro es aumentado. Por lo tanto el total de demanda ocupando el P&R k entre i y j está dado por $h_{ij}P_{ijk}$ y, consecuentemente, el total de demanda en dicho P&R será la sumatoria sobre todos los pares origen destino. La formulación matemática maximiza el número de usuarios al localizar p P&R de un conjunto K de sitios candidatos. Matemáticamente:

$$P : \text{Max } z = \sum_{i,j,k} h_{ij} P_{ijk} \quad (2)$$

Sujeto a:

$$\sum_k x_k = P \quad (3)$$

$$\sum_{i,j} h_{ij} p_{ijk} \leq H_k x_k \quad \forall k \quad (4)$$

$$x_k \in \{0,1\} \quad \forall k \quad (5)$$

La ecuación (3) determina el número total de P&R mientras que (4) establece el límite de capacidad de los estacionamientos.

1.3.2 Linealización de la regla gravitacional

El modelo descrito por las ecuaciones (1)-(5) establece una formulación entera no lineal.

La no linealidad de esta formulación está dada esencialmente por la presencia de la regla gravitacional. Esta sección propone una formulación lineal capaz de reproducir las mismas proporciones establecidas en la regla gravitacional. Similarmente a la formulación no lineal, las proporciones son consideradas variables del modelo.

Teorema: La ecuación (1) como restricción de un problema de programación entera es equivalente al siguiente set de ecuaciones:

$$p_{ijk} \leq x_k \quad \forall i, j, \forall k \in K \quad (6)$$

$$p_{ija} + \sum_k p_{ijk} = 1 \quad \forall i, j \quad (7)$$

$$p_{ijk} \leq \frac{A_k g_{ijk}^{-\lambda}}{A_l g_{ijl}^{-\lambda}} p_{ijl} + (1 - x_l) \quad \forall i, j, \forall k, l \in K \cup a / k \neq l \quad (8)$$

Demostración: La ecuación (6) reduce a cero la proporción de los P&R que nos son instalados mientras que (7) establece que la suma de las proporciones de los P&R y el modo auto debe ser igual a 1. Finalmente, el set de restricciones lineales (8) reproduce las proporciones dadas en la regla gravitacional. Para demostrar esto consideremos, sin pérdida de generalidad, dos P&R (1 y 2) presentes en la solución óptima. Estos P&R van a generar el siguiente set de restricciones:

$$p_{ij1} \leq \frac{A_1 g_{ij1}^{-\lambda}}{A_2 g_{ij2}^{-\lambda}} p_{ij2} + (1 - x_2) \quad \forall i, j \quad (9)$$

$$p_{ij2} \leq \frac{A_2 g_{ij2}^{-\lambda}}{A_1 g_{ij1}^{-\lambda}} p_{ij1} + (1 - x_1) \quad \forall i, j \quad (10)$$

Puesto que 1 y 2 pertenecen a la solución óptima $x_1=x_2=1$ y, por tanto, la expresión entre paréntesis puede ser descartada y ambas restricciones de manera conjunta producen la siguiente ecuación:

$$p_{ij1} = \frac{A_1 g_{ij1}^{-\lambda}}{A_2 g_{ij2}^{-\lambda}} p_{ij2} \quad \forall i, j \quad (11)$$

(11) puede ser escrita para cualquier par de P&R en la solución óptima y el modo auto.

Por lo tanto y reemplazando estas ecuaciones en (7) se obtiene:

$$\frac{A_a g_{ija}^{-\lambda}}{A_2 g_{ij2}^{-\lambda}} p_{ij2} + \dots + \frac{A_1 g_{ij1}^{-\lambda}}{A_2 g_{ij2}^{-\lambda}} p_{ij2} + p_{ij2} = 1 \quad \forall i, j \quad (12)$$

Finalmente:

$$p_{ij2} = \frac{A_2 g_{ij2}^{-\lambda}}{A_a g_{ija}^{-\lambda} + \sum_{\forall l \in K} A_l g_{ijl}^{-\lambda}} \quad \forall i, j \quad (13)$$

(13) entrega exactamente las mismas proporciones que la regla gravitacional mediante la ocupación de un set de ecuaciones lineales.

Usando esta equivalencia hemos obtenido una formulación mixta lineal para un problema que originalmente era entero no lineal.

1.4 Análisis numérico

En esta sub sección entregamos dos ejemplos de la aplicación del modelo antes descrito. Los ejemplos numéricos fueron realizados en un computador de escritorio (Intel Core i5, 3.2GHz). Ocupamos CPLEX 11.0.1 y también aplicamos Heuristic Concentration Integer (HCI) para resolver ejemplos de mayor tamaño y compararlos con la solución obtenida por CPLEX. Programamos HCI en Fortran 95 y la única modificación con respecto a HCI desarrollada por Marianov et al. (2009) es que los P&R solamente pueden ser seleccionados una vez. Para los ejemplos generamos una muestra aleatoria de 10 orígenes ($o1, \dots, o10$), 10 destinos ($d1, \dots, d10$) y 10 candidatos ($pr1, \dots, pr10$).

1.4.1 Localizando 3 P&R considerando $A_k=0.5$, $\lambda=2$, $\alpha = 1$

Este ejemplo tiene por objetivo validar los resultados producidos por nuestra modelación. Para estos ejemplos hemos ocupado un parámetro de atracción para los P&R igual a 0.5 y los costos son simplemente las distancias euclidianas mientras que la sensibilidad al costo (λ) es igual a 2. La capacidad de los candidatos es igual a 400 mientras que la demanda de todos los pares origen destino es igual a 10. La FIGURA 1 muestra el set de orígenes, destinos y candidatos. Los círculos de la figura muestran los tres candidatos seleccionados en la solución óptima.

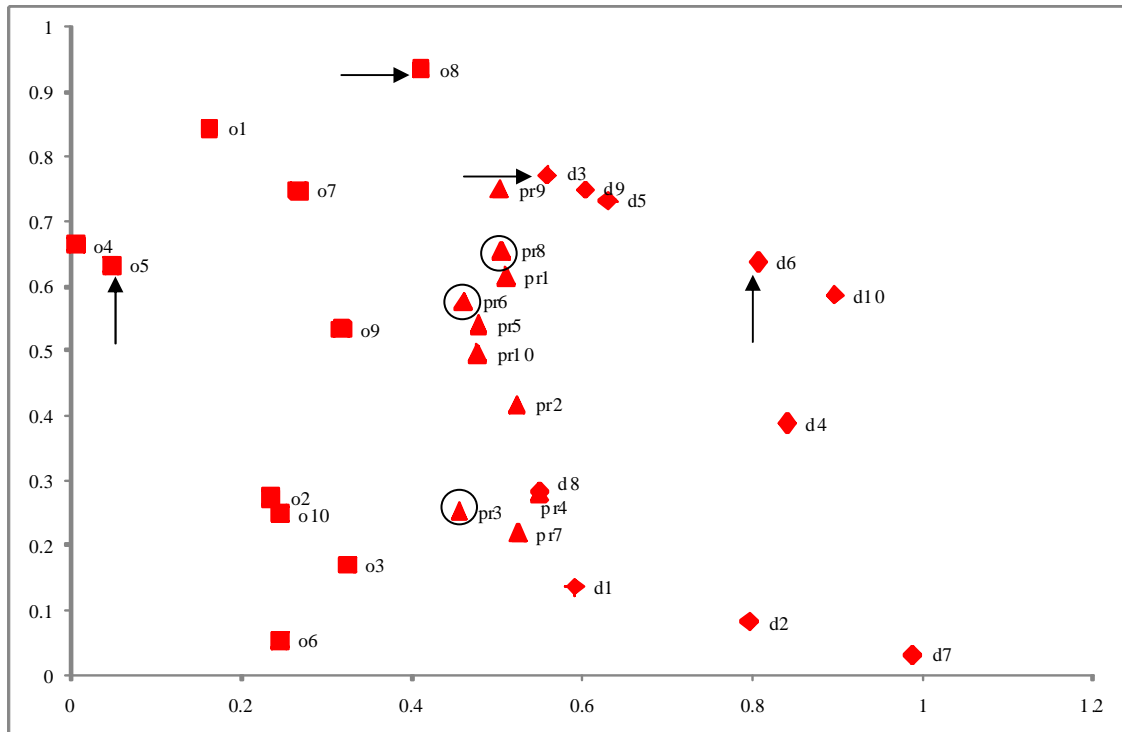


FIGURA 1: Orígenes, destinos y candidatos del ejemplo numérico

Las TABLAS 1, 2, 3 y 4 presentan los resultados para los tres candidatos en la solución óptima y el modo auto respectivamente. Las filas corresponden a orígenes y las columnas a destinos. Es importante notar que cuando los costos de auto y P&R son similares las proporciones se acercan. Este es el caso de los pares origen destino que pueden ser unidos por un corredor o línea directa. Puesto que para estos ejemplos hemos considerado distancias euclidianas es posible validar los resultados de dicha forma. Este es el caso de los viajes generados en 5 con destino en 6 (flechas verticales en la FIGURA 1). En este caso el porcentaje de viajes capturados por los P&R 6 y 8 son

bastante similares y también cercanas al modo auto. Distinto es el caso de los viajes originados en 8 con destino en 3 (flechas verticales en la FIGURA 1). En este caso el porcentaje de viajes en P&R disminuye considerablemente y, como es de esperarse, se incrementa el modo auto. Este tipo de análisis permite analizar la coherencia de los resultados del modelo. En un análisis posterior mostraremos la aplicación de la metodología a casos de mayores dimensiones y con diferentes parámetros.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	21	19	4	13	5	8	18	18	4	10
2	28	27	14	24	15	19	25	30	14	20
3	24	26	19	26	20	23	25	31	19	24
4	23	21	7	16	8	11	21	21	7	13
5	23	22	6	16	7	11	21	21	7	13
6	21	22	19	25	20	22	22	29	19	23
7	20	18	3	12	3	7	18	17	3	9
8	19	17	1	10	2	5	16	16	2	7
9	24	21	4	14	5	8	20	19	5	11
10	27	27	15	24	16	19	25	30	15	21

**TABLA 1: Porcentaje de viajes ocupando
P&R 3**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	18	19	19	22	22	24	20	18	21	23
2	5	8	22	12	21	17	10	4	21	16
3	2	5	20	9	19	15	8	2	19	14
4	14	16	21	19	23	22	17	14	22	22
5	13	16	22	19	23	22	17	13	23	22
6	3	6	20	10	20	16	8	4	20	15
7	17	19	18	22	22	24	20	17	22	23
8	20	21	11	22	16	21	21	21	14	21
9	11	14	24	17	24	22	16	9	24	20
10	4	7	21	11	21	17	10	4	21	16

**TABLA 2: Porcentaje de viajes ocupando
P&R 8**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	20	20	13	22	16	20	21	20	16	20
2	6	10	22	15	21	19	12	6	22	18
3	3	7	20	11	20	17	9	4	20	16
4	17	19	18	22	20	22	20	18	20	22
5	17	18	18	21	20	22	19	17	20	22
6	4	7	20	12	20	17	9	6	20	16
7	20	21	12	22	16	20	21	21	15	21
8	20	20	6	19	9	15	20	21	8	16
9	15	18	21	22	23	23	19	15	23	22
10	6	10	21	14	21	19	12	6	22	18

**TABLA 3: Porcentaje de viajes ocupando
P&R 6**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	42	42	64	44	57	48	41	44	59	47
2	61	55	43	49	43	45	52	60	43	46
3	71	62	41	53	42	45	58	63	41	47
4	46	44	54	43	49	45	42	48	51	44
5	47	44	54	44	49	45	43	49	50	44
6	71	65	41	52	41	44	61	61	41	46
7	43	42	67	44	58	49	42	46	60	48
8	41	42	82	48	72	59	44	42	76	57
9	50	47	51	48	48	47	45	56	48	47
10	63	56	43	50	42	45	53	60	42	46

**TABLA 4: Porcentaje de viajes ocupando
auto**

1.4.2 Influencia de la atracción y λ ($\alpha = 1.0$)

Este análisis tiene por objetivo determinar el impacto que tienen tanto la atracción como la sensibilidad al costo por parte de los usuarios. Es importante destacar que el coeficiente de atracción debe ser menor a 1 puesto que, normalmente, el modo auto es más atractivo para los usuarios que ocupar transportes público. Por su parte la sensibilidad al costo (λ) permite tener una mejor idea de los distintos escenarios en los cuales los sistemas de P&R se desenvuelven. En este caso y dado que normalmente el costo de auto es menor al de P&R, es posible establecer tanto un límite inferior como superior al desempeño de los candidatos. En conclusión la correcta elección de los parámetros permite modelar de una manera más realista las características de los P&R y, incluso más importante, incorporar la experiencia que consultores y agencias de gobierno han desarrollado a lo largo de los años en la implementación de estos sistemas. Para poder analizar la influencia de estos parámetros resolvimos varios problemas bajo diferentes características y combinaciones de atracción y sensibilidad al costo. La TABLA 5 muestra los resultados cuando se le pide al modelo determinar los mejores 2, 3 y 4 candidatos dada cierta combinación de atracción y sensibilidad. Esta tabla muestra además los tiempos de ejecución para CPLEX (columna AMPL) y para HCI. En todos los casos HCI tuvo un desempeño excelente encontrando la solución óptima en tiempos muy inferiores a CPLEX.

p	A	λ	Opt cov	P&R	AMPL(sec)	HCI(sec)	A	λ	Opt cov	P&R	AMPL(sec)	HCI(sec)
2	1.00	1	613.18	5-10	26.6	0.57	1.00	1	613.18	5-10	26.6	0.57
2	0.75	1	544.50	5-10	26.5	0.54	1.00	2	567.40	4-8	24.6	0.51
2	0.50	1	445.31	5-10	5.5	0.56	1.00	3	535.01	3-9	14.2	0.50
2	0.25	1	288.60	5-10	9.2	0.56	1.00	4	510.06	3-9	18.5	0.49
2	0.20	1	245.52	5-10	7.8	0.56	1.00	5	489.03	3-9	12.7	0.49
2	0.10	1	140.70	5-10	9.0	0.56	1.00	6	471.19	4-9	8.0	0.49
3	1.00	1	702.30	4-6-8	34.4	0.58	1.00	1	702.30	4-6-8	34.4	0.58
3	0.75	1	640.03	5-6-10	25.8	0.77	1.00	2	661.03	3-5-9	20.5	0.72
3	0.50	1	544.32	5-6-10	17.1	0.79	1.00	3	629.88	3-5-9	18.1	0.70
3	0.25	1	376.79	5-6-10	9.6	0.79	1.00	4	605.12	3-5-9	17.0	0.69
3	0.20	1	326.74	5-6-10	12.5	0.79	1.00	5	584.66	3-5-9	14.1	0.69
3	0.10	1	196.56	5-6-10	14.6	0.79	1.00	6	567.19	3-5-9	12.7	0.69
4	1.00	1	758.33	3-5-6-8	33.6	0.81	1.00	1	758.33	3-5-6-8	33.6	0.81
4	0.75	1	702.47	3-5-6-8	19.4	0.78	1.00	2	721.72	3-4-8-9	17.0	0.82
4	0.50	1	612.82	4-5-6-10	21.5	0.87	1.00	3	693.91	3-4-8-9	15.4	0.80
4	0.25	1	444.69	2-5-6-10	17.7	0.73	1.00	4	671.18	3-4-8-9	12.9	0.80
4	0.20	1	391.32	2-5-6-10	22.6	0.88	1.00	5	651.82	3-4-8-9	12.7	0.79
4	0.10	1	244.93	2-5-6-10	23.1	0.87	1.00	6	634.82	3-4-8-9	11.1	0.80

TABLA 5: Influencia de A_k y λ en la localización óptima

La FIGURA 2 muestra los resultados de manera esquemática. Es importante notar que cuando el nivel de atracción es bajo la solución óptima se concentra en el centro formando una especie de corredor entre los orígenes y los destinos. Por otra parte y cuando el nivel de sensibilidad es incrementado la solución óptima se localiza en los extremos del set de candidatos. El primer comportamiento del modelo obedece a lo que en la literatura ha sido ampliamente argumentado como el caso más robusto de localización de P&R, corredor.

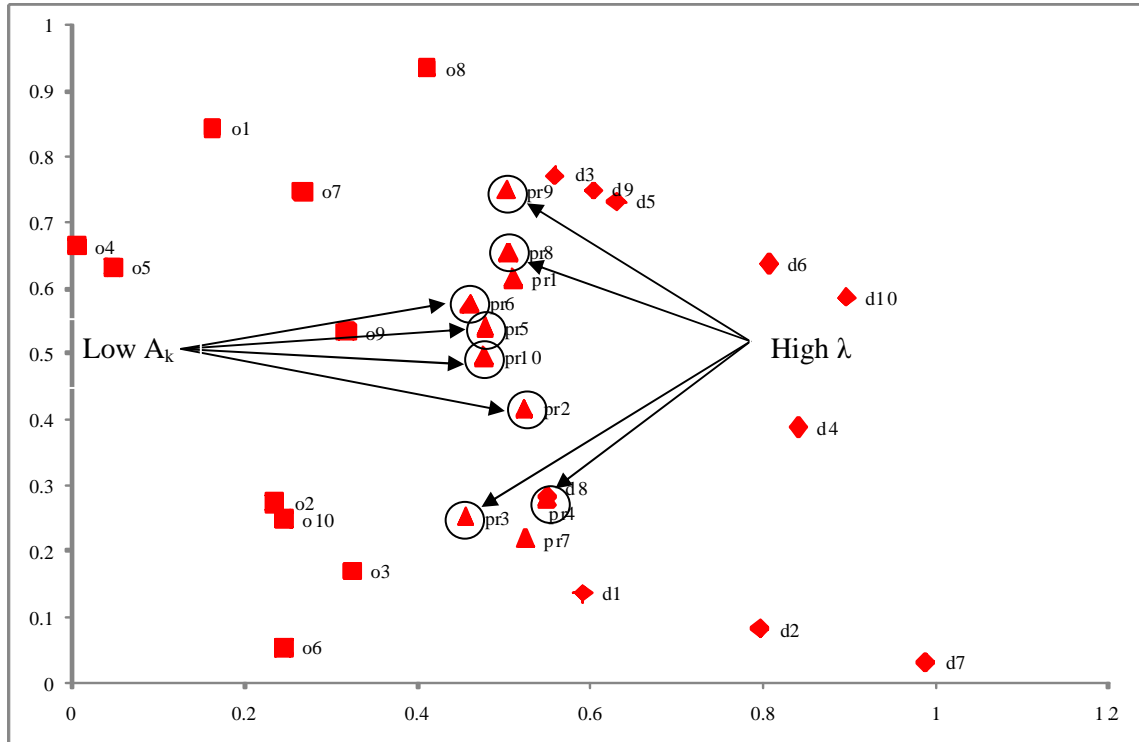


FIGURA 2: Resultados para diferentes combinaciones de A_k y λ

1.5 Caso de estudio: P&R en Queens, New York

Esta sub sección describe la aplicación de nuestro modelo a un caso real: la instalación de P&R en el distrito municipal de Queens en New York. La evaluación de P&R en los municipios que rodean a Manhattan fue desarrollada por Holguin-Veras et al. (2012). En dicha evaluación los autores consideran 59 candidatos, 317 destinos en Manhattan y casi 4000 orígenes en toda el área del New York Metropolitan Transportation Council.

Nuestro ejemplo se remite al caso de los 21 candidatos localizados en Queens y los orígenes en los municipios de Bronx, Suffolk, Nassau, Kings (más conocido como Brooklyn) y, obviamente Queens para un total de 1196 orígenes. La FIGURA 3 muestra que dadas las características geográficas de dichos municipios es realista evaluar los candidatos en el Queens considerando usuarios viniendo de los municipios antes señalados. Los datos correspondientes a costo y localización de los centroides corresponde al “New York Best Practice Model” que es el modelo de demanda diseñado para la ciudad de New York y sus alrededores y ocupado frecuentemente en la evaluación de proyectos de transporte. La aplicación de nuestro modelo fue resuelta ocupando HCI dadas las dimensiones del problema y buscamos los mejores 5 candidatos sobre el universo de 21 disponibles.



FIGURA 3: Caso de estudio de Queens

La TABLA 6 muestra los resultados de la evaluación y los compara con el trabajo realizado por Holguin-Veras et al. (2012). Es importante destacar que los mejores 3 candidatos obtenidos por los autores pertenecen también al conjunto de la solución óptima obtenida mediante nuestro modelo. Ahora bien, como se puede ver en la misma tabla el nivel de demanda que cada P&R enfrentaría es considerablemente menor al calculado por Holguin-Veras et al. (2012). Esto se debe primordialmente a la consideración de interacción de nuestro modelo entre los candidatos mediante la regla gravitacional. En efecto, esta consideración hace más realista la evaluación puesto que

en el caso de Holguin-Veras et al. (2012) los resultados son obtenidos luego de evaluar cada candidato por separado de manera consecutiva e independiente.

ID	Address	Expected demand	
		Holguin-Veras et al. 2012	Gravity rule
Q6	13345 41 Ave	14676	4289
Q18	Hillside Ave and 179th St	9564	3413
Q16	90-99 168th St	8386	3212
Q3	6626 Metropolitan Ave	1262	4514
Q2	4540 Court Sq	215	3605

TABLA 6: Resumen de resultados de la evaluación

La FIGURA 4 permite visualizar los mismos resultados, pero de manera gráfica. En dicha figura es posible observar que efectivamente Q16 y Q18 se encuentren en relativa cercanía por lo que probablemente habrá canibalización entre dichos candidatos. En el caso de la aplicación de nuestro modelo el nivel de demanda de estos candidatos cae notablemente reflejando el efecto antes descrito. Además, existe una distribución más equilibrada de la demanda en los diferentes candidatos.

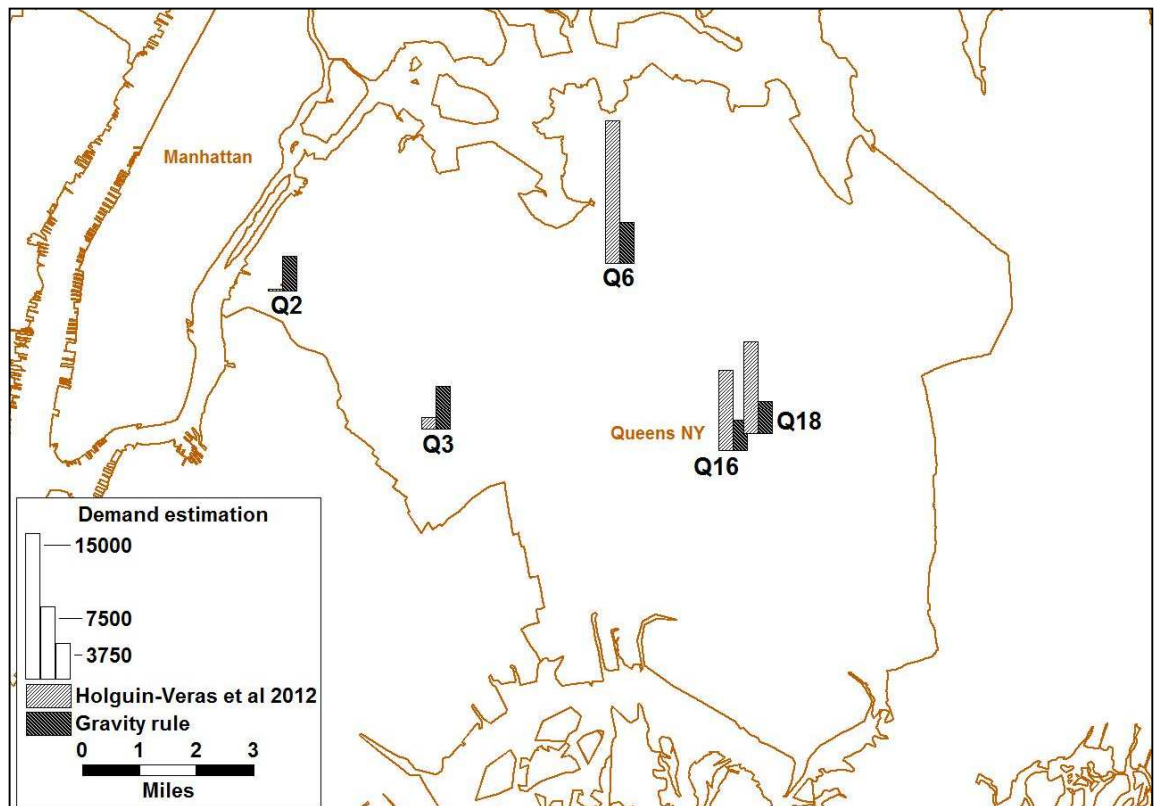


FIGURA 4: Comparación de resultados

1.6 Conclusiones y trabajo futuro

Hemos propuesto en esta investigación una nueva metodología para la evaluación de la instalación de P&R. Nuestra metodología está basada en una característica natural de estos estacionamientos: funcionan como hubs o puntos de transbordo. Nuestro modelo considera además capacidad de los P&R, algo que no ha sido considerado por la literatura que revisamos. Esta consideración es muy importante puesto que el espacio

para construir un P&R no es tan sólo escaso sino muchas veces muy caro, por ejemplo: New York.

Otra importante consideración es la utilización de la regla gravitacional. En este sentido nuestro modelo puede incorporar la experiencia tanto de agencias como de consultores en los parámetros de atracción y sensibilidad al costo por parte de los usuarios. Incluso más importante, la regla gravitacional permite hacer una asignación más realista de la demanda puesto que permite la interacción, muy especialmente canibalización, entre los candidatos a instalar. Junto con ocupar la regla gravitacional para la determinación de demanda proponemos una novedosa linealización de dicha regla que permite pasar de un modelo entero no lineal a uno mixto lineal con todas las implicancias matemáticas que ello conlleva.

Para instancias grandes ocupamos exitosamente Heuristic Concentration Integer. Esta heurística nos permitió reducir considerablemente los tiempos de ejecución pasando en el caso más crítico (20 orígenes, 20 destinos y 20 candidatos) de dos días y medio en el caso de CPLEX a tan sólo 63 segundos en promedio.

En conclusión nuestro trabajo propone un nuevo y aplicable modelo de solución para el problema de instalación de P&R. Ahora bien, para aprovechar de mejor manera las virtudes tanto de la formulación como de la linealización de la regla gravitacional es importante desarrollar algoritmos de solución acordes con las características del

problema. La principal limitante es, sin duda, el tamaño de las instancias a resolver siendo el problema NP-duro.

**2. P-HUB APPROACH FOR THE OPTIMAL PARK-AND-RIDE
FACILITY LOCATION PROBLEM**

Este capítulo contiene el artículo enviado a la revista “European Journal of Operational Research” para su revisión el día Diciembre 4 de 2011.

P-HUB APPROACH FOR THE OPTIMAL PARK-AND-RIDE FACILITY
LOCATION PROBLEM

Felipe Aros-Vera¹ and Vladimir Marianov²,

ABSTRACT

Park and Ride facilities (P&R) are car parks where users can transfer to public transportation to reach their final destination. We propose a mixed linear programming formulation to determine the optimal location of a fixed number of P&R) facilities. These facilities are modeled here as capacitated hubs. The model locates the P&R facilities to maximize their usage, considering that commuters can either use the service or choose to travel by car to their destinations, and their behavior follows a gravitational model. We applied a p-hub approach considering users' generalized cost and attractiveness of each P&R facility as input for the gravity rule. For small instances of the problem, we propose a novel linearization of the gravity rule, which allows transforming the binary nonlinear programming problem into a mixed linear programming formulation. A modification of the Heuristic Concentration Integer (HCI) procedure is applied to solve larger instances of the problem. Numerical experiments are performed, including a case in Queens, NY. Further research is proposed.

¹ Graduate Student, School of Engineering, Pontificia Universidad Católica de Chile, Vicuña Mackenna 4860, Santiago, Chile, mfaros@uc.cl

² Professor, Department of Electrical Engineering, Pontificia Universidad Católica de Chile, Vicuña Mackenna 4860, Santiago, Chile, marianov@ing.puc.cl

Keywords: Park and Ride, Location, p-hub, gravity rule, heuristic concentration integer (HCI).

INTRODUCTION

Congestion is one of the most important problems to be solved in highly populated cities. Park and Ride (P&R) facilities offer the possibility to access the center of business district (CBD), which is normally the most congested area, through public transportation including bus, metro, bus rapid transit, and rail. The concept underlying P&R is simple: users drive from their residence to the facility, park there, and switch to public transportation to reach their final destination. In other words, P&R systems enable the use of private vehicles in the least congested part of the trip and then the use of an efficient public transportation system in the part of the trip most likely to be congested. The consequence is a decrease in congestion, reduction in travel times and costs for users, and an increment of usage of transit systems. In order to attract commuters, P&R systems require a well suited public transportation system, i.e. high bus or train frequencies, reliability, accessibility and comfort (Burns, 1979). Otherwise, users will not change from cars to public transportation. Furthermore, location of P&Rs should be carefully chosen, considering that a planner decides their location, but the users decide whether using one of such facilities or sticking to their cars. In fact, if these facilities are not located conveniently from the point of view of potential users, no matter how congested the transit system is, they will not be used. Moreover, not only

location is important, but also the fact that each P&R facility exhibits certain characteristics that may contribute to its attractiveness. For example, access to Metro will increase the patronage due to the higher regularity and reliability of this mode, compared to bus.

Different approaches have been used for finding the best P&R locations. These include using a set of expert criteria (AASHTO, 2004), demand analysis (Abdul Hamid, et al., 2007; Hendricks & Outwater, 1998; Keck & Liou, 1976), and optimization formulations (Farhan & Murray, 2008; Wang, et al., 2004).

We propose a new approach which, in the first place, utilizes a spatial optimization model based on the p-hub formulation (Campbell, 1996) and considers the gravity rule (Reilly, 1931) to determine users' patronage. Secondly, we propose for the first time a linearization of the gravity rule, which is suitable for small size problems. Finally, considering that because of the high price and limited availability of land in cities, capacity appears to be an important limitation when locating P&Rs, as an additional contribution, we explore the effect of including a capacity constraint into the model. To the best of our knowledge, models using the gravity rule have never included capacity constraints. In summary, the model locates P&R facilities; recognizes explicitly their nature of transshipment points in which users transfer to a mode with economies of scale; acknowledges competition between P&Rs and between these and the car mode, as well as the fact that users choose either using a P&R or not; and includes the fact that

capacity could be limited. These considerations make the model more realistic in terms of describing the real behavior of commuters regarding the usage of P&R facilities.

By its nature, demand covered by P&R facilities is comprised by commuters going from an origin (household) to a destination (work, shopping, etc) in the cities. Therefore, P&R facilities can be considered as hubs where commuters switch from car to a mode with economies of scale to continue the trip. In order to make the problem tractable, these origins and destinations are considered, without loss of generalization, in a level of aggregation denominated transportation analysis zones (TAZ). This allows aggregating commuters with similar travel patterns. Otherwise, the size of the problem would be intractable for any optimization method.

This paper is organized as follows. Section 2 discusses the literature related to assessment and planning of P&R facilities as well as hub location and gravity rule. Statement of the model and the mathematical formulation are delivered in section 3. Section 4 discusses numerical examples and performance of the heuristic concentration integer procedure (HCI) applied to the problem. Conclusions and further research are discussed in section 5.

LITERATURE REVIEW

Locating P&R facilities has been addressed considering good practices of planning, operations and maintenance (AASHTO, 2004). The literature is mainly centered on the characteristics that a P&R location must exhibit in order to provide a good level of

service (AASHTO, 2004; Burns, 1979; Spillar, 1997). These characteristics end up in a set of criteria reflecting the expertise developed by planning practitioners and agencies. However, as Holguin-Veras et al. (2011) point out, these criteria produce confusing and contradictory recommendations regarding the optimal location of P&R facilities. Only a few of these recommendations can be considered as coherent for planning purposes such as: closeness to major highways to encourage visibility and accessibility (Burns, 1979), and relative position with respect to congestion (O'Flaherty, 1997; Spillar, 1997). Another important consideration concerns users' behavior and how to encourage the use of these facilities (Abdul Hamid, et al., 2007). Finally, optimization models have been proposed for spatial location of P&R facilities in a corridor (Wang, et al., 2004), or two dimensional cities (Farhan & Murray, 2008). Wang et al (2004) analyze three different modes of transportation: car, rail and P&R. In this case the P&R facility is located at some point along the corridor and connects to the rail system. Farhan and Murray (2008) highlight that there are at least three important concerns when siting facilities: users coverage, the effect of existing facilities, and closeness to major roadways. They present a multi-objective spatial optimization model for simultaneously addressing these issues. However, this model does not consider cannibalization or competition among facilities, and, therefore, does not account for the effect that either new or installed facilities have on demand.

We propose a novel approach for assessing optimal location of P&R facilities, by treating these facilities as capacitated transshipment points. After reaching one such transshipment point or hub by car, the customer switches mode and uses public transportation which, compared to the car mode, has a discounted cost, similar to the discounted cost between hubs in the hub location problem. In order to determine the level of patronage on each selected facility, we use the gravity rule, which relates attractiveness and distance-related costs to the proportion of users patronizing each facility or car alone. The idea of attraction functions was formulated by Reilly (1931) when the author postulated the law of retail gravitation in which size and distance influence the level of performance of a business in a positive or negative fashion. Later, Huff (1964) used this gravitational rule to compute the proportion of users patronizing each facility in a system. This model seems to be more realistic for competitive environment than that proposed by Hotelling (1929) where users simply select the closest facility producing an unrealistic all or nothing assignment (Drezner & Drezner, 2011). This methodology was applied by Drezner and Drezner (2001) to the hub location problem, when airline users can go between their origins and destinations through a single hub. Later, Drezner and Drezner (2006) applied the gravity rule to three different problems: p-median, variance minimization, and a multi objective formulation including both. After that, (Drezner & Drezner, 2007) proposed the gravity p-median problem. The authors argue that this formulation is a more realistic p-median problem

since it overcomes the all or nothing demand assignment considered in the traditional p -median problem. Eiselt and Marianov (2009) applied the gravity rule to the location of hubs in the airline industry, using time and distance-related costs and considering that each airline route can include up to two hubs.

The basic hub location problem was proposed by O'Kelly (1986). Good state of the art reviews in network hub location are offered by Alumur and Kara (2008) and Kara and Taner (2011). The motivation for the hub problem resides in the fact that demand is composed by trips between origins and destinations. The p -hub median problem is a natural consequence of considering the location of p facilities in a network comprised by origins and destinations. Since formulated by O'Kelly (1986) and analyzed in Campbell (1996), this problem has attracted much research concerning both its definition and solution. This problem is NP-hard and continuous efforts are being made to solve large instances (Abdinnour-Helm & Venkataramanan, 1998; Ernst & Krishnamoorthy, 1996, 1998; Skorin-Kapov, et al., 1996). Hub location theory is intensively used in the airline industry, communication networks, and delivery services (Eiselt & Marianov, 2009; Marianov, et al., 1999; O'Kelly, 1986). In the airline industry, hubs route traffic allowing companies the use of larger planes and increase profit from scale economies. Drezner and Drezner (2001) determine the optimal airline hub location by minimizing total miles traveled by passengers.

In our case, P&R facilities act naturally as hubs, attracting users' trips that use car to public transportation. Following the competitive formulations in Marianov et al., (1999) and Eiselt and Marianov (2009), this research can be described as a multiple assignment, competitive, capacitated p-hub problem. In other words, we seek the optimal location of p hub facilities out of a set of candidates considering capacity constraints, considering that users patronize facilities according to cost, attractiveness and convenience as compared to using car alone.

PROBLEM STATEMENT AND MATHEMATICAL FORMULATION

Definition

Consider big cities such as New York, Los Angeles, or London. In these cities there are thousands –sometimes millions– of travelers going from households to different points in the CBD. Commuters can choose either driving, or using P&R facilities to switch to the discounted public transportation mode to reach their destinations. As pointed out before, P&R systems allow commuters to take advantage of the benefits of using car in the least congested part of the trip and then using transit (or car pooling) for the part of the trip most likely to be congested. For each origin-destination pair (i,j) , there exists a known customer demand h_{ij} . We define the binary location variables x_k which assume a value of one if a P&R facility is located at k , and zero otherwise. If the car only alternative is chosen, the cost is g_{ija} while g_{ijk} denotes the cost of using P&R k . Parameters g_{ija} and g_{ijk} account for all cost components of the respective mode, i.e. fare,

parking cost, travel time, out of pocket cost, and so on. Note that $g_{ijk} = \alpha g_{ija}$, where $\alpha \leq 1$ is a discount factor (similar to the factor accounting for economies of scale in the hub problem). In addition, A_k represents the attractiveness of each P&R facility k . Since car mode's attractiveness is set to one, $A_k < 1$ for all P&R facilities. This coefficient attempts to express all characteristics making any P&R more or less attractive to commuters. Among other features, it could account for the number of parking spaces, closeness to public transportation, connectivity, easiness of access, safety of the car mode alternative, presence of other services and so on. According to the gravity rule and in a similar fashion to Eiselt and Marianov (2009), the proportion of commuters choosing P&R facility k is given by:

$$P_{ijk} = \frac{x_k A_k g_{ijk}^{-\lambda}}{A_a g_{ija}^{-\lambda} + \sum_{l \in K} x_l A_l g_{ijl}^{-\lambda}} \quad (14)$$

Where λ (the “cost penalty”) sets how sensitive are users to cost. Large values of λ represent a high sensitivity to cost and users will prefer to use a cheaper mode. On the other hand, as attractiveness increases, so does the demand patronizing the facility. Therefore, the total demand using P&R facility k for an origin destination pair is given by $h_{ij} p_{ijk}$ and, consequently, the total demand using a P&R is the summation of the demand using it, over all origin destination pairs. Consider now the problem of locating capacitated P&R facilities in a transportation network. The capacity of each P&R facility

is given by H_k . The objective is to maximize the number of users by locating p P&R facilities within the set K of candidates. Then, the model can be written as:

$$P: \text{Max } z = \sum_{i,j,k} h_{ij} p_{ijk} \quad (15)$$

$$\text{s.t. } \sum_k x_k = p \quad (16)$$

$$\sum_{i,j} h_{ij} p_{ijk} \leq H_k x_k \quad \forall k \quad (17)$$

$$x_k \in \{0,1\} \quad \forall k \quad (18)$$

Linearization of the gravity rule

The model described by (1)-(5) is an integer nonlinear programming formulation. The nonlinearity of this formulation is given by the utilization of the gravity rule to determine the proportion of users at each P&R facility. This section proposes a linear formulation capable to reproduce the proportions described by the gravity rule. In the following formulation –as in the previous one– the proportions produced by the gravity rule are variables of the model.

Theorem: Equation (1) as a constraint of an IP formulation, is equivalent to the following set of equations.

$$p_{ijk} \leq x_k \quad \forall i, j, \forall k \in K \quad (19)$$

$$p_{ija} + \sum_k p_{ijk} = 1 \quad \forall i, j \quad (20)$$

$$p_{ijk} \leq \frac{A_k g_{ijk}^{-\lambda}}{A_l g_{ijl}^{-\lambda}} p_{ijl} + (1 - x_l) \quad \forall i, j, \forall k, l \in K \cup a / k \neq l \quad (21)$$

Proof: Constraint (6) sets to zero the proportions of non-installed facilities while (7) requires proportions of installed facilities plus “car only” mode add to 1. Finally, the set of constraints (8) reproduces the proportions given by the gravity rule. In order to prove this, let us consider, without loss of generality, two of the facilities (1 and 2) belonging to the optimal solution. These facilities will generate the following set of inequalities (8):

$$p_{ij1} \leq \frac{A_1 g_{ij1}^{-\lambda}}{A_2 g_{ij2}^{-\lambda}} p_{ij2} + (1 - x_2) \quad \forall i, j \quad (22)$$

$$p_{ij2} \leq \frac{A_2 g_{ij2}^{-\lambda}}{A_1 g_{ij1}^{-\lambda}} p_{ij1} + (1 - x_1) \quad \forall i, j \quad (23)$$

Since 1 and 2 belong to the optimal set, $x_1 = x_2 = 1$ and, hence, the expression between parenthesis on the right hand side of the set of each inequality can be discarded and both constraints together are equivalent to an equality constraint of the form:

$$p_{ij1} = \frac{A_1 g_{ij1}^{-\lambda}}{A_2 g_{ij2}^{-\lambda}} p_{ij2} \quad \forall i, j \quad (24)$$

The equality (11) can be written for any pair of facilities in the solution and for relating any facility in the solution and car only mode. Then, replacing these expressions into equation (7) we have:

$$\frac{A_a g_{ija}^{-\lambda}}{A_2 g_{ij2}^{-\lambda}} p_{ij2} + \dots + \frac{A_1 g_{ij1}^{-\lambda}}{A_2 g_{ij2}^{-\lambda}} p_{ij2} + p_{ij2} = 1 \quad \forall i, j \quad (25)$$

From (12), the value of p_{ij2} is:

$$p_{ij2} = \frac{A_2 g_{ij2}^{-\lambda}}{A_a g_{ija}^{-\lambda} + \sum_{\forall l \in K} A_l g_{ijl}^{-\lambda}} \quad \forall i, j \quad (26)$$

Equation (13) delivers exactly the same proportions obtained by using the gravity rule in (1) for p_{ij2} and, analogously, for all the remaining probabilities. ■

Using this equivalent set of constraints, the formulation becomes a mixed linear programming model. The drawback is the large number of constraints produced by (8).

NUMERICAL EXAMPLES

In this section we deliver several examples. All numerical experiments were carried out on a desktop computer (Intel Core i5, 3.2GHz). We used CPLEX 11.0.1 (IBM, 2011) and also applied Heuristic Concentration Integer (HCI) (Marianov et al. (2009) programmed in Fortran 95. The only modification needed to use HCI in our case was that facilities cannot be selected more than once. The examples use 10 origins ($o1, \dots, o10$), 10 destinations ($d1, \dots, d10$), and $n = 10$ P&R candidates ($pr1, \dots, pr10$). In all examples, the horizontal coordinates of origins, destinations and candidates were generated in the horizontal interval $[0, 0.45]$, $[0.55, 1]$, and $]0.45, 0.55[$ respectively. The vertical coordinates of all these points were generated using a random uniform distribution in the interval $[0, 1]$. Distances are Euclidean, and costs are proportional to

distances. The attractiveness of the auto only mode is considered equal to one and, therefore, all P&R facilities exhibit attractiveness between zero and one.

Locating 3 facilities considering $A_k=0.5$, $\lambda=2$, $\alpha = 1$

This example illustrates how the model assigns demand to the p optimal facilities and car mode. In this case, P&R facilities have an attractiveness of 0.5 and the cost penalty λ is equal to 2. Also, in this example we assume that the cost of using public transportation is the same as using car. Figure 1 shows the geographical setting. The capacity of all candidates was considered equal to 400 and the demand of all origin-destination pairs is equal to 10. The circles in the figure show the optimal locations for the three facilities: 3, 6, and 8, found using CPLEX.

Note that all the following examples consider P&Rs located along a corridor. This pattern is common in the literature, and it is chosen as a way to ensure demand by capturing commuters on their way. Even if the attractiveness of the facilities is low, there will always be some commuters having the opportunity of using P&R facilities with short detours. In addition, it is natural to conceive the corridor case as the most robust or less risky P&R facility implementation procedure (Burns, 1979; Wang, et al., 2004).

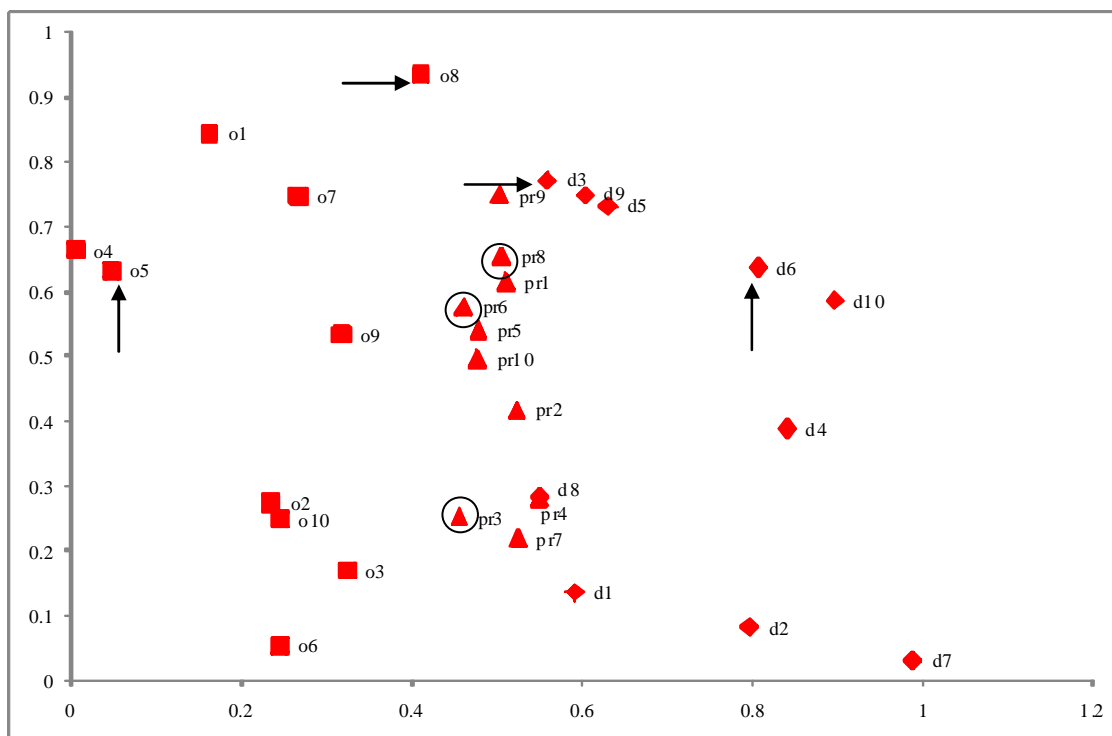


Figure 1: Origins, destinations and candidates. Vertical and horizontal arrows denote origin-destination pairs

Tables 1, 2, 3, and 4 show the proportions of trips using facilities 3, 6, 8, and car only respectively. In the Tables, the rows represent origins and the columns the destinations. The entries in the tables are the percentages of commuters using the respective P&R. When the cost of using P&R is similar to that of using the car, the proportions distribute according to the attractiveness of the facilities. This is the case of origin-destination pairs in which the P&R is located in the corridor linking them. For example, for trips going from o5 to d6 (both points are marked by vertical arrows), the proportion of commuters captured by P&Rs 6 and 8, both very close to the straight line between o5

and d6, is 22% each ($A_k = 0.5$), approximately half of the proportion of commuters captured by car users: 45% of the total flow ($A_a = 1$). On the other hand, if the use of the facility requires a longer path to reach the final destination, the level of patronage decreases, due to the gravity law that customers follow. For example, P&R 3 receives only the 11% of the flow given its detour from the corridor linking this origin-destination pair. This pattern is better understood when analyzing the flow from o8 to d3 (marked by horizontal arrows). In this case the car mode captures the 82% of trips while P&R 8 captures the 11% and, finally, P&Rs 6 and 3 capture only 6% and 1% respectively. These values are intuitively correct given the spatial distribution of the facilities.

Table 1: Percentage of trips using P&R 3

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	21	19	4	13	5	8	18	18	4	10
2	28	27	14	24	15	19	25	30	14	20
3	24	26	19	26	20	23	25	31	19	24
4	23	21	7	16	8	11	21	21	7	13
5	23	22	6	16	7	11	21	21	7	13
6	21	22	19	25	20	22	22	29	19	23
7	20	18	3	12	3	7	18	17	3	9
8	19	17	1	10	2	5	16	16	2	7
9	24	21	4	14	5	8	20	19	5	11
10	27	27	15	24	16	19	25	30	15	21

Table 3: Percentage of trips using P&R 6

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	20	20	13	22	16	20	21	20	16	20
2	6	10	22	15	21	19	12	6	22	18
3	3	7	20	11	20	17	9	4	20	16
4	17	19	18	22	20	22	20	18	20	22
5	17	18	18	21	20	22	19	17	20	22
6	4	7	20	12	20	17	9	6	20	16
7	20	21	12	22	16	20	21	21	15	21
8	20	20	6	19	9	15	20	21	8	16
9	15	18	21	22	23	23	19	15	23	22
10	6	10	21	14	21	19	12	6	22	18

Table 2: Percentage of trips using P&R 8

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	18	19	19	22	22	24	20	18	21	23
2	5	8	22	12	21	17	10	4	21	16
3	2	5	20	9	19	15	8	2	19	14
4	14	16	21	19	23	22	17	14	22	22
5	13	16	22	19	23	22	17	13	23	22
6	3	6	20	10	20	16	8	4	20	15
7	17	19	18	22	22	24	20	17	22	23
8	20	21	11	22	16	21	21	21	14	21
9	11	14	24	17	24	22	16	9	24	20
10	4	7	21	11	21	17	10	4	21	16

Table 4: Percentage of trips using car

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	42	42	64	44	57	48	41	44	59	47
2	61	55	43	49	43	45	52	60	43	46
3	71	62	41	53	42	45	58	63	41	47
4	46	44	54	43	49	45	42	48	51	44
5	47	44	54	44	49	45	43	49	50	44
6	71	65	41	52	41	44	61	61	41	46
7	43	42	67	44	58	49	42	46	60	48
8	41	42	82	48	72	59	44	42	76	57
9	50	47	51	48	48	47	45	56	48	47
10	63	56	43	50	42	45	53	60	42	46

In synthesis, the model produces a split of demand according to cost and attractiveness: lower distance costs and high attractiveness produce high usage of the facilities. Now, in practical cases, it is important to correctly calibrate the parameters (attractiveness A_k ; economies of scale or discount α ; costs g_{ija} , and cost penalty λ). Depending on the value of these parameters, the situation can change from low to high use of the P&R facilities, as shown in the next sections.

Locating 3 facilities considering $A_k=0.5$, $\lambda=2$ and discounted public transit ($\alpha = 0.5$)

The previous example shows how the model computes proportions considering Euclidean distances. However, P&R facilities should be designed to produce savings to users by providing express services or access to efficient transportation systems. Moreover, it is natural to think that users will patronize P&R systems if and only if it is cheaper than driving, in terms of monetary cost or time. This is, in fact, the fundamental assumption made by Holguin-Veras et al. (2011) when determining and delineating the potential demand (catchment area) for P&R facilities. In order to reproduce the evaluation framework in which normally P&R facilities are evaluated by customers, we divided the distance between P&R facilities and the final destination by 2, i.e., applied a discount factor $\alpha = 0.5$. Therefore, trips using some of the facilities can exhibit a lower cost than the auto only mode.

Tables 5-8 show the proportions of commuters captured by P&Rs 3, 6, 5, and car only mode respectively. Firstly, the optimal set is now composed by P&Rs 3, 6 and 5, i.e.

P&R 8 was substituted by 5. As expected, the total demand increased from 498.5, in the problem of section 4.1, to 634.6 under the new scenario. Table 9 delivers a comparison between these two scenarios. On average, the car only mode dropped from 50% to 37%

Table 5: Percentage of trips using P&R 3

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	19	19	6	14	7	11	19	16	7	12
2	35	36	23	33	24	28	36	34	24	30
3	35	40	33	41	34	37	41	39	33	38
4	22	22	10	18	11	14	22	19	10	16
5	22	22	10	18	11	14	23	19	10	16
6	27	32	30	34	30	33	33	33	30	34
7	17	18	4	12	5	9	18	14	5	11
8	17	16	2	11	4	7	17	14	3	9
9	21	21	6	14	7	10	22	16	7	12
10	35	38	25	34	26	29	37	34	25	31

Table 7: Percentage of trips using P&R 6

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	26	28	19	28	22	27	28	26	21	28
2	9	13	23	17	22	21	16	9	23	20
3	5	9	19	12	19	17	12	5	19	16
4	22	25	23	26	25	27	26	22	24	27
5	22	24	23	26	25	27	26	21	25	27
6	6	10	20	14	19	18	12	7	20	17
7	28	29	19	30	24	29	30	27	23	30
8	28	29	9	27	14	22	29	28	12	24
9	24	26	31	29	32	32	28	23	32	31
10	8	13	22	16	22	20	15	8	22	20

Table 6: Percentage of trips using P&R 5

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	25	26	15	26	19	24	27	24	18	25
2	10	15	23	19	23	23	18	10	24	22
3	5	10	21	14	20	19	14	6	21	18
4	22	24	20	25	22	25	25	21	21	25
5	22	24	20	26	23	26	26	21	22	26
6	7	11	21	16	20	20	14	8	21	19
7	27	28	15	28	19	26	29	26	18	27
8	26	27	7	25	12	20	27	26	10	22
9	25	28	26	30	28	31	29	24	28	31
10	9	14	23	18	23	22	17	9	23	22

Table 8: Percentage of trips using car

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	30	28	61	31	52	39	26	34	55	35
2	46	35	30	31	30	28	30	48	30	27
3	55	41	27	33	27	27	34	50	27	27
4	34	29	48	31	42	34	27	38	44	32
5	34	29	47	30	41	33	26	38	43	31
6	60	48	30	36	30	30	41	52	30	30
7	28	25	62	29	51	36	23	32	54	32
8	29	28	82	36	71	51	27	33	75	45
9	30	25	36	26	33	27	22	37	34	25
10	48	36	30	31	29	28	31	49	29	27

Table 9: Comparison between scenarios

	Euclidean costs				Transit cost reduced			
	P&R 3	P&R 6	P&R 8	Car	P&R 3	P&R 6	P&R 5	Car
Average	16	17	17	50	21	21	21	37
Std dev	8	5	6	9	11	7	6	12
Maximum	31	23	24	82	41	32	31	82
Minimum	1	3	2	41	2	5	5	22

Influence of A_k and λ ($\alpha = 1.0$)

A correct choice of A_k and λ helps the model to produce intuitively valid results in terms of users' behavior. Since A_k somehow represents how hard is the decision of switching mode, this parameter allows the model to reproduce the perception of the car mode having a higher quality. On the other hand, λ allows penalizing expensive modes by increasing the proportion of users patronizing cheaper ones, since it represents sensitivity to cost.

Table 10 shows a set of problem instances when varying either A_k or λ . These problems were solved first using CPLEX run with AMPL (column AMPL in the table) and then using HCI. For the sake of completeness, we run HCI 100 times on each problem and checked both solution and execution time. HCI found the optimal solution on every of the 100 runs of each problem. The execution time shown in Table 10 is the average of the 100 runs for each problem. Naturally, when A_k decreases, lesser customers are "captured" by the facilities, but it is interesting to note that in this case, the model tends to concentrate the facilities in the center of the corridor. On the other hand, higher values of λ produce a higher spread of P&R facilities, which end up located closer to the direct

trips between origins and destinations. Again, the location of P&R is highly influenced by the attractiveness and trips being intercepted are more likely to use the P&R. It can be seen that the execution time for HCI is always shorter than one second. Finally, just to assess how the solution time changes with the size of the instance, we solved an instance selecting 5 facilities out of 20 P&R candidates, 20 origins and 20 destinations for $A_k=\lambda=1$. AMPL with CPLEX took almost two and a half days while HCI took on average of 63 seconds for finding optimal solutions in the 100 runs of the same problem.

Table 10: Influence of A and λ on location, value of the optimal solution and run time

p	A	λ	Opt cov	P&R	AMPL(sec)	HCI(sec)	A	λ	Opt cov	P&R	AMPL(sec)	HCI(sec)
2	1.00	1	613.18	5-10	26.6	0.57	1.00	1	613.18	5-10	26.6	0.57
2	0.75	1	544.50	5-10	26.5	0.54	1.00	2	567.40	4-8	24.6	0.51
2	0.50	1	445.31	5-10	5.5	0.56	1.00	3	535.01	3-9	14.2	0.50
2	0.25	1	288.60	5-10	9.2	0.56	1.00	4	510.06	3-9	18.5	0.49
2	0.20	1	245.52	5-10	7.8	0.56	1.00	5	489.03	3-9	12.7	0.49
2	0.10	1	140.70	5-10	9.0	0.56	1.00	6	471.19	4-9	8.0	0.49
3	1.00	1	702.30	4-6-8	34.4	0.58	1.00	1	702.30	4-6-8	34.4	0.58
3	0.75	1	640.03	5-6-10	25.8	0.77	1.00	2	661.03	3-5-9	20.5	0.72
3	0.50	1	544.32	5-6-10	17.1	0.79	1.00	3	629.88	3-5-9	18.1	0.70
3	0.25	1	376.79	5-6-10	9.6	0.79	1.00	4	605.12	3-5-9	17.0	0.69
3	0.20	1	326.74	5-6-10	12.5	0.79	1.00	5	584.66	3-5-9	14.1	0.69
3	0.10	1	196.56	5-6-10	14.6	0.79	1.00	6	567.19	3-5-9	12.7	0.69
4	1.00	1	758.33	3-5-6-8	33.6	0.81	1.00	1	758.33	3-5-6-8	33.6	0.81
4	0.75	1	702.47	3-5-6-8	19.4	0.78	1.00	2	721.72	3-4-8-9	17.0	0.82
4	0.50	1	612.82	4-5-6-10	21.5	0.87	1.00	3	693.91	3-4-8-9	15.4	0.80
4	0.25	1	444.69	2-5-6-10	17.7	0.73	1.00	4	671.18	3-4-8-9	12.9	0.80
4	0.20	1	391.32	2-5-6-10	22.6	0.88	1.00	5	651.82	3-4-8-9	12.7	0.79
4	0.10	1	244.93	2-5-6-10	23.1	0.87	1.00	6	634.82	3-4-8-9	11.1	0.80

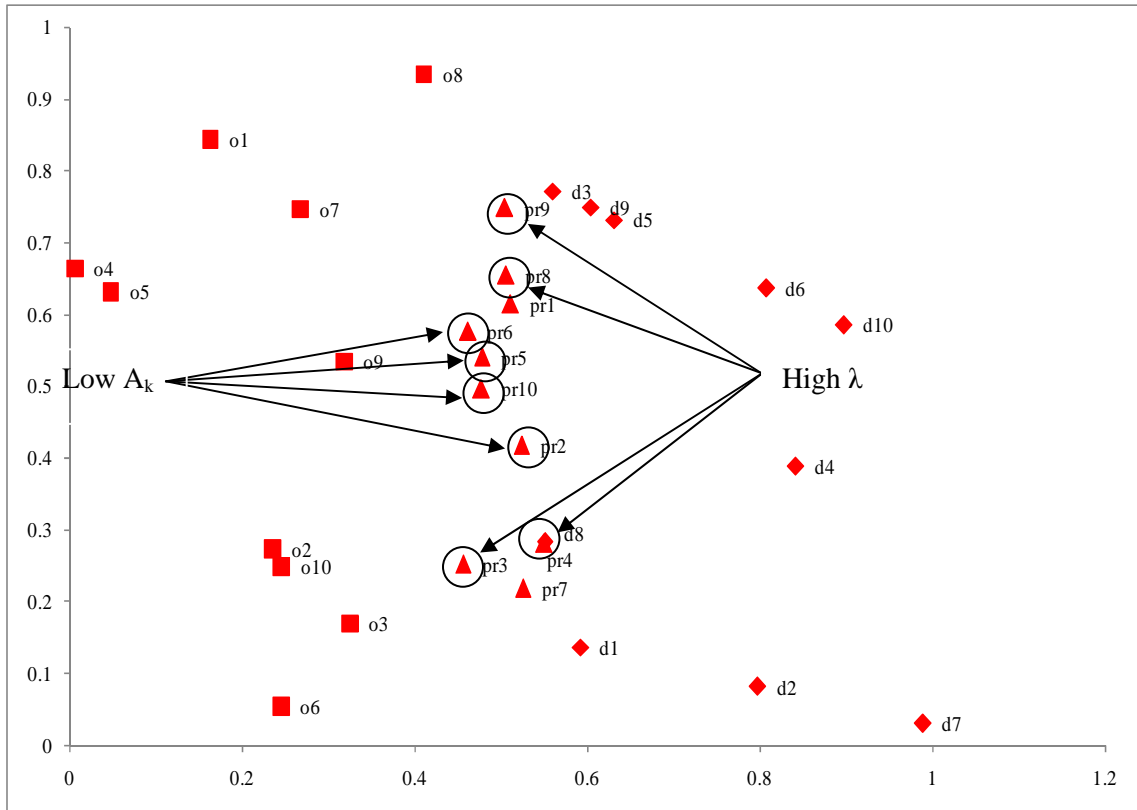


Figure 2: Impact of A_k and λ on the optimal solution

Influence of A_k and λ ($\alpha = 1.0$) under limited capacity

Starting with the optimal solution of the linear model defined by (2)-(8), we solved the problem for increasing values of attractiveness of a facility belonging to that solution, until the capacity limit of the respective facility was reached, i.e., the corresponding capacity constraint (4) became active. Although increasing the attractiveness of a candidate increases its patronage, when that facility reaches its capacity, it is no longer feasible for new patrons. When this happens, the facility is no longer included in the solution. Somehow, there is a contradiction between a high attractiveness and a low

capacity, and the model correctly chooses a different facility. To measure this effect we solved the problem with the following parameters: $p=2$, $n=10$, $A_k=0.5$, and $\lambda=1$ and a capacity of 250 for all candidates. Then we increased the attractiveness of the P&R facilities belonging to the optimal solution of the previous problem to determine a new optimal solution. As expected, patronage of facilities increases as their value of A_k increases, and when reaching the capacity limit, the facility is no longer feasible for new patrons and a similar facility is selected from the vicinity. In other words, when the capacity of a facility is reached, a new facility substitutes it in the optimal set, and exhibits similar characteristics as the old one. The third column on Table 11 shows the parameter of attractiveness used on each iteration of the experiment. The optimal set and the total demand are shown in the first and second column respectively. Figure 3 shows how the optimal locations move away from the corridor (represented by thicker circles as facilities move). In a similar fashion to the previous section, the optimal set starts on the corridor of the simulated origins/destinations and, in this case, it only spreads out because of the infeasibility of the candidates.

Table 11: Influence of the attractiveness when capacity constraints is reached

Optimal set	Total demand	A_k
(5,10)	445.3	$0.5 \forall k$
(5,10)	489.9	$A_5=A_{10}=0.6, A_k=0.5 \forall k \setminus \{5,10\}$
(2,6)	444.0	$A_5=A_{10}=0.7, A_k=0.5 \forall k \setminus \{5,10\}$

(2,6)	488.6	$A_5=A_{10}=0.7, A_2=A_6=0.6, A_k=0.5 \forall k \setminus \{2,5,6,10\}$
(4,8)	442.0	$A_2=A_5= A_6=A_{10}=0.7, A_k=0.5 \forall k \setminus \{2,5,6,10\}$
(4,8)	486.8	$A_2=A_5= A_6=A_{10}=0.7, A_4=A_8=0.6, A_1=A_3= A_7=A_9=0.5$
(1,3)	441.2	$A_2=A_4=A_5= A_6=A_8=A_{10}=0.7, A_1=A_3= A_7=A_9=0.5$

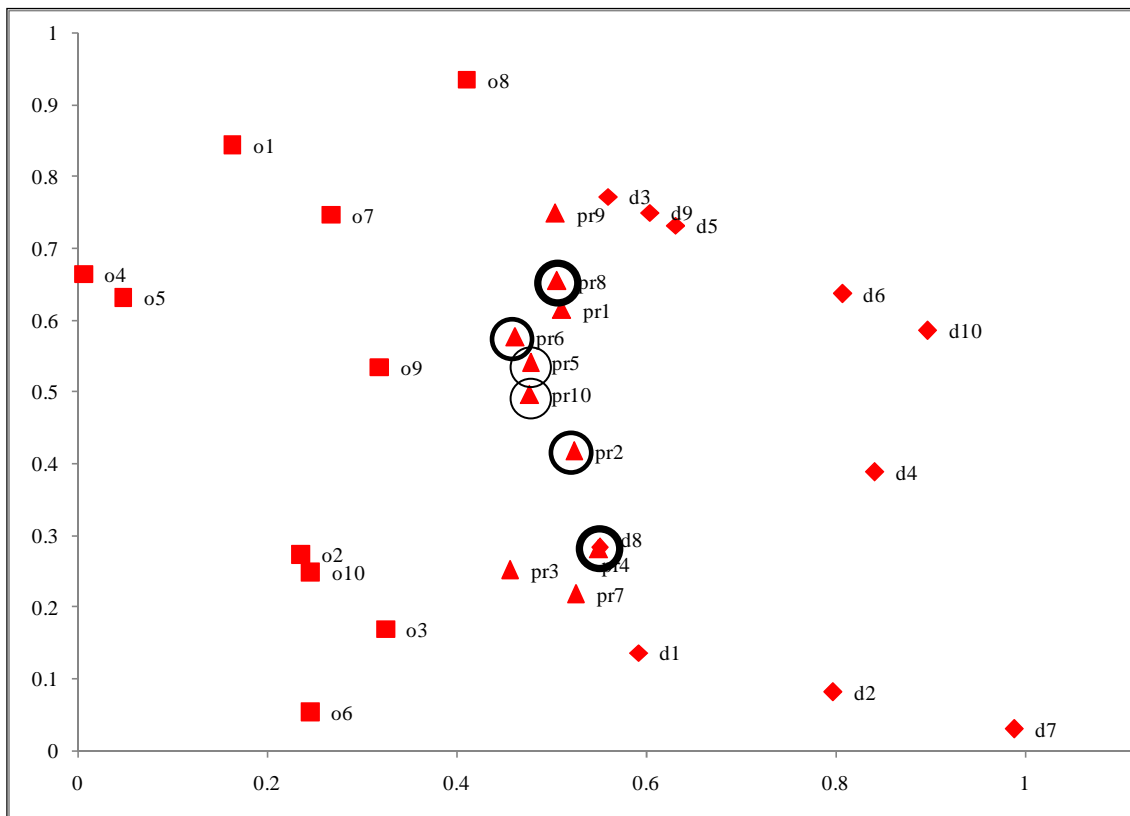


Figure 3: Effect of capacity constraint: solutions move from facilities 5 and 10 to 2 and

6, then 4 and 8.

CASE STUDY: P&R FACILITIES IN QUEENS, NY

This section describes the application of the methodology to a set of candidates located in the Queens to commuters traveling to Manhattan. Holguin-Veras et al. (2012) proposes a set of performance measures to evaluate P&R facilities. Their model determines the level of demand of each P&R using a binary logit in which commuters have the possibility of either driving to their final destination or using transit from the P&R to the final destination. In doing so, they analyze each candidate by separate; thus competition is not taken into consideration. Holguin-Veras et al. (2012) compute expected demand, weighted average savings, market share, and present value of benefits for each of the 59 candidates in the Bronx, Brooklyn, Staten Island, and Queens. The data set they used includes 317 centroids in Manhattan –destinations– and more than three thousand centroids, information obtained from the New York Metropolitan Transportation Council Best Practice Model. We used the same information with a reduced set of 21 candidates located in Queens, since we are interested in commuters traveling from 5 boroughs: Bronx, Queens, Brooklyn, Nassau, and Suffolk. Figure 4 helps explaining why these boroughs can be considered as the potential market for P&R facilities in Queens.



Figure 4: Queens and influencing boroughs

In addition, our case study accounts for 1196 origins, 317 destinations in Manhattan and 21 candidates in Queens. We seek to obtain the best 5 candidates using the model. Table 12 shows the evaluation results for Holguin-Veras et al. (2012) and our model. It is important to highlight that the best three candidates according to Holguin-Veras et al. (2012) are also included in our set of candidates but in a different order of importance. According to Holguin-Veras et al. (2012), these three candidates are actually the best sites out of all the 59 candidates evaluated by them. Both approaches differ in what are the factors taken into account. Figure 5 shows graphically the evaluation results. The

first feature to highlight is the difference between Q16 and Q18. Since Holguin-Veras et al. (2012) does not consider competition between facilities, their model assigns a bigger proportion of users to these two candidates despite their relative closeness. These candidates are also considered in our optimal solution but with a lower level of demand. Another important difference is the inclusion of Q2 into the optimal set producing a higher spatial spread of the facilities in the optimal solution.

Table 12: Locations of facilities

ID	Address	Expected demand	
		Holguin-Veras et al. 2012	Gravity rule
Q6	13345 41 Ave	14676	4289
Q18	Hillside Ave and 179th St	9564	3413
Q16	90-99 168th St	8386	3212
Q3	6626 Metropolitan Ave	1262	4514
Q2	4540 Court Sq	215	3605

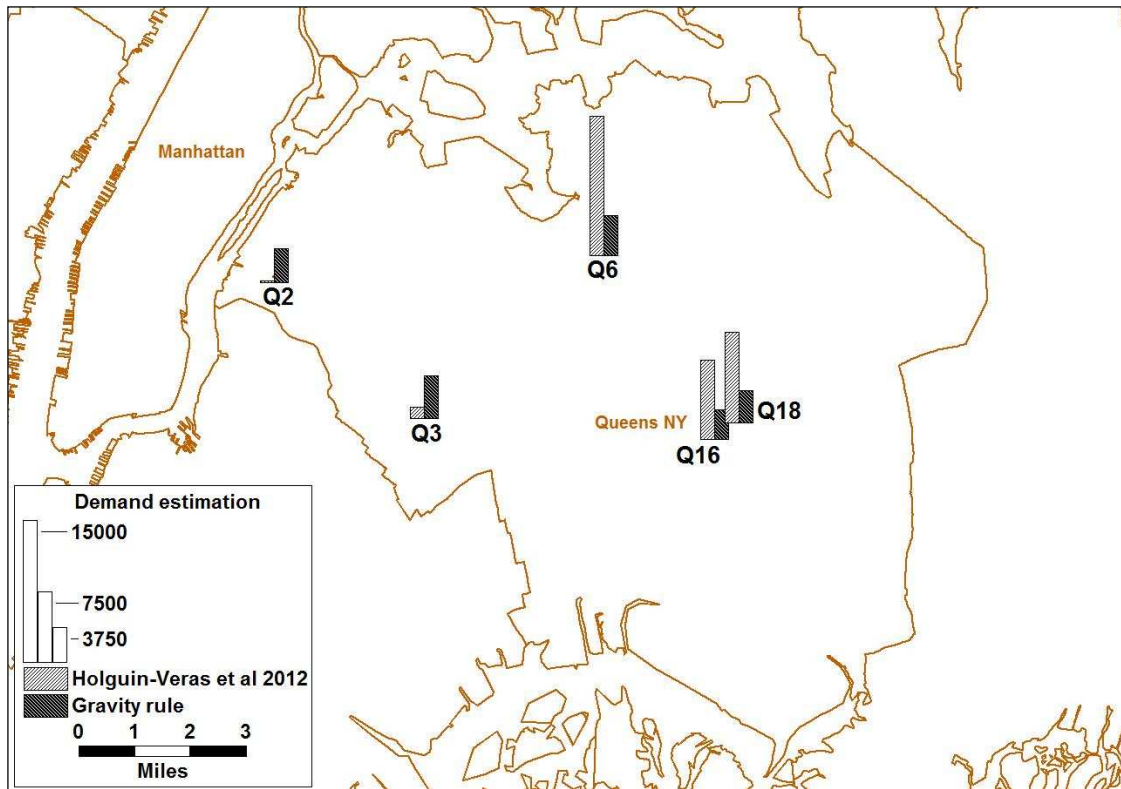


Figure 5: Locations of facilities and captured demand

CONCLUSION AND FURTHER RESEARCH

We propose a new approach to find those locations of P&R facilities that maximize users' patronage, considering limited capacity. Our approach is based on a natural characteristic of P&R facilities: they work as transshipment points or hubs. Users drive to the P&R facility where they switch mode and reach their final destination using public transportation. To the best of our knowledge, this is the first model including limited capacity as a relevant factor when locating P&R systems. As a fact, space for

building P&R systems is not only expensive but scarce. Just thinking about New York City reveals how important is to consider capacity limits into the evaluation of P&R systems.

Another feature of the model is the use of a gravity rule when locating P&R facilities. By introducing the gravity rule, the model can account for attractiveness, the impact of cost on users' patronage and the interaction between facilities located close to each other. Practitioners' and government agencies' real life experience can be incorporated into the model through calibration of the attractiveness and generalized cost parameters. The gravity rule also allows overcoming the all or nothing assignment produced by the traditional p-median problem in which users are assigned to the closest facility. A further contribution is the inclusion of capacity limits in a model using gravity rule. The effects of limited capacities are analyzed by changing the attractiveness of the facilities. Further research is needed to improve the treatment of capacity limits under user choice of the facilities.

In addition, we propose a novel linearization of the gravity rule, which transforms the problem from binary nonlinear to a mixed linear programming problem. A drawback is that this formulation generates new variables and constraints making the problem hard to solve for large instances. However, it can be applied to other problems, consisting of fewer variables. In practical terms, the linearization of the gravity rule can be fully

exploited by algorithms that either decrease the number of variables or constraints, or apply a decomposition approach.

For large instances, we successfully applied HCI to the formulation, dramatically reducing execution times. In our largest instance, the optimal solver took almost two and a half days while HCI was able to optimally solve the same problem on an average of one minute, always reaching the optimal solution.

The case study of Queens illustrates how the model can be applied to real life evaluations. The results, when compared to the evaluation delivered by Holguin-Veras et al. (2012), show relevant differences in terms of the captured demand, but several of the facilities chosen are the same. Facilities close to each other obtain relative low demand in our solutions as compared to Holguin-Veras et al. (2012) since we consider interaction (cannibalization) among them. In our case, the results exhibit a higher spread of the facilities among candidates.

Finally, the proposed model captures reality in many ways, although further research is needed to fully take advantage of its characteristics.

ACKNOWLEDGEMENTS: This work was in part supported by FONDECYT grant 1100296; by Institute Complex Engineering Systems, through grants ICM-MIDEPLAN P-05-004-F and CONICYT FBO16, and by the New York State Department of Transportation's grant "New York City Park & Ride Study." The authors would like to

acknowledge the contributions and guidance provided by Professor John Mitchell from the Rensselaer Polytechnic Institute.

REFERENCES

- AASHTO 2004. Guide for Park-and-Ride Facilities. American Association of State Highway and Transportation Officials.
- ABDINNOUR-HELM, S. & VENKATARAMANAN, M. 1998. Solution approaches to hub location problems. *Annals of Operations Research*, 78, 31-50.
- ALUMUR, S. & KARA, B. Y. 2008. Network hub location problems: The state of the art. *European Journal of Operational Research*, 190, 1-21.
- BURNS, E. 1979. Priority rating of potential park-and-ride sites. *ITE*, 49, 29-31.
- CAMPBELL, J. F. 1996. Hub location and the p-hub median problem. *Operations Research*, 44, 923-935.
- DREZNER, T. & DREZNER, Z. 2001. A note on applying the gravity rule to the airline hub problem. *Journal of Regional Science*, 41, 67-72.
- DREZNER, T. & DREZNER, Z. 2006. Multiple facilities location in the plane using the gravity model. *Geographical Analysis*, 38, 391-406.
- DREZNER, T. & DREZNER, Z. 2007. The gravity p-median model. *European Journal of Operational Research*, 179, 1239-1251.
- DREZNER, T. & DREZNER, Z. 2011. The gravity multiple server location problem. *Computers & Operations Research*, 694-701.
- EISELT, H. A. & MARIANOV, V. 2009. A conditional p-hub location problem with attraction functions. *Computers & Operations Research*, 36, 3128-3135.
- ERNST, A. T. & KRISHNAMOORTHY, M. 1996. Efficient algorithms for the uncapacitated single allocation p-hub median problem. *Location Science*, 4, 139-154.
- ERNST, A. T. & KRISHNAMOORTHY, M. 1998. Exact and heuristic algorithms for the uncapacitated multiple allocation p-hub median problem. *European Journal of Operational Research*, 104, 100-112.
- FARHAN, B. & MURRAY, A. 2008. Siting park-and-ride facilities using a multi-objective spatial optimization model. *Computers & Operations Research*, 35, 445-456.
- HENDRICKS, S. & OUTWATER, M. 1998. Demand Forecasting Model for Park-and-Ride Lots in King County, Washington. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, 1623, 80-87.

- HOLGUIN-VERAS, J., REILLY, J., AROS-VERA, F. & YUSHIMITO, W. 2011. User rationality and optimal park-and-ride location. Submitted to Transportation Research Part B: Methodological.
- HOLGUIN-VERAS, J., REILLY, J., AROS-VERA, F., YUSHIMITO, W. & ISA, J. 2012. Park and Ride Facilities in New York City: Economic Analyses of Alternative Locations. Transportation Research Board. Washington DC.
- HOTELLING, H. 1929. Stability in competition. *The economic journal*, 39, 41-57.
- HUFF, D.L. 1964. Defining and estimating a trading area. *Journal of Marketing*, 28, 34-8.
- IBM 2011. IBM ILOG CPLEX.
- KARA, B. Y. & TANER, M. R. 2011. Hub Location Problems: The Location of Interacting Facilities. In: EISELT, H. A. & MARIANOV, V. (eds.) *Foundations of Location Analysis*. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag.
- KECK, C. & LIOU, P. 1976. Forecasting demand for peripheral park and ride service. *Transportation Research Record*, 563, 63-74.
- MARIANOV, V., MIZUMORI, M. & REVELLE, C. 2009. The heuristic concentration-integer and its application to a class of location problems. *Computers & Operations Research*, 36, 1406-1422.
- MARIANOV, V., SERRA, D. & REVELLE, C. 1999. Location of hubs in a competitive environment. *European Journal of Operational Research*, 114, 363-371.
- NORIDA, A.H., JAMILAH, M. & MOHAMED REHAN, K. 2007. Parking Duration of Fringe Park-and-Ride Users and Delineation of Stations Catchment Area: Case of the Kuala Lumpur. *Journal of the Eastern Asia Society for Transport Studies*, 7, 1296-1310.
- O'FLAHERTY, C. A. 1997. *Transport Planning and Traffic Engineering*.
- O'KELLY, M. E. 1986. The location of interacting hub facilities. *Transportation Science*, 20, 92-106.
- O'KELLY M. E., 1987. A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities. *European Journal of Operational Research*, 32, 393-404.
- REILLY, W. J. 1931. *The law of retail gravitation*, New York: Knickerbocker Press.
- SKORIN-KAPOV, D., SKORIN-KAPOV, J. & O'KELLY, M. 1996. Tight linear programming relaxations of uncapacitated p-hub median problems. *European Journal of Operational Research*, 94, 582-593.
- SPILLAR, R. J. 1997. *Park-and-Ride Planning and Design Guidelines*. Parsons Brinckerhoff.

WANG, J., YANG, H. & LINDSEY, R. 2004. Locating and pricing park-and-ride facilities in a linear monocentric city with deterministic mode choice. *Transportation Research Part B: Methodological*, 38, 709-731.

BIBLIOGRAFÍA

- AASHTO 2004. Guide for Park-and-Ride Facilities. American Association of State Highway and Transportation Officials.
- ABDINNOUR-HELM, S. & VENKATARAMANAN, M. 1998. Solution approaches to hub location problems. *Annals of Operations Research*, 78, 31-50.
- ALUMUR, S. & KARA, B. Y. 2008. Network hub location problems: The state of the art. *European Journal of Operational Research*, 190, 1-21.
- BURNS, E. 1979. Priority rating of potential park-and-ride sites. *ITE*, 49, 29-31.
- CAMPBELL, J. F. 1996. Hub location and the p-hub median problem. *Operations Research*, 44, 923-935.
- DREZNER, T. & DREZNER, Z. 2001. A note on applying the gravity rule to the airline hub problem. *Journal of Regional Science*, 41, 67-72.
- DREZNER, T. & DREZNER, Z. 2006. Multiple facilities location in the plane using the gravity model. *Geographical Analysis*, 38, 391-406.
- DREZNER, T. & DREZNER, Z. 2007. The gravity p-median model. *European Journal of Operational Research*, 179, 1239-1251.
- DREZNER, T. & DREZNER, Z. 2011. The gravity multiple server location problem. *Computers & Operations Research*, 694-701.
- EISELT, H. A. & MARIANOV, V. 2009. A conditional p-hub location problem with attraction functions. *Computers & Operations Research*, 36, 3128-3135.
- ERNST, A. T. & KRISHNAMOORTHY, M. 1996. Efficient algorithms for the uncapacitated single allocation p-hub median problem. *Location Science*, 4, 139-154.
- ERNST, A. T. & KRISHNAMOORTHY, M. 1998. Exact and heuristic algorithms for the uncapacitated multiple allocation p-hub median problem. *European Journal of Operational Research*, 104, 100-112.
- FARHAN, B. & MURRAY, A. 2008. Siting park-and-ride facilities using a multi-objective spatial optimization model. *Computers & Operations Research*, 35, 445-456.
- HENDRICKS, S. & OUTWATER, M. 1998. Demand Forecasting Model for Park-and-Ride Lots in King County, Washington. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, 1623, 80-87.

- HOLGUIN-VERAS, J., REILLY, J., AROS-VERA, F. & YUSHIMITO, W. 2011. User rationality and optimal park-and-ride location. Submitted to Transportation Research Part B: Methodological.
- HOLGUIN-VERAS, J., REILLY, J., AROS-VERA, F., YUSHIMITO, W. & ISA, J. 2012. Park and Ride Facilities in New York City: Economic Analyses of Alternative Locations. Transportation Research Board. Washington DC.
- HOTELLING, H. 1929. Stability in competition. *The economic journal*, 39, 41-57.
- HUFF, D.L. 1964. Defining and estimating a trading area. *Journal of Marketing*, 28, 34-8.
- IBM 2011. IBM ILOG CPLEX.
- KARA, B. Y. & TANER, M. R. 2011. Hub Location Problems: The Location of Interacting Facilities. In: EISELT, H. A. & MARIANOV, V. (eds.) *Foundations of Location Analysis*. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag.
- KECK, C. & LIOU, P. 1976. Forecasting demand for peripheral park and ride service. *Transportation Research Record*, 563, 63-74.
- MARIANOV, V., MIZUMORI, M. & REVELLE, C. 2009. The heuristic concentration-integer and its application to a class of location problems. *Computers & Operations Research*, 36, 1406-1422.
- MARIANOV, V., SERRA, D. & REVELLE, C. 1999. Location of hubs in a competitive environment. *European Journal of Operational Research*, 114, 363-371.
- NORIDA, A.H., JAMILAH, M. & MOHAMED REHAN, K. 2007. Parking Duration of Fringe Park-and-Ride Users and Delineation of Stations Catchment Area: Case of the Kuala Lumpur. *Journal of the Eastern Asia Society for Transport Studies*, 7, 1296-1310.
- O'FLAHERTY, C. A. 1997. *Transport Planning and Traffic Engineering*.
- O'KELLY, M. E. 1986. The location of interacting hub facilities. *Transportation Science*, 20, 92-106.
- O'KELLY M. E., 1987. A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities. *European Journal of Operational Research*, 32, 393-404.
- REILLY, W. J. 1931. *The law of retail gravitation*, New York: Knickerbocker Press.
- SKORIN-KAPOV, D., SKORIN-KAPOV, J. & O'KELLY, M. 1996. Tight linear programming relaxations of uncapacitated p-hub median problems. *European Journal of Operational Research*, 94, 582-593.
- SPILLAR, R. J. 1997. *Park-and-Ride Planning and Design Guidelines*. Parsons Brinckerhoff.

WANG, J., YANG, H. & LINDSEY, R. 2004. Locating and pricing park-and-ride facilities in a linear monocentric city with deterministic mode choice. *Transportation Research Part B: Methodological*, 38, 709-731.