

# Modelación numérica del concreto simple con elementos finitos mediante la teoría de la plasticidad y la función de fluencia de Hu y Schnobrich

## Numerical modeling of the simple concrete with finite elements by means of the plasticity theory and yielding function of Hu and Schnobrich

Luis Rodríguez\*, Dorian Linero<sup>1\*</sup>

\* Universidad Nacional de Colombia. COLOMBIA

Fecha de Recepción: 13/03/2012

Fecha de Aceptación: 30/06/2012

PAG 129 - 144

### Resumen

Este artículo describe la formulación, implementación y validación de un modelo constitutivo en el método de los elementos finitos, que represente el comportamiento mecánico del concreto simple sometido principalmente a compresión, considerando estado plano de esfuerzos y deformaciones infinitesimales. Este modelo se basa en la formulación general de la teoría de la plasticidad (Simó & Hughes 1998), considerando una regla de flujo no asociado, donde el potencial plástico está definido por el criterio de fallo de von Mises y la función de fluencia corresponde a aproximaciones empíricas realizadas por Hu y Schnobrich (1989). Se formuló un algoritmo implícito de integración numérica para resolver el problema no lineal dado por el modelo constitutivo del material. El modelo constitutivo presentado en este artículo se implementó en el programa de análisis no lineal con elementos finitos a código abierto HYPLAS (de Souza Neto et al. 2008) y el postproceso se realizó con el programa GiD (CIMNE 2008). Finalmente se presenta la comparación de la respuesta estructural de los paneles sometidos a fuerzas contenidas en su plano ensayados experimentalmente por Kupfer y otros (1969), contra la simulación numérica utilizando el modelo propuesto. También se presenta un ejemplo de la aplicación del modelo propuesto a la simulación de vigas sometidas a flexión.

**Palabras Clave:** Modelos constitutivos de plasticidad, mecánica computacional, método de los elementos finitos, concreto simple.

### Abstract

*This article describes the formulation, implementation and validation of a constitutive model in the finite element method, which it represents the mechanical behavior of plain concrete subjected mainly to compression, considering the plane stress state and infinitesimal strain. This model is based on the general formulation of the theory of plasticity (Simó & Hughes 1998), considering a non-associated flow rule, where the plastic potential is defined by the failure criterion and von Mises and yield function corresponds to empirical approaches developed by Hu and Schnobrich (1989). An implicit algorithm of numerical integration was formulated to solve the nonlinear problem given by the material constitutive model. The constitutive model presented in this paper was implemented in the nonlinear analysis finite element program with open source HYPLAS (de Souza Neto et al. 2008) and the post-process was performed using GiD (CIMNE 2008). Finally we present the comparison of the structural response of panels subjected to forces contained in its plane tested experimentally by Kupfer and others (1969), against the numerical simulation using the proposed model. Also an application example of the proposed model to the beams simulation subjected to bending was presented.*

**Keywords:** Plasticity constitutive models, computational mechanics, finite elements method, simple concrete

## 1. Introducción

La teoría de la plasticidad clásica fue formulada inicialmente para metales, cuyo comportamiento es diferente al del concreto. Sin embargo, desde un punto de vista macroscópico, los metales y el concreto poseen características similares especialmente en el rango previo al colapso, que motivan a representar a dicho material mediante la teoría de la plasticidad. Por ejemplo, el concreto exhibe un comportamiento no lineal durante el proceso de carga, presenta una deformación irreversible después de retirada la carga y muestra un comportamiento de naturaleza dúctil en el rango de compresión triaxial o biaxial (Chen & Han 2007).

<sup>1</sup> Autor de correspondencia / Corresponding author:  
E-mail: dllineros@unal.edu.co



Existe una gran variedad de modelos constitutivos basados en la teoría de la plasticidad que intentan representar el comportamiento mecánico de los materiales y en particular del concreto, los cuales en su mayoría establecen una función de fluencia, una regla de flujo y una ley de endurecimiento o ablandamiento (Babu et al., 2005, de Souza Neto et al., 2008, Simó & Hughes 1998).

La función de fluencia integrada al modelo de plasticidad puede surgir de los criterios de fallo clásicos como el criterio de Tresca, von Mises, Rankine, Mohr-Coulomb y Drucker-Prager (de Souza Neto et al. 2008, Linero & Garzón-Alvarado 2010), o de los criterios desarrollados específicamente para el concreto como los propuestos por Ottosen (1977), Willam y Warnke (1974), Menetrey y Willam (1995), Hsieh y colaboradores (1982), y Hu y Schnobrich (1989), entre otros.

La regla de flujo define la dirección de la tasa de la deformación plástica de acuerdo con la variación del potencial plástico  $G$  con respecto al tensor de esfuerzos. Si el potencial plástico escogido es igual a la función de fluencia la regla de flujo se denomina asociada, en cambio, si  $G$  corresponde a una función diferente se tiene una regla de flujo no asociada. Comúnmente la función del potencial plástico con reglas de flujo no asociadas se definen a partir de los criterios de fallo clásicos como von Mises y Drucker-Prager.

Algunos de los modelos constitutivos de plasticidad específicos para el concreto desarrollados en las últimas décadas son los siguientes. El modelo de Han y Chen (1987), utiliza la función de fluencia de cinco parámetros de William y Warnke (1974) y una regla de flujo no asociada. Ohtami y Chen (1988) usaron la función de fluencia de Chen y Chen (1975) y una regla de flujo asociada. Oñate y colaboradores (1988), modificaron el criterio de Mohr-Coulomb para usarla como función de fluencia y utilizaron una regla de flujo no asociada. Fenestra y de Borst (1996) desarrollaron un modelo basado en el criterio de fluencia de Drucker-Prager y con una regla de flujo no asociativa aplicable a un material compuesto conformado por una matriz de concreto y barras de acero. Imran y Pantazopoulou (Imran & Pantazopoulou 2001) utilizaron el criterio de cuatro parámetros de Hsieh-Ting-Chen (Hsieh et al., 1982) y una regla de flujo no asociada. El modelo de Grassl y otros (2002) usa la función de fluencia de Menetrey y Willam (1995), combinada con una regla de flujo no asociada.

El objetivo general de este trabajo es representar el comportamiento de estructuras de concreto simple mediante el método de los elementos finitos para problemas no lineales, cuyo modelo constitutivo de plasticidad no asociada (de Souza Neto et al., 2008, Simó & Hughes 1998), utiliza la función de fluencia de Hu y Schnobrich (1989) y la función de potencial plástico de von Mises.

## 2. Formulación del modelo constitutivo

A continuación se indican brevemente los elementos del modelo constitutivo propuesto, incluyendo la función de fluencia, la regla de flujo, la ley de endurecimiento y la ecuación constitutiva tangente.

El tensor de deformación  $\varepsilon$  y su tasa  $\dot{\varepsilon}$  se pueden descomponer en dos partes: deformación elástica  $\varepsilon^e$  y deformación plástica  $\varepsilon^p$ , de tal forma que:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad , \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (1)$$

Sea una función de potencial plástico de la forma:

$$g(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\sigma}) = G(\boldsymbol{\sigma}) - \bar{\sigma} = 0 \quad (2)$$

La tasa de la deformación plástica  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  está definida por la regla de flujo en términos de la variación de un potencial plástico  $g(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\sigma})$  con respecto al tensor de esfuerzos de la forma:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \gamma \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \gamma \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3)$$

Siendo  $\gamma = \dot{\bar{\varepsilon}}^p$  el multiplicador plástico o la tasa de la deformación plástica equivalente. Este multiplicador es positivo ( $\gamma > 0$ ) debido al carácter irreversible de la deformación plástica.

La función de fluencia  $f(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}^p)$  establece cuando un estado de esfuerzos  $\boldsymbol{\sigma}$  en un instante de la historia de carga asociado con  $\bar{\varepsilon}^p$  es elástico. Es decir, un estado de carga o descarga elástica se presenta si  $f(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}^p) < 0$  y un estado de carga plástica ocurre cuando  $f(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}^p) = 0$ . Dicha función está dada como la diferencia entre dos funciones escalares, la primera  $F(\boldsymbol{\sigma})$  determinada por el criterio de fallo material en función del estado de esfuerzos y la segunda  $\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^p)$  correspondiente a un esfuerzo uniaxial equivalente que depende de la historia de carga y de la ley de endurecimiento o ablandamiento del material en términos de la deformación plástica equivalente, así:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}^p) = F(\boldsymbol{\sigma}) - \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^p) \leq 0 \quad (4)$$

En particular, el modelo presentado utiliza una función de fluencia definida por Hu y Schnobrich (Hu & Schnobrich 1989), a partir de la experimentación en paneles de concreto simple, para estados planos de esfuerzos. En dicho trabajo se establecen comportamientos diferentes para los estados de esfuerzos principales de tracción biaxial ( $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$ ), compresión biaxial ( $\sigma_1 < 0, \sigma_2 < 0$ ) y tracción – compresión ( $\sigma_1 > 0, \sigma_2 < 0$ ).

Para un estado de tracción biaxial, es decir si  $\sigma_1 > 0$  y  $\sigma_2 > 0$ , la función de fluencia  $f = F - \bar{\sigma} \leq 0$  está conformada por las funciones:

$$F = c_1 \left( \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{(1+\alpha)}{\alpha} \tau_{oct} + \frac{3}{2} \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \sigma_m \right) \quad , \quad \bar{\sigma} = \sigma_{yc} \quad (5)$$

$$c_1 = 1 - 0.4019 \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) + 0.008913 \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^2 \quad , \quad \sigma_1 \geq \sigma_2$$

El esfuerzo medio, el esfuerzo octaédrico y la relación de resistencias a tracción y compresión corresponden a:

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad , \quad \tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \quad , \quad \alpha = \frac{\sigma_{yt}}{\sigma_{yc}} \quad (6)$$

Se observa que el esfuerzo uniaxial equivalente es igual al esfuerzo máximo a compresión del material  $\sigma_{yc}$  y por lo tanto no evoluciona con respecto a la deformación plástica equivalente.

Para un estado de esfuerzos denominado tracción – compresión, en el cual  $\sigma_1 > 0$  y  $\sigma_2 < 0$ , la función de fluencia  $f = F - \bar{\sigma}$  es igual a:

$$f = F - \bar{\sigma} = c_2 \left( \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{(1+\alpha)}{\alpha} \tau_{oct} + \frac{3}{2} \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \sigma_m \right) - \bar{\sigma} \leq 0$$

$$c_2 = \begin{cases} 1 - 0.02886 \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) - 0.006657 \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^2 - 0.0002443 \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^3 & \text{si } \frac{\sigma_1}{\sigma_2} < -0.103 \\ 1 + 6.339 \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) + 68.82 \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^2 + 183.8 \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^3 & \text{si } \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \geq -0.103 \end{cases} \quad (7)$$

El esfuerzo uniaxial equivalente  $\bar{\sigma}$  es definido más adelante con las expresiones (10) y (11), en función de la deformación uniaxial equivalente.

Para un estado de esfuerzos de compresión biaxial, en el cual los esfuerzos principales son  $\sigma_1 < 0$  y  $\sigma_2 < 0$ , se considera ablandamiento del material durante la etapa de plástica, de tal forma que la función de fluencia  $f = F - \bar{\sigma}$  es igual a:

$$f = F - \bar{\sigma} = c_3 \left( \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{(2\beta-1)}{\beta} \tau_{oct} + 3 \frac{(\beta-1)}{\beta} \sigma_m \right) - \bar{\sigma} \leq 0$$

$$c_3 = 1 - 0.05848 \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) - 0.05848 \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^2 \quad \beta = 1.16 \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \quad (8)$$

La función de fluencia de Hu y Schnobrich determina la evolución de la superficie de fluencia durante el comportamiento inelástico del material, a través de una función no lineal uniaxial equivalente del esfuerzo  $\bar{\sigma}$  y la deformación  $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}^e + \bar{\epsilon}^p$ . Considerando iguales al módulo de elasticidad inicial y al módulo de elasticidad secante cuando  $\bar{\sigma} = \sigma_{yc}$  se tiene la siguiente expresión del esfuerzo uniaxial equivalente en compresión:

$$\bar{\sigma} = \frac{E_0 \bar{\epsilon}}{1 + (R-1) \left( \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon}_0} \right) - (2R-1) \left( \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon}_0} \right)^2 + R \left( \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon}_0} \right)^3} \quad (9)$$

$$R = \frac{(R_\sigma - 1)}{(R_\epsilon - 1)^2} - \frac{1}{R_\epsilon}, \quad R_\sigma = \frac{\sigma_{yc}}{\bar{\sigma}_f}, \quad R_\epsilon = \frac{\bar{\epsilon}_f}{\bar{\epsilon}_0}, \quad E_0 = \frac{\sigma_{yc}}{\bar{\epsilon}_0}$$

Siendo  $\bar{\sigma}_f$  y  $\bar{\epsilon}_f$  el esfuerzo y la deformación al final de la rama de ablandamiento de la curva entre el esfuerzo y la deformación uniaxial equivalente del material  $\bar{\sigma} - \bar{\epsilon}$ . Dada la dificultad en la obtención de estos parámetros del material experimentalmente, se supone que  $R_\sigma = R_\epsilon = 4$ , como lo propone Elwi y Murray (1979). La expresión del esfuerzo uniaxial equivalente en compresión se reduce a:

$$\bar{\sigma} = \Xi E_0 \bar{\varepsilon} \quad \text{donde} \quad \Xi = \left[ 1 - \frac{11}{12} \left( \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}_0} \right) + \frac{10}{12} \left( \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}_0} \right)^2 + \frac{1}{12} \left( \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}_0} \right)^3 \right]^{-1} \quad (10)$$

Como lo ilustra la **Figura 1(a)**, la curva  $\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})$  no es exactamente lineal antes de alcanzar el esfuerzo máximo a compresión  $\sigma_{yc}$ . Sin embargo, en el modelo implementado se ha considerado una relación lineal explícita en este rango, de tal forma que:

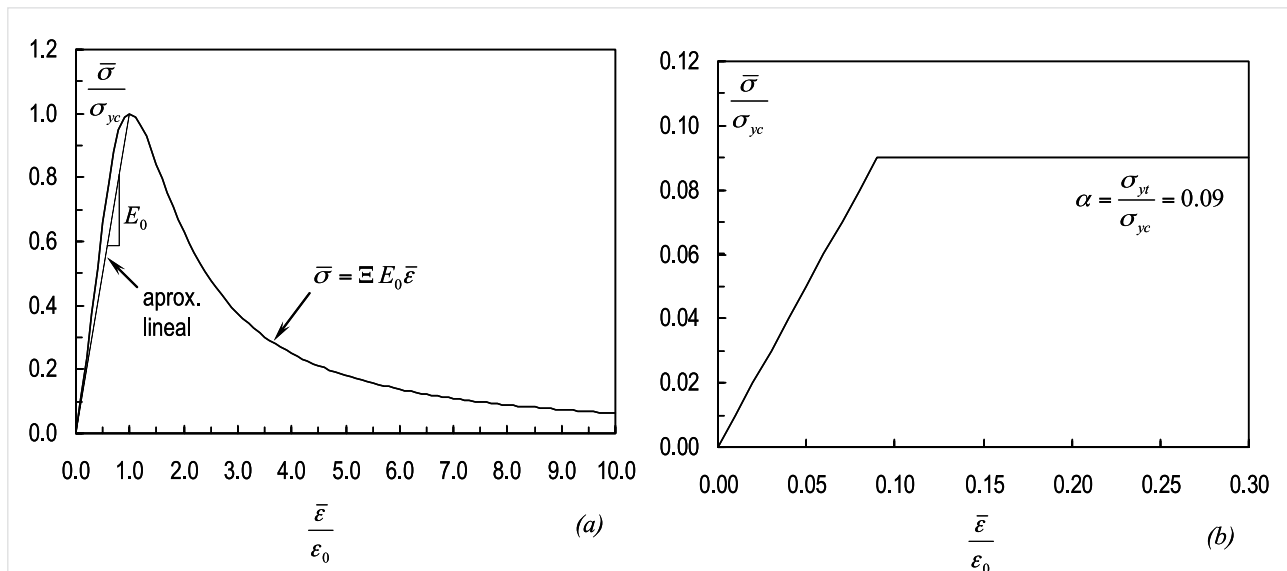
$$\bar{\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{\varepsilon} \leq \bar{\varepsilon}_0 \\ \Xi E_0 \bar{\varepsilon} & \text{si } \bar{\varepsilon} > \bar{\varepsilon}_0 \end{cases} \quad (11)$$

El módulo de elasticidad tangente de la relación entre el esfuerzo y la deformación uniaxial equivalente corresponde a:

$$E_t = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}} = E_0 \left[ 12 - 10 \left( \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}_0} \right)^2 - 2 \left( \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}_0} \right)^3 \right] \left[ 1 - 11 \left( \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}_0} \right) + 10 \left( \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}_0} \right)^2 + \left( \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}_0} \right)^3 \right]^{-1} \quad (12)$$

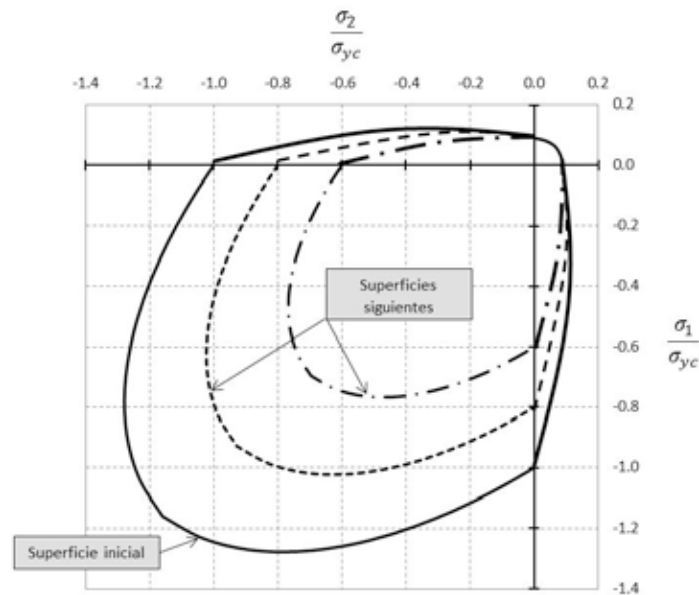
Por otro lado se considera una relación bilineal entre el esfuerzo y la deformación uniaxial equivalente en tracción, dividida por el esfuerzo máximo a tracción  $\sigma_{yt} = \alpha \sigma_{yc}$  como se indica en la **Figura 1(b)**. Hu y Schnobrich proponen que la superficie de fluencia en tracción biaxial no evolucione durante rango inelástico, en consecuencia la pendiente del segundo tramo de la curva es cero, conservando a  $\bar{\sigma} = \sigma_{yt}$ .

El comportamiento real a tracción del concreto y los modelos de fractura cohesiva, entre otros (Bazant & Oh 1983, Graffe & Linero 2010), muestran una rápida reducción del esfuerzo resistente después de alcanzada el esfuerzo máximo a tracción. Sin embargo, es válida la hipótesis del párrafo anterior cuando se intentan representar estados de esfuerzo donde se impone la compresión.



**Figura 1.** Relación entre el esfuerzo y la deformación uniaxial equivalente: (a) compresión y (b) tracción

La función de fluencia en el espacio de los esfuerzos principales  $\sigma_1 - \sigma_2$  se representa mediante una superficie de fluencia inicial que encierra los estados de esfuerzo en el rango elástico, la cual se reduce progresivamente con la evolución de la carga en el rango inelástico, como lo indica la **Figura 2**.



**Figura 2.** Evolución de la superficie de fluencia del modelo presentado en el espacio de los esfuerzos principales en condición plana de esfuerzos

El módulo de endurecimiento – ablandamiento plástico en compresión  $H$  está definido por la variación del esfuerzo uniaxial equivalente con respecto a la deformación plástica equivalente, es decir:

$$H(\bar{\varepsilon}^p) = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \quad (13)$$

De acuerdo con la descomposición aditiva de la deformación y con la definición del módulo de elasticidad tangente uniaxial, se tiene que:

$$\frac{d\bar{\varepsilon}}{d\bar{\sigma}} = \frac{d\bar{\varepsilon}^e}{d\bar{\sigma}} + \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{d\bar{\sigma}} \rightarrow \frac{1}{E_t} = \frac{1}{E_0} + \frac{1}{H} \rightarrow H(\bar{\varepsilon}^p) = \frac{E_0 E_t(\bar{\varepsilon}^p)}{E_0 - E_t(\bar{\varepsilon}^p)} \quad (14)$$

Las condiciones de carga y descarga establecen que para un estado de carga plástica, si  $\gamma > 0$  entonces  $\gamma \dot{f} > 0$  para  $\dot{f} = 0$ , y en consecuencia  $\dot{f} = 0$ .

A partir de la relación entre los tensores de esfuerzo y de deformación elástica se puede definir la siguiente ecuación constitutiva secante:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (15)$$

donde  $\mathbf{C}$  es el tensor constitutivo elástico del material.

Después de derivar la función de fluencia en el tiempo y de realizar los reemplazos correspondientes se obtiene el *multiplicador plástico* y la *ecuación constitutiva tangente* de la forma:

$$\gamma = \frac{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}}{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + H} > 0 \quad (16)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^{\text{tan}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{siendo} \quad \mathbf{C}^{\text{tan}} = \mathbf{C} - \frac{\mathbf{C} : \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}}{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - H} \quad \text{si } \gamma > 0 \quad \wedge \quad \mathbf{C}^{\text{tan}} = \mathbf{C} \quad \text{si } \gamma = 0 \quad (17)$$

donde  $\mathbf{C}^{\text{tan}}$  y  $\mathbf{C}$  son los tensores constitutivos elástico y tangente, respectivamente. Se puede observar que el tensor  $\mathbf{C}^{\text{tan}}$  es simétrico si la función  $G$  es igual o proporcional a la función  $F$ , lo cual se denomina modelo con regla de flujo asociada.

El modelo presentado tiene una regla de flujo no asociada, es decir, la función de potencial plástico es diferente a la función de fluencia y en consecuencia  $g \neq f$  y  $G \neq F$ . La función de potencial seleccionada corresponde a la función de fluencia de von Mises en condición plana de esfuerzos, escrita como:

$$g(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\sigma}) = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{oct} - \bar{\sigma} = 0 \quad , \quad G(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{oct} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \quad (18)$$

Al utilizar una regla de flujo no asociada no se satisfacen los postulados de Drucker (Drucker 1950, Drucker 1951) sobre estabilidad local del material, sin embargo tales condiciones no son estrictamente necesarias (Mroz 1963) y si permiten obtener resultados derivados de los ensayos experimentales.

Como lo indica la Ecuación (17), el tensor constitutivo tangente  $\mathbf{C}^{\text{tan}}$  depende, entre otros, de dos tensores de segundo orden resultantes de la derivada parcial de función de potencial plástico  $G$  y de la función de fluencia  $F$  con respecto al tensor de esfuerzos. A partir la función de potencial plástico de la Ecuación (18), se calcularon las componentes del tensor  $\partial G / \partial \boldsymbol{\sigma}$  en función de los esfuerzos principales  $\sigma_1, \sigma_2$ . De igual forma, dada la función de fluencia para estados de esfuerzo de tracción biaxial, tracción – compresión y compresión biaxial, expresada en las ecuaciones (5), (7) y (8), respectivamente, se obtuvieron las componentes del tensor  $\partial F / \partial \boldsymbol{\sigma}$  en términos de  $\sigma_1, \sigma_2$  (Rodríguez-Fajardo 2011).

### 3. Implementación del modelo numérico en el método de los elementos finitos

En este trabajo se incluyeron las subrutinas de un nuevo modelo constitutivo de material al código del programa de análisis no lineal por elementos finitos HYPLAS (de Souza Neto et al., 2008), siguiendo un esquema de integración implícito.

La solución numérica implementada considera estado plano de esfuerzos, deformaciones infinitesimales y cargas estáticas.

Dadas las componentes de deformación y las variables internas en un punto de integración en el interior de un elemento finito, una de las subrutinas del modelo constitutivo calcula las componentes de esfuerzo y otra obtiene los coeficientes del tensor constitutivo tangente en notación de Voigt.

#### 4. Validación del modelo mediante la simulación numérica del ensayo de paneles de concreto

Kupfer y otros (Kupfer et al., 1969) ensayaron un grupo de paneles cuadrados de concreto simple de 0.20m de lado y 0.05m de espesor, sometidos a diferentes estados de carga distribuida paralela a su plano como lo indica la Figura 3. El concreto tiene las siguientes propiedades: módulo de Young  $E_c = 20.97 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ , relación de Poisson  $\nu = 0.20$ , esfuerzo máximo a compresión  $\sigma_{yc} = 28.98 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$  y una relación entre esfuerzos máximos de tracción y compresión  $\alpha = \sigma_{yt} / \sigma_{yc} = 0.09$ . Algunos de estos ensayos fueron simulados con el modelo numérico propuesto.

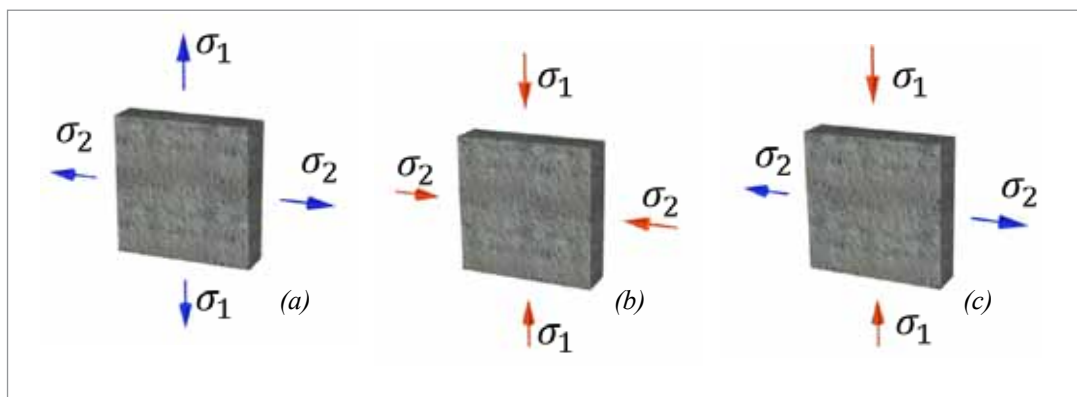
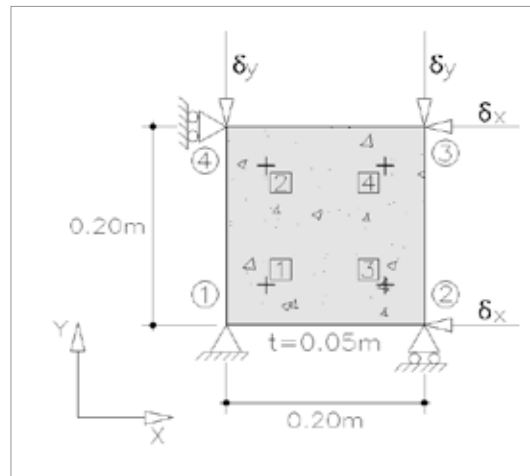


Figura 3. Paneles de concreto simple sometidos a: (a) tracción biaxial, (b) compresión biaxial y (c) tracción – compresión

Las cargas aplicadas producen una distribución homogénea del campo del esfuerzo sobre el panel. Por esta razón se simuló el problema con una malla de un elemento finito cuadrilateral lineal de 4 nudos, en el cual se restringe el desplazamiento en la dirección  $x$  en la cara izquierda y el desplazamiento en dirección  $y$  sobre la cara inferior, como lo indica la Figura 4.

A cambio de presiones sobre las caras del elemento, se aplican desplazamientos iguales en cada dirección con el fin de evitar dificultades en la convergencia de la solución numérica cuando la respuesta estructural exhibe ablandamiento. Los desplazamientos se imponen en la misma dirección y proporción que tienen los esfuerzos en una cara con respecto a la cara adyacente. Los apoyos se ubican en los nudos y se disponen de manera tal que permiten la libre expansión o contracción del elemento.





**Figura 4.** Malla de un elemento finito cuadrilateral lineal, condiciones de contorno y acciones aplicadas

Los desplazamientos son aplicados gradualmente en pequeños incrementos simulando la carga gradual de los ensayos de laboratorio.

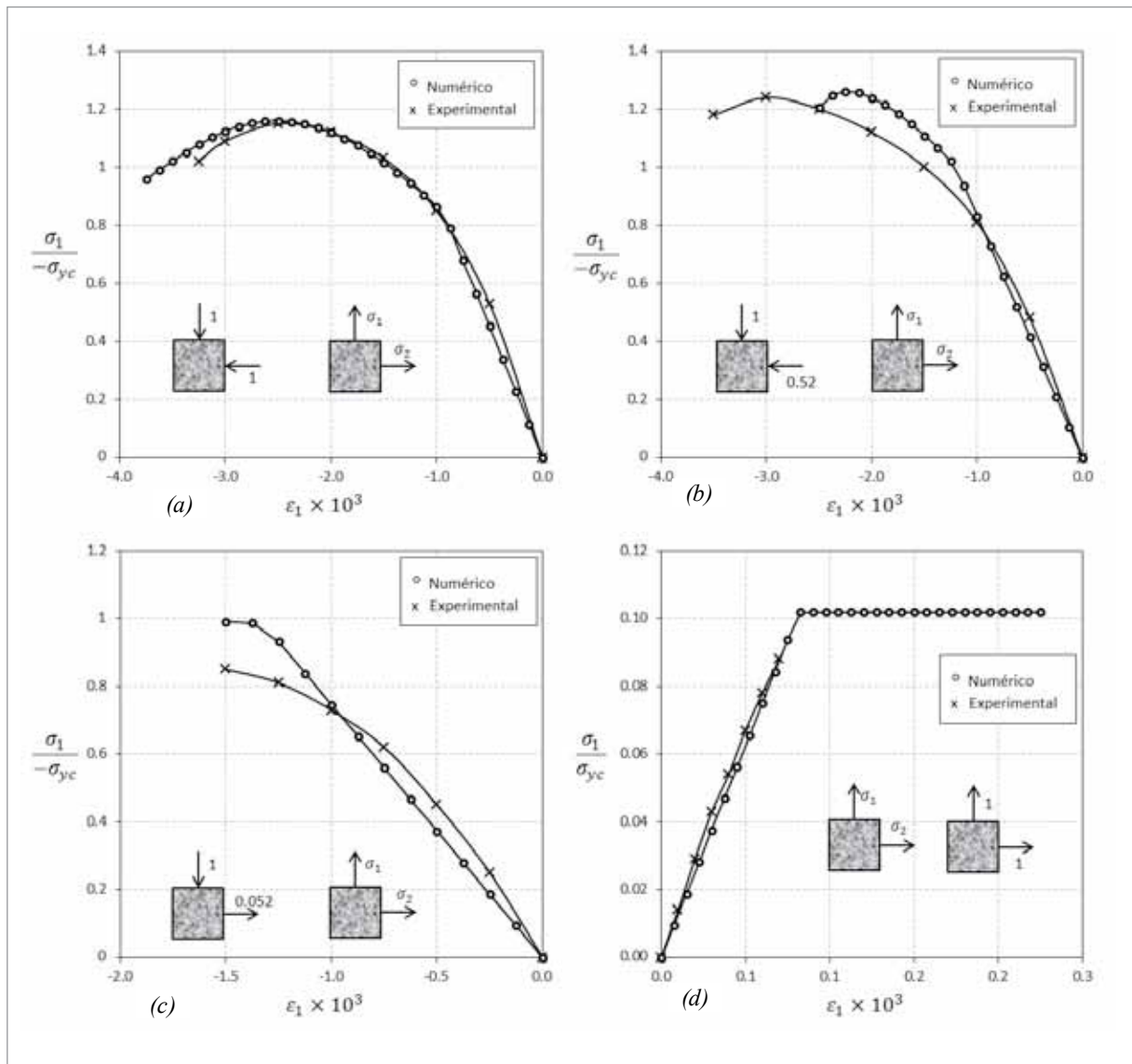
La simulación numérica de los diferentes ensayos experimentales se realizó con la misma malla, modificando solamente los desplazamientos impuestos. La relación entre el desplazamiento aplicado verticalmente en los nudos 3 ó 4 con respecto al desplazamiento horizontal aplicado en los nudos 2 ó 3, determinará el estado de esfuerzos en cada ensayo.

La **Tabla 1** indica los ensayos experimentales que fueron simulados con el modelo numérico propuesto.

**Tabla 1.** Ensayos experimentales que fueron simulados con el modelo propuesto

Referencia/Reference	Estado de esfuerzo/Stress status	$\delta_y/\delta_x = \delta_1/\delta_2$
S-1	Compresión biaxial/Biaxial compression	-1.00 / -1.00
S-2	Compresión biaxial/ Biaxial compression	-1.00 / -0.52
S-3	Tracción - Compresión/Tensile - compression	-1.00 / -0.052
S-4	Tracción biaxial/ Biaxial tensile	+1.00 / +1.00

La Figura 5(a) indica la relación entre el esfuerzo normal y la deformación longitudinal en dirección y cuando se aplican desplazamientos iguales que generan compresión en las direcciones x y y. Los resultados numéricos muestran una relación lineal hasta el 80% aproximadamente del esfuerzo máximo de compresión. A partir de este nivel de esfuerzos comienza un comportamiento no lineal dividido en una rama ascendente hasta  $1.2\sigma_{yc}$  y otra descendente que representa el ablandamiento por deformación. Se observa que el resultado numérico coincide aproximadamente con el resultado experimental de Kupfer y otros (Kupfer et al., 1969).



**Figura 5.** Relación entre esfuerzo normal y la deformación longitudinal en dirección 1 para diferentes estados de esfuerzos: (a) compresión biaxial -1.00/-1.00, (b) compresión biaxial -1.00/-0.52, (c) tracción – compresión -1.00/+0.052 y (d) tracción biaxial +1.00/+1.00

En la Figura 5 (b) se indica la relación  $\sigma_1/\sigma_{yc} - \epsilon_1$  para un panel sometido a desplazamientos que generan compresión uniforme en dirección x 0.52 veces la compresión uniforme en y. Se observa un comportamiento lineal inicial similar al experimental y una respuesta más rígida del modelo numérico en la rama no lineal, sin embargo el esfuerzo máximo es aproximadamente igual al obtenido experimentalmente.

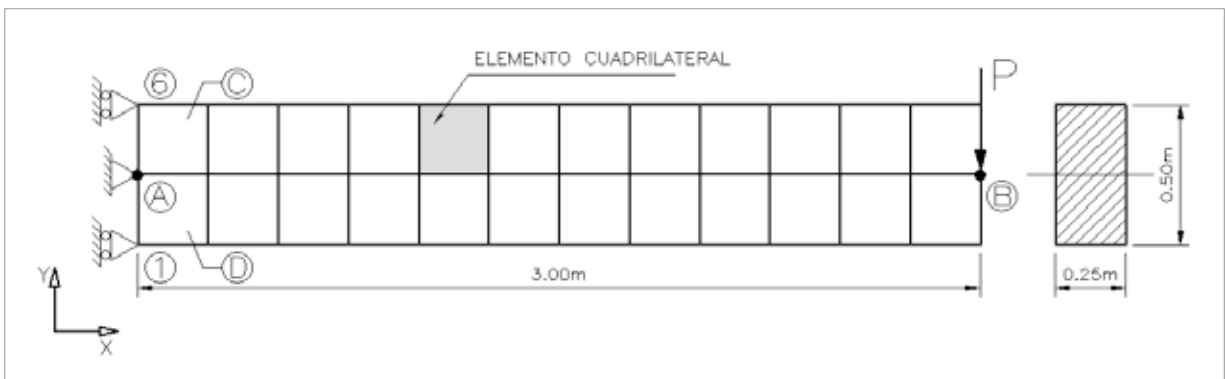
En la Figura 5 (c) se presenta la relación  $\sigma_1/\sigma_{yc} - \epsilon_1$  para un panel sometido a desplazamientos que generan compresión uniforme en dirección x 0.052 veces la tracción uniforme en y. La relación lineal inicial de la curva del modelo numérico es diferente al comportamiento experimental. El esfuerzo máximo obtenido de la modelación y de la experimentación difiere en un 20%, debido entre otros factores, a que no se están teniendo en cuenta fenómenos de fractura.

De la modelación numérica de un panel sometido a tracción biaxial uniforme y de igual magnitud se indica lo siguiente. El resultado obtenido del modelo es aproximadamente igual al resultado experimental como lo muestra la Figura 5(d). El modelo constitutivo supone un comportamiento plástico perfecto después de alcanzado el esfuerzo máximo a tracción, por esta razón se tiene una respuesta estructural hasta un nivel de deformación más alto comparado con el resultado experimental.

## 5. Aplicación del modelo en vigas a flexión

Una viga de longitud de 3.00m y una sección transversal rectangular de 0.25m de base por 0.50m de alto, está sometida a una carga en el extremo derecho. El material de la viga se representa con el modelo constitutivo introducido y tiene las siguientes propiedades mecánicas: módulo de Young  $E_c = 36 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ , relación de Poisson  $\nu=0.19$ , esfuerzo máximo a compresión  $\sigma_{yc} = 23950 \text{ kN/m}^2$  y relación entre el esfuerzo máximo a tracción y a compresión  $\alpha = 0.09$ .

El problema se simplifica a un estado plano de esfuerzos utilizando una malla de 24 elementos finitos cuadrilaterales lineales, como se ilustra en la Figura 6.



**Figura 6.** Viga en voladizo sometida a una carga puntual. Malla de elementos finitos

**Figure 6.** Cantilever beam subject to point load. Finite elements mat

La carga en el extremo de la viga  $P$  evoluciona desde un valor inicial de cero como se indica en la Figura 7. Primero la carga se aplica en dirección y negativa superando la deformación de fluencia en el sector con mayor momento (fibras del extremo superior próximas al apoyo). Posteriormente la carga disminuye hasta invertir el sentido y causar deformación de fluencia nuevamente (ahora en las fibras inferiores próximas al apoyo). Finalmente la carga disminuye a cero.

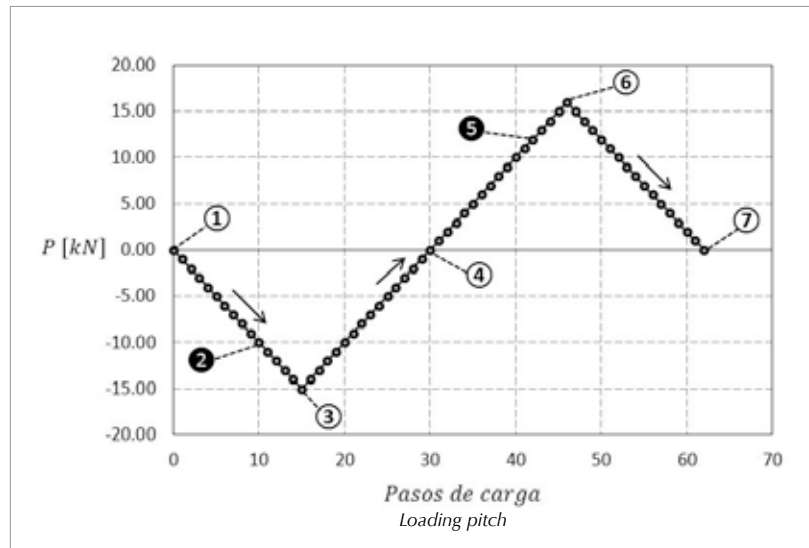


Figura 7. Viga en voladizo sometida a una carga puntual. Historia de la carga

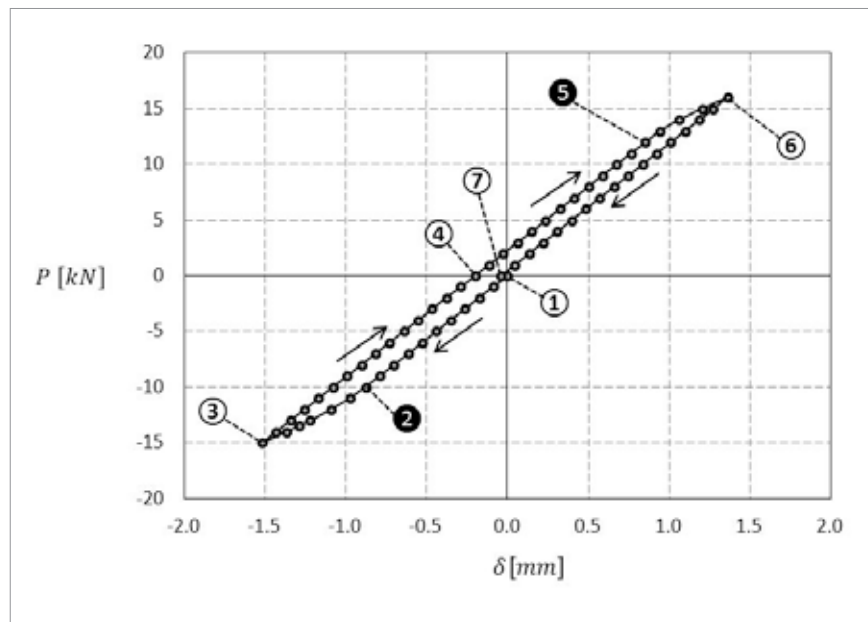


Figura 8. Viga en voladizo sometida a una carga puntual. Relación entre la carga puntual aplicada y el desplazamiento vertical en el extremo derecho.

La Figura 8 ilustra la relación entre la carga puntual aplicada y el desplazamiento vertical en el extremo derecho de la viga. Los puntos resaltados con los numerales 1 al 7 en la curva, hacen referencia a pasos de carga representativos. En el intervalo delimitado por los instantes 1 y 2, el comportamiento de todos los puntos materiales de viga es elástico lineal. Superado el instante 2 se presenta fluencia por tensión en las fibras superiores cercanas al empotramiento. En el intervalo de 2 a 3 la carga continúa aumentando en un proceso de carga plástica.

Posteriormente se realiza una descarga elástica en el intervalo delimitado entre los puntos 3 y 4. Esta descarga muestra la misma pendiente de la carga en rango elástico. En el instante 4 se observa que la carga aplicada es cero pero ha quedado un desplazamiento permanente aproximadamente igual a 0.2mm en el extremo de la viga. Del instante 4 al 5 la carga aumenta en sentido contrario, realizando una recarga en rango elástico. A continuación, entre los puntos 5 y 6 la carga se incrementa aún más, generando un proceso de carga plástica a tracción en las fibras inferiores de la viga, cercanas al empotramiento. Del punto 6 al 7 se descarga elásticamente hasta carga cero. En el instante 7 se observa un desplazamiento permanente en el extremo de la viga.

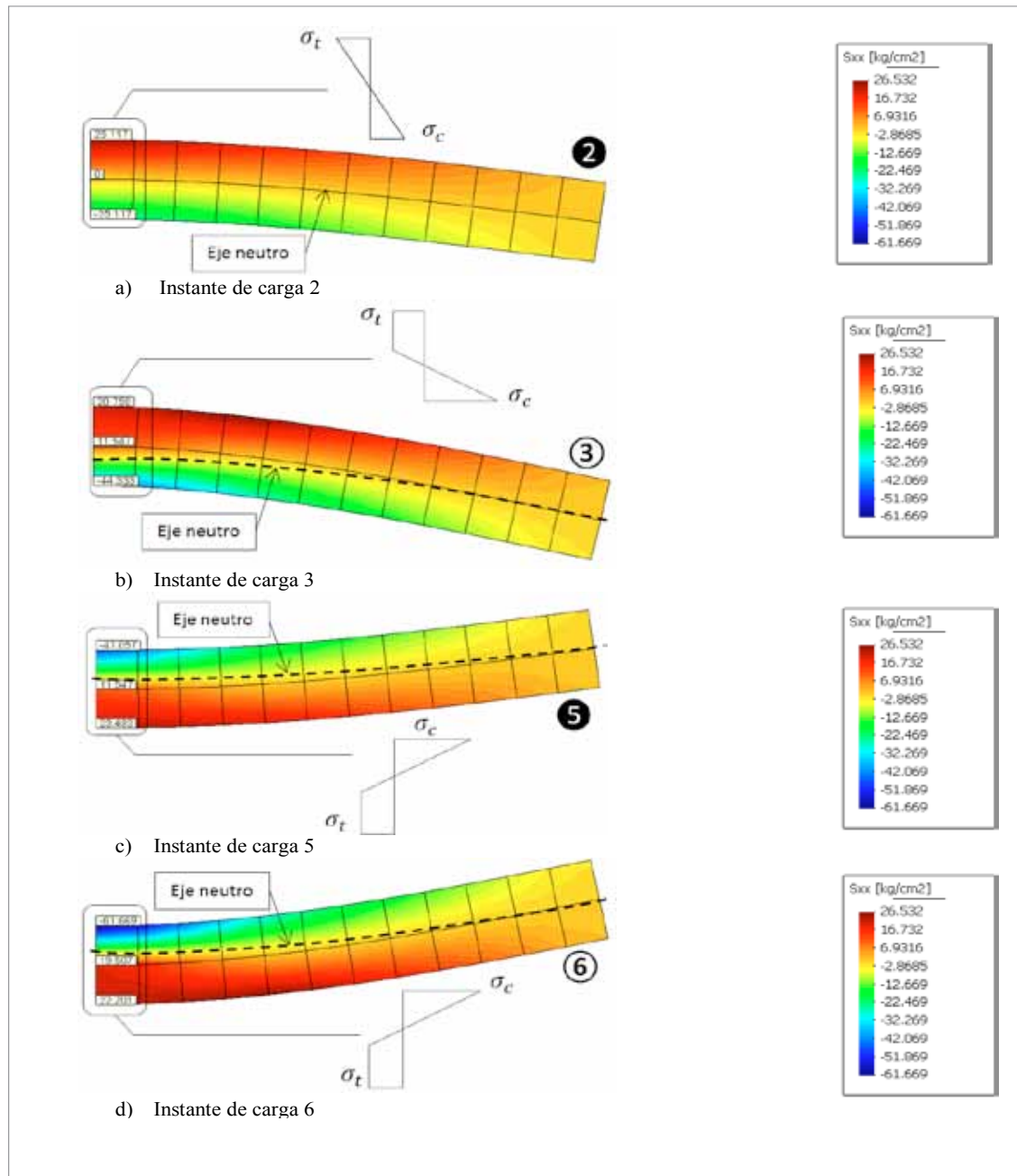
A pesar del ablandamiento que indica el comportamiento del material después del límite elástico a tracción, la curva carga – desplazamiento exhibe una pendiente positiva en la etapa de carga inelástica. Lo anterior se debe a que la zona de la viga sometida a compresión conserva un comportamiento elástico dado el factor  $\alpha$ .

En la Figura 9 se muestra la distribución de la componente de esfuerzo normal en dirección  $x$  sobre toda la viga. Se observa una respuesta estructural elástica de la viga entre los pasos 1 y 2, donde los esfuerzos son simétricos respecto al eje neutro localizado en el eje centroidal de la viga. En este intervalo también se observa una distribución de esfuerzos que se incrementa linealmente conforme los puntos se alejan del eje neutro de la viga.

En el paso de carga 3 se presenta deformación de fluencia en tracción en las fibras superiores de la viga cercanas al empotramiento. Debido a las propiedades de ablandamiento del material, el esfuerzo en las zonas donde se presentan deformaciones plásticas disminuye progresivamente. En este paso de carga la distribución de esfuerzos en las secciones cercanas al empotramiento no es lineal y el eje neutro se desplaza hacia abajo para mantener el equilibrio de esfuerzos en cada sección transversal. A pesar del aumento de la carga aplicada, las zonas de la viga sometidas a un esfuerzo a tracción conservan un valor constante después de alcanzado el límite elástico. En consecuencia el eje neutro se desplaza hacia abajo, aumentando el área de la sección transversal sometida a esfuerzos de tracción en la parte superior que equilibran los esfuerzos de compresión en la parte inferior de la sección. Los esfuerzos de compresión aumentan conforme aumenta la carga en el voladizo debido a que el límite elástico en este rango no es superado.

Posteriormente cuando la carga en el extremo libre de la viga cambia de sentido, las fibras sometidas a esfuerzos de tensión son las de la cara inferior de la viga. En el instante de carga 5 mostrado en la Figura 9(c), se observa el cambio en la distribución del esfuerzo durante el proceso de carga plástica.

En el instante 6 se aprecia el mismo efecto descrito para el instante 3. El esfuerzo a tracción en cara inferior cercano al empotramiento decrecen conforme se incrementa la carga en el extremo libre de la viga debido al ablandamiento del material. El eje neutro de la viga ahora se desplaza hacia la parte superior debido a que el esfuerzo normal a tracción se reduce en la parte inferior de la viga cercana al voladizo y por lo tanto se requiere una mayor área de la sección con esfuerzos de tracción en la parte inferior para equilibrar los grandes esfuerzos de compresión que ocurren en la parte superior de la viga.



**Figura 9.** Viga en voladizo sometida a una carga puntual. Distribución de la componente de esfuerzo normal en dirección x para los pasos de carga representativos

## 6. Conclusiones

Al considerar una relación lineal inicial entre el esfuerzo y la deformación uniaxial equivalente del modelo de Hu y Schnobrich, se simplifica la implementación del modelo propuesto sin que esto signifique un sacrificio en el ajuste de los resultados al ser comparados con datos experimentales.

En este trabajo se formuló e implementó un algoritmo de integración implícito del modelo de Hu y Schnobrich, en el marco del análisis no lineal con elementos finitos, con el cual se satisfacen las condiciones de equilibrio en cada paso de carga.

Si se establecen incrementos del desplazamiento a cambio de incrementos de carga mediante el método de Newton – Raphson, se logra convergencia numérica con pocas iteraciones en problemas donde el desplazamiento aumenta y la carga aplicada decrece. También se observó que controlando la carga o el desplazamiento utilizando el método de longitud de arco se obtiene convergencia numérica de la solución en pocas iteraciones.

El modelo constitutivo implementado usa una regla de flujo no asociada, que produce tensores constitutivos tangentes no sean simétricos y a su vez también la matriz de rigidez de la estructura no sea simétrica. Lo anterior genera un costo computacional mayor, sin embargo se obtienen resultados más cercanos a los experimentales en comparación con los resultados del modelo con regla de flujo asociada.

De acuerdo con los resultados obtenidos con el modelo implementado, se observa que el mejor ajuste se obtiene para el rango de compresión biaxial y tensión biaxial. Para el rango de tensión – compresión no tiene el mismo nivel de concordancia con los resultados experimentales debido a que el modelo no contempla fenómenos propios del concreto como la fractura.

Para tensión biaxial, el modelo seleccionado, un comportamiento de plasticidad perfecta. Esto con el fin de evitar inestabilidad numérica en la solución, dada cuando decrece rápidamente el esfuerzo con el aumento de la deformación.

El modelo numérico propuesto combina el fundamento matemático de la teoría de la plasticidad con una aproximación empírica de la función de fallo del concreto. Lo anterior conlleva a resultados de la simulación numérica que representan adecuadamente el comportamiento mecánico del concreto, principalmente para estados de esfuerzo de compresión biaxial, en los cuales fenómenos como la fractura no inciden de manera directa en el comportamiento.

## 7. Agradecimientos

Los autores agradecen la financiación otorgada por la Dirección de Investigación de la Sede de Bogotá de la Universidad Nacional de Colombia a través del proyecto DIB-8849.

## 8. Referencias/References

- Babu R., Benipal G. & Singh A. (2005)**, Constitutive modelling of concrete: an overview. *Asian Journal of Civil Engineering (Building and Housing)*, 6, 211-246.
- Bazant Z. & Oh B. (1983)**, Crack band theory for fracture of concrete. *Materials and Structures*, 16, 155-177.
- CIMNE (2008)**, GiD - The personal pre and post processor, Barcelona, International Center of Numerical Method in Engineering.
- Chen A. C. T. & Chen W. F. (1975)**, Constitutive relations for concrete. *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, 101, 465-481.
- Chen W. F. & Han D. J. (2007)**, *Plasticity for structural engineering*, New York, J. Ross.
- De Souza Neto E. A., Peric D. & Owen D. R. J. (2008)**, *Computational Methods for Plasticity*, West Sussex, Wiley.
- Drucker D. C. (1950)**, Some implications of work hardening and ideal plasticity. *Quarterly of Applied Mathematics*, 7, 411-418.
- Drucker D. C. (1951)**, A more fundamental approach to plastic stress-strain relations. *First U.S. National Congress of Applied Mechanics*. ASME.
- Elwi A. A. & Murray D. W. (1979)**, A 3D Hypoelastic Concrete Constitutive Relationship. *ASCE Journal*, 105, 623-641.
- Fenestra P. H. & de Borst R. (1996)**, A composite plasticity model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 33, 707-730.



- Graffe R. D. & Linero D. L. (2010)**, Simulación numérica del proceso de fractura en modo I de vigas de concreto con trayectoria de fisuración conocida mediante un modelo discreto de fisura cohesiva. *Revista Ingeniería de Construcción*, 25, 399-418.
- Grassl P., Lundgren K. & Gyltoft K. (2002)**, Concrete in compression: A plasticity theory with novel hardening law. *International Journal of Solids and Structures*, 39, 5205-5223.
- Han D. J. & Chen W. F. (1987)**, Constitutive modelling in analysis of concrete structures. *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, 113, 577-593.
- Hsieh S. S., Ting E. C. & Chen W. F. (1982)**, A plasticity-fracture model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 113, 577-593.
- Hu H. T. & Schnobrich W. (1989)**, Constitutive Modeling of Concrete by Using Nonassociated Plasticity *Journal of Material of Civil Engineering*, 1.
- Imran I. & Pantazopoulou S. J. (2001)**, Plasticity model for concrete under triaxial compression. *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, 127, 281-290.
- Kupfer H., Hilsdorf H. K. & Rusch H. (1969)**, Behavior of concrete under biaxial stress. *ACI Journal*, 66, 656-666.
- Linero D. L. & Garzón-Alvarado D. A. (2010)**, Elementos de la mecánica del medio continuo para cuerpos sólidos. Volumen 1: Temas Básicos, Bogotá, Universidad Nacional de Colombia.
- Menetrey P. H. & Willam K. J. (1995)**, Triaxial failure criterion for concrete and its generalization. *ACI Structural Journal*, 92, 311-318.
- Mroz Z. (1963)**, Non-associated Flow Laws in Plasticity. *Journal de Mecanique*, 2, 21-42.
- Ohtami Y. & Chen W. F. (1988)**, Multiple hardening plasticity for concrete materials. *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, 114, 1890-1910.
- Oñate E., Oller S., Oliver J. & Lubliner J. (1988)**, A constitutive model for cracking of concrete based on the incremental theory of plasticity. *Engineering Computations*, 5, 309-319.
- Ottosen N. S. (1977)**, A failure criterion for concrete. *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, 103, 527-535.
- Rodríguez-Fajardo L. E. (2011)**, Modelación numérica del concreto simple con elementos finitos usando un modelo constitutivo de Plasticidad. Maestría en Ingeniería - Estructuras, Facultad de Ingeniería. Bogotá, Universidad Nacional de Colombia.
- Simó J. C. & Hughes T. J. R. (1998)**, *Computational Inelasticity*, Stanford, Springer.
- Willam K. J. & Warnke E. P. (1974)**, Constitutive model for triaxial behaviour of concrete. *Concrete Structures Subjected to Triaxial Stress*. Bergamo, Italy, International Association for Bridges and Structural Engineering.